

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**
(ДГТУ)

На правах рукописи

ПРОЦЕНКО СОФЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРИБРЕЖНЫХ
СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

Специальность: 05.13.18 – математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Сухинов А.И.

Ростов-на-Дону, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ДВИЖЕНИЕ ВОЛН В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕКТОВ ПРИБРЕЖНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ	12
1.1. Теоретические аспекты гидродинамических волновых процессов, характеристики гравитационных волн	12
1.2. Обзор исследований теории гидродинамических волновых процессов	17
1.3. Влияние берегозащитных сооружений на дифракцию и отражение волн	30
Краткие выводы по главе 1	35
ГЛАВА 2. Структура и параметризация вертикального турбулентного обмена для 3D моделей гидродинамики мелководных водоемов	36
2.1. Вертикальная структура процессов турбулентного перемешивания в водоемах	36
2.2. Подходы к численному моделированию процессов турбулентного перемешивания	43
2.3. Моделирование турбулентного обмена на основе обработки данных натуральных наблюдений профилей скорости движения водного потока в мелководном водоеме	49
2.4. Анализ результатов параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена средствами математической статистики	56
Краткие выводы по главе 2	61
ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМ	62
3.1. Трехмерная математическая модель гидродинамики мелководных водоемов	62
3.2. Устойчивость трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов	72

3.3. Консервативность трехмерной дискретной математической модели движения водной среды.....	75
3.4. Модель силового воздействия волн на берегозащитные сооружения	79
3.5. Модель расчёта зон загрязнения взвесью при наличии волновых процессов	88
Краткие выводы по главе 3	92
ГЛАВА 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ АДАПАТИВНОГО ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО МЕТОДА.....	93
4.1. Адаптивный попеременно треугольный итерационный метод решения сеточных уравнений	93
4.2. Симметризованный адаптивный попеременно-треугольный итерационный метод.....	95
4.3. Параллельная реализация АПТИМ на основе декомпозиции расчетной области по двум пространственным направлениям	102
Краткие выводы по главе 4	110
ГЛАВА 5. ПРОГРАМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМ с учетом берегозащитных сооружений.....	111
5.1. Описание программного комплекса.....	111
5.2. Результаты численных экспериментов на основе построенного программного комплекса для модельных задач	126
5.3. Результаты численных экспериментов на основе построенного программного комплекса для объектов прибрежной инфраструктуры ...	130
5.4. Расчет зон загрязнения взвесью при наличии волновых процессов ..	137
Краткие выводы по главе 5	141
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	142
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	144

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Волновые процессы в прибрежных участках водоемов обуславливают изменение рельефа дна, оказывают силовое воздействие на берегозащитные сооружения, причалы и иные объекты береговой инфраструктуры. Оценка гидродинамического волнового влияния на берегозащитные установки и береговые сооружения, представляется важнейшей проблемой проектирования береговой инфраструктуры. Для описания предоставленных процессов необходимо создавать комплексы взаимосвязанных пространственно-трехмерных моделей гидродинамики, которые при пространственном разрешении в десятки-сотни метров предполагают решение вычислительно-трудоемких задач, включающих несколько десятков миллионов сеточных уравнений и более для многих тысяч шагов по времени, что приводит к необходимости построения параллельных алгоритмов, сохраняющих высокую вычислительную результативность для сотен тысяч вычислительных ядер.

Следует отметить, что, несмотря на обширные опытные и теоретические исследования, в области исследования специфических процессов, протекающих в береговом районе водоема, результативность предлагаемых подходов отличается от практически необходимой. Узкая сфера применимости моделей, построенных на базе лабораторных исследований, трудоемкость и сложность выполнения исследований в условиях реального моря и, как следствие, ограниченность данных натуральных измерений обуславливают сложность таких исследований.

Объект исследования – гидродинамические процессы в прибрежных системах.

Предметом исследования являются волновые гидродинамические процессы в прибрежных акваториях при наличии объектов прибрежной инфраструктуры.

Степень разработанности темы исследования. Проведенный анализ исследований концепции гидродинамических волновых процессов в Азовском море показал, что большинство существующих моделей возможно разбить на два класса: двумерные линейные и трехмерные нелинейные модели, базирующиеся на уравнениях мелкой воды: двумерная модель, созданная в Государственном океанографическом институте Н. Н. Зубова, трехмерная модель, исследованная в Гидрометцентре России, трехмерная модель INMOM, созданная в Институте вычислительной

математики РАН, модели, используемые в Морском гидрофизическом институте РАН: модифицированный вариант модели POM и модель ADCIRC, функционирующая в связке с волновой моделью SWAN, модели, используемые в ЮНЦ РАН: мультиком-партментальная балансовая модель и двухслойная модель гидродинамики водоемов.

В рамках теории длинных волн на основании результатов двумерного моделирования в работах Г. Г. Матишова, Ю. И. Инжебейкина исследуются свободные колебания уровня Азовского моря.

Ряд работ В. В. Фомина посвящен изучению стационарных течений в Азовском море с использованием трехмерной нелинейной модели динамики течений. Из современных публикаций по моделированию циркуляции выделяются численные исследования, проведенные А. Л. Чикиным, в которых применялись квазитрехмерные двухслойные модели гидродинамики мелководных водоемов и переноса примесей.

Исследования В. Е. Назайкинского посвящены разработке алгоритмов, позволяющих вычислять распространение фронта длинной волны, например, волны цунами, описываемой в приближении линеаризованных уравнений теории мелкой воды с учетом отражения от пологих берегов.

В работах И. Б. Петрова рассматриваются методы исследования математических моделей динамических систем, волновые и деформационные процессы. Для описания волновых процессов используются сеточно-характеристический метод, позволяющий корректно строить вычислительные алгоритмы на границах области интегрирования и контактных границах, а также гибридные сеточно-характеристические схемы.

В работах В. М. Головизнина, Б. Н. Четверушкина описывается новый подход к построению вычислительных алгоритмов нового поколения для задач вычислительной гидродинамики, объединяющий сильные стороны консервативных и характеристических разностных схем.

Проведенный анализ этих и других моделей показывает, что подавляющее большинство имеющихся подходов к построению моделей гидродинамических процессов в прибрежной зоне мелководных водоемов основывается на приближении мелкой воды, или в лучшем случае на гидростатическом приближении, которое не учитывает турбулентный теплообмен по вертикальному направлению. С другой стороны

имеющиеся опытные данные свидетельствуют о существенном влиянии этих процессов на гидрофизику береговой зоны, дислокацию солей и газовый режим. Поэтому построение, изучение и применение пространственно-трехмерных моделей гидродинамики, предусматривающих механизмы турбулентного обмена по вертикальной координате, представляется актуальной научной и важной прикладной проблемой.

Цель диссертационной работы – разработка, исследование и усовершенствование пространственно-трехмерной математической модели волновой гидродинамики, предназначенной для моделирования гидродинамических процессов при наличии объектов прибрежной инфраструктуры, основывающейся на согласовании аналитических, численных, экспериментальных подходов на основе расчетов и сравнений с использованием натуральных данных, а также создание комплекса программ, в том числе параллельных, для оперативного решения задачи.

В соответствии с поставленной целью необходимо решить следующие задачи.

1. Провести анализ теории гидродинамических волновых процессов, обзор существующих моделей гидродинамических волновых процессов с целью выявления недостатков существующих волновых моделей и обоснования актуальности построения пространственно-трехмерных моделей гидродинамики, предусматривающих механизмы турбулентного обмена по вертикальной координате.

2. Провести анализ моделей турбулентного обмена и исследование его основных характеристик, выбор полуэмпирических подсеточных моделей на основе исследования отфильтрованных и статистически обработанных натуральных данных; построить оптимальный алгоритм расчета коэффициентов вертикального турбулентного обмена.

3. **В области математического моделирования** разработать пространственно-неоднородную трехмерную математическую модель волновой гидродинамики мелководного водоема, с выбранной параметризацией коэффициента вертикального турбулентного обмена, построить и исследовать конечно-разностную аппроксимацию непрерывной модели гидродинамики, в том числе исследовать свойства монотонности, консервативности и устойчивости;

4. **В области численных методов** построить дискретный аналог модели, выполнить аналитические исследования устойчивости полученной модели.

Разработать симметризованный адаптивный попеременно-треугольный итерационный метод (АПТИМ), провести его экспериментальное исследование и сравнение с базовым вариантом АПТИМ. Для реализации симметризованного адаптивного попеременно-треугольного итерационного метода будет введена новая пространственная переменная, что позволит сделать обход двумерной области при решении систем с треугольными матрицами симметричным относительно переменных. Провести параллельную реализацию алгоритма попеременно-треугольного итерационного метода и его симметризованного аналога на основе методов декомпозиции пространственной сеточной области.

5. Создать комплекс программ, предназначенный для моделирования гидродинамических волновых процессов в прибрежной зоне на основе разработанных в диссертации моделей и алгоритмов, с учетом изменяющихся входных гидрофизических параметров, влияющих на движение волн, переформирование рельефа дна, и позволяющих оценивать воздействие волн на берег и объекты инфраструктуры.

Область исследований. Диссертация соответствует следующим пунктам паспорта специальностей:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.
3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.
4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Материалы и методы исследования. Для решения поставленных задач в работе применялись методы математической физики, теория разностных схем, методы математической статистики, а также численные методы, в том числе методы решения плохообусловленных сеточных уравнений. Для описания волновых процессов использована система уравнений Навье-Стокса, включающая три уравнения движения в областях с динамически изменяемой геометрией расчетной области. Для аппроксимации гидродинамической модели использовано расщепление по физическим процессам – вариант метода поправки к давлению. Разностные схемы, описывающие математическую модель выхода волны на берег, построены на основе

интегро-интерполяционного метода с применением схемы с весами. Для решения уравнений использован адаптивный попеременно-треугольный итерационный метод. Программный комплекс реализован на языке C++ в среде MS VisualStudio. Визуализация результатов произведена в среде MathCad. Параллельная реализация разработанных алгоритмов, осуществлена на основе способа декомпозиции по двум пространственным координатным направлениям на многопроцессорной вычислительной системе с использованием библиотеки MPI.

Научная новизна диссертационного исследования.

1. На основе проведенного анализа современных исследований концепции гидродинамических волновых процессов выявлены достоинства и недостатки существующих моделей, определена актуальность построения, исследования и использования пространственно-трехмерных моделей гидродинамики.

2. Изучено влияние отфильтрованных «подсеточных» структур на длинноволновые структуры турбулентного потока, разрешаемые в рамках подхода LES, выбрана наилучшая, по значениям среднеквадратичного отклонения от натурных данных, полуэмпирическая подсеточная модель, проведен расчет коэффициентов вертикального турбулентного обмена на основании различных подходов к его параметризации с использованием данных о пульсациях компонент скоростей, измеренных в ходе экспедиций, выбор и корректировка наилучшей параметризации.

3. Построена трехмерная математическая модель волновых процессов, которая учитывает влияние вертикальной структуры процессов турбулентного перемешивания. Проведено аналитическое исследование дискретной модели, построенной на прямоугольной сетке с учетом функции частичной заполненности ячеек средой, доказана ее монотонность, устойчивость и консервативность.

4. В работе предложен новый симметризованный вариант попеременно-треугольного итерационного метода, проведено его сравнение с базовым алгоритмом АПТИМ для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором, предложена его параллельная реализация.

5. Построен программный комплекс, позволяющий моделировать гидродинамические процессы с учетом выхода волны на берег при наличии берегозащитных сооружений.

Достоверность научных положений и выводов. В работе применялись математически обоснованные методы. Методами теории разностных схем выполнена дискретизация непрерывной трехмерной модели гидродинамики, проведено исследование ее устойчивости и консервативности. Результаты численных расчетов согласуются с натурными данными, в том числе экспедиционными данными.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в построении дискретной пространственно-трехмерной модели гидродинамических волновых процессов с уточненным описанием вертикального турбулентного обмена в прибрежной зоне, вычислительных алгоритмов и набора программ, позволяющих осуществлять предсказательное моделирование процессов переформирования рельефа дна, а также силовое воздействие на объекты прибрежной инфраструктуры.

Разработан программный комплекс под управлением MPI, содержащий параллельные модули, реализующие наиболее трудоемкие, с точки зрения временных затрат, вычислительные блоки, позволяющий в оперативном режиме осуществлять предсказательное моделирование неблагоприятных и опасных явлений, связанных с возникновением волн большой высоты в прибрежной зоне и их воздействием на объекты прибрежной инфраструктуры в оперативном режиме. Разработанный программный комплекс дает возможность оценивать долговременные последствия, на временном интервале многие месяцы-годы, волнового воздействия на рельеф дна и объекты береговой инфраструктуры. Получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ: «Решение трехмерной математической модельной задачи выхода волны на берег» № 2018613129 от 02.03.2018 г.; «Реализация математической модели гидродинамики со сложной геометрией расчетной области на прямоугольной сетке» № 2018664543 от 19.11.2018 г.; «Решение задач гидродинамики и переноса при больших числах Рейнольдса на основе метода учета заполненности ячеек» № 2019661359 от 28.08.2019 г.

Апробация работы. Результаты, полученные в рамках диссертационного исследования, представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах: Сочи, Международная конференция «Методы вычислений и математическая физика», 2020; Ростов-на-Дону, XVI Международная научно-техническая конференция «Динамика технических систем», 2020; Москва, Международная научно-техническая конференция «Суперкомпьютерные дни в России», 2020; Санкт-Петербург, Всероссийская научная конференция с международным участием «Земля и космос», 2020; Санкт-Петербург, IV Всероссийская конференция «Гидрометеорология и экология: достижения и перспективы развития», 2020; Эльбрус, XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектива-2021», 2021; Дивноморское, Международная научно-практическая конференция «Интеллектуальные технологии и математическое моделирование», 2021.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 19-31-90091.

Публикации по теме диссертационной работы. По теме диссертационной работы опубликовано 50 работ, из них 22 статьи опубликованы в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus, 5 статей в отечественных реферируемых журналах, входящих в список изданий, рекомендованный ВАК.

Личный вклад соискателя. Автором диссертации совместно с научным руководителем проводилась постановка задачи, обсуждались полученные основные научные результаты и формулировались выводы. Лично автором была проведена параметризация коэффициентов вертикального турбулентного обмена на основании различных подходов с использованием данных о пульсациях компонент скоростей, измеренных в ходе экспедиций, сравнение полученных распределений, выбор и корректировка наилучшей параметризации, была выбрана оптимальная полуэмпирическая подсеточная модель, проведено аналитическое исследование построенной модели, проведена адаптация выбранной параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена в качестве подсеточной модели, усовершенствована методика численного моделирования гидродинамических процессов, путем адаптации выбранной параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена, реализован симметризованный адаптивный попеременно-треугольный итерационного метод, проведено сравнение двух вариантов метода.

В рамках сформулированной в работе проблемы на защиту выносятся следующие результаты и положения:

1. Полуэмпирическая подсеточная модель для расчета коэффициентов вертикального турбулентного обмена на основании различных подходов к его параметризации с использованием данных о пульсациях компонент скоростей, измеренных в ходе экспедиций.

2. Трехмерная математическая модель волновых процессов, которая учитывает влияние вертикальной структуры процессов турбулентного перемешивания. Аналитическое исследование дискретной модели, построенной на прямоугольной сетке с учетом функции частичной заполненности ячеек средой, доказана ее монотонность, устойчивость и консервативность.

3. Симметризованный вариант попеременно-треугольного итерационного метода, его параллельная реализация.

4. Программный комплекс, позволяющий моделировать гидродинамические процессы с учетом выхода волны на берег при наличии берегозащитных сооружений.

ГЛАВА 1. ДВИЖЕНИЕ ВОЛН В ПРИБРЕЖНЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕКТОВ ПРИБРЕЖНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

1.1. Теоретические аспекты гидродинамических волновых процессов, характеристики гравитационных волн

Ветровые волны являются гравитационными, так как ветер – это сила, которая при действии на водную поверхность выводит жидкость из состояния равновесия, а сила тяжести вынуждает ее возвращаться в прежнее состояние. Вследствие инерции перемещение осуществляется в виде последовательных колебаний частиц воды, которые при достаточно внушительной глубине перемещаются по круговым орбитам и придают нижележащим пластам подобное движение, ослабляющееся по мере удаления от поверхности воды, отчего волнение с глубиной быстро затухает. Если глубина бассейна ограничена, то трение о дно оказывает влияние на форму орбит: с глубиной они, уменьшаясь в абсолютных размерах, делаются все более вытянутыми и приобретают форму эллипса, а в придонном слое частицы двигаются исключительно в горизонтальном направлении.

Ветровое волнение – всегда трехмерное. Процесс передачи ветровой энергии водной среде все еще недостаточно исследован, но очевидно, что одновременно с приращением энергии за счет действия ветра происходит ее рассеивание (диссипация) в толще воды и грунте дна. Трехмерное ветровое волнение – нерегулярное, его элементы модифицируются случайным образом. Наложение друг на друга двух или многих систем волн называется интерференцией.

Каждая индивидуальная волна характеризуется, прежде всего, высотой h , представляющей вертикальное расстояние от центра ложбины до вершины гребня волны, или амплитудой $a = h/2$, а также длиной λ (расстояние между двумя последовательными гребнями) и периодом T , в течение которого совершается полный цикл колебаний. Часто вместо величин T и λ удобнее использовать такие параметры, как частота $\omega = 2\pi/T$ и волновое число $k = 2\pi/\lambda$.

Кроме того, для анализа поведения волн в прибрежной области вводится ряд безразмерных характеристик. Это крутизна h/λ , относительная глубина H/λ или $kH = 2\pi H/\lambda$ и относительная высота h/H , где H – глубина воды.

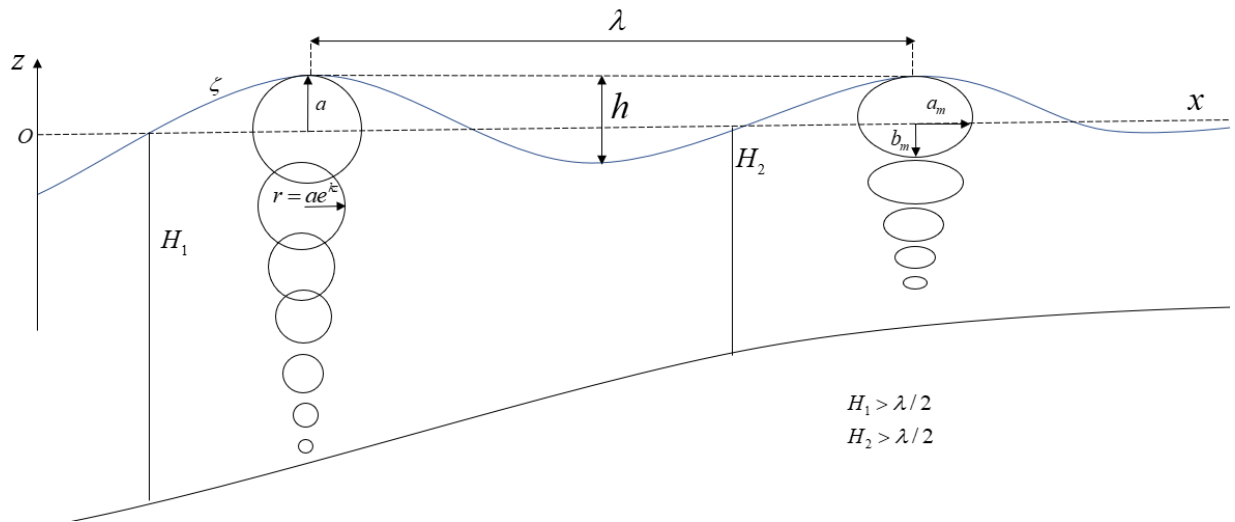


Рисунок 1.1. Ветровые волны на глубокой и мелкой воде

Все водоемы или их участки по условиям влияния глубины на волнение распределяются на глубоководные – с глубинами больше половины длины волны, мелководные – с глубинами менее половины длины волны и смешанные. Когда глубина воды больше половины длины волны, то говорят о волнах, которые «не чувствуют» воздействия дна.

Поведение волн маленькой амплитуды можно с достаточной точностью описать линеаризованными уравнениями движения жидкости. Для справедливости настоящего приближения необходимо, чтобы амплитуда волны была существенно меньше как длины волны, так и глубины водоёма.

Нелинейные эффекты сказываются, когда амплитуда волны становится сопоставимой с её длиной. Одним из специфических эффектов в этом режиме представляется возникновение изломов на вершинах волн. Кроме того, возникает вероятность опрокидывания волны. Эти эффекты пока не поддаются точному аналитическому расчёту.

Присутствуют две предельные ситуации, для которых решение задачи имеет преимущественно несложный вид – это гравитационные волны и волнение на глубокой воде.

Закон дисперсии и скорости волны на мелкой воде имеет вид: $\omega = \sqrt{gH} \cdot k$; $v_{ph} = v_{gr} = \sqrt{gH}$, где H – глубина водоёма, g – напряженность гравитационного поля, ω – угловая частота колебания в волне, k – волновое число (величина, обратная длине волны), v_{ph}, v_{gr} – фазовая и групповая скорости соответственно. Такой закон дисперсии приводит к некоторым явлениям, которые можно заметить на морском берегу.

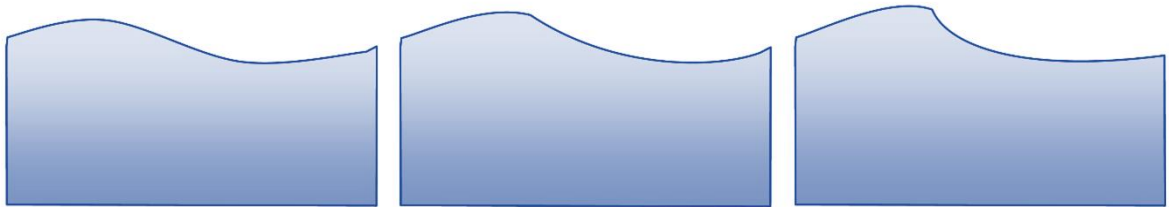


Рисунок 1.2. Изменение профиля поверхностной волны

Приближение волны на глубокой воде справедливо, если глубина бассейна существенно превосходит длину волны. В этом случае для простоты оценивают неограниченно глубокий водоём. Это обоснованно, поскольку при колебаниях поверхности реально перемещается не вся толща воды, а лишь приповерхностный слой глубиной порядка длины волны.

Закон дисперсии и скорости волны в этом случае имеет вид: $\omega = \sqrt{gk}$; $v_{ph} = 2v_{gr} = \sqrt{g/k}$. Следовательно, фазовая и групповая скорость гравитационных волн в этом случае оказывается пропорциональной длине волны. Другими словами, длинноволновые колебания будут распространяться по воде быстрее коротковолновых.

Если длина волны сравнима с глубиной бассейна H , то закон дисперсии в этом случае имеет вид: $\omega = \sqrt{gk \cdot th(kH)}$ [77].

Реальная многомерная турбулентность в береговых системах обладает рядом специфических особенностей, она может считаться локально-однородной и изотропной только в масштабах, существенно меньших глубины акватории, так как стратификацию воды хорошо перемешанного мелкого бассейна ограничивает наибольший вертикальный размер турбулентных вихрей. Считается, что по последней причине процесс турбулентного перемешивания можно разбить на горизонтальный турбулентный обмен и вертикальную турбулентную диффузию.

Для понимания процессов рождения и диссипации вихрей, процессов взаимодействия (трения) жидкости, нужно учитывать действие вязкости жидкости. Вязкость – внутреннее трение, качество текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление движению одной их части относительно другой.

Впервые уравнения движения вязкой жидкости вывел французский ученый и инженер А. Навье. Для этого понадобилось ввести тензор напряжений, то есть учесть не только нормальные силы (давление), но и касательные силы. Навье ввёл в уравнения движения сплошной среды добавочный член, отвечающий за проявление вязкости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{где } \mu -$$

коэффициент кинематической вязкости. Большой вклад в исследование этого уравнения внес Дж. Г. Стокс. Полученное ими векторное уравнение называется уравнением Навье-Стокса [72].

Первые шаги в направлении общей концепции волн конечной амплитуды, сопровождаемых потенциальным течением жидкости были выполнены Дж. Г. Стоксом. Решая методом последовательных приближений уравнение движения он получил формулы для подсчета профиля волны и обнаружил специфики движения.

Уравнение волны Стокса имеет следующий вид:

$$\xi = a \cos(kx - \omega t) - \frac{1}{2} k a^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(kx - \omega t). \quad \text{Волна Стокса}$$

симметрична относительно вертикальных прямых, проходящих через гребни

или впадины, однако она несимметрична относительно плоскости невозмущенного уровня. Гребень такой волны лежит выше этой плоскости на величину:

чину: $\xi_{\text{греб.}} = a \left(1 + \frac{1}{2}ka + \frac{3}{8}k^2a^2 \right)$, а впадина ниже – на величину:

$$\xi_{\text{впад.}} = a \left(1 - \frac{1}{2}ka + \frac{3}{8}k^2a^2 \right) \quad [114].$$

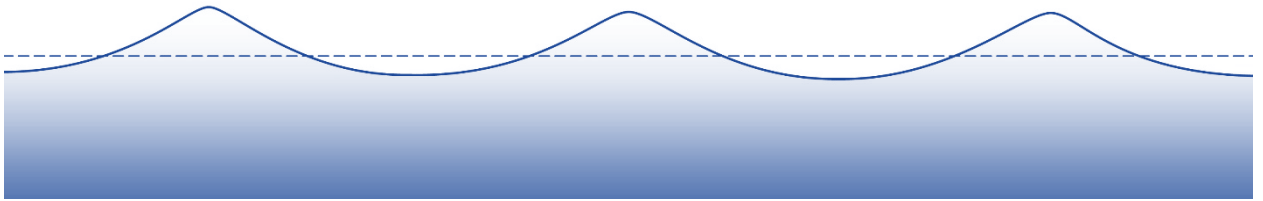


Рисунок 1.3. Профиль волны Стокса

При этом впадины обладают более пологим очертанием, чем гребни. С увеличением высоты при исходной длине гребни волн становятся все более заостренными и приближаются к предельной форме в угловой точке 120° . Скорость распространения волны Стокса зависит не только от длины, но и от

амплитуды: $c = \sqrt{\frac{g}{k} (1 + k^2a^2)}$. Траектории частиц в волновом движении ока-

зываются незамкнутыми из-за наличия волнового течения со скоростью:

$$v_{\text{вол.}} = a^2 k^2 \sqrt{\frac{g}{k}} e^{2kz}.$$

Для волн, обладающих предельной формой и распространяющихся на спокойной воде, частицы на гребнях перемещаются с такой же скоростью вперед, как и сама волна. Другое интересное качество этих волн установившейся формы состоит в том, что они имеют по отношению к невозмущенной воде некоторое количество движения в направлении распространения волн.

Дж. Буссинеск и Дж. У. Рэлей показали, что правильный учет ускорения в вертикальном направлении, который обуславливает дисперсию и не

учитывается в теории мелкой воды Г. Эйри, ведет к решению:

$$\zeta = a \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-ct}{\lambda}\right), \quad \varepsilon = \frac{a}{H} \ll 1, \quad \gamma = \left(\frac{H}{\lambda}\right)^2, \quad \text{где } \varepsilon \text{ – нелинейный параметр, } \gamma \text{ –}$$

дисперсионный параметр [86].

Уравнения Дж. Буссинеска, которые в своей классической форме представляют уравнения смещения на свободной поверхности и уравнения усредненной скорости в горизонтальном направлении, которые не ограничены одним курсом распространения и эквивалентны уравнениям для смещения свободной поверхности и скорости в горизонтальном направлении на ровном дне канала [13].

Таким образом, применение 3D моделей позволяет прогнозировать трансформации волн при выходе их на мелководье при сложном рельефе дна и криволинейной формы прибрежной линии. Кроме того, 3D модели волновых процессов дают возможность оценить интерференцию волн от двух или более источников, в том числе сложение их амплитуд.

1.2. Обзор исследований теории гидродинамических волновых процессов

Основоположниками отечественной школы изучения ветрового волнения являются И. Н. Давидан, Л. И. Лопатухин, В. А. Рожков, И. О. Леонтьев. Имеется множество научных публикаций, связанных с постановкой, исследованием и реализацией различных моделей турбулентности. Существенный вклад в создание моделей турбулентности внесли А.Н. Колмогоров, А.С. Монин, Обухов, Г.И. Марчук, О.М. Белоцерковский, В.П. Дымников, В.Н. Лыков, В.В. Жмур, Р.В. Озмидов, А.С. Саркисян, В.Б. Залесный, Ю.А. Жданов, И.О. Хинце [67, 76-78, 118]. Обширный теоретический материал, наблюдения, а также модели турбулентности морской гидродинамики приводятся в работах К. Брайана, Х. З. Баумерта, Дж. Х. Симпсона, Дж. Сандерманна. Обзор метода параметризации крупномасштабной турбулентности по Смагоринскому приведен в работе Ю. В. Юрокиной. Огромный вклад в теорию турбулентности внес академик РАН Захаров Владимир Евгеньевич (удостоен медали Дирака).

В настоящее время существует множество моделей гидродинамики разнообразных водоемов. Качество модели и ее прогноза зависит от количества реальных процессов, которые учитывает модель (волнение, стонно-нагонные явления), корректности математического описания этих процессов и точности входных данных. Исследования, созданные на результатах численного моделирования динамической структуры Азовского моря сравнительно немногочисленны [62-64, 73-75]. Геометрические характеристики мелководных водоемов обусловили требования к гидродинамическим моделям, в которых применяется криволинейная система координат. Большинство существующих моделей, на основании которых анализировались динамические процессы в Азовском море, можно разделить на два класса: двумерные линейные и трехмерные нелинейные модели, основанные на уравнениях мелкой воды:

- двумерная модель, разработанная в Государственном океанографическом институте им. Н.Н. Зубова;
- трехмерная модель, разработанная в Гидрометцентре России;
- трехмерная модель INMOM (Institute of Numerical Mathematics Ocean Model), разработанная в Институте вычислительной математики РАН;
- трехмерная модель, разработанная в Южном федеральном университете;
- две модели, используемые в Морском гидрофизическом институте РАН: модифицированная версия модели POM и модель ADCIRC, работающая в связке с волновой моделью SWAN;
- две модели, используемые в ЮНЦ РАН: мультикомпартментальная балансовая модель и двухслойная математическая модель гидродинамики [55].

Балансовая модель Азовского моря предназначена для воссоздания крупномасштабных изменений океанологических характеристик, проявляющихся в пространстве на акваториях с характерными масштабами в десятки километров, а по временной шкале обладающих масштабом сезонной и межгодовой изменчивости. Эта модель имеет большие шаги по времени и пространству и поэтому не в состоянии давать оперативные прогнозы мелкомасштабных явлений: стонно-нагонных явлений, полей течений.

Двухслойная математическая модель гидродинамики водоемов является квазитрехмерной. Движение воды в верхнем слое описывается уравнениями мелкой воды. Движение воды в глубоководном слое описывается трехмерной системой, состоящей из уравнений количества движения, уравнения неразрывности среды и уравнения гидростатического давления. Наличие большого числа неизвестных предъявляет высокие требования и к вычислительной системе, и к пакетам используемых программ решения систем линейных алгебраических уравнений [48]. Однако, в расчете отсутствует учет всех специфик рельефа дна. В связи с выбранным разрешением модель не в состоянии точно воспроизвести специфики батиметрии и топографии дна. Эта же модель, но на более мелкой сетке применима к Таганрогскому заливу. Сетка с подобным разрешением вернее аппроксимирует прибрежную линию, но не позволяет изучить подводные продолжения, затопленные острова – следовательно, этот расчет тоже отдален от реальной картины.

Разработанные модели оперативного прогноза гидрофизических полей производят расчеты с разрешением не менее единиц – десятков километров. Вместе с тем в районах, где происходит трансформация крупномасштабных явлений с передачей энергии в небольшие масштабы, нужно учитывать усиленные короткопериодные процессы с масштабом ячейки расчетной сетки меньше единиц километров. Для получения более четкой картины необходимо, чтобы пространственное разрешение модели было порядка 50-100 м, что предъявляет существенно более высокие требования к вычислительным мощностям.

Разработками в области постижения процессов, происходящих в природе, сопряженных с моделированием волновых процессов и транспорта наносов, гидродинамических волновых процессов при наличии разнообразных прибрежных сооружений, оценкой гидродинамического влияния на берегозащитные сооружения и прибрежные установки при наличии поверхностных волн, установленные на дне мелководного водоема, занимаются десятки крупных научных школ, сосредоточенных в университетах США (Center for

Applied Coastal Research, University of Delaware, Arizona University, University of Maryland, University of California at San-Diego, University of Texas at Austin, University of Michigan, University of North Caroline и др.), Германии (University of Hamburg, Aachen University и др.), Франции (University Le Bourge, Marseille University, Lion University, IFREMER и др.), Испании (University of Malaga), Нидерландов (Delft University), Норвегии (Norwegian University of Science and Technology).

Под руководством Д. Мирауга, проводят исследования, связанные с оценкой волнового напряжения на дно бассейна на основании анализа статистики ветра. Авторским коллективом сконструирован аналитический метод оценки волнового напряжения при сдвиге грязевых пластов на мелководье на основе статистики ветра в глубоководных районах Северного моря. Результаты исследований, представленные в статьях, являются полезным инструментом оценки устойчивости средств защиты от размыва в прибрежных средах, а также оценки эрозии и отложения грязи, часто требуемой в оперативных устьевых, прибрежных и океанических моделях циркуляции [19-20].

Влияние случайных волн на напряжение вблизи дна изучают, предполагая, что волновое движение является стационарным гауссовским узкополосным случайным процессом, и используя формулы коэффициента трения для синусоидальных волн. Данные для сравнения получены из статистического анализа прямых измерений напряжений на дне при сдвиге, выполненных в Прибрежном исследовательском центре Великобритании при комбинированных случайных волнах и ортогональных, а также почти ортогональных потоках.

Недавние разработки в области эффективности вычислительных ресурсов и разработки численных методов привели к более широкому применению численных моделей при решении проблем прибрежных и морских волн. Д. Мирауг, в соавторстве с А. Аггарвалом, Ч. Пакозди, Х. Бихсом, описывает задачи вычислительной гидродинамики, связанные с реконструкцией свободной поверхности для точной генерации нерегулярных волн. В работах численное исследование выполняется с использованием модели, основанной на

вычислительной гидродинамике (CFD), для проверки и исследования итерационного метода восстановления свободной поверхности для нерегулярных волн [1-3].

Метод спектрального разложения для гармонических составляющих может предоставить полезную информацию об отдельных амплитудах волн, фазах волн и частотах волн для нерегулярных волн. Рассчитанные волновые параметры могут быть использованы для восстановления нерегулярной поверхности океанской волны с предположением, что нерегулярное состояние моря может быть представлено суперпозицией отдельных регулярных волновых компонентов. Данный подход к воспроизведению экспериментальной высоты свободной поверхности без какой-либо информации об экспериментальных данных об источнике волны может представлять большой интерес для численного моделирования.

Многие исследователи применяли численные модели, основанные на CFD (Computational Fluid Dynamics), для изучения различных типов неразрушающих и разрушающих волн. Модель гидродинамики с открытым исходным кодом REEF3D основана на определяющих уравнениях динамики жидкости: уравнение неразрывности и усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS) с предположением о несжимаемой жидкости [4-5]. Подход LES и прямого численного моделирования (DNS) к CFD-моделированию волн может обеспечить глубокое понимание микромасштабных турбулентных характеристик, они довольно дороги для инженерных приложений [12, 17].

Л. Холтуйсен (Делфтский технологический университет) принимал участие в различных проектах, в частности в Совместном проекте «Волны Северного моря» (JONSWAP), который заложил научную основу для прогнозирования волн. Позже он сосредоточился на передовых исследованиях и разработках для оперативного предсказания волн и участвовал в первоначальной разработке компьютерных моделей, используемых в настоящее время для предсказания глобальных волн во многих океанографических и метеорологических институтах мира. В своих трудах он описывает наблюдение, анализ и

предсказание ветровых волн в открытом океане, в шельфовых морях и в прибрежных районах. Используя основные статистические и физические понятия, автор обсуждает возможности предсказания волн в океанических и прибрежных водах, сначала с точки зрения обобщенных наблюдений, а затем с точки зрения более теоретической основы спектрального энергетического баланса: их происхождение (генерация ветром), распространение в прибрежных водах (преломление, дифракция и отражение), взаимодействие между собой и их распад. В своих работах автор описывает SWAN (Simulation Waves Nearshore), компьютерную модель, предназначенную для предсказания волн в прибрежных водах. Поскольку модель учитывает взаимодействие волн с течением, основным уравнением SWAN является уравнение баланса спектрального действия. Оно сформулировано в декартовых координатах и в сферических координатах для учета малых и крупных вычислений [13].

Вычисления с SWAN могут варьироваться от сложных случаев, которые требуют полного, зависящего от времени, двумерного уравнения сохранения импульса движения в сферических координатах, до простых одномерных случаев, которые требуют только стационарного, одномерного уравнения сохранения энергии. SWAN обеспечивает передачу через препятствия, такие как волнорезы и скалы, и отражение от них.

Ф. Ши, Ц. Чжао, Д. Т. Кирби, Д. С. Ли, С. Н. Сео в работе «Моделирование взаимодействия волн со сложными прибрежными структурами с использованием расширенной модели VOF» на основе двумерной модели VOF RIPPLE, которая была первоначально разработана в Лос-Аламосской национальной лаборатории, построена модель на основе Spatial-Filtered Navier Stokes (SFNS) с целью моделирования взаимодействия волн со сложными прибрежными структурами [15, 17].

Волны, вызванные ветром, являются одними из наиболее важных объектов в прибрежной и океанической инженерии. Случайный характер поверхностных морских волн делает его одним из самых сложных явлений. Характеристики океанских волн в основном определяются с помощью полевых

измерений, численного моделирования, физических моделей и аналитических решений. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки.

Более ранние модели, используемые для численного прогнозирования волн, использовали грубую сетку, что подходило только для глубоководных регионов. Но для точного моделирования прибрежных районов появилась необходимость в более мелкой сетке, что привело к разработке новой модели третьего поколения MIKE21 SW.

Важным достижением в численном моделировании волн является объединение различных типов моделей для получения улучшенных результатов. В целом модели циркуляции океана в сочетании с волновыми моделями позволяют лучше понять и описать данные физические явления.

Для изучения влияния волновой динамики, течений и морфологии побережья, прилегающего к прибрежной зоне, которая расположена на юго-западе Англии, Э. Гонсалес использовал систему моделирования, которая состоит из прибрежной волновой модели SWAN, модели ROMS океанической циркуляции и модели переноса осадков для определения морфологической эволюции. Результаты показывают, что приливные подъемы и приливные течения могут оказывать существенное влияние на волны, а приливное воздействие и волны оказывают существенное влияние на геометрию дна.

Модель, объединяющая ветровые волны с приливными потоками в приливном бассейне, была разработана Италией. Модель сочетает гидродинамический модуль конечных элементов, основанный на уравнениях мелкой воды, с модулем конечных объемов, который учитывает генерацию и распространение ветровых волн.

Х. Ли разработал новую форму модели направленной спектральной волны в терминах спектральной плотности высоты сложной волны. Модель обладает способностью моделировать дифракцию и преломление волн. Модель полезна для прогнозирования волновых условий в региональной прибрежной зоне, где важны как рефракция, так и дифракция волн, и является полезным инструментом для моделирования переходного состояния

океанических волн в прибрежную зону, где рефракция и дифракция волн проявляется наиболее явно.

Сравнение волновых моделей показало, что модели с мелкой сеткой наиболее подходят для прибрежных зон, тогда как в глубоководных зонах предпочтение отдают более крупной сетке.

С. Лин, Дж. Шэн из Университета Дэлхауз (Канада) в работе, посвященной оценке эффективности параметризации разрушения волн на мелководье в моделях спектральных волн рассматривают глубинное разрушение волн, как механизм рассеяния поверхностных волн океана на мелководье. Различные подходы были разработаны для параметризации глубинного процесса разрушения волн в моделях поверхностных волн океана. В исследованиях оценивается эффективность шести часто используемых параметризаций при моделировании значительных высот волн (SWH). Основными различиями между этими параметризациями являются представления индекса прерывателя и доли ломающихся волн, имеют разумную производительность при параметризации вызванного глубиной волнения на мелководье, но со своими ограничениями и недостатками [18].

Ч. Ч. Ху, Т. Май, Д. Гривз, Э. Раби из университета Плимута, Великобритания, занимаются исследованием воздействия ударной волны на прибрежные конструкции. Крупные морские сооружения, барьеры от штормовых нагонов и запорные плотины могут иметь вертикальные поверхности, подверженные воздействию волн. Такие воздействия могут привести к очень высоким пиковым давлениям и волновым нагрузкам, что может привести к разрушению конструкции и, вероятно, будет более распространенным явлением по мере увеличения количества штормов из-за изменения климата [16].

Решающее значение при проектировании прибрежных сооружений имеет точный прогноз зон с наиболее сильной нагрузкой волн. В лабораторных исследованиях С. Буллок исследовал подробные характеристики четырех различных типов волнового воздействия на вертикальную и наклонную стену и обнаружил, что удар может создавать очень большое локализованное давление на стену.

Группой ученых Китая Цзюнь Тан, Иган Лю, Юнмин Шен, Минлянг Чжан, Мейронг Су, из государственной лаборатории прибрежной и морской инженерии Даляньского технологического университета, проведено численное исследование влияния расположения волнореза на прибрежные волны, волновые течения, перенос наносов и морфологическую эволюцию пляжа. Учеными описана численная модель для изучения влияния расположения волноломов на прибрежные волны, вызванные волнами течения, перенос наносов и морфологическую эволюцию пляжа вблизи волнореза. Численная модель разработана на основе подмоделей для прибрежных волн, волнового течения, переноса наносов и морфологической эволюции пляжа. Прибрежные волны моделируются на основе параболического уравнения с учетом эффектов преломления, дифракции и разрушения волны. Волновое течение в прибрежной зоне моделируется с помощью нелинейных уравнений мелкой воды. Затем двумерное уравнение переноса взвешенных отложений, уравнение дна и морфологическая эволюция берегового пляжа соединяются с волновой моделью для моделирования переноса и морфологической эволюции отложений в прибрежных волнах и вызванных волнами течениях. Численная модель экспериментально проверена на прибрежных волнах, прибрежных течениях, переносе наносов и морфологическом развитии пляжа вокруг волнореза из крупномасштабного сооружения для переноса осадочных отложений в Центре исследований и разработок инженерного корпуса армии США.

Китайские ученые из Юго-западного университета Цзяотун Бо Хуан, Бин Чжу, Шенгай Цуй, Лунылян Дуань, Цзавэй Чжан провели экспериментальное и численное моделирование воздействия волновых сил на прибрежные мосты. В результате экспериментальных испытаний и численного моделирования исследованы индуцированное ураганом волновое воздействие на прибрежный мост. После экспериментов двумерная численная модель используется для исследования волнового воздействия, в ней для моделирования волн применяются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса в сочетании с моделью турбулентности $k-\omega$. Метод VOF использован для

отслеживания границы раздела воздуха и воды. Данное исследование предоставило полезный инструмент для оценки вызванных ураганом экстремальных волновых сил для определенного типа прибрежного моста [16].

