

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Решетова Ольга Олеговна

**ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ МОДЕЛЕЙ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ
НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор М. Е. Семёнов

Воронеж — 2022

Оглавление

Введение	5
1 Обзор литературы	11
1.1 Описание гистерезисных преобразователей	17
1.1.1 Неидеальное реле	18
1.1.2 Преобразователь Прейсаха	20
1.1.3 Модель Боука-Вена	23
2 Гармонический осциллятор под воздействием внешней гистерезисной силы	26
2.1 Неограниченные решения автономных систем с гистерезисными звеньями с отрицательным спином	28
2.2 Системы с сухим и вязким трением	31
2.3 “Захват” частоты в системе с релейной нелинейностью: метод малого параметра	35
2.4 Хаос и регулярная динамика осциллятора в системах с гистерезисным блоком	38
2.4.1 Влияние гистерезисного блока	40
2.4.2 Динамика осциллятора в зависимости от параметров модели	43
2.4.3 Влияние амплитуды вынуждающего воздействия	44
3 Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля	50

3.1	Динамика осциллятора Ван-дер-Поля с внешним воздействием гистерезисной природы	52
3.1.1	Осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном в контуре обратной связи	53
3.1.2	Различные режимы динамики осциллятора Ван-дер-Поля. Модифицированный алгоритм вычисления ляпуновских показателей для систем с гистерезисными блоками	60
3.1.3	Синхронизация собственных колебаний осциллятора с частотой вынуждающей силы	66
3.2	Система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисной внешней силой	68
3.2.1	Математическая модель	68
3.2.2	Система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком	71
3.2.3	Синхронизация в системах связанных осцилляторов Ван-дер-Поля	74
3.3	Система перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком	76
4	Модифицированный осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком	81
4.1	Математическая модель	84
4.1.1	Сравнительный анализ классического и модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля	88
4.2	Осциллятор под воздействием вынуждающей силы	91
4.2.1	Численное исследование динамических режимов модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля	94
5	Программная реализация для модифицированной математической модели осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком	99

5.1	Программный комплекс для моделирования динамики системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком	100
5.2	Программный комплекс для модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком	102
	Заключение	106
	Литература	108

Введение

Актуальность темы. Модели осцилляторов играют фундаментальную роль при описании динамики огромного количества реальных технических систем (колебания атомов в кристаллических решетках, различные виды маятниковых механизмов, периодические процессы в динамике популяций, автоколебательные системы в человеческом организме и многие другие). Особую роль в этом широком классе играют гармонический осциллятор и осциллятор Ван-дер-Поля. Первый из них хорошо известен и является математической моделью малых колебаний математического маятника, колебаний груза на пружине и т.д. Осциллятор Ван-дер-Поля - модель, описывающая колебательные процессы в триодной электрической системе - в настоящее время применяется для моделирования разнообразных периодических движений: различные системы в радиотехнике, такие как триодный генератор и генератор на туннельном диоде, а также разнообразные приложения в робототехнике, в частности, модели поворачивающегося робота. Системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля моделируют сложные нелинейные процессы в физике твердого тела, а также применяются в широком спектре задач, связанных с построением процессов, протекающих в человеческом организме.

Одним из фундаментальных свойств нелинейных систем является синхронизация [1, 2], а система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля является эталоном для реализации данного явления. Этот эффект оказался наблюдаем в системах различной природы таких, как радиотехнические и электронные устройства, лазеры, а также в ряде механических систем и др. Другое название рассматриваемого явления – “захват частоты”, что

отвечает изменению частоты автоколебаний под действием внешней силы. Результаты в этой области получены лишь для систем с функциональными нелинейностями. Ситуация, когда автоколебания возникают в системах с операторными, в частности гистерезисными нелинейностями, к настоящему моменту не рассматривалась.

Одно из интенсивных направлений нелинейной динамики связано с изучением и стабилизацией хаотических режимов. Хорошо известно, что система осцилляторов Ван-дер-Поля, находящаяся под воздействием внешней гармонической силы, способна демонстрировать различные динамические режимы (периодический, почти периодический, хаотический). Управления такого рода системами традиционно опирались на классические методы (принцип обратной связи, параметрический и др.). Одно из перспективных направлений управления хаотической динамикой связано с использованием гистерезисных блоков [3]. Этот подход основан на диссипирующем свойстве гистерезисных звеньев: при обходе петли гистерезиса против часовой стрелки, гистерезисное звено удаляет из системы энергию пропорциональную площади петли. В этой связи представляется важным вопрос о возможности регуляризации хаотических движений посредством гистерезисных преобразователей.

Первым шагом, в реализации задачи управления является идентификация динамических режимов. На сегодняшний день основные методы идентификации динамических режимов связаны с вычислением показателей Ляпунова. Однако, существующие, на сегодняшний день, методы применимы лишь в случае гладкости правых частей соответствующих уравнений. В подавляющем числе публикаций, где показатели Ляпунова вычислялись для систем с недифференцируемыми правыми частями, происходила их предварительная аппроксимация гладкими функциями. При этом вопрос о корректности такой замены оставался открытым. В системах с гистерезисными нелинейностями вычисление ляпуновских показателей и вовсе затруднено (классическими методами). В этой связи представляется важным разработка приближенных методов расчета показателей Ляпунова в системах, содержащих модели гистерезисных блоков реальных техниче-

ских систем.

Таким образом, возникает научная задача анализа колебательных систем (на примере гармонического осциллятора и систем осцилляторов Ван-дер-Поля) с гистерезисными нелинейностями с точки зрения решения задач синхронизации, регуляризации и управления хаотических режимов, а также стабилизации и управления.

Диссертационная работа выполнена в рамках научного направления кафедры Цифровых технологий Воронежского государственного университета и частично поддержана РФФИ (гранты № 16-08-00312, № 17-01-00251, № 19-08-00158). Программное обеспечение созданное в рамках данной работы получило свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ (№ 2020613349).

Цель работы. Разработка методов идентификации динамических режимов математических моделей колебательных систем (гармонического осциллятора и систем осцилляторов Ван-дер-Поля) с гистерезисными нелинейностями. Достижение указанной цели осуществлялось решением следующих задач:

1. анализ динамических особенностей моделей систем с гистерезисными нелинейностями на основе построения математических моделей модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля;
2. аналитическое и численное исследование моделей гармонического осциллятора, находящегося под воздействием внешней гистерезисной силы, посредством модификации классического метода малого параметра;
3. разработка новых модификаций численных методов решения систем дифференциальных уравнений с феноменологическими моделями гистерезисных нелинейностей;
4. алгоритмы организации вычислительного эксперимента для установления динамических режимов исследуемых моделей;

5. разработка комплекса программ, реализующего динамику гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля.

Объекты исследования – механические и электротехнические системы с гистерезисными блоками.

Предмет исследования – математические модели систем с гистерезисом, численные и аналитические методы построения решений, на примере гармонического осциллятора и осциллятора Ван-дер-Поля, а также алгоритмы и программные методы, идентифицирующие режимы динамики в системах с гистерезисом.

Методы исследования. При выполнении работы использовались классические методы математического моделирования, вычислительной математики, структурного и объектно-ориентированного программирования, качественная теория дифференциальных уравнений, метод сингулярных возмущений, методы бифуркационного анализа, а также конструктивные и феноменологические модели гистерезисных преобразователей.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- идентифицированы динамические режимы математических моделей колебательных систем, отличительной особенностью которых являлось наличие гистерезисных нелинейностей, что позволило расширить карту динамических режимов исследуемых систем;
- разработан метод синхронизации систем осцилляторов Ван-дер-Поля в условиях гистерезисного воздействия позволяющий реализовать заданный динамический режим – хаотический, периодический, квазипериодический, и отличающийся от всех существующих;
- разработан комплекс программ для организации вычислительного эксперимента и реализации математических моделей колебательных

систем(систем осцилляторов Ван-дер-Поля) с гистерезисными нелинейностями.

Область исследований. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки). Область исследования соответствует п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п.2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п.5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Практическая и теоретическая значимость работы. Теоретическая значимость представленной работы заключается в модификации математических моделей колебательных систем с гистерезисными блоками. В разработке метода позволяющего учесть влияние гистерезисных составляющих на динамику модифицированных систем. Результаты, полученные в работе, могут найти применение при моделировании и проектировании технических, радиотехнических систем и устройств, структурные части которых, демонстрируют гистерезисное поведение. Практическая значимость заключается в разработке программного продукта (Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2020613349), а также в организации вычислительного эксперимента позволяющего проверить адекватность построенных математических моделей.

На защиту выносятся:

- математические модели модификаций численных методов, позволяющие идентифицировать режимы динамики класса колебательных систем с гистерезисными нелинейностями;
- алгоритмы синхронизации систем модифицированных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисными блоками, оценки скорости роста

неограниченных решений гармонического осциллятора с гистерезисной внешней силой;

- алгоритмы организации вычислительного эксперимента для численного расчета ляпуновских показателей систем с гистерезисными нелинейностями;
- программный комплекс, реализующий предложенные модели и методы.

Публикации. По материалам настоящей диссертации опубликовано 27 печатных работ в форме статей, тезисов и докладов. Из них 1 в журналах перечня ВАК и 8 в журналах, включенных в международные базы данных Scopus и WoS.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: «Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации» (международный научно-технический семинар, г. Алушта, сентябрь 2017 г., 2018 г.), «Информатика: проблемы, методология, технологии» (международная конференция, г. Воронеж, февраль 2018 г., 2019 г., 2020 г., 2021 г.), «Современные методы и проблемы математической гидродинамики» (международная конференция, г. Воронеж, май 2018 г.), 4th Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis (Morocco, Tangier, June 2018), «Современные сложные системы управления» (HTCS-2018, международная научно-практическая конференция, г. Старый Оскол, октябрь 2018 г.), «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ, международная конференция и молодежная школа, г. Самара, май 2019 г., 2020 г.), «Проблемы и инновационные решения в химической технологии» (ПИРХТ-2019 Всероссийская конференция с международным участием, г. Воронеж, октябрь 2019 г.).

Глава 1

Обзор литературы

К настоящему времени исследованию нелинейных колебаний, а также идентификации режимов динамики систем, содержащих колебательные блоки, посвящен обширный список литературных источников [2, 4–6]. Особый интерес представляют системы, с сильными нелинейностями, в том числе и гистерезисной природы (сюда относятся как гистерезисные элементы, связанные с внутренней структурой колебательных систем, так и внешние факторы с гистерезисными свойствами).

Основы теории систем с гистерезисом, рассматривающей гистерезисные нелинейности как преобразователи с пространствами состояний, были заложены в 70-80-х годах прошлого века М.А. Красносельским и его школой. Такой подход к формализации гистерезисных явлений, охватывающий многие феноменологические модели гистерезиса и нелокальной памяти, позволил развить эффективные методы исследования моделей с гистерезисными элементами. Наиболее полное описание конструктивных моделей гистерезисных преобразователей, трактуемых как операторы, зависящие от начального состояния как от параметра и определенные на широком функциональном пространстве, представлено в классической монографии [7].

Модели векторных гистерезисных операторов исследовались в работах Майергойца, из которых отметим монографию [8]. Модели таких систем, как правило, включают дифференциальные уравнения и оператор-

ные соотношения между частью переменных (дифференциально-операторные уравнения), а их исследование, (в основном для случаев «простых» гистерезисных операторов типа реле и люфта) берет свое начало в классических работах теории управления и теории колебаний.

Отметим, что различные аспекты динамики систем с гистерезисом, включая разнообразные динамические режимы колебательных систем, в настоящее время изучены недостаточно полно. Их изучение осложняется, в частности тем, что гистерезисные операторы не обладают свойством сильной дифференцируемости и могут обладать довольно сложными пространствами состояний. К таким операторам относится, например, оператор Прейсаха, возникающий при моделировании систем с ферромагнитными элементами. Подобные вопросы рассматривались в ряде работ [9, 10]. Из недавних работ, посвященных гистерезисным преобразователям, отметим работы [11, 12], в которых рассматриваются и анализируются общие свойства гистерезисных операторов, а также представлены возможные прикладные аспекты их использования. В работах [8, 13–16] проводится подробное описание и экспериментальная проверка модели Прейсаха. Авторы делают акцент на универсальности математических моделей гистерезиса и их применимости к описанию гистерезисных явлений в различных областях науки, техники и экономики.

В последнее время общеупотребительным стал подход, связанный с использованием феноменологических, многопараметрических моделей, достаточно качественно описывающих гистерезисные связи. В частности, в статьях [17, 18] приводится подробное описание гистерезиса посредством феноменологической модели Боука-Вена. Эта модель формализуется в виде двух соотношений: одного алгебраического и нелинейного дифференциального уравнения. Модель Боука-Вена способна достаточно точно идентифицировать широкий круг гистерезисных эффектов. Популярность этой модели обуславливается ее способностью представлять в аналитической форме гистерезисные циклы, отвечающие поведению широкого класса систем с гистерезисом. В работах [19, 20] представлен новый метод идентификации параметров модели Боука-Вена, основанный на гибридном эволю-

ционном алгоритме, использующем стохастические операторы. Предлагаемый метод демонстрирует эффективность, надежность и нечувствительность к искаженным шумовой компонентой данным, в то время как он точно идентифицирует как гистерезисное, так и вязкое демпфирование на основе натуральных экспериментов. Эффективность указанного метода исследуется в отношении информационного содержимого входных и выходных данных. В статье [21] предложено описание явления рассеивания энергии в рамках гистерезисной модели Боука-Вена, при этом гистерезисные параметры описываются в терминах гипергеометрических функций Гаусса. Такое представление позволяет в аналитической форме описать диссипацию энергии при симметричном циклическом возбуждении, основываясь исключительно на параметрах модели и амплитуде внешнего воздействия.

В статье [22] приводятся интересные результаты о влиянии гистерезисных нелинейностей на внутренние резонансы порядка 3:1 в системе Ван-дер-Поля. При этом аналитические результаты были получены в рамках теории возмущений и метода малого параметра. Также отметим цикл работ [23–25] в которых рассматриваются системы с различными режимами движения, в частности переходы от периодичности к квазипериодичности и хаос в системах с гистерезисом. Рассматриваются три модели гистерезиса: модель Боук-Вена, модель Маделунга (Массинга), а также феноменологическая модель, описывающая упруго-пластические свойства сплавов с памятью. Первые две независимые от скорости модели не учитывают теплопередачи, в то время как в третьем случае учитываются термодинамические преобразования. Показано, что эти системы имеют сходные сценарии потери устойчивости. В указанных выше работах гистерезисные свойства системы описывается посредством модели Боука-Вена, идентификация параметров которой проводится экспериментальным образом, что является косвенным доказательством универсальности этой феноменологической модели

Особое место, при этом, занимает модель Ван-дер-Поля, поскольку позволяет описать поведения широкого класса автоколебательных систем. В первоначальной постановке уравнение Ван-дер-Поля описывало дина-

мику особого радиотехнического устройства на электронной лампе [26]. Дальнейшие исследования показали, что указанное уравнение позволяет описывать широкий круг процессов из различных предметных областей, основными из которых являются: разнообразные приложения в робототехнике, в частности, модели поворачивающегося робота [27, 28], а также моделирование процессов в организме человека. В одной из первых работ в указанном направлении динамика сокращений сердечной мышцы моделировалась посредством трех связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. С помощью этой модели удалось объяснить многие виды аритмии и даже предсказать ряд новых, обнаруженных в последствии. В настоящее время активно продолжаются исследования, в которых динамика кардиостимуляторов моделируется уравнениями осцилляторов Ван-дер-Поля. Так, например, в работе [29] предлагается модель, позволяющая воспроизвести несколько известных электрокардиологических явлений, таких как тахикардия, полная блокада сердца, трепетание предсердий и фибрилляцию желудочков. В работе [30] исследуется феноменологическая модель сердцебиения, состоящая из двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, позволяющая проанализировать синхронизацию ритмов. В работе [31] представлена модель сердечно-сосудистой системы, которая является комбинацией уравнения Ван-дер-Поля и информационной модели в форме сети Вольтерры. Недавние исследования показали, что динамику голосовой связки возможно моделировать с помощью осциллятора Ван-дер-Поля, оказалось, что указанная модель упрощает ее анализ и в должной степени соответствует основным принципам функционирования [32]. Отметим также работу [33], где осциллятор Ван-дер-Поля применяется для моделирования процессов, возникающих при отоакустической эмиссии, то есть звуков, генерируемых в наружном слуховом проходе колебаниями волосковых клеток ушной улитки. Так как перемещение людей и животных носит ритмичный характер, то для моделирование походки, а также движений конечностей часто применяют системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. В [28] показано, что бипедальное передвижение, возможно, моделировать с помощью взаимосвязанных осцилляторов Ван-дер-Поля, более того, варьируя

параметры осцилляторов можно управлять длиной шага и частотой ходьбы. Также отметим, что уравнение Ван-дер-Поля применимо для описания реальных физических систем, таких как триодный генератор, транзисторный генератор, виркатор и т.д.

Еще больший интерес представляет исследование динамики систем связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Система двух связанных осцилляторов позволяет описать различные бифуркационные механизмы, возникающие в разнообразных автоколебательных системах с предельными циклами, а также исследовать важный процесс, связанный с синхронизацией колебательных режимов. При этом спектр наблюдаемых явлений во многом определяется разновидностью природы связи между взаимодействующими осцилляторами. Исследованию этих явлений посвящены работы [34, 35]. Системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля применяются также при исследовании сложных систем, в том числе и с распределенными параметрами таких как, например, тропические циклоны [36], гидродинамика низкотемпературной плазмы [37], а также многих других.

В настоящее время метод малого параметра является одним из мощных инструментов анализа сложных нелинейных систем, позволяющим, в отличие от прямых численных методов, получить, хотя и приближенные решения, но в явной аналитической форме. Первоначальные идеи метода малого параметра были опубликованы в работах А. Пункаре [38]. В дальнейшем свое развитие этот метод получил в классических работах [39–41] и других исследователей. Несмотря на то, что существует большое количество работ, в той или иной степени связанных с применением метода малого параметра к исследованию динамики нелинейных систем, исследований, основанных на классическом методе малого параметра примененных для изучения динамических свойств систем, содержащих, нелинейности гистерезисного типа, не производилось. Отметим, что наряду с несомненной фундаментальной значимостью (связанной с развитием новых математических методов и подходов к исследованию динамических систем, описываемых в терминах дифференциально-операторных уравнений), применение метода малого параметра к системам, содержащим гистерезисные

нелинейности, носит и важный прикладной аспект (разработка эффективных математических моделей функционирования реальных технических систем, таких как манипуляторы, механические и электромеханические роботизированные устройства, учитывающих процессы старения материалов составляющих частей таких систем; применение математических моделей к исследованию динамических особенностей протекания различного рода процессов в современных материалах и структурах на их основе, содержащих элементы и блоки, обладающие гистерезисной структурой, либо находящиеся под воздействием внешних факторов гистерезисной природы и т.д.).

Кроме того, одним из перспективных направлений фундаментальных исследований являются задачи диагностики и управления хаотическими режимами различных динамических систем с использованием техники малого параметра. В этой связи отметим работы [42–44]. Отметим, однако, что во всех вышеперечисленных работах модели разнообразных технических систем были формализованы посредством дифференциальных уравнений с функциональными нелинейностями, и, как следствие, возможная гистерезисная природа связей между отдельными элементами таких систем не принималась во внимание. В то же время модели с гистерезисными элементами часто возникают при решении задач физики, механики, экономики и др.

Отдельное внимание в современных исследованиях нелинейных колебательных систем занимают хаотические режимы динамики, а также процессы управления хаосом. Известно, что хаотические режимы в стандартной модели Ван-дер-Поля невозможны, однако в модифицированных уравнениях, к примеру Ван-дер-Поля-Дуффинга или в системах связанных осцилляторов Ван-дер-Поля реализуются в том числе и хаотические режимы движения [45]. Отметим в этой связи работы [46, 47], в которых предложены методы стабилизации подобных систем посредством специальных форм внешних управляющих факторов. Исследование хаотических режимов динамики в колебательных системах с гистерезисными нелинейностями проводились рядом авторов [48–50]. В указанных работах были

получены условия, обеспечивающие возникновение хаотических режимов в системах, модели которых описываются дифференциально-операторными уравнениями, а также исследованы свойства хаотической динамики таких систем. Однако ряд физических систем с гистерезисными свойствами, демонстрирующих хаотическое поведение, изучен недостаточно. Сюда относятся, в частности, нелинейный RLC-контур, содержащий сегнетоэлектрический элемент с гистерезисными параметрами, а также системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисной формой связи, либо находящиеся под внешним воздействием гистерезисной природы. Исследование хаотического поведения в системах с гистерезисным звеном также было проведено в работе [51]. Исследование динамических характеристик моделей таких систем, а также влияния гистерезисных нелинейностей на стабилизацию хаотических режимов до настоящего времени не были рассмотрены должным образом. В связи с этим разработка и исследование моделей хаотических систем в условиях гистерезисных связей является важной и актуальной задачей.

1.1 Описание гистерезисных преобразователей

Явление гистерезиса хорошо известно в физике, технике, экономике и других отраслях науки. В физике гистерезисные зависимости встречаются у различных материалов с нелинейным откликом на внешнее воздействие, в частности у ферромагнетиков и нелинейных диэлектриков. В настоящее время имеется достаточно много математических моделей гистерезисных зависимостей [8, 13, 52–61]. Однако, при анализе систем с гистерезисом часто возникают сложности, связанных с недифференцируемостью операторов, являющихся составляющими конструктивных моделей гистерезисных явлений. Поэтому в последние годы широкое распространение получил феноменологический подход описания гистерезисных преобразователей. В частности, в статьях [17, 18] приводится подробное описание гистерезиса посредством модели Боука-Вена. Это хорошо известная модель, способная достаточно точно идентифицировать широкий круг гистерезисных эффек-

тов. Популярность этой модели обуславливается ее способностью представлять в аналитической форме гистерезисные циклы, отвечающие поведению широкого класса систем с гистерезисом. В данной работе рассматриваются операторные модели, такие как неидеальное реле с инверсией пороговых чисел, модель Прейсаха, а также феноменологическая модель Боука-Вена.

1.1.1 Неидеальное реле

Данная работа посвящена исследованию динамики различных систем с гистерезисными свойствами. Очевидно, что для построения математических моделей таких систем подходящим является использование преобразователей гистерезисной природы. Следуя классическим схемам М.А. Красносельского и А.В. Покровского [7], гистерезисные операторы трактуются как преобразователи, определенные на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: вход-состояние и состояние-выход.

Следуя [7], дадим описание преобразователю. Неидеальные реле — это простые и одновременно наиболее важные преобразователи, входо-выходные соответствия которых описываются разрывными операторами.

Областью $\Omega(\alpha, \beta) = \Omega(R(\alpha, \beta))$ возможных состояний неидеального реле $R(\alpha, \beta)$ с пороговыми числами α и β $\beta < \alpha$ является множество точек u, x плоскости, лежащих на двух полупрямых: $x = 0$ при $u < \alpha$ и $x = 1$ при $u > \beta$. На рис. 1.1 множество $\Omega(\alpha, \beta)$ показано утолщенными линиями.

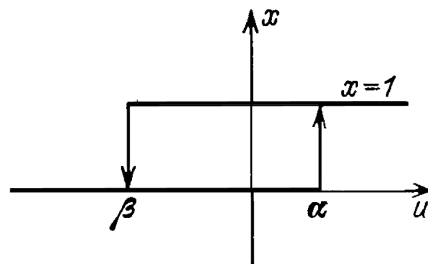


Рис. 1.1. Взаимосвязь между входами и выходами преобразователя R .

Иногда состояние неидеального реле определяют как значение выхо-

да; множество возможных состояний содержит тогда два элемента: 0 и 1. При каждом начальном состоянии $u_0, x_0 \in \Omega(\alpha, \beta)$ в момент времени $t = t_0$ допустимыми являются непрерывные входы $u(t)$ ($t > t_0$), удовлетворяющие условию

$$u(t_0) = u_0.$$

Допустимому входу $u(t)$ отвечает выход

$$x(t) = R[t_0, x_0; \alpha, \beta] u(t) (t \geq t_0), \quad (1.1)$$

который можно описывать различными способами. Наиболее просто воспользоваться явной (хотя и весьма громоздкой) формулой

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } u(t) \leq \beta, \\ 1, & \text{если } u(t) \geq \alpha, \\ x_0, & \text{если } u(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ и } \tau \in [t_0, t], \\ 0, & \text{если } u(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ и найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \\ & \text{что при } u(t_1) = \beta \text{ и } u(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in [t_1, t], \\ 1, & \text{если } u(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ и найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \\ & \text{что при } u(t_1) = \alpha \text{ и } u(\tau) \in (\beta, \alpha) \text{ при всех } \tau \in [t_1, t]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Таким образом, неидеальное реле является детерминированным преобразователем, определенным на всех непрерывных входах. Очевидны статичность и управляемость неидеального реле. Полугрупповое тождество для неидеального реле имеет обычный вид:

$$R[t_0, x_0; \alpha, \beta] u(t) = R[t_1, R[t_0, x_0; \alpha, \beta] u(t_1); \alpha, \beta] u(t) (t_0 \leq t_1 \leq t), \quad (1.3)$$

Значения выхода при непрерывном входе $u(t)$ ($t > t_0$) полностью определяются следующим правилом: выход (t) принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1, t_2]$ если либо $x(t_1) = 0$ и $u(t) < \alpha$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $x(t_1) = 1$ и $u(t) > \beta$ при $t \in [t_1, t_2]$. Сформулированное правило будем называть принципом отсутствия лишних переключений. Важным свойством неидеального реле является его монотонность по

входам: если $u(t_0, x_0, v(t_0, y_0 \in \Omega(\alpha, \beta), x_0 \leq y_0$ и $u(t) \leq v(t)(t \geq t_0)$, то $R[t_0, x_0; \alpha, \beta] u(t) \leq R[t_0, x_0; \alpha, \beta] v(t)(t \geq t_0)$.