Педро Дж. Мартинес-Феррер, Лин Цянь, Чжихуа Ма, Дерек М. Козон, Клайв Г. Мингхэм из Manchester Metropolitan University, провели точное и эффективное моделирование генерации, распространения и взаимодействия волн. В работе, посвященной усовершенствованной числовой генерации волн для моделирования инженерных задач океана и побережья ученые ввели динамически-границную процедуру генерации числовых волн, разработанную для моделирования взаимодействия волновой структуры (WSI), типичную для инженерных задач океана и побережья. Эта реализация опирается на динамическую сетку, которая деформируется, чтобы копировать движение волны, она интегрирована в wsiFoam: многорегиональная стратегия связи, применяемая к двухфазным решателям Навье-Стокса. Комбинация метода динамических границ с сеткой из нескольких областей противодействует увеличению вычислительных затрат, что присуще моделированию с использованием динамических областей [11].

Ханг Ман Фана (Делфт, Нидерланды) изучает распространение приливных волн вдоль побережья, используя двумерную, баротропную численную модель, для исследования динамики распространения приливной волны в Южно-Китайском море, в частности вдоль побережья дельты Меконга. Усредненная по глубине модель приливной динамики для всего Южно-Китайского моря была построена с использованием Delft3D-FLOW, она включает уравнения мелкой воды, уравнения неразрывности и уравнения переноса для консервативных составляющих. Описание численных схем можно найти в руководстве пользователя Delft3D-FLOW. Текущая модель с гибкими ортогональными элементами сетки с размерами ячеек сетки около 22 км вблизи морских границ и постепенным уменьшением до 4 км. Более подробные сетки необходимы для разрешения топографии, необходимой для точного моделирования. Значение горизонтальной вихревой вязкости, которое используется в качестве

параметра калибровки Delft3D Flow, зависит от размера сетки, используемых при моделировании.

В работе, посвященной моделированию случайного волнового преобразования при сильных волнообразных прибрежных течениях, экспериментально и численно исследованы распространение и трансформация разнонаправленных и однонаправленных случайных волн над побережьем со сложными батиметрическими и геометрическими особенностями. Лабораторные исследования показывают, что конвергенция и расхождение энергии волн вызывают развитие сильных береговых течений и обратное изменение волновых полей. Модель прибрежной спектральной волны, основанная на уравнении баланса волнового действия с дифракционным эффектом (wave action balance equation with diffraction effect (WABED)), используется для моделирования преобразования случайных волн в сложной батиметрии. Моделируемое волновое поле без учета прибрежных течений отличается от экспериментальных, тогда как результаты модели с учетом течений четко воспроизводят усиление высоты волны перед вогнутыми береговыми линиями [40].

Способность точно прогнозировать прибрежную гидродинамику необходима для получения характеристик процессов переноса отложений и, в конечном итоге, для прогнозирования особенностей морфологии побережья. Волны и потоки мобилизуют, приостанавливают и переносят осадок, вызывая отложение или эрозию осадка, влияя на местную топографию дна.

Надежная модель прибрежных волн и течений необходима для эффективной оценки скорости переноса наносов и прогнозирования морфологической эволюции пляжа.

Основной целью исследования японских ученых является разработка надежной гидродинамической численной модели для прибрежных волн и течений вокруг прибрежных районов. Ими разработана новая гидродинамическая модель, учитывающая взаимодействие волнового тока и эффекты поверхностных волн. Модель состоит из двух модулей, которые являются волновым модулем и прибрежным токовым модулем. Волновое и прибрежное поля тока

определяются зависимо с учетом взаимодействия волны с током. Волновой модуль основан на модели многонаправленной случайной волны, которая основана на уравнении баланса действия волны, связанном с членами рассеяния энергии для разрушения и дифракции волны. В этом модуле было рассчитано взаимодействие волны с током. Прибрежный модуль тока основан на модели прибрежного тока Q-3D. Береговая линия рассматривается как фиксированная граница вычислительной области. Морская граница также считается фиксированной, если расположить ее в глубокой воде, где нет течения. Поэтому составляющие скорости тока, нормальные к этим границам, принимаются равными нулю. Как береговая скорость течения, так и уровень воды равномерны вдоль берега на боковых границах. Таким образом, учеными была разработана гидродинамическая модель волновых прибрежных течений с учетом влияния взаимодействия волнового тока и поверхностных волн вокруг прибрежных структур. Применимость модели была продемонстрирована с помощью нескольких численных испытаний и сравнена с лабораторным экспериментом и полевыми наблюдениями.

В Нидерландах для волнового моделирования в прибрежных и внутренних водах использование SWAN стало основным компонентом. Однако время вычислений относительно велико. Поэтому нидерландские ученые исследовали параллельную эффективность текущих версий SWAN для MPI и OpenMP. Версия MPI не так эффективна, как версия OpenMP в пределах одного узла. Гибридная версия SWAN сочетает в себе эффективность текущей версии OpenMP на распределенной памяти с возможностью текущей версии MPI распределять память по узлам.

Таким образом, гибридная версия SWAN сочетает в себе эффективность версии OpenMP с возможностью версии MPI использовать больше узлов. Численные эксперименты показывают, что гибридная версия улучшит параллельную производительность текущей версии MPI еще больше для большего количества ядер на узел и / или большего количества узлов [47].

Проведенный анализ этих и других моделей показывает, что подавляющее большинство существующих подходов к построению моделей гидродинамических процессов в прибрежной зоне мелководных водоемов базируется на приближении мелкой воды, или в лучшем случае на гидростатическом приближении, которое не учитывает адвективный и турбулентный теплообмен по вертикальному направлению. С другой стороны имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о существенном влиянии данных процессов на гидрофизику прибрежной зоны, распределение солей и газовый режим (в первую очередь концентрацию растворенного кислорода). Поэтому построение, исследование и применение пространственно-трехмерных моделей гидродинамики, в том числе волновых процессов, учитывающих механизмы турбулентного и адвективного обмена по вертикальной координате является актуальной научной и важной прикладной проблемой.

Таким образом, исследованиями, связанными с моделированием гидродинамических волновых процессов и оценкой гидродинамического воздействия на берегозащитные сооружения и прибрежные конструкции, занимаются десятки крупных научных школ, сосредоточенных в университетах США, Германии, Франции, Испании, Нидерландов, Норвегии и др. Несмотря на большое количество существующих программных комплексов, позволяющих моделировать гидродинамические процессы: POM (Princeton Ocean Model), EFDC (The Environmental Fluid Dynamics Code), DELFT, Mars3D, CARDINAL (Coastal Area Dynamics Investigation Algorithm, ветро-волновые модели третьего поколения WAM, SWAN (Simulation Waves Nearshore), WaveWatch, данные разработки обладают рядом существенных недостатков. Существующие программные комплексы используют упрощенные модели гидродинамических процессов, базируются на гидростатическом приближении, не учитывают пространственно-неоднородное движение водной среды, не являются консервативными, не учитывают сложную форму рельефа дна и берега, а также адвективный и микротурбулентный перенос в вертикальном направлении в прибрежной зоне.

1.3. Влияние берегозащитных сооружений на дифракцию и отражение волн

Пляжи являются натуральными и особенно действенными образованиями, обеспечивающими абсолютное волногашение и устранение волнового влияния на территории, прилегающие к пляжам со стороны суши. Но такую функцию пляжи могут выполнять исключительно при одном неременном условии – они должны являться динамически устойчивыми к влиян

ию волнения. Анализ российского и зарубежного опыта показывает, что эффективность берегозащитных мероприятий зависит в внушительной степени от соблюдения концептуального принципа: нужно выбрать эффективный, гарантирующий поддержание прибрежной площади в динамически устойчивом состоянии способ берегозащиты.

Планирование и организация берегозащитных ансамблей должны охватывать, по крайней мере, литодинамические системы или ячейки, которые обладают автономным режимом динамики развития, а также имеют собственный баланс наносов.

Берегозащитные технологии – это технологии, которые используются для защиты берегов от разрушения. Концепция берегозащитных сооружений обязана удовлетворять следующим требованиям. Берегозащитные сооружения в условиях стадияльно-ритмического развития побережья совместно со снижением волнового влияния на береговой уклон и пляжную полосу обязаны координировать смещение наносов в прибрежной зоне моря, перераспределяя вдольбереговой и поперечный перенос с целью сохранения и восстановления пляжной полосы, как основного элемента защиты берега.

Конструкции берегозащитных сооружений при многолетних и сезонных колебаниях уровня моря должны гарантировать защиту берега от волнового и ледового воздействия, как при подъеме уровня моря, так и в условиях его спада. Технические решения берегозащиты должны не только предусматривать охрану от абразии клифа берега и размыва аккумулятивных форм, но и

избавлять от затопления и подтопления прилегающие территории суши, сокращать до минимума водонасыщение грунтов, приводящее к развитию и интенсификации негативных внешних процессов.

Осуществление берегозащитного строительства должно непременно обгонять темпы разрушения берегов и затопления или подтопления прилегающих зон суши с учетом мониторинга штормовой активности моря. В условиях наличия вдольберегового переноса наносов берегозащитное строительство должно прокладываться навстречу их потока с обязательной защитой от размыва низовых участков берега.

К берегоукрепительным сооружениям относятся, волноломы, искусственные рифы, волногасящие стены, откосные прибережные укрепления, дамбы, бермы. К пляжеудерживающим – подводные волноломы, искусственные и естественные пляжи.

Буна – это регуляционное сооружение в виде поперечной дамбы, выдвинутое от берега в сторону моря и служащее для предохранения берега или гидротехнического сооружения от размыва. Линейные буны могут быть однорядные и двухрядные, свайные и из сборного железобетона, на колоннах-оболочках и из призматических блоков. Главное назначение бун – накопление или удержание пляжных наносов в межбунных отсеках. Буна – это активное берегозащитное сооружение, которое с одной стороны (наветренной) удерживает пляжеобразующие наносы, перемещаемые вдоль берега, а с другой (подветренной) инициируют низовой размыв.

Волногасящие стены используются для предохранения прибережных откосов и построек от волнового воздействия. Волногасящие покрытия под воздействием мощного волнения постепенно начнет разрушаться, поэтому исходное сооружение с большим резервом устойчивости экономически не выгодно. В результате работы стен происходит размыв и сокращение ширины пляжа. Волна, накатывающая на пляж, постепенно утрачивает свою энергию, а при ударе о волноотбойную стену, особенно там, где пляж узкий и береговой обрыв приближен к урезу, со всей своей энергией, отражается от нее и с силой

откатывается назад, размывая пляж. Исчезновение пляжей приводит к более интенсивному размыву подводного склона, а это, в свою очередь, инициирует деструкцию или опрокидывание стен.

Эффективность прерывистых волноломов обуславливается их способностью ослаблять энергию волн в заволноломном пространстве. В результате этого, между берегом и сооружением формируется волновая тень и происходит аккумуляция наносов. В одном случае образуется выступ или салиент, а в случае синтеза аккумулятивной формы с берегом – перейма или томболо. Применение прерывистых волноломов позволяет достичь позитивного результата в стабилизации пляжей на протяженных участках.

Развитие волн в мелководном водоеме обуславливается двумя основными факторами: ветром над морем и незначительными глубинами, которые ограничивают рост волн.

Уменьшение глубины по направлению к берегу или мелководью приводит к градационной эволюции характеристик гравитационных поверхностных волн. Волны трансформируются, когда они начинают «чувствовать» дно. Характер модификации зависит от рельефа дна и конфигурации прибрежной линии. Если при распространении волн их гребни не параллельны изобатам (линиям одинаковой глубины), то возникает рефракция (преломление) – волновые лучи уже не являются прямыми линиями (как на глубокой воде), они искривляются и стремятся стать нормальными к берегу, а фронты (гребни) – параллельными. Разворот фронтов (гребней) происходит из-за того, что участки фронта, находящиеся ближе к берегу (на наименьшей глубине), двигаются с меньшей скоростью, чем участки на большей глубине.

При рефракции волн над неровным дном меняются их амплитуды и длины, частоты же остаются практически постоянными. Значительным изменениям подвергается спектр волн. Искривление волновых лучей происходит также при дифракции волн – огибании ими препятствий. В этом случае искривление лучей уже не связано с изменениями глубины.

Явление дифракции заключается в распространении энергии волн в область волновой тени, создаваемой, например, выступом берега или искусственным сооружением типа мола или волнолома.

Физическое объяснение дифракции основано на принципе Гюйгенса, согласно которому всякая точка фронта бегущей волны служит центром новой вторичной волны, распространяющейся во все стороны, что и позволяет волнам проходить за края препятствий.

С практической точки зрения основной интерес представляет определение коэффициента дифракции $K_d = \frac{H}{H_1}$, где H и H_1 – высоты волн на границе волновой тени и внутри теневой области, соответственно.

Явление отражения наблюдается в тех случаях, когда волны встречаются на своем пути преграду – фронтальную поверхность, которая имеет достаточно большой уклон. Отражение может возникнуть над круто наклоненным дном или у откоса берегового сооружения. Отраженная волна распространяется навстречу падающей, и их суперпозиция приводит к появлению стоячей волны. Если волны отражаются от вертикальной стенки, то падающая ζ_1 и отраженная ζ_2 волны могут иметь почти одинаковую амплитуду $\zeta_1 = a \cos(\omega t - kx)$, $\zeta_2 = a \cos(\omega t + kx)$, тогда результирующее возвышение поверхности $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2a \cos \omega t \cos kx$.

В точках, где $kx = (2n + 1)\pi / 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, располагаются узлы, в которых возвышение уровня всегда равно нулю. Между узлами располагаются пучности, причём в точках $kx = n\pi$ амплитуды колебаний вдвое превышают амплитуду падающих волн. Такое увеличение волн приходится учитывать при проектировании объектов прибрежной инфраструктуры.

Для характеристики отражения волн используется коэффициент отражения, выражающий отношение амплитуд отраженной a_1 и падающей a_2 волн $K_r = a_2 / a_1$. Величина коэффициента отражения зависит от числа Иррибарена ξ , представляющего соотношение между уклоном дна s и крутизной волн в

открытом море H_∞/L_∞ : $\xi = \frac{s}{\sqrt{H_\infty/L_\infty}}$. В зависимости от величины ξ выделяют

режимы полного отражения, когда $\xi \geq \xi_c$, и частичного отражения, когда $\xi < \xi_c$. Критическое значение ξ_c определяют как $\xi_c = (\pi^3/2s)^{1/4} \approx 2/s^{1/4}$, а ко-

эффициент отражения принимает значения $K_R^2 = \begin{cases} 1, & \xi \geq \xi_c \\ (\xi/\xi_c)^{1/4}, & \xi < \xi_c \end{cases}$.

Таким образом, отражение увеличивается с ростом уклона дна и уменьшением крутизны волн. На морских берегах, сложенных песчаным или галечным материалом, практически всегда выполняется условие $\xi < \xi_c$, то есть существует лишь частичное отражение. Приближение к полному отражению для ветровых волн возможно у вертикальных стен гидротехнических сооружений.

Краткие выводы по главе 1

В главе приведен обзор теоретических сведений о поверхностных гравитационных волнах, осуществлена систематизация и обобщение волновых явлений, рассмотрена спецификация волновых процессов в прибрежной зоне моря. В работе описаны характеристики индивидуальных волн, ветровых волн на глубокой и мелкой воде.

Приведен анализ работ изучения концепции гидродинамических волновых процессов. отечественной школы исследования ветрового волнения, описаны существующие модели, на основании которых анализировались динамические процессы в Азовском море: двумерные линейные и трехмерные нелинейные модели, основанные на уравнениях мелкой воды.

Изучены существующие программные комплексы, позволяющие моделировать гидродинамические процессы, происходящие в исследуемых водоемах, среди которых особенно известными представляются ветро-волновые модели третьего поколения WAM, SWAN, WaveWatch.

Выявлены недостатки существующих волновых моделей. Проведенный обзор этих и других моделей показывает, что подавляющее большинство существующих подходов к построению моделей гидродинамических процессов в прибрежной зоне мелководных водоемов основывается на приближении мелкой воды, или в лучшем случае на гидростатическом приближении, которое не предусматривает адвективный и турбулентный теплообмен по вертикальному направлению. Поэтому построение, исследование и использование пространственно-трехмерных моделей гидродинамики, в том числе волновых процессов, предусматривающих механизмы турбулентного и адвективного обмена по вертикальной координате представляется актуальной научной и важной прикладной проблемой.

ГЛАВА 2. СТРУКТУРА И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА ДЛЯ 3D МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИКИ МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМОВ

2.1. Вертикальная структура процессов турбулентного перемешивания в водоемах

Все существующие течения жидкостей и газов делятся на два резко различных типа: спокойные и гладкие течения, именуемые ламинарными, и так называемые турбулентные течения, при которых значения скорости, давления, температуры и иных гидродинамических величин беспорядочно пульсируют, очень нерегулярно изменяясь в пространстве и во времени. В случае ламинарных движений поля гидродинамических величин во многих вариантах могут быть описаны сравнительно несложными аналитическими выражениями, находимыми путем решения отвечающих краевых задач или задач с начальными условиями для уравнений гидродинамики; если же аналитическое представление для гидродинамического поля не может быть получено, то все равно можно использовать систему дифференциальных уравнений гидродинамики, употребив численные методы ее решения. Турбулентное течение – это случайный процесс с широким спектром временных и пространственных масштабов пульсаций всех характеристик потока. Но для турбулентных течений численное или, тем более, аналитическое установление сообразных решений становится практически невыполнимым вследствие чрезвычайной нерегулярности всех гидродинамических полей.

Турбулентностью полагают явление, наблюдающееся в очень многих завихренных течениях жидкостей и газов в природе и в инженерных устройствах, и заключающееся в том, что термодинамические и гидродинамические характеристики таких течений (вектор скорости, температура, давление, концентрации примесей, плотность среды, скорость звука, электропроводность, коэффициент преломления и т.) испытывают беспорядочные флуктуации, предопределенные присутствием в этих течениях многочисленных вихрей

разнообразных размеров, и вследствие этого модифицируются в пространстве и с течением времени весьма нерегулярно.

Основным признаком турбулентности является хаотический, случайный характер изменений гидродинамических характеристик течения в пространстве и во времени. Однако не всякое течение такого рода целесообразно называть турбулентным: для ряда целей надлежит различать турбулентные течения от других видов беспорядочных движений жидкостей и газов, обладающих той или иной степенью регулярности. Так, волны, возникающие в жидкости благодаря тому, что при смещениях жидких частиц из их равновесных положений в жидкости формируются те или иные возвращающие силы. Суперпозиция большого числа волн с различными волновыми векторами и случайными амплитудами и фазами может образовывать поток с весьма нерегулярными преобразованиями в пространстве и во времени, но во многих случаях его можно отличить от турбулентности по свойствам его элементарных волновых компонент – некоторой ориентации смещений частиц относительно направления волнового вектора, по определенным сдвигам фаз между колебаниями разнообразных характеристик элементарной волны в фиксированной точке пространства, по однозначно характеризующейся по волновому вектору частоте колебаний.

Представим и другие дефиниции классиков концепции турбулентности. П. Брэдшоу писал, что турбулентность – это трехмерное нестационарное перемещение жидкости, в котором из-за растяжения вихрей образовывается постоянное распределение беспорядочных пульсаций параметров потока (скорости, давления) в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, характеризующихся граничными условиями течения. Т. Карман описывает турбулентность, как неупорядоченное движение, которое в общем случае появляется в жидкостях, газообразных или капельных средах, когда они обтекают непроницаемые поверхности или же когда соседние друг с другом потоки одной и той же жидкости следуют рядом или проникают один в другой. И. Хинце считал, что турбулентное

перемещение жидкости представляет факт беспорядочного течения, в котором всевозможные величины испытывают хаотическое изменение во времени и по пространственным координатам, и при этом могут быть выделены статистически четкие их осредненные значения [10, 12, 17, 21].

Характеристическое число и критерий подобия в гидродинамике, основанное на отношении инертности движения течения к его вязкости, впервые было предложено Д. Г. Стоксом, а названо в честь О. Рейнольдса, который распространял его использование. Рейнольдс основное внимание уделил условиям, при которых ламинарное течение в трубах превращается в турбулентное течение. При этом он установил всеобщий критерий динамического подобия двух геометрически сходственных течений вязкой несжимаемой жидкости в отсутствии внешних сил: таким критерием является совпадение у этих течений значений так называемого числа Рейнольдса – безразмерной величины, характеризующей отношение инерционных сил к силам вязкого трения в вязких жидкостях и газах: $Re = UL/\nu$, где U и L – характерные масштабы скорости и длины в рассматриваемых течениях, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости [46].

Число Рейнольдса часто применяют в задачах гидродинамики при проведении анализа размерностей, а также для нахождения динамического подобия между разнообразными экспериментальными вариантами течения жидкости. Число Рейнольдса применяется для характеристики ламинарного или турбулентного течения.

Ламинарное течение отмечается при малых числах Рейнольдса, где силы вязкости преобладают, и оно характеризуется постоянством распределения скорости течения жидкости. Критические значения чисел Рейнольдса различны для разнообразных течений, но не очень велики, так что подавляющее большинство реальных течений в природе и технике являются турбулентными.

Турбулентный режим наблюдается при больших числах Рейнольдса, когда доминируют силы инерции, которые, как правило, инициируют

хаотические вихри и прочую непостоянность потока. Рейнольдс также предложил представлять значения всех гидродинамических величин в турбулентном движении в виде суммы осредненных (регулярных) и пульсационных (нерегулярных) составляющих и изучать только относительно плавно меняющиеся осредненные величины, отказавшись от практически безнадежной идеи воссоздания всех компонентов гидродинамических полей.

Для определения средних значений О. Рейнольдс предложил использовать обычное осреднение по некоторому промежутку времени или какой-то пространственной области, но практически он применял только отдельные элементарные алгебраические характеристики вводимой операции осреднения, позволяющие значительно облегчить использование этой операции к уравнениям гидродинамики. Тем самым было введено предположение о том, что указанные обстоятельства будут выполняться для временного или пространственного осреднения при некотором выборе подходящего временного периода или пространственного объема. В настоящее время эта теория приняла несколько иной вид, и стала способом расчета турбулентных течений, основанном на осредненных по Рейнольдсу уравнениям Навье-Стокса (Reynolds averaged Navier-Stokes, RANS).

Кратко остановимся на основных характеристиках, которые используются для отображения параметров турбулентности.

Турбулентность определяют, как совокупность разномасштабных вихрей, имея ввиду «турбулентные вихри». В несжимаемой жидкости вихрь с любым распределением угловой скорости удовлетворяет уравнению неразрывности. Это означает, что турбулентное движение несжимаемой жидкости может быть представлено в виде суперпозиции разнообразных вихрей. Популярность употребления данного термина (кроме факторов исторического характера, сопряженных с гипотезой пути смещения Прандля) обусловлена тем, что при визуализации турбулентных течений эти «вихри» видимы и хорошо различимы.

Максимальный размер вихрей близок к характерному линейному масштабу задачи L . Часто перемещение наиболее крупных вихрей оказывается в

значительной степени упорядоченным (например, течение за цилиндром). Подобные структуры часто называют когерентными.

Вихри наименьшего размера диссипируют непосредственно в тепло. Их размер характеризуется так называемым колмогоровским масштабом $\eta_k = (v^3 / \varepsilon)^{0,25}$, где ε – местная скорость диссипации на единицу массы, v – кинематическая вязкость. Наибольшее количество энергии при этом переносят вихри некоторого «среднего» размера.

Каждый вихрь характеризуется «размером» и «временем жизни», которые не могут быть определены точно. Понятиями «характерный размер» и «характерное время жизни» вихрей обычно характеризуют средний размер и среднее время жизни «энергонесущих» вихрей [115].

Существует связь между размером вихрей и частотой колебаний во времени. Наиболее большие вихри, проходя через точку пространства, соответствуют колебаниям с длинным периодом, т. е. с низкой частотой (волновым числом). Небольшие вихри, напротив, отвечают высокочастотным колебаниям. В других течениях данный спектр может быть другим, но в развитой турбулентности на спектре можно отметить три участка с различным поведением. Если число Рейнольдса достаточно высоко, то между крупными вихрями, взаимодействующими с осредненным потоком, и мелкими вихрями, диссипирующими в тепло, есть область размеров вихрей, которые взаимодействуют только друг с другом. Область частот, соответствующая этим вихрям, называется инерционным интервалом, для нее характерны определенные закономерности (закон $-5/3$).

С точки зрения статистической концепции турбулентности (турбулентность – случайное колебание физической величины) максимальный интерес представляют так называемые статистические моменты (первого, второго и более высоких порядков, одно- и многоточечные). Так, например, средняя скорость – это момент первого порядка, турбулентные напряжения – моменты второго порядка. Турбулентные структуры существуют на фоне «основного» движения, которое можно выделить путем осреднения, поэтому его обычно

называют осредненным движением. Определение осредненного движения зависит от выбранного метода осреднения: по времени, по пространству, по ансамблю, по фазе. Таким образом турбулентное течение можно разбить осредненную (детерминированную) \bar{u} и пульсационную u' составляющие $u = \bar{u} + u'$. Турбулентные течения, у которых осредненная составляющая не зависит от времени, называют стационарными [76].

Для оценки интенсивности пульсаций используют дисперсию $\overline{u'^2}$. Важными понятиями, используемыми на практике, являются кинетическая энергия турбулентности $K_t = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$ и степень турбулентности потока.

На основе рассмотренных характеристик опишем вертикальную структуру процессов турбулентного перемешивания в водоемах.

В вертикальном направлении в водоеме есть три различных слоя, в которых процессы вертикального турбулентного перемешивания протекают по-разному. Это связано с граничными условиями соприкосновения различных сред (воздух-вода, вода-дно), приливно-отливными течениями, ветровыми, поверхностными и дрейфовыми волнами и т.

Рассмотрим дислокацию вертикальных слоев в столбе жидкости с разным турбулентным обменом: на границе воздух-вода – приповерхностный пороговый слой, на границе вода-дно – придонный граничный слой, и внутренний слой. Приповерхностный граничный слой представляется частью водной среды, которая прямо подвержена воздействию атмосферы, через нее характеристики атмосферы передаются в толщу вод. Приповерхностная турбулентность здесь создает слой усиленного перемешивания таких характеристик как тепло, а также взвешенных и растворенных частиц. При умеренно высоком значении скорости ветра, момент передается от ветра к водной среде через обрушение волн. Диссипация волновой энергии возникает главным образом при обрушении волн. Таким образом, обрушение волны представляется источником возрастания степеней турбулентной кинетической энергии в

приповерхностном слое и играет значительную роль в верхних слоях моря. Вертикальный перенос тепла, газов и частиц прямо зависит от процессов вертикального турбулентного обмена, а увеличение слоя турбулентного обмена, в свою очередь, соответствует возрастанию процессов обмена между воздухом и водой [68].

Главным параметром, масштабирующим турбулентность в приповерхностном граничном слое при воздействии ветра, является скорость трения на свободной границе $u_s^* = (\tau_s / \rho)^{1/2}$, с поверхностным трением τ_s и плотностью воды ρ [49].

Нижней границей приповерхностного граничного слоя является донная граница в случае мелкой воды, при этом водяной столб полностью объят турбулентными процессами. В мелководной береговой зоне, воздействие поверхностных волн может достигать донной границы и создавать волны в придонном граничном слое, которые взаимодействуют со средними приливными волнами или с придонным течением при воздействии донного трения.

В прибрежных зонах турбулентный обмен возле донной границы осуществляется при взаимодействии течений с ветровыми волнами и влияет на ход оседания взвешенных и растворенных частиц [77-78].

Придонный граничный слой определяется как расстояние в вертикальном направлении между непроницаемой донной границей и свободным потоком. Величина этого расстояния зависит от значения скорости свободного потока, донной шероховатости, от времени достаточного для развития данного придонного граничного слоя. Данный придонный граничный слой, как правило, намного тоньше внутреннего слоя, однако, турбулентный обмен в нем протекает заметно интенсивнее. В реальности процессы в придонных границах, как правило, значительно отличаются от идеализированного логарифмического закона стенки. Рельеф дна не плоский, имеет складки и различного рода растительность, которые определяются добавочным параметром – коэффициентом трения. В прибрежных мелководных системах осциллирующий

эффект поверхностных волн также воздействует на придонный граничный слой, изменяя шероховатость дна [116].

Медленно изменяющееся течение, такое как приливное имеет некоторые особенности. Когда в момент после штиля между приливом и отливом, интенсивность процессов в придонном граничном слое увеличивается, а донное трение распространяется вверх от дна. Другие турбулентные характеристики, такие как сдвиговая продукция, турбулентная кинетическая энергия и скорости диссипации также разносятся вверх на высоту, зависящую от временного лага между фазами придонного трения.

В глубоководных морях, турбулентный поверхностный и придонный граничные слои могут быть разделены стабильной вертикальной плотностной стратификацией. Эта стратификация может быть постоянной, например, возле стоков рек, но обычно она периодическая и изменяется, например, в зависимости от сезонов. Вертикальная стратификация тормозит турбулентный обмен в данном направлении, но также способствует зарождению внутренних волн.

В результате, внутренний турбулентный обмен может быть сгенерирован сдвиговым течением, сопряженным с внутренними волнами. Связь между внутренними волнами и турбулентностью трудно уловима: их трудно разделить экспериментально, и трудно отобразить в моделях [45].

Таким образом, в зависимости от того в каком водоеме мы рассматриваем течения, какие преобладающие процессы имеют место в вертикальном направлении, необходимо употреблять различные модели турбулентного обмена по вертикали.

2.2. Подходы к численному моделированию процессов турбулентного перемешивания

Под термином «модель» в отображении турбулентного движения с помощью уравнений Навье-Стокса понимают дополнительные предположения о турбулентном течении, позволяющие рассчитать его средние характеристики, с добавлением источниковых и других слагаемых или иных «модельных»

модификаций. Проблема разработки модели – задать характер модификации уравнений Навье-Стокса, обладающей установленной точностью, допускающей опытную апробацию (вид уравнений, метод вычисления коэффициентов и др.)

При построении большинства моделей турбулентности рассматривается установившееся течение – развитие турбулентности во времени не рассматривается – структура потока в среднем неизменна, пространственная структура турбулентного потока, которая подразумевается в значении структуры, средней во времени для любой точки потока.

Предположения всех статистических моделей турбулентности: существует «среднее» течение: в установившемся турбулентном течении нет полного хаоса – есть средние значения и (средние) отклонения от них; существуют минимальные и максимальные масштабы турбулентного течения: пространственные масштабы и масштабы времени, которые можно определить по анализу пульсаций.

Рассмотрим подходы к численному моделированию турбулентности:

– DNS – direct numerical simulation – прямое численное моделирование, «безмодельное» численное решение уравнений Навье-Стокса, независимое от предположений, но удовлетворяющее физическим аспектам пригодности расчётных сеток и требованиям к качеству схем аппроксимации. Настоящий критерий в DNS – анализ минимально возможного масштаба сетки:

– RANS – Reynolds averaged Navier-Stokes – осреднение уравнений Навье-Стокса;

– «Алгебраические модели» – частный случай RANS;

– LES – Large eddies simulation (версии: VLES, DES etc.) – если осреднение Рейнольдса проводить с учётом распределения пульсаций по частотам, не включая те, что разрешаются сеточным разбиением, то получится заготовка для LES-модели;

– «Transitional» модели – расширения RANS для перемежающейся турбулентности.

В настоящее время нет универсальной и точной для всех случаев модели турбулентности. Прямое численное моделирование (DNS) предполагает решение уравнений Навье-Стокса на сетке с шагами (включая шаг по времени) довольно малыми для точного разрешения всех турбулентных вихрей. Шаг сетки должен быть порядка колмогоровского масштаба. Вычислительные затраты соразмерны числу узлов в каждом направлении и количеству шагов по времени. Сейчас DNS употребим только при весьма ограниченных числах Рейнольдса [59].

Метод моделирования крупных вихрей (LES) предполагает, что крупные вихри получают энергию от осредненного потока, структура крупных вихрей значительно зависит от рассматриваемого течения, мелкие вихри получают энергию через каскадный перенос, их структура существенно более универсальна. Моделирование мелких вихрей несравненно более перспективно, чем моделирование крупных [58]. Операция фильтрации позволяет изолировать «крупные» вихри от «мелких». Применение операции фильтрации к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению так называемых отфильтрованных уравнений. Отфильтрованные уравнения замыкаются при помощи «подсеточной» модели турбулентности.

Моделируются вихри, размер которых меньше масштаба фильтра Δ , размер фильтра Δ в очевидном виде входит в модель. Зачастую на практике не используют явные фильтры, роль фильтра играет размер ячейки сетки. Подсеточная модель включает в явном виде размер ячейки сетки, вихри, которые меньше масштаба ячейки сетки естественным образом отфильтровываются, для точного разрешения вихрей, ненамного превосходящих размер ячейки, необходимо применение современных низкодиссипативных схем.

Влияние отфильтрованных («подсеточных») структур на длинноволновые структуры турбулентного потока, разрешаемые в рамках LES «точно», описывается с помощью полуэмпирических моделей, которые подобны по своей сути классическим моделям (модели называются подсеточными) [61].

Подсеточные прямые методы базируются на определении турбулентных потоков как осредненных по пространству или времени произведений отклонений составляющих скорости течений и переносимой физической величины. Для прямых подсеточных методов оценок характеристик вертикальной турбулентности есть проблема, заключающаяся в необходимости больших объемов данных в длительных и дорогостоящих экспедиционных измерениях.

Среди алгебраических модификаций существуют модели длины смешения, которые дополнены согласованием качеств численного расчета и измеренных параметров потока. Модели турбулентной вязкости, базирующиеся на длине смешения, были достаточно хорошо адаптированы для многих потоков. Исследователи турбулентности описывают такие течения как турбулентно-равновесные, то есть течения простого потока с медленно меняющимися свойствами. Большинство потоков такого типа могут быть точно описаны при расчете с помощью модели длины смешения.

Рассмотрим модель «длины смешения» Прандтля [21]. Коэффициент вертикального турбулентного обмена ν и масштаб l («длина смешения») связывают соотношением $\nu = l^2 \sqrt{2D_{ij}D_{ij}}$, где D_{ij} – компоненты тензора деформации усредненного движения: $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$, l – «длина смешения», которая равна $l = kz$, где $k = 0,41$ – константа Кармана [50].

В классической параметризации Прандтля масштаб длины смешения определяется соотношением: $l = kz$, если $z \leq 0,2H$ (z – расстояние от точки до дна, H – глубина), $l = 0,2kH$, если $z \geq 0,2H$.

В модели Кветина используется соотношение: $l = \frac{1}{\frac{1}{kz} + \frac{1}{0,65d}}$, где d – расстояние от свободной поверхности до дна.

Согласно параметризации Тсэниса: $l = kz$, если $z \leq 0,2H$; $l = 0,2kh$, если $z \geq 0,2H$ и $z \leq 0,8H$; $l = kd$, если $z \geq 0,8H$.

Пренебрегая горизонтальными градиентами \bar{u} и \bar{v} , и градиентами вертикальной компоненты скорости \bar{w} , получим следующее выражение:

$$\nu = l^2 \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \right|, \text{ где } \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2} \quad [51-52].$$

Подсеточная модель Смагоринского преимущественно часто применяется при проведении LES, она основана на гипотезе Буссинеска. Модель Д. Смагоринского известна как подсеточная модель коэффициента вертикального турбулентного обмена: турбулентность напрямую рассчитывается непосредственно из уравнений Навье-Стокса и находится естественным путем при численном моделировании, если вертикальное разрешение сетки позволяет отразить все механизмы до масштабов вязкой диссипации весьма небольших вихрей.

Таким образом, на больших вертикальных масштабах сеток при численном моделировании подавляются механизмы вертикального турбулентного обмена, что означает необходимость выбора довольно маленьких масштабов вертикального разрешения. Идея Д. Смагоринского состоит в добавлении турбулентной вязкости к молекулярной. Турбулентная вязкость, в свою очередь, определяется через длину смешения, которая соответствует масштабу малых вихрей.

Также в основании теории Д. Смагоринского положено соображение во многом схожее с соображениями Колмогорова, и предполагает, что турбулентная вязкость ν определяется средним значением скорости диссипации энергии турбулентности ε , приходящейся на единицу объема. В этом случае из соображений размерности следует $\nu \sim \varepsilon^{1/3} \cdot \Delta^{4/3}$, Δ – характерный масштаб сетки.

Величина скорости диссипации ε непосредственно не известна. Вторым соображением является то, что скорость диссипации может быть выражена через среднюю скорость деформации ячеечного масштаба $\bar{s} = 2\bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij}$, (\bar{s}_{ij} – осредненный тензор скоростей деформации), из соотношения $\bar{s} \sim \varepsilon^{2/3} \Delta^{-4/3}$ или

$\nu = C_s^2 \Delta^2 \bar{s}^{-1/2}$, где C_s – безразмерная эмпирическая константа, значение которой в формуле Смагоринского обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности. В частности, выбранное значение постоянной C_s должно обеспечивать соответствие с экспериментальными измерениями.

В случае, когда размер сетки выбран достаточно малым, средняя скорость деформации ячеечного масштаба \bar{s} равна средней скорости деформации в параметризации Прандтля D . Таким образом, мы приходим к аналогу Прандтля в виде: $\nu = C_s^2 \Delta^2 \sqrt{2D_{ij}D_{ij}}$, а пренебрегая горизонтальными градиентами \bar{u} и \bar{v} , и градиентами вертикальной компоненты скорости \bar{w} , получим

$$\text{следующее выражение: } \nu = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2}.$$

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS) требуют процедуры осреднения по Рейнольдсу $\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) d\tau$. Применение осреднения по Рейнольдсу к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению уравнений Рейнольдса, которые не замкнуты. Замыкание уравнений Рейнольдса (определение турбулентных напряжений $\tau_{ij}^T = \rho \overline{u'_i u'_j}$) производится с помощью полуэмпирических моделей турбулентности [43].

Буссинеск предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость. Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу

$$\text{Буссинеска } -\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}.$$

Применение гипотезы Буссинеска позволяет сократить число определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1, но в некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее применение приводит к получению качественно неверного результата [44].

Таким образом, существует множество способов расчета турбулентных течений. В прямом численном моделировании (DNS) разрешаются все турбулентные масштабы, поэтому использовать его возможно только при низких числах Рейнольдса. Метод моделирования крупных вихрей (LES) также довольно точен, но затраты для решения практических задач достаточно велики. В настоящее время активно формируются гибридные методы – поиск компромисса между точностью и экономичностью. На практике применяется метод решения уравнений Навье-Стокса с использованием полуэмпирических моделей турбулентности. Обычно используется гипотеза Буссинеска – линейная связь между напряжениями Рейнольдса и тензором скоростей деформаций.

Принципиальное преимущество LES состоит в том, что, из-за сравнительной однородности и изотропности мелкомасштабной турбулентности представление ее характеристик при помощи подсеточной модели оказывается значительно более точным, чем моделирование всего диапазона турбулентных пульсаций. Естественной платой за указанные важные преимущества LES является значительное увеличение вычислительных затрат, сопряженное с необходимостью, как и в случае DNS, выполнения многомерных нестационарных расчетов на достаточно мелких сетках даже в тех случаях, когда представляющее непосредственный интерес для практики осредненное течение представляется двумерным и стационарным. С другой стороны, по понятным причинам (мелкомасштабная часть спектра моделируется, а не рассчитывается точно) вычислительные ресурсы необходимые для реализации LES оказываются заметно меньшими, чем для DNS.

2.3. Моделирование турбулентного обмена на основе обработки данных натуральных наблюдений профилей скорости движения водного потока в мелководном водоеме

Подсеточные прямые методы базируются на определении турбулентных потоков как осредненных по пространству или времени произведений отклонений составляющих скорости течений и переносимой физической величины. Для прямых подсеточных методов оценок характеристик вертикальной

турбулентности существует проблема, заключающаяся в необходимости больших объемов информации, в длительных и дорогостоящих экспедиционных измерениях. В мелководных водоемах беспорядочные колебания скорости в вертикальном направлении в внушительной мере определяют все гидродинамические процессы, потому в данной работе мы рассматриваем статистические модели параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена.

Усреднение гидродинамических величин понимается как теоретико-вероятностное усреднение по соответствующему статистическому ансамблю или по времени. В этом случае можно ограничиться исключительно изучением усредненных величин, относительно плавно изменяющихся во времени и пространстве, которые чаще всего и представляют главный интерес для практики.

В настоящей работе выполнен расчет коэффициентов турбулентного обмена при использовании целого набора периодов осреднения турбулентных пульсаций скоростей. С использованием эмпирических данных о пульсациях компонент скорости был вычислен коэффициент вертикального турбулентного обмена на основании разных подходов к его параметризации, на основе анализа полученных распределений коэффициента, выбрана наиболее адекватная физическим процессам параметризация коэффициента, которая использована в программном комплексе. Было проведено сопоставление распределений коэффициента вертикального турбулентного обмена, полученного при численном эксперименте, с результатами натурных измерений, проанализированы полученные результаты вычисления с помощью аппарата математической статистики.

Все экспериментальные измерения были проведены в сравнительно глубоких частях мелководных водоемов, не включающих в себя прибрежные районы, глубина которых меньше 2 метров, в силу ошибок измерений опытного оборудования, с помощью которого получены распределения коэффициентов вертикального турбулентного обмена, составляющая 0,5 метра по вертикали у свободной поверхности и у дна [60].

Натурные данные получены в ходе экспедиций в акватории Азовского моря с использованием научно-исследовательских судов: «Платов», «Денеб», многоцелевой яхты «Буревестник». В 2017 г. исследования проводились в Центрально-Восточной части Азовского моря и в Таганрогском заливе на НИС «Денеб» Южного научного центра РАН.

Таблица 2.1. Координаты станций [79]

Название исследуемого водоема	Станция, №	Координаты	
		СШ ГГ-ММ, М	ВД ГГ-ММ, М
Азовское море	1 (49)	46°39.6'	37°20.7'
	2 (48')	46°29.7'	36°59.76'
	3 (44')	46°19.68'	36°59.76'
	4 (44'')	46°9.66'	36°59.76'
	5 (41)	46°0.06'	36°59.76'
	6 (36)	45°43.5'	36°51.54'
	7 (37)	45°25.94'	37°18.22'
	8 (37')	45°26.76'	37°32'
	9 (38)	45°39.66'	37°20.22'
	10 (39)	45°45.3'	37°35.88'
	11 (40)	45°49.62'	37°20.52'
	12 (42)	46°0'	37°20.16'
	13 (43)	45°59.64'	37°40.68'
	14 (44)	46°9.66'	37°20.28'
	15 (45)	46°19.68'	37°20.28'
	16 (46)	46°16.98'	37°48'
	17 (47)	46°27.12'	37°49.44'
	18 (48)	46°29.7'	37°20.28'
	19 (16)	46°50.04'	37°25.44'
Таганрогский залив	20 (14)	46° 52. 0'	37°38.9'
	21 (12)	46° 54. 3'	37°55.2'
	22 (8)	46° 56. 8'	38°17.6'
	23 (4)	47° 04. 8'	38°40.7'
	24 (2)	47° 09. 1'	38°56.2'

Для измерения трехмерного вектора скорости движения водной среды применялся гидрофизический ADCP-зонд Workhorse Sentinel 600. Исследования велись на 17 станциях в восточной части Азовского моря. Измерения поля течений водного потока в Азовском море проводились по вертикали, начиная от ближней зоны восприимчивости ADCP-зонда, до дна.

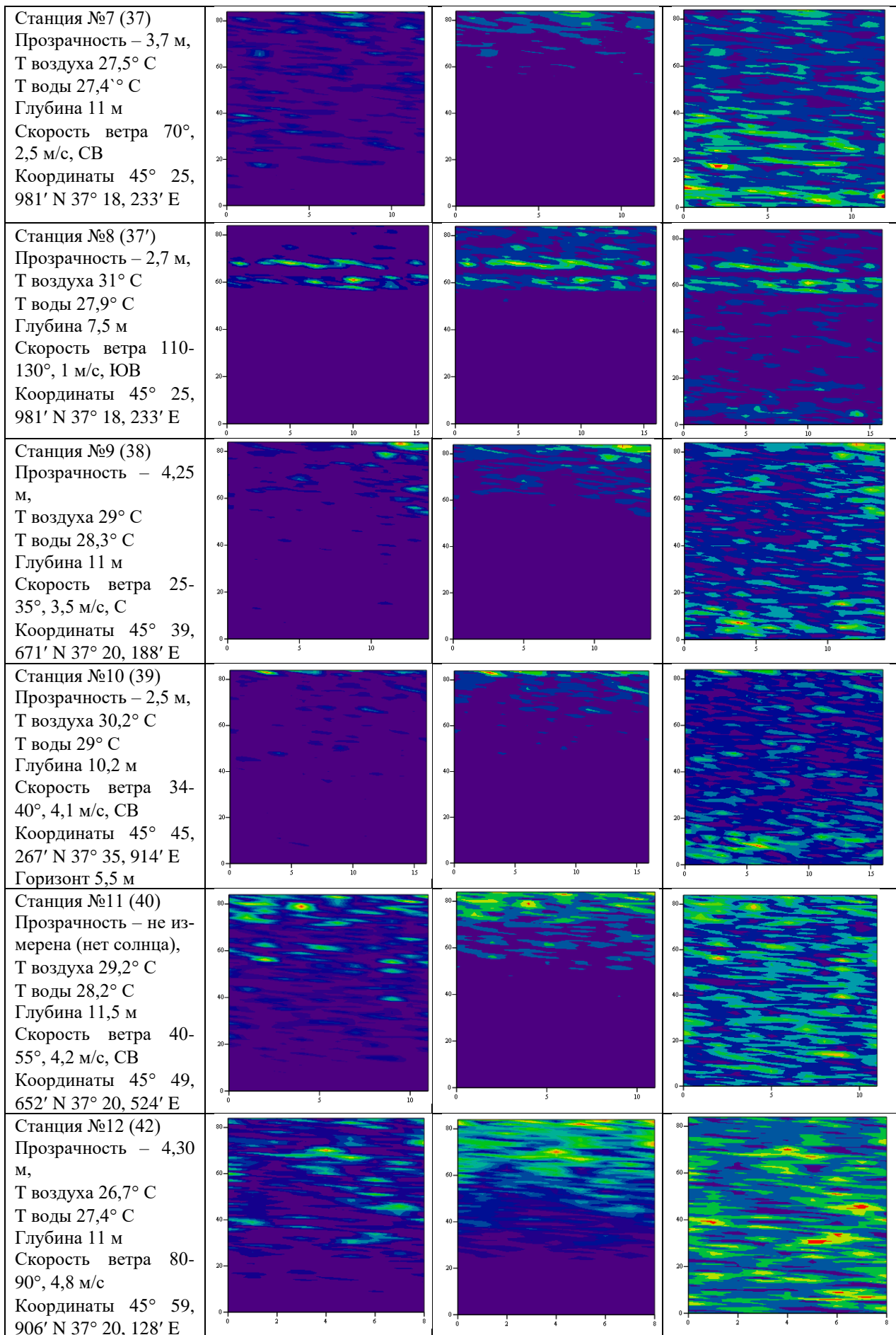
Профилограф функционирует на доплеровском эффекте, передавая акустический сигнал на фиксированной частоте и принимая отраженный на неоднородностях водной среды сигнал в размещенной под излучателем (начиная с зоны чувствительности) толще водного столба. Зонд ADCP имеет четыре излучателя, размещенные под углом к вертикали в 20° . Пульсации компонент скорости (u', v', w') вычисляются из значений лучевых скоростей.

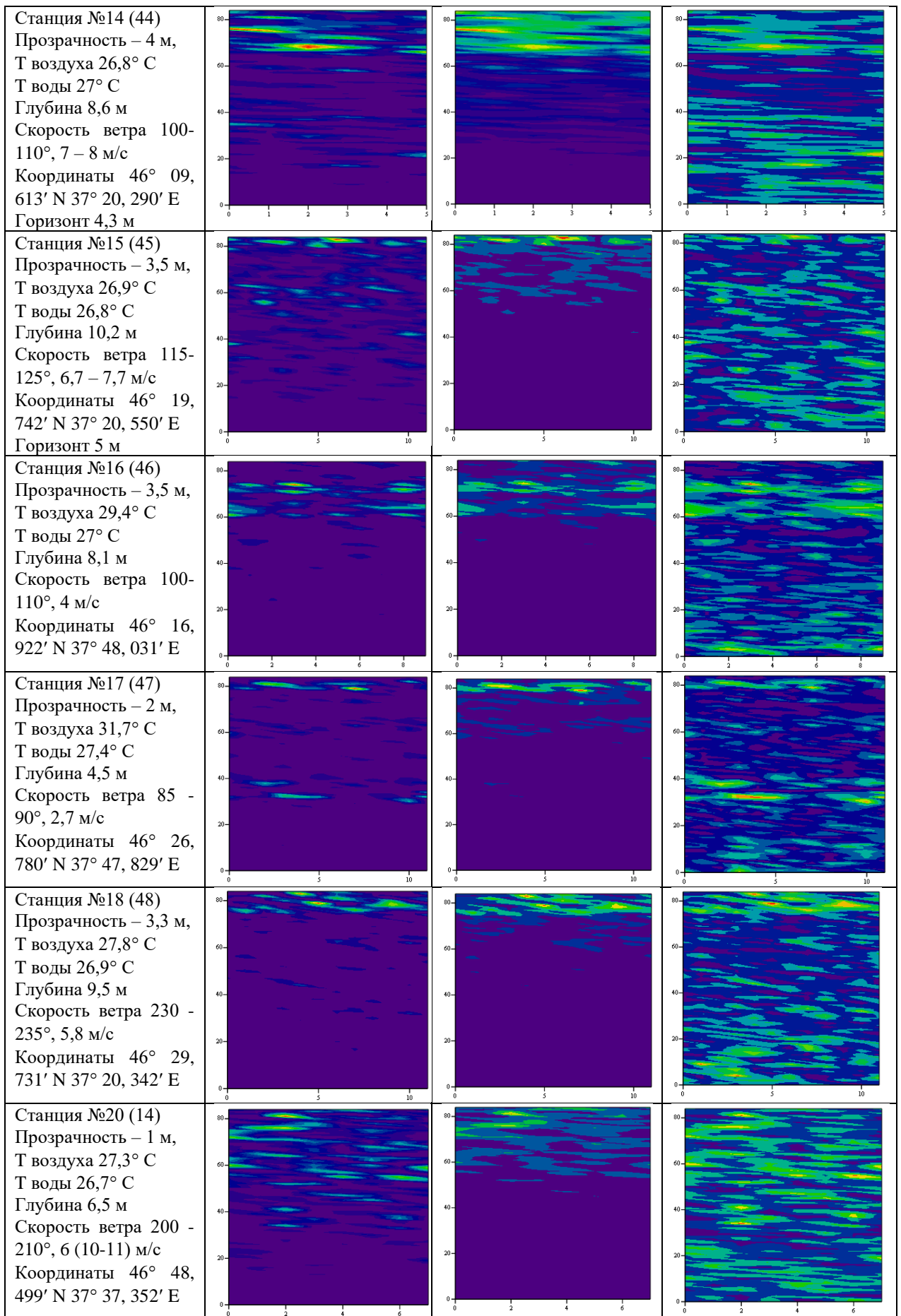
Благодаря звуковым импульсам, излучаемым в разных направлениях, возрастает достоверность нахождения скорости и обуславливается направление течения. Измерения фиксировались с интервалом в 1 с каждые 10 см на измеряемой глубине. Скорость записывалась в соответствующий документ в мм/с. По столбцам приведены значения времени на часах прибора и 128 замеров по глубине одной из компонент вектора скорости в текущий момент времени. В описываемом опыте сохранение информации происходило по трем компонентам вектора скорости водного потока в текущий момент времени. Данные о каждой компоненте вектора скорости хранятся в отдельном файле. Зонд сохраняет информацию о моментальных пульсациях водного потока в файл с расширением txt. Рабочая частота зонда составляет 614,4 кГц [42].

Для параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена рассмотрены алгебраические подсеточные модели, базирующиеся на нахождении турбулентных потоков как осредненных по пространству или времени произведений отклонений составляющих скорости течений и переносимой физической величины. Были выполнены исследования на основе нескольких подходов для вычисления коэффициента турбулентного обмена по вертикали: параметризация Белоцерковского, (столбец 2); параметризация Бусинеска (столбец 3); параметризация Смагоринского (столбец 4).

Таблица 2.2. Параметризация коэффициента турбулентного обмена

Данные о станции	П Белоцерковского	П Бусинеска	П Смагоринского
Станция №1 (49) Прозрачность – 3 м, Т воздуха 25,6° С Т воды 25,8° С Глубина 11,5 м Скорость ветра 3 м/с, направление ЮВ 138° Координаты 46° 39, 569' N 37° 20, 743' E			
Станция №2 (48') Прозрачность – 2,3 м, Т воздуха 26,3° С Т воды 27,6° С Глубина 12 м Скорость ветра 2,7 м/с Координаты 46° 29, 725' N 36° 59, 786' E			
Станция №3 (44') Прозрачность – 2 м, Т воздуха 27,1° С Т воды 26,8° С Глубина 12 м Скорость ветра 0,8 м/с, маловерие Координаты 46° 19, 693' N 36° 59, 683' E			
Станция №4 (44'') Прозрачность – 2,5 м, Т воздуха 28° С Т воды 27,3° С Глубина 10 м Координаты 46° 09, 670' N 36° 59, 756' E			
Станция №5 (41) Т воздуха 28° С Т воды 27,4° С Глубина 12,5 м Скорость ветра 54°- 59°, штиль Координаты 46° 00, 036' N 36° 59, 762' E			
Станция №6 (36) Прозрачность – 3,5 м, Т воздуха 26,8° С Т воды 27,3° С Глубина 11 м Скорость ветра 70°- 80°, 5 м/с Координаты 45° 43, 491' N 36° 51, 494' E			





На основании проведенного анализа распределений было получено оптимальное значение эмпирической константы, фигурирующей в формуле Белоцерковского и Смагоринского C_s , значение которой обеспечивает соответствие с экспериментальными измерениями, а также другими методами расчета коэффициента. При сравнении двух подходов, значение данной константы для всех точек экспедиционных измерений равно 1,4.

Таким образом, на основе рассмотренных методов расчета коэффициента вертикального турбулентного обмена получены распределения неоднородные по вертикали для всех точек измерения. Сравнительный анализ показал, что для полученных распределений коэффициента вертикального турбулентного обмена, модели показывают близкие результаты по порядку величины, а также по местоположению пиков на графиках, для оценки качества параметризации необходим более глубокий анализ с применением методов математической статистики.

2.4. Анализ результатов параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена средствами математической статистики

Все методы параметризации коэффициента вертикального турбулентного позволяют в большинстве случаев получить схожие распределения коэффициента вертикального турбулентного обмена по порядку величины и локализации максимумов-минимумов.

Явление резких скачков коэффициента на всех графиках, связано, с погрешностями в измерениях пульсаций вертикальной компоненты скорости, которая входит в расчетную формулу метода. Наличие погрешностей в измерениях пульсаций вертикальной компоненты скорости связано со многими явлениями, происходящими в момент измерения, такими как, девиация судна, колебания свободной поверхности, изменения глубины, устойчивости, ветра и волнения.

Профили коэффициента вертикального турбулентного обмена в момент времени, показывают, что параметризация Белоцерковского и Буссинеска

наиболее адекватно отражает процессы турбулентного обмена именно для мелководных водоемов, но для оценки качества параметризации необходим более глубокий анализ с применением методов математической статистики.

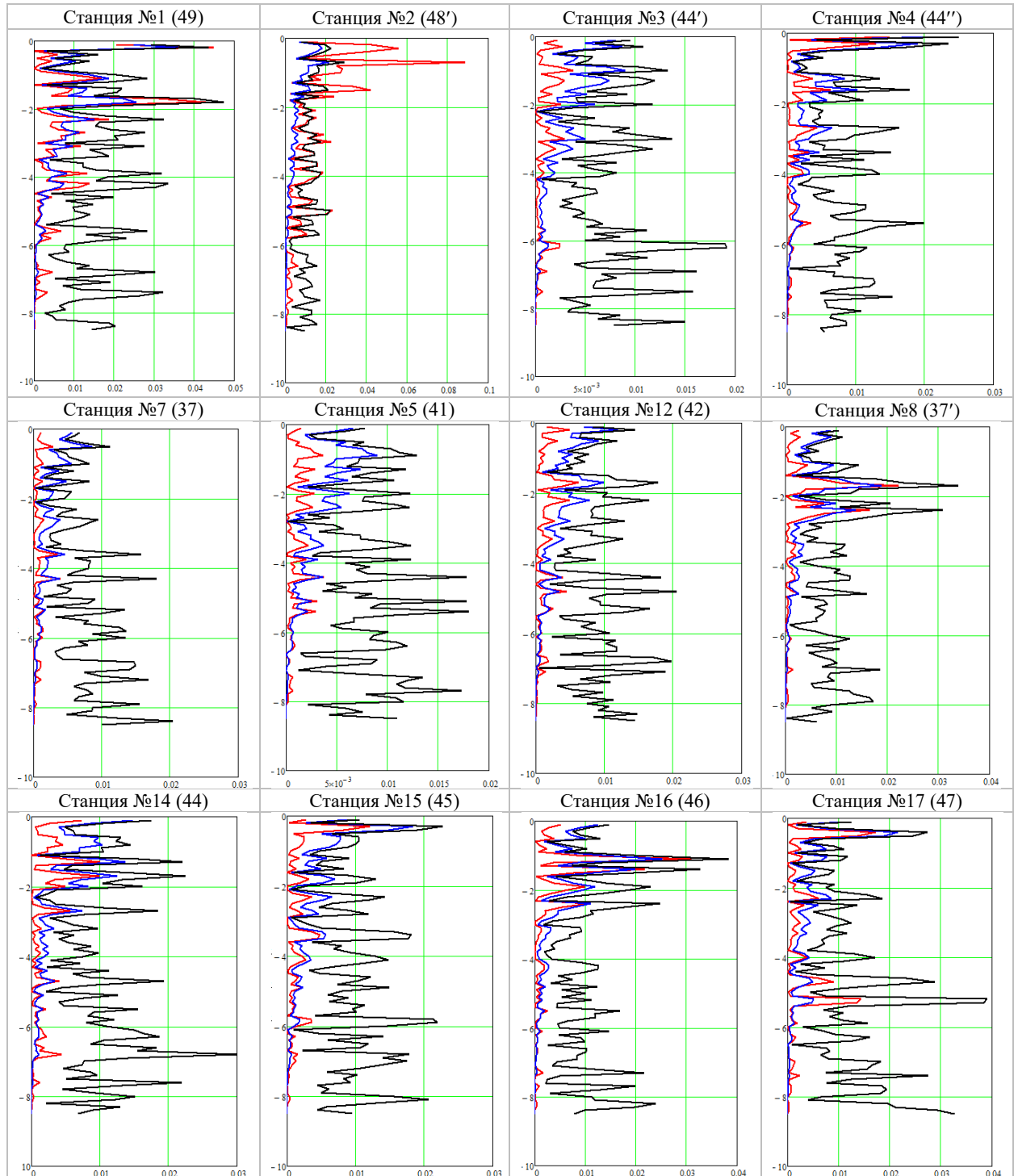


Рисунок 2.1. Коэффициент вертикального турбулентного обмена в точках (по горизонтали – значения в m^2/s , по вертикали – уровень воды от свободной поверхности ко дну, красная линия – Параметризация Белоцерковского, синяя – Буссинеска, черная – Смагоринского)

Найдена средняя величина коэффициента вертикального турбулентного обмена, размах вариации, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, коэффициент осцилляции, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса и осуществлялась проверка гипотезы о нормальности распределения.

Коэффициент вариации $K_{var} = \frac{\sigma}{\bar{v}} \cdot 100\%$ является мерой устойчивости значений, чем меньше K_{var} , тем надежнее все выводы и оценки статистического распределения. Ряд считается достаточно устойчивым, выводы на его основе надежными, при $K_{var} > 80\%$ результаты статистического анализа, полученные на основе этого ряда, использовать некорректно.

Коэффициент осцилляции отражает относительную колеблемость крайних значений признака вокруг средней: $K_o = \frac{R}{\bar{v}} \cdot 100\%$, где R – размах вариации.

Коэффициент асимметрии $A_s = \frac{\sum (v_i - \bar{v})^3}{n \cdot \sigma^3}$ является мерой скошенности распределения. Для симметричных распределений $A_s = 0$, при правосторонней скошенности $A_s > 0$, а при левосторонней $A_s < 0$.

Коэффициент эксцесса $E_x = \frac{\sum (v_i - \bar{v})^4}{n \cdot \sigma^4} - 3$ равен 0 для умеренно крутых распределений, в частности для нормальных распределений. Для более крутых, чем нормальное распределений, $E_x > 0$, для более сглаженных – $E_x < 0$.

Проверка гипотезы о нормальности распределения по осуществлялась в 3 этапа: если $|x_{max} - \bar{x}| < 3\sigma$ и $|x_{min} - \bar{x}| < 3\sigma$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности, если $|A_s| < 1$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности, если $|E_x| < 1$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности. Если на каждом из шагов нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности, то гипотеза о нормальности принималась. В противном случае, гипотеза о нормальности отвергалась.

Значения коэффициента вариации для параметризации Смагоринского и Буссинеска совпали почти во всех точках и были минимальными по сравнению с параметризацией Белоцерковского, при этом для всех трех параметризаций значение данного коэффициента, показывают, что ряд считается достаточно устойчивым, и выводы на его основе надежными.

Таблица 2.3. Анализ результатов параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена

Станция	Параметризация	\bar{v}	R_e	D	σ	K_{var} %	K_o %	A_s	E_x	Проверка гипотезы о нормальности распределения
1	Белоцерковский	0,16	0,45	0,0182	0,135	87	290	1,15	0,54	-
	Буссинеск	0,13	0,22	0,0041	0,064	49	166	0,23	-0,57	+
	Смагоринский	0,12	0,20	0,0035	0,059	49	166	0,25	-0,57	+
2	Белоцерковский	0,58	0,79	0,0430	0,207	36	138	0,00	3,78	-
	Буссинеск	0,16	0,19	0,0024	0,049	30	120	0,41	4,81	-
	Смагоринский	0,15	0,18	0,0021	0,046	30	120	0,44	4,82	-
3	Белоцерковский	0,09	0,33	0,0093	0,097	102	344	1,12	0,17	-
	Буссинеск	0,10	0,20	0,0033	0,058	59	200	0,45	-0,88	+
	Смагоринский	0,09	0,18	0,0028	0,053	59	199	0,46	-0,89	+
4	Белоцерковский	0,11	0,39	0,0144	0,120	104	341	0,93	-0,03	+
	Буссинеск	0,10	0,22	0,0049	0,070	68	207	0,25	-1,28	-
	Смагоринский	0,10	0,20	0,0042	0,065	68	208	0,26	-1,27	-
5	Белоцерковский	0,08	0,18	0,0035	0,059	74	229	0,48	0,82	+
	Буссинеск	0,10	0,11	0,0012	0,034	34	109	0,14	0,13	+
	Смагоринский	0,09	0,10	0,0010	0,031	34	108	0,15	0,15	+
6	Белоцерковский	0,21	0,67	0,0544	0,233	110	318	1,31	0,17	-
	Буссинеск	0,15	0,26	0,0072	0,085	58	174	0,89	-0,51	+
	Смагоринский	0,14	0,24	0,0061	0,078	57	173	0,89	-0,51	+
7	Белоцерковский	0,10	0,55	0,0239	0,155	161	578	2,16	3,52	-
	Буссинеск	0,09	0,25	0,0052	0,072	81	277	1,49	1,14	-
	Смагоринский	0,08	0,23	0,0044	0,067	81	278	1,49	1,15	-
8	Белоцерковский	0,10	0,33	0,0068	0,082	84	337	1,67	2,60	-
	Буссинеск	0,11	0,17	0,0019	0,044	41	157	0,85	0,28	+
	Смагоринский	0,10	0,16	0,0016	0,040	41	156	0,84	0,24	+
9	Белоцерковский	0,09	0,22	0,0037	0,060	64	233	0,37	-0,47	+
	Буссинеск	0,11	0,15	0,0018	0,042	40	141	-0,49	-0,54	+
	Смагоринский	0,10	0,14	0,0015	0,039	40	142	-0,49	-0,54	+

10	Белоцерковский	0,10	0,25	0,0056	0,075	75	248	0,86	-0,25	+
	Буссинеск	0,11	0,15	0,0020	0,044	41	139	0,20	-0,78	+
	Смагоринский	0,10	0,14	0,0017	0,041	41	140	0,20	-0,78	+
11	Белоцерковский	0,04	0,12	0,0014	0,037	92	293	0,81	-0,44	+
	Буссинеск	0,06	0,11	0,0013	0,036	55	170	0,21	-1,22	-
	Смагоринский	0,06	0,10	0,0011	0,033	55	170	0,22	-1,20	-
12	Белоцерковский	0,08	0,22	0,0043	0,066	86	295	2,04	2,62	-
	Буссинеск	0,10	0,13	0,0013	0,036	37	136	1,62	1,83	-
	Смагоринский	0,09	0,12	0,0011	0,033	37	136	1,63	1,84	-
14	Белоцерковский	0,07	0,13	0,0024	0,049	69	183	-0,08	-1,56	-
	Буссинеск	0,09	0,11	0,0017	0,041	46	124	-0,42	-1,35	-
	Смагоринский	0,08	0,10	0,0015	0,038	46	124	-0,43	-1,35	-
15	Белоцерковский	0,10	0,36	0,0076	0,087	89	363	2,10	3,97	-
	Буссинеск	0,11	0,20	0,0021	0,046	43	185	0,78	1,39	-
	Смагоринский	0,10	0,18	0,0018	0,042	43	185	0,77	1,36	-
16	Белоцерковский	0,30	1,05	0,1214	0,348	115	349	1,27	0,05	-
	Буссинеск	0,17	0,37	0,0123	0,111	65	216	0,68	-0,60	+
	Смагоринский	0,16	0,34	0,0105	0,103	65	216	0,68	-0,60	+
17	Белоцерковский	0,12	0,46	0,0199	0,141	114	374	1,48	0,88	-
	Буссинеск	0,11	0,22	0,0043	0,066	59	195	0,93	-0,27	+
	Смагоринский	0,10	0,20	0,0037	0,061	59	196	0,93	-0,27	+
18	Белоцерковский	0,10	0,31	0,0075	0,087	86	304	1,19	0,80	-
	Буссинеск	0,11	0,17	0,0026	0,051	48	163	0,31	-0,57	+
	Смагоринский	0,10	0,16	0,0022	0,047	48	164	0,31	-0,58	+
19	Белоцерковский	0,03	0,06	0,0004	0,020	62	194	0,84	-0,68	+
	Буссинеск	0,06	0,06	0,0004	0,020	31	101	0,50	-0,84	+
	Смагоринский	0,06	0,06	0,0003	0,018	31	102	0,48	-0,81	+

Таким образом, на основе статистического анализа, было выявлено, что наименьшим среднеквадратичным отклонением обладают коэффициенты вертикального турбулентного обмена, полученные с помощью параметризации Смагоринского. При данной параметризации при проверке гипотезы о нормальности распределения в большинстве случаев гипотеза принималась.

Краткие выводы по главе 2

В главе приведен обзор теоретических сведений о вертикальной структуре процессов турбулентного перемешивания в водоемах. В работе описаны основные характеристики, которые используются для описания свойств турбулентности, изучено распределение вертикальных слоев в столбе жидкости с различным турбулентным обменом: на границе воздух-вода – приповерхностный граничный слой, на границе вода-дно – придонный граничный слой, и внутренний слой.

Рассмотрены подходы к численному моделированию турбулентности. Выявлены важные преимущества LES на основе данного подхода выполнен расчет коэффициентов турбулентного обмена при использовании целого набора периодов осреднения турбулентных пульсаций скоростей. Было проведено сравнение распределения коэффициента вертикального турбулентного обмена, полученного при численном эксперименте, с результатами натуральных измерений, проанализированы полученные результаты вычисления с помощью аппарата математической статистики.

Сравнительный анализ полученных распределений коэффициента вертикального турбулентного обмена, показал, что модели показывают близкие результаты по порядку величины, по местоположению пиков на графиках, для оценки качества параметризации необходим более глубокий анализ с применением методов математической статистики.

Таким образом, на основе статистического анализа, было выявлено, что наименьшим отклонением обладают коэффициенты вертикального турбулентного обмена, полученные с помощью параметризации Смагоринского. При данной параметризации при проверке гипотезы о нормальности распределения в абсолютном большинстве случаев гипотеза принималась.

ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМ

3.1. Трехмерная математическая модель гидродинамики мелководных водоемов

Пространственно-неоднородная 3D модель волновой гидродинамики мелководного водоема включает [22]:

– уравнения движения (Навье – Стокса):

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu u'_y)'_y + (v u'_z)'_z, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z, \\ w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + g; \end{aligned} \quad (3.1)$$

– уравнение неразрывности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ – вектор скорости водного потока мелководного водоема; ρ – плотность водной среды; p – гидродинамическое давление; g – ускорение свободного падения; μ, ν – коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Добавим граничные условия:

– на входе (левая граница): $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0, p'_n = 0,$

– донная граница: $\rho \mu (\mathbf{V}_\tau)'_n = -\tau, \mathbf{V}_n = 0, p'_n = 0,$

– боковая граница: $(\mathbf{V}_\tau)'_n = 0, \mathbf{V}_n = 0, p'_n = 0,$

– верхняя граница: $\rho \mu (\mathbf{V}_\tau)'_n = -\tau, p'_n = 0, w = -\omega - p'_t / \rho g,$

где ω – интенсивность испарения жидкости, $\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_\tau$ – нормальная и тангенциальная составляющая вектора скорости, \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности,

описывающей границу расчетной области, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$ – вектор тангенциального напряжения [14].

Пусть $\boldsymbol{\tau} = \rho_a C d_s |\mathbf{w}| \mathbf{w}$ – вектор тангенциального напряжения свободной поверхности, \mathbf{w} – вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a – плотность атмосферы, $C d_s$ – безразмерный коэффициент поверхностного сопротивления, зависящий от скорости ветра, $C d_s = 0,0024$ [33].

Вектор тангенциального напряжения для дна зададим с учетом движения воды следующим образом: $\boldsymbol{\tau} = \rho C d_b |\mathbf{V}| \mathbf{V}$, $C d_b = g k^2 / h^{1/3}$, где $k = 0,04$ – коэффициент шероховатости; $h = H + \eta$ – глубина акватории, [м]; H – глубина до невозмущенной поверхности, [м]; η – высота свободной поверхности относительно геоида, [м].

Выполним аппроксимацию расчетной области. Расчетная область вписана в параллелепипед, вводится равномерная сетка:

$$\bar{w}_h = \left\{ t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}, j = \overline{0..N_y}, k = \overline{0..N_z}; \right. \\ \left. N_t \tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_z h_z = l_z \right\},$$

где τ – шаг по времени, h_x, h_y, h_z – шаги по пространству, N_t – количество временных слоев, T – верхняя граница по временной координате, N_x, N_y, N_z – количество узлов по пространственным координатам, l_x, l_y, l_z – границы параллелепипеда в направлении осей Ox, Oy и Oz [27].

Через $o_{i,j,k}$ обозначена заполненность ячейки (i, j, k) . Ячейка заполнена полностью при $o_{i,j,k} = 1$ [7]. Заполненность ячеек вычисляем по формуле:

$$o_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k} + P_{i-1,j,k} + P_{i,j-1,k} + P_{i-1,j-1,k}}{4\rho g h_z}. \quad (3.3)$$

Вводятся коэффициенты $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$, описывают степень заполненности контрольных областей [26].

Значение параметра q_0 , описывает степень заполненности области $D_0 = \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$, параметр q_1 , описывает степень заполненности области $D_1 = D_0 \cap \{x > x_i\}$, параметр q_2 , описывает степень заполненности области $D_2 = D_0 \cap \{x < x_i\}$, параметр q_3 , описывает степень заполненности области $D_3 = D_0 \cap \{y > y_j\}$, параметр q_4 , описывает степень заполненности области $D_4 = D_0 \cap \{y < y_j\}$, параметр q_5 , описывает степень заполненности области $D_5 = D_0 \cap \{z > z_k\}$, параметр q_6 , описывает степень заполненности области $D_6 = D_0 \cap \{z < z_k\}$.

Таким образом, коэффициенты q_m , вычисляются по формулам [110]:

$$(q_m)_{i,j,k} = \frac{S_{\Omega_m}}{S_{D_m}}, (q_1)_{i,j,k} = \frac{o_{i+1,j,k} + o_{i+1,j+1,k} + o_{i+1,j,k+1} + o_{i+1,j+1,k+1}}{4},$$

$$(q_2)_{i,j,k} = \frac{o_{i,j,k} + o_{i,j+1,k} + o_{i,j,k+1} + o_{i,j+1,k+1}}{4},$$

$$(q_3)_{i,j,k} = \frac{o_{i+1,j+1,k} + o_{i,j+1,k} + o_{i+1,j+1,k+1} + o_{i,j+1,k+1}}{4},$$

$$(q_4)_{i,j,k} = \frac{o_{i,j,k} + o_{i+1,j,k} + o_{i,j,k+1} + o_{i+1,j,k+1}}{4},$$

$$(q_5)_{i,j,k} = \frac{o_{i,j,k+1} + o_{i+1,j,k+1} + o_{i+1,j+1,k+1} + o_{i,j+1,k+1}}{4},$$

$$(q_6)_{i,j,k} = \frac{o_{i,j,k} + o_{i+1,j,k} + o_{i+1,j+1,k} + o_{i,j+1,k}}{4},$$

$$(q_0)_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left((q_1)_{i,j,k} + (q_2)_{i,j,k} \right).$$

Осуществим аппроксимацию задачи расчета поля скорости на промежуточном временном слое по пространственным переменным. На основе математического метода баланса с учетом коэффициентов уровня заполненности контрольных площадей дискретный аналог уравнения для вычисления первой компоненты вектора скорости на промежуточном временном слое имеет вид:

$$\begin{aligned}
& (q_0)_{i,j,k} \frac{\tilde{u}_{i,j,k} - u_{i,j,k}}{\tau} + \tag{3.4} \\
& + (q_1)_{i,j,k} u_{i+1/2,j,k} \frac{\bar{u}_{i+1,j,k} - \bar{u}_{i,j,k}}{2h_x} + (q_2)_{i,j,k} u_{i-1/2,j,k} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i-1,j,k}}{2h_x} + \\
& + (q_3)_{i,j,k} v_{i,j+1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,j+1,k} - \bar{u}_{i,j,k}}{2h_y} + (q_4)_{i,j,k} v_{i,j-1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i,j-1,k}}{2h_y} + \\
& + (q_5)_{i,j,k} v_{i,j,k+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j,k+1} - \bar{u}_{i,j,k}}{2h_z} + (q_6)_{i,j,k} v_{i,j,k-1/2} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i,j,k-1}}{2h_z} = \\
& = (q_1)_{i,j,k} \mu_{i+1/2,j,k} \frac{\bar{u}_{i+1,j,k} - \bar{u}_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} \mu_{i-1/2,j,k} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \\
& + (q_3)_{i,j,k} \mu_{i,j+1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,j+1,k} - \bar{u}_{i,j,k}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j,k} \mu_{i,j-1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \\
& + (q_5)_{i,j,k} v_{i,j,k+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j,k+1} - \bar{u}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} v_{i,j,k-1/2} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i,j,k-1}}{h_z^2} + \\
& + \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \frac{\rho_a C_p \left(\left| \vec{V}_a - \vec{V} \right| \right) (u_a - u) \left| \vec{V}_a - \vec{V} \right|}{\rho h_z} - \\
& - \left((q_6)_{i,j,k} - (q_5)_{i,j,k} \right) H \left((q_6)_{i,j,k} - (q_5)_{i,j,k} \right) \frac{\rho_v C_p \left(\left| \vec{V} \right| \right) u \left| \vec{V} \right|}{\rho h_z} + \\
& + 2\Omega (q_0)_{i,j,k} (v_{i,j,k} \sin \theta - w_{i,j,k} \cos \theta),
\end{aligned}$$

где $\vec{V}_a = \{u_a, v_a\}$ – скорость ветра, $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Запишем сеточные уравнения для задачи вычисления поля скорости на промежуточном временном слое. Используем каноническую форму с использованием семиточечного шаблона [82-83]:

$$A(P)\tilde{u}(P) - \sum_{i=1}^6 B(P, Q_i)\tilde{u}(Q_i) = F_u(P), \tag{3.5}$$

где $P \equiv (x_i, y_j, z_k)$ – центр шаблона, $Q_1(P) = (x_{i+1}, y_j, z_k)$, $Q_2(x_{i-1}, y_j, z_k)$,

$Q_3(x_i, y_{j+1}, z_k), Q_4(x_i, y_{j-1}, z_k), Q_5(x_i, y_j, z_{k+1}), Q_6(x_i, y_j, z_{k-1})$ – окрестность центра.

Запишем коэффициенты сеточных уравнений окрестности центра шаблона имеют вид:

$$B(P, Q_1) = \sigma \left(-\frac{u(Q_1) + u(P)}{4h_x} + \frac{\mu(Q_1) + \mu(P)}{2h_x^2} \right) q_1(P),$$

$$B(P, Q_2) = \sigma \left(\frac{u(Q_2) + u(P)}{4h_x} + \frac{\mu(Q_2) + \mu(P)}{2h_x^2} \right) q_2(P),$$

$$B(P, Q_3) = \sigma \left(-\frac{v(Q_3) + v(P)}{4h_y} + \frac{\mu(Q_3) + \mu(P)}{2h_y^2} \right) q_3(P),$$

$$B(P, Q_4) = \sigma \left(\frac{v(Q_4) + v(P)}{4h_y} + \frac{\mu(Q_4) + \mu(P)}{2h_y^2} \right) q_4(P),$$

$$B(P, Q_5) = \sigma \left(-\frac{v(Q_5) + v(P)}{4h_z} + \frac{\mu(Q_5) + \mu(P)}{2h_z^2} \right) q_5(P),$$

$$B(P, Q_6) = \sigma \left(\frac{v(Q_6) + v(P)}{4h_z} + \frac{\mu(Q_6) + \mu(P)}{2h_z^2} \right) q_6(P).$$

Коэффициент в центре шаблона имеет вид:

$$A(P) = \frac{q_0(P)}{\tau} + \sum_{i=1}^6 B(P, Q_i).$$

Запишем вспомогательные коэффициенты для правой части сеточного уравнения:

$$B(P, Q_8) = (1 - \sigma) \left(-\frac{u(Q_1) + u(P)}{4h_x} + \frac{\mu(Q_1) + \mu(P)}{2h_x^2} \right) q_1(P),$$

$$B(P, Q_9) = (1 - \sigma) \left(\frac{u(Q_2) + u(P)}{4h_x} + \frac{\mu(Q_2) + \mu(P)}{2h_x^2} \right) q_2(P),$$

$$B(P, Q_{10}) = (1 - \sigma) \left(-\frac{v(Q_3) + v(P)}{4h_y} + \frac{\mu(Q_3) + \mu(P)}{2h_y^2} \right) q_3(P),$$

$$B(P, Q_{11}) = (1 - \sigma) \left(\frac{v(Q_4) + v(P)}{4h_y} + \frac{\mu(Q_4) + \mu(P)}{2h_y^2} \right) q_4(P),$$

$$B(P, Q_{12}) = (1 - \sigma) \left(-\frac{v(Q_5) + v(P)}{4h_z} + \frac{v(Q_5) + v(P)}{2h_z^2} \right) q_5(P),$$

$$B(P, Q_{13}) = (1 - \sigma) \left(\frac{v(Q_6) + v(P)}{4h_z} + \frac{v(Q_6) + v(P)}{2h_z^2} \right) q_6(P),$$

$$B(P, Q_7) = \frac{q_0(P)}{\tau} - \sum_{i=8}^{13} B(P, Q_i).$$

Таким образом, правые части сеточных уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned} F_u(P) = & B(P, Q_7)u(P) + \sum_{i=1}^6 B(P, Q_{i+7})u(Q_i) + \\ & + (q_5(P) - q_6(P))H(q_5(P) - q_6(P)) \frac{\rho_a C_p (|\vec{V}_a - \vec{V}(P)|) (u_a - u(P)) |\vec{V}_a - \vec{V}(P)|}{\rho(P)h_z} - \\ & - (q_6(P) - q_5(P))H(q_6(P) - q_5(P)) \frac{\rho_v C_p (|\vec{V}(P)|) u(P) |\vec{V}(P)|}{\rho(P)h_z} + \\ & + 2\Omega q_0(P)(v(P)\sin\theta - w(P)\cos\theta). \end{aligned}$$

Коэффициенты сеточных уравнений для нахождения каждого из трех компонент вектора скорости на промежуточном временном слое совпадают. Правые части для расчета оставшихся двух компонент вектора скорости имеют вид:

$$\begin{aligned} F_v(P) = & B(P, Q_7)v(P) + \sum_{i=1}^6 B(P, Q_{i+7})v(Q_i) + \\ & + (q_5(P) - q_6(P))H(q_5(P) - q_6(P)) \frac{\rho_a C_p (|\vec{V}_a - \vec{V}(P)|) (v_a - v(P)) |\vec{V}_a - \vec{V}(P)|}{\rho(P)h_z} - \\ & - (q_6(P) - q_5(P))H(q_6(P) - q_5(P)) \frac{\rho_v C_p (|\vec{V}(P)|) v(P) |\vec{V}(P)|}{\rho(P)h_z} - \\ & - 2\Omega q_0(P)u(P)\sin\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_w(P) = & B(P, Q_7)w(P) + \sum_{i=1}^6 B(P, Q_{i+7})w(Q_i) + \\
& - (q_6(P) - q_5(P))H(q_6(P) - q_5(P)) \frac{\rho_v C_p (|\vec{V}(P)|) w(P) |\vec{V}(P)|}{\rho(P) h_z} + \\
& + 2\Omega q_0(P)u(P)\cos\theta.
\end{aligned}$$

Выполним аппроксимацию задачи расчета давления по пространственным переменным. Запишем дискретный аналог уравнения для расчета давления в виде:

$$\begin{aligned}
& (q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \\
& + (q_3)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j+1,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \\
& + (q_5)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k+1} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j,k-1}}{h_z^2} + \\
& + \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \left(\frac{\hat{p}_{i,j,k} - p_{i,j,k}}{\tau^2 h_z g} + \frac{\omega \hat{p}_{i,j,k}}{\tau h_z} \right) = \\
& = (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - p_{i,j,k}}{\tau^2} + \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{u})_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} + \\
& + \frac{(q_3)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{v})_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{v})_{i,j-1/2,k}}{\tau h_y} + \\
& + \frac{(q_5)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{v})_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{v})_{i,j,k-1/2}}{\tau h_z} + \\
& + \left(\frac{(q_2)_{i,j,k} - (q_1)_{i,j,k}}{\tau h_x} (\hat{\rho} \tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k} - (q_3)_{i,j,k}}{\tau h_y} (\hat{\rho} \tilde{v})_{i,j,k} \right) m_{i,j,k},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $(\hat{\rho} \tilde{u})_{i+1/2,j,k} = (\hat{\rho}_{i+1,j,k} \tilde{u}_{i+1,j,k} + \hat{\rho}_{i,j,k} \tilde{u}_{i,j,k})/2$, $m_{i,j,k}$ – маска граничного условия, если узел (i, j, k) принадлежит боковой или верхней границе $m_{i,j,k} = 0$, на входе или на выходе $m_{i,j,k} = 1$.

Запишем сеточные уравнения для задачи расчета давления в канонической форме:

$$A(P)\hat{p}(P) - \sum_{i=1}^6 B(P, Q_i)\hat{p}(Q_i) = F(P).$$

Коэффициенты окрестности центра шаблона имеют вид:

$$B(P, Q_i) = \frac{q_i(P)}{h_x^2}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Коэффициент в центре шаблона имеет вид:

$$A(P) = \frac{(q_5(P) - q_6(P))H(q_5(P) - q_6(P))}{\tau^2 h_z \rho(P)} + \sum_{i=1}^6 B(P, Q_i).$$

Правая часть примет вид:

$$\begin{aligned} F(P) = & (q_5(P) - q_6(P))H(q_5(P) - q_6(P)) \left(\frac{p(P)}{\tau^2 h_z g} - \frac{\omega \hat{p}(P)}{\tau h_z} \right) - \\ & - q_0(P) \frac{\hat{p}(P) - \rho(P)}{\tau^2} - \frac{q_1(P)(\hat{p}(P)\tilde{u}(P) + \hat{p}(Q_1)\tilde{u}(Q_1))}{2\tau h_x} + \\ & + \frac{q_2(P)(\hat{p}(P)\tilde{u}(P) + \hat{p}(Q_2)\tilde{u}(Q_2))}{2\tau h_x} - \frac{q_3(P)(\hat{p}(P)\tilde{u}(P) + \hat{p}(Q_3)\tilde{u}(Q_3))}{2\tau h_y} + \\ & + \frac{q_4(P)(\hat{p}(P)\tilde{u}(P) + \hat{p}(Q_4)\tilde{u}(Q_4))}{2\tau h_y} - \frac{q_5(P)(\hat{p}(P)\tilde{u}(P) + \hat{p}(Q_5)\tilde{u}(Q_5))}{2\tau h_z} + \\ & + \frac{q_6(P)(\hat{p}(P)\tilde{u}(P) + \hat{p}(Q_6)\tilde{u}(Q_6))}{2\tau h_z} - \\ & - \left(\frac{q_2(P) - q_1(P)}{\tau h_x} \hat{p}(P)\tilde{u}(P) + \frac{q_4(P) - q_3(P)}{\tau h_y} \hat{p}(P)\tilde{v}(P) \right) m(P). \end{aligned}$$

Запишем аппроксимацию задачи уточнения поля скорости по давлению.