Монотонность по входам можно использовать как основу определения неидеального реле. Для этого нужно вначале определить выходы при монотонных входах. Затем при помощи полугруппового тождества определить выходы при кусочно монотонных непрерывных входах. После этого установить монотонность по входам и заметить, что определенное на кусочно монотонных входах соответствие вход-выход имеет единственное монотонное продолжение на пространство всех непрерывных входов. Построенное продолжение задает оператор (1.1) на всех непрерывных входах. Имеет место и естественная монотонность по пороговым числам.

Значениями оператора (1.1) являются функции, принимающие лишь два значения: 0 и 1. Поэтому можно его рассматривать как оператор, действующий из пространства $C = C(t_0, t_1)$ непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $u(t)$ в любое $L_q = L_q(0, 1)$, где $1 \leq q \leq \infty$. В заключение пункта отметим, что пороговые значения α и β часто называют током включения и током отпускания. Когда выход равен 1, то, как говорят, реле включено; если выход равен 0, то реле отключено.

1.1.2 Преобразователь Прейсаха

Рассмотрим в качестве модели гистерезиса преобразователь Прейсаха. В предыдущем разделе подробно было описано двухпозиционное реле $R[\alpha, \beta, x_0]$ с пороговыми числами α и β . Однако, в данном случае рассмотрим отличное от классического описания пространство состояний $\{-1, 1\}$. Связь между входом $u(t) \in C_{[0,t]}$ и переменным выходом $x(t) \in \{-1, 1\}$ устанавливается оператором $R[\alpha, \beta, x_0]$:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0] u(t), \quad (1.4)$$

здесь x_0 – начальное состояние преобразователя. Взаимосвязь между входом и выходом иллюстрирует рис. 1.2. Начальное состояние x_0 преобразо-

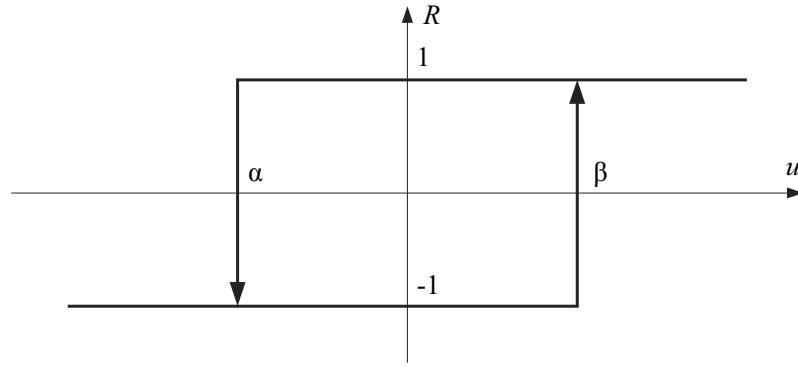


Рис. 1.2. Взаимосвязь между входами и выходами преобразователя R .

вателя должно удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} x_0 = -1, & u(0) \leq \alpha; \\ x_0 = 1, & u(0) \geq \beta; \\ x_0 = \pm 1, & \alpha \leq u(0) \leq \beta. \end{cases} \quad (1.5)$$

Преобразователем Прейсаха называют континуальный аналог преобразователя, состоящего из неидеальных реле, соединенных параллельно [14].

Рассмотрим частный класс таких реле. Пусть на полуплоскости $P_{\alpha, \beta} \equiv \{\alpha, \beta : \alpha < \beta\}$ определена положительная абсолютно непрерывная суммируемая функция $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$. Определим на полуплоскости $P_{\alpha, \beta}$ меру μ равенством:

$$d\mu = \lambda(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (1.6)$$

Измеримыми по мере μ будут все измеримые по Лебегу множества, в том числе и имеющие бесконечную меру.

Обозначим через ψ класс ограниченных функций, заданных на неотрицательной полуоси и удовлетворяющих условию Липшица с коэффициентом, равным единице. Рассмотрим множество Ω_ψ скалярных функций $\omega(\alpha, \beta)$, заданных на полуплоскости $P_{\alpha, \beta} \equiv \{\alpha, \beta : \alpha < \beta\}$ и таких, что:

$$\omega(\alpha, \beta) = \begin{cases} -1, & \alpha + \beta > \psi(\beta - \alpha), \\ 1, & \alpha + \beta \leq \psi(\beta - \alpha), \end{cases} \quad (1.7)$$

где $\psi(\nu) \in \psi$. Множество Ω_ψ – пространство возможных состояний преобразователя Прейсаха. На рис. 1.3 показан один из элементов множества

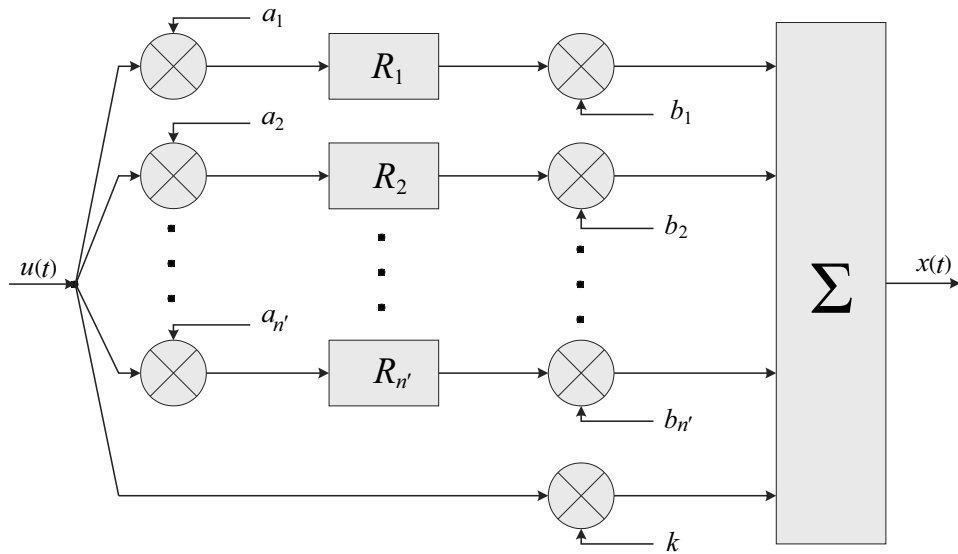


Рис. 1.4. Блок-схема конечномерной аппроксимации преобразователя Прейсаха.

Таким образом, конечномерная аппроксимация преобразователя Прейсаха содержит n неидеальных реле $R[\alpha, \beta, x_0]$, имеющих характеристику, показанную на рис. 1.2. Дополнительные коэффициенты $a_{n'}$, $b_{n'}$ и k задают наклон характеристик неидеальных реле и, как следствие, форму характеристики преобразователя Прейсаха в целом.

1.1.3 Модель Боука-Вена

Для описания гистерезисных явлений наряду с операторной трактовкой, активно используются феноменологические модели. Зачастую, при этом описание гистерезисного блока рассматривается как «черный ящик» с известными из эксперимента значениями входных и выходных параметров. Взаимосвязи между ними устанавливаются на основе математических зависимостей, параметры которых идентифицируются с использованием экспериментальных данных. Одной из основных феноменологических моделей является модель Боука-Вена, так как она позволяет описать широкий класс систем с гистерезисом.

Впервые модель была описана в [62, 63], а позднее дополнена в работах [64, 65]. В настоящее время дифференциальная модель Боука-Вена применяется при моделировании гистерезиса в пьезоэлектрических элементах,

магнитореологических амортизаторов [66], деревянных соединений [67], изоляции фундаментов зданий и сооружений [68] и пр.

В общем виде модель Боука–Вена определяется посредством следующих соотношений:

$$\Phi_{BW}(x, t) = \alpha kx(t) + (1 - \alpha)Dkz(t), \quad (1.8)$$

$$\dot{z} = D^{-1} (Ax - \beta|\dot{x}||z|^{n-1}z - \gamma\dot{x}|z|^n), \quad (1.9)$$

где \dot{z} -переменная, описывающая гистерезисную траекторию. Значения α , β , γ и n идентифицируются по экспериментальным данным.

В статьях [17, 18, 59, 69] сформулированы условия, которым должна удовлетворять модель Боука–Вена. Одни из основных свойств - адекватность математической модели и устойчивость. Считается, что модель устойчива по входу, если из ограниченности входного сигнала, следует ограниченность на выходе при любых начальных условиях. Указанные условия накладывают ограничения на диапазоны изменения параметров модели.

Одно из преимуществ феноменологической модели заключатся в том, что варьируя параметры, можно задать сколь угодно отличные друг от друга варианты петли гистерезиса, ниже приведем различные варианты, с указанием значений параметров.

Далее в работе параметры модели Боука-Вена настраиваются так, чтобы им отвечала максимально широкая петля гистерезиса. А именно: $A = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.9$, $n = 4$, приведем график (рис. 1.6), удовлетворяющий этим значениям.

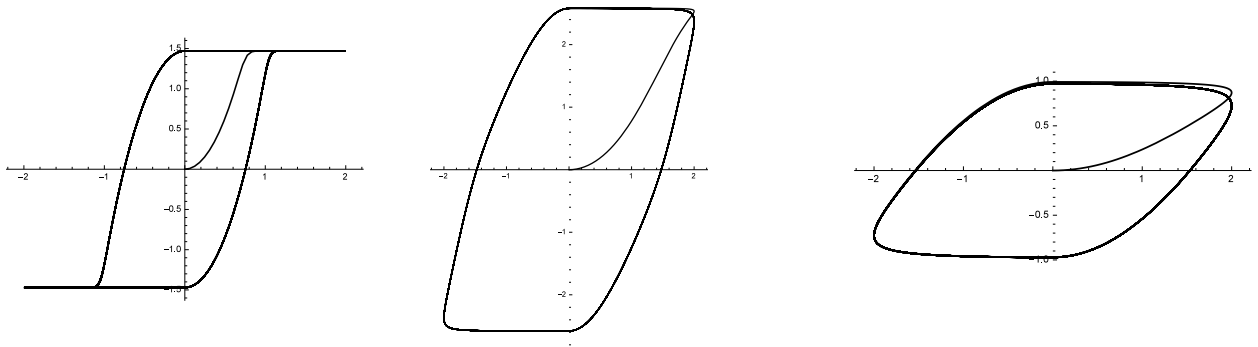


Рис. 1.5. Петля гистерезиса при значении параметров а) $A = 10$, $\beta = 1.1$, $\gamma = 0.1$, $n = 10$; б) $A = 3$, $\beta = -0.1$, $\gamma = 0.5$, $n = 2$; в) $A = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.9$, $n = 1$;

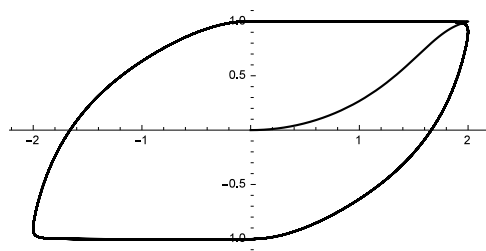


Рис. 1.6. Петля гистерезиса, отвечающая параметрам модели $A = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.9$, $n = 4$

Глава 2

Гармонический осциллятор под воздействием внешней гистерезисной силы

Гармонический осциллятор является математической моделью малых колебаний математического маятника, колебаний груза на пружине и т.д. При рассмотрении задач математического моделирования в различных областях, а именно, в моделях систем автоматического регулирования, теории твёрдого тела, при описании экономических и биологических систем возникают нелинейности гистерезисного типа. В настоящей главе изучаются резонансные свойства систем, в которых “подкачка” энергии в систему обусловлено наличием гистерезисного звена [70–72]. Примерами таких систем являются колебания ферромагнитного шарика в магнитном поле, колебание систем связанных осцилляторов, находящихся под воздействием сил, гистерезисным образом зависящих от смещения. Отдельно отметим, что подобные модели находят естественное приложение в физике твёрдого тела при моделировании межатомных взаимодействий с учётом различного рода дефектов, возникающих вследствие старения и износа материала. Исследуются неограниченные решения автономных систем с гистерезисными звеньями с отрицательным спином. Также исследуется влияние гистерезисного звена на осциллятор с сухим и вязким трением. Было установлено

возникновение автоколебательных режимов в системах с сухим и вязким трением.

Отдельная часть главы посвящена синхронизации периодических автоколебаний гармонической внешней силой [5,6]. Другое название рассматриваемого явления – “захват частоты”, что отвечает изменению частоты автоколебаний под действием внешней силы. Суть этого эффекта заключается в следующем: если в правую часть системы, в которой реализуются устойчивые автоколебания, ввести гармоническое слагаемое, то при наличии определенной связи между амплитудой и частотами автоколебаний и внешней силы возможна реализация колебаний на частоте вынуждающей силы. Результаты в этой области получены лишь для систем с функциональными нелинейностями. Ситуация, когда автоколебания возникают в системах с операторными, в частности гистерезисными нелинейностями к настоящему моменту не рассматривалась.

Также в главе изучается динамика гармонического осциллятора с вязким трением под воздействием периодической силы и гистерезисного блока формализованного моделью Прейсаха. В процессе компьютерного моделирования проводится исследование указанной механической системы от различных параметров, устанавливаются значения параметров позволяющих регуляризовать поведение системы, а также проводится тест на хаос 0-1 [73, 74]. Материал, изложенный в настоящей главе подробно представлен в работах [75–84].

Глава организована следующим образом. В разделе 2.1 рассматривается автономная система с гистерезисным блоком, для которой доказыва-ется, что если начальное значение удовлетворяет условиям, при которых гистерезисное звено “срабатывает”, то соответствующее ей решение неограниченно. В разделе 2.2 рассматриваются осцилляторы с сухим и вязким трением, в состав которых входит гистерезисный блок. Доказывается возникновение автоколебательных режимов в подобных системах, что существенным образом отличает их от классических осцилляторов, в которых в не зависимости от начальных условий, система совершает затухающие колебания около положения равновесия. Раздел 2.3 посвящен изучению

синхронизации с внешней силой в системе с релейными нелинейностями. Посредством метода малого параметра находится решение для осциллятора с гистерезисным блоком, находящегося под гармоническим воздействием. Показана зависимость интервала синхронизации от амплитуды внешнего воздействия. Раздел 2.4 посвящен описанию математической модели механической системы с вязким трением под воздействием периодической силы и гистерезисного блока. Рассматривается влияние параметров оператора Прейсаха на динамику указанной системы. А также проводится тест на хаос 0-1 позволяющий определить динамические режимы описываемой модели.

2.1 Неограниченные решения автономных систем с гистерезисными звеньями с отрицательным спином

Рассмотрим систему, динамика которой описывается задачей Коши следующего вида:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= R[\alpha, \beta, \omega_0]x \\ x(0) = x_0; \dot{x}(0) &= x_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $R[\alpha, \beta, \omega_r]$ -оператор неидеального реле с отрицательным спином, а ω_0 -начальное состояние. Подробное описание его свойств приводится в фундаментальной монографии Красносельского М.А. [7].

Теорема: Пусть начальное значение удовлетворяет условию $x_0 \notin [\alpha, \beta]$. Тогда отвечающее ему решение неограниченно.

Доказательство: Для упрощения выкладок положим $\alpha = -1, \beta = 1$. Предположим, что начальные условия $x_0 < -1$, тогда на некотором начальном промежутке времени ($t \geq 0$) решение уравнения (2.1) будет иметь вид $x_0 = A_1 \cos(t + \varphi_0) + 1, 0 \leq t \leq t_0$, где t_1 момент времени при котором выполняется равенство $x(t_1) = 1$. . Очевидно, что такой момент существует. Решение уравнения (2.1) на промежутке $[t_1, t_2]$ будет определяться

соотношением $x_1(t) = A_1 \cos(t + \varphi_1)$. Здесь t_2 момент времени, при котором будет выполнено $x_1(t_2) = -1$. Также несложно показать, что такой момент времени существует, так как ($x_1(t_1) = 1$, то $A_1 \geq 1$) и т.д.

Таким образом, при отсутствии переключений решение уравнения (2.1) будет “склеено” из функций с соотношением:

$$x_n(t) = A_n \cos(t + \varphi_n) + 1$$

и при нечетных n :

$$x_{n+1}(t) = A_{n+1} \cos(t + \varphi_{n+1})$$

Из условия непрерывности решения и его производной в точке t_n (момент достижения правого порогового значения) вытекают равенства:

$$\begin{cases} A_n \cos(\varphi_n) + 1 = A_{n+1} \cos(\varphi_{n+1}), \\ -A_n \sin(\varphi_n) = -A_{n+1} \sin(\varphi_{n+1}), \\ A_n \cos(\varphi_n) + 1 = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Возводя первое и второе уравнение системы (2.2) в квадрат и складывая их, получим:

$$\begin{cases} A_n^2 \cos^2(\varphi_n) + 2A_n \cos(\varphi_n) + 1 = A_{n+1}^2 \cos^2(\varphi_{n+1}), \\ A_n^2 \sin^2(\varphi_n) = A_{n+1}^2 \sin^2(\varphi_{n+1}), \\ A_n \cos(\varphi_n) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

или

$$\begin{cases} A_n^2 + 2A_n \cos(\varphi_n) + 1 = A_{n+1}^2, \\ A_n \cos(\varphi_n) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

складываем уравнения системы и получаем:

$$A_n^2 + 1 = A_{n+1}^2 \quad (2.5)$$

Аналогично, для следующего промежутка, в точке, в которой решение принимают значения -1 будет иметь:

$$\begin{cases} A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) = A_{n+2} \cos(\varphi_{n+3}) + 1, \\ -A_{n+1} \sin(\varphi_{n+2}) = -A_{n+2} \sin(\varphi_{n+3}), \\ A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) = -1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Возведем в квадрат первые два уравнения системы:

$$\begin{cases} A_{n+1}^2 \cos^2(\varphi_{n+2}) - 2A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) + 1 = A_{n+2}^2 \cos^2(\varphi_{n+3}), \\ A_{n+1}^2 \sin^2(\varphi_{n+2}) = A_{n+2}^2 \sin^2(\varphi_{n+3}), \\ A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) = -1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Далее суммируем их:

$$\begin{cases} A_{n+1}^2 - 2A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) + 1 = A_{n+2}^2, \\ A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) = -1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Подставляем значения в первое уравнение, получаем:

$$A_{n+2}^2 = A_{n+1}^2 + 3 \quad (2.9)$$

Тогда из (2.8) и (2.9) вытекает:

$$A_{n+2}^2 = A_n^2 + 4$$

Иначе говоря, верно следующее утверждение: как только начальное значение таково, что гистерезисное звено, “срабатывает”, то соответствующее ему решение неограниченно. Результаты компьютерного моделирования представлены на следующих рисунках.

Замечание 1. Отметим, что решение будет осциллировать и при этом скорость роста амплитуды будет пропорционально \sqrt{t} .

Замечание 2. Теорема остается верной и для других гистерезисных нелинейностей. Единственное требование к ним заключается в положительности площади петли и обходе петли по часовой стрелке.

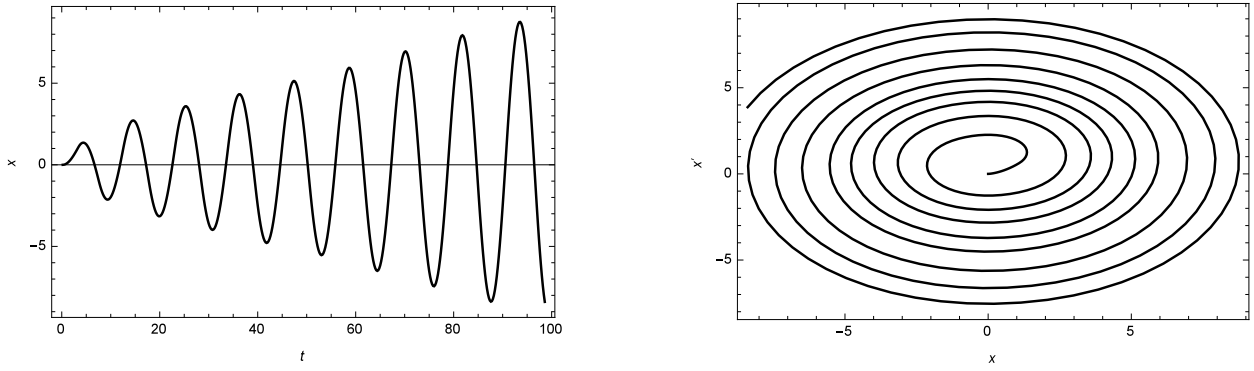


Рис. 2.1. Решение и фазовый портрет уравнения (2.1) с заданными начальными условиями.

2.2 Системы с сухим и вязким трением

Естественным обобщением рассматриваемой системы являются системы с различными видами трения (сухого и вязкого).

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = R[\alpha, \beta, \omega_0]x \quad (2.10)$$

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = x_1.$$

В дальнейшем будем считать, что пороговые числа неидеального реле симметричны относительно начала координат. Рассматривая динамику решения, можно отметить, что, как только амплитуда решения становится достаточно велика, то работа силы трения уравнивает энергию, полученную осциллятором от гистерезисного преобразователя. Рассмотрим два случая, связанных с различным видом корней характеристического уравнения линейной части уравнения (2.10).

Рассмотрим уравнение (2.10) с заданными начальными условиями.

$$\ddot{x}^+ + 2b\dot{x}^+ + \omega^2 x^+ = 1 \quad (2.11)$$

$$\ddot{x}^- + 2b\dot{x}^- + \omega^2 x^- = -1 \quad (2.12)$$

Рассмотрим первый случай. Решение уравнения будет иметь вид:

$$x^+(t) = \frac{1}{\omega^2} + C_1 \exp \left[t \left(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2} \right) \right] + C_2 \exp \left[t \left(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2} \right) \right] \quad (2.13)$$

Очевидно, что $\frac{1}{\omega^2}$ будет являться его асимптотическим пределом, поэтому в случае выполнения неравенства $\alpha < \frac{1}{\omega^2}$, $\beta > -\frac{1}{\omega^2}$ при некотором T , будет выполнено равенство $x^+ = -\alpha$. Дальнейшая динамика будет определяться посредством уравнения со значение преобразователя неидеального реле $-\alpha = -1$. Рассуждая аналогичным образом, легко установить, что при некотором T_1 решение примет значение α . В силу автономности уравнений полученные таким образом решения будут являться периодически. Период найдем из следующих соотношений

$$x^+(t) = C_1 \exp(t\lambda_1) + C_2 \exp(t\lambda_2) \quad (2.14)$$

$$x^-(t) = C_3 \exp(t\lambda_3) + C_4 \exp(t\lambda_4) \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(1 + \omega^2) (-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ C_2 &= \frac{(1 + \omega^2) (b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ C_3 &= -\frac{(-1 + \omega^2) (-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ C_4 &= -\frac{(1 + \omega^2) (b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ \lambda_1 &= \lambda_3 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}, \\ \lambda_2 &= \lambda_4 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

При этом период колебания будет определять соотношение (2.17):

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - \omega^2}} \quad (2.17)$$

Рассмотрим второй случай, когда корни характеристического уравнения линейной части уравнения (2.10) являются комплексно-сопряженными. Тогда решение уравнения с начальными условиями можно записать в следующем виде:

$$x(t) = \exp(-bt) [B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)] - \frac{1}{\omega_0^2} \quad (2.18)$$

где $\omega = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$.

Учитывая начальные условия, получим:

$$-\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1 + \omega_0^2}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2} \exp(-bt) \sin \left[\omega t + \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2}} \right) \right] \quad (2.19)$$

Фазовый портрет и решение представлены на рисунке 2.2.