Дискретный аналог системы уравнений примет следующий вид:

$$(q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{u}_{i,j,k} - \tilde{u}_{i,j,k}}{\tau} = - \left((q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{2h_x \rho_{i,j,k}} + (q_2)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i-1,j,k}}{2h_x \rho_{i,j,k}} \right),$$

$$\begin{aligned} (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{v}_{i,j,k} - \tilde{v}_{i,j,k}}{\tau} &= - \left((q_3)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j+1,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{2h_y \rho_{i,j,k}} + (q_4)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j-1,k}}{2h_y \rho_{i,j,k}} \right), \\ (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{w}_{i,j,k} - \tilde{w}_{i,j,k}}{\tau} &= - \left((q_5)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k+1} - \hat{p}_{i,j,k}}{2h_z \rho_{i,j,k}} + (q_6)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j,k-1}}{2h_z \rho_{i,j,k}} \right). \end{aligned}$$

Уточнение поле скорости происходит согласно выражениям:

$$\begin{aligned} \hat{u}(P) &= \tilde{u}(P) - \tau \left(q_1(P) \frac{\hat{p}(Q_1) - \hat{p}(P)}{2h_x \rho(P) q_0(P)} + q_2(P) \frac{\hat{p}(P) - \hat{p}(Q_2)}{2h_x \rho(P) q_0(P)} \right), \\ \hat{v}(P) &= \tilde{v}(P) - \tau \left(q_3(P) \frac{\hat{p}(Q_3) - \hat{p}(P)}{2h_y \rho(P) q_0(P)} + q_4(P) \frac{\hat{p}(P) - \hat{p}(Q_4)}{2h_y \rho(P) q_0(P)} \right), \\ \hat{w}(P) &= \tilde{w}(P) - \tau \left(q_5(P) \frac{\hat{p}(Q_5) - \hat{p}(P)}{2h_z \rho(P) q_0(P)} + q_6(P) \frac{\hat{p}(P) - \hat{p}(Q_6)}{2h_z \rho(P) q_0(P)} \right). \end{aligned}$$

Начальное приближение для задачи расчета. Расчет распределения давлений основан на решении уравнении Пуассона:

$$p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz} = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau}. \quad (3.7)$$

Проинтегрируем уравнение (3.7) на отрезке $z \in [-h, \xi]$:

$$\int_{-h}^{\xi} (p''_{xx} + p''_{yy} + p''_{zz}) dz = \int_{-h}^{\xi} \left(\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau} \right) dz,$$

где ξ – функция возвышения уровня; h – глубина водоема.

После упрощения выражение имеет вид:

$$\int_{-h}^{\xi} (p''_{xx} + p''_{yy}) dz = \int_{-h}^{\xi} \left(\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} \right) dz + \frac{(\hat{\rho}\tilde{w})'_z}{\tau} \Big|_{-h}^{\xi}. \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) с учетом граничных условий:

– на поверхности водоема $w(x, y, t) = -\omega - p'_t / \rho g$,

– на поверхности водоема $w(x, y, t) = 0$,

может быть представлено в виде:

$$\int_{-h}^{\xi} (p''_{xx} + p''_{yy}) dz = \int_{-h}^{\xi} \left(\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau^2} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{u})'_x}{\tau} + \frac{(\hat{\rho}\tilde{v})'_y}{\tau} \right) dz - \frac{\hat{\rho}(\omega + p'_i / \rho g)}{\tau}. \quad (3.9)$$

Дискретный аналог выражения для расчета начального приближения для уравнения давления (3.9) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} (q_1)_{i,j,k} \right) \frac{\hat{p}_{i+1,j} - \hat{p}_{i,j}}{h_x^2} - \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} (q_2)_{i,j,k} \right) \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} (q_3)_{i,j,k} \right) \frac{\hat{p}_{i,j+1,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_y^2} - \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} (q_4)_{i,j,k} \right) \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \right) \frac{\hat{p}_{i,j} - p_{i,j}}{\tau^2 h_z g} \\ & = - \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \frac{\omega \hat{\rho}_{i,j,k}}{\tau h_z} \right) + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\tau^2} + \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} \right) + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} \frac{(q_3)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j-1/2,k}}{\tau h_y} \right) + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} \frac{(q_5)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k-1/2}}{\tau h_z} \right) + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{N_z-1} \left(\frac{(q_2)_{i,j,k} - (q_1)_{i,j,k}}{\tau h_x} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k} - (q_3)_{i,j,k}}{\tau h_y} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k} \right) m_{i,j,k} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, при построении дискретных математических моделей гидродинамики учитывалась «заполненность» контрольных ячеек, что позволяет повысить реальную точность решения в случае сложной геометрии исследуемой области за счет улучшения аппроксимации границы.

3.2. Устойчивость трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов

Проверим необходимое условие применимости принципа максимума. Из данного условия следует ограничение на шаг по пространственной координате:

$$h_x < 2 \min(\mu / |u|) \leq 2 \frac{\mu_{i+1/2, j, k}}{|u_{i+1/2, j, k}|}. \quad (3.11)$$

Проверяя положительность оставшихся коэффициентов, получим следующие ограничения на шаги по пространственным координатам: $h_y < 2 \min(\mu / |v|)$, $h_z < 2 \min(\nu / |w|)$.

Полученные ограничения запишем через числа Рейнольдса $Re = \frac{u \cdot l}{\mu}$, где

u – скорость распространения водной среды, l – характерный размер области, μ – коэффициент турбулентного обмена [8].

$$Re = \frac{u \cdot l}{\mu} = \frac{u \cdot h}{\mu} N \leq \frac{u}{\mu} \left\| \frac{2\mu}{u} \right\| N = 2N, \quad (3.12)$$

где N – характерное число узлов сетки.

Введем оператор L следующим образом:

$$\begin{aligned} (L(\bar{u}))_{i, j, k} = & -(q_1)_{i, j, k} u_{i+1/2, j, k} \frac{\bar{u}_{i+1, j, k} - \bar{u}_{i, j, k}}{2h_x} - (q_2)_{i, j, k} u_{i-1/2, j, k} \frac{\bar{u}_{i, j, k} - \bar{u}_{i-1, j, k}}{2h_x} - \\ & -(q_3)_{i, j, k} v_{i, j+1/2, k} \frac{\bar{u}_{i, j+1, k} - \bar{u}_{i, j, k}}{2h_y} - (q_4)_{i, j, k} v_{i, j-1/2, k} \frac{\bar{u}_{i, j, k} - \bar{u}_{i, j-1, k}}{2h_y} + \\ & -(q_5)_{i, j, k} v_{i, j, k+1/2} \frac{\bar{u}_{i, j, k+1} - \bar{u}_{i, j, k}}{2h_z} - (q_6)_{i, j, k} v_{i, j, k-1/2} \frac{\bar{u}_{i, j, k} - \bar{u}_{i, j, k-1}}{2h_z} + \\ & + (q_1)_{i, j, k} \mu_{i+1/2, j, k} \frac{\bar{u}_{i+1, j, k} - \bar{u}_{i, j, k}}{h_x^2} - (q_2)_{i, j, k} \mu_{i-1/2, j, k} \frac{\bar{u}_{i, j, k} - \bar{u}_{i-1, j, k}}{h_x^2} + \\ & + (q_3)_{i, j, k} \mu_{i, j+1/2, k} \frac{\bar{u}_{i, j+1, k} - \bar{u}_{i, j, k}}{h_y^2} - (q_4)_{i, j, k} \mu_{i, j-1/2, k} \frac{\bar{u}_{i, j, k} - \bar{u}_{i, j-1, k}}{h_y^2} + \end{aligned}$$

$$+(q_5)_{i,j,k} v_{i,j,k+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j,k+1} - \bar{u}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} v_{i,j,k-1/2} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i,j,k-1}}{h_z^2}.$$

Запишем уравнение (3.10) с учетом введенного оператора:

$$(q_0)_{i,j,k} \frac{\tilde{u}_{i,j,k} - u_{i,j,k}}{\tau} = \sigma(L(\tilde{u}))_{i,j,k} + (1 - \sigma)(L(u))_{i,j,k} + \quad (3.13)$$

$$+ \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \frac{\rho_a C_p \left(|\vec{V}_a - \vec{V}| \right) (u_a - u) |\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} -$$

$$- \left((q_6)_{i,j,k} - (q_5)_{i,j,k} \right) H \left((q_6)_{i,j,k} - (q_5)_{i,j,k} \right) \frac{\rho_v C_p \left(|\vec{V}| \right) u |\vec{V}|}{\rho h_z} +$$

$$+ 2\Omega(q_0)_{i,j,k} (v_{i,j,k} \sin \theta - w_{i,j,k} \cos \theta).$$

Для исследования устойчивости будем использовать представление правой части, имеющее вид:

$$F_{i,j,k} = (q_0)_{i,j,k} \frac{u_{i,j,k}}{\tau} + 2\Omega(q_0)_{i,j,k} (v_{i,j,k} \sin \theta - w_{i,j,k} \cos \theta) +$$

$$+ \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \frac{\rho_a C_p \left(|\vec{V}_a - \vec{V}| \right) (u_a - u) |\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} -$$

$$- \left((q_6)_{i,j,k} - (q_5)_{i,j,k} \right) H \left((q_6)_{i,j,k} - (q_5)_{i,j,k} \right) \frac{\rho_v C_p \left(|\vec{V}| \right) u |\vec{V}|}{\rho h_z}.$$

Диагональное преобладание в данном случае примет вид:

$$D(P) = q_0(P) / \tau.$$

Запишем оценку решения:

$$\|\tilde{u}^{n+1}\|_c \leq \left\| u^n + 2\Omega \tau (v^n \sin \theta - w^n \cos \theta) - (q_5 - q_6) H(q_5 - q_6) \frac{\rho_v C_p \left(|\vec{V}| \right) u^n |\vec{V}|}{\rho^n h_z} + \right.$$

$$\left. + (q_5 - q_6) H(q_5 - q_6) \frac{\rho_a C_p \left(|\vec{V}_a - \vec{V}| \right) (u_a - u^n) |\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} \right\|_c.$$

Подставим выражение (3.10) в полученную оценку

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^{n+1}\|_c \leq & \left\| \tilde{u}^n + 2\Omega\tau(v^n \sin\theta - w^n \cos\theta) - (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6)\tau \frac{\rho_v C_p(|\vec{V}|)u^n|\vec{V}|}{\rho h_z} + \right. \\ & \left. + (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6)\tau \frac{\rho_a C_p(|\vec{V}_a - \vec{V}|)(u_a - u^n)|\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} - \tau \frac{p_x^n}{\rho^n} \right\|_c, \end{aligned}$$

где $(q_0)_{i,j,k} p_x = -(q_1)_{i,j,k} \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{2h_x} + (q_2)_{i,j,k} \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{2h_x}$ – первая разностная производная.

В последнем неравенстве воспользуемся правилом треугольника

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^{n+1}\|_c \leq & \|\tilde{u}^n\|_c + \left\| 2\Omega\tau(v^n \sin\theta - w^n \cos\theta) - (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6)\tau \frac{\rho_v C_p(|\vec{V}|)u^n|\vec{V}|}{\rho h_z} + \right. \\ & \left. + (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6)\tau \frac{\rho_a C_p(|\vec{V}_a - \vec{V}|)(u_a - u^n)|\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} - \tau \frac{p_x^n}{\rho^n} \right\|_c. \end{aligned}$$

Применяя полученное неравенство для оценки $\|\tilde{u}^n\|$, $\|\tilde{u}^{n-1}\|$ и т.д. получим оценку решения и придем к неравенству:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^{n+1}\|_c \leq & \|\tilde{u}^1\|_c + \tau \sum_{k=1}^n \left\| 2\Omega(v^k \sin\theta - w^k \cos\theta) - (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6) \frac{\rho_v C_p(|\vec{V}|)u^k|\vec{V}|}{\rho h_z} + \right. \\ & \left. + (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6) \frac{\rho_a C_p(|\vec{V}_a - \vec{V}|)(u_a - u^k)|\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} - \frac{p_x^k}{\rho^k} \right\|_c. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Аналогичным образом нетрудно получить оценку оставшихся двух компонент вектора скорости, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}^{n+1}\|_c \leq & \|\tilde{v}^1\|_c + \tau \sum_{k=1}^n \left\| -2\Omega u^k \sin\theta - (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6) \frac{\rho_v C_p(|\vec{V}|)v^k|\vec{V}|}{\rho h_z} + \right. \\ & \left. + (q_5 - q_6)H(q_5 - q_6) \frac{\rho_a C_p(|\vec{V}_a - \vec{V}|)(v_a - v^k)|\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} - \frac{p_y^k}{\rho^k} \right\|_c, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}^{n+1}\|_c \leq & \|\tilde{w}^1\|_c + \tau \sum_{k=1}^n \left\| 2\Omega u^k \cos \theta - (q_5 - q_6) H(q_5 - q_6) \frac{\rho_v C_p \left(|\vec{V}| \right) w^k |\vec{V}|}{\rho h_z} + \right. \\ & \left. + (q_5 - q_6) H(q_5 - q_6) \frac{\rho_a C_p \left(|\vec{V}_a - \vec{V}| \right) (w_a - w^k) |\vec{V}_a - \vec{V}|}{\rho h_z} - \frac{p_z^k}{\rho^k} \right\|_c. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, из полученных оценок следует, что если полученные частичные суммы в правых частях неравенств ограничены для любого n , то процесс вычисления вектора скорости устойчив. Под знаком суммы стоят члены, ответственные за внешние и внутренние силы. Можно утверждать, что отсутствуют два и более стационарных решений (режимов), при которых все силы уравновешены, и решение дискретной задачи существует и единственно и стремится к решению непрерывной задачи при выходе на стационарный режим.

3.3. Консервативность трехмерной дискретной математической модели движения водной среды

Проверим сохранение потока трехмерной математической моделью движения водной среды. Для этого запишем сеточное уравнение для расчета давления

$$\begin{aligned} & (q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + (q_3)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j+1,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_y^2} - \\ & - (q_4)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + (q_5)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k+1} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j,k-1}}{h_z^2} + \\ & + \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \left(\frac{\hat{p}_{i,j,k} - p_{i,j,k}}{\tau^2 h_z g} + \frac{\omega \hat{\rho}_{i,j,k}}{\tau h_z} \right) = \quad (3.17) \\ & = (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\tau^2} + \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{u})_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k} (\hat{\rho} \tilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(q_3)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j-1/2,k}}{\tau h_y} + \\
& + \frac{(q_5)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k-1/2}}{\tau h_z} + \\
& + \left(\frac{(q_2)_{i,j,k} - (q_1)_{i,j,k}}{\tau h_x} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k} - (q_3)_{i,j,k}}{\tau h_y} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k} \right) m_{i,j,k},
\end{aligned}$$

где $(\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k} = (\hat{\rho}_{i+1,j,k} \tilde{u}_{i+1,j,k} + \hat{\rho}_{i,j,k} \tilde{u}_{i,j,k})/2$, p – превышение давления над гидростатическим давлением невозмущенной жидкости, ω – интенсивность испарения жидкости, $m_{i,j,k}$ – маска граничного условия [31].

Просуммируем уравнение (17) по расчетной области

$$D: i \in [1, N_x - 1], j \in [1, N_y - 1], k \in [1, N_z - 1]:$$

$$\begin{aligned}
& \sum_D (q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} - \sum_D (q_2)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \sum_D (q_3)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j+1,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_y^2} - \\
& - \sum_D (q_4)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \sum_D (q_5)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k+1} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_z^2} - \sum_D (q_6)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j,k-1}}{h_z^2} + \\
& + \sum_D \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \left(\frac{\hat{p}_{i,j,k} - p_{i,j,k}}{\tau^2 h_z g} + \frac{\omega \hat{\rho}_{i,j,k}}{\tau h_z} \right) = \\
& = \sum_D (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\tau^2} + \sum_D \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} + \\
& + \sum_D \frac{(q_3)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j-1/2,k}}{\tau h_y} + \\
& + \sum_D \frac{(q_5)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k-1/2}}{\tau h_z} + \\
& + \sum_D \left(\frac{(q_2)_{i,j,k} - (q_1)_{i,j,k}}{\tau h_x} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k} - (q_3)_{i,j,k}}{\tau h_y} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k} \right) m_{i,j,k}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Выполним вспомогательные преобразования

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in [1, N_x - 1]} (q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} - \sum_{i \in [1, N_x - 1]} (q_2)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i-1,j,k}}{h_x^2} = \\
& = \sum_{i \in [1, N_x - 1]} (q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} - \sum_{i \in [0, N_x - 2]} (q_2)_{i+1,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} \\
& = \sum_{i \in [1, N_x - 1]} (q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} - \sum_{i \in [0, N_x - 2]} (q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} = \\
& = \left((q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} \right) \Big|_{i=N_x-1} - \left((q_1)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_x^2} \right) \Big|_{i=0} = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

т.к. $(q_1)_{i,j,k} = 0$, при $i = 0, N_x - 1$.

Аналогичным образом нетрудно показать, что следующие выражения обращаются в ноль:

$$\begin{aligned}
& \sum_D (q_3)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j+1,k} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_y^2} - \sum_D (q_4)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j-1,k}}{h_y^2} = 0, \\
& \sum_D (q_5)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k+1} - \hat{p}_{i,j,k}}{h_z^2} - \sum_D (q_6)_{i,j,k} \frac{\hat{p}_{i,j,k} - \hat{p}_{i,j,k-1}}{h_z^2} = 0.
\end{aligned}$$

Также преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in [1, N_x - 1]} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} = \\
& = \sum_{i \in [1, N_x - 1]} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} - \sum_{i \in [1, N_x - 1]} \frac{(q_2)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i-1/2,j,k}}{\tau h_x} = \\
& = \sum_{i \in [1, N_x - 1]} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} - \sum_{i \in [0, N_x - 2]} \frac{(q_2)_{i+1,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} = \\
& = \sum_{i \in [1, N_x - 1]} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} - \sum_{i \in [0, N_x - 2]} \frac{(q_2)_{i+1,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} = \\
& = \sum_{i \in [1, N_x - 1]} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} - \sum_{i \in [0, N_x - 2]} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} = \\
& = \sum_{i=N_x-1} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} - \sum_{i=0} \frac{(q_1)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i+1/2,j,k}}{\tau h_x} = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что следующие выражения обращаются в ноль:

$$\sum_D \frac{(q_3)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j-1/2,k}}{\tau h_y} = 0,$$

$$\sum_D \frac{(q_5)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k-1/2}}{\tau h_z} = 0.$$

Запишем (18) с учетом (19), (20):

$$\begin{aligned} & \sum_D \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \left(\frac{\hat{p}_{i,j,k} - p_{i,j,k}}{\tau^2 h_z g} + \frac{\omega \hat{\rho}_{i,j,k}}{\tau h_z} \right) = (3.21) \\ & = \sum_D \left(\frac{(q_2)_{i,j,k} - (q_1)_{i,j,k}}{\tau h_x} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k} - (q_3)_{i,j,k}}{\tau h_y} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k} \right) m_{i,j,k} + \\ & + \sum_D (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Формула (3.21) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_D \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \left(\frac{\hat{p}_{i,j,k} - p_{i,j,k}}{\tau h_z g} \right) = \\ & = - \sum_D \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \left(\frac{\omega \hat{\rho}_{i,j,k}}{h_z} \right) + (3.22) \\ & + \sum_D \left(\frac{(q_2)_{i,j,k} - (q_1)_{i,j,k}}{h_x} (\hat{\rho}\tilde{u})_{i,j,k} + \frac{(q_4)_{i,j,k} - (q_3)_{i,j,k}}{h_y} (\hat{\rho}\tilde{v})_{i,j,k} \right) m_{i,j,k} + \\ & + \sum_D (q_0)_{i,j,k} \frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\tau}. \end{aligned}$$

Таким образом, из равенства (3.22) и формулы для расчета заполненности ячеек (3.3) можно сделать вывод о том, что давление отвечает за сохранение количества вещества. Из равенства (3.22) следует сохранение потока (отсутствие нефизических источников) дискретной математической моделью движения водной среды. Поток на выходной границе зависит от следующих

факторов: потока на входной границе, подъема уровня, испарения, сжимаемости водной среды.

Сохранение потока, то есть отсутствие нефизических источников, подтверждается дискретной математической моделью движения водной среды. На выходной границе поток зависит от потока на входной границе, повышения уровня, испарения и сжимаемости водной среды. Обобщая сказанное выше, отметим, что в результате проверки основных балансовых соотношений для задачи диффузии-конвекции было установлено, что оператор диффузии консервативен, а оператор конвекции консервативен при условии несжимаемости водной среды.

3.4. Модель силового воздействия волн на берегозащитные сооружения

При проектировании мероприятий по охране открытых берегов внутренних морей от влияния волнений и от подтопления при повышениях уровня воды должен соблюдаться ряд условий и положений по оценке влияния возводимых сооружений на окружающую среду.

Для определения интенсивности и уровня влияния волн и течений на берегозащитные сооружения и пляжи, вдольберегового и поперечного перемещений наносов, подбора рационального вида берегозащитных построек и их компоновки в сложных условиях, к которым относятся:

- неоднородность рельефа дна;
- изрезанность контура прибрежной линии;
- наличие натуральных и искусственных препятствий, оказывающих воздействие на прохождение волн;
- приморские устьевые участки рек с течениями;
- комплекс сооружений, охватывающий различные виды конструкций;
- сооружения, размещаемые в проливах и бухтах;
- уникальные сооружения, требования к проектированию которых не установлены в соответствующих нормативных документах;

– влияние естественных процессов на объекты стратегической важности при наличии опасных размывов берега, рекомендовано проводить гидромеханическое моделирование [80].

Переднюю высоту волн на глубокой воде \bar{h}_d и средний период волн \bar{T} для простых условий волнообразования (ветер неизменной скорости действует на водную поверхность в направлении, перпендикулярном прямолинейной подветренной прибрежной черте) устанавливаются при следующих входных данных: расчетная скорость ветра, его продолжительность, а также протяженность разгона. После вычисления параметров волн на глубокой воде в расчетной точке по всем волноопасным направлениям выбирают направление с максимальными параметрами волн (при необходимости – два и более направления) и осуществляют расчеты рефракции и трансформации волн при движении их к берегу.

Расчет модификации волн производится для определения параметров волн и оценки их воздействия на проектируемые сооружения. Трансформацию волн в случае разнородного рельефа дна следует определять методами математического и гидромеханического моделирования.

Волноотбойные стены строятся для защиты от волнового воздействия береговых уступов или земляного полотна приморских железных и автомобильных дорог. Часто такие стены исполняют функции подпорных сооружений, поэтому они называются подпорно-волноотбойными. Волноотбойные стены следует строить под защитой волногасящих сооружений, обеспечивающих гашение расчетных волн.

При проектировании волноотбойных стен следует учитывать, что вызываемое ими отражение волн, в особенности на берегах с недостатком наносов и узкими пляжами, приводит к усилению размыва надводной пляжевой полосы. Поэтому в проекте в обязательном порядке должны быть учтены мероприятия по сохранению и расширению пляжа перед стеной с помощью искусственных отсыпок пляжеобразующего материала под защитой пляжеудерживающих сооружений.

Отметка верха стены должна задаваться с учетом расчетных значений уровня водоема и элементов волн. Возвышение гребня стены Z_{∇} м, над расчетным уровнем рекомендуется принимать по формуле $Z_{\nabla} = 0,75h_{cr} + r_c$, где h_{cr} – высота волн на глубине последнего обрушения, r_c – запас высоты.

Глубину обрушения волн $d_{cr u}$, м, начиная с которой происходит накат волн на берег, допускается при постоянном уклоне дна i вычислять по формуле $d_{cr u} = k_u^{n-1} d_{cr}$, где d_{cr} – глубина первого обрушения волн. Значение параметра k_u и число обрушений волн n необходимо определять по таблице.

При уклонах дна $0,005 \leq i \leq 0,2$ и $n=1$ критическая глубина $d_{cr u} = d_{cr}$. При уклонах дна $0,001 \leq i \leq 0,01$ необходимо принимать $d_{cr u} = 0,43d_{cr}$. Глубину последнего обрушения волн $d_{cr u}$, м, при переменных уклонах дна допускается принимать по результатам последовательного определения глубин для участков с постоянными уклонами дна i [96-97].

Таблица 3.1. Зависимость коэффициента k_u от уклонов дна

Уклоны дна i	0,010-0,014	0,015-0,033	0,034-0,049	0,05-0,20
Параметр k_u	0,755	0,59	0,40	-
Число обрушений n	4	3	2	1

Расчет сооружений на воздействие стоячих волн со стороны открытой акватории должен производиться при глубине до дна $d_b > 1,5h$ и глубине над бермой $d_{br} > 1,25h$; при этом в формулах для свободной волновой поверхности и волнового давления вместо глубины до дна d_b , м, необходимо применять условную расчетную глубину d , м, определяемую по формуле

$$d = d_f + k_{br}(d_b - d_f),$$

где d_f – глубина над подошвой сооружения, м; k_{br} – заданный коэффициент, h – высота исходной бегущей волны, м, принимаемая на основе гидродинамических (вероятностных) расчетов.

Горизонтальную волновую нагрузку P_x на вертикальную стену под воздействием стоячей волны следует принимать по эпюрам волнового давления p по глубине при различном положении гребня и подошвы волны у стены.

Построение эпюр волнового давления p должно производиться по результатам экспериментальных исследований или гидродинамических расчетов.

В расчетах устойчивости сооружения и прочности грунтов основания следует учитывать уменьшение волновой нагрузки на секцию вертикальной стены при подходе фронта волны под углом α , град. Коэффициент k_{cs} снижения нагрузки при этом принимается по таблице [96-97].

Таблица 3.2. Коэффициент k_{cs} снижения нагрузки при подходе фронта волны под углом α

α	45	60	75
k_{cs}	1	0,9	0,7

В расчетах следует учитывать горизонтальную нагрузку от дифрагированных волн со стороны закрытой акватории.

Взвешивающее волновое давление в горизонтальных швах массивной кладки и по подошве сооружения разрешено брать равным соответствующим значениям горизонтального волнового давления в крайних точках при линейном изменении его в границах ширины сооружения. Предельную придонную скорость $V_{b \max}$, м/с, от действия стоячих волн на расстоянии $0,25\bar{\lambda}$ от передней грани стены следует определять по формуле

$$V_{b \max} = \frac{2k_{sl}\pi h}{Tshkd_b},$$

где коэффициент $k_{sl} = 0,25 \left(\frac{\bar{\lambda}}{h} \right)^{0,4}$, $k = 2\pi / \bar{\lambda}$ – волновое число.

Максимальное значение касательного напряжения на поверхности дна τ_{\max} , кПа, от воздействия волн следует определять по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \rho f_w V_{b \max}^2,$$

где $f_w = 0,037(a_0 / k_s)^{-0,52}$ – коэффициент трения, $a_0 = V_{b\max} T / 2\pi \bar{T}$ – период волны, с; ρ – плотность воды, $k_s = k_{sgr} + k_{s\Delta}$ – суммарная гидравлическая шероховатость дна, $k_{sgr} = \alpha D$ ($\alpha = 2,5$) – шероховатость плоского (без русловых форм) дна, сложенного грунтом средней крупностью D , $k_{s\Delta} = 1,1D_b(1 - e(-25D_b / L_b))$ – шероховатость, обусловленная донными формами средней высотой D_b , м, и средней длиной L_b , м.

Среднее за период \bar{T} значение касательного напряжения на поверхности дна $\bar{\tau}_w$, кПа, от воздействия волн должно определяться по формуле

$$\bar{\tau}_w = \frac{1}{2} \tau_{\max}.$$

Возможность размыва дна акватории у основания сооружений следует оценивать сравнением $V_{b\max}$ или τ_{\max} с допускаемыми значениями этих величин, при которых грунт остается устойчивым. При превышении этих значений должны разрабатываться мероприятия, обеспечивающие защиту от размыва и подмыва основания сооружения [96-97].

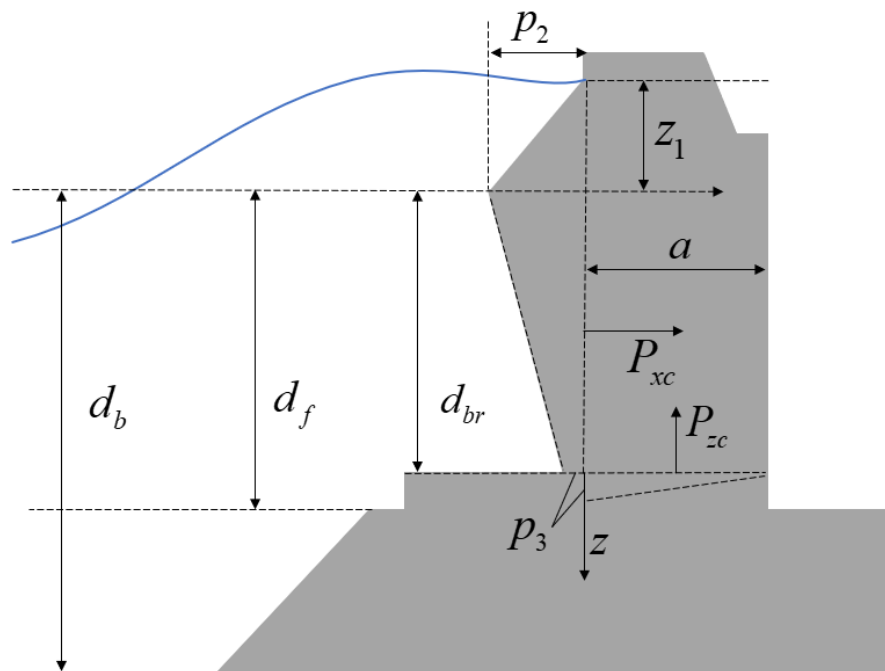


Рисунок 3.1. Эпюры давления разбивающихся волн на вертикальную стену

Расчет сооружений на воздействие стоячих волн со стороны открытой акватории должен производиться при глубине до дна $d_b < 1,5h$ и глубине до дна $d_{br} \geq 1,25h$. Горизонтальную нагрузку P_{xc} , кН/м, от разбивающихся волн следует определять по эпюре бокового волнового давления, при построении которой значения p , кПа, для ординат z , м, следует принимать по формулам:

$$z_1 = -h, p_1 = 0; z_2 = 0, p_2 = 1,5\rho gh; z_3 = d_f, p_3 = \frac{\rho gh}{chkd_f}.$$

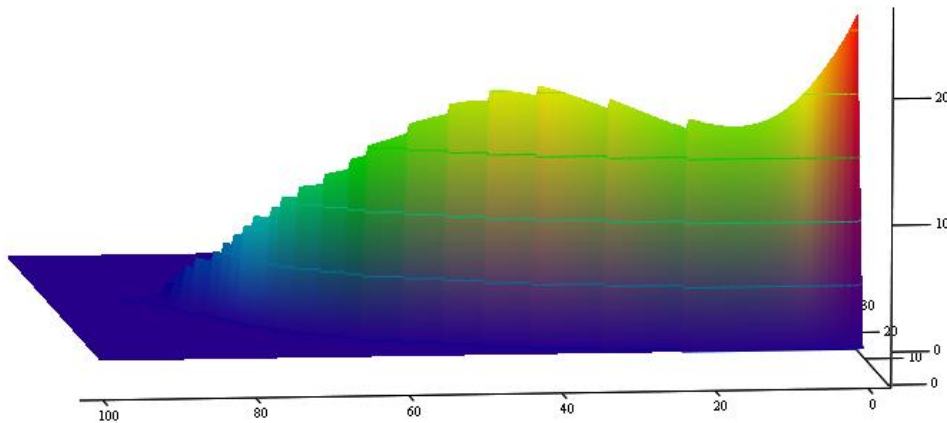


Рисунок 3.2. Рассчитанные эпюры давления

Вертикальную нагрузку P_{zc} , кН/м, от разбивающихся волн следует принимать равной площади эпюры взвешивающего волнового давления и определять по формуле

$$P_{zc} = \mu \frac{p_3 a}{2},$$

где μ – коэффициент, принимаемый равным $\mu = 0,55 + 0,05 \frac{a}{d_b - d_f}$; при

$\frac{a}{d_b - d_f} < 3$ следует принимать $\mu = 0,7$; при $\frac{a}{d_b - d_f} \geq 9$ принимать $\mu = 1$.

Максимальную придонную скорость воды $V_{f \max}$, м/с, над поверхностью бермы перед вертикальной стеной при разбивающихся волнах следует определять по формуле

$$V_{f \max} = \sqrt{\frac{qh}{chkd_f}}.$$

Расчет сооружений на воздействие прибойных волн должен производиться при глубине $d_b \leq d_{cr}$ на примыкающем к стене участке дна протяженностью не менее $0,5\bar{\lambda}$. Возвышение вершины максимальной прибойной волны η_{sur} , м, над расчетным уровнем следует определять по формуле

$$\eta_{sur} = 0,5d_f + h_{sur},$$

где h_{sur} – высота прибойной волны, м; d_{cr} – критическая глубина, м.

Горизонтальную нагрузку P_{xc} , кН/м, от прибойных волн необходимо принимать по эпюре бокового волнового давления, при этом значение p , кПа, для ординат z , м, допускается определять по формулам:

$$z_1 = -h_{sur}, p_1 = 0; z_2 = -\frac{1}{3}h_{sur}, p_2 = 1,5\rho gh_{sur}; z_3 = d_f, p_3 = \frac{\rho gh_{sur}}{ch \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_{sur}} d_f}.$$

где $\bar{\lambda}_{sur}$ – средняя длина прибойной волны, м.

Вертикальную нагрузку P_{zc} , кН/м, от прибойных волн следует принимать равной площади эпюры взвешивающего волнового давления (с высотой p_3) и определять по формуле

$$P_{zc} = 0,7\left(\frac{p_3 a}{2}\right).$$

Максимальная придонная скорость прибойной волны $V_{b \max}$, м/с, у основания вертикальной стены со стороны открытой акватории должна определяться по формуле

$$V_{b \max} = \sqrt{\frac{gh_{sur}}{ch \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_{sur}} d_f}}.$$

Волновое давление на защитное плитное крепление откоса должно определяться на основании результатов математического моделирования [80].

Максимальные значения горизонтальной P_x , кН/м, и вертикальных P_z и P_c , кН/м, проекций равнодействующей нагрузки от волн на подводный волнолом необходимо принимать по эпюрам бокового и взвешивающего волнового давления. При этом p , кПа, должно определяться в зависимости от z с учетом уклона дна i по формулам, приведенным в таблице.

Таблица 3.3. Формул для определения давления в зависимости от z с учетом уклона дна i [96-97]

Ордината z , м, эпюры давления	Формула для определения ординаты z , м	Формула для определения давления p , кПа	Условия применимости формулы
z_1 (верх подводного волнолома)		$p_1 = \rho g(z_1 - z_2)$ $p_1 = p_2$	$z_1 < z_2$ $z_1 \geq z_2$
z_2 (подошва волны)	$z_2 = 0,25 \left(\frac{h}{d} \right)^{0,72}$	$p_2 = \rho g h \left(0,15 \frac{\bar{\lambda}}{d} + 0,23 \frac{d - z_1}{d} \right) - \rho g h z_4$ $p_2 = \rho g(z_2 - z_4)$	$i \leq 0,04$ $i > 0,04$
z_3 (дно акватории перед волноломом)		$p_3 = k_w p_2$ $k_w = 0,7 + 0,003 \left(\frac{\bar{\lambda}}{d} \right)^{1/3}$ $p_2 = p_3$	$i \leq 0,04$ $i > 0,04$
z_4 (поверхность воды за волноломом)	$z_2 = -k_{rd}(z_1 - z_5) + z_4$ $k_{rd} = 0,88 - 0,31 \frac{h}{d}$		
z_5 (гребень волны перед волноломом)	$z_5 = 0,37 \left(\frac{h}{d} \right)^{1,2}$		

Максимальные значения горизонтальной P_x , кН/м, и вертикальных P_z и P_c , кН/м, проекций равнодействующей нагрузки от разбивающихся волн на вертикальную волнозащитную стену необходимо принимать по эпюрам бокового и взвешивающего волнового давлений. При этом p , кПа, и η_c , м, должны определяться в зависимости от места расположения сооружения [80]:

а) при расположении сооружения в створе последнего обрушения прибойных волн по формулам:

$$p = p_u = \rho g h_{br} \left(0,033 \frac{\bar{\lambda}}{d} 0,75 \right), \eta_c = \frac{-p_u}{\rho g}.$$

б) при расположении сооружения в приурезовой зоне по формулам:

$$p = p_i = \left(1 - 0,3 \frac{a_i}{a_n} \right) p_u, \eta_c = \frac{-p_i}{\rho g}.$$

в) при расположении сооружения на берегу за линией уреза в пределах наката волн по формулам:

$$p = p_l = 0,7 \left(1 - \frac{a_i}{a_r} \right) p_u, \eta_c = \frac{p_l}{\rho g}.$$

где η_c – превышение гребня волны над расчетным уровнем в створе волнозащитной стены, м; h_{br} – высота разбивающихся волн, м; a_n – расстояние от створа последнего обрушения волн до линии уреза (приурезовая зона), м; a_i – расстояние от створа последнего обрушения волн до сооружения, м; a_l – расстояние от линии уреза воды до сооружения, м; a_r – расстояние от линии уреза воды до условной границы наката на берег разбивающихся волн (при отсутствии сооружения), м, определяемое по формуле $a_r = h_{sur1\%} \operatorname{ctg} \varphi$, $h_{sur1\%}$ – высота наката волн на берег, м.

Таким образом, расчет модификации волн для нахождения параметров волн и оценки их влияния на проектируемые сооружения должен выполняться на основании ряда условий и положений по оценке влияния возводимых сооружений на окружающую среду. Трансформацию волн в случае разнородного рельефа дна и волновое давление целесообразно определять методами математического и гидравлического моделирования.

3.5. Модель расчёта зон загрязнения взвесью при наличии волновых процессов

Рассмотрим непрерывную математическую модель распространения взвесей различных типов в водной среде, учитывающую диффузию и конвекцию взвесей, действие на взвеси силы тяжести, взаимную трансформацию частиц различного типа, наличие дна и свободной поверхности [98, 100].

Будем использовать прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$, где ось Ox проходит по поверхности невозмущенной водной поверхности и направлена в сторону моря. Пусть $h = H + \eta$ – общая глубина акватории, [м]; H – глубина при невозмущенной поверхности водоема, [м]; η – возвышение свободной поверхности относительно геоида (уровня моря), [м].

Пусть в водном объёме $V = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}$ находятся R типов частиц, которые в точке (x, y, z) и в момент t имеют концентрацию $c_r = c_r(x, y, z, t)$, [мг/л]; t – временная переменная, [сек]; $r = 1, 2, \dots, R$ [24].

Система уравнений, описывающая поведение частиц, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c_r}{\partial t} + \frac{\partial(uc_r)}{\partial x} + \frac{\partial(vc_r)}{\partial y} + \frac{\partial((w + w_{g,r})c_r)}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v \frac{\partial c_r}{\partial z} \right) + F_r, \\ F_1 = (\alpha_2 c_2 - \beta_1 c_1) + \Phi_1(x, y, z, t), \\ \dots \\ F_r = (\beta_{r-1} c_{r-1} - \alpha_r c_r) + (\alpha_{r+1} c_{r+1} - \beta_r c_r) + \Phi_r(x, y, z, t), \\ \dots \\ F_R = (\beta_{R-1} c_{R-1} - \alpha_R c_R) + \Phi_R(x, y, z, t), \quad r = 2, \dots, R-1. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

где u, v, w – компоненты вектора \vec{U} скорости движения жидкости, [м/сек]; $w_{g,r}$ – гидравлическая крупность или скорость осаждения частиц r -го типа, [м/сек]; μ, ν – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии частиц r -го типа, [м²/сек]; α_r, β_r – скорости превращения частиц r -го типа в $(r-1)$ -й и $(r+1)$ -ый тип, $\alpha_r \geq 0, \beta_r \geq 0$, [м/сек]; Φ_r – мощность источников частиц r -го типа, [мг/л·сек].

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, где происходит процесс, и S – ее граница, которая является кусочно-гладкой линией. Областью задания системы (5) считаем цилиндр $\mathcal{C}_T = D \times (0, T)$ высоты T с основанием $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$. Его граница состоит из боковой поверхности $S \times [0, T]$ и двух оснований: нижнего $\bar{D} \times \{0\}$ – дно и верхнего $\bar{D} \times \{T\}$ – невозмущенная поверхность воды [28].

Добавим к системе (3.23) начальные и граничные условия (предполагая, что осаждение частиц на дно необратимо) [37-38]:

– начальные условия при времени $t = 0$:

$$c_1(x, y, z, 0) \equiv c_{10}(x, y, z), \dots, c_r(x, y, z, 0) \equiv c_{r0}(x, y, z), \dots, \\ c_R(x, y, z, 0) \equiv c_{R0}(x, y, z), \quad r = 2, \dots, R-1,$$

– граничные условия на цилиндрической (боковой) границе области S цилиндра \mathcal{C}_T :

$$\frac{\partial c_1}{\partial n} = \dots = \frac{\partial c_r}{\partial n} = \dots = \frac{\partial c_R}{\partial n} = 0, \text{ если } (\vec{U}_\Gamma, \vec{n}) \leq 0, \\ \frac{\partial c_1}{\partial n} = -\frac{u_\Gamma}{\mu} c_1, \dots, \frac{\partial c_r}{\partial n} = -\frac{u_\Gamma}{\mu} c_r, \dots, \frac{\partial c_R}{\partial n} = -\frac{u_\Gamma}{\mu} c_R, \text{ если } (\vec{U}_\Gamma, \vec{n}) \geq 0,$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к границе области S , \vec{U}_Γ – вектор скорости движения жидкости на границе S , u_Γ – проекция вектора скорости \vec{U}_Γ на направление нормали \vec{n} на границе области S ;

– граничные условия на поверхности воды:

$$\frac{\partial c_1}{\partial z} = \dots = \frac{\partial c_r}{\partial z} = \dots = \frac{\partial c_R}{\partial z} = 0;$$

– граничные условия на дне:

$$\frac{\partial c_1}{\partial n} = -\frac{w_{g,1}}{\nu} c_1, \dots, \frac{\partial c_r}{\partial n} = -\frac{w_{g,r}}{\nu} c_r, \dots, \frac{\partial c_R}{\partial n} = -\frac{w_{g,R}}{\nu} c_R.$$

Будем для простоты считать, что в уравнении транспорта наносов оси Ox, Oy согласованы с направлениями координатных осей моделей гидродинамического блока, в котором рассчитываются компоненты вектора скорости

водной среды и коэффициент турбулентного обмена по вертикальному направлению. Далее для простоты рассматривается случай, когда нормаль к береговой линии направлена на север, совпадая с осью Ox , ось Oy направлена на восток.

Переформирование прибрежной зоны акваторий за счет движения воды и твердых частиц будем описывать для случая, когда частицы наносов движутся в одну сторону. В работе, используется допущение, что осадки перемещаются только в одну сторону – результирующего переноса [29].

Пусть осадки, которые участвуют в транспорте наносов, состоят из Q фракций, каждая из которых имеет относительную долю V_q в общем объеме и плотность ρ_q , $q=1,2,\dots,Q$.

Уравнение транспорта наносов, учитывающее сложный гранулометрический состав донного материала, имеет вид:

$$(1 - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\sum_{q=1}^Q V_q k_q \vec{\tau}_b \right) = \operatorname{div} \left(\sum_{q=1}^Q V_q k_q \frac{\tau_{bc,q}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right) + \sum_{r=1}^R \frac{w + w_{g,r}}{\rho_r^*} c_r, \quad (2.24)$$

где $\bar{\varepsilon}$ – усредненная по фракциям пористость донных отложений; $\vec{\tau}_b$ – вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема; $\tau_{bc,q}$ – критическое значение тангенциального напряжения для фракции q , $\tau_{bc,q} = a_q \sin \varphi_0$, φ_0 – угол естественного откоса грунта в водоеме; ρ_r^* – плотность частиц взвешенного вещества типа r ; $k_q = k_q(H, x, y, t)$ – нелинейный коэффициент, определяемый соотношением [30]:

$$k_q \equiv \frac{A \bar{\omega} d_q}{\left((\rho_q - \rho_0) g d_q \right)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc,q}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1},$$

где ρ_q, d_q – плотность и характерный размер частиц фракции q соответственно; ρ_0 – плотность водной среды; g – ускорение свободного падения; $\bar{\omega}$ – усредненная частота волн; A и β – безразмерные постоянные).

Как и уравнение транспорта взвесей, областью задания уравнения считаем цилиндр $\Omega_T = D \times (0, T)$, $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$.