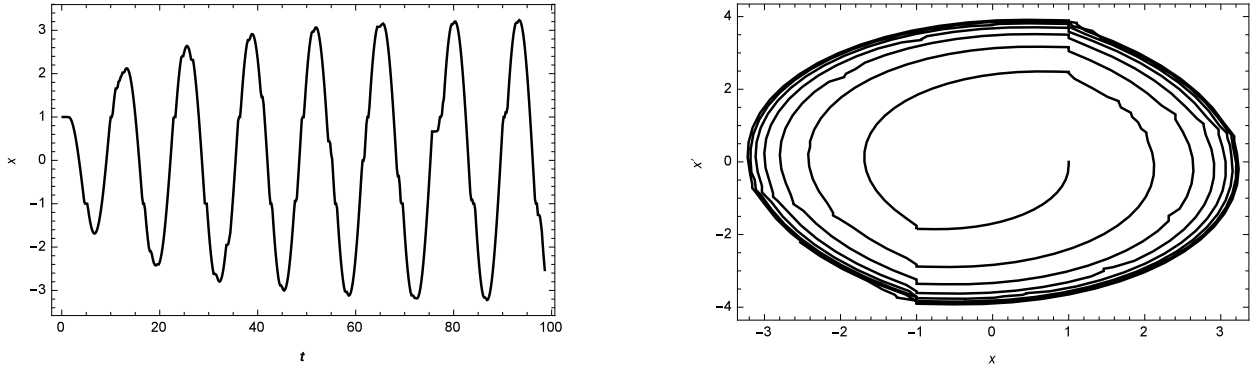


Рис. 2.2. Решение и фазовый портрет уравнения (2.10) с заданными начальными условиями.

Отметим, что при заданных значениях параметра $b = 1$ происходит бифуркация, соответствующая резкому изменению периода.

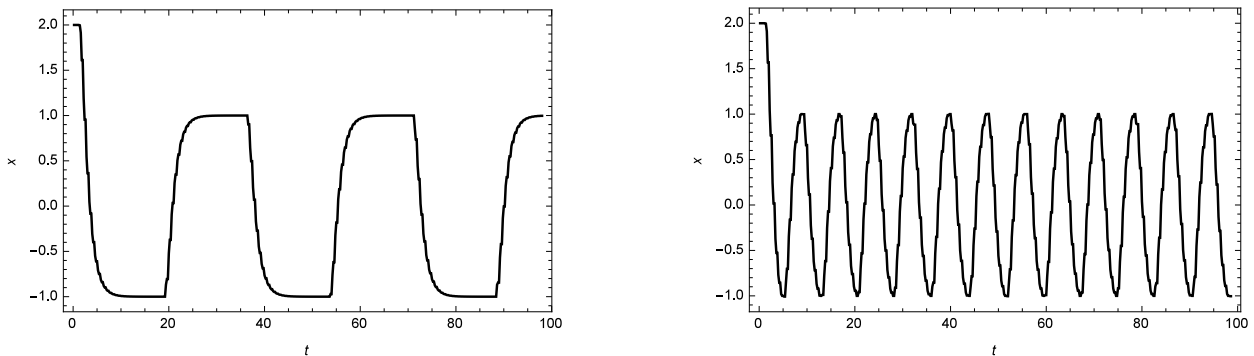


Рис. 2.3. Колебания в системе (2.10) при $b = 0.9$ и $b = 1.1$.

Рассмотрим колебания осциллятора с сухим трением и гистерезисным внешним воздействием, описываемые следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \eta \text{sign}(\dot{x}) + x = R[\alpha, \beta, \omega_0]x \quad (2.20)$$

Умножая обе части уравнения (2.21) на \dot{x} и интегрируя по периоду T получим:

$$\int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + x^2) = -\eta \text{sign}(\dot{x})\dot{x} + \dot{x}R[\alpha, \beta, \omega_0]x \quad (2.21)$$

$$\Delta E = -\eta \int_0^T |\dot{x}| dt + S_p \quad (2.22)$$

Из соотношения (2.22) следует, что приращение энергии будет положительно, если работа сил трения будет меньше площади петли и отрицательна в противном случае. Таким образом изучаемую систему можно трактовать, как систему с отрицательной обратной связью. Отметим, что на установившихся режимах будет выполнено соотношение $2(x_{max} - x_{min})\eta = S_p$, что означает, что амплитуда колебаний будет такова, что работа силы трения на периоде будет равна площади петли.

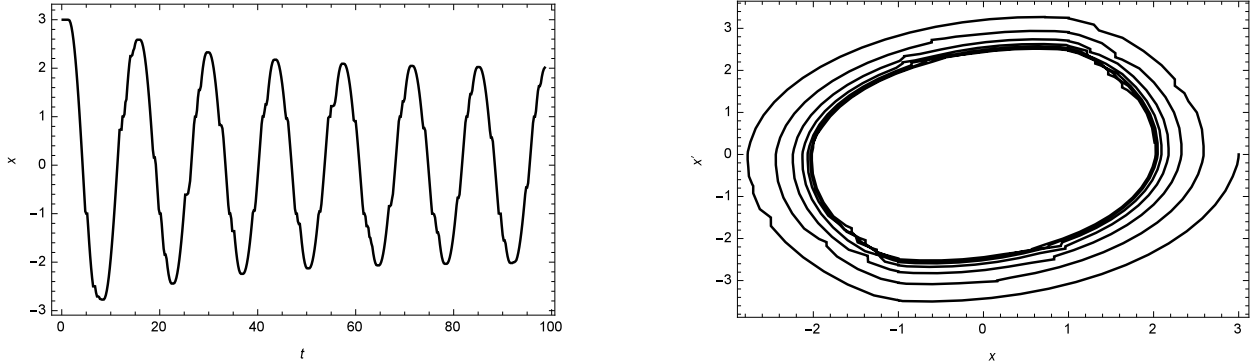


Рис. 2.4. Колебания в системе(2.21) при $\eta = 0.5$.

Как видно из представленных результатов, гармонический осциллятор с сухим и вязким трением, находящийся под воздействием гистерезисной внешней силы существенно отличается от классической модели гармонического осциллятора, где в независимости от начальных условий, система совершает затухающие колебания около положения равновесия.

2.3 “Захват” частоты в системе с релейной нелинейностью: метод малого параметра

Синхронизация периодических автоколебаний гармонической внешней силой давно изученное явление, сформулировать которое можно следующим образом. Как только частота внешнего воздействия становится близка к частоте свободных автоколебаний, происходит синхронизация (“захват”) частоты. Рассмотрим автоколебательную систему с одной степенью свободы, находящейся под воздействием периодической внешней силы с частотой ω , которая близка к частоте свободных автоколебаний.

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = R[\alpha, \beta, \omega_r]x + B_1 \sin \omega t. \quad (2.23)$$

Для анализа динамических особенностей такой системы используется метод малого параметра, позволяющий провести идентификацию процесса “захвата” частоты внешнего гармонического воздействия автономной системой с гистерезисом. Для этого перепишем исходное уравнение в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon (-2b\dot{x} + R[\alpha, \beta, \omega_r]x + B_1 \sin \omega t), \quad (2.24)$$

где ε – малый параметр. Решение уравнения будем искать в следующем виде:

$$x = A \cos \psi + \varepsilon u_1(A, \psi) + \dots, \quad (2.25)$$

где $\psi = \omega t + \varphi(t)$, а $u_1(A, \psi)$ – неизвестные функции, не содержащие резонансных слагаемых. A и φ – амплитуда и фаза колебаний, соответственно, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A, \varphi) + \dots; \quad \dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon F_1(A, \varphi) + \dots, \quad (2.26)$$

а $\Delta = \omega - \omega_0$ – расстройка частоты. F_1, f_1 – неизвестные функции, которые подлежат определению из условия отсутствия резонансных слагаемых в функции u_1 . Подставляя общий вид решения в исходное уравнение, с учетом уравнений для амплитуды и фазы колебаний. Используя описанные

определения найдем \dot{x} и \ddot{x} :

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \dot{\psi} + \varepsilon \dot{u}_1 \omega; \quad (2.27)$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} \cos \psi - 2\dot{A} \sin \psi \dot{\psi} - A \cos \psi \dot{\psi}^2 - A \sin \psi \ddot{\psi} + \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2. \quad (2.28)$$

Подставим полученные выражения в левую часть уравнения (2.24), а также используем уравнения (2.26):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \ddot{A} \cos \psi - 2\dot{A} \sin \psi \dot{\psi} - A \cos \psi \dot{\psi}^2 - A \sin \psi \ddot{\psi} + \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2 + \\ &+ \omega_0^2 A \cos \psi + \omega_0^2 \varepsilon u_1 = \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2 + \omega_0^2 \varepsilon u_1 - \left(2\dot{A} \dot{\psi} + A \ddot{\psi} \right) \sin \psi + \\ &+ \left(\ddot{A} - A \dot{\psi}^2 + \omega_0^2 A \right) \cos \psi = \quad (2.29) \\ &= \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2 + \omega_0^2 \varepsilon u_1 - \left(2\varepsilon f_1 (-\Delta + \varepsilon F_1) + A(-\Delta + \varepsilon F_1) \right) \sin \psi + \\ &+ \left(\varepsilon \dot{f}_1 - A(-\Delta + \varepsilon F_1)^2 + \omega_0^2 A \right) \cos \psi; \end{aligned}$$

Для правой части уравнения (2.24) аналогично получим:

$$\begin{aligned} &\varepsilon (-2b\dot{x} + R[\alpha, \beta, \omega_r]x + f(t)) = \\ &= \varepsilon \left(R[\alpha, \beta, \omega_r]x - 2b \left(\dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \dot{\psi} + \varepsilon u_1 \omega \right) + f(t) \right) = \\ &= \varepsilon (R[\alpha, \beta, \omega_r]x - 2b\varepsilon f_1 \cos \psi + 2bA(-\Delta + \varepsilon F_1) \sin \psi + \varepsilon u_1 \omega + f(t)). \quad (2.30) \end{aligned}$$

приравнявая в правой и левой частях слагаемые одного порядка малости, получаем уравнение для определения неизвестной функции u_1 :

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_1 &= \left(2\omega_0 f_1 - A \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \Delta \right) \sin \psi + \left(2\omega_0 A F_1 - A \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \Delta \right) \cos \psi - \\ &- AR[\alpha, \beta, \omega_r]x \cos \psi + f(t). \quad (2.31) \end{aligned}$$

Из условия отсутствия резонансных членов в функции $u_1(A, \psi)$ (равенство нулю множителей при гармонических функциях) получим следующие уравнения для неизвестных функций F_1, f_1 :

$$2f_1 - A \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = -2\beta A - \frac{B_1}{\omega} \sin \varphi, \quad 2AF_1 + \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = AR[\alpha, \beta, \omega_r]x - \frac{B_1}{\omega} \cos \varphi. \quad (2.32)$$

Частное решение такой системы имеет вид:

$$f_1 = -\beta A - \frac{B_1 \sin \varphi}{\omega + \omega_0}, F_1 = \frac{R[\alpha, \beta, \omega_r]x}{2} - \frac{B_1 \cos \varphi}{A(\omega + \omega_0)}. \quad (2.33)$$

Тогда в первом приближении по ε из (2.33) и (2.26), а также с учетом условия $u_1(A, \psi) = 0$ будем иметь:

$$\dot{A} = -\beta A - \frac{B_1 \sin \varphi}{\omega + \omega_0}, \dot{\varphi} = -\Delta + \frac{R[\alpha, \beta, \omega_r]x}{2} - \frac{B_1 \cos \varphi}{A(\omega + \omega_0)}. \quad (2.34)$$

Численные значения амплитуды и фазы представлены на рисунке 2.5.

Амплитуда и фаза колебаний, а также амплитудно-фазовый портрет пред-



Рис. 2.5. Амплитуда и фаза колебаний.

ставлен на рисунках 2.5,2.6. Для амплитудно-фазового портрета системы (2.34) характерно сложное поведение, с множеством самопересечений.

На рисунке 2.7 представлено численное решение системы (2.23) совместно

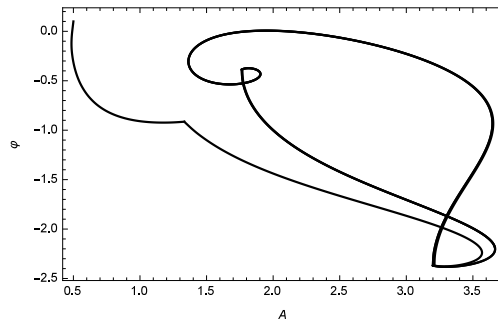


Рис. 2.6. Амплитудно-фазовая характеристика уравнения(2.34).

с графиком возмущающей силы, а также поведением системы без внешнего воздействия. Как следует из представленных численных результатов, при

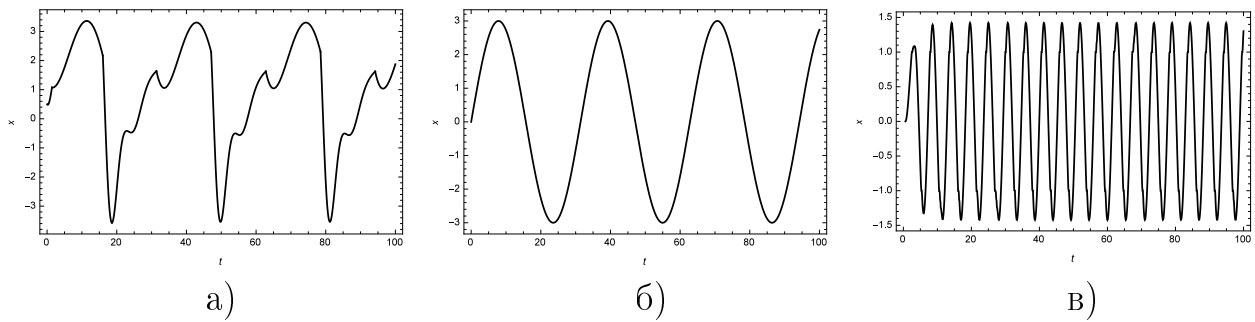


Рис. 2.7. а) Численное решение исходной системы (2.23); б) Возмущающая сила; в) Поведение системы без внешнего возмущения.

“переключения” неидеального реле график решения перестает быть гладкой функцией. Анализируя полученное решение, можно отметить, что помимо основных гармоник оно содержит и гармоники меньшей амплитуды. Для наглядности синхронизации периодических автоколебаний отдельно приведем график, отражающий внешнее возмущение, а также график поведения системы (2.23) без внешнего воздействия.

Отметим, что явление синхронизации частоты свободных автоколебаний с частотой внешнего воздействия осуществимо и для систем содержащих гистерезисную нелинейность. С ростом амплитуды внешнего воздействия происходит увеличение интервала частоты (Δ), при котором происходит “захват”. Рисунок 2.8 отражает зависимости амплитуды внешней силы от частоты периодического воздействия, при которой происходит “захват” внешних частот системой.

2.4 Хаос и регулярная динамика осциллятора в системах с гистерезисным блоком

Рассмотрим математическую модель, состоящую из операторно-дифференциальных соотношений. Ее прототипом является реальная система, а именно, железный маятник с демпфированием находящийся в магнитном поле. Правая часть уравнения, описывающего модель, содержит гистерезисную нелинейность, представленную оператором Преисаха.

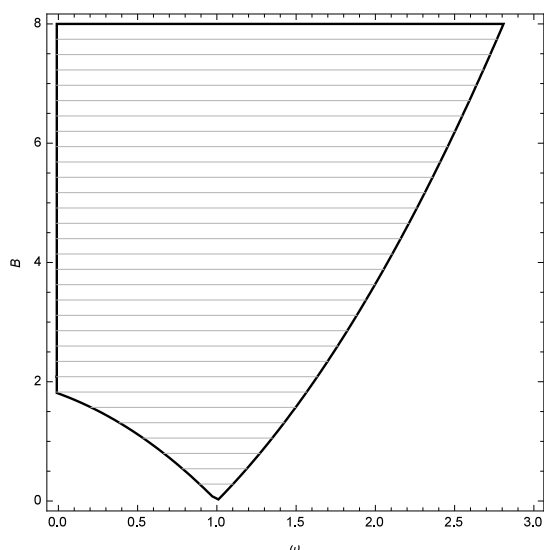


Рис. 2.8. Область захвата частоты.

В процессе компьютерного моделирования проводится исследование указанной механической системы от различных параметров, устанавливаются значения параметров позволяющих регуляризовать поведение системы, а также проводится тест на хаос 0-1 [73, 74].

Указанный тест позволяет различить регулярную: периодическую или квазипериодическую динамику от хаотической динамики. Алгоритм работает непосредственно с временными рядами и не требует реконструкции фазового пространства. Благодаря этому использование теста возможно для анализа различных дифференциальных уравнений, а также временных рядов в реальном мире. Тест основан на следующем алгоритме: на вход программы подается временной ряд, а выходом является некоторое значение принадлежащие интервалу $[0, 1]$, где 1 - соответствует хаотическом поведению в системе, 0 - регулярной динамике. Многие эффекты в механике, теории пластичности, экономике и т.д. качественно моделируются гистерезисными нелинейностями, в частности при помощи модели Прейссаха, подробно описание, которой было дано в [7, 8]. В то время как возникновение гистерезисного поведения в различных динамических системах изучено довольно хорошо, исследований, посвященных рассмотрению систем, в которых гистерезисные блоки входят в состав внешнего вынуждающего воздействия значительно меньше. В разделе расширены результаты

исследований, приведенных в работе [51]. Более подробно рассматривалась динамика механической системы с вязким трением под воздействием периодической силы и гистерезисного блока формализованного моделью Прейсаха. Так как оператор Прейсаха является континуальным аналогом преобразователя, состоящего из семейства неидеальных реле соединенных параллельно, то было проведено исследование зависимости результатов моделирования от числа реле. Были построены бифуркационные диаграммы и определены интервалы, отвечающие различным динамическим режимам системы.

2.4.1 Влияние гистерезисного блока

Математическая модель осциллятора с малым вязким трением и гистерезисным звеном, под воздействием гармонической силы описывается при помощи следующего уравнения с соответствующими начальными условиями.

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t + Ey(t). \quad (2.35)$$

Гистерезисная нелинейность в уравнении $y(t)$ - это оператор Прейсаха, удовлетворяющий соотношению:

$$y(t) = y[t_0, \eta_0](t) = \int_{\Omega} R^{\omega}[t_0, \eta_0(\omega)]x(t)d\mu, t \geq t_0, \quad (2.36)$$

где $y(t)$ является выходом, а $x(t)$ входом. Подробное описание преобразователя приведено в главе 1.

В работе [51] было проведено исследование поведения осциллятора, динамика которого описывается уравнением (2.35). Было установлено, что в варьирование параметра E существенным образом влияет на поведение осциллятора. А именно, при значении параметра $E = 1.1$ осциллятор совершает регулярные колебания, а при значении $E = 1.6$ наблюдается хаотическое движение. Описанные в статье результаты представляют значительный интерес с точки зрения возможности управления хаотической динамики в системах с гистерезисными блоками, поэтому основываясь на

уже имеющихся результатах, было проведено более подробное исследование уравнения (2.35).

Гистерезисный блок представлен оператором Прейсаха, который является континуальным аналогом преобразователя, состоящего из семейства неидеальных реле соединенных параллельно. Поэтому возникает необходимость исследовать зависимость поведения системы, от количества реле входящих в модель. Программная реализация алгоритма была проведена в программе MATLAB. Пороговые значения гистерезисного блока принадлежат интервалу от $[-1, 1]$, а шаг дискретизации задается непосредственно в алгоритме. На данном этапе возникает особенность: при изменении шага дискретизации последовательно, например 1, 0.9, 0.8, количество реле остается неизменным. Связано это с особенностью алгоритма, а именно с тем, что модель устроена так, что при выборе разной дискретизации, например, $h = 1$ и $h = 0.7$, площадь треугольника заполняется тем же количеством реле, но сдвинутом в пространстве состояний (рис. 2.9а). Поэтому для проведения исследования, были подобраны наборы значений, так, чтобы их меньшее множество было подмножеством большего (рис. 2.9б). Было уста-

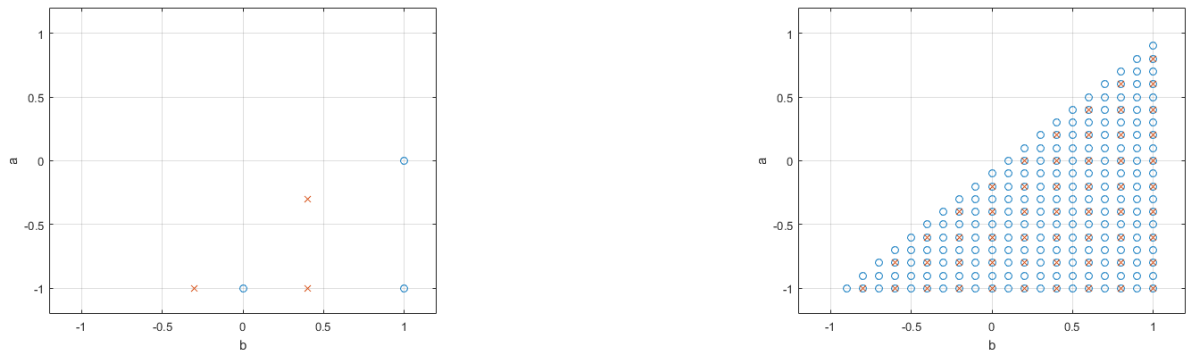


Рис. 2.9. Заполнение пространства состояний оператора Прейсаха при различном шаге дискретизации а) $h = 1$ и $h = 0.7$ б) $h = 0.1$ и $h = 0.2$

новлено, что при значении параметра $E = 1.6$ - соответствующем хаотическому поведению системы, значительное уменьшение шага дискретизации, в 100 раз, не приводит к регуляризации в системе. При рассмотрении случая $E = 1.1$ - соответствующем регулярным колебаниям, увеличение шага

дискретизации в 5 раз, приводит к появлению хаотической динамики в поведении осциллятора (2.35).

Ниже приведем бифуркационную диаграмму в зависимости от параметра E . Рис. 2.10 отражает сложное поведение в уравнении (2.35). Оче-

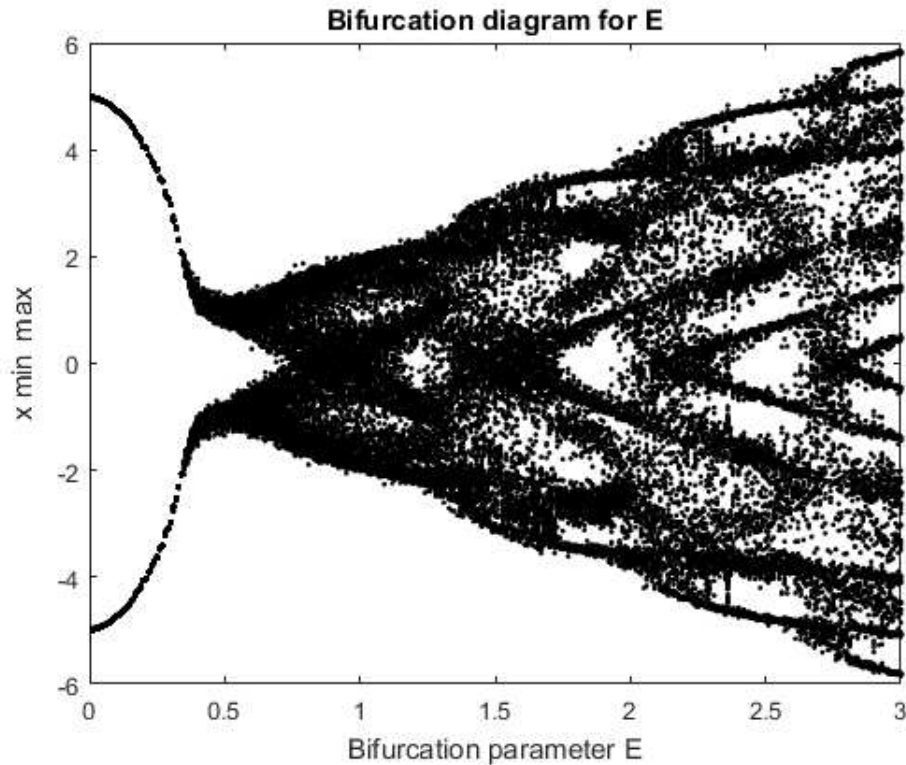


Рис. 2.10. Бифуркационная диаграмма для уравнения (1) в зависимости от параметра E при $A = 0.5$, $\gamma = 0.1$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$

видно, что с увеличением параметра E , динамика осциллятора из регулярной переходит в хаотическую. Для подтверждения данного предположения был проведен тест 0-1 на хаос. Как отмечалось ранее, данный тест, в отличие от показателей Ляпунова, не требует восстановления пространства состояний. На вход алгоритма подается временной ряд, выход представлен одним значением: 1 - соответствует хаотическому поведению в системе, 0 - регулярной динамике. Отметим, что фактически алгоритм выдает некое значение, лежащее в интервале от 0 до 1. Так при фиксированном наборе параметров $A = 0.5$, $\gamma = 0.1$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$ и $E = 1.1$ было получено 0.1860, а при $E = 1.6$ - 0.9849 .

2.4.2 Динамика осциллятора в зависимости от параметров модели

Для дальнейшего рассмотрения построим бифуркационные диаграммы для осциллятора (2.35) в зависимости от различных параметров системы. Исследование динамических режимов, отраженных на диаграммах в зависимости от параметров A и ω , показало, что варьирование лишь одного из них не позволяет регуляризовать поведение осциллятора. При этом изменение γ существенным образом влияет на динамику уравнения. Приведем бифуркационные диаграммы для уравнения (2.35) в зависимости от значения параметра вязкого трения γ для $E = 1.1$ и $E = 1.6$. Анализ

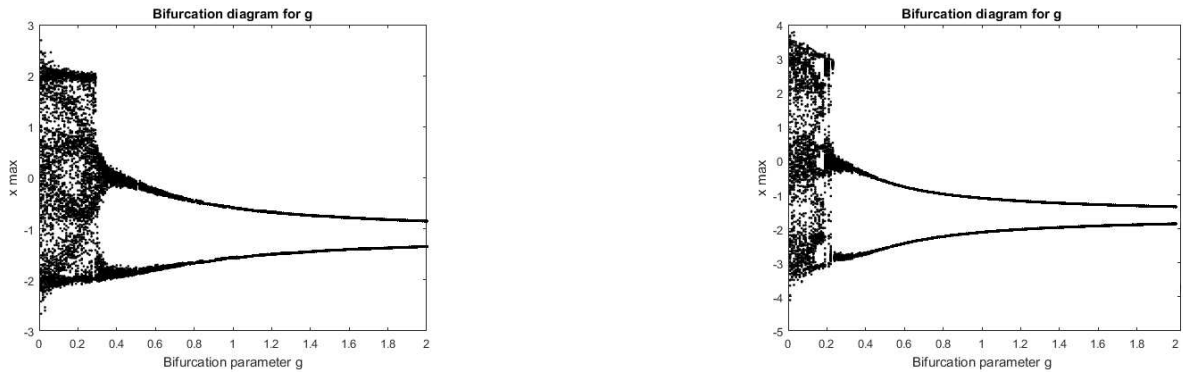


Рис. 2.11. Бифуркационная диаграмма для уравнения (2.35) в зависимости от параметра γ при $A = 0.5$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.1$ (слева) и $E = 1.6$ (справа)

графиков на рис. 2.11 показывает, что при $\gamma \approx 0.2$ происходит изменение в характере движения осциллятора (2.35). Для того, чтобы отследить при каком именно значении параметра γ в системе начинают наблюдаться регулярные колебания приведем спектральные характеристики уравнения (2.35).

В таблице 2.1 приведем значения теста 0-1 на хаос при значениях параметров уравнения (2.35) отраженных на рис. 2.12 и 2.13. Так как даже при регулярном режиме движения, колебания в системе носят сложный (двух или трехчастотный характер), то получаемые значения теста 0-1 су-

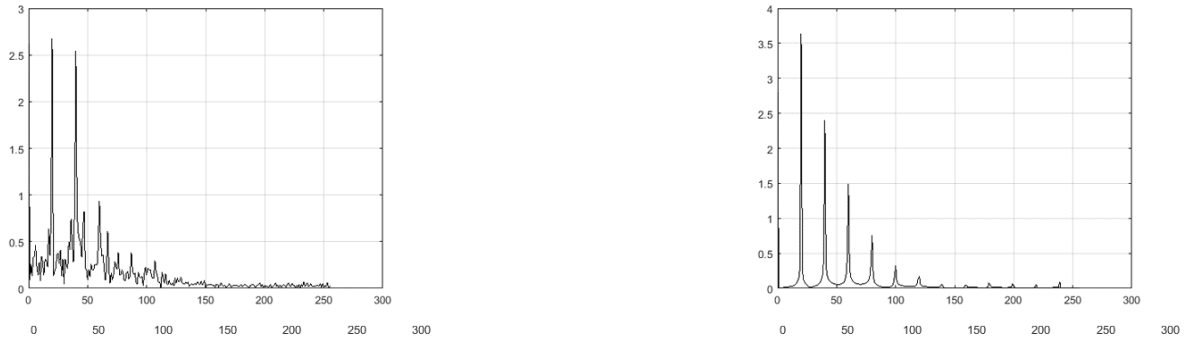


Рис. 2.12. Спектральные характеристики для уравнения (2.35) при $A = 0.5$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.1$, $\gamma = 0.22$ (слева) и $\gamma = 0.25$ (справа)

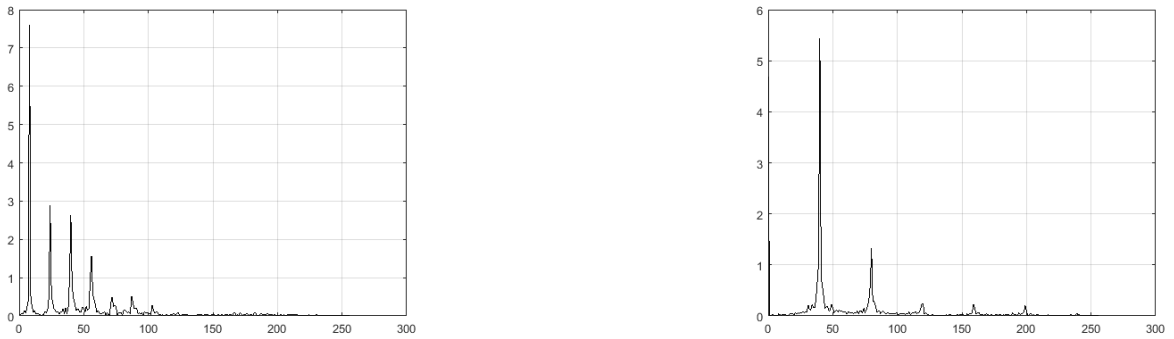


Рис. 2.13. Спектральные характеристики для уравнения (2.35) при $A = 0.5$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.6$, $\gamma = 0.17$ (слева) и $\gamma = 0.22$ (справа)

щественно отличаются от 0. Из указанных результатов видно, что при заданных значениях, а именно $A = 0.5$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, увеличение вязкого трения γ , приводит к регуляризации поведения в системе.

2.4.3 Влияние амплитуды вынуждающего воздействия

Исследуем влияние параметра A на поведение осциллятора (2.35), ниже приведены бифуркационные диаграммы при значениях параметров $\gamma = 0.1$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.1$ и $E = 1.6$. Отметим существенное влияние амплитуды вынуждающей силы на поведение осциллятора. Поведения осциллятора рассматривается при двух значениях параметра $E = 1.1$

Таблица 2.1. Значения теста 0-1

Значения параметров системы	Параметр вязкого трения	Показатель теста 0-1
$A = 0.5, \omega_0^2 = 1, \omega = 1, E = 1.1$	$\gamma = 0.22$	0.9631
$A = 0.5, \omega_0^2 = 1, \omega = 1, E = 1.1$	$\gamma = 0.25$	0.2399
$A = 0.5, \omega_0^2 = 1, \omega = 1, E = 1.6$	$\gamma = 0.17$	0.4200
$A = 0.5, \omega_0^2 = 1, \omega = 1, E = 1.6$	$\gamma = 0.22$	0.2494

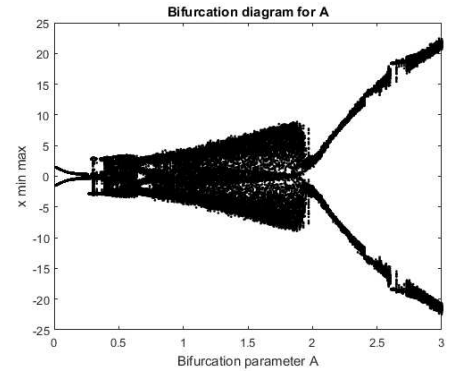
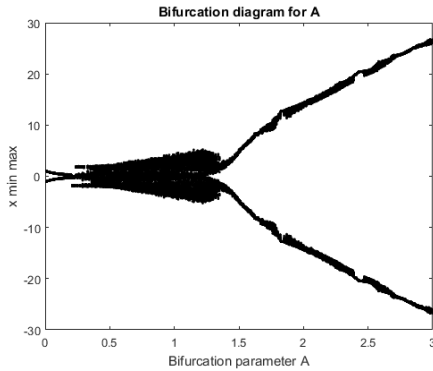


Рис. 2.14. Бифуркационная диаграмма для уравнения (2.35) в зависимости от параметра A при $\gamma = 0.1, \omega_0^2 = 1, \omega = 1, E = 1.1$ (слева) и $E = 1.6$ (справа)

и $E = 1.6$. Если $E = 1.1$, то в уравнении (2.35) происходят регулярные колебания при $A \leq 0.5$ и $A \geq 1.35$, а в интервале $A \in (0.5, 1.35)$ наблюдается хаотическое поведение. Регулярному движению при $E = 1.6$ соответствуют интервалы $A \leq 0.37$ и $A \geq 1.99$. Отметим, что при значениях $A \in [0.69, 0.82]$ движения осциллятора (2.35) будут квазипериодическим: трех или четырехчастотным в зависимости от параметра. Хаотическое поведение наблюдается при $A \in (0.37, 0.69)$ и $A \in (0.82, 1.78)$. Так как в рассматриваемом уравнении присутствует трение, а частота вынуждающей силы, близка к частоте собственных колебаний, то при $A \in [1.78, 1.99)$ в системе наблюдаются биения, при этом их период возрастает с увеличением параметра A . Ниже приведены графики, иллюстрирующие описанные результаты.

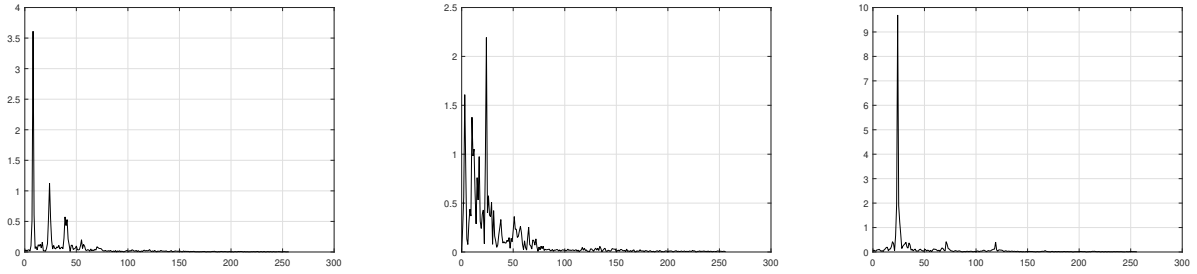


Рис. 2.15. Спектральные характеристики для уравнения (2.35) при $\gamma = 0.1$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.1$, $A = 0.2$ (слева), $A = 0.5$ (по центру) и $A = 0.7$ (справа)

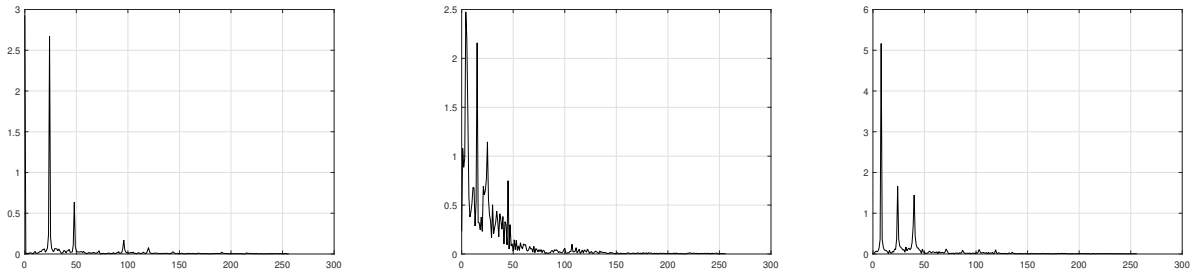


Рис. 2.16. Спектральные характеристики для уравнения (2.35) при $\gamma = 0.1$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.6$, $A = 0.2$ (слева), $A = 0.5$ (по центру) и $A = 0.7$ (справа)

Ранее было рассмотрено влияние параметра γ на динамику уравнения (2.35) и установлены значения, при которых в осцилляторе происходит переход из хаотического состояния к регулярному. Ниже исследуем, возможно ли посредством изменения амплитуды вынуждающего воздействия регуляризовать поведение осциллятора. Для этого рассмотрим динамику осциллятора (2.35) при значении параметра $\gamma = 0.22$. Спектральная характеристика для двух наборов параметров: $A = 0.5$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $\gamma = 0.22$, $E = 1.1$ и $E = 1.6$ приведена на рисунках 2.12а и 2.13б соответственно. В таблице 1 приведены значения теста 0-1 на хаос, показывающего, что при $E = 1.1$ наблюдаются хаотические, а при $E = 1.6$ регулярные колебания. Отметим, что аналогичные значения, за исключением γ , рас-

сматривались ранее, и было установлено обратное соответствие. В не зависимости от значения E , при малых значениях амплитуды вынуждающего воздействия $A < 0.5$ в уравнении (2.35) наблюдается регулярное движение. Приведем ряд графиков подтверждающих описанные результаты. При по-

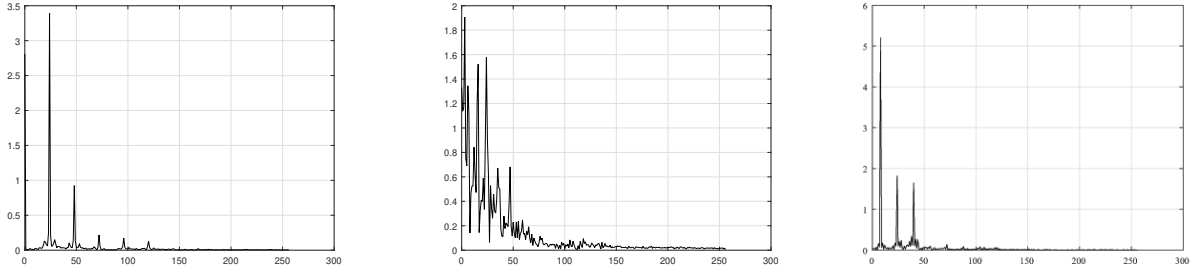


Рис. 2.17. Спектральные характеристики для уравнения (2.35) при $\gamma = 0.22$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.6$, $A = 0.5$ (слева), $A = 0.6$ (по центру) и $A = 0.8$ (справа)

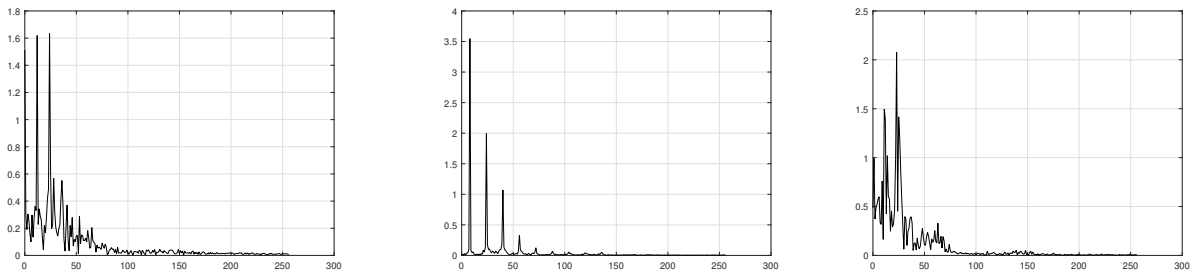


Рис. 2.18. Спектральные характеристики для уравнения (2.35) при $\gamma = 0.22$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.1$, $A = 0.5$ (слева), $A = 0.6$ (по центру) и $A = 0.8$ (справа)

строении численного решения уравнения (2.35) для параметров $\gamma = 0.22$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.1$ было установлено, что при $A = 0.5$ наблюдается хаотическое движение. Если $A \in [0.55, 0.64]$ движение осциллятора будет трехчастотных, но при этом регулярным. Дальнейшее увеличение амплитуды вынуждающего воздействия до 1 приведет к хаотическому движению в системе, однако после опять будут наблюдаться интервалы, при которых происходит регуляризация поведения в системе. Рассмотрим решения при

следующем наборе параметров $\gamma = 0.22$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, $E = 1.6$, аналогично с предыдущим вариантом, увеличение параметра A приведет к чередованию интервалов значений, которым соответствует то регулярная, то хаотическая динамика. Как только $A \geq 1.37$, то при $E = 1.1$ в осцилляторе (2.35) наблюдаются регулярные колебания, для случая, когда параметр $E = 1.6$, регуляризация в системы происходит при $A \geq 1.98$.

Выводы

В данной главе

- Изучены резонансные свойства автономных систем, в которых "подкачка" энергии обусловлена наличием звена с гистерезисными свойствами.
- Исследованы неограниченные решения дифференциальных уравнений отвечающих автономным системам, содержащими гистерезисные звенья с инверсией пороговых чисел.
- Рассмотрены случаи сухого и вязкого трения и установлено возникновение автоколебательных режимов.
- Исследована задача о "захвате" частоты внешнего гармонического воздействия для систем с функциональными нелинейностями. Показано, что полоса "захвата" однозначно зависит от амплитуды внешнего воздействия.
- Для математической модели гармонического осциллятора с вязким трением под воздействием периодической силы и гистерезисного блока формализованного моделью Прейсаха, проведен тест на хаос 0-1, позволяющий определить динамические режимы системы.
- Было показано, что построенная математическая модель отражает и хаотические, и регулярные режимы поведения. Варьирование пара-

метра перед гистерезисным блоком, позволяет регуляризовать поведение в системе.

Глава 3

Динамика

ГИСТЕРЕЗИСНО-СВЯЗАННЫХ

ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Ван-дер-Поля

Число примеров автоколебательных систем, поведение которых моделируется при помощи осциллятора Ван-дер-Поля, достаточно велико – различные системы в радиотехнике, такие триодный генератор и генератор на туннельном диоде, моделирование динамики кардиоритмов [26], а также разнообразные приложения в робототехнике, в частности, модели поворачивающегося робота [85]. Системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля вполне успешно применялись для анализа сложных систем, в том числе и с распределенными параметрами, таких как тропические циклоны, где было использовано свойство осцилляторов генерировать автоколебательные режимы. Это же свойство было использовано при описании ионизационных волн, а также в широком спектре задач, связанных с построением процессов, протекающих в человеческом организме. При этом в качестве основного метода исследования полученной системы использовался метод основанный на переходе к укороченным уравнениям (их часто называют

уравнениями Ландау–Стюарта). Такой подход возможен, когда управляющий параметр, величина связи и частотная расстройка осцилляторов являются малыми. В этом случае становится возможным применение метода медленно меняющихся амплитуд.

Одним из фундаментальных свойств нелинейных систем является синхронизация, т.е. установление определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний систем в результате их взаимодействия. Отметим работы, посвященные классической теории синхронизации периодических автоколебаний [4], а также работы, посвященные синхронизации квазипериодических колебаний [2, 5].

В рамках классической теории различают вынужденную синхронизацию, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и взаимную синхронизацию, наблюдающуюся при взаимодействии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот колебаний или же появлением одной из двух независимых частот.

Гистерезисные преобразователи в управляющих элементах рассматривались в работах [86–88], в качестве составляющих колебательных систем в [89, 90]. Отметим, что при описании моделей гистерезиса традиционно используются два подхода: первый из них основан на операторной трактовке в терминах преобразователей с пространством состояний и входно-выходными соответствиями [7], второй основан на феноменологическом подходе, в котором гистерезисная петля описывается посредством дифференциальных и алгебраических соотношений – наиболее популярной в этом смысле является модель Боука-Вена. Материал, изложенный в настоящей главе подробно представлен в работах [91–101].

Глава организована следующим образом. В разделе 3.1 описывается математическая модель осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном в контуре обратной связи. Исследуются динамические режимы осциллятора, а также рассматривается синхронизация собственных колебаний осциллятора с частотой вынуждающей силы. Предложен алгоритм чис-

ленного расчета ляпуновских показателей для систем с гистерезисными нелинейностями.

Раздел 3.2 посвящен изучению системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. Посредством метода малого параметра находится аналитическое решение системы, а также исследуется внешняя и внутренняя синхронизация осцилляторов системы. В разделе 3.3 рассматривается система перекрестно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком.

3.1 Динамика осциллятора Ван-дер-Поля с внешним воздействием гистерезисной природы

Явление синхронизации автоколебательных систем внешней периодической силой, т.е. вынужденная синхронизация впервые была описана Ван-дер-Полем и Е. Эплтоном.

Следуя классическим методам исследования осциллятора Ван-дер-Поля, основанных на идеях метода малого параметра, приведем необходимые для дальнейшего изложения результаты [5]. Для этого запишем уравнение Ван-дер-Поля в следующем виде:

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 B \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

Для идентификации процесса синхронизации собственных колебаний системы с внешним гармоническим воздействием, формально введем в это уравнение малый параметр ε :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon (\omega_0^2 B \cos(\omega t) + \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x}), \quad (3.2)$$

Решение уравнения будет представлено в виде:

$$x = A \cos \psi + \varepsilon u_1(A, \psi) + \dots, \quad (3.3)$$

где $\psi = \omega t + \varphi(t)$, а $u_1(A, \psi)$ – неизвестные функции, не содержащие резонансных слагаемых. A и φ – амплитуда и фаза колебаний, соответственно,

удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A, \varphi) + \dots; \dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon F_1(A, \varphi) + \dots, \quad (3.4)$$

где $\Delta = \omega - \omega_0$ - расстройка частоты, F_1, f_1 - неизвестные функции, которые подлежат определению из условия отсутствия резонансных слагаемых в функции u_1 .

Подставляя общий вид решения в исходное уравнение, запишем усредненные по времени уравнения для амплитуды и фазы колебаний, где $A_0 = 2/\sqrt{\alpha}$ - амплитуда свободных автоколебаний.

$$\dot{A} = -\frac{\omega_0 B}{2} \sin \varphi + \frac{\mu}{2} A \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right), \dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega_0 B}{2A} \cos \varphi. \quad (3.5)$$

В синхронном режиме можно положить $\dot{A} = 0, \dot{\varphi} = 0$, исключая из полученных при этом уравнений φ , найдем уравнение для определения A :

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4 \frac{\Delta^2}{\mu^2} \right) \frac{A^2}{A_0^2} = b^2. \quad (3.6)$$

где $b = \frac{\omega_0 B}{A_0}$.

В следующих разделах будет проведен сравнительный анализ результатов справедливых для классического уравнения Ван-дер-Поля с результатами, полученными для уравнения, содержащего гистерезисное звено.

3.1.1 Осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном в контуре обратной связи

Рассмотрим математическую модель осциллятора Ван-дер-Поля содержащую в правой части помимо внешнего гармонического воздействия, гистерезисный блок, формализованный посредством феноменологической модели Боука-Вена. В работе [75] было показано, что включение гистерезисного звена в правую часть аналогичных систем существенным образом

влияет на их динамические особенности. Это объясняется в первую очередь тем, что выход гистерезисного преобразователя (как в рамках конструктивного, так и феноменологического представления) зависит не только от входа в настоящий момент времени, но и от всей его предыстории.

Модель Боука-Вена определяется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \Phi_{BW}(x, t) = \alpha x(t) + (1 - \alpha)z(t), \\ \dot{z}(t) = A_1 \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) - \gamma \dot{x}(t) |z(t)|^n. \end{cases} \quad (3.7)$$

Осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном будет формализован при помощи уравнения:

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega t) + \Phi_{BW}(x, t) \quad (3.8)$$

Для дальнейшего исследования перепишем уравнение (3.8) в виде:

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = G(t) \quad (3.9)$$

где $F(t) = A \cos(\omega t) + \Phi_{BW}(x, t)$.

Повторив рассуждения, приведенные для уравнения (3.1), получив систему для определения усредненных по времени уравнений для амплитуды и фазы колебаний.

$$\begin{cases} 2f_1 - A \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = -F_{sin}(t) + \mu A \Delta \left(1 - \frac{A^2 \alpha}{4}\right), \\ 2AF_1 + \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -F_{cos}(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

где $F_{sin}(t)$ и $F_{cos}(t)$ - первые гармоники разложение в ряд Фурье $F(t)$. Воспользовавшись условием, что гистерезисный оператор Боука-Вена применен исключительно к нулевому решению $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, первую гармонику разложение в ряд Фурье выхода оператора Боука-Вена можно представить следующим образом:

$$\Phi_{BW}(A \cos(\omega t + \varphi)) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi \quad (3.11)$$

так как $a_0/2 = 0$, то $F_{sin}(t)$ и $F_{cos}(t)$ принимают вид:

$$F_{sin}(t) = \omega_0^2 B \sin \varphi + b_1 \sin \varphi, F_{cos}(t) = \omega_0^2 B \cos \varphi + a_1 \cos \varphi. \quad (3.12)$$

Вернемся к уравнениям (3.10) и с учетом (3.12), запишем уравнения для определения амплитуды и фазы колебаний.