Дополним уравнение начальным условием предполагая, что функция начальных условий принадлежит соответствующему классу гладкости: $H(x, y, 0) = H_0(x, y)$.

Сформулируем условия на границе области \bar{D} , исходя из физических соображений: $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$.

Таким образом, волновая гидродинамическая модель и модель турбулентного движения дополняются математической моделью транспорта взвесей и наносов, уравнения которых решаются в гидродинамическом блоке методом поправки к давлению.

Краткие выводы по главе 3

В главе рассмотрено построение и исследование дискретных моделей волновой гидродинамики. Для решения задачи гидродинамики использовался метод поправки к давлению. При построении дискретных математических моделей гидродинамики учитывалась заполненность контрольных ячеек, что позволяет повысить реальную точность решения на равномерных прямоугольных сетках в случае сложной геометрии исследуемой области за счет улучшения аппроксимации границы.

Доказано сохранение потока на дискретном уровне разработанной гидродинамической модели, и отсутствие неконсервативных диссипативных слагаемых, полученных в результате дискретизации.

Дискретный аналог математической модели движения водной среды в мелководных водоемах может быть представлен системой уравнений для расчета поля скорости на промежуточном временном слое, уравнениями для расчета давления, системой уравнений для уточнения поля скорости по давлению.

Проверено сохранение потока трехмерной математической моделью движения водной среды. Сохранение потока, то есть отсутствие нефизических источников, подтверждается дискретной математической моделью движения водной среды. На выходной границе поток зависит от потока на входной границе, повышения уровня, испарения и сжимаемости водной среды. Обобщая сказанное выше, отметим, что в результате проверки основных балансовых соотношений для задачи диффузии-конвекции было установлено, что оператор диффузии консервативен, а оператор конвекции консервативен при условии несжимаемости водной среды.

ГЛАВА 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ АДАПАТИВНОГО ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО МЕТОДА

4.1. Адаптивный попеременно треугольный итерационный метод решения сеточных уравнений

Рассмотрим задачу решения операторного уравнения в конечномерном гильбертовом пространстве H [120]:

$$Ax = f, \quad A: H \rightarrow H, \quad (4.1)$$

где A – линейный, положительно определенный оператор ($A > 0$). Для решения (4.1) будем использовать неявный итерационный процесс

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f, \quad B: H \rightarrow H. \quad (4.2)$$

где m – номер итерации, $\tau > 0$ – итерационный параметр, B – некоторый обратимый оператор. Обращение оператора B должно быть значительно проще, чем прямое обращение исходного оператора A . Исходя из аддитивного представления оператора A_0 – симметричной части оператора A при построении B получим: $A_0 = R_1 + R_2$, $R_1 = R_2^*$, (4.3)

где R_1, R_2 – нижнетреугольный и верхнетреугольный операторы.

Используя кососимметричную часть оператора A : $A_1 = \frac{A - A^*}{2}$ в силу (4.3)

получим $(Ay, y) = (A_0y, y) = 2(R_1y, y) = 2(R_2y, y)$. Поэтому $R_1 > 0, R_2 > 0$. Подставим в (4.2)

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \quad y \in H, \quad (4.4)$$

где D – некоторый оператор (например, диагональная часть оператора A).

В силу того, что $A_0 = A_0^* > 0$, то с (26) это дает $B = B^* > 0$. Соотношения (4.2)-(4.4) задают модифицированный попеременно-треугольный метод, если определены операторы R_1, R_2 и указаны способы определения параметров τ , ω и оператора D [25, 88-95]. Алгоритм расчета сеточных уравнений МПТМ вариационного типа принимает вид:

$$r^m = Ax^m - f, \quad B(\omega_m)w^m = r^m, \quad \tilde{\omega}_m = \sqrt{\frac{(Dw^m, w^m)}{(D^{-1}R_2w^m, R_2w^m)}},$$

$$s_m^2 = 1 - \frac{(A_0w^m, w^m)^2}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)(Bw^m, w^m)}, \quad k_m^2 = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad (4.5)$$

$$\theta_m = \frac{1 - \sqrt{\frac{s_m^2 k_m^2}{(1+k_m^2)}}}{1+k_m^2(1-s_m^2)}, \quad \tau_{m+1} = \theta_m \frac{(A_0w^m, w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}w^m, \quad \omega_{m+1} = \tilde{\omega}_m.$$

где r^m – вектор невязки, w^m – вектор поправки, s_m – определяет скорость сходимости метода, k_m – описывает отношение нормы кососимметричной части оператора к норме его симметричной части.

Скорость сходимости метода определяется соотношением:

$$\rho \leq s_{\max} \frac{\gamma/s_{\max} + \sqrt{\gamma(1+\gamma-s_{\max}^2)}}{s_{\max}\gamma + \sqrt{\gamma(1+\gamma-s_{\max}^2)}} \quad \text{или} \quad \rho \leq \frac{\nu^* - 1}{\nu^* + 1},$$

где $\nu^* = \nu(\sqrt{1+k^2} + k)^2$, ν – число обусловленности матрицы C_0 ,
 $C_0 = B^{-1/2}A_0B^{-1/2}$.

$$\text{Оптимальное значение } \omega \text{ принимает вид } \omega = \sqrt{\frac{(Dw^m, w^m)}{(D^{-1}R_2w^m, R_2w^m)}}.$$

Оценка числа обусловленности матрицы C_0 принимает следующий вид:

$$\nu = \max_{y \neq 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(Dy, y)(D^{-1}R_2y, R_2y)}}{(A_0y, y)} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} \right) = \frac{1 + \sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad \text{где} \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta},$$

$$D \leq \frac{1}{\delta} A_0, \quad R_1 D^{-1} R_2 \leq \frac{\Delta}{4} A_0.$$

Таким образом, описан алгоритм модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода решения СЛАУ.

4.2. Симметризованный адаптивный попеременно-треугольный итерационный метод

Рассмотрим двумерную модельную задачу диффузии-конвекции:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (v_{\alpha}(\mathbf{x})u) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.6)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (4.7)$$

Задача диффузии – конвекции рассматривается в прямоугольнике

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 < x_{\alpha} < l_{\alpha}, \alpha = 1, 2 \}.$$

Будем использовать равномерную по каждому направлению сетку. Для сеток по отдельным направлениям $x_{\alpha}, \alpha = 1, 2$ используем обозначения

$$\bar{\omega}_{\alpha} = \{ x_{\alpha} \mid x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}, \quad i_{\alpha} = 0, 1, 2, \dots, N_{\alpha}, \quad N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha} \},$$

$$\omega_{\alpha} = \{ x_{\alpha} \mid x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}, \quad i_{\alpha} = 1, 2, \dots, N_{\alpha} - 1, \quad N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha} \},$$

$$\omega_{\alpha}^{+} = \{ x_{\alpha} \mid x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}, \quad i_{\alpha} = 1, 2, \dots, N_{\alpha}, \quad N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha} \}.$$

Для сетки Ω положим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), x_{\alpha} \in \bar{\omega}_{\alpha}, \alpha = 1, 2 \},$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2.$$

Для сеточных функций, обращающихся в ноль на множестве граничных узлов $\partial\omega$ ($\bar{\omega}_1 = \omega \cup \partial\omega$) определим гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$, в котором скалярное произведение и норма задаются следующим образом:

$$(y, x) \equiv \sum_{x \in \omega} y(\mathbf{x})w(\mathbf{x})h_1 h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

На введенной сетке аппроксимируем оператор диффузионного переноса

$$Du = - \sum_{x \in \omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right),$$

При обычных предположениях $k(\mathbf{x}) \geq k > 0$. Двумерный разностный оператор конвективного переноса представим в виде суммы одномерных [53]:

$$D = \sum_{\alpha=1}^2 D^{(\alpha)}, \quad D^{(\alpha)} y = - \left(a^{(\alpha)} y_{\bar{x}_{\alpha}} \right)_{x_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \omega. \quad (4.8)$$

Для гладких коэффициентов диффузии можно положить

$$\alpha^{(1)}(\mathbf{x}) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2), x_1 \in \omega_1^+, x_2 \in \omega_2,$$

$$\alpha^{(2)}(\mathbf{x}) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2), x_1 \in \omega_1, x_2 \in \omega_2^+.$$

Аналогично одномерному случаю при интегрировании по контрольному объему для отдельного узла

$$\Omega_x = \{ \mathbf{s} \mid \mathbf{s} = (s_1, s_2), x_1 - 0,5h_1 \leq s_1 \leq x_1 + 0,5h_1, x_2 - 0,5h_2 \leq s_2 \leq x_2 + 0,5h_2 \}$$

получим

$$\alpha^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_2} \int_{x_2 - 0,5h_2}^{x_2 + 0,5h_2} \left(\frac{1}{h_1} \int_{x_1 - h_1}^{x_1} \frac{ds_1}{k(\mathbf{s})} \right)^{-1} ds_2,$$

$$\alpha^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_1} \int_{x_1 - 0,5h_1}^{x_1 + 0,5h_1} \left(\frac{1}{h_2} \int_{x_2 - h_2}^{x_2} \frac{ds_2}{k(\mathbf{s})} \right)^{-1} ds_1.$$

Свойство самосопряженности оператора D вытекает из самосопряженности одномерных операторов $D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$:

$$\begin{aligned} (Dy, w) &= \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{x_1 \in \omega_1} D^{(1)}y(\mathbf{x})w(\mathbf{x})h_1 + \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2} D^{(2)}y(\mathbf{x})w(\mathbf{x})h_2 = \\ &= \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{x_1 \in \omega_1} w(\mathbf{x})D^{(1)}y(\mathbf{x})h_1 + \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2} w(\mathbf{x})D^{(2)}y(\mathbf{x})h_2 = (y, Dw). \end{aligned}$$

Определим для двумерных разностных функций, обращающихся в ноль на $\partial\omega$ сеточный аналог нормы в $W_2^1(\omega)$:

$$\|\nabla y\|^2 \equiv \sum_{x_1 \in \omega_1^+} \sum_{x_2 \in \omega_2} (y_{\bar{x}_1})^2 h_1 h_2 + \sum_{x_1 \in \omega_1} \sum_{x_2 \in \omega_2^+} (y_{\bar{x}_2})^2 h_1 h_2.$$

Для двумерного разностного оператора диффузионного переноса (4.6) имеет место неравенство $(Dy, y) \geq k \|\nabla y\|^2$, так как

$$(Dy, y) = (D^{(1)}y, y) + (D^{(2)}y, y) = \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{x_1 \in \omega_1^+} \alpha^{(1)}(y_{\bar{x}_1})^2 h_1 + \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2^+} \alpha^{(2)}(y_{\bar{x}_2})^2 h_2 \text{ и}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}) \geq k, \quad \alpha = 1, 2.$$

Для оценки двумерного разностного оператора диффузионного переноса используем неравенство Фридрикса для двумерных сеточных функций.

Для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, обращающихся в ноль на $\partial\omega$ верно неравенство $\|\nabla y\|^2 \leq M_0 \|\nabla y\|^2$, $M_0^{-1} = \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}$.

Для разностного оператора D имеет место неравенство $D \leq M_2 E$ с постоянной $M_2 = \frac{4}{h_1^2} \max_{x \in \omega} \frac{\alpha^{(1)}(\mathbf{x}) + \alpha^{(1)}(x_1 + h_1, x_2)}{2} + \frac{4}{h_2^2} \max_{x \in \omega} \frac{\alpha^{(2)}(\mathbf{x}) + \alpha^{(2)}(x_1, x_2 + h_2)}{2}$.

Перейдем к аппроксимации двумерного оператора конвективного переноса на смещенных сетках, которые принято использовать в задачах гидродинамики [54]:

$$C_2^{(1)} y = \frac{4}{2h_1} v_1(x_1 + 0,5h_1, x_2)(y(x_1 + h_1, x_2) + y(\mathbf{x})) - \frac{1}{2h_2} v_1(x_1 - 0,5h_1, x_2)(y(x_1 - h_1, x_2) + y(\mathbf{x})),$$

$$C_2^{(2)} y = \frac{4}{2h_2} v_2(x_1, x_2 + 0,5h_2)(y(x_1, x_2 + h_2) + y(\mathbf{x})) - \frac{1}{2h_2} v_2(x_1, x_2 - 0,5h_2)(y(x_1, x_2 - h_2) + y(\mathbf{x})),$$

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^2 C_2^{(\alpha)}, \quad x \in \omega.$$

Аппроксимируем задачу
$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha(\mathbf{x})u) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) = f(\mathbf{x}),$$

$\mathbf{x} \in \Omega$, $u(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{K}\Omega$, разностной схемой вида $C_2 y + D y = \varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$, где операторы C_2 и D определены выше. Запишем разностную схему

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha(\mathbf{x})u) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

в канонической форме сеточных уравнений

$$\begin{aligned} & \gamma(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) - \alpha_1(\mathbf{x})y(x_1 + h_1, x_2) - \beta_1 y(x_1 + h_1, x_2) - \\ & - \alpha_2(\mathbf{x})y(x_1, x_2 + h_2) - \beta_2 y(x_1, x_2 + h_2) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \\ & y(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega. \end{aligned}$$

Коэффициенты разностных уравнений с граничными условиями Дирихле представляются в виде:

$$\alpha_1(\mathbf{x}) = \frac{v_1(x_1 - 0,5h_1, x_2)}{2h_1} + \frac{k(x_1 - 0,5h_1, x_2)}{h_1^2},$$

$$\beta_1(\mathbf{x}) = -\frac{v_1(x_1 + 0,5h_1, x_2)}{2h_1} + \frac{k(x_1 + 0,5h_1, x_2)}{h_1^2},$$

$$\alpha_2(\mathbf{x}) = \frac{v_2(x_1, x_2 - 0,5h_2)}{2h_2} + \frac{k(x_1, x_2 - 0,5h_2)}{h_2^2},$$

$$\beta_2(\mathbf{x}) = -\frac{v_2(x_1, x_2 + 0,5h_2)}{2h_2} + \frac{k(x_1, x_2 + 0,5h_2)}{h_2^2},$$

$$\gamma(\mathbf{x}) = \alpha_1(x_1 + h_1, x_2) + \beta_1(x_1 - h_1, x_2) + \alpha_2(x_1, x_2 + h_2) + \beta_2(x_1, x_2 + h_2), \mathbf{x} \in \omega.$$

При ограниченных значениях сеточных чисел Пекле

$$Pe_i \equiv \frac{|v_i|h}{\min\{k_{i-1/2}, k_{i+1/2}\}} < 2$$

выполняются свойства монотонности разностной

схемы и положительности оператора сеточной задачи диффузии-конвекции.

Достаточные условия монотонности имеют вид:

$$1 + \zeta_1(x_1 - 0,5h_1, x_2) > |\theta_1(x_1 - 0,5h_1, x_2)|, \quad \mathbf{x} \in \omega_1^+ \times \omega_2,$$

$$1 + \zeta_2(x_1, x_2 - 0,5h_2) > |\theta_2(x_1, x_2 - 0,5h_2)|, \quad \mathbf{x} \in \omega_1 \times \omega_2^+.$$

Относительно аппроксимации конвективной части оператора задачи, исходя из специфики задач прибрежной и морской гидродинамики, следует отметить, что он имеет дивергентную форму, т.е. для дискретной модели выполняется закон непрерывности среды, а для слабосжимаемой среды построенный оператор весьма близок к кососимметричному.

Функция скорости имеет вид $v_1 = 1, v_2 = 2$. Очевидно, условия закона сохранения непрерывности среды выполняются, а также выполняются условия ограниченности сеточных чисел Пекле для используемых ниже сеток.

$$\text{Функция правой части имеет вид } -\varphi(x_1, x_2) = 2c_1(x_1 - 0,5)c - 2c_2(x_2 - 0,5).$$

Граничные условия первого рода для модельной задачи в исходных переменных: $OC: x_2 = 0, u_{ij} = 1 + cx_1$. $CB: x_1 = 1, u_{ij} = 1 + c + x_2$.

$$AB: x_2 = 1, u_{ij} = 2 + cx_1. \quad AO: x_1 = 0, u_{ij} = 1 + x_2.$$

В такой постановке нерывная задача-конвекции-диффузии имеет следующее решение: $u = 1 + cx_1 + x_2$.

Для решения разностных уравнений, аппроксимирующих модельную задачу, используем два варианта попеременно-треугольного метода: адаптивный ПТМ и симметризованный адаптивный ПТМ. Эти варианты характеризуются одной и той же асимптотической зависимостью числа итераций от числа узлов сетки. Для реализации симметризованного адаптивного попеременно-треугольного итерационного метода будет введена новая пространственная переменная, что позволит сделать обход двумерной области при численной реализации АПТИМ (решении систем с треугольными матрицами) симметричным относительно переменных x_1 и x_2 .

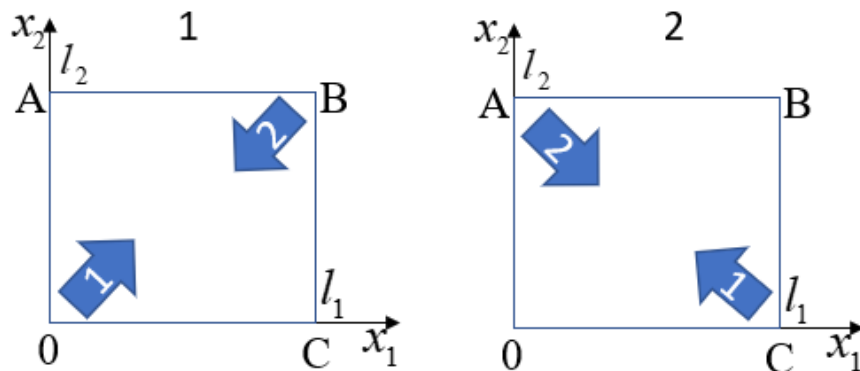


Рисунок 4.1. Симметризованный вариант АПТИМ в двумерном случае

Схематично симметризованный вариант АПТИМ для одной итерации можно представить, состоящим из двух последовательно выполняемых «полуитераций»: первая из которых предполагает обход узлов сеточной области из левого нижнего узла в верхний правый узел и в обратном направлении (первая полуитерация, рисунок 4.1), а вторая полуитерация, для сеточных уравнений с введенной заменой переменной $z = 1 - x_1$ предполагает обход узлов сеточной области из правого нижнего узла в левый верхний узел и в обратном направлении (вторая полуитерация, рисунок 4.1).

Коэффициенты уравнения диффузии-конвекции задаются в виде:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left(1 + c_1 \left[\left((i + 0,5)h_x - 0,5 \right)^2 + (jh_y - 0,5)^2 \right] \right) / h_x^2, \\
B_2 &= \left(1 + c_1 \left[\left((i - 0,5)h_x - 0,5 \right)^2 + (jh_y - 0,5)^2 \right] \right) / h_x^2, \\
B_3 &= \left(1 + c_2 \left[0,5 - (ih_x - 0,5)^2 - ((j + 0,5)h_y - 0,5)^2 \right] \right) / h_y^2, \\
B_4 &= \left(1 + c_2 \left[0,5 - (ih_x - 0,5)^2 - ((j - 0,5)h_y - 0,5)^2 \right] \right) / h_y^2, \\
A &= \sum_{i=1}^4 B_i, \quad F = -2c_1(ih_x - 0,5)c + 2c_2(jh_y - 0,5).
\end{aligned}$$

Для реализации второй «полуитерации» симметризованного адаптивного попеременно-треугольного итерационного метода (САПТИМ) введем замену $x'_1 = 1 - x_1$, тогда $x_1 = 1 - x'_1$. Тогда $a_1 = 1 + c_1 \left[(1 - x'_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 \right]$, $a_2 = 1 + c_2 \left[0,5 - (1 - x'_1 - 0,5)^2 - (x_2 - 0,5)^2 \right]$.

Граничные условия первого рода для новых переменных:

$$x_2 = 0, u_{ij} = 1 + c(1 - x'_1) = 1 + c - x'_1, \quad x'_1 = 0, u_{ij} = 1 + c + x_2,$$

$$x_2 = 1, u_{ij} = 2 + c(1 - x'_1) = 2 + c - x'_1, \quad x'_1 = 1, u_{ij} = 1 + x_2.$$

Функция правой части $-\varphi(x'_1, x_2) = -2c_1(0,5 - x'_1)c + 2c_2(x_2 - 0,5)$.

Функция решения для новых переменных имеет вид $u = 1 + c(1 - x'_1) + x_2$.

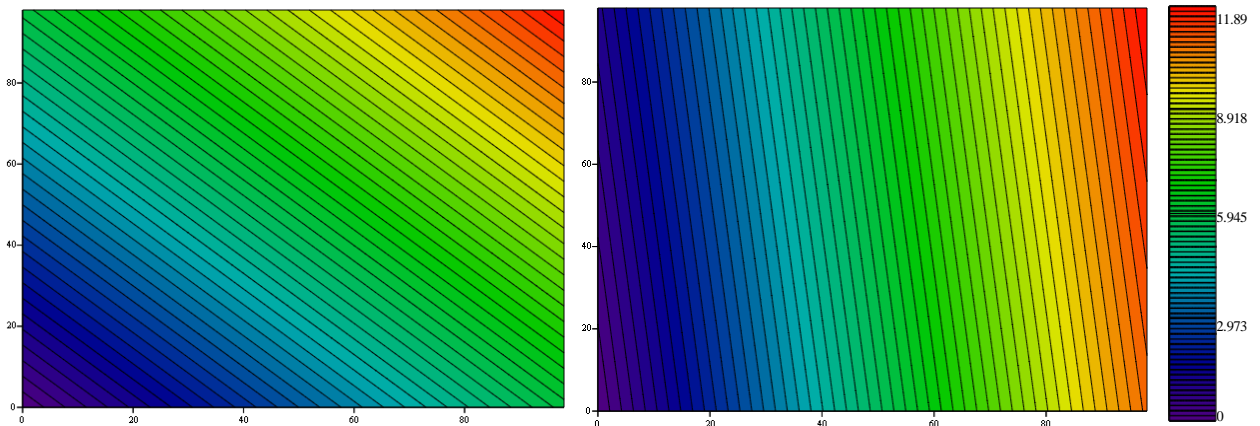


Рисунок 4.2. Результаты расчетов для $c_2 / c_1 = 1$ и $c_2 / c_1 = 32$

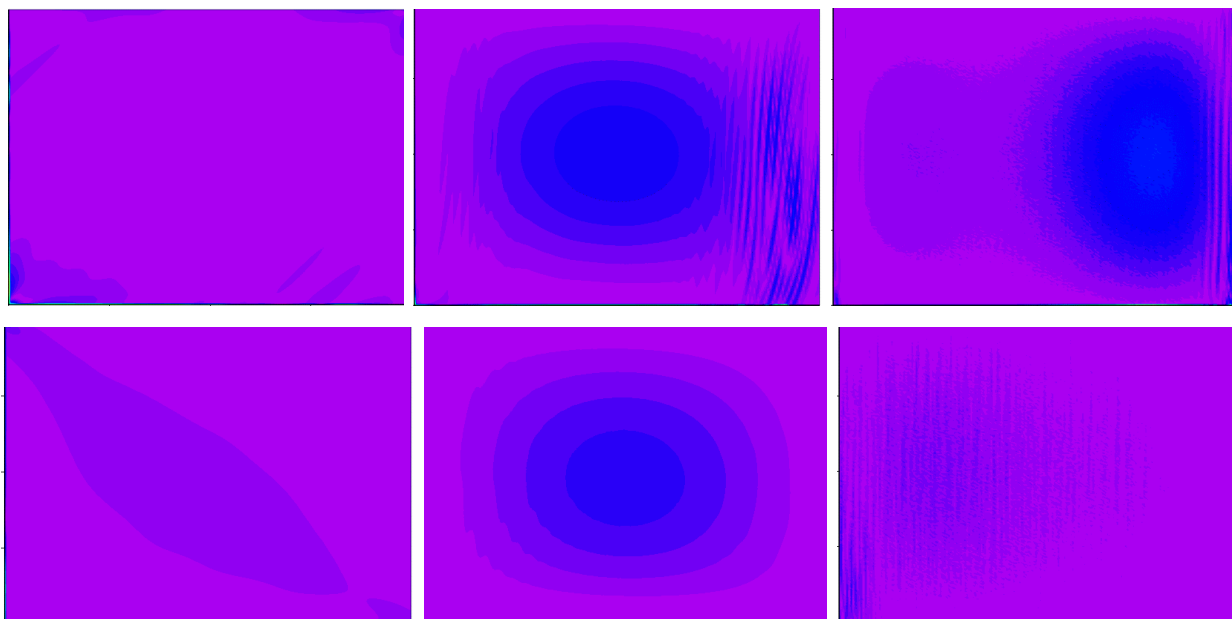


Рисунок 4.3. Распределение невязки АПТИМ и САПТИМ при $c_2 / c_1 = 1, 32, 256$ на сетке 200×200

Для решения модельной задачи были использованы два варианта попеременно-треугольного метода: адаптивный ПТМ и симметризованный адаптивный ПТМ. Эти варианты характеризуются одной и той же асимптотической зависимостью числа итераций от числа узлов сетки.

Таблица 4.1. Сравнение вариантов метода

N	100×100		200×200		400×400	
c_2 / c_1	АПТИМ	САПТИМ	АПТИМ	САПТИМ	АПТИМ	САПТИМ
2	105	107	198	139	318	288
8	159	139	226	245	537	372
32	199	361	330	382	1337	404
512	228	206	1158	734	1844	1556

Увеличивая значение параметра c ($c_1 = 1, c_2 = 1 + 0,5c$), будем получать коэффициенты $a_1(x_1, x_2), a_2(x_1, x_2)$, с увеличивающимися диапазонами изменения их значений. В таблице представлено количество итераций необходимых для каждого параметра на сетках $100 \times 100, 200 \times 200, 400 \times 400$.

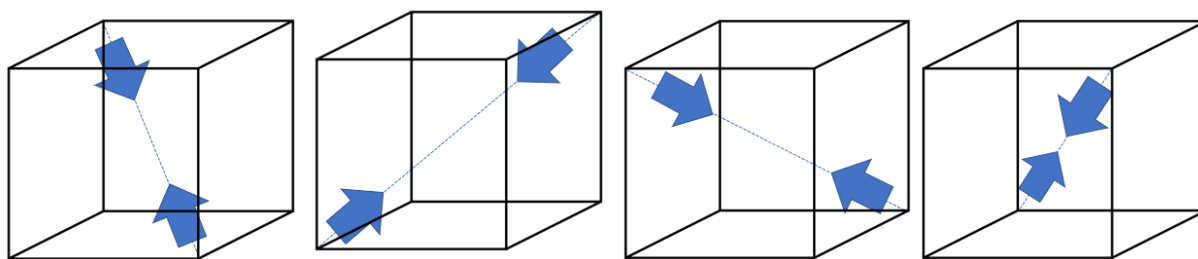


Рисунок 4.4. Симметризованный вариант АПТИМ для полной геометрической симметризации в трехмерном случае

В таблице приведено число итераций для указанных вариантов в зависимости от числа узлов N по одному направлению и от отношения c_2 / c_1 для $\varepsilon = 10^{-4}$. В трехмерном случае для симметризованного АПТИМ необходимо 4 обхода для полной геометрической симметризации (рисунок 4.4). В трехмерном случае симметризованный АПТИМ позволяет уменьшить общее число итераций при заданной точности на 30%.

Таким образом, для случая больших значений числа узлов N симметризованный попеременно-треугольный метод требует меньшего числа итераций.

4.3. Параллельная реализация АПТИМ на основе декомпозиции расчетной области по двум пространственным направлениям

В плане построения вычислительных алгоритмов для современных параллельных компьютеров отдельного внимания заслуживают асинхронные итерационные методы. В этом случае приближенное решение рассчитывается на основе единичных подзадач, которые могут решаться независимо друг от друга. Отметим отдельные имеющиеся возможности в этом направлении исследований.

В настоящее время максимальное развитие обрели итерационные методы декомпозиции области с (или без) наложением отдельных подобластей при различных краевых условиях на границах подобластей (обменных граничных условиях). Особое внимание уделяется разработке асинхронных алгоритмов, которые позволяют организовать автономные вычисления в отдельных подобластях на каждом итерационном шаге.

Отметим некоторые возможные подходы при использовании технологий декомпозиции области для приближенного решения нестационарных задач математической физики. Первый (традиционный) подход базируется на использовании классических неявных схем и итерационных методов декомпозиции области для численного решения сеточной эллиптической задачи на новом временном слое. При втором подходе специфики нестационарных задач (решение при переходе на новый временной слой слабо меняется) предусматриваются более полно.

Опишем потенциал построения вычислительных алгоритмов приближенного решения многомерных задач математической физики на современных суперкомпьютерах. Основной подход сопряжен с декомпозицией (разделением) расчетной области на ряд подобластей. Исходная задача разбивается на ряд подзадач, каждая из которых решается в своей подобласти на своем процессоре. Пусть область Ω состоит из p отдельных подобластей $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_p$, которые могут налегать друг на друга. Работа единичных вычислительных узлов суперкомпьютера сопряжена с решением подзадачи в каждой выделенной подобласти. Метод декомпозиции области дает возможность адаптировать вычислительный алгоритм к параллельной вычислительной системе с произвольной организацией памяти и связями между отдельными вычислительными узлами.

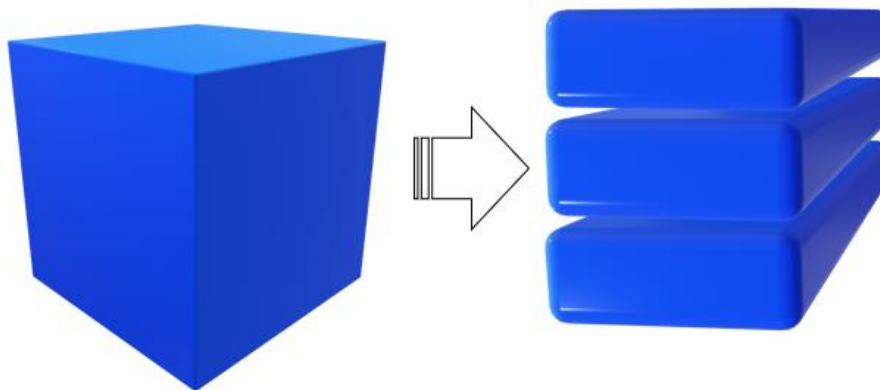


Рисунок 4.5. Декомпозиция области по одному направлению

На рис. 4.5 схематично изображено разбиение расчетной области на отдельные подобласти с налеганием прямыми $x_1 = const$. Если визуально всю расчетную область представить в виде параллелепипеда, то в результате одномерной декомпозиции параллелепипед по одной координатной оси разбивается на p – равных параллелепипедов.

Такое разбиение ориентируется на простейшую архитектуру параллельной вычислительной системы, когда процессоры соединены последовательно с двумя ближайшими соседями.

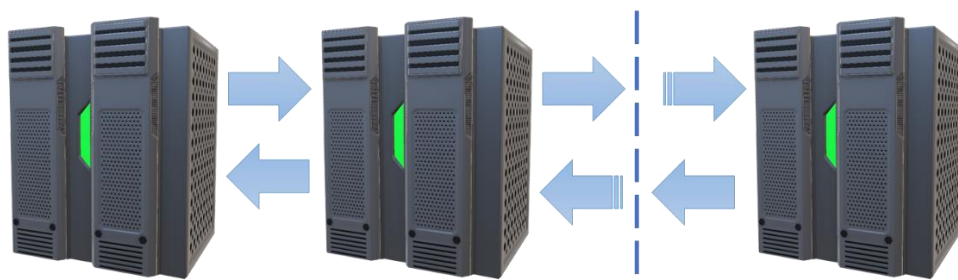


Рисунок 4.6. Связь отдельных процессоров

Подобласти могут группироваться для решения подзадачи на отдельном процессоре. Группирование можно провести всего на две подобласти Ω_1 и Ω_2 , каждая из которых будет состоять их нескольких подобластей, не связанных друг с другом.

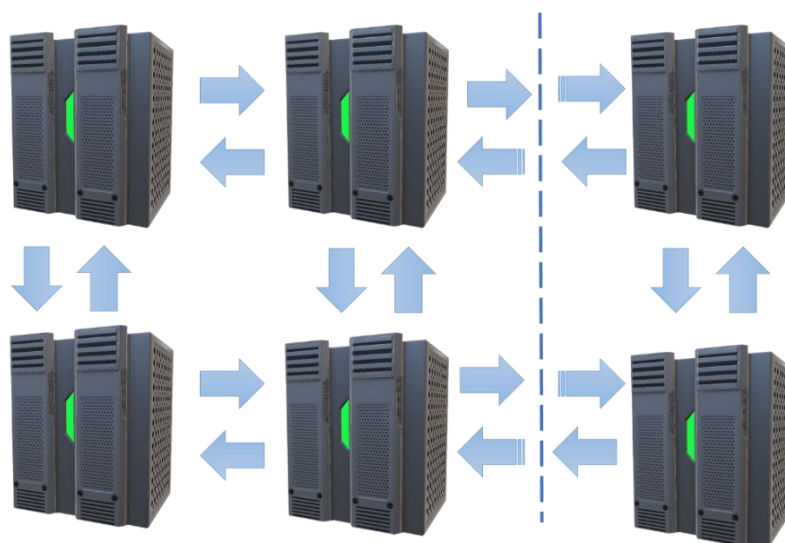


Рисунок 4.7. Решеточная архитектура параллельного компьютера

При более сложной декомпозиции, мы должны ориентироваться на сетку процессоров. Преимущественно просто идея декомпозиции области при приближенном решении нестационарных задач математической физики реализуется с применением явных разностных схем [56-57].

Программная реализация модели гидродинамики была осуществлена на языке C++ с применением технологии MPI, что позволило провести ряд вычислительных экспериментов на многопроцессорной вычислительной системе Научно-технологического университета «Сириус». Использовалась часть кластера, построенная на основе открытого стека приложений OpenHPC, содержащая 1440 процессорных ядер по 2.3 ГГц и 10,24 Тб оперативной памяти.

Разбиение при двухмерной декомпозиции выполняется по двум направлениям. В отличие от одномерной декомпозиции разделение производится первоначально в направлении оси Oy , затем получившиеся параллелепипеды разбиваются на такое же количество областей в другом направлении оси Oz . В результате разбиения на соприкасающихся границах полученных параллелепипедов для вычисления одно требуемое значение попадает на соседний параллелепипед. Поэтому на каждом шаге соседним процессам нужно обмениваться значениями для следующего шага вычисления.

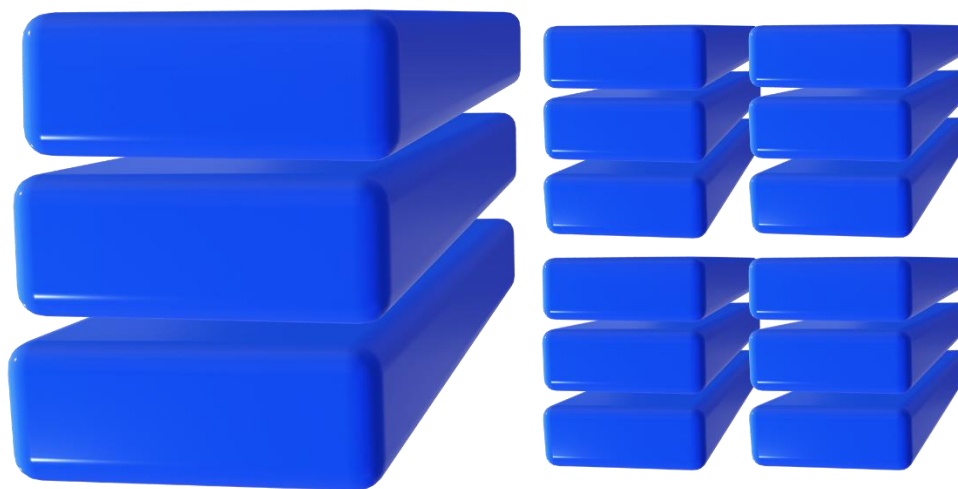


Рисунок 4.8. Декомпозиция расчетной области

Модель параллельного программирования MPI (Message Passing Interface) основана на том, что взаимодействие между процессами происходит путем передачи сообщений. Стандарт MPI можно охарактеризовать следующими возможностями:

- возможность одновременной передачи информации типа точка-точка (передача от одного процесса к другому процессу), которая требует выделения переходных буферов для данных и обеспечивают надежную передачу информации сколь угодно большого размера;

- возможность асинхронной передачи типа точка-точка, при которой посылающей сообщением процесс не ждет начала приема, что позволяет продуктивно транслировать короткие сообщения;

- возможность осуществления коллективных операций, все операции синхронизации и передачи сообщений локализуется внутри коммутатора, с коммутатором связывается группа процессов, в частности, все коллективные операции возбуждаются одновременно на всех процессах, входящих в эту группу;

- возможность организации вычислений с применением различных вычислительных станций, обладающих неодинаковыми наборами команд и разным представлением типов данных.

При двухмерной декомпозиции на результативность параллельной программы внутреннее воздействие оказывает способ передачи сообщений между процессами. Наиболее применимым методом при двухмерной декомпозиции представляется передача и прием сообщений типа точка-точка. Библиотека MPI предоставляет широкий набор функций для передачи и приема сообщений типа точка-точка. В двухмерной декомпозиции использованы следующие технологии передачи и приема сообщений: MPI_SendRecv – блокирующая операция приема-передачи связывает в едином вызове передачу сообщения одному процессу и прием сообщения от того же процесса; неблокирующие прием и передача состоят из двух этапов: инициализация приема

(MPI_Isend) и передачи (MPI_Irecv); блокирующая проверка прекращения обмена (MPI_Wait).

При использовании функций приема и передачи в качестве параметра применяется буфер передаваемых данных. С учетом того, что при декомпозиции нужно транслировать сечения трехмерного массива, необходимо таким образом распределить память, чтобы сечения можно было передавать в виде одномерного массива без заблаговременного тиражирования в непрерывную область памяти. Выделяется непрерывная область памяти, которую логически делят на блоки для двухмерных массивов (сечений параллелепипеда). Блоки для двухмерных массивов в свою очередь логически делятся на блоки для одномерных массивов.

При двухмерной декомпозиции обмен сначала производится между процессами по оси Oy , затем по оси Oz . В MPI ход приема сообщений не хранится в том смысле, что если два процесса отправляют сообщения третьему процессу, то не обеспечивается какой-нибудь безусловный порядок получения сообщений третьим процессом. Буфера данных, используемые в асинхронных вызовах, недоступны до тех пор, пока не произойдет передача или прием сообщения. Фактически платой за использование асинхронных вызовов является дополнительное использование оперативной памяти [6].

Каждый вычислитель рассчитывает элементы области, полученной путем разбиения начальной расчетной зоны на доли по двум координатным направлениям. Смежные зоны перекрываются в двух узлах по направлению, поперечному плоскости разбиения.

После того, как каждый вычислитель получит свою часть области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма (максимальный по модулю элемент). При расчете равномерной нормы вектора невязки каждый вычислитель определяет максимальный по модулю элемент и передает его значение каждому процессору. После передачи каждый процессор считает максимальный элемент, в нем будет содержаться норма вектора невязки [105].

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки $(D + \omega_m R_1)D^{-1}(D + \omega_m R_2)w^m = r^m$. Для этого решим последовательно системы: $(D + \omega_m R_1)y^m = r^m$, $(D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m$.

На первом шаге вычислений первый вычислитель обрабатывает верхний слой. Затем осуществляется передача перекрывающихся компонентов пограничным процессорам. На следующем шаге первый вычислитель обрабатывает второй слой, а его соседи – первый [36].

При расчете значений вектора y^m только первый вычислительный узел не требует дополнительной информации и рассчитывает свой фрагмент, независимо от прочих вычислителей, оставшиеся вычислители ожидают информацию от соседних вычислительных частей с порядковым номером на единицу меньше по каждому из двух направлений. Расчет длится до тех пор, пока не будут обработаны все слои заключительным вычислителем. После вычисления вектора поправки рассчитываются скалярные произведения [32].

После вычисления вектора поправки рассчитываются следующие скалярные произведения: $(\omega^m, \omega^m) = \sum_i (\omega^m)_i^2$, $(A\omega^m, \omega^m) = \sum_i (A\omega^m)_i (\omega^m)_i$,

$(A\omega^m, A\omega^m) = \sum_i (A\omega^m)_i^2$ на своем фрагменте расчетной области, затем выпол-

няется обмен данными от всех ко всем, как и при расчете нормы вектора невязки. Сумма скалярных произведений, вычисленных на каждом из фрагментов расчетной области, будет равна скалярному произведению, вычисленному для расчетной области. Таким образом, расчет скалярных произведений вычисляется в два этапа: обрабатываются фрагменты расчетной области, и выполняется суммирование переданных элементов. Далее рассчитанные значе-

ния скалярных произведений подставляются в выражения $\hat{\omega}_m = \frac{2\|\omega^m\|}{\|A\omega^m\|}$,

$\tau_{m+1} = \hat{\omega}_m + \frac{2\|\omega^m\|^2}{(A\omega^m, \omega^m)}$, в результате чего находятся итерационные параметры

τ и ω . При помощи выражения $x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}\omega^m$, выполняется переход на следующий итерационный слой.

Таблица 4.2. Зависимость ускорения и эффективности от количества ядер

Количество процессоров	Время, с.	Ускорение	Эффективность
1	7,490639	1	1
2	4,151767	1,804	0,902
4	2,549591	2,938	0,734
8	1,450203	5,165	0,646
16	0,882420	8,489	0,531
32	0,458085	16,351	0,511
64	0,265781	28,192	0,44
128	0,171535	43,668	0,341

Результаты расчета ускорения и эффективности в зависимости от количества процессоров для параллельного варианта адаптивного попеременно-треугольного метода приведены в таблице 4.2.

Таким образом, параллельная реализация алгоритма ПТМ на основе декомпозиции по двум пространственным направлениям могут эффективно применяться для решения задач гидродинамики при достаточно большом количестве процессоров.

Краткие выводы по главе 4

Для решения уравнений использован адаптивный попеременно-треугольный итерационный метод. В области численных методов разработан симметризованный вариант адаптивного попеременно-треугольного итерационного метода.

Для сравнения на примере решения разностной задачи были использованы два варианта попеременно-треугольного метода: адаптивный ПТМ и симметризованный адаптивный ПТМ.

Выявлено, что для случая больших значений числа узлов N симметризованный попеременно-треугольный метод требует меньшего числа итераций. В трехмерном случае симметризованный АПТИМ позволяет уменьшить общее число итераций при заданной точности на 30%.

Проведена параллельная реализация алгоритма ПТМ на основе декомпозиции расчетной области по двум пространственным направлениям. Алгоритм попеременно – треугольного итерационного метода и его параллельная реализация на основе декомпозиции по двум пространственным направлениям могут эффективно применяться для решения задач гидродинамики при достаточно большом числе вычислителей.

ГЛАВА 5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ БЕРЕГОЗАЩИТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

5.1. Описание программного комплекса

Сконструирован программный комплекс, предназначенный для построения трехмерных полей скоростей движения водной среды, с учетом динамического перестроения геометрии расчетной области, при моделировании наката волны на берег, для моделирования вероятных неблагоприятных ситуаций, вызванными волновыми гидродинамическими процессами в прибрежных акваториях, с целью предопределения постройки береговых сооружений и надводных конструкций. Программный комплекс реализован на C++.

Выходными параметрами являются: шаги по пространственным координатам, погрешность вычисления сеточных уравнений, масштабы расчетной сетки, временной интервал, интенсивность испарения, исходные распределения компонент вектора скорости движения водной среды и давления.