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{\omega_0^2 B + b_1}{2\omega_0} \sin \varphi + \frac{\mu}{2} A \left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right), \\ \dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega_0^2 B + a_1}{2\omega_0 A} \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.13)$$

В синхронном режиме полагая $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ и исключая из полученных при этом уравнений φ , найдем уравнение для определения A :

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4 \frac{\Delta^2 (\omega_0^2 B + b_1)^2}{\mu^2 (\omega_0^2 B + a_1)^2} \right) \frac{A^2}{A_0^2} = \alpha \frac{(\omega_0^2 B + b_1)^2}{4\omega_0^2 \mu^2}. \quad (3.14)$$

Для нахождения значений коэффициентов при разложении в ряд Фурье a_1 и b_1 , воспользуемся методом гармонического баланса.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi_{BW}(A \cos(\omega t + \varphi)) \cos(\omega t + \varphi) dt; \\ b_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi_{BW}(A \cos(\omega t + \varphi)) \sin(\omega t + \varphi) dt; \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если в системе (3.7) коэффициент $\alpha = 0$, то в первом уравнении остается только гистерезисная составляющая. Второе уравнение системы перепишем в виде:

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) (A_1 - [\beta \text{sign}(\dot{x}(t)z(t)) + \gamma] |z(t)|^n). \quad (3.16)$$

В общем случае получить аналитическое представление, даже для первого приближения, крайне затруднительно. Далее будут рассмотрены три набора параметров, соответствующих различным параметрам модели Боука-Вена.

В первом случае положим $A_1 = 1$ и $n = 1$. Определим вход как $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, и выход как $z(t) = b \cos(\omega t + \varphi)$.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ (1 - [\beta \text{sign}(-A\omega \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)) + \gamma] |b \cos(\omega t + \varphi)|) & \end{aligned} \quad (3.17)$$

Умножим на $\sin(\omega t + \varphi)$ левую и правую часть уравнения (3.17) и проинтегрируем их по периоду.

$$\int_0^{2\pi/\omega} \dot{z}(t) \sin(\omega t + \varphi) dt = \int_0^{2\pi/\omega} -A\omega \sin^2(\omega t + \varphi) (1 - [\beta \text{sign}(-A\omega \sin(\omega t + \varphi) b \cos(\omega t + \varphi)) + \gamma] |b \cos(\omega t + \varphi)|) dt \quad (3.18)$$

Вычислив интегралы, получим соотношение:

$$-b\pi = -A\pi + \frac{4Ab}{3} (\beta \sin^3 \varphi + \gamma \cos^3 \varphi) \quad (3.19)$$

Откуда b :

$$b = \frac{3A\pi}{4A (\beta \sin^3 \varphi + \gamma \cos^3 \varphi) + 3\pi} \quad (3.20)$$

Следовательно, первое приближение выхода гистерезисного преобразователя принимает значение:

$$z(t) = \frac{3A\pi}{4A (\beta \sin^3 \varphi + \gamma \cos^3 \varphi) + 3\pi} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.21)$$

Вернемся к уравнениям (3.15), и определим коэффициенты a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{3A\pi}{4A (\beta \sin^3 \varphi + \gamma \cos^3 \varphi) + 3\pi} \cos^2(\omega t + \varphi) dt; \\ b_1 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{3A\pi}{4A (\beta \sin^3 \varphi + \gamma \cos^3 \varphi) + 3\pi} \sin 2(\omega t + \varphi) dt; \end{aligned} \quad (3.22)$$

Интегрируя эти выражения, получим:

$$a_1 = \frac{3A\pi}{4A (\beta \sin^3 \varphi + \gamma \cos^3 \varphi) + 3\pi}; b_1 = 0; \quad (3.23)$$

Выполним подстановку в уравнение (3.14) и тогда зависимость амплитуды решения от амплитуды внешнего воздействия будет определяться

соотношением вида:

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right)^2 + 4 \frac{\Delta^2}{\mu^2} \frac{(\omega_0^2 B)^2}{\left(\omega_0^2 B + \left(\frac{3A\pi}{4A(\beta \sin^3 \varphi + \gamma \cos^3 \varphi) + 3\pi} \right)^2 \right)} \right) \frac{A^2}{A_0^2} = \alpha \frac{\omega_0^4 B^2}{4\mu^2}. \quad (3.24)$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда параметр $n = 2$ в уравнении (3.16).

$$\dot{z}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) (1 - [\beta \text{sign}(-A\omega \sin(\omega t + \varphi)) b \cos(\omega t + \varphi)] + \gamma) |b \cos(\omega t + \varphi)|^2. \quad (3.25)$$

Выполнив аналогичные с (3.18-3.20) преобразования получим уравнение для определения b вида:

$$b^2 + \frac{4}{\gamma A} b - \frac{4}{\gamma} = 0 \quad (3.26)$$

Положительный корень уравнения (3.26) равен:

$$b = \frac{2}{A\gamma} \left(-1 + \sqrt{1 + A^2 \gamma} \right) \quad (3.27)$$

а коэффициенты a_1 и b_1 :

$$a_1 = \frac{2}{A\gamma} \left(-1 + \sqrt{1 + A^2 \gamma} \right), b_1 = 0. \quad (3.28)$$

Подставим в уравнение (3.14) и получим зависимость амплитуды решения от амплитуды внешнего воздействия вида:

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right)^2 + 4 \frac{\Delta^2}{\mu^2} \frac{(\omega_0^2 B)^2}{\left(\omega_0^2 B + \frac{2}{A\gamma} \left(-1 + \sqrt{1 + A^2 \gamma} \right) \right)^2} \right) \frac{A^2}{A_0^2} = \alpha \frac{\omega_0^4 B^2}{4\mu^2}. \quad (3.29)$$

Так как степень n в модели Боука-Вена не обязательно целое число, то необходимо рассмотреть случай, когда n принимает дробные значения.

Перепишем уравнение (3.16) для случая $n = 3/2$.

$$\dot{z}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \left(1 - [\beta \operatorname{sign}(-A\omega \sin(\omega t + \varphi)b \cos(\omega t + \varphi)) + \gamma] |b \cos(\omega t + \varphi)|^{\frac{3}{2}}\right) \quad (3.30)$$

Проинтегрируем (3.30):

$$\begin{aligned} -b\pi = -A\pi + \frac{4}{21}Ab^{3/2} & \left((\beta + \gamma)F\left[\pi + \frac{\varphi}{2}, 2\right] + (\beta - \gamma)F\left[\frac{\varphi}{2}, 2\right] + \right. \\ & + 2F\left[\frac{\pi + \varphi}{2}, 2\right] \beta + (-\beta + \gamma)F\left[\frac{1}{4}(\pi + 2\varphi), 2\right] - \\ & \left. - (\beta + \gamma)F\left[\frac{1}{4}(3\pi + 2\varphi), 2\right] \right) \quad (3.31) \end{aligned}$$

при условии, что выполняется соотношение $\cos \phi = 0$ и $\sin \phi = 0$.

Где $F[\varphi; m]$ эллиптический интеграл первого рода, удовлетворяющий соотношению $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$:

$$F[\varphi; m] = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2(\theta)}} d\theta. \quad (3.32)$$

Проведем преобразования аналогичные (3.19)-(3.22) и найдем коэффициенты a_1 и b_1 . После подстановки последних в уравнение (3.14) получим зависимость между амплитудой решения и амплитудой внешнего воздействия для случая $n = 3/2$:

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4 \frac{\Delta^2}{\mu^2} \frac{(\omega_0^2 B)^2}{(\omega_0^2 B + a_1)^2} \right) \frac{A^2}{A_0^2} = \alpha \frac{\omega_0^4 B^2}{4\mu^2}. \quad (3.33)$$

где $a_1 = 7056A^2((\beta + \gamma)F[\pi + \phi/2, 2] + (\beta - \gamma)F[\phi/2, 2] + 2(\beta F[(\pi + \phi)/2, 2] + (-\beta + \gamma)F[1/4(\pi + 2\phi), 2] - (\beta + \gamma)F[1/4(3\pi + 2\phi), 2]))^2$.

Ниже на рисунках 3.1 и 3.2 приведены графики зависимости амплитуды решения от амплитуды внешнего воздействия, а также параметра μ для полученных соотношений (3.24) и (3.29). Сравним полученные результаты

с классическим результатом уравнения Ван-дер-Поля. Для этого приведем график, отвечающий уравнению (3.6):

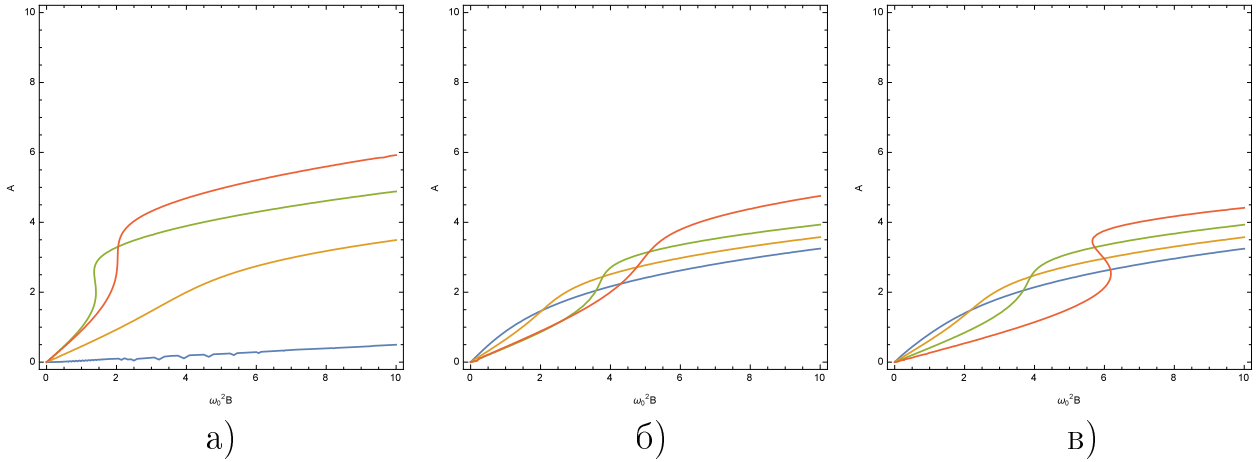


Рис. 3.1. Зависимости амплитуд решения A от амплитуды вынуждающей силы $\omega_0^2 B$ для различных значений μ а) для уравнения не содержащего гистерезисный блок; б) при значении параметра модели Боука- Вена $n = 1$; в) при значении параметра модели Боука- Вена $n = 2$.

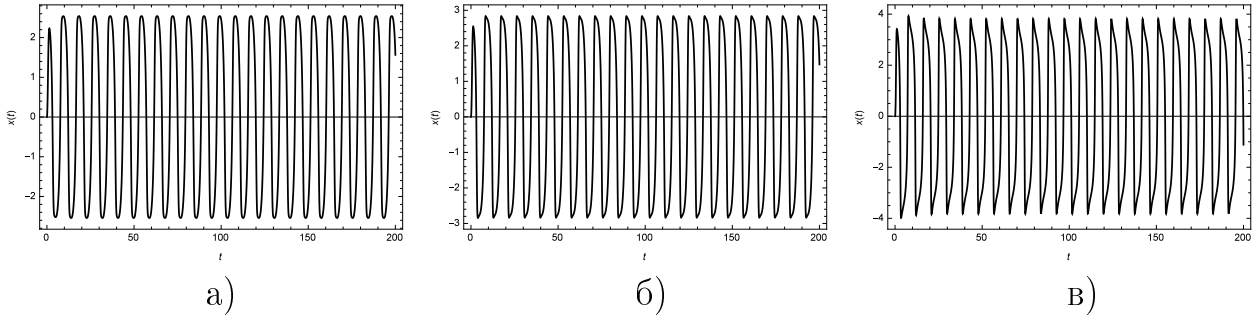


Рис. 3.2. Численное решение системы (3.7) при значениях параметров $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$, $\omega_0^2 = \pi$ и различных значениях μ а) $\mu = 0.1$ б) $\mu = 1$ в) $\mu = 3.4$

Отметим, что при значениях параметра $\mu = 3.4$ и $\omega_0^2 B \approx 2\pi$ (параметры численного решения систем (3.1) и (3.8)) имеет место неоднозначная зависимость амплитуды колебаний от амплитуды внешнего воздействия,

т.е. при одной и той же внешней вынуждающей силе возможно два устойчивых режима колебаний отличающиеся амплитудой.

На рисунке 3.1б, отмечены некоторые значения параметров, которым соответствуют графики решений, приведенные на рис. 3.2 (точкам А, Б и В соответствуют рисунки 3.2а, 3.2б и 3.2в). Сопоставление соответствующих рисунков показывает, что с точностью до 3 процентов амплитуда собственных колебаний осциллятора совпадает с результатами теоретических расчетов.

3.1.2 Различные режимы динамики осциллятора Ван-дер-Поля. Модифицированный алгоритм вычисления ляпуновских показателей для систем с гистерезисными блоками

Известно, что в осцилляторе Ван-дер-Поля, находящегося под воздействием внешней периодической силы, могут реализовываться различные режимы динамики: периодический, квазипериодический, хаотический режим.

В настоящем разделе исследуется влияние гистерезисного звена на режимы колебаний осциллятора Ван-дер-Поля. Известно, что гистерезисное слагаемое способно регуляризовать сложные, в том числе, и хаотические движения. В этой связи, одна из задач, заключается в исследовании возможности управления, в том числе и хаотической динамикой, посредством гистерезисного блока.

На сегодняшний день основные методы идентификации динамических режимов связаны с вычислением показателей Ляпунова. Однако, существующие, методы применимы лишь в случае гладкости правых частей соответствующих уравнений. В подавляющем числе публикаций, где показатели Ляпунова вычислялись для систем с недифференцируемыми правыми частями, происходила их предварительная аппроксимация гладкими

функциями. При этом вопрос о корректности такой замены оставался открытым. В системах с гистерезисными нелинейностями вычисление ляпуновских показателей и вовсе затруднено (классическими методами). В этой связи представляется важным разработка приближенных методов расчета показателей Ляпунова в системах содержащих модели гистерезисных блоков реальных технических систем.

В процессе работы был разработан алгоритм для численного расчета ляпуновских показателей систем с гистерезисными нелинейностями. Ниже приведем его описание. Основная проблема применения существующих классических методов - определение матрицы Якоби, где последовательные итерации явно не определяются известным разностным уравнением. Поэтому предложенный ниже метод основан на идее оценивания матрицы Якоби с использованием малых начальных возмущений в виде ортогональных векторов. Предлагаемый метод особенно полезен для негладких систем из-за процедуры оценивания, которая позволяет избежать прямого вычисления матрицы Якоби. Представленный алгоритм имеет следующие достоинства.

Во-первых, он имеет широкий спектр приложений: его можно использовать для систем с дискретным и непрерывным временем, с разрывами или без них. Единственное предположение - это возможность разбить траекторию на интервалы, так что состояние в конце каждого интервала является дифференцируемой функцией состояния в начале интервала. Это условие, очевидно, выполняется для гладких векторных полей. Однако это может быть выполнено в широком диапазоне негладких и разрывных систем. В частности, возможно, что разрывы, обычно встречающиеся в механических системах, вызванные ударами или явлением прерывистого скольжения, не нарушают этого утверждения.

Во-вторых, для запуска алгоритма необходимо только определить состояние системы через выбранное время, исходя из выбранных начальных условий, но не имеет значения, как это достигается. Нет необходимости даже точно знать уравнения системы, а тем более ее матрицу Якоби. Конечно, рассматриваемая система может быть описана с помощью ОДУ, но также

может быть определена в виде программной процедуры, аргументами которой являются начальные условия и конечное время, а возвращаемое значение - конечное состояние. Третьим преимуществом предложенного алгоритма является его простота и легкость реализации. Это связано с тем, что описанный метод основан на очень популярном алгоритме, применяемом для гладких систем [11]. Предлагаемая модификация представляет собой другой способ получения матрицы перехода состояний (или, другими словами, матрицы Якоби решения). Первоначально эта матрица получается из вариационного уравнения, а описанный метод оценивает ее непосредственно по траекториям: невозмущенной и той, начальные условия которой нарушены ортогональными векторами возмущения. Такая модификация позволяет использовать метод для негладких и разрывных систем. Более того, при определенных условиях он не увеличивает сложность вычислений и может быть даже проще в реализации, чем исходный. В работе использовалась предварительная версия методики расчета ляпуновских показателей, описывается возможность определения их по траекториям, оцененным за фиксированные интервалы времени.

Процедуру оценки ляпуновских показателей можно описать следующим образом. Пусть $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ - начальные условия процедуры, $\delta\mathbf{x}_i^0, i = 1, \dots, n$ - начальные возмущения и $\delta\hat{\mathbf{x}}_i^0 = \delta\mathbf{x}_i^0/|\delta\mathbf{x}_i^0|$ - нормированные начальные возмущения. Предположим, что для непрерывных систем $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}(t_j)$, $\delta\mathbf{x}_i^j = \delta\mathbf{x}_i(t_j)$, где t_j - произвольная возрастающая временная последовательность такая, что $t_0 = 0$ и $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$. Для системы с дискретным временем пусть $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}(j)$, $\delta\mathbf{x}_i^j = \delta\mathbf{x}_i(j)$: Каждая итерация процедуры оценки содержит следующие действия:

1. находим новое состояние системы \mathbf{x}^j ;
2. находим матрицу Якоби $\mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})$;

$$\dot{\mathbf{G}}_t(x_0) = \frac{\partial \mathbf{f}[\phi_t(\mathbf{x}_0)]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{G}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I} \quad (3.34)$$

3. вычисляем новые возмущения $u_i^{(j)} = \mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})\delta\hat{\mathbf{x}}_i^{(j-1)}$

4. используя алгоритм Шмидта-Грама строим ортогональную систему начальных возмущений. Получаем оценку ляпуновских показателей

$$\lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^J \ln |\delta \mathbf{x}_i^j|}{t_J} \quad (3.35)$$

5. оценка матрицы Якоби

$$\mathbf{G}_t(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\Delta} [\varphi_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_1) - \varphi_t(\mathbf{x}), \dots, \varphi_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_n) - \varphi_t(\mathbf{x})] \quad (3.36)$$

для малого $\Delta \in \mathbf{R}$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ - канонический базис в \mathbf{R}^N .

Параметр Δ выбирается таким образом, чтобы $\Delta \gg h$, где h - шаг интегрирования и $\Delta \ll T$, где T - время соответствующей оценки ляпуновского показателя.

Этот метод оценки матрицы Якоби может быть использован в классической процедуре аппроксимации ляпуновских показателей для систем с непрерывным временем. Пусть t_j - возрастающая временная последовательность, а $\mathbf{x}^j = \mathbf{x}(t_j)$ - соответствующие состояния. Предположим, что начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальные условия $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Достаточно подставить последующие значения $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ и соответствующие состояния а \mathbf{x}^{j-1} , чтобы получить аппроксимации матриц $\mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{j-1})$. Используя этот подход, нет необходимости требовать гладкости векторного поля \mathbf{f} в каждой точке траектории. Единственное необходимо учитывать, что для каждого t_j траектория $\mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке \mathbf{x}^{j-1} по всем переменным состояниям. Пока это условие выполняется, не имеет значения, сколько разрывов существует в системе или каков их тип. Следует отметить, что никаких ограничений на значения временной последовательности t_j не накладывается. Требуется только, чтобы t_j увеличивалась. Следовательно, можно выбрать t_j таким образом, чтобы можно было опустить оценку матрицы Якоби в окрестности точек, в которых векторное поле \mathbf{f} негладкое или разрывное. Более того, больше нет необходимости явно знать уравнения, определяющие векторное поле \mathbf{f} . Достаточно иметь метод расчета траектории $\mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$. Не имеет значения, получены ли

значения $\mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$ из явного или неявного определения траектории $\mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$, из численной процедуры или даже из эксперимента. В любом из этих случаев представленный метод работает. С другой стороны, классический алгоритм применим только в том случае, если уравнения \mathbf{f} известны явно, что позволяет оценить матрицу Якоби $\mathbf{G}_{\Delta t_j}$ из вариационного уравнения.

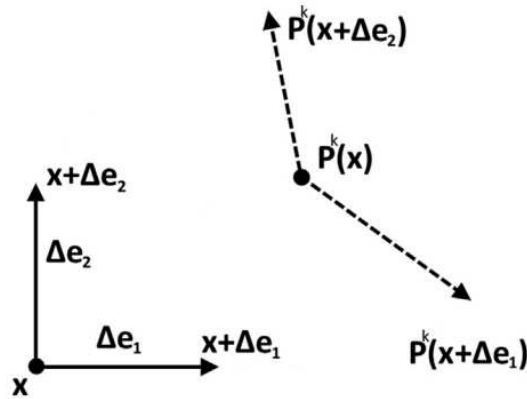
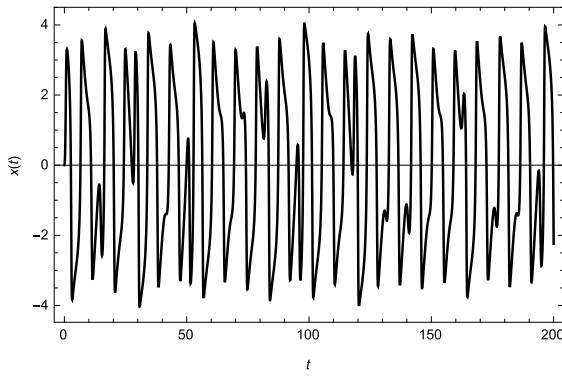


Рис. 3.3. Иллюстрация алгоритма аппроксимации матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x})$

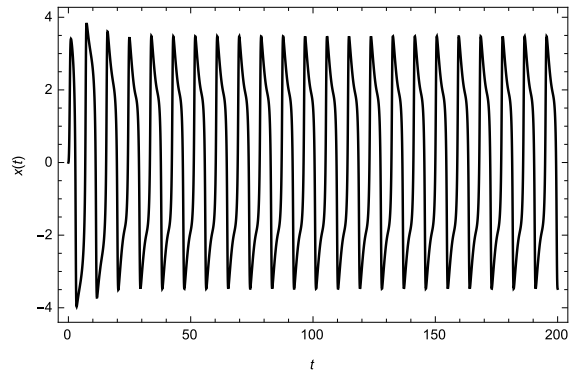
Используя алгоритм, описанный выше, для значений $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$ и $\omega_0^2 = \pi$ в системе (3.1) спектр показателей Ляпунова, вычисленных с помощью стандартного алгоритма Вольфа, имеет значения: $[0.109414, -2.41502, 0.0]$ соответствующий хаотическому режиму.

На следующих графиках отражена динамика решения системы (3.1) и (3.8) и их фазовые портреты:

Как следует из результатов численного моделирования, системы (3.1) и (3.8) имеют существенные отличия в динамике поведения. Объяснить это можно тем, что включение гистерезисного звена приводит к диссипации энергии и, как следствие, к изменению динамических характеристик рассматриваемой системы. Как видно, из рисунка 3.4б, 3.5б в системе (3.8) устанавливаются периодические колебания. Этот факт также подтверждают показатели Ляпунова, для системы (3.8) при значениях параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 = \pi$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$ они будут равны: $[0.000177937, -0.935628, -11.1694]$.

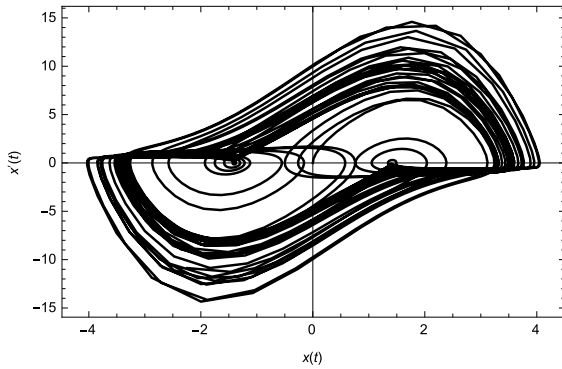


а)

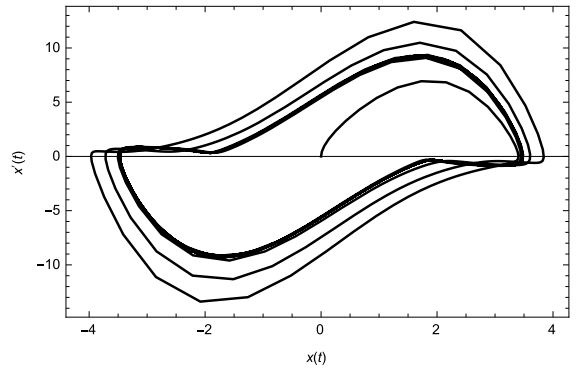


б)

Рис. 3.4. Решение системы (3.1) и (3.8) при значении параметров $\mu = 3.4$,
 $\omega_0^2 = \pi$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$



а)



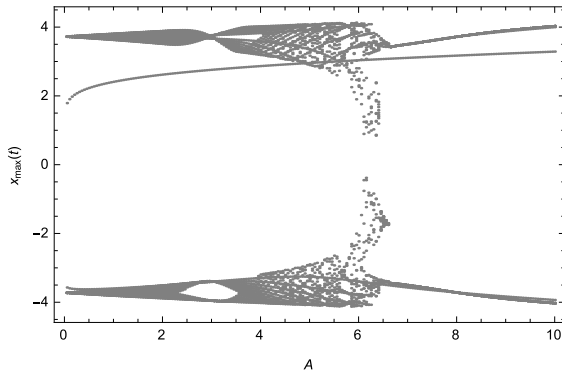
б)

Рис. 3.5. Фазовые портреты (3.1) и (3.8) при значении параметров $\mu = 3.4$,
 $\omega_0^2 = \pi$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$

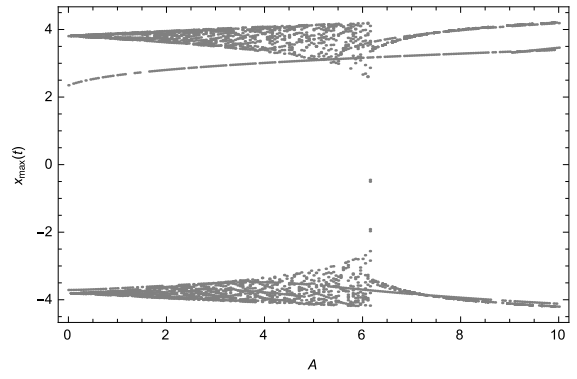
Ниже продемонстрируем бифуркационные диаграммы для системы (3.1) и (3.8) в зависимости от амплитуды внешнего воздействия.

Известно, что качественные особенности динамики нелинейных систем находят отражения в спектральных характеристиках. Ниже приведены спектры решения систем (3.1) и (3.8).

Спектр решения системы (3.1) является непрерывным, что как известно, соответствует хаотическому поведению, в то время как, спектр уравнения (3.8) демонстрирует четырехчастотное движение.

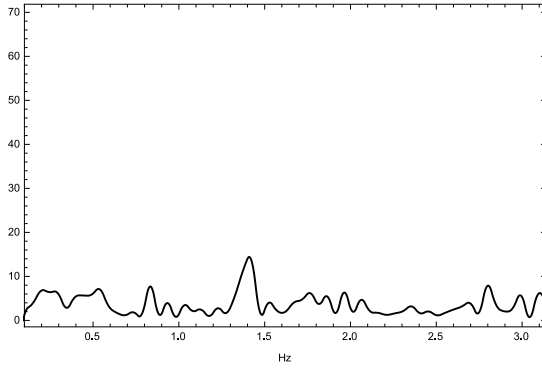


а)

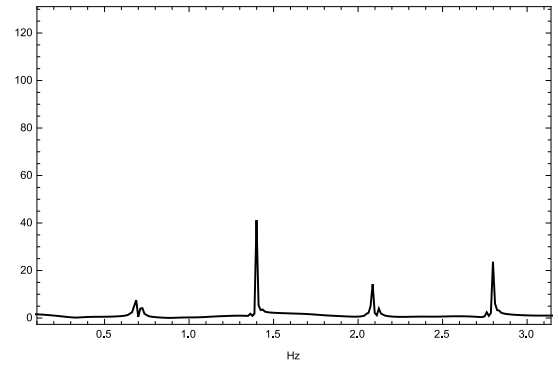


б)

Рис. 3.6. Бифуркационные диаграммы в зависимости от амплитуды внешнего воздействия для системы (3.1) и (3.8) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_0^2 = \pi$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0.7$



а)



б)

Рис. 3.7. Спектральные характеристики а) системы (3.1) и б) системы (3.8)

3.1.3 Синхронизация собственных колебаний осциллятора с частотой вынуждающей силы

Моделирование поведения уравнение (3.1), показало, что при следующих значениях параметров $\lambda = 3.4$, $\omega_0^2 = \pi$ и существенном влиянии периодической внешней силы $B = 2$, в области значения параметра $\omega \in [0.8, 1.8]$, происходит синхронизация собственных колебаний в системе (3.1) с частотой вынуждающей силы. Отметим, что синхронизации по амплитуде внешнего воздействия не происходит. Добавление гистерезисного звена формализованного моделью Боука-Вена при указанных параметрах сдвигает интервал синхронизации $\omega \in [0.7, 1.7]$, что связано с регуляризи-

рующей ролью гистерезисного звена.

На рисунках (3.8 – 3.9) приведены графики решения уравнения (3.1) и аналогичного уравнения с гистерезисным блоком. Соответствующие им графики поведения возмущающей силы, а также приведены бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра ω .

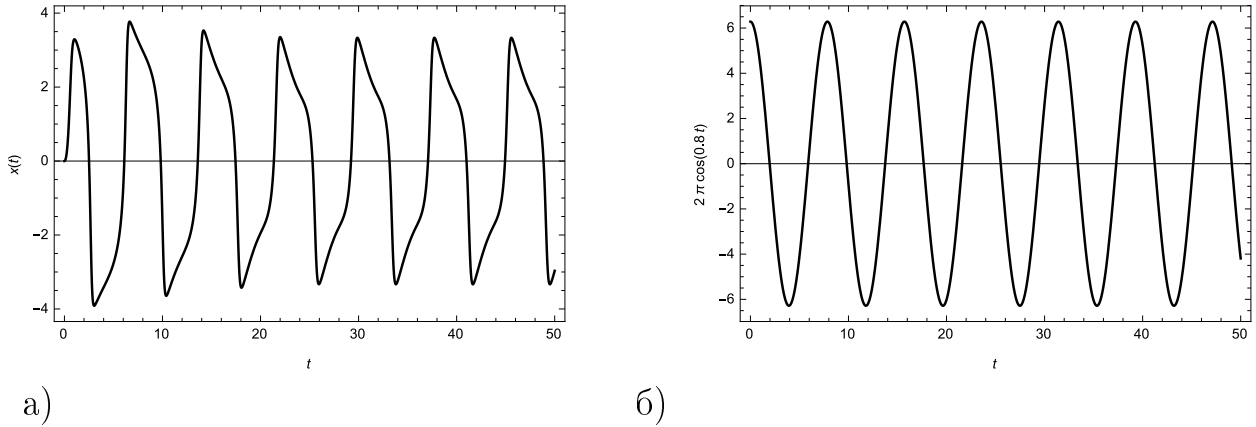


Рис. 3.8. а) Численное решение системы(3.1) б) Возмущающая сила при значении параметров $\lambda = 3.4$, $\omega_0^2 = \Pi$, $B = 2$, $\omega = 0.8$

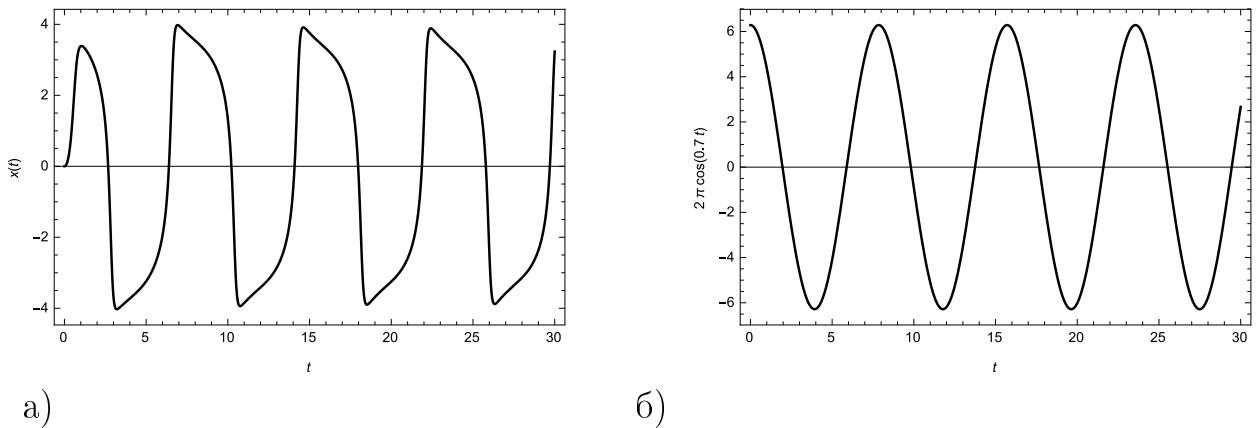
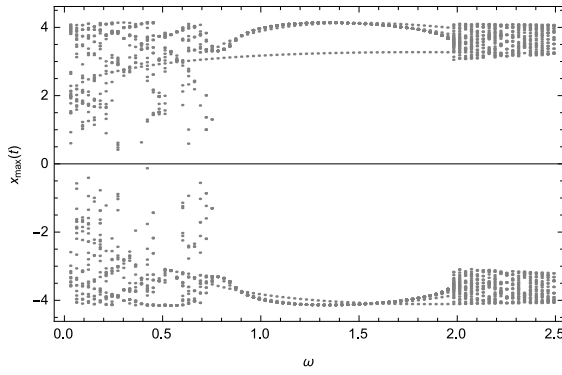
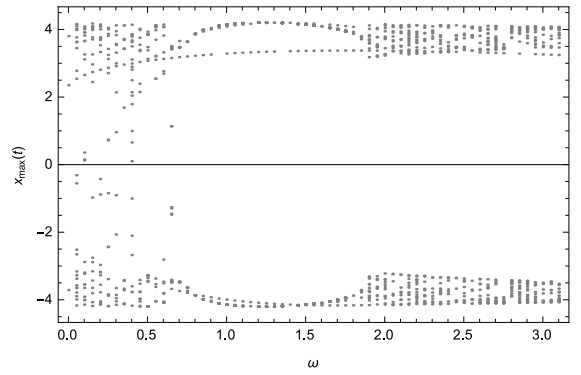


Рис. 3.9. а) Численное решение системы с Боуком-Веном б) Возмущающая сила при значении параметров $\lambda = 3.4$, $\omega_0^2 = \Pi$, $B = 2$, $\omega = 0.7$

Отметим, что увеличение амплитуды внешнего воздействие в уравнении (3.8), приводит к увеличению полосы синхронизации, так значению $B = 3$ будет соответствовать интервал $\omega \in [0.4, 2.1]$, а значению $B = 4$ –



а)



б)

Рис. 3.10. Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для системы (3.1) и для системы с Боуком-Веном при значении параметров $\lambda = 3.4$, $\omega_0^2 = \Pi$, $B = 2$

$\omega \in [0.2, 2.4]$.

3.2 Система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисной внешней силой

3.2.1 Математическая модель

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t), \\ \ddot{y} - \mu(1 - \lambda y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x \end{cases} \quad (3.37)$$

где μ и $\lambda = 1/\mu$ – управляющие параметры, ω_1 и ω_2 – частота собственных колебаний осцилляторов, ω_v – частота внешнего сигнала, B – его амплитуда, ν – параметр связи между осцилляторами.

Исследуем взаимную синхронизацию осцилляторов x и y . Отметим, что в системе (3.37) осциллятор x будет являться ведущим, а y ведомым.

Решение уравнений будем искать в виде $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, где $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, а $A_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ – медленно меняющиеся функции времени. Для удобства применения метода малого параметра, пе-

решим систему (3.37) в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 x = \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + B\omega_1^2 \cos(\omega_v t), \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y = \mu(1 - \lambda y^2)\dot{y} + \nu x. \end{cases} \quad (3.38)$$

Учитывая порядок малости вычислим \dot{x} , \ddot{x} и \dot{y} , \ddot{y} , так как равенства будут одинаковы с точностью до коэффициентов, приведем только два соотношения:

$$\dot{x} = \dot{A}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)(\omega + \dot{\varphi}_1), \quad (3.39)$$

$$\ddot{x} = -2\dot{A}_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_1) - A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)(\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_1). \quad (3.40)$$

Используя соотношения (3.39) и (3.40) преобразуем отдельно левую и правую части уравнения для осциллятора x :

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -2\dot{A}_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1) (A_1(\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_1) + \omega_1^2 A_1); \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} & \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) = \\ & = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) - \sin(\omega t + \varphi_1) \left(\mu\omega A_1 - \frac{A_1^3 \omega}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

С учетом аналогичных выражений для осциллятора y , система (3.38) примет вид:

$$\begin{cases} -2\dot{A}_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1) (A_1(\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_1) + \omega_1^2 A_1) = \\ \quad = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) - \sin(\omega t + \varphi_1) \left(\mu\omega A_1 - \frac{A_1^3 \omega}{4} \right), \\ -2\dot{A}_2 \omega \sin(\omega t + \varphi_2) - \cos(\omega t + \varphi_2) (A_2(\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) = \\ \quad = \nu A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - \sin(\omega t + \varphi_2) \left(\mu\omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right). \end{cases} \quad (3.43)$$

Соотношения для амплитуды и фазы первого осциллятора были получены ранее, а именно:

$$\dot{A}_1 = -\frac{\omega_1 B}{2} \sin \varphi_1 + A_1 \left(\frac{\mu}{2} - \frac{A_1^2}{8} \right), \quad \dot{\varphi}_1 = \Delta - \frac{\omega_1 B}{2A_1} \cos \varphi_1. \quad (3.44)$$

Из второго уравнения системы (3.43), получим соотношения для \dot{A}_2 и $\dot{\varphi}_2$, для этого выполнив преобразования относительно тригонометрических

функций, запишем:

$$\begin{aligned}
& \sin(\omega t) \left(-2\dot{A}_2 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 (A_2(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) \right) + \\
& + \cos(\omega t) \left(-2\dot{A}_2 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 (A_2(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) \right) = \\
& = \sin(\omega t) \left(-\nu A_1 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \left(\mu\omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right) \right) + \\
& + \cos(\omega t) \left(\nu A_1 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \left(\mu\omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right) \right) \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$, получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases}
-2\dot{A}_2 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 (A_2(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) = \\
= -\nu A_1 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \left(\mu\omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right), \\
-2\dot{A}_2 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 (A_2(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_2) + \omega_2^2 A_2) = \\
= \nu A_1 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \left(\mu\omega A_2 - \frac{A_2^3 \omega}{4} \right).
\end{cases} \quad (3.46)$$

Запишем соотношения для амплитуды и фазы осциллятора y , где $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\dot{A}_2 = A_2 \left(\frac{\mu}{2} - \frac{A_2^2}{8} \right) - \frac{\nu A_1}{2\omega} \sin \Phi, \quad \dot{\varphi}_2 = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\nu A_1}{2\omega A_2} \cos \Phi. \quad (3.47)$$

Тогда в синхронном режиме приравнявая (3.47) к нулю, избавимся от $\sin \Phi$ и $\cos \Phi$:

$$\left(\frac{A_2 \omega \mu}{\nu A_1} \left(1 - \frac{A_2^2}{4\mu} \right) \right)^2 + \left(\frac{\Delta \omega A_2}{\nu A_1} \right)^2 = 1. \quad (3.48)$$

Для получения зависимости между амплитудами A_1^2 и A_2^2 при различных значениях параметра ν приведем уравнение (3.48) к виду:

$$(A_2 \omega \mu)^2 (4\mu - A_2^2)^2 + (4\mu \Delta \omega A_2)^2 = 16\mu^2 \nu^2 A_1^2. \quad (3.49)$$

$$A_2^2 \omega^2 \mu^2 (16\mu^2 - 8\mu A_2^2 + A_2^4) + 16\mu^2 \Delta^2 \omega^2 A_2^2 = 16\mu^2 \nu^2 A_1^2. \quad (3.50)$$

$$A_2^6 \omega^2 \mu^2 - 8A_2^4 \mu^3 \omega^2 + A_2^2 (16\omega^2 \mu^4 - \Delta^2 \omega^2) = 16\mu^2 \nu^2 A_1^2. \quad (3.51)$$

На рисунке 3.11 приведена зависимость A_1^2 от A_2^2 при различных значениях ν .

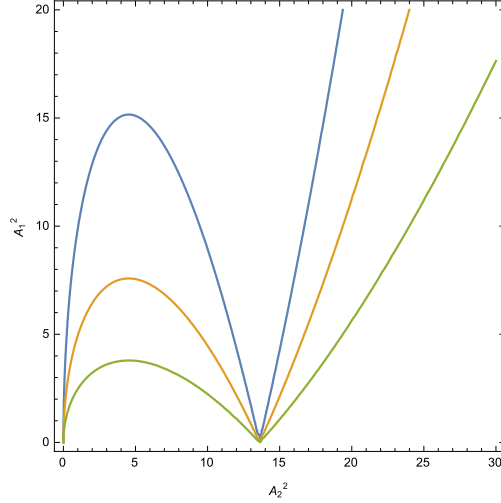


Рис. 3.11. Зависимость A_2^2 от амплитуды второго осциллятора в системе A_1^2 для различных значений ν .

3.2.2 Система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком

Рассмотрим систему аналогичную (3.37) с гистерезисным блоком в первом уравнении.

$$\begin{cases} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) + b\Phi_{BW}(x, t), \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x. \end{cases} \quad (3.52)$$

Первое уравнение системы было исследовано в предыдущих разделах. Уравнения для определения амплитуды и фазы колебаний для осциллятора x совпадают с уравнениями (3.13). Так как уравнение для осциллятора y осталось неизменным, относительно системы (3.37). То амплитуда и фаза колебаний может быть определена согласно уравнениям (3.47).

При рассмотрении системы (3.37) и (3.52) наибольший интерес представляет динамика осциллятора y в зависимости от влияния гистерезисного звена. На рис. 3.12 приведены бифуркационные диаграммы поведения осциллятора y в зависимости от параметра ν для системы (3.37) и (3.52):

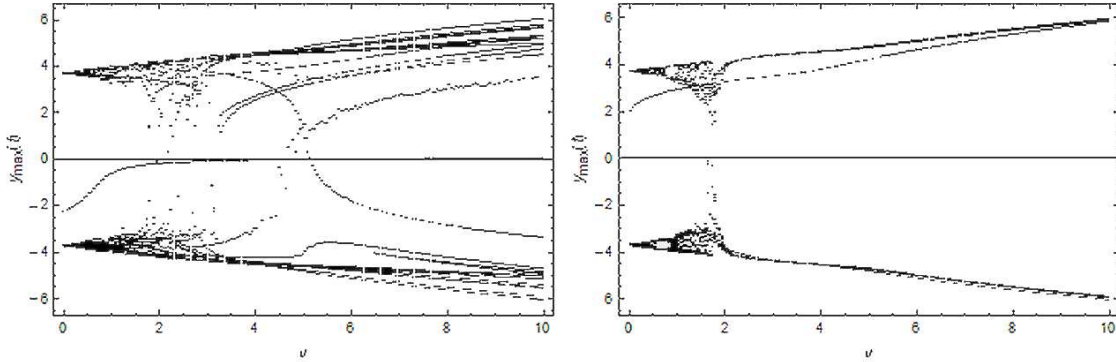


Рис. 3.12. Бифуркационные диаграммы для осциллятора y в зависимости от параметра ν для системы (3.37) и (3.52).

Ранее было проанализировано аналитическое решение системы 3.37 и аналогичной системы с гистерезисным блоком (3.52).

Приведем результаты численного моделирования поведения осцилляторов x и y для системы (3.37) и (3.52) на рисунках 3.13-3.16.

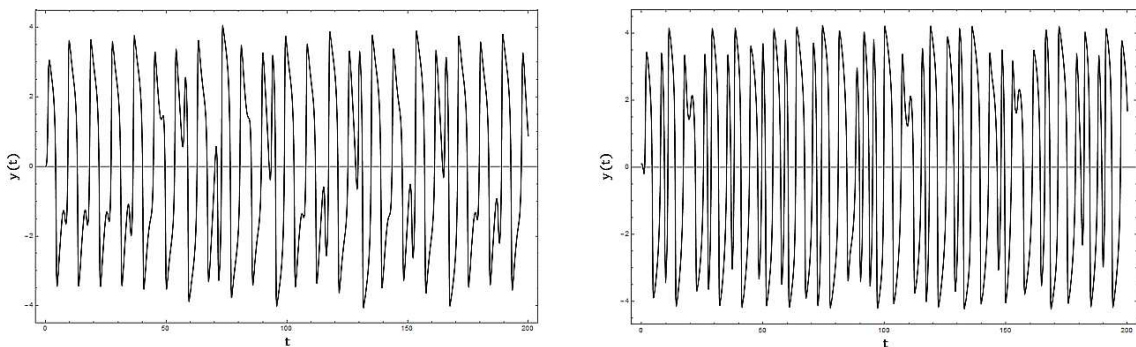


Рис. 3.13. Динамика осцилляторов x и y системы (3.37) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2$, $B = 2$, $\omega = 0.7$.

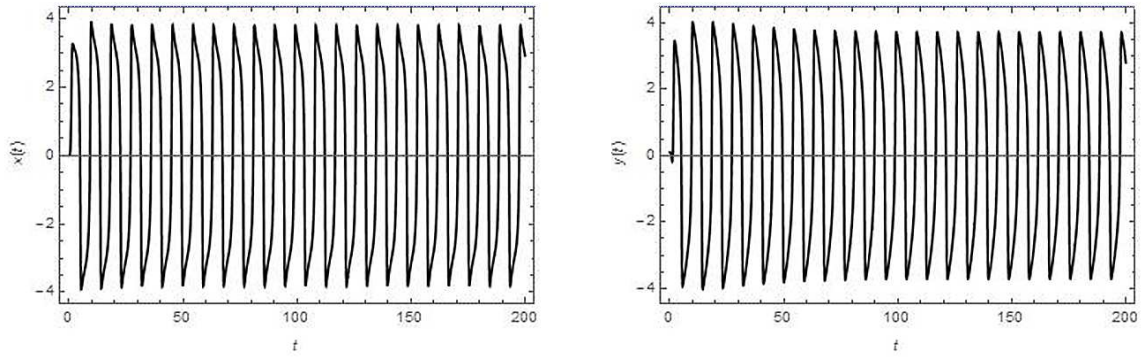


Рис. 3.14. Динамика осцилляторов x и y системы (3.52) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2$, $B = 2$, $b = 1.7$, $\omega = 0.7$.

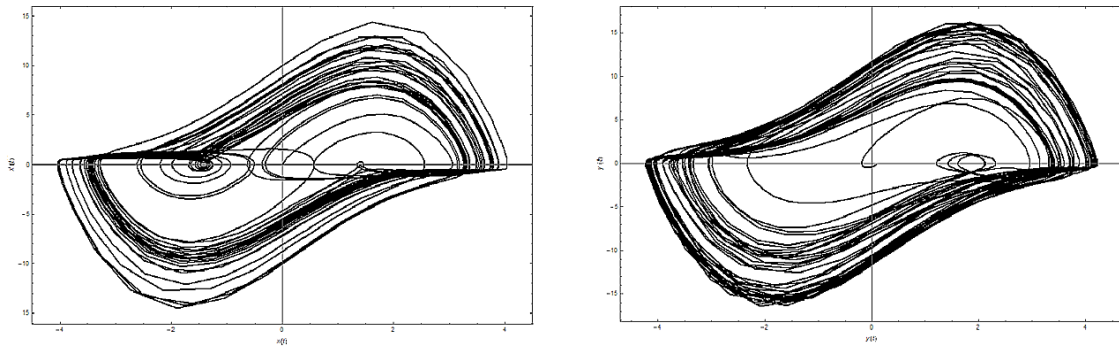


Рис. 3.15. Фазовые портреты осцилляторов x и y системы (3.37) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2$, $B = 2$, $\omega = 0.7$.

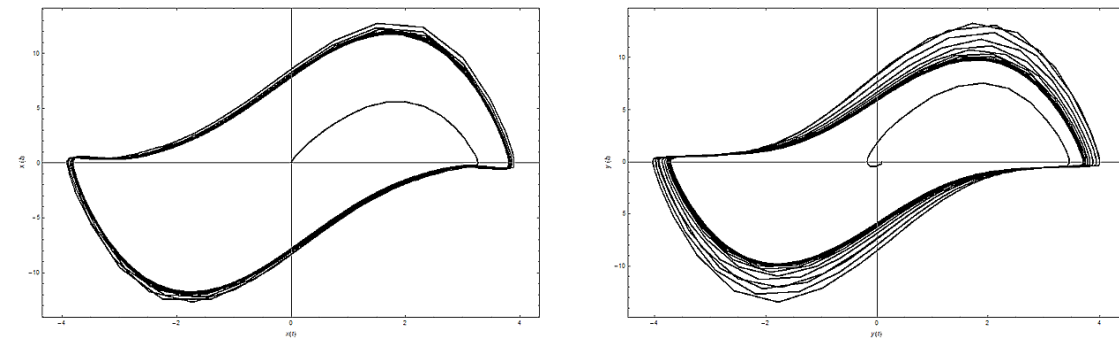


Рис. 3.16. Фазовые портреты осцилляторов x и y системы (3.52) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $\nu = 2$, $B = 2$, $b = 1.7$, $\omega = 0.7$.