Разработанный программный комплекс включает:

- управляющий блок;
- блок ввода исходных распределений для расчета скорости течений и функции возвышения уровня;
- блок построения сеточных уравнений для 2D и 3D полей скоростей водного потока без учета давления;
- блок построения сеточных уравнений для расчета поля давления и функции возвышения уровня;
- блок апробации присутствия на поверхности водной среды конструкции;
- блок расчета поля скорости с учетом давления;
- блок решения сеточных уравнений модифицированным адаптивным попеременно-треугольным методом вариационного типа;
- блок вывода значений поля скоростей и функции давления (поля функции возвышения уровня).

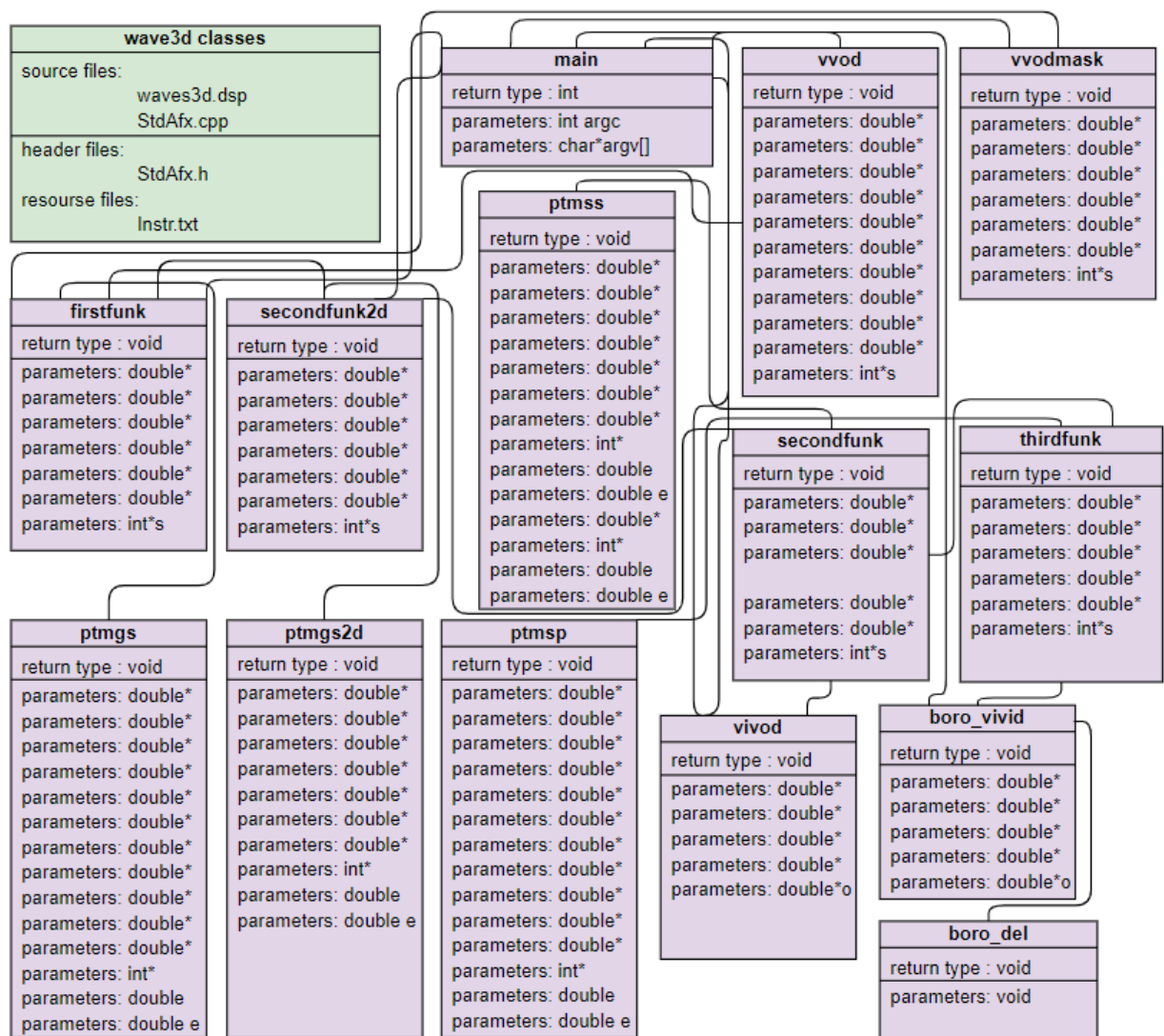


Рисунок 5.1 Диаграмма модулей программного комплекса

Управляющий блок охватывает цикл по временной переменной, в нем вызываются функции: расчет поля скорости без учета функции возвышения уровня, расчет функции возвышения уровня, расчет двумерного поля скорости, контроль наличия на поверхности водной среды установки и функции ввода-вывода [23].

В блоке ввода исходных распределений для расчета скорости течений и функции возвышения уровня задаются исходные распределения поля скорости и функции возвышения уровня и начальные значения степени заполненности расчетных ячеек [9].

В блоке построения сеточных уравнений без учета давления для 2D модели мелкой воды не исполняется запись функции возвышения уровня. Диаграмма

модулей программного комплекса, численно реализующего разработанную 3D модель волновой гидродинамики, представлена на рис. 5.1.

В программе формируются следующие переменные:

– целочисленная переменная – размеры массивов: для трехмерных $N=N_x*N_y*N_z$ и двумерных полей $N2d=N_x*N_y$;

– вещественные переменные – значение времени t .

В программе выделяется память под следующие массивы:

– одномерные вещественные массивы – компоненты вектора скорости $u[N]$, $v[N]$, $w[N]$;

– одномерные вещественные массивы – гидродинамическое $p[N]$ и гидростатическое давления $p1[N2d]$;

– одномерные вещественные массивы – поля коэффициента турбулентного обмена $tu[N]$, $nu[N]$;

– одномерные вещественные массивы – функции, описывающие заполненность $o[N]$ и максимальную заполненность ячеек $o_max[N]$;

– одномерный вещественный массив – функция глубины водоема $h[N2d]$;

– одномерные вещественные массивы – плотность $po[N]$ и изменения плотности $poh[N]$;

– одномерный целочисленный массив – маски граничных условий $s[N]$.

Для работы программы необходимо задание следующих функций:

– функция ввода начальных данных $vvod(u,v,w,p,p1,nu,ni,o,o_max,h,s)$;

– функция ввода масок граничных условий $vvodmask(u,v,w,p,o,o_max,s)$;

– функция расчета компонентов вектора скорости на промежуточном временном слое $firstfunc(u,v,w,nu,ni,o,s)$;

– функция расчета начального приближения для поля давления $secondfunc2d(u,v,w,p,p1,po,poh,o,s)$;

– функция расчета поля давления $secondfunc(u,v,w,p,p1,po,poh,o,s)$;

– функция уточнения компонентов вектора скорости по давлению $thirdfunc(u,v,w,p,po,o,s)$;

- функция вывода данных $vivod(u, v, w, p, o)$;
- функция расчета семиточечных сеточных уравнений $SLAY(A, B1, B2, B3, B4, F, C, eps)$;
- функция расчета пятиточечных сеточных уравнений $SLAY2d(A, B1, B2, B3, B4, F, C, eps)$.

Выходными параметрами являются компоненты вектора скорости u , v , w и давление p . Алгоритм организации вычислительного эксперимента на основе разработанного программного комплекса представлен на рис. 5.2.

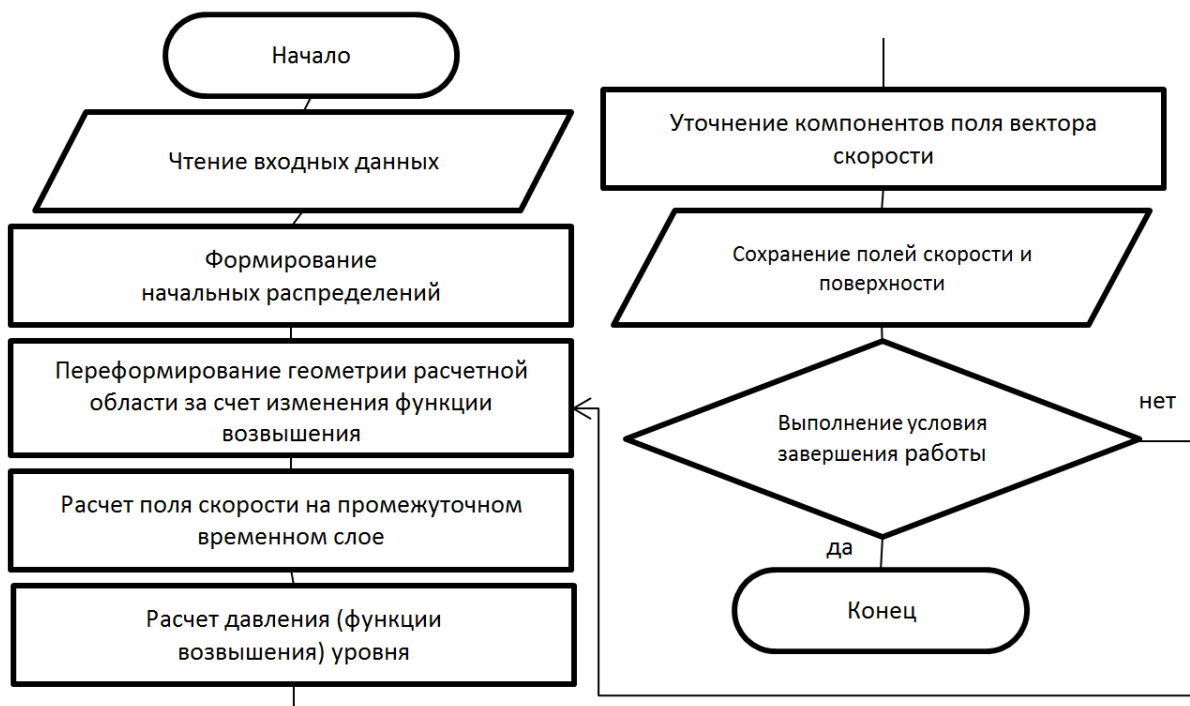


Рисунок 5.2. Алгоритм организации вычислительного эксперимента на основе разработанного программного комплекса

Алгоритм работы программного комплекса:

1. Начало работы.
2. Формируются переменные и массивы.
3. Ввод начальных данных. Вызов функции:
 $vivod(u, v, w, p, p1, tu, nu, o, o_max, h, s)$.
4. Начало цикла по времени.
5. Вызов функции ввода масок граничных условий
 $vivodmask(u, v, w, p, o, o_max, s)$.

6. Вызов функции расчета компонентов вектора скорости на промежуточном временном слое: $firstfunc(u, v, w, mu, nu, o, s)$.
7. Вызов функции расчета начального приближения для поля давления: $secondfunc2d(u, v, w, p, p1, po, poh, o, s)$.
8. Вызов функции расчета поля давления:
 $secondfunc(u, v, w, p, p1, po, poh, o, s)$.
9. Вызов функции уточнения компонентов вектора скорости по давлению $thirdfunc(u, v, w, p, po, o, s)$
10. Наравивание времени $t \leftarrow t + h_t$.
11. Вызов функции вывода данных $vivod(u, v, w, p, o)$.
12. Конец цикла по времени (если $t \leq l_t + h_t / 2$, то возврат в пункт 4).
13. Конец работы алгоритма.

Кратко остановимся на описании функций. В функции ввода начальных данных $vvod(u, v, w, p, p1, mu, nu, o, o_max, h, s)$ формируются начальные данные для следующих массивов: $p1, mu, nu, o_max, s$; а также осуществляется чтение данных из файлов для следующих массивов: u, v, w, p, o, h . В функции ввода начальных данных поле o_max рассчитывается согласно следующему алгоритму:

1. Начало.
2. Начало цикла по i, j, k ($i = \overline{1, N_x - 2}$, $j = \overline{1, N_y - 2}$, $k = \overline{1, N_z - 2}$).
- 2.1. Вычисляются номера узлов в двумерных и трехмерных массивах:
 $m_0 \leftarrow k + j \cdot N_z + i \cdot N_z N_y$, $m \leftarrow j + i \cdot N_y$.
- 2.2. Вычисляется максимальная заполненность ячейки с номером m_0

согласно формуле: $o_max_{m_0} \leftarrow \frac{h_m}{h_z} + l - k$,

где $l + 1$ – количество слоев, зарезервированных под нагонные явления.

- 2.3. Проверка условия $o_max_{m_0} \in [0, 1]$.

Если $o_max_{m_0} > 1$ то $o_max_{m_0} \leftarrow 1$.

Если $o_max_{m_0} < 0$, то $o_max_{m_0} \leftarrow -0$.

Конец цикла по i, j, k .

3. Конец алгоритма.

В функции ввода масок граничных условий $vvodmask(u, v, w, p, o, o_max, s)$ заполненности ячеек пересчитываются согласно следующему алгоритму:

1. Для каждой тройки i, j, k ($i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, $k = \overline{1, N_z - 1}$) находятся номера узлов $(i + 1, j, k)$, $(i + 1, j, k)$, $(i + 1, j + 1, k)$, $(i + 1, j, k + 1)$, $(i + 1, j + 1, k + 1)$ согласно следующим формулам:

$$m_0 \leftarrow k + j \cdot N_z + i \cdot N_z N_y, m_5 \leftarrow m_0 + 1, m_{15} \leftarrow m_0 + N_y N_z + 1,$$

$$m_{35} \leftarrow m_0 + N_z + 1, m_{135} \leftarrow m_0 + N_y N_z + N_z + 1.$$

2. Выполняется расчет заполненности ячейки с номером m_0 согласно формуле: $o_{m_0} = \frac{P_{m_5} + P_{m_{15}} + P_{m_{35}} + P_{m_{135}}}{4 \cdot p_{o_{m_0}} \cdot g \cdot h_z} + k + 1 - l$.

3. Проверка условия $o_{m_0} \in [0, o_max_{m_0}]$.

Если $o_{m_0} > o_max_{m_0}$, то $o_{m_0} \leftarrow o_max_{m_0}$.

Если $o_{m_0} < 0$, то $o_{m_0} \leftarrow -0$.

В функции ввода начальных данных поле s задается согласно следующему условию.

Если узел (i, j, k) является расчетным, то $s_{m_0} \leftarrow 1$, иначе $s_{m_0} \leftarrow 0$.

В функции ввода масок граничных условий $vvodmask(u, v, w, p, o, o_max, s)$ задаются значения компонент вектора скорости в граничных узлах согласно следующему алгоритму:

1. Вводится переменная $sum = 0$.

2. Устанавливаются индексы i, j в точке источника.

3. Начало цикла по k ($k = \overline{1, N_z - 1}$).

4. Рассчитываются номера узлов $m_0, m_2, m_4, m_6, m_{24}, m_{26}, m_{46}, m_{246}$.

5. Рассчитываются заполненности контрольных областей q_1, q_2 или q_3, q_4 . Выбор расчетной пары осуществляется в зависимости от направления потока.

6. В зависимости от направления потока вычисляется расчет следующих сумм $sum \leftarrow sum + q_2 - q_1$ или $sum \leftarrow sum + q_4 - q_3$.

7. Конец цикла по k .

8. Начало цикла по k ($k = \overline{1, N_z - 1}$).

9. Если узел (i, j, k) является расчетным, то в зависимости от направления потока выполняются следующие действия:

9.1. Задаются значения компонент вектора скорости по следующим формулам: $u_{m_0} \leftarrow \frac{\Pi}{h_y \cdot h_z \cdot sum}$, $v_{m_0} \leftarrow 0$ или $v_{m_0} \leftarrow \frac{\Pi}{h_x \cdot h_z \cdot sum}$, $u_{m_0} \leftarrow 0$,

где Π – значение потока вектора скорости.

9.2. Переопределяется значение маски граничного условия для узла (i, j, k) : $s_{m_0} \leftarrow 2$.

10. Конец цикла по k .

В функции ввода масок граничных условий для расчетных узлов, стоящих на выходной границе, также переопределяется значение маски граничного условия: $s_{m_0} \leftarrow 3$.

В функции расчета компонент вектора скорости на промежуточном временном слое $firstfunc(u, v, w, mu, nu, o, s)$ формируются следующие массивы:

– одномерные вещественные массивы для коэффициентов сеточных уравнений $A[N], B1[N], B2[N], B3[N], B4[N], B5[N], B6[N]$;

– одномерные вещественные массивы для правых частей сеточных уравнений $F1[N], F2[N], F3[N]$.

Алгоритм работы функции $firstfunc(u, v, w, mu, nu, o, s)$:

1. Формируются переменные и массивы.

2. Обнуляются массивы.

Начало цикла по i ($i = \overline{0, N - 1}$).

$$B1_i = B2_i = B3_i = B4_i = B5_i = B6_i = A_i = F1_i = F2_i = F3_i \leftarrow 0.$$

Конец цикла по i .

3. Построение сеточных уравнений.

Начало цикла по i, j, k ($i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}$).

3.1. Каждой тройке чисел i, j, k ставится в соответствие число (номер элемента i, j, k в одномерном массиве), которое может быть вычислено согласно формуле:

$$m_0 \leftarrow k + j \cdot N_z + i \cdot N_z N_y.$$

В соответствии с данной формулой вычисляется номер элемента, стоящего в центре шаблона сеточного уравнения. Также вычисляются номера элементов, находящихся в окрестности центра шаблона:

$$m_1 \leftarrow m_0 + N_z N_y, \quad m_2 \leftarrow m_0 - N_z N_y, \quad m_3 \leftarrow m_0 + N_z,$$

$$m_4 \leftarrow m_0 - N_z, \quad m_5 \leftarrow m_0 + 1, \quad m_6 \leftarrow m_0 - 1, \quad m_{24} \leftarrow m_0 - N_z N_y - N_z,$$

$$m_{26} \leftarrow m_0 - N_z N_y - 1, \quad m_{46} \leftarrow m_0 - N_z - 1, \quad m_{246} \leftarrow m_0 - N_z N_y - 1.$$

3.2. Далее вычисляются коэффициенты, характеризующие заполненности контрольных областей

$$q_1 \leftarrow (O_{m_0} + O_{m_4} + O_{m_6} + O_{m_{46}}) / 4, \quad q_2 \leftarrow (O_{m_2} + O_{m_{24}} + O_{m_{26}} + O_{m_{246}}) / 4,$$

$$q_3 \leftarrow (O_{m_0} + O_{m_2} + O_{m_6} + O_{m_{26}}) / 4, \quad q_4 \leftarrow (O_{m_4} + O_{m_{24}} + O_{m_{46}} + O_{m_{246}}) / 4,$$

$$q_5 \leftarrow (O_{m_0} + O_{m_2} + O_{m_4} + O_{m_{24}}) / 4, \quad q_6 \leftarrow (O_{m_6} + O_{m_{26}} + O_{m_{46}} + O_{m_{246}}) / 4,$$

$$q_0 \leftarrow (q_1 + q_2) / 2.$$

3.3. После нумерации элементов и коэффициентов, характеризующих заполненности контрольных областей, вычисляются коэффициенты сеточных уравнений для узлов, находящихся в окрестности центра шаблона. Вначале вычисляются коэффициенты без учета веса схемы, стоящие в окрестности центра шаблона на текущем слое по времени

$$B1_{m_0} \leftarrow \left(-\frac{u_{m_1} + u_{m_0}}{4h_x} + \frac{mu_{m_1} + mu_{m_0}}{2h_x^2} \right) q_1, \quad B2_{m_0} \leftarrow \left(\frac{u_{m_2} + u_{m_0}}{4h_x} + \frac{mu_{m_2} + mu_{m_0}}{2h_x^2} \right) q_2,$$

$$B3_{m_0} \leftarrow \left(-\frac{v_{m_3} + v_{m_0}}{4h_y} + \frac{m u_{m_3} + m u_{m_0}}{2h_y^2} \right) q_3, \quad B4_{m_0} \leftarrow \left(\frac{v_{m_4} + v_{m_0}}{4h_y} + \frac{m u_{m_4} + m u_{m_0}}{2h_y^2} \right) q_4,$$

$$B5_{m_0} \leftarrow \left(-\frac{w_{m_5} + w_{m_0}}{4h_z} + \frac{n u_{m_5} + n u_{m_0}}{2h_z^2} \right) q_5, \quad B6_{m_0} \leftarrow \left(\frac{w_{m_6} + w_{m_0}}{4h_z} + \frac{n u_{m_6} + n u_{m_0}}{2h_z^2} \right) q_6.$$

3.4. Затем вычисляются коэффициенты, находящихся в окрестности центра шаблона на предыдущем слое по времени:

$$B8 \leftarrow (1 - \sigma) B1_{m_0}, \quad B9 \leftarrow (1 - \sigma) B2_{m_0}, \quad B10 \leftarrow (1 - \sigma) B3_{m_0},$$

$$B11 \leftarrow (1 - \sigma) B4_{m_0}, \quad B12 \leftarrow (1 - \sigma) B5_{m_0}, \quad B13 \leftarrow (1 - \sigma) B6_{m_0}.$$

3.5. После чего осуществляется учет веса схемы для коэффициентов, находящихся в окрестности центра шаблона на текущем слое по времени

$$B1_{m_0} \leftarrow \sigma B1_{m_0}, \quad B2_{m_0} \leftarrow \sigma B2_{m_0}, \quad B3_{m_0} \leftarrow \sigma B3_{m_0},$$

$$B4_{m_0} \leftarrow \sigma B4_{m_0}, \quad B5_{m_0} \leftarrow \sigma B5_{m_0}, \quad B6_{m_0} \leftarrow \sigma B6_{m_0}.$$

3.6. Вычисляются коэффициент для узла, находящегося в центре шаблона на текущем слое по времени:

$$A_{m_0} \leftarrow \frac{q_0}{h_t} + B1_{m_0} + B2_{m_0} + B3_{m_0} + B4_{m_0} + B5_{m_0} + B6_{m_0}$$

и на предыдущем

$$B7 \leftarrow \frac{q_0}{h_t} - B8 - B9 - B10 - B11 - B12 - B13.$$

3.7. Вычисляются функции правых частей сеточных уравнений

$$F1_{m_0} \leftarrow B7 \cdot u_{m_0} + B8 \cdot u_{m_1} + B9 \cdot u_{m_2} + B10 \cdot u_{m_3} +$$

$$+ B11 \cdot u_{m_4} + B12 \cdot u_{m_5} + B13 \cdot u_{m_6} + q_0 kor \cdot (v_{m_0} - w_{m_0}),$$

$$F2_{m_0} \leftarrow B7 \cdot v_{m_0} + B8 \cdot v_{m_1} + B9 \cdot v_{m_2} + B10 \cdot v_{m_3} +$$

$$+ B11 \cdot v_{m_4} + B12 \cdot v_{m_5} + B13 \cdot v_{m_6} - q_0 kor \cdot u_{m_0},$$

$$F3_{m_0} \leftarrow B7 \cdot w_{m_0} + B8 \cdot w_{m_1} + B9 \cdot w_{m_2} + B10 \cdot w_{m_3} +$$

$$+ B11 \cdot w_{m_4} + B12 \cdot w_{m_5} + B13 \cdot w_{m_6} + q_0 kor \cdot u_{m_0}.$$

3.8. Если $q_5 > q_6$, то вычисляются ветровые напряжения:

$$ca \leftarrow cp_a \cdot pa / po_{m_0},$$

$$sk \leftarrow ca \cdot \text{sqrt} \left((sk_u - u_{m_0}) \cdot (sk_u - u_{m_0}) + (sk_v - v_{m_0}) \cdot (sk_v - v_{m_0}) + w_{m_0} \cdot w_{m_0} \right),$$

$$F1_{m_0} \leftarrow F1_{m_0} + (q_5 - q_6) \cdot sk \cdot (sk_u - u_{m_0}) / h_z,$$

$$F2_{m_0} \leftarrow F2_{m_0} + (q_5 - q_6) \cdot sk \cdot (sk_v - v_{m_0}) / h_z,$$

$$F3_{m_0} \leftarrow F3_{m_0} - (q_5 - q_6) \cdot sk \cdot w_{m_0} / h_z, \text{ где } \text{sqrt}(x) \equiv \sqrt{x}.$$

3.9. Если $q_5 < q_6$, то вычисляются тангенциальные напряжения на дне водоема

$$cv \leftarrow cp_v \cdot pv / po_{m_0}, sk \leftarrow cv \cdot \text{sqrt} \left(u_{m_0} \cdot u_{m_0} + v_{m_0} \cdot v_{m_0} + w_{m_0} \cdot w_{m_0} \right),$$

$$F1_{m_0} \leftarrow F1_{m_0} - (q_5 - q_6) \cdot sk \cdot u_{m_0} / h_z, F2_{m_0} \leftarrow F2_{m_0} + (q_5 - q_6) \cdot sk \cdot v_{m_0} / h_z,$$

$$F3_{m_0} \leftarrow F3_{m_0} - (q_5 - q_6) \cdot sk \cdot w_{m_0} / h_z.$$

3.10. В случае если узел не является расчётным ($s_{m_0} = 2$), коэффициенты сеточных уравнений и правые части задаются следующим образом:

$$B1_{m_0} = B2_{m_0} = B3_{m_0} = B4_{m_0} = B5_{m_0} = B6_{m_0} \leftarrow 0,$$

$$A_{m_0} \leftarrow 1, F1_{m_0} \leftarrow u_{m_0}, F2_{m_0} \leftarrow v_{m_0}, F3_{m_0} \leftarrow w_{m_0}.$$

Конец цикла по i, j, k .

4. Решение сеточных уравнений для каждой компоненты вектора скорости:

$$SLAY(A, B1, B2, B3, B4, B5, B6, F1, u, eps),$$

$$SLAY(A, B1, B2, B3, B4, B5, B6, F2, v, eps),$$

$$SLAY(A, B1, B2, B3, B4, B5, B6, F3, w, eps).$$

В функции расчета начального приближения для поля давления *second-func2d* ($u, v, w, p, p1, po, poh, o, s$) формируются следующие массивы:

– одномерные вещественные массивы для коэффициентов сеточных уравнений $A[N2d]$, $B1[N2d]$, $B2[N2d]$, $B3[N2d]$, $B4[N2d]$;

– одномерные вещественные массивы для правых частей сеточных уравнений $F[N2d]$.

Алгоритм работы функции $secondfunc2d(u, v, w, p, p1, po, poh, o, s)$:

1. Формируются массивы и вводятся следующие переменные:

$$d1 \leftarrow 1/h_x^2, \quad d2 \leftarrow 1/h_y^2.$$

2. Обнуляются массивы.

Начало цикла по i ($i = \overline{0, N2d - 1}$).

$$B1_i = B2_i = B3_i = B4_i = A_i = F_i \leftarrow 0.$$

Конец цикла по i .

3. Построение сеточных уравнений.

Начало цикла по i, j, k ($i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}$).

3.1. Каждой тройке чисел i, j, k ставится в соответствие число (номер элемента i, j, k в одномерном массиве) согласно формуле:

$$m_0 \leftarrow k + j \cdot N_z + i \cdot N_z N_y,$$

а также паре чисел i, j ставится в соответствие число согласно формуле:

$$m \leftarrow j + i \cdot N_y.$$

Также вычисляются номера элементов, находящихся в окрестности центра шаблона $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_{24}, m_{26}, m_{46}, m_{246}$ в соответствии с формулами, записанными выше.

3.2. Далее вычисляются коэффициенты, характеризующие заполненности контрольных областей $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_0$.

3.3. Вычисляются коэффициенты сеточных уравнений, стоящие в окрестности центра шаблона

$$B1_m \leftarrow B1_m + d1 \cdot q_1, \quad B2_m \leftarrow B2_m + d1 \cdot q_2,$$

$$B3_m \leftarrow B3_m + d2 \cdot q_3, \quad B4_m \leftarrow B4_m + d2 \cdot q_4$$

и в центре шаблона

$$A_m \leftarrow A_m + d1 \cdot q_1 + d1 \cdot q_2 + d2 \cdot q_3 + d2 \cdot q_4.$$

3.4. Вычисляется правая часть сеточных уравнений по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 F_m \leftarrow & F_m - q_0 \cdot \rho h_{m_0} / h_t^2 - q_1 \left(\rho_{m_1} u_{m_1} + \rho_{m_0} u_{m_0} \right) / \left(2h_t h_x \right) + \\
 & + q_2 \left(\rho_{m_2} u_{m_2} + \rho_{m_0} u_{m_0} \right) / \left(2h_t h_x \right) - q_3 \left(\rho_{m_3} v_{m_3} + \rho_{m_0} v_{m_0} \right) / \left(2h_t h_y \right) + \\
 & + q_4 \left(\rho_{m_4} v_{m_4} + \rho_{m_0} v_{m_0} \right) / \left(2h_t h_y \right) - q_5 \left(\rho_{m_5} w_{m_5} + \rho_{m_0} w_{m_0} \right) / \left(2h_t h_z \right) + \\
 & + q_6 \left(\rho_{m_6} w_{m_6} + \rho_{m_0} w_{m_0} \right) / \left(2h_t h_z \right).
 \end{aligned}$$

3.5. Если $q_5 > q_6$, то осуществляется учет сгонно-нагонных явлений и испарения.

$$\begin{aligned}
 A_m \leftarrow & A_m + (q_5 - q_6) / (h_t^2 h_z g) \\
 F_m \leftarrow & F_m + (q_5 - q_6) \rho_{m_0} / (h_t^2 h_z g) - (\rho_{m_0} / h_t) \cdot \text{isp} \cdot (q_5 - q_6) / h_z.
 \end{aligned}$$

3.6. Если $s_{m_0} > 1$, то задается условие свободного выхода

$$F_m \leftarrow F_m + \left((q_2 - q_1) \rho_{m_0} u_{m_0} / h_x + (q_4 - q_3) \rho_{m_0} v_{m_0} / h_y \right) / h_t.$$

Конец цикла по i, j, k .

4. Решение сеточных уравнений

SLAY2d(A, B1, B2, B3, B4, F, p1, eps).

В функции расчета начального приближения для поля давления *secondfunc(u, v, w, p, p1, rho, rho_h, o, s)* формируются следующие массивы:

- одномерные вещественные массивы для коэффициентов сеточных уравнений $A[N], B1[N], B2[N], B3[N], B4[N], B5[N], B6[N]$;
- одномерные вещественные массивы для правых частей сеточных уравнений $F[N]$.

Алгоритм работы функции *secondfunc(u, v, w, p, p1, rho, rho_h, o, s)*:

1. Формируются массивы и вводятся следующие переменные:

$$d1 \leftarrow 1 / h_x^2, \quad d2 \leftarrow 1 / h_y^2, \quad d3 \leftarrow 1 / h_z^2.$$

2. Обнуляются массивы.

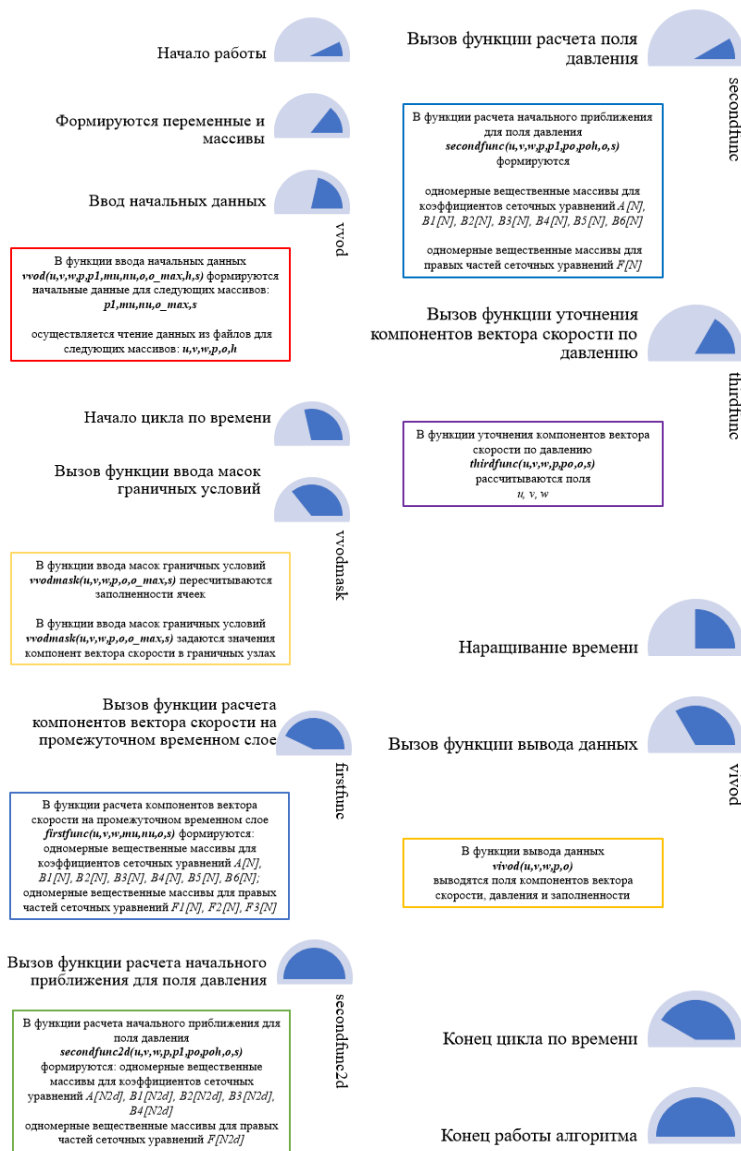


Рисунок 5.3. Функции, реализованные в программном комплексе

Начало цикла по i ($i = \overline{0, N-1}$).

$B1_i = B2_i = B3_i = B4_i = B5_i = B6_i = A_i = F_i \leftarrow 0$. Конец цикла по i .

3. Построение сеточных уравнений. Начало цикла по i, j, k ($i = \overline{1, N_x-1}$, $j = \overline{1, N_y-1}$, $k = \overline{1, N_z-1}$).

3.1. Каждой тройке чисел i, j, k ставится в соответствие число (номер элемента i, j, k в одномерном массиве), согласно формуле: $m_0 \leftarrow k + j \cdot N_z + i \cdot N_z N_y$ и рассчитываются номера элементов, находящихся в окрестности центра

шаблона $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_{24}, m_{26}, m_{46}, m_{246}$, в соответствии с формулами, приведенными выше.

3.2. Далее вычисляются коэффициенты, характеризующие заполненность контрольных областей $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_0$.

3.3. Вычисляются коэффициенты сеточных уравнений, находящийся в окрестности центра шаблона $B1_{m_0} \leftarrow d1 \cdot q_1, B2_{m_0} \leftarrow d1 \cdot q_2, B3_{m_0} \leftarrow d2 \cdot q_3, B4_{m_0} \leftarrow d2 \cdot q_4, B5_{m_0} \leftarrow d3 \cdot q_5, B6_{m_0} \leftarrow d3 \cdot q_6$, и в центре шаблона $A_{m_0} \leftarrow d1 \cdot q_1 + d1 \cdot q_2 + d2 \cdot q_3 + d2 \cdot q_4 + d3 \cdot q_5 + d3 \cdot q_6$.

3.4. Вычисляется правая часть сеточных уравнений по следующей формуле:

$$F_{m_0} \leftarrow -q_0 \cdot p_0 h_{m_0} / h_t^2 - q_1 (p_{m_1} u_{m_1} + p_{m_0} u_{m_0}) / (2h_t h_x) +$$

$$+ q_2 (p_{m_2} u_{m_2} + p_{m_0} u_{m_0}) / (2h_t h_x) - q_3 (p_{m_3} v_{m_3} + p_{m_0} v_{m_0}) / (2h_t h_y) +$$

$$+ q_4 (p_{m_4} v_{m_4} + p_{m_0} v_{m_0}) / (2h_t h_y) - q_5 (p_{m_5} w_{m_5} + p_{m_0} w_{m_0}) / (2h_t h_z) +$$

$$+ q_6 (p_{m_6} w_{m_6} + p_{m_0} w_{m_0}) / (2h_t h_z).$$

3.5. Если $q_5 > q_6$, то осуществляется учет сгонно-нагонных явлений и испарения.

$$A_{m_0} \leftarrow A_{m_0} + (q_5 - q_6) / (h_t^2 h_z g),$$

$$F_{m_0} \leftarrow F_{m_0} + (q_5 - q_6) p_{m_0} / (h_t^2 h_z g) - (p_{m_0} / h_t) \cdot isp \cdot (q_5 - q_6) / h_z.$$

3.6. Если $s_{m_0} > 1$, то задается условие свободного выхода

$$F_{m_0} \leftarrow F_{m_0} + ((q_2 - q_1) p_{m_0} u_{m_0} / h_x + (q_4 - q_3) p_{m_0} v_{m_0} / h_y) / h_t.$$

Конец цикла по i, j, k .

4. Задание начального приближения для поля давления

Начало цикла по i, j, k ($i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}$).

Расчет номеров элементов m и m_0 для двумерного и трехмерного полей производится в соответствии с формулами, приведенными выше.

Если узел i,j,k является расчётным узлом поля давления $s_{m_0} > 0$, то для него задается начальное приближение $p_{m_0} \leftarrow p_1^m$.

Конец цикла по i,j,k .

5. Решение сеточных уравнений $SLAY2d(A,B1,B2,B3,B4,F,p1,eps)$.

В функции уточнения компонентов вектора скорости по давлению **third-func**(u,v,w,p,po,o,s) поля u,v,w рассчитываются согласно следующему алгоритму:

Начало цикла по i,j,k ($i = \overline{1, N_x - 1}, j = \overline{1, N_y - 1}, k = \overline{1, N_z - 1}$).

1. Каждой тройке чисел i,j,k ставится в соответствие число (номер элемента i,j,k в одномерном массиве), согласно формуле: $m_0 \leftarrow k + j \cdot N_z + i \cdot N_z N_y$ и рассчитываются номера элементов, находящиеся в окрестности центра шаблона $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_{24}, m_{26}, m_{46}, m_{246}$, в соответствии с формулами приведенными выше.

2. Вычисляются коэффициенты, характеризующие заполненности контрольных областей $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_0$.

3. Если узел i,j,k является расчётным узлом поля скорости ($s_{m_0} > 0$ и $s_{m_0} \neq 2$), то уточняем компоненты вектора скорости в соответствии со следующими формулами:

$$u_{m_0} \leftarrow u_{m_0} - h_t \left(q_1 (p_{m_1} - p_{m_0}) - q_2 (p_{m_2} - p_{m_0}) \right) / (2h_x p o_{m_0} q_0),$$

$$v_{m_0} \leftarrow v_{m_0} - h_t \left(q_3 (p_{m_3} - p_{m_0}) - q_4 (p_{m_4} - p_{m_0}) \right) / (2h_y p o_{m_0} q_0),$$

$$w_{m_0} \leftarrow w_{m_0} - h_t \left(q_5 (p_{m_5} - p_{m_0}) - q_6 (p_{m_6} - p_{m_0}) \right) / (2h_z p o_{m_0} q_0).$$

Конец цикла по i,j,k .

В функции вывода данных **vivod**(u,v,w,p,o) выводятся поля компонентов вектора скорости, давления и заполненности.

Таким образом, областью применения программного комплекса является построение поля скоростей и давления водной среды, и оценка гидродинамического воздействия на берег при наличии поверхностных волн.

5.2. Результаты численных экспериментов на основе построенного программного комплекса для модельных задач

Разработанный комплекс программ позволяет задавать сложную геометрию дна и конфигурацию надводного объекта, вид и характеристики источника колебаний, направление ветра. Рассмотрим результаты численных экспериментов, полученные на основе построенного программного комплекса. Была численно решена задача расчета гидродинамического воздействия волн на конструкцию с размерами: 10 на 10 м, погруженную на глубину 0,5 м, которая установлена на дне водоема, рассматриваемый для моделирования участка имеет размеры 50 на 50 м по горизонтали и 4 м по вертикали (по 2 м в глубину и в высоту). Зададим на некотором расстоянии от надводного объекта источник возмущений [87].

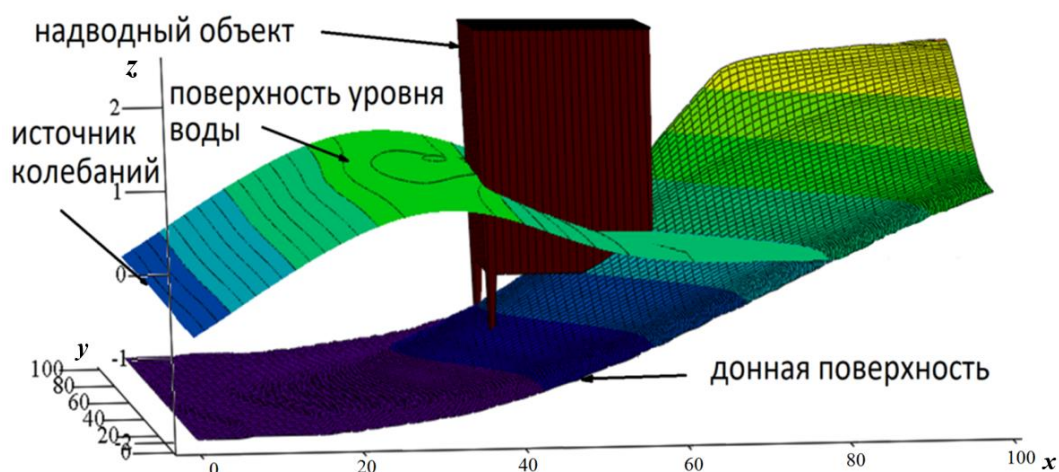


Рисунок 5.4. Графики функций возвышения уровня и рельефа дна

На рис. 5.4 представлены результаты численного эксперимента воздействия волн на надводный объект прибрежной инфраструктуры, имеющий опоры на дне водоема, на основе трехмерной модели волновых процессов.

Разработанный программный комплекс использовался для численной реализации предложенной трехмерной модели волновой гидродинамики и построения прогноза движения водной среды при наличии технического объекта, расположенного ниже уровня невозмущенной поверхности водоема, были рассчитаны силовые гидродинамические нагрузки на опоры сооружения [107].

Результаты численных экспериментов по моделированию распространения волновых гидродинамических процессов на основе 3D модели движения водной среды при выходе волны на берег с учетом геометрии дна объекта, находящегося в жидкости и дна водоема представлены на рис. 5.5 в различные моменты времени. На основе разработанного комплекса программ построен прогноз изменения гидродинамических волновых процессов прибрежной зоны водного тела.

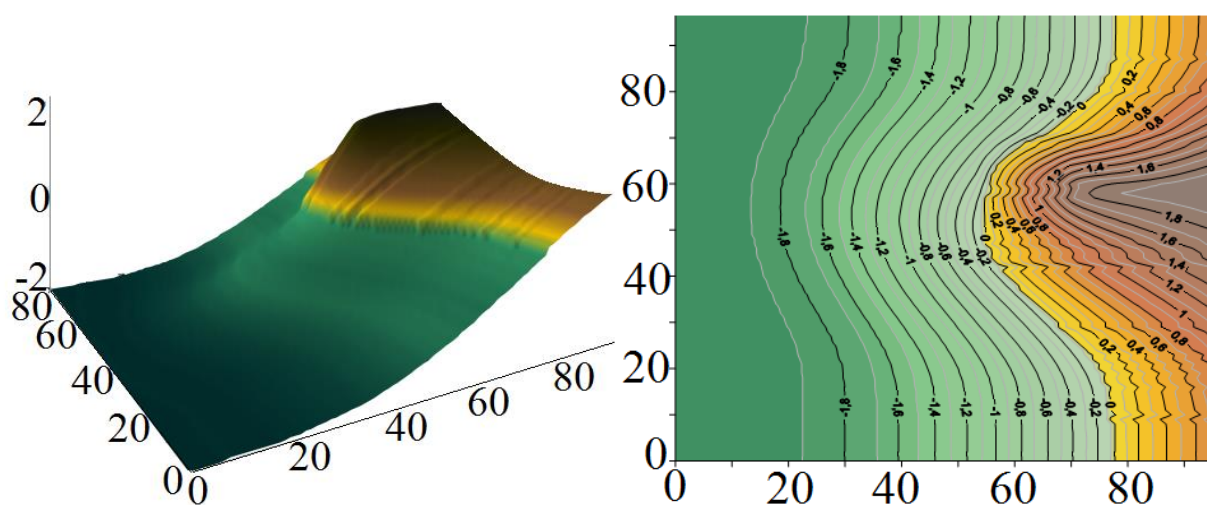


Рисунок 5.5. Геометрия расчетной области, представляющая естественный уклон дна

При практическом использовании проблемно-ориентированного комплекса программ решалась модельная задача расчета полей скорости водного потока и давления водной среды. Источник возмущений задается на заданном расстоянии от линии берега. Область моделирования имеет размеры 50 на 50 м и глубину 2 м, пиковая точка возвышается над уровнем моря на 2 м. Предположим, что жидкость находится в состоянии покоя в начальный момент времени. При решении поставленной модельной задачи использовалась сетка размерами $100 \times 100 \times 40$ расчетных узлов, шаг по времени составил 0,01 с.

Рис. 5.6 демонстрирует поле вектора скорости движения водной среды при накате волны на береговую линию, при этом динамически меняется функция возвышения уровня, образуются зоны затопления и обмеления.

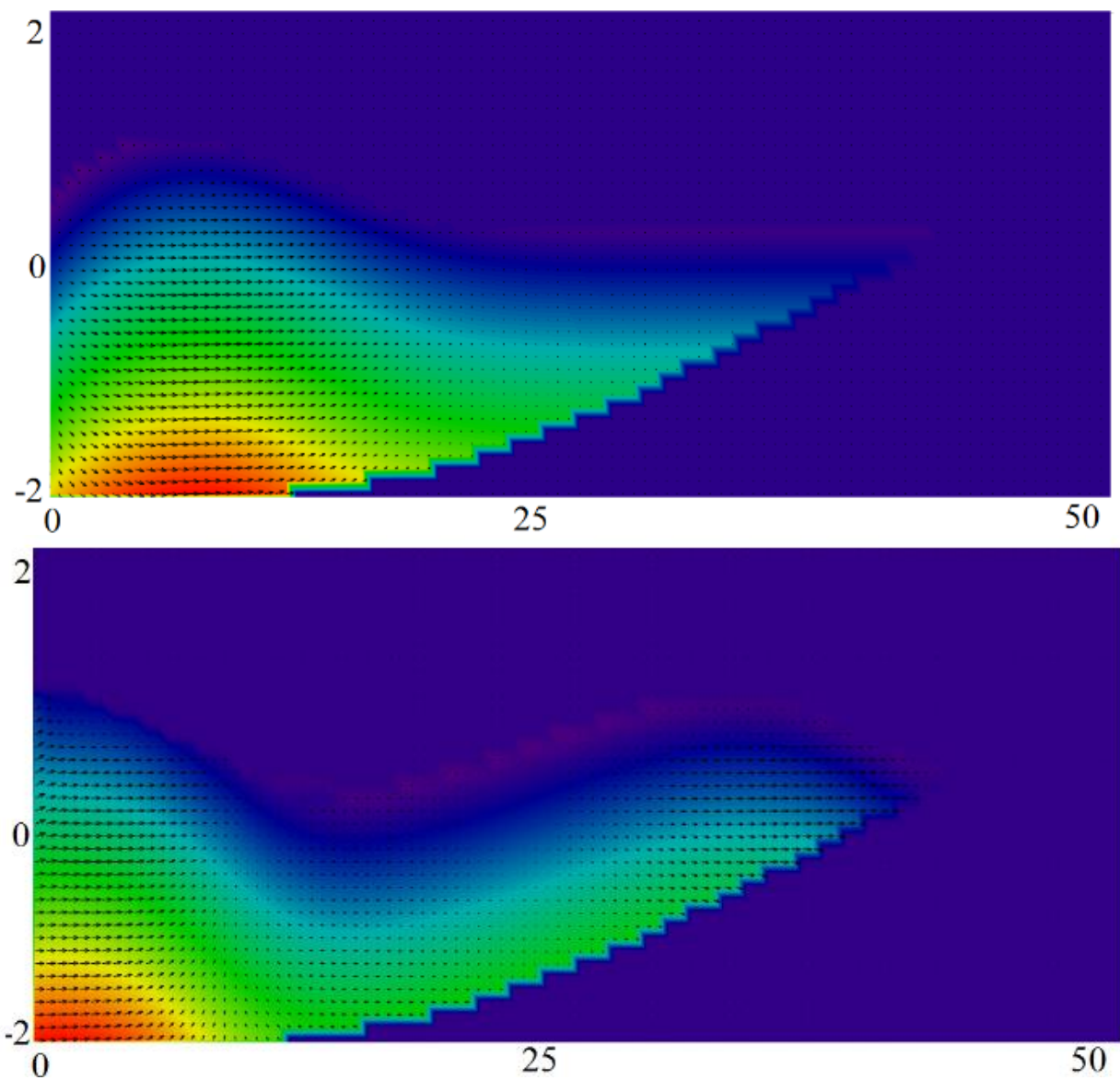


Рисунок 5.6. Трехмерное поле вектора скорости движения водной среды через 5 секунд, через 10 секунд

Разработка трехмерной модели волновых гидродинамических процессов на основании натуральных данных позволила описать движение водной среды мелководного водоема при учете выхода волны на берег. Программный комплекс адаптирован для моделирования гидродинамических волновых процессов и используется в широком диапазоне параметров для расчета полей скоростей и давления водной среды, и оценки гидродинамического воздействия на берег при наличии поверхностных волн.

Из рис. 5.7 видно, что участок суши был затоплен набегающей волной. Учет затопления и осушения прибрежных участков осуществлялся за счет пересчета заполненностей расчетных ячеек. Предложенный подход позволяет

решать задачи в областях со сложной и динамически перестраиваемой геометрией границы. Разработанный программный комплекс обладает отличительной чертой – при моделировании распространения поверхностных колебаний учитывается выход волны на береговую линию.

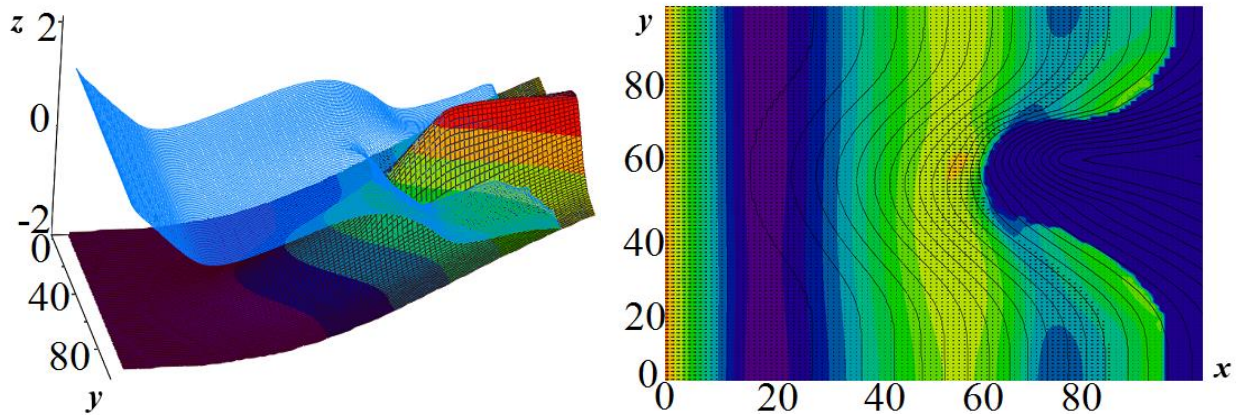


Рисунок 5.7. Графики функций возвышения уровня и рельефа дна 3D модели движения водной среды

На рис. 5.8 представлены результаты моделирования динамического нестационарного процесса, характеризующего выход волны на берег, полученные на основе двух различных моделей при одинаковых входных параметрах. Временной интервал равен 5 с.

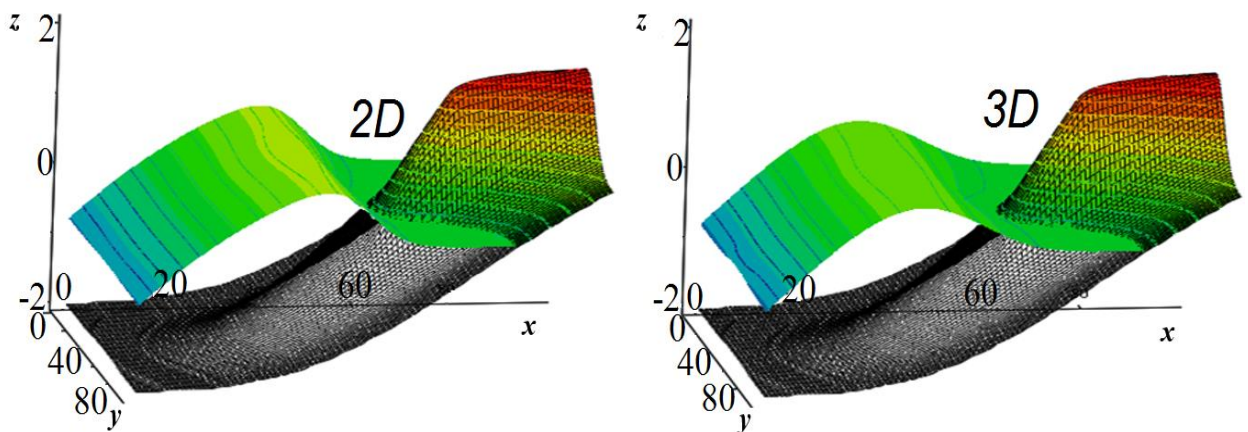


Рисунок 5.8. Сопоставление результатов моделирования выхода волны на берег на основе двумерной системы уравнений мелкой воды и на основе математической модели, включающей три уравнения движения

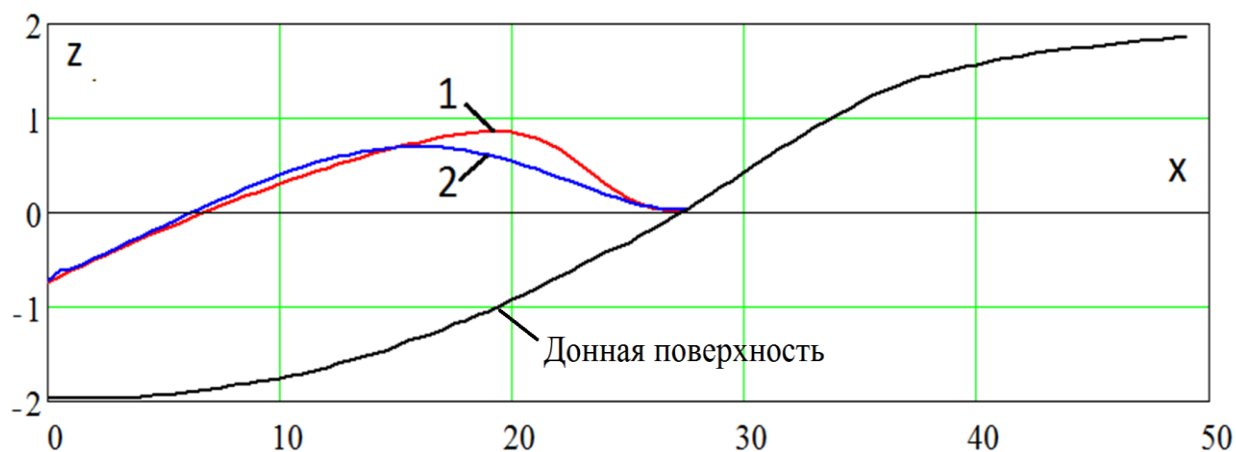


Рисунок 5.9. Сопоставление результатов расчета функций возвышения уровня: 1 – на основе двумерной модели, 2 – на основе трехмерной модели

На рис. 5.9 представлены графики функций возвышения уровня, полученные на основе двумерной системы уравнений мелкой воды и математической модели, включающей три уравнения движения [34].

Результаты численного эксперимента, представленные на рис. 5.9, отличаются друг от друга, так как профили волны, рассчитанные на основе двумерной модели мелкой воды, обгоняют профили волны, полученной на основе более точной трехмерной модели [39]. Максимальное расстояние по высоте между двумя профилями волны составило 0,329 м.

5.3. Результаты численных экспериментов на основе построенного программного комплекса для объектов прибрежной инфраструктуры

Разработка трехмерной модели волновых гидродинамических процессов на основе натуральных данных позволила описать движение водной среды мелкого водоема с учетом распространения волн к берегу при наличии различных типов берегозащитных сооружений, при наличии одиночного волнореза, гребенки бун и волноотбойной стены.

На рис. 5.10 показаны различные типы берегозащитных сооружений в виде одиночного волнореза, гребенок бун и волноотбойной стены.

Источник возмущений устанавливается на заданном расстоянии от береговой линии. Площадь моделирования имеет размеры 50 на 50 м и глубину

2 м, точка пика поднимается над уровнем моря на 2 м. Предположим, что жидкость находится в состоянии покоя в начальный момент времени. При решении поставленной модельной задачи использовалась сетка размером $100 \times 100 \times 40$ расчетных узлов, шаг по времени составил 0,01 с.

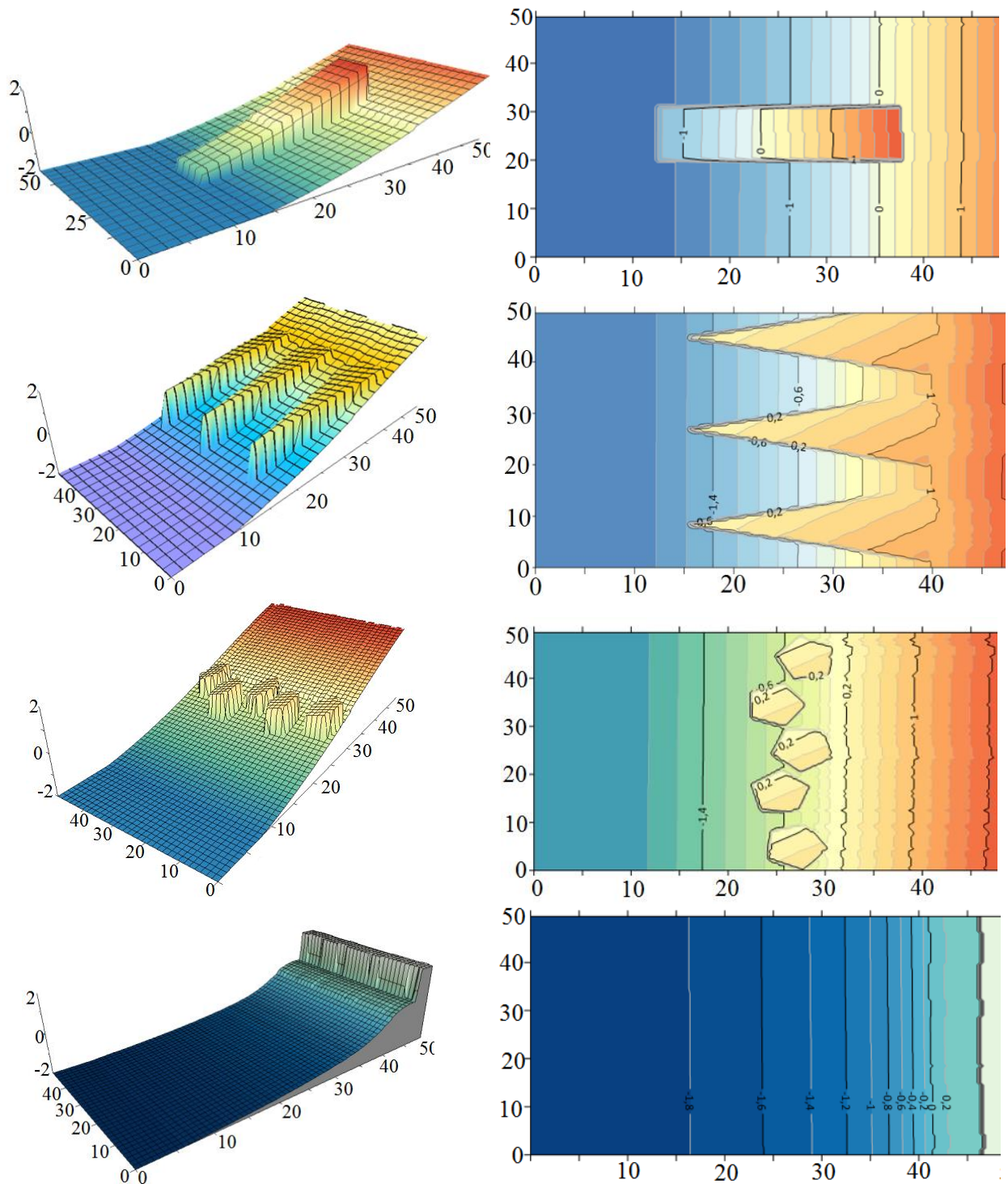


Рисунок 5.10. Карта и изолинии глубин расчетной области при наличии различных типов берегозащитных сооружений: одиночного волнореза, гребенок бун и волноотбойной стены

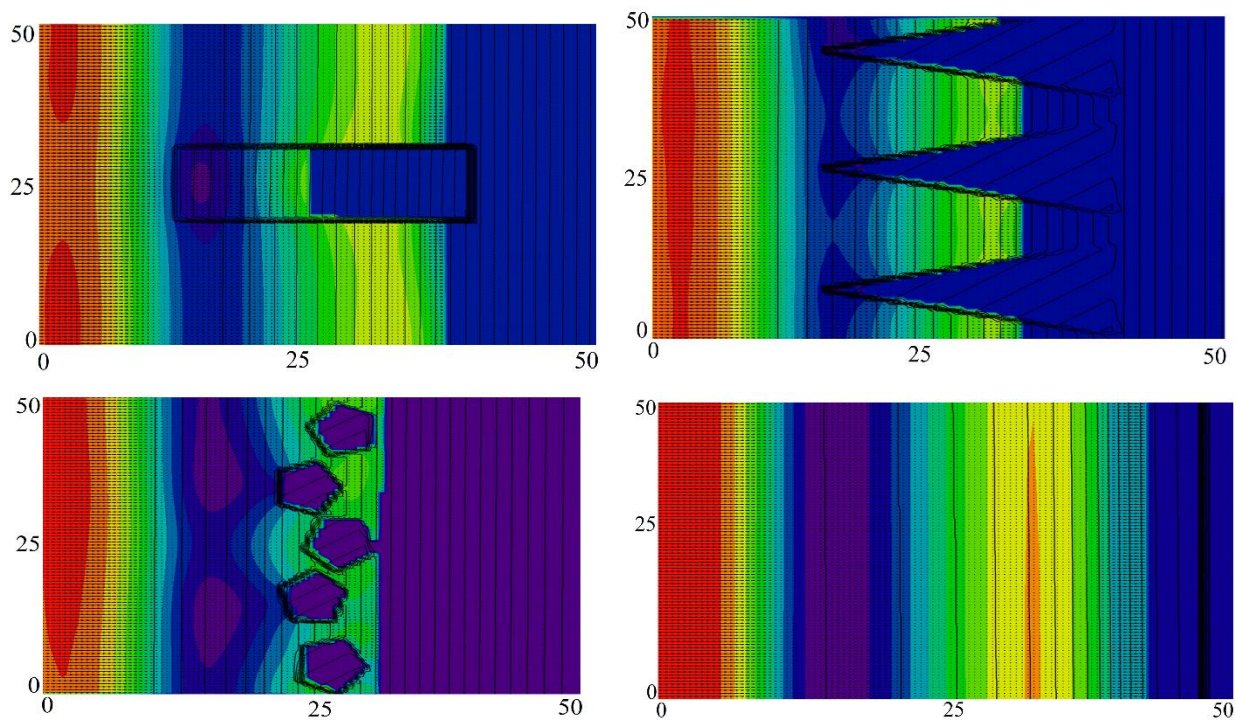


Рисунок 5.11. Графики рельефа дна 3D модели движения водной среды при наличии различных типов берегозащитных сооружений: одиночного волнореза, гребенок бун и волноотбойной стены

Функция подъема уровня динамически изменяется, формируются зоны рефракции и отражения волн, затопления и обмеление прибрежных участков. Учет затопления и осушения прибрежных территорий осуществлялся за счет пересчета заполненности ячеек. Предложенный подход позволяет решать задачи в областях со сложной и динамически перестраиваемой граничной геометрией.

Наиболее интенсивный рост волны наблюдается при отношении скорости волны к скорости ветра, меньшем, чем 0,4-0,5. Дальнейшее увеличение этого отношения сопровождается уменьшением роста волн.

Поэтому волны опасны не в момент наибольшего ветра, а при последующем его ослаблении. В условиях развитого волнения имеет место интерференция отдельных волн, то есть сложение в пространстве нескольких волн, при котором в разных точках получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны (до 2% общего количества), которые достигают максимального развития и превышают среднюю высоту волн в два-три раза.

Обратимся к рисунку 5.12, где изображены волны, набегающие на прибрежную мель. Волны, бегущие по глубокой воде, распространяются в определенном направлении, в месте, где волна начинает чувствовать влияние дна, то есть заходит в мелководную прибрежную зону, она преломляется, то есть изменяет направление распространения [35].

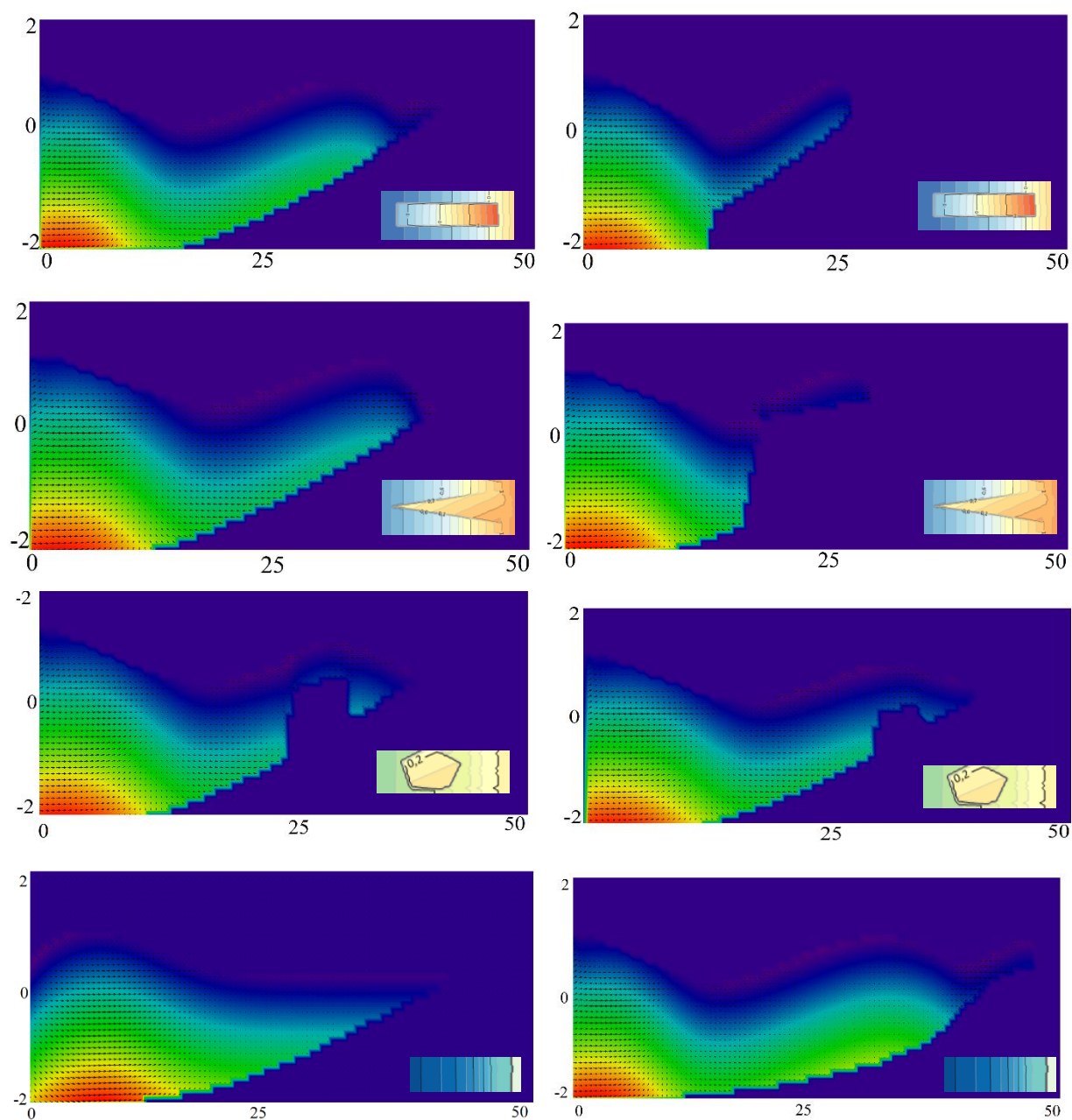


Рисунок 5.12. Трехмерное поле вектора скорости движения водной среды через 5 секунд, через 10 секунд при наличии различных типов берегозащитных сооружений: одиночного волнореза, гребенок бунов и волноотбойной стены

Геометрия дна, представляющая собой природный пологий склон, позволяет оценить результат рефракции волн, то есть изменение направления распространения волн в мелководной береговой полосе, в результате которого фронт волны стремится занять положение, параллельное пляжу независимо от того, под каким углом они первоначально заходят в прибрежные воды. Там, где уклон широк, ровен и глубина его меняется плавно, рефракция поверхностных волн происходит идеально правильно, так что при вступлении волн в зону прибоя их гребни становятся почти параллельными.

Опишем процесс зарождения рефракции. Когда волна выходит на глубину меньше половины длины волны, разные участки фронта (гребня) будут двигаться с различной скоростью: участок, близкий к урезу, замедлит движение, и линия фронта будет искривляться – преломляться, подравнивая курс фронта к линии уреза, в следствие появляется рефракция волн. Если прибрежная линия не прямая, а изрезанная, то возникает очень сложное волновое поле. Искривляются не только фронт волны, но и волновой луч, поэтому формируется весьма замысловатая система рефракции и интерференции.

Одиночные волнорезы, а также гребенки бун, то есть волнорезы, размещенные параллельно на некотором расстоянии друг от друга, воздвигнутые для защиты прибрежной зоны, инициируют дифракцию и отражение волн. Волны могут отклоняться от прямолинейного распространения и огибать встретившиеся на их пути препятствия и проходить в область за ними, эта способность к огибанию препятствий называется дифракцией. Дифракция зависит от соотношения длины волны и размера препятствия. Если длина волны больше размера препятствия, то волна огибает его и проходит дальше, почти не меняя своей структуры и интенсивности. Когда волна ударилась о бетонный волнолом под углом к нему, из тех точек волнового фронта, которые пришли на волнорез, вторичные волны распространяться не будут, а из остальных будут. В результате волна продолжит свой курс и восстановится сзади волнореза [99].

Если длина волны сравнима с размерами препятствия, то она огибает его частично. Волна становится меньше, возникают «тени». Если длина волны меньше масштаба препятствия, то она отражается от него, а за препятствием образуется «тень».

Картину волнового поля, образующуюся за препятствием, можно рассматривать как сочетание фактически дифракции и интерференции волн. Дифрагированная волна появляется локально в некоторой окрестности границы тени за краем препятствия. Разбив поверхность фронта волны на так называемые полуволновые зоны, то есть участки, границы которых удалены от наблюдателя на расстояния, отличающиеся на половину длины падающей на препятствие волны, вторичные волны, распространяющиеся из соседних зон, колеблются в противофазе и потому гасят друг друга. В то же время амплитуды волн, возбужденных источниками, разбитыми одной зоной Френеля, напротив, складываются. Итогом представляется интерференционная волновая картина. Большое значение имеет угол между направлением на наблюдателя и нормалью к фронту падающей волны, чем он больше, тем меньше становится амплитуда, а, следовательно, и интенсивность.

Рассеяние волны происходит, когда часть волны огибает препятствие, часть отражается от него. Процессы дифракции и рассеяния могут очень искажать структуру волнового поля возле берега.

При наличии волноотбойных стен можно видеть ударные волны, которые обладают чрезвычайно резким и крутым передним фронтом. Для волноотбойной стены, на которую набегает ударная волна, давление, равное нулю до прихода фронта, затем резко достигает предельного значения; последующее изменение давления ясно из рисунка: оно падает и переходит в область уменьшенных значений. Наибольшее давление в ударной волне может достигать многих атмосфер, т. нескольких килограммов на квадратный сантиметр. При удалении от источника интенсивность волны быстро убывает. Это обстоятельство объясняется не только геометрическими факторами – увеличением

площади фронта волны по мере того, как фронт расходится от источника, но и поглощением энергии волны.

В результате работы стен волна со всей энергией отражается от нее и с силой откатывается назад, размывая берег. Исчезновение пляжей приводит к более усиленной эрозии подводного склона, а это, в свою очередь, активизирует деструкцию или разрушение стен. Также отмечается эрозия и сокращение ширины пляжа, то есть они способствуют стремительному исчезновению пляжей.

На рис. 5.13 представлены горизонтальные волновые силы, действующие на волноотбойную стену при различных фазах подходящего волнения.

Картина волн представляет собой искаженную дифракционную, для волноотбойной стены действие волновых сил на лицевую грань суммарно возрастает. Расчеты выполнялись со следующими коэффициентами: $C_v = 2,42$, $C_l = 2,2$, рекомендованными действующими нормами для преграды квадратного сечения с гладкой поверхностью при угле подхода волн 30° .

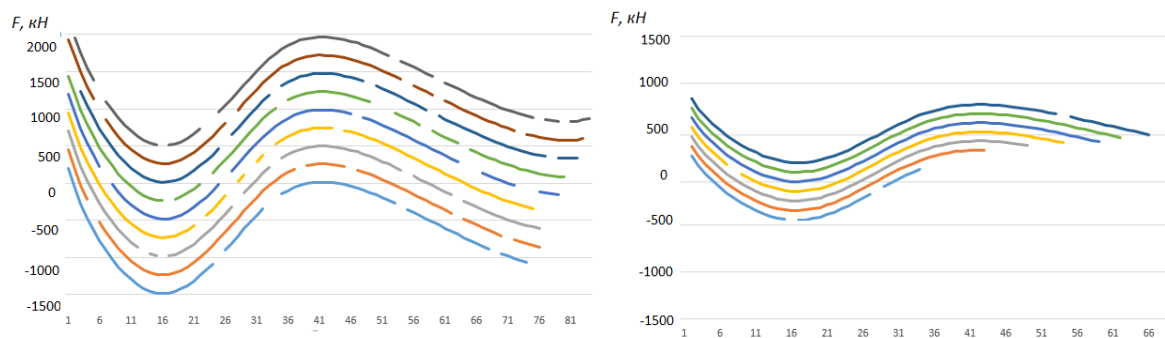


Рисунок 5.13. Горизонтальная волновая сила, действующая на стенку для условий численных опытов при разных фазах подходящего волнения

С увеличением высоты столба возрастает влияние гидростатического давления. Наибольшее влияние для стадии заплеска на отвесную стенку происходит у ее основания. В дальнейшем начинается процесс отката, и нагрузка на стену уменьшается (до следующего наката).

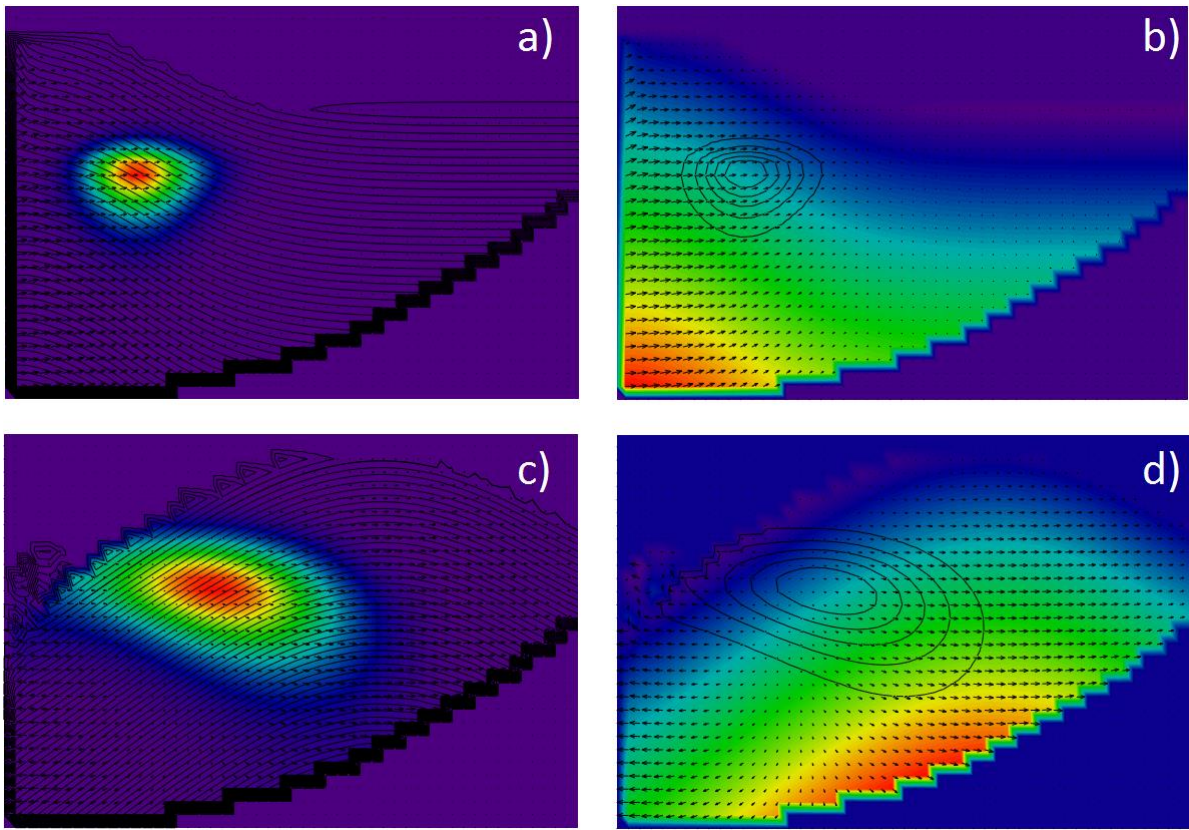
Для проверки адекватности разработанной трехмерной модели, полученные результаты были сопоставлены с существующими численными и опытными данными. На основе сопоставления отмечено хорошее согласие полученных результатов по основным этапам распространения и обрушения поверхностной волны.

Таким образом, разработанная трехмерная модель позволяет проводить оценку силовых воздействий волновых процессов на берегозащитные сооружения мелководных акваторий. Разработка трехмерной модели волновых гидродинамических процессов на основе натуральных данных позволила описать движение водной среды мелкого водоема с учетом наличия берегоукрепительных сооружений и распространения волн к берегу. Создан современный программный пакет, который адаптирован для моделирования гидродинамических волновых процессов, применяется в широком спектре параметров для расчета полей скоростей и давлений водной среды, а также для оценки гидродинамического влияния на берег и берегоукрепительные сооружения при наличии поверхностных волн.

5.4. Расчет зон загрязнения взвесью при наличии волновых процессов

Разработанный программный комплекс позволяет моделировать распространение взвешенных веществ в водной среде.

Приведено распространение взвешенных веществ в водной среде. Моделировалась ситуация, при которой в нулевой момент времени происходит выброс взвеси. Источник взвеси расположен по координате Ox в 5 м от источника колебаний (левой границы области), по центру расчетной области по оси Oy и на 20 см ниже уровня жидкости по оси Oz . Жидкость в начальный момент времени находилась в состоянии покоя. Плотность взвеси совпадает с плотностью жидкости. На рис. 5.14 показано расположение взвеси через 2 и 5 с после момента выброса.



Ри-

Рисунок 5.14. Плотность взвеси совпадает с плотностью жидкости
 Концентрация взвеси через 2 (*a,b*) и 5 (*c,d*) с после момента выброса:
a, c – палитрой показано поле концентраций,
b, d – палитрой показано поле давления

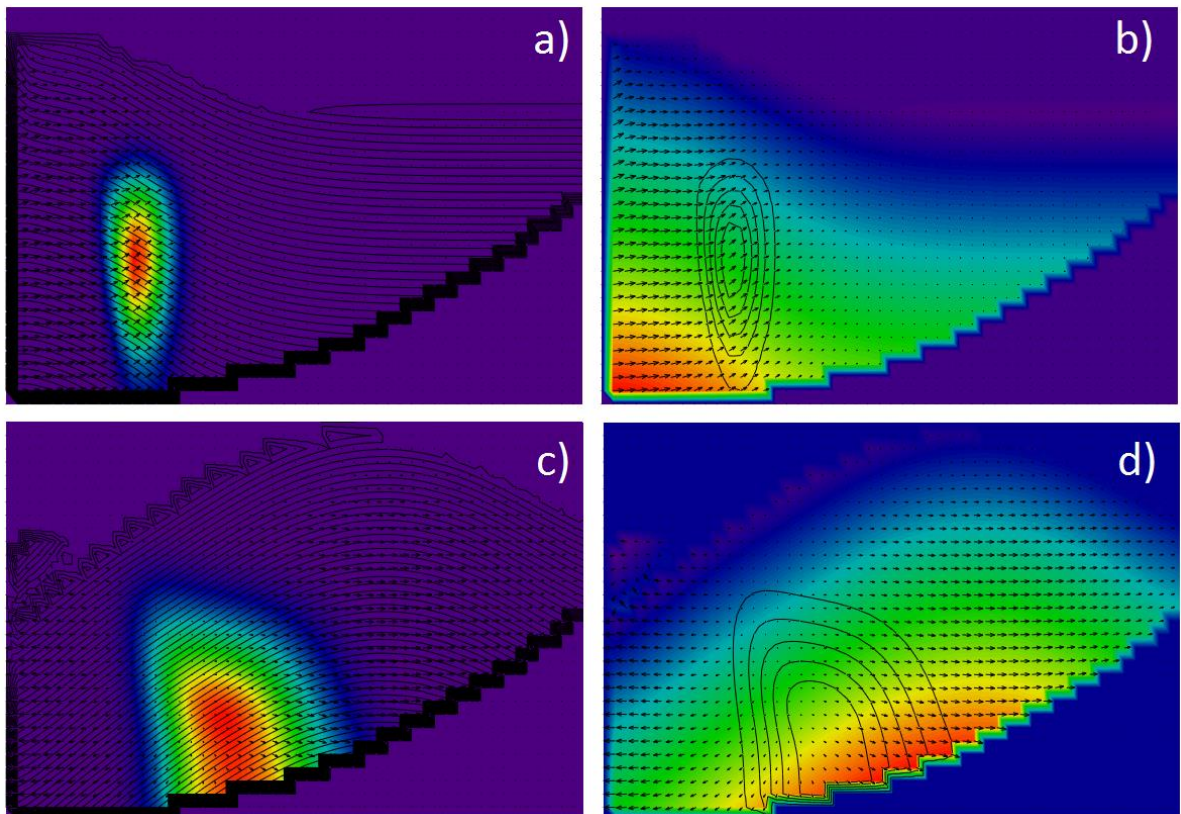


Рисунок 5.15. Плотность взвеси 2700 кг/м³

При помощи вычислительных экспериментов, имитирующих распространение суспензии в водной среде при наличии поверхностных волн, с плотностью взвеси равной плотности водной среды, можно изучать влияние волн на передачу импульса в горизонтальных и вертикальных направлениях.

Исходными данными моделирования являлись: максимальная глубина водоема 2 м; на отвале размерами 1×1 м объем загрузки 0,289 м³; на отвале размерами 3,5×3,5 м объем загрузки 5,729 м³; скорость осаждения 5 мм/с; плотность грунта 2700 кг/м³.

Результаты численного эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории, а также уровень загрязнения вод.

На рис. 5.15 приведены результаты расчетов моделирования распространения взвеси плотностью 2700 кг/м³. Расположения источника взвеси совпадает с предыдущим случаем.

На рис. 5.16 показано моделирование такого важного эффекта как «струйный эффект», при котором происходит ускоренное начальное погружение «тяжелой» струи при залповом сбросе грунта.

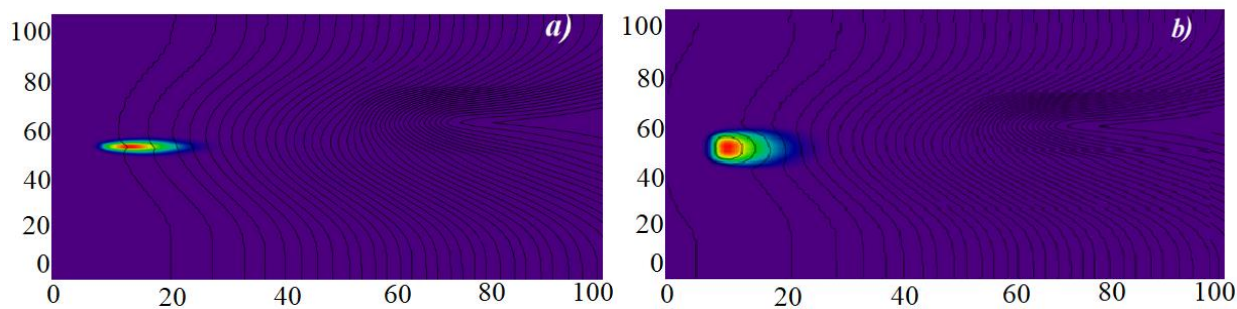


Рисунок 5.16. Изменение функции рельефа дна *a* – дна на отвале 1×1 м, *b* – на отвале 3,5×3,5 м

В процессе дампинга можно отметить ключевые фазы. В первой фазе грунт опускается сквозь толщу воды в виде струи или компактного облака с хорошо выраженными границами. Облако формируется в случае, если выгрузка завершается до момента контакта грунта с дном. Предельная скорость опускания струи достигается достаточно быстро и на энергию удара струи о

дно глубина не влияет. Значение этой скорости по различным оценкам составляют от 1,5 м/с до 1,8 м/с. Течения со скоростью до 0,7 м/с не влияют на характер прохождения водогрунтовой струи сквозь толщу воды. Вторая фаза: столкновение опускающейся струи с дном и образование кумулятивного выброса в виде суспензионного потока, который расширяется в радиальном направлении до момента потери изначальной кинетической энергии. В третьей фазе происходит медленное распространение грунта, и осаждение водогрунтовой смеси в придонном слое. Выпавшие несвязные грунты и комки связного грунта образуют на дне устойчивые формы.

Расчеты показывают, что обычно разнесение сброшенного грунта на дне ограничивается зоной первоначального разброса (вторая фаза). В отдельных случаях при уклонах дна, больших предельного значения 0,05, могут формироваться суспензионные потоки. Четвертая фаза фаза инертной дисперсии, перешедшей во взвесь и оставшейся в толще воды части сброшенного грунта. В этой фазе перенос и пространственное распределение частиц грунта обуславливается турбулентными условиями, течениями и плотностью водной толщи в месте сброса. На мелководном отвале в условиях гидродинамического смешения от поверхности до дна облако взвеси сравнительно равномерно распределяется в толще воды.