Из анализа аналитических и численных результатов для систем (3.37)

и (3.52) следует вывод о регуляризирующей роли гистерезисного блока в системе. Для подтверждения этого факта приведем спектр показателей Ляпунова. Для системы (3.37) при значении параметров $\mu = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_1^2 = \pi$, $B = 2$, $\omega = 0.7$ и $\nu = 2$ были получены следующие результаты $[0.110291857, -0.15691426, -2.417233756, -4.93154012]$, а для системы (3.52) при тех же значениях параметров, а также при $b = 1.7$, был получен следующий спектр $- [0.000193202, -0.18328, -0.935938, -5.54008, -11.1454]$.

3.2.3 Синхронизация в системах связанных осцилляторов Ван-дер-Поля

На графиках (3.17– 3.18) при указанных значениях параметров системы (3.37) и (3.52) наблюдается как взаимная синхронизация осцилляторов x и y , так и вынужденная синхронизация осцилляторов по частоте с внешним воздействием. Однако стоит отметить, что в отличие от случая, когда рассматривался единственный осциллятор (3.1) и (3.8), область значения параметра ω_v значительно отличается. Если говорить о взаимной синхронизации в системе (3.37), то значение параметра $\omega_v \in [0.8, 1.8]$, однако, в случае вынужденной синхронизации значения $\omega_v \in [0.8, 1.1]$. В системе (3.52) взаимная синхронизация происходит при значении параметра $\omega_v \in [0.7, 1.7]$, а вынужденная синхронизация при $\omega_v \in [0.7, 1]$. Стоит отметить, что существенное влияние на полосу синхронизации осцилляторов оказывает параметр линейной связи ν , а именно, с увеличением параметра полоса синхронизации становится значительно уже, при $\nu = 3.6$ взаимная синхронизация осцилляторов происходит при $\omega_v \in [0.7, 1.4]$, а вынужденная синхронизация при $\omega_v \in [0.7, 0.9]$.

Приведем бифуркационные диаграммы поведения осцилляторов x и y в системах (3.37) и (3.52) в зависимости от параметра ω_v .

Поясним результаты, полученные выше. В системе (3.52) на вход гистерезисного блока подается сигнал, который представляет собой сумму,

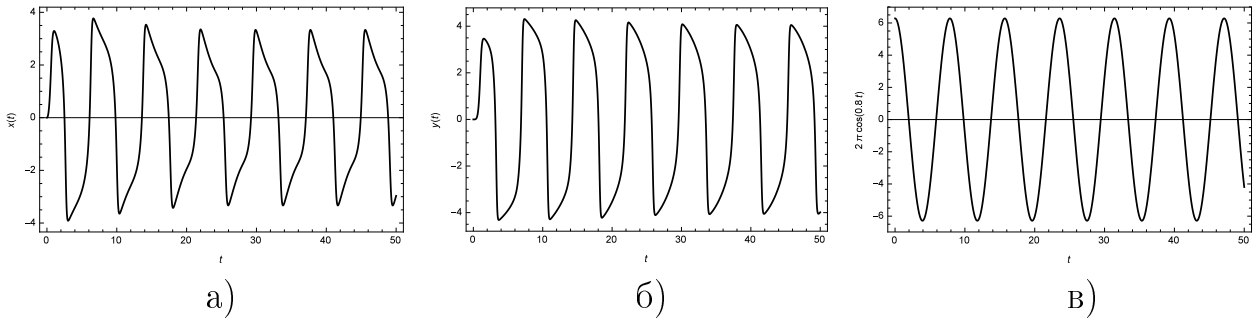


Рис. 3.17. а) Поведение осциллятора x в системе (3.37) б) Поведение осциллятора y в системе (3.37) в) Возмущающая сила при значении параметров $\lambda = 3.4, \omega_1^2 = \omega_2^2 = Pi, \nu = 2.6, B = 2, \omega_v = 0.8$

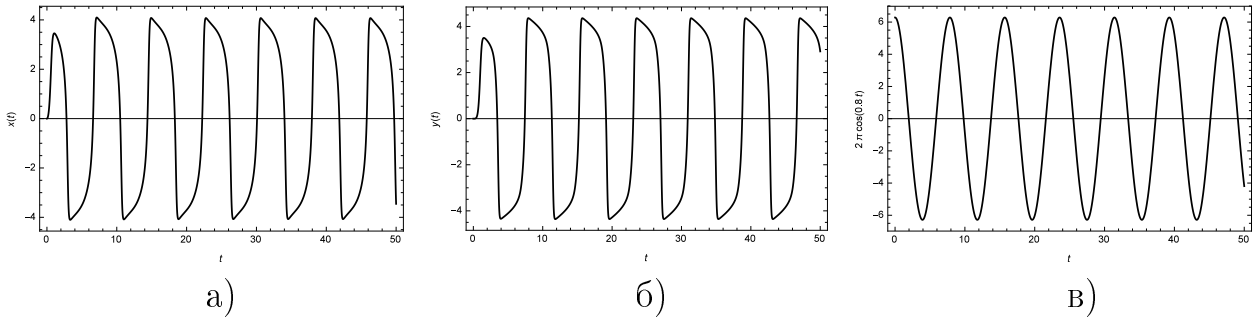


Рис. 3.18. а) Поведение осциллятора x в системе (3.52) б) Поведение осциллятора y в системе (3.52) в) Возмущающая сила при значении параметров $\lambda = 3.4, \omega_1^2 = \omega_2^2 = Pi, B = 2, \nu = 2.6, b = 1.7, \omega_v = 0.8$

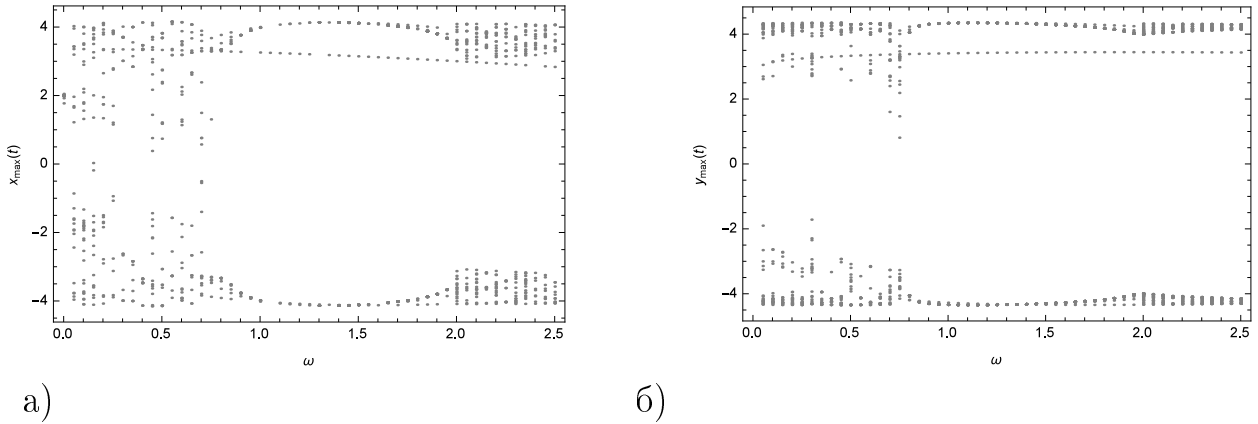
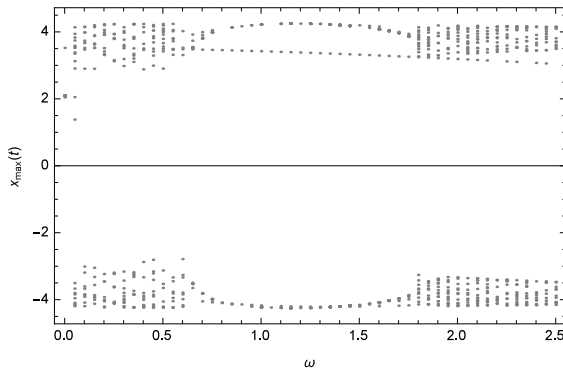
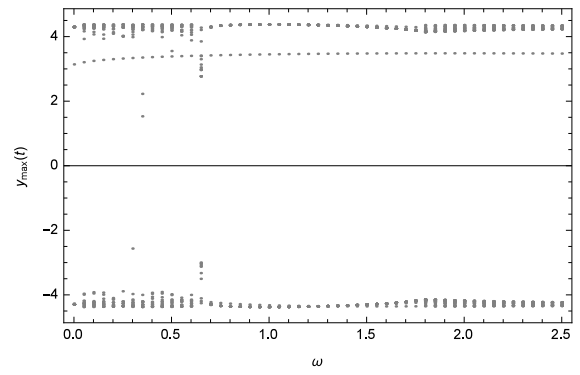


Рис. 3.19. Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для системы (3.37) а) для осциллятора x б) для осциллятора y при значении параметров $\lambda = 3.4, \omega_1^2 = \omega_2^2 = Pi, B = 2, \nu = 2.6$



а)



б)

Рис. 3.20. Бифуркационные диаграммы в зависимости частоты внешнего воздействия для системы (3.52) а) для осциллятора x б) для осциллятора y при значении параметров $\lambda = 3.4$, $\omega_1^2 = \omega_1^2 = Pi$, $B = 2$, $b = 1.7$, $\nu = 2.6$

состоящую из собственных колебаний системы и отклика системы на внешнее периодическое воздействие. Синхронизация с внешним воздействием представляется затруднительной, в силу того что система обладает собственными сильными колебаниями, имеющими определенный период, но “неправильную” форму. В том случае, когда спектральные характеристики собственных колебаний имеют ярко выраженную доминирующую частоту, происходит синхронизация (выход гистерезисного преобразователя имеет похожую частоту).

Построим спектр выхода гистерезисного преобразователя в зависимости от различных значений параметров ω_v .

3.3 Система перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком

Рассматривается система перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с несимметричной связью, в которой вынуждающая сила, действующая на первый из них определяется выходом гистерезисного преоб-

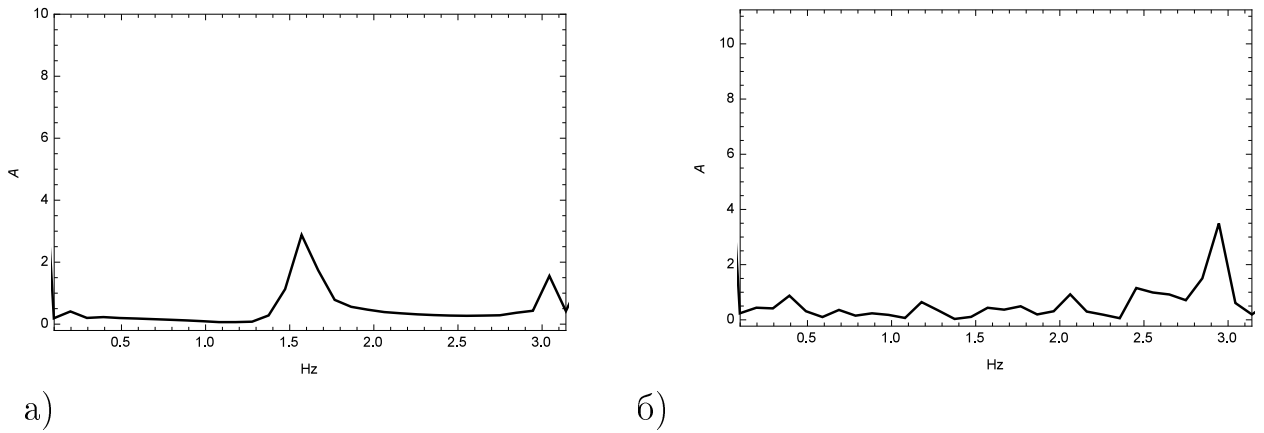


Рис. 3.21. Спектральная характеристика выхода гистерезисного преобразователя в уравнении (3.52) при значениях параметра принадлежащих интервалу синхронизации осцилляторов x и y при $\omega_v = 0.8$ (слева) и при значениях параметра не принадлежащих интервалу синхронизации осцилляторов x и y при $\omega_v = 1.9$.

разователя, на вход которого подается рассогласование между скоростями осцилляторов:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu(1 - \lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) + b\Phi_{BW}(\dot{y} - \dot{x}), \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x. \end{cases} \quad (3.53)$$

Численное решение системы (3.53) показало, что для осцилляторов x и y характерны различные режимы поведения. Приведем бифуркационные диаграммы в зависимости от различных параметров системы (рис. 5.3).

Также были вычислены показатели Ляпунова, при этом параметрам системы $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1$, $B\omega_1^2 = 1.2$, $\omega_v = 1$, $\nu = 1$ соответствуют значения $[0.11806, -0.0392802, -0.317961, -0.621109, -2.03704]$. Поведение осцилляторов x и y при соответствующих параметрах отражено на графиках (рис. 3.23-3.24).

В отличие от рассмотренного выше случая (3.37) и (3.52) линейной связи между осцилляторами x и y , синхронизация в системе (3.53) затруднительна, так как вынуждающая сила, действующая на первый осциллятор, определяется выходом гистерезисного преобразователя, вход которого,

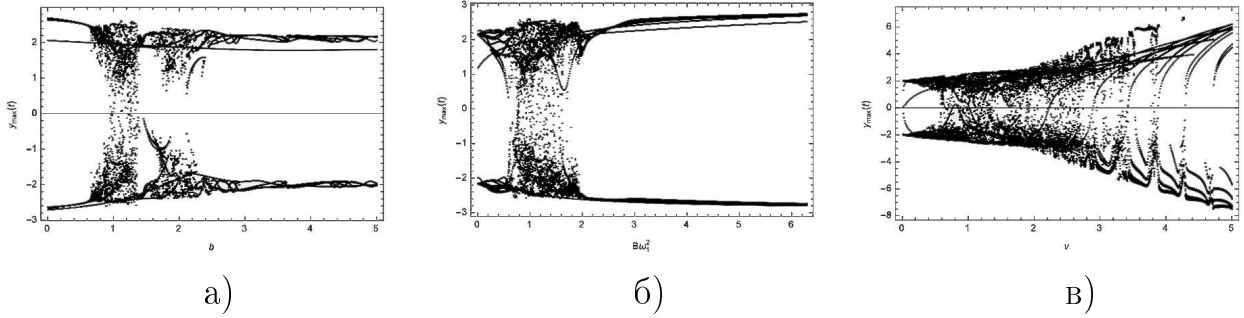


Рис. 3.22. Бифуркационные диаграммы поведения осциллятора y а) в зависимости коэффициента перед гистерезисным блоком b б) в зависимости от амплитуды внешнего воздействия $B\omega_1^2$ в) в зависимости от параметра ν , при значении параметров $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_1^2 = 1$

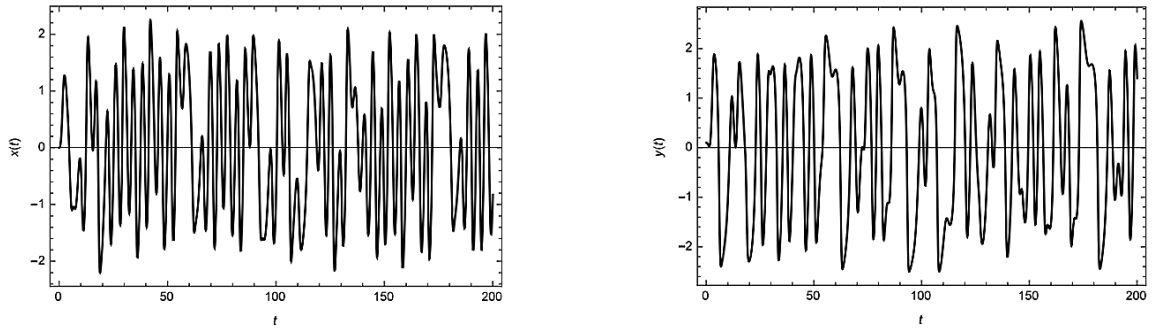


Рис. 3.23. а) Динамика поведения осциллятора x б) Динамика поведения осциллятора y при значениях параметров $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_1^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 1.2$, $\omega_\nu = 1$, $b = 1.3$, $\nu = 1$

в свою очередь, зависит от рассогласования между скоростями осцилляторов. Однако были определены параметры системы, при которых возможна как внешняя, так и внутренняя синхронизация. Отметим, что внешняя синхронизация системы происходит только по частоте колебаний, тогда как при внутренней синхронизации осцилляторы x и y двигаются с одинаковой частотой и амплитудой. Параметры системы (3.53) $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $b = 1.7$, $\nu = 2.6$ при значении частоты внешнего гармонического воздействия $\omega_\nu = 1$ соответствуют интервалу внешней и внутренней синхронизации осцилляторов x и y . На рис. 3.25 приведены соответствующие графики.

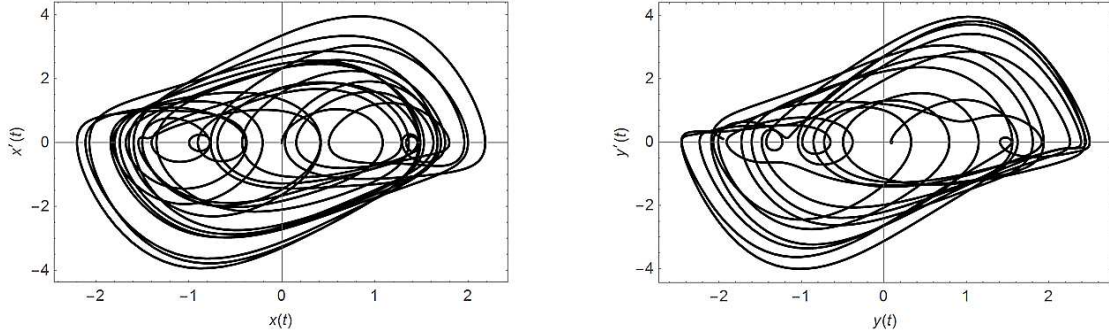


Рис. 3.24. а) Фазовый портрет осциллятора x б) Фазовый портрет осциллятора y при значениях параметров $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 1.2$, $\omega_v = 1$, $b = 1.3$, $\nu = 1$

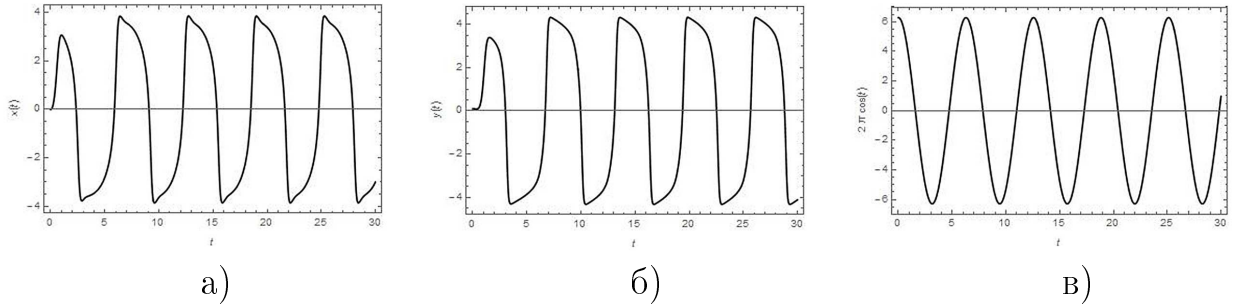


Рис. 3.25. а) Поведение осциллятора x в системе (3.53) б) Поведение осциллятора y в системе (3.53) в) Возмущающая сила при значении параметров $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $b = 1.7$, $\nu = 2.6$, $\omega_v = 1$

Исследование интервалов внешней синхронизации показало, что с увеличением параметра ν полоса синхронизации увеличивается, так параметрам $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $b = 1.7$, $\nu = 2.6$ соответствуют значения, принадлежащие интервалу $\omega_v \in [0.6, 1.9]$, а в случае $\nu = 3.6$, синхронизация возможна при $\omega_v \in [0.4, 2.2]$. Также удалось установить, что с увеличением влияния гистерезисного звена, то есть с увеличением параметра b , полоса внешней синхронизации будет уменьшаться, а именно параметрам $\mu = 3.4$, $\lambda = 1/3.4$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \pi$, $B\omega_1^2 = 2\pi$, $\nu = 2.6$, $b = 3$ соответствует интервал $\omega_v \in [0.6, 1.7]$. Аналогичные результаты справедливы и для внутренней синхронизации, с увеличением параметра ν интервал увеличивается, а с увеличением параметра b , интервал

уменьшается.

Выводы

В данной главе

- Рассмотрены различные динамические режимы осциллятора Ван-дер-Поля в условиях периодического воздействия, и при наличии гистерезисного блока в контуре обратной связи.
- Получено аналитическое решение с использованием техники асимптотических разложений (метод малого параметра) для осциллятора Ван-дер-Поля, находящегося под воздействием вынуждающей силы и гистерезисного воздействия, формализуемого посредством феноменологической модели Боука-Вена.
- Разработан алгоритм для организации вычислительного эксперимента для установлении динамических режимов, систем связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, основанный на модифицированном методе вычисления ляпуновских показателей.
- Установлена регуляризирующая роль гистерезисного звена в части редукции хаотических режимов. Получен диапазон значения параметров, соответствующих хаотическим и регулярным режимам движения, а также были идентифицированы параметры, отвечающие синхронизации собственных колебаний осциллятора с внешней вынуждающей силой.
- Также установлено, что в системе двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля включение гистерезисного блока в одно из уравнений существенным образом влияет как на внешнюю, так и на внутреннюю синхронизацию, а именно: интервал внутренней синхронизации заметно увеличивается, при этом синхронизация с внешним воздействием становится затруднительна.

Глава 4

Модифицированный осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком

В теории нелинейных колебаний осциллятор Ван-дер-Поля является универсальной моделью для множества автоколебательных систем различной физической природы. При этом под классическим осциллятором Ван-дер-Поля подразумевается в первую очередь дифференциальное уравнение второго порядка с квадратичной нелинейностью при первой производной. Однако на данный момент существует ряд модификаций осциллятора, позволяющих описать динамику более сложных физических процессов, к примеру, модель Ван-дер-Поля–Дуффинга [102], в уравнении которой представлен дополнительный член с кубической нелинейностью, отвечающий за новый эффект в автономной системе – неизохронность колебаний, т.е. зависимость их периода от амплитуды. Принципиальное значение системы Ван-дер-Поля - Дуффинга состоит в том, что в рамках укороченных уравнений (полученных методом медленно меняющихся амплитуд) она приводит к полной нормальной форме бифуркации Андронова-Хопфа. А также модель Бонхоффера–Ван-дер-Поля [5], которая легко реализуема в виде электронной схемы и в вариантах комбинированных схем, демонстрирующих сложную динамику, может служить основой для построения генера-

торов сигналов с широкими функциональными возможностями. Так как уравнение Бонхоффера–Ван-дер-Поля с точностью до замены переменных соответствует известной модели нейрона ФитцХью–Нагумо, можно говорить о применении такого рода систем для модельного описания явлений, имеющих место в нейросистемах, а также об их аналоговом моделировании при помощи электронных схем.

При исследовании нелинейных динамических систем особую роль играют явления гистерезисной природы, которые проявляются в различных системах как на уровне отдельных блоков, так и на уровне управляющих воздействий. Динамике систем с гистерезисом посвящено значительное количество публикаций, из которых отметим работы, в которых рассматриваются нелинейные динамические системы и их отклик на гистерезисное воздействие. Также при моделировании технических систем, гистерезис проявляется в связи между динамическими характеристиками [103]. В работе описывается появление гистерезисного поведения в осцилляторе Ван-дер-Поля–Дуффинга вблизи субгармонического резонанса 3:1, исследуется влияния на зоны синхронизации и резонанса. Однако гистерезисные явления, свойственны не только физическим и техническим системам, но имеют место также и в области экономики и социологических наук [104, 105].

Отметим, что при описании моделей гистерезиса традиционно используются два подхода: первый из них основан на операторной трактовке носителей гистерезисных свойств в терминах преобразователей с пространством состояний и входно-выходными соответствиями, к таким моделям относится неидеальное реле, оператор ПреЙзаха. Второй, феноменологический подход, описывает гистерезисную петлю посредством дифференциальных и алгебраических соотношений – наиболее популярной в этом смысле является модель Боука-Вена.

Ранее в работах [75, 97] было рассмотрена динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, один из которых, находился под воздействием вынуждающей силы и гистерезисного воздействия, описанного феноменологической моделью Боука-Вена. Была установлена регуляризирующая роль гистерезисного звена в части редукции хаотических

режимов. Также в ряде работ, были рассмотрены нелинейные динамические системы, в которых гистерезисные преобразователи представлены в качестве составляющих колебательных систем [86, 88–90, 106].

В настоящей работе исследуется модифицированное уравнение Ван-дер-Поля, в котором квадратичное слагаемое заменено гистерезисным блоком, формализованным посредством модели Прейзаха. Приведем ряд результатов, полученных для нелинейных систем, гистерезисный блок в которых описывается при помощи оператора Прейзаха. В работе [51] рассматривается простое дифференциально-операторное уравнение с гистерезисным затуханием, которое описывает магнитный маятник. Исследуется чувствительность системы к возмущениям, такими методами, как тест 0–1 для показателей хаоса и вычисляются ляпуновские показатели. В статье [107] рассматривается сеть из 8 осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисными блоками, которые соединены в кубоподобную конфигурацию. Хорошо известно, что оператор Прейзаха в общем случае не является дифференцируемым. Также его пространство состояний бесконечномерное и не имеет линейной структуры. В статье предложен эквивариантный метод, позволяющий рассматривать симметричные бифуркационные задачи Хопфа в негладких системах. Материал, изложенный в настоящей главе подробно представлен в работах [108–110].