Исходными данными моделирования являлись: максимальная глубина водоема 2 м; на отвале размерами 1×1 м объем загрузки 0,289 м³; на отвале размерами 3,5×3,5 м объем загрузки 5,729 м³; скорость осаждения 5 мм/с; плотность грунта 2700 кг/м³. Результаты численного эксперимента позволяют проанализировать динамику изменения геометрии дна, образования структур и наносов, переноса взвесей в акватории, а также уровень загрязнения вод.

Таким образом, данная математическая модель и разработанный проблемно-ориентированный комплекс позволяют предсказать появление морских гряд и кос, их рост и трансформацию, прогнозировать изменение поля концентрации в случае выброса, прогнозировать заиление подходных судоходных каналов, заносимость гидротехнических конструкций и сооружений.

Краткие выводы по главе 5

Создан современный программный комплекс, который может быть адаптирован для моделирования гидродинамических волновых процессов и используется в широком диапазоне параметров для расчета полей скоростей и давления водной среды, для оценки гидродинамического воздействия на берег при наличии поверхностных волн.

Приведено описание разработанного программного комплекса, позволяющего менять характеристики и расположение источника колебаний, учитывать форму зон и степень интенсивности осушения и затопления прибрежных участков. Созданный программный комплекс может быть применен для практического исследования расчета силового воздействия волн на геометрию донной поверхности, а также объекты прибрежной инфраструктуры. Разработанный проблемно-ориентированный программный комплекс может использоваться для прогнозирования изменения процессов водной экологии в результате опасных явлений природного и техногенного характеров.

Вычислительные эксперименты, моделирующие распространение взвеси в водной среде при наличии поверхностных волн, с плотностью взвеси равной плотности водной среды, позволяют изучать влияние волн на передачу импульса в горизонтальных и вертикальных направлениях.

Практическая значимость численных алгоритмов и реализующего их комплекса программ состоит в возможности их применения при исследовании гидрофизических процессов в прибрежных водных системах, для расчета поля скоростей и давления водного потока, для оценки гидродинамического воздействия на берегозащитные сооружения и прибрежные конструкции при наличии поверхностных волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат диссертационной работы заключается в построении трехмерной математической модели выхода волны на берег при наличии инженерно-технических сооружений (берегозащитные сооружения, волноломы, дамбы, молы, пирсы, причалы) с учетом структуры вертикального турбулентного обмена, в усовершенствовании модели наиболее оптимальной параметризацией коэффициента вертикального турбулентного обмена, полученного на основе корреляции результатов численного эксперимента с данными, полученными в ходе натурных измерений.

Работа содержит следующие **научные результаты**.

1. В области математического моделирования построена трехмерная модель волновой гидродинамики с уточненным на основе многочисленных рядов экспедиционных данных методом расчета коэффициента турбулентного обмена по вертикальному направлению для мелководных водоемов подобных Азовскому морю, что позволяет на 20% повысить точность в определении профиля трехмерных волн, а также других характеристик (скорости движения водной среды, гидродинамического давления) при воздействии на сооружения береговой инфраструктуры.

2. В области численных методов построена и исследована модель волновой гидродинамики, базирующаяся на использовании функции заполненности сеточных ячеек средой, доказана монотонность построенной модели, сохранение потоковых величин на дискретном уровне, определены условия устойчивости.

3. Предложен симметризованный АПТИМ для решения задач волновой гидродинамики с несамосопряженным оператором, позволяющий сократить количество необходимых итераций на 20-25%, по сравнению с не симметризованным АПТИМ. Построены алгоритмы численной реализации дискретных моделей волновых процессов и воздействия волн на прибрежные и берегозащитные сооружения, которые по сравнению с методиками, не учитывающими пространственно-трехмерный характер движения волн, имеют лучшую точность в определении волновых характеристик.

4. Создан комплекс программ для многопроцессорных систем с распределенной памятью, которая на основе усовершенствованной пространственно-трехмерной модели волновых процессов позволяет в оперативном режиме прогнозировать силовое воздействие на объекты береговой инфраструктуры и обладает возможностью гибкой настройки входных данных.

Полученные в диссертационной работе результаты **приняты к использованию** в ФГУП «РОСМОРПОРТ» Азовском бассейновом филиале для анализа распространения взвешенных веществ вследствие волнового воздействия в ходе проведения дноуглубительных работ на Таганрогском подходном канале для обеспечения контроля технического состояния и работоспособности ТПК.

Полученные в диссертационной работе результаты **приняты к использованию** в АО «РОСТОВСКИЙ ПОРТ» для анализа волнового воздействия на инженерно-технические сооружения (берегозащитные сооружения, волноломы, дамбы, молы, пирсы, причалы), расположенные на территории и акватории морского порта, для обеспечения контроля технического состояния и работоспособности портовых сооружений. Использование результатов работы подтверждено соответствующими актами, приведенными в приложении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aggarwal, A. Free Surface Reconstruction for Phase Accurate Irregular Wave Generation [Electronic resource] / A. Aggarwal, C. Pákozdi, H. Bihs, D. Myrhaug, M. A. Chella // *Marine Science and Engineering*. – 2018. – Vol 6. – Is. 105. – Access mode: doi:10.3390/jmse6030105.
2. Atif, M.M. Evaluation of breaking wave effects in liquid sloshing problems: ANCF/SPH comparative study [Electronic resource] / M.M. Atif, S. W. Chi, E. Grossi // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 97. – Is. 1. – pp 45–62. – Access mode: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04927-5>.
3. Bitner-Gregersen, E.M. Joint met-ocean description for design and operations of marine structures [Electronic resource] / E. M. Bitner-Gregersen // *Applied Ocean Research*. – 2015. – Vol. 51. – pp. 279-292. – Access mode: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apor.2015.01.007>.
4. Cavaleri, L. Wave modelling in coastal and inner seas / L. Cavaleri, S. Abdalla, A. Benetazzo, L. Bertotti, J.-R. Bidlot [Electronic resource] // *Progress in Oceanography*. – 2018.– Vol. 167. – pp. 164-233. – Access mode: <https://doi.org/10.1016/j.pocean.2018.03.010>.
5. Cavaleri, L. Wave modelling / L. Cavaleri, J.-H.G.M. Alves, F. Ardhuin, A. Babanin [Electronic resource] // *Progress in Oceanography*. – 2007. – Vol. 75. – Is. 4. – pp. 603-674. – Access mode: <https://doi.org/10.1016/j.pocean.2007.05.005>.
6. Chistyakov, A.E. Complex of parallel programs for modeling oil products transport in coastal systems [Electronic resource] / A.E. Chistyakov, A.V. Nikitina, S.V. Protsenko // *MATEC Web of Conf*. – 2017. –Vol. 132. – Access mode: DOI: 10.1051/matecconf/201713204016.
7. Chistyakov, A.E. Improvement of Numerical Solution Smoothness for the Hydrodynamics Problems Modeling on Rectangular Grids [Electronic resource] / A.E. Chistyakov, S.V. Protsenko // *CEUR Workshop Proceedings*. – 2019. – Vol. 2500. – pp. 1-10. – Access mode: http://ceur-ws.org/Vol-2500/paper_1.pdf.
8. Chistyakov, A.E. Study of 3D discrete hydrodynamics models using cell filling [Electronic resource] / A. E. Chistyakov, S. V. Protsenko, V. V. Sidoryakina,

E. A. Protsenko // E3S Web of Conferences. – 2020. – Vol. 224. – 02016. – Access mode: DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022402016/>.

9. Chistyakov, A.E. Software development for calculating the polluted by suspension and other impurities zones volumes on the basis of graphics accelerator [Electronic resource] / A.E. Chistyakov, A.V. Strazhko, A.M. Atayan, S.V. Protsenko // IOP Conference Series. – 2021. – Vol. 1029. – 012084. – Access mode: DOI: [10.1088/1757-899x/1029/1/012084](https://doi.org/10.1088/1757-899x/1029/1/012084).

10. Colombini, M. Wind effect in turbulence parameterization / M. Colombini, A. Stocchino [Electronic resource] // Advances in Water Resources. – 2005. – Vol. 28. – Is. 9. – pp. 939-949. – Access mode: DOI:[10.1016/j.advwatres.2005.03.002/](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2005.03.002)

11. Shi, F., Modeling of wave interaction with complex coastal structures using an enhanced VOF model / Q. Zhao, J. T. Kirby, D. S. Lee, S. N. Seo [Electronic resource] // Coastal Engineering. – 2004. – pp. 581-593. – Access mode: DOI:[10.1142/9789812701916_0046](https://doi.org/10.1142/9789812701916_0046).

12. Mellor, G. L. Development of a Turbulence Closure Model for Geophysical Fluid Problems [Text] / George L. Mellor // Reviews of geophysics. – 1982. – Vol. 20. – № 4.– pp. 851-875.

13. Mellor, G. L. Sea level variations induced by heating and cooling: an evaluation of the Boussinesq approximation in ocean models / L. M. George, Ezer T. [Text] // Journal of geophysical research. – 1995. – Vol. 100. – № 10.– pp. 577.

14. Guschin, V.A. The three-dimensional mathematical model for numerical investigation of coastal wave processes [Electronic resource] / V.A. Guschin, A.I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, S. V. Protsenko // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management. – 2018. – Vol. 18. – № 2. – 2018. – pp. 499-506. – Access mode: DOI: [10.5593/sgem2018/2.2/S08.063](https://doi.org/10.5593/sgem2018/2.2/S08.063)

15. Holthuijsen, L.H. Waves in Oceanic and Coastal Waters [Text] / L.H. Holthuijsen // Cambridge Univ. Press. – 2007. – 387 p.

16. Hu, Z.Z. Investigations of offshore breaking wave impacts on a large offshore structure [Electronic resource] / Z.Z. Hu, T. Mai, D. Greaves, A. Raby //

Journal of Fluids and Structures. – 2017. – Vol. 75. – pp. 99–116. – Access mode: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.08.005>.

17. Cui, J. Large-eddy simulation of turbulent flow in a channel with rib roughness [Electronic resource] / Jie Cui, Virendra C. Patel, Ching-Long Lin // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2003. – Vol. 24. – Is. 3. – pp. 372-388. – Access mode: DOI:10.1016/S0142-727X(03)00002-X.

18. Lin, S. Assessing the performance of wave breaking parameterizations in shallow waters in spectral wave models [Electronic resource] / S. Lin, J. Sheng // Ocean Modelling. – 2017. – Vol. 120, – pp. 41-59. – Access mode: <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2017.10.009>.

19. Myrhaug, D. Wave-induced bottom shear stress estimation in shallow water exemplified by using deep water wind statistics [Electronic resource] / Dag Myrhaug // Oceanologia. – 2017. – Vol. 59. – Is. 2. – pp. 102-107. – Access mode: <https://doi.org/10.1016/j.oceano.2016.09.002>.

20. Myrhaug, D. Bottom friction in random waves plus current flow [Electronic resource] / D. Myrhaug, L. E. Holmedal, R. R. Simons, R. D. MacIver // Coastal Engineering. – 2001.– Vol. 43. – Is. 2. – pp. 75-92. – Access mode: [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(01\)00007-2](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(01)00007-2).

21. Prandle D. The vertical structure of tidal currents [Text] / David Prandle // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. – 1982. – Vol. 2. – pp. 29–49.

22. Protsenko S. V. Mathematical modeling of wave processes and transport of bottom materials in coastal water areas taking into account coastal structures [Electronic resource] / S. V. Protsenko, T. G. Sukhina // MATEC Web of Conf. – 2017. – Vol. 226. – Access mode: DOI: 10.1051/mateconf/201713204002.

23. Semenyakina, A.A. Development the transport and transportation model of nitrogen, phosphorus and silicon compounds in shallow waters [Electronic resource] / A.A. Semenyakina, V. V. Sumbaev, S. V. Protsenko // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2018. – Vol. 2. – № 2. – p. 67-75. – Access mode: DOI: 10.23947/2587-8999-2018-2-2-67-75.

24. Sidoryakina, V.V. The dynamics of impurity distribution in marine systems [Electronic resource] / V. V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // MATEC Web Conf. – 2018. – Vol. 226. – Access mode: DOI: 10.1051/mateconf/201822604026.
25. Sukhinov, A.I. Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator [Text] / A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2012. – Vol. 4. – № 4. – pp. 398-409.
26. Sukhinov, A.I. Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system [Text] / A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.V. Alekseenko // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2011. – Vol. 3. – № 5. – pp. 562-574.
27. Sukhinov, A.I. Three-dimensional mathematical model of propagation of waves towards the shore [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko, V.V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // Communications in Computer and Information Science. – 2018 – Vol. 910. – pp. 322-335. – Access mode: DOI: 10.1007/978-3-319-99673-8_23.
28. Sukhinov, A.I. Parallel Implementation of Coupled Wave and Bottom Deposit Transportation Models to Simulate Surface Pollution Areas [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko, V.V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol 1129. – Access mode: DOI: 10.1007/978-3-030-36592-9_27.
29. Sukhinov, A.I. Algorithm for Numerical Simulation of the Coastal Bottom Relief Dynamics Using High-Performance Computing [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko, V.V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // Communications in Computer and Information Science. – 2020. – Vol. 1263. – pp. 279-290. – Access mode: DOI: 10.1007/978-3-030-55326-5_20/.
30. Sukhinov, A.I. Set of Coupled Transport Models of Suspended Matter, Taking into Account Three-Dimensional Hydrodynamic Processes in the Coastal Zone [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko, V.V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2020. – Vol. 12.

– Is. 5. – pp. 757–769. – Access mode: DOI: <https://doi.org/10.1134/S207004822005018X>.

31. Sukhinov, A.I. Wave hydrodynamics discrete models' construction and research [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko, V.V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // IOP Conference Series. – 2021. – Vol. 1029. – 012086. – Access mode: DOI: [10.1088/1757-899x/1029/1/012086/](https://doi.org/10.1088/1757-899x/1029/1/012086/).

32. Sukhinov, A.I. 3D Model of Wave Impact on Shore Protection Structures and Algorithm of Its Parallel Implementation [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, S.V. Protsenko // RuSCDays 2020, Springer CCIS. – Vol. 1331. – Access mode: DOI: [10.1007/978-3-030-64616-5_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-64616-5_1).

33. Sukhinov A.I. Mathematical modeling of 3D current flows for narrow shallow water bodies of complicated forms [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, S.V. Protsenko, E.A. Protsenko, // E3S Web of Conferences. – 2020. – Vol. 224. – 02008. – Access mode: DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022402008>.

34. Sukhinov, A.I. Numerical investigation of stochastic model of suspension transport in coastal systems [Text] / A. I. Sukhinov, V.V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // Theory of Probability and its Applications. – 2019. – Vol. 64.

35. Sukhinov, A.I. Numerical simulation of bottom topography transformation taking into account the coastal shore protection structures [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, E.A. Protsenko, V.V. Sidoryakina, S.V. Protsenko // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1745. – 012102. – Access mode: DOI: [10.1088/1742-6596/1745/1/012102](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012102).

36. Sukhinov, A.I. Long Waves Simulation in Coastal Systems Using Parallel Computational Technologies [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, S.V. Protsenko // CEUR Workshop Proceedings. – 2019. – Vol. 2500. – pp. 1-10. – Access mode: http://ceur-ws.org/Vol-2500/paper_1.pdf.

37. Sukhinov, A.I. Correctness investigation for the suspension transport problem in coastal systems [Electronic resource] / A. I. Sukhinov, V.V. Sidoryakina,

S.V. Protsenko // MATEC Web Conf. – 2018. – Vol. 226. – Access mode: DOI: 10.1051/matecconf/201822604027.

38. Karaeva, D.A. Homogenization method in the problem of long wave propagation from a localized source in a basin over an uneven bottom [Text] / D. A. Karaeva, V. E. Nazaikinskii, A. D. Karaev // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54. – № 8. – pp. 1057-1072.

39. Lozhnikov, D.A. Method for the analysis of long water waves taking into account reflection from a gently sloping beach [Text] / D. A. Lozhnikov, V. E. Nazaikinskii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2017. – Vol. 81. – № 1. – pp. 21-28.

40. Tucker M.J. Waves in Ocean Engineering [Text] / M.J. Tucker, E.G. Pitt // Elsevier, Amsterdam. – 2001. – 521 p.

41. WinADCP User's Guide RD Instruments Acoustic Doppler Solutions, P/N 957-6158-00.

42. Абалакин, И.В. Использование алгебраической модели турбулентности для расчета нестационарных течений в окрестности выемок [Текст] / И.В. Абалакин, А.Н. Антонов, И.А. Граур, Б.Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2000. – Т.12. – №1. – С. 45–56.

43. Алексеенко, Е.В. Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах [Текст] / Е.В. Алексеенко, О.В. Колгунова, А.Е. Чистяков // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск: Актуальные проблемы математического моделирования. – Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ. – 2008. – Т.87.– №10. – С. 171–175.

44. Алексеенко, Е.В. Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом [Текст] / Е.В. Алексеенко, О.В. Колгунова, Б.В. Сидоренко, А.Е. Чистяков // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск: Актуальные проблемы математического моделирования. – Таганрог: изд-во ТТИ ЮФУ. – 2009. – Т. 97. – № 8. – С. 6–18.

45. Андерсен, М.Г. Стратегия моделирования // Гидрогеологическое прогнозирование [Текст]: Пер. с англ. / Под ред. М.Г. Андерсона, Т.П. Берта. – М.: Мир. – 1988. – С. 11–26.
46. Антонов, А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI / А.С. Антонов // Учебное пособие [Текст]: М.: Изд-во МГУ. – 2004. – 71 с.
47. Беклемышева, К.А. Численное моделирование процессов в твердых деформируемых средах при наличии динамических контактов с помощью сеточно-характеристического метода [Текст] / К.А. Беклемышева, И.Б. Петров, А.В. Фаворская // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – № 11. – С. 3–16.
48. Белоцерковский, О. М. Этюды о турбулентности [Текст]: монография. – М: Наука. – 1994. – 290 с.
49. Белоцерковский, О.М. Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности [Текст] / О. М. Белоцерковский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – Т. 25. – № 12. – С. 1856–1882.
50. Белоцерковский, О.М. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / О.М. Белоцерковский, В.А. Гуцин, В.В. Щенников // Журнал вычислительной метаматематики и математической физики. – 1975. – Т.15. – №1. – С. 197–207.
51. Белоцерковский, О.М. Турбулентность: новые подходы // О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, В. М. Чечеткин. – М.: Наука. – 2002. – 285 с.
52. Вабищевич, П.Н. Вычислительные методы математической физики. Стационарные задачи [Текст] / П.Н. Вабищевич – М.: Вузовская книга. – 2008. – 196 с.
53. Вабищевич, П.Н. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии [Текст] / П.Н. Вабищевич, А.А. Самарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 37. – С. 182–186.

54. Васильев, В.С. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов [Текст] / В.С. Васильев, А.И. Сухинов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 10. – С. 17–34.
55. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления [Текст] / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 608 с.
56. Воеводин, В.В. Суперкомпьютерное образование: третья составляющая суперкомпьютерных технологий [Текст] / В.В. Воеводин, В.П. Гергель // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С.117–122.
57. Волков, К.Н. Моделирование крупных вихрей в турбулентной струе, истекающей в затопленное пространство или спутный поток [Текст] / К.Н. Волков // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т. 52. – № 1. – С. 60–70.
58. Гарбарук, А.В. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие [Текст] / А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур // СПб: Изд-во Политехн. ун-та. – 2012. – 88 с.
59. Головизнин, В. М. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике [Текст] / В. М. Головизнин, Б. Н. Четверушкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Том 58. – № 8. – С. 20-29.
60. Гуцин, В.А. Математическое моделирование и визуализация трансформации вихревой структуры течения около сферы при увеличении степени стратификации жидкости [Текст] / В.А. Гуцин, П.В. Матюшин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т.51, №2. – С.268–281.
61. Дебольская Е.И. Исследование турбулентной структуры подледных русловых потоков. Динамика течений и литодинамические процессы в реках, водохранилищах и окраинных морях [Текст] / Е.И. Дебольская. – М.: Наука, 1991. – 285 с.

62. Дебольский, В.К. Лабораторное исследование деформаций берегового склона, включающего мерзлый грунт [Текст] / В.К. Дебольский, Д.Н. Ионов, И.И. Грицук, Н.К. Пономарев, Е.К. Синиченко. – М.: Вестник РУДН, серия Инженерные исследования. – 2015. – № 2. – С. 25–31.
63. Дебольский, В.К. Экспериментальное исследование разрушения подводных преград при воздействии экстремальных волновых процессов [Текст] / В.К. Дебольский, И.И. Грицук, А.В. Остякова, И.Н. Завьялов, Н.К. Пономарев, Е.К. Синиченко // М.: Вестник РУДН, серия Инженерные исследования. – 2014. – № 4. – С. 78–83.
64. Дегтярева, Е.Е. Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях [Текст] / Е.Е. Дегтярева, Е.А. Проценко, А.Е. Чистяков // Инженерный вестник Дона. – 2012. – Т.23. – №4-2. – С. 30.
65. Единая государственная система информации об обстановке в Мировом океане [Электронный ресурс] // URL: <http://portal.esimo.ru> (дата обращения: 07.05.2021).
66. Жданов Ю. А. Азовское море: Проблемы и решения [Текст] / Ю. А. Жданов, Ю. А. Домбровский, Ф. А. Сурков. – Ростов н/Д: Кн. изд-во. – 1987. – 140 с.
67. Исаева, Л.С. Горизонтальная турбулентная диффузия в море / Л.С. Исаева, И.Л. Исаев // Труды МГИ. Физика моря. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – Т. 28. – С. 36–39.
68. Коновалов, А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода [Текст] / А. Н. Коновалов // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т.43. – №3. – С. 552–572.
69. Коновалов, А.Н. Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переобусловливателем [Текст] / А. Н. Коновалов // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т.40. – №7. – С. 953.
70. Кузнецова И.Ю. Дискретизация задачи переноса взвешенных веществ [Текст] / И.Ю. Кузнецова, С.В. Проценко // Научные основы современного

прогресса: сборник статей международной научно-практической конференции. – Уфа: Омега Сайнс. – 2016. – С. 9-15.

71. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов в 10 т. – 5-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2001. – Т. VI. – 736 с.

72. Марчук, Г.И. Математическое моделирование циркуляции океана [Текст] / Г.И. Марчук, А.С. Саркисян. – М.: Наука. – 1988. – 304 с.

73. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики [Текст] / Г.И. Марчук. – М.: Наука. – 1989. – 608 с.

74. Матишов, Г.Г. Закономерности экосистемных процессов в Азовском море [Текст] / Г.Г. Матишов [и др.]. – Южн. науч. центр РАН. – М.: Наука. – 2006. – 304 с.

75. Монин, А. С. Статистическая гидромеханика [Текст] / А. С. Монин, А. М. Яглом. – Т. 1. – СПб: Гидрометеиздат. – 1992. – 641 с.

76. Монин, А.С. Гидродинамика атмосферы океана и земных недр: монография [Текст] / А. С. Монин. – СПб: Гидрометеиздат, 1999. – 524 с.

77. Монин, А.С. Турбулентность и микроструктура в океане [Текст] / А. С. Монин // Успехи физических наук. – 1973. — Т. 109. – Вып. 2. – С. 333–354.

78. Никитина, А.В. Эколого-гидрофизическое обоснование влияния коэффициента вертикального турбулентного обмена на содержание растворенного кислорода в придонном слое мелководного водоема [Текст] / А.В. Никитина, Т.Г. Сухинова, А.А. Семенякина, Т.А. Бедная, С.В. Проценко // Успехи современного естествознания. – 2018. – №1. – С. 115-119.

79. Постановление Правительства РФ от 05.10.2020 № 1607 «Об утверждении критериев классификации гидротехнических сооружений» [Электронный ресурс] Официальный интернет-портал правовой информации www.pravo.gov.ru, 08.10.2020, № 0001202010080046.

80. Проценко, Е.А. Построение дискретной модели транспорта взвеси в прибрежной зоне мелководных акваторий [Текст] / Е.А. Проценко,

И.Ю. Кузнецова, С.В. Проценко // Международный научно-исследовательский журнал. – Екатеринбург. – 2016. – № 11-4 (53). – С. 165-172.

81. Проценко С.В. Математическое моделирование пространственно-трехмерных волновых процессов в мелководных водоемах [Текст] / С.В. Проценко // Труды IV Всероссийской конференции «Гидрометеорология и экология: достижения и перспективы развития». – СПб.: ХИМИЗДАТ. – 2020. – с. 309-313.

82. Проценко, С.В. Математическое моделирование трехмерных течений для узких мест мелководных водоемов сложной формы [Текст] / С.В. Проценко, Е.А. Проценко // Международная научно-практическая конференция «Цифровая трансформация науки и образования»: сборник научных трудов. – Нальчик: Каб.-Балк. ун-т. – 2020. – с. 124-135.

83. Проценко С.В. Двумерная задача транспорта веществ [Текст] / С.В. Проценко // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. – 2018. – № 1. – С. 124-135.

84. Проценко С.В. Экспериментальное исследование силовых нагрузок на опоры надводной конструкции на основе математической модели волновых процессов / С.В. Проценко, А.М. Атаян, А.Е. Чистяков, А.В. Никитина, В.Н. Литвинов, А.А. Филина. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». – 2019. – Т. 8, № 3. – с. 27-42.

85. Петров, И. Б. Моделирование деформационных процессов в сложных конструкциях при их интенсивном динамическом нагружении [Текст] / И. Б. Петров // Матем. Моделирование. – 2006. – Т. 18. – № 5. – с. 91–110.

86. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика [Текст]: пер с англ / П. Роуч. – М.: Мир. –1980. – 616 с.

87. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука. – 1989. – 550 с.

88. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука. – 1978. – 592 с.

89. Самарский, А.А. Устойчивость разностных схем [Текст] / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – Москва: Наука. – 1973. – 415 с.
90. Самарский, А.А. Численные методы [Текст] / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука. – 1989. – 432 с.
91. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры [Текст] / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит. – 2001. – 320 с.
92. Самарский, А.А. Аддитивные схемы расщепления для задач математической физики [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич // М.: Наука. – 1999. – 319с.
93. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А.А.Самарский, Е.С. Николаев. – М. Наука. – 1978. – 334 с.
94. Самарский, А.А. Теория разностных схем [Текст] / А.А. Самарский – М.: Наука. – 1989. – 614 с.
95. СП 38.13330.2018 Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов) // Loads and impacts on hydraulic structures (from wave, ice and ships). СНиП 2.06.04-82. – М.: Стандартинформ. – 2019.
96. СП 58.13330.2012 Гидротехнические сооружения. СНиП 33-01-2003. –Москва. – 2012.
97. Сухинов, А. И. Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Математическое моделирование. – 2020. – Т. 32. – № 2. – С. 3-23.
98. Сухинов, А. И. Математическое моделирование волнового воздействия на объекты прибрежной инфраструктуры [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, С. В. Проценко // Тезисы докладов Международной научной конференции. Под редакцией проф. д.ф.-м.н. Ю.Г. Смирнова. – 2020. – с. 119-121.
99. Сухинов, А. И. Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной

зоне [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Математическое моделирование. – 2020. – Т. 32. – № 2. – С. 3-23.

100. Сухинов, А. И. Разностная схема с оптимальным весом для уравнения диффузии-конвекции [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва. – 2019. – Т. 20. – С. 283–292.

101. Сухинов, А. И. Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12. – № 4. – С. 435-445.

102. Сухинов, А.И. Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море [Текст] / А.И. Сухинов, А.В. Никитина // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 62–73.

103. Сухинов, А. И. Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12. – № 4. – С. 435-445.

104. Сухинов, А.А. Пространственно-двумерная модель транспорта донных материалов в прибрежной зоне и параллельный алгоритм ее численной реализации [Текст] / А. И. Сухинов, Е. А. Проценко, С. В. Проценко // Современные проблемы развития фундаментальных и прикладных наук: материалы II международной научно-практической конференции. – 2016. – С. 92-100.

105. Сухинов, А.И. Моделирование сложных систем. Часть 1 / А.И. Сухинов [и др.]. – Ростов-на Дону: ООО «ДГТУ принт». – 2019. – 241 с.

106. Сухинов А.И. Моделирование силового гидродинамического воздействия волн на опоры надводных конструкций [Текст] / А.И. Сухинов, А.В. Никитина, Н.А. Фоменко, Е.Ф. Тимофеева, С.В. Проценко // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 12-4. – С. 777-783.

107. Сухинов, А.И. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13. – С. 290-297.

108. Сухинов, А.И. Решение задачи распространения колебательных процессов в области со свободной границей / А. И. Сухинов, Е. А. Проценко, С. В. Проценко // Труды Междунар. науч. конф. – Ростов-на-Дону: ДГТУ-Принт. – 2017. – Т.1. – С. 280-294.

109. Сухинов, А.И. Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Математическое моделирование. – 2019. – № 38(8). – С. 79-100.

110. Сухинов, А.И. Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Математическое моделирование. – 2019. – Т. 31. – № 8. – С. 79-100.

111. Сухинов, А.И. Расчет коэффициента вертикального турбулентного обмена для моделей мелководных водоемов [Текст] / А. И. Сухинов // Математическое моделирование и информационные технологии. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). Новочеркасск: ред. журн. Изв. вузов. Электромеханика, 2007. – С.72–76.

112. Сухинов, А.И. Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах [Текст] / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21. – С. 196–206.

113. Сухинов, А. И. Моделирование биогеохимических циклов в прибрежных системах Юга России / А. И. Сухинов, Ю. В. Белова, А. Е. Чистяков // Математическое моделирование. – 2021. – Т. 33. – № 3. – С. 20-38.

114. Тишкин В. Ф. Современные методы математического моделирования развития гидродинамических неустойчивостей и турбулентного перемешивания [Текст] / В. Ф. Тишкин, В. А. Гасилов, Н. В. Змитренко, П. А. Кучугов,

М. Е. Ладонкина, Ю. А. Повещенко // Матем. Моделирование. – 2020. – Т. 32. – № 8. – с. 57–90.

115. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ [Текст] / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

116. Ферцигер, Дж.Х. Численное моделирование крупных вихрей для расчета турбулентных течений [Текст] / Дж. Х. Ферцигер // Ракетная техника и космонавтика. – 1977. – Т. 15, – № 9. – С. 56–66.

117. Фрик, П.Г. Турбулентность: модели и подходы [Текст]: курс лекций / П.Г. Фрик. – Перм. гос. техн. ун-т. Пермь. – 1998. – 108 с.

118. Четверушкин, Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред [Текст] / Б.Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2012. – Т.24. – №11. – С. 33–52.

119. Чикин, А.Л. Трехмерная задача расчета гидродинамики Азовского моря [Текст] / А.Л. Чикин // Матем. моделирование. – 2001. – Т.13. – №2. – С. 86–92.

120. Чистяков А.Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска [Текст] / А. Е. Чистяков // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.

121. Чистяков, А.Е. Разработка адаптивного метода минимальных поправок для решения системы сеточных уравнений с оператором специального вида [Текст] / А. Е. Чистяков, А. И. Сухинов, И.Ю. Кузнецова, И.В. Яковенко, С. В. Проценко // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 11-4. – С. 746-751.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018613129

**Решение трехмерной математической модельной задачи
выхода волны на берег**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Донской
государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр
Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*

Заявка № 2018610341

Дата поступления 10 января 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 02 марта 2018 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Излиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018664543

Реализация математической модели гидродинамики со сложной геометрией расчетной области на прямоугольной сетке

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*

Заявка № **2018661850**

Дата поступления **29 октября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **19 ноября 2018 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Изrael

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019661359

**Решение задач гидродинамики и переноса при больших
числах Рейнольдса на основе метода учета заполненности
ячеек**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Донской
государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сушинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр
Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*

Заявка № **2019660331**

Дата поступления **19 августа 2019 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **28 августа 2019 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 **Г.П. Изrael**



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019661409

**Решение сеточных уравнений итерационными методами с
предобуславливателями треугольного вида и переменных
направлений**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Донской
государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сушинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр
Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*

Заявка № **2019660262**

Дата поступления **19 августа 2019 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **28 августа 2019 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Ильин*

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019661361

**Расчет распространения примеси в приземном слое
атмосферы прибрежной зоны**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Донской
государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр
Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*

Заявка № **2019660334**

Дата поступления **19 августа 2019 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **28 августа 2019 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 **Г.П. Илев**



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018664544

**Реализация линейной комбинации схем «кабаре» и крест
для решения задач переноса при больших числах Пекле**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Донской
государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр
Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*

Заявка № **2018661853**

Дата поступления **29 октября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **19 ноября 2018 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Иблиев*



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019666067

Расчет газодинамических процессов в паровой турбине

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сушинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*



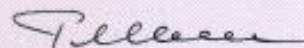
Заявка № **2019665218**

Дата поступления **25 ноября 2019 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **04 декабря 2019 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Иванев**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019666066

Расчет тепловых процессов в паровой турбине

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)*

Авторы: *Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)*



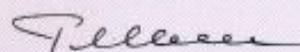
Заявка № 2019665221

Дата поступления 25 ноября 2019 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 04 декабря 2019 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ильев



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

<p>Номер регистрации (свидетельства): 2018613129</p> <p>Дата регистрации: 02.03.2018</p> <p>Номер и дата поступления заявки: 2018610341 10.01.2018</p> <p>Дата публикации и номер бюллетеня: 02.03.2018 Бюл. № 3</p> <p>Контактные реквизиты: Начальник ОИС Еремина Л.В., +7(863) 273-87-36 , lidia.patent@yandex.ru</p>	<p>Автор(ы): Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)</p> <p>Правообладатель(и): федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)</p>
--	--

Название программы для ЭВМ:

Решение трехмерной математической модельной задачи выхода волны на берег

Реферат:

Программа предназначена для исследования гидрофизических процессов в прибрежных водных системах и построения поля скоростей и давления водной среды. Функции программы: построение математических моделей различных областей с динамически изменяемой геометрией расчетной области для оценки гидродинамических воздействий на берегозащитные сооружения и прибрежные конструкции при наличии поверхностных волн. Программа может применяться в практической деятельности.

Язык программирования: C++ в среде Visual Studio 2008

Объем программы для ЭВМ: 37 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):

2019661361

Дата регистрации: 28.08.2019

Номер и дата поступления заявки:

2019660334 19.08.2019

Дата публикации и номер бюллетеня:

28.08.2019 Бюл. № 9

Контактные реквизиты:

Отдел интеллектуальной собственности
ДГТУ, тел. +7(863) 273-87-36,
ois@sci.donstu.ru

Автор(ы):

Сухинов Александр Иванович (RU),
Чистяков Александр Евгеньевич (RU),
Проценко Софья Владимировна (RU)

Правообладатель(и):

федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Донской государственный
технологический университет» (ДГТУ) (RU)

Название программы для ЭВМ:

Расчет распространения примеси в приземном слое атмосферы прибрежной зоны

Реферат:

Программа позволяет моделировать движение многокомпонентной воздушной среды, учитывая такие факторы, как транспорт примеси и тепла; влияние растительного покрова; изменение коэффициента турбулентного обмена; переход воды из жидкого в газообразное состояние; осаждение вещества; изменение температуры за счет конденсации и испарения аэрозоли; турбулентное перемешивание многокомпонентной воздушной среды; теплообмен между жидкими и газообразными состояниями; наличие распределенных источников вещества и температуры; сила Архимеда; тангенциальное напряжение на границах раздела сред; переменная плотность, зависящая от концентрации загрязняющих веществ, температуры и давления; сжимаемость среды за счет изменения температуры, испарения и конденсации жидкости, изменения давления, наличия источников.

Язык программирования:

C# (среда Visual Studio 2008)

Объем программы для ЭВМ:

658 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2019661359 Дата регистрации: 28.08.2019 Номер и дата поступления заявки: 2019660331 19.08.2019 Дата публикации и номер бюллетеня: 28.08.2019 Бюл. № 9 Контактные реквизиты: Отдел интеллектуальной собственности ДГТУ, тел. +7(863) 273-87-36, ois@sci.donstu.ru	Автор(ы): Сушинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU) Правообладатель(и): федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)
---	--

Название программы для ЭВМ:

Решение задач гидродинамики и переноса при больших числах Рейнольдса на основе метода учета заполненности ячеек

Реферат:

Программа позволяет повысить гладкость и точность конечноразностного решения задач гидродинамики со сложной формой граничной поверхности на основе применения метода учета заполненности прямоугольных ячеек материальной средой, в частности, жидкостью.

Аппроксимация задач по времени выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам. Для решения задачи диффузии-конвекции при больших числах Рейнольдса предложено использовать разностную схему, учитывающую функцию заполненности ячеек, и схему, построенную на основе линейной комбинации разностных схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации при малых числах Куранта.

Язык программирования: C# (среда Visual Studio 2008)

Объем программы для ЭВМ: 669 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2019661409 Дата регистрации: 28.08.2019 Номер и дата поступления заявки: 2019660262 19.08.2019 Дата публикации и номер бюллетеня: 28.08.2019 Бюл. № 9 Контактные реквизиты: Отдел интеллектуальной собственности ДГТУ, +7(863) 273-87-36, ois@sci.donstu.ru	Автор(ы): Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU) Правообладатель(и): федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)
---	--

Название программы для ЭВМ:
Решение сеточных уравнений итерационными методами с предобуславливателями треугольного вида и переменных направлений

Реферат:
Программа позволяет решать сеточные уравнения итерационными методами с предобуславливателями треугольного вида и переменных направлений. Для каждой из расчетных сеток ускорение принимает наибольшее значение при определенном значении вычислителей и при дальнейшем увеличении числа вычислительных ядер ускорение только уменьшается. Это связано с временными затратами на обмен данными между вычислителями. Методы с диагональными предобуславливателями (метод Якоби) лучше распараллеливаются, чем методы с треугольными предобуславливателями (МПТМ). Адаптивный МПТМ и переменных направлений нашли свое применение при решении задач аэродинамики и транспорта донных материалов.

Язык программирования: C# (в среде Visual Studio 2008)
Объем программы для ЭВМ: 702 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

<p>Номер регистрации (свидетельства): 2018664543</p> <p>Дата регистрации: 19.11.2018</p> <p>Номер и дата поступления заявки: 2018661850 29.10.2018</p> <p>Дата публикации и номер бюллетеня: 19.11.2018 Бюл. № 11</p> <p>Контактные реквизиты: Начальник ОИС Еремина Л.В., телефон: +7(863) 273-87-36, lidia.patent@yandex.ru</p>	<p>Автор(ы): Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)</p> <p>Правообладатель(и): федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)</p>
---	--

Название программы для ЭВМ:

Реализация математической модели гидродинамики со сложной геометрией расчетной области на прямоугольной сетке

Реферат:

Программа осуществляет реализацию математической модели гидродинамики со сложной геометрией расчетной области на прямоугольной сетке. Для каждой задачи предусмотрен удобный интерфейс ввода данных и предоставлена возможность получения полной результирующей информации в виде строящихся графиков и рассчитываемых таблиц сравнения результатов. Программа позволяет повысить эффективность решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области на прямоугольной сетке. В случае ступенчатой аппроксимации границы раздела двух сред погрешность расчетов достигает 70% от решения задачи. При использовании сеток, учитывающих «заполненность» ячеек, погрешность численного решения модельных задач гидродинамики, вызванная аппроксимацией границы, не превосходят 6% от решения задачи.

Язык программирования: C# (в среде Visual Studio 2008)

Объем программы для ЭВМ: 21 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2019666067 Дата регистрации: 04.12.2019 Номер и дата поступления заявки: 2019665218 25.11.2019 Дата публикации и номер бюллетеня: 04.12.2019 Бюл. № 12 Контактные реквизиты: Отдел интеллектуальной собственности ДГТУ, +7(863) 273-87-36, ois@sci.donstu.ru	Автор(ы): Сухинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU) Правообладатель(и): федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)
--	--

Название программы для ЭВМ:
Расчет газодинамических процессов в паровой турбине

Реферат:

Программа предназначена для моделирования газодинамических процессов в паровой турбине. Программа позволяет моделировать аэродинамические процессы в паровой турбине. Аэродинамические процессы в турбине характеризуются неравномерностью парового потока, существенно влияющего на надежность и экономичность работы турбины. Проведенный расчет выполнен с учетом сложной геометрии турбины и может быть применен для любой турбины подобной конструкции с незначительными изменениями. Программа осуществляет реализацию математической модели газодинамических процессов в паровой турбине. Для каждой задачи предусмотрен удобный интерфейс ввода данных и предоставлена возможность получения полной результирующей информации в виде строящихся графиков и рассчитываемых таблиц сравнения результатов. ОС: Windows XP.

Язык программирования: C# (в среде Visual Studio 2019)

Объем программы для ЭВМ: 28 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2019666066
Дата регистрации: 04.12.2019
Номер и дата поступления заявки:
2019665221 25.11.2019
Дата публикации и номер бюллетеня:
04.12.2019 Бюл. № 12
Контактные реквизиты:
Отдел интеллектуальной собственности
ДГТУ, +7(863) 273-87-36, ois@sci.donstu.ru

Автор(ы):
Сушинов Александр Иванович (RU),
Чистяков Александр Евгеньевич (RU),
Проценко Софья Владимировна (RU)
Правообладатель(и):
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Донской государственный
технический университет» (ДГТУ) (RU)

Название программы для ЭВМ:
Расчет тепловых процессов в паровой турбине

Реферат:

Программа позволяет моделировать тепловые процессы в паровой турбине. Основными уравнениями модели являются уравнения Навье-Стокса, неразрывности и состояния для реального газа. Для аппроксимации поставленной задачи по временной переменной использованы схемы расщепления по физическим процессам (метод поправки к давлению). На основе разработанных алгоритмов выполнена программная реализация поставленной задачи и получены результаты численных расчетов аэродинамических процессов в паровой турбине. Проведенный расчет выполнен с учетом сложной геометрии турбины и может быть применен для любой турбины подобной конструкции с незначительными изменениями. Программа осуществляет реализацию математической модели тепловых процессов в паровой турбине. ОС: Windows XP.

Язык программирования: C# (в среде Visual Studio 2019)

Объем программы для ЭВМ: 26 Кб



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

<p>Номер регистрации (свидетельства): 2018664544</p> <p>Дата регистрации: 19.11.2018</p> <p>Номер и дата поступления заявки: 2018661853 29.10.2018</p> <p>Дата публикации и номер бюллетеня: 19.11.2018 Бюл. № 11</p> <p>Контактные реквизиты: Начальник ОИС Еремина Л.В., телефон: +7(863) 273-87-36, lidia.patent@yandex.ru</p>	<p>Автор(ы): Сушинов Александр Иванович (RU), Чистяков Александр Евгеньевич (RU), Проценко Софья Владимировна (RU)</p> <p>Правообладатель(и): федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)</p>
---	--

Название программы для ЭВМ:

Реализация линейной комбинации схем «кабаре» и крест для решения задач переноса при больших числах Пекле

Реферат:

Программа осуществляет реализацию линейной комбинации схем «кабаре» и крест для решения задач переноса при больших числах Пекле. Для решения задачи переноса использована схема, построенная на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами $2/3$ и $1/3$ соответственно, получена оценка погрешности аппроксимации для предложенной разностной схемы. Программа позволяет повысить эффективность решения задач переноса. Для нестационарного уравнения конвекции-диффузии предложенная разностная схема, имеет незначительную погрешность в широком диапазоне сеточных чисел Пекле.

Язык программирования: C# (в среде Visual Studio 2008)

Объем программы для ЭВМ: 24 Кб