Глава построена следующим образом. В разделе 4.1 строится математическая модель, описывающая динамику модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. Проводится сравнительный анализ численных результатов построенной модели и классического осциллятора. Устанавливается, что в отличие от классического случая, в модифицированном осцилляторе возможно возникновение хаотического поведения. В разделе 4.2 рассматривается аналогичная модель, находящаяся под воздействием вынуждающей силы. Посредством метода малого параметра находится решение, а также проводится сопоставление между полученными аналитическими и численными результатами. Также проводится сравнительный анализ с классической моделью осциллятора Ван-дер-Поля.

4.1 Математическая модель

Рассмотрим уравнение, которое является аналогом уравнения Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком, включенным в левую часть

$$\ddot{x} - (\lambda - y^2(t))\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.1)$$

где $y(t)$ – это выход преобразователя Прейзаха, определенный соотношением:

$$y(t) = y[t_0, \eta_0](t) = \int_{\Omega} R^{\omega}[t_0, \eta_0(\omega)] x(t) d\mu, t \geq t_0. \quad (4.2)$$

При исследовании уравнения (4.1) будем опираться на асимптотические методы, связанные с введением метода малого параметра. Для этого перепишем уравнение в следующем виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon((\lambda - y^2(t))\dot{x}). \quad (4.3)$$

Представим решение в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \\ \omega &= \omega_0 \left(1 + \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2}{\omega_0} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя соотношения (4.4) в уравнение (4.3) получим:

$$(\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \dots) + \omega_0^2 \left(1 + \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} + \dots \right) (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) = \varepsilon(\lambda - y^2(t)) (\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \dots). \quad (4.5)$$

Приравнявая в (4.5) к нулю члены при одинаковых степенях ε , для первого приближения уравнения будут иметь вид:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (4.6)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + 2\omega_0 \omega_1 x_0 - (\lambda - y^2(t))\dot{x}_0 = 0, \quad (4.7)$$

Так как уравнение (4.6) – это уравнение гармонического осциллятора, то его решение можно записать, как:

$$x_0 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.8)$$

где A – амплитуда, а φ_0 – фаза, определяемые из начальных условий. Перепишем уравнение (4.7) следующим образом:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \lambda x_0 - y^2(t)x_0 - 2\omega_0\omega_1 x_0, \quad (4.9)$$

Для поиска решения представим правую часть уравнения (4.9) в виде ряда Фурье, при этом учтем, что для удаления секулярных членов необходимо обнулить слагаемые, соответствующие резонансным членам. Иными словами, параметры A и ω_1 должны быть такими, чтобы правая часть уравнения (4.9) была ортогональна нулевому приближению

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} (\lambda x_0 - y^2(t)x_0 - 2\omega_0\omega_1 x_0)x_0 dt. \quad (4.10)$$

С использованием (4.8) преобразуем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} & \lambda x_0 - y^2(t)x_0 - 2\omega_0\omega_1 x_0 = \\ & = -\lambda A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + y^2(t)A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - 2\omega_0\omega_1 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Интеграл (4.10) разобьем на три составляющие:

$$I_1 = \int_0^{2\pi/\omega_0} -\lambda A^2\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) dt. \quad (4.11)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi/\omega_0} A^2\omega_0 y^2(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) dt. \quad (4.12)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi/\omega_0} -2A^2\omega_0\omega_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) dt. \quad (4.13)$$

Непосредственные несложные вычисления показывают, что $I_1 = 0$, $I_3 = -2\pi\omega_1 A^2$. Тогда, для удаления секулярных членов необходимо выполнение равенства:

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} y^2(t) 2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{4\pi\omega_1}{\omega_0} \quad (4.14)$$

или

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} y^2(t) 2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) dt. \quad (4.15)$$

Так как аналитическую связь между входом преобразователя Пре-зайха и выходом в общем случае получить не представляется возможным, то для вычисления интеграл (4.15) воспользуемся численными методами. Определив значение частоты ω_1 , вернемся к выражению (4.7) и выполним для правой части разложение в ряд Фурье. Определив параметры λ , ω_0 , φ_0 , а также амплитуду нулевого решения A , получим решение уравнения (4.7). Отметим, что параметр φ_0 будет являться управляющим, а именно, любое отклонение от нулевого значения, приведет к существенному изменению формы колебаний, однако движение осциллятора при этом останется регулярным. На рис.4.1 приведены фазовые портреты уравнения (4.7), параметры которых отличаются только значениями начальных фаз.

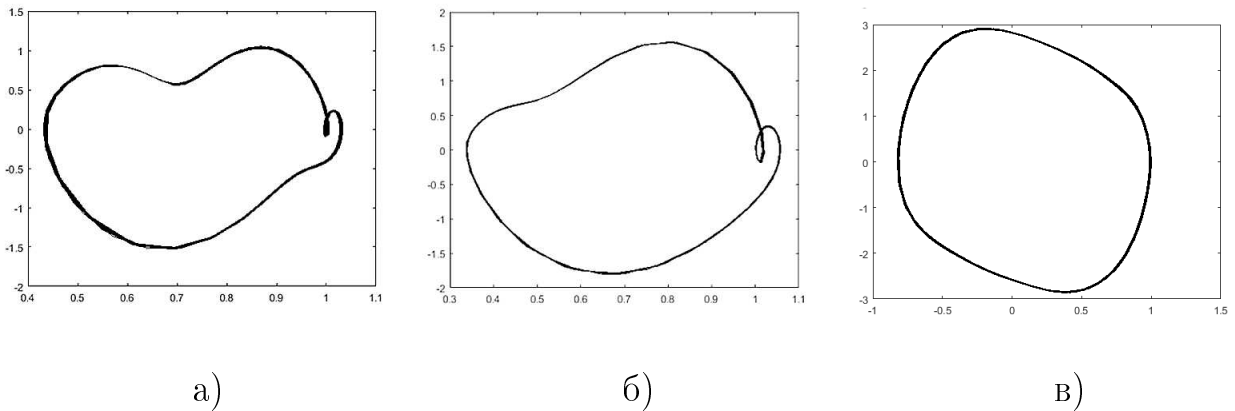


Рис. 4.1. Фазовый портрет уравнения (4.7) при значениях параметров $\lambda = 1$, $A = 1$, $\omega_0 = \pi$ а) $\varphi_0 = 0$; б) $\varphi_0 = \pi/10$; в) $\varphi_0 = \pi/2$

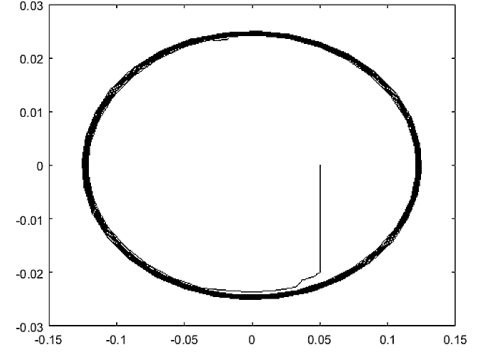
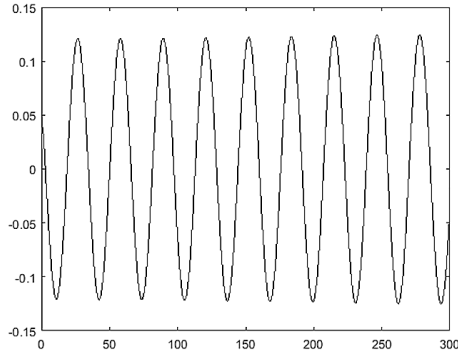


Рис. 4.3. Решение и фазовый портрет уравнения (4.1) при $\lambda = 0.2$, $A = 0.1$, $\omega_0 = 0.2$, $\varphi_0 = \pi/2$ и $\varepsilon = 0.05$

4.1.1 Сравнительный анализ классического и модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля

Представим сравнительный анализ поведения классического осциллятора Ван-дер-Поля и модифицированного уравнения Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. Запишем классическое уравнение Ван-дер-Поля без учета внешнего воздействия в следующем виде:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.16)$$

Приведем результаты численного моделирования решения уравнения (4.1) и (4.16) в зависимости от различных параметров λ и ω_0^2 . Отметим, что в отличие от поведения классического осциллятора Ван-дер-Поля, для которого характерно только периодическое движение с различной частотой и амплитудой, осциллятор, движение которого подчинено уравнению (4.1) демонстрирует несколько режимов поведения, в том числе, возможно появление резонансного движения. Далее приведем описание параметров, соответствующих эти режимам.

Если значение параметра $\lambda \geq 0.5$, а значения параметра $\omega_0^2 > 0.4$, то в осцилляторе (4.1), можно наблюдать колебания, близкие к гармоническим. При некоторых значениях параметров, эти колебания происходят

с частотой, близкой к частоте колебаний классического осциллятора Ван-дер-Поля. Однако в иных случаях (рис. 4.4), возможно появления более сложных режимов движения, с несколькими частотами. Отметим, что в случае, когда пороговые значения гистерезисного блока принадлежат интервалу от $[-1, 1]$, при значениях параметра $\lambda > 1$, то в системе (4.1) возникает резонанс. Для случаев, когда параметры принадлежат интервалам $\lambda < 0.5$ и $\omega_0^2 > 0.4$, в уравнении (4.1) наблюдаются колебания близкие как по частоте, так и амплитуде к колебаниям классического осциллятора Ван-дер-Поля.

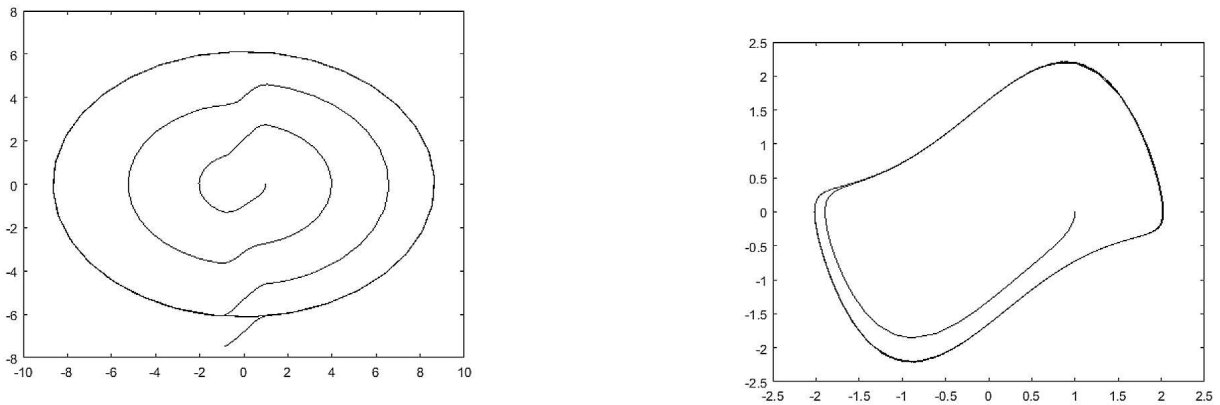


Рис. 4.4. Фазовые портреты а) для уравнения (4.1) б) для уравнения (4.16) при значении параметров $\lambda = 1$ и $\omega_0^2 = 0.5$

Как уже отмечалось выше, динамика модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля обладает рядом особенностей, отличающих его от классического. На рис. 4.6 приведено решение, фазовый портрет и спектральная характеристика осциллятора (4.1) при значениях параметров $\lambda = 0.2$ и $\omega_0^2 = 0.04$. Если $\omega_0^2 \leq 0.04$, то в поведении осциллятора (4.1) возникают следующие закономерности: при очень небольших значениях $\lambda \leq 0.15$ с увеличением времени система стабилизируется в нуле. В случае, когда $\lambda \in (0.15, 0.5)$ уравнению (4.1) соответствует хаотическое поведение осциллятора.

Здесь, как и ранее, для анализа поведения уравнения (4.1) был проведен тест на хаос 0-1, подробное описание которого дано в главе 2. На выходе

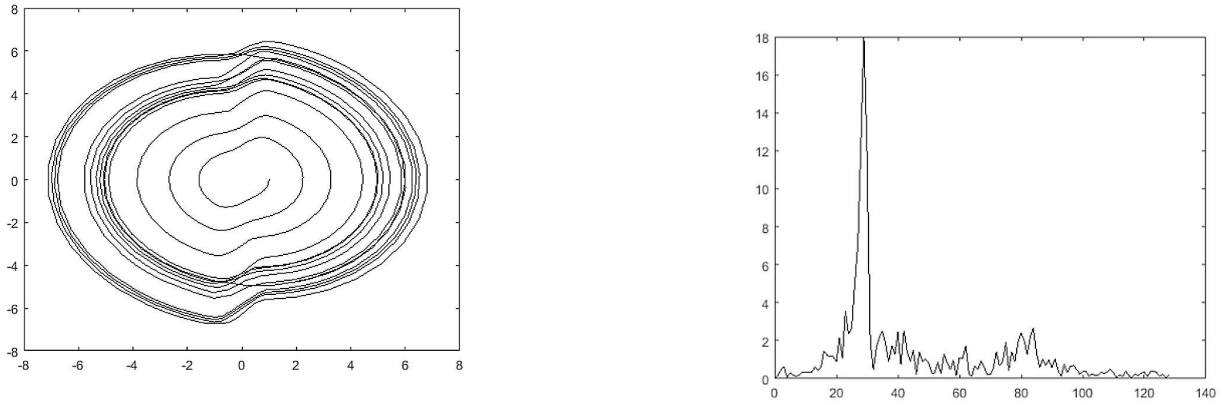


Рис. 4.5. а) фазовый портрет уравнения (4.1) б) спектральная характеристика уравнения (4.1) при значении параметров $\lambda = 0.9$ и $\omega_0^2 = 0.8$

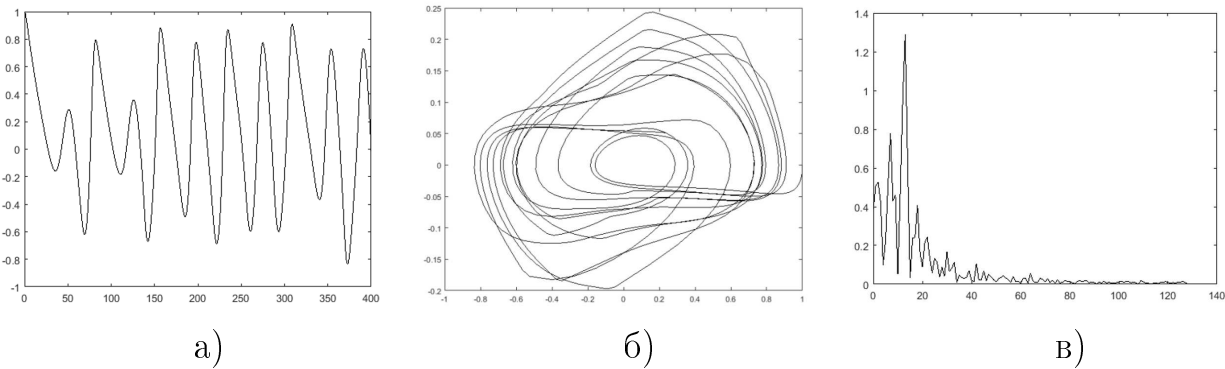


Рис. 4.6. а) решение уравнения (4.1) б) фазовый портрет уравнения (4.1) в) спектральная характеристика уравнения (4.1) при значениях параметров $\lambda = 0.2$ и $\omega_0^2 = 0.04$

тест выдает одно значение, которое трактуется следующим образом: 1 - соответствует хаотическом поведению в системе, 0 - регулярной динамике. Так параметрам $\lambda = 0.2$, $\omega_0^2 = 0.04$ в уравнении (4.1) соответствует значение теста 0.9871. При $\lambda = 0.18$, $\omega_0^2 = 0.04$ - 0.9252. А при $\lambda = 0.5$, $\omega_0^2 = 0.02$ - 0.0226. Таким образом, тест подтверждает, полученные ранее результаты. Отметим, что фактически значения теста не являются целыми числами, а лишь стремятся к нулю или единице.

4.2 Осциллятор под воздействием вынуждающей силы

Рассмотрим модифицированный осциллятор Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком, описанным с использованием оператора Прейзаха.

$$\ddot{x} - (\lambda - y^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = B^* \cos(\omega t). \quad (4.17)$$

Для нахождения аналитического решения уравнения (4.17), а также для установления зависимости между амплитудой решения и амплитудой внешнего воздействия, формально введем в уравнение (4.17) малый параметр:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon (\omega_0^2 B \cos(\omega t) + \mu (1 - \alpha y^2(t)\dot{x})) \quad (4.18)$$

Решение уравнения будем искать в виде $x = A \cos \psi + \varepsilon u_1(A, \psi) + \dots$, где $\psi = \omega t + \varphi(t)$, $u_1(A, \psi)$ – неизвестные функции не содержащие резонансных слагаемых. A и φ – амплитуда и фаза колебаний, соответственно, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A, \varphi) + \dots, \dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon F_1(A, \varphi) + \dots, \quad (4.19)$$

а $\Delta = \omega - \omega_0$ – расстройка частоты. F_1, f_1 – неизвестные функции, которые следует определить из условий отсутствия резонансных членов для функции u_1 . Тогда :

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \psi - \dot{A} \dot{\psi} \sin \psi + \varepsilon \omega \dot{u}_1 \quad (4.20)$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} \cos \psi - 2\dot{A} \dot{\psi} \sin \psi - \dot{A} \dot{\psi}^2 \cos \psi + \varepsilon \omega^2 \ddot{u}_1 \quad (4.21)$$

Подставляя общий вид решения в исходное уравнение, запишем усредненные по времени уравнения для амплитуды и фазы колебаний.

$$\dot{A} = -\frac{\omega_0 B}{2} \sin \varphi - \frac{A \mu \Delta}{2 \omega_0} (1 - \alpha y^2(t)), \dot{\varphi} = -\Delta - \frac{\omega_0 B}{2A} \cos \varphi \quad (4.22)$$

В синхронном режиме можно положить $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, и исключая из полученных уравнений φ , найдем уравнение для определения A :

$$A^2 \left((1 - \alpha y^2(t))^2 + \frac{4}{\mu^2} \right) = b^2, b = \frac{\omega_0^2 B}{\Delta}. \quad (4.23)$$

Для построения зависимости (4.23) определим усредненное значение выхода оператора Прейзаха $y^2(t)$. Для этого, пользуясь программными средствами, вычислим свободный член, при разложении в ряд Фурье гистерезисного преобразователя, на вход которого подается нулевое решение $x = A \cos(\omega_0 t + \varpi_0)$:

$$a_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} y^2(t) dt. \quad (4.24)$$

Ниже приведем графики зависимости амплитуды решения уравнения (4.17) от амплитуды внешнего гармонического воздействия при различных параметрах частоты внешнего воздействия и собственной частоты колебаний осциллятора.

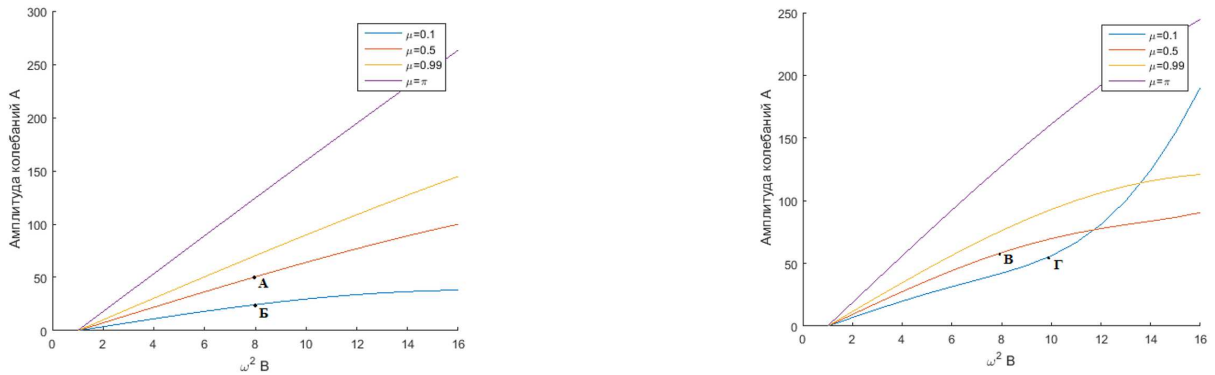
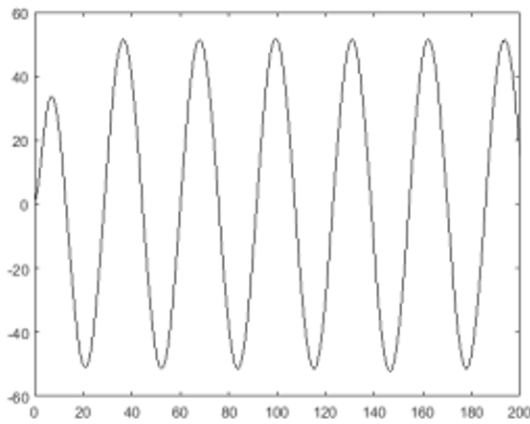
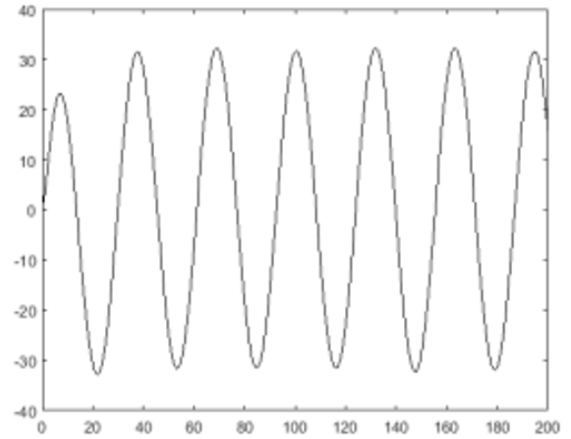


Рис. 4.7. Зависимость A от $\omega_0^2 B$ при различных значениях μ а) $\omega_0 = 0.1$, $\omega = 0.2$ б) $\omega_0 = 0.3$, $\omega = 0.2$

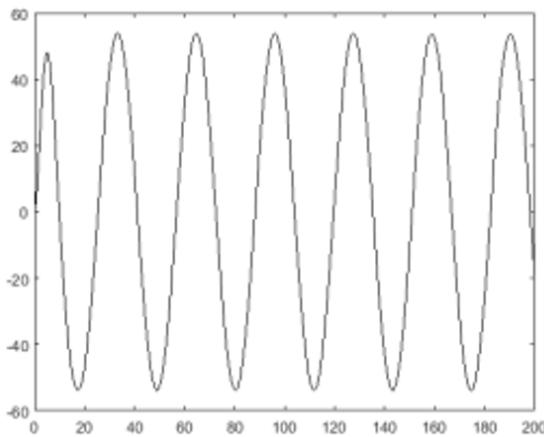
На рис. 4.7, отмечены некоторые значения параметров, которым соответствуют графики решений, приведенные на рис. 4.8 (точкам А, Б, В и Г соответствуют рис. 4.8а, 4.8б, 4.8в и 4.8г). Сопоставление соответствующих рисунков показывает, что с высокой точностью амплитуда собственных колебаний осциллятора совпадает с результатами теоретических расчетов.



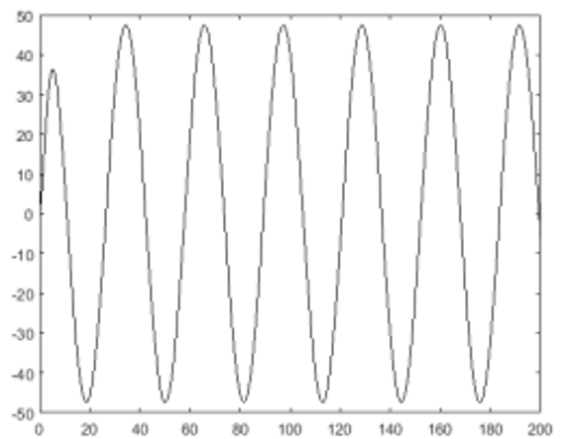
а)



б)



в)



г)

Рис. 4.8. Численное решение уравнения (4.17) при значениях параметров
 а) $\omega_0 = 0.1$, $\omega = 0.2$, $\omega_0^2 B = 8$, $\mu = 0.5$ б) $\omega_0 = 0.1$, $\omega = 0.2$, $\omega_0^2 B = 8$, $\mu = 0.1$
 в) $\omega_0 = 0.3$, $\omega = 0.2$, $\omega_0^2 B = 8$, $\mu = 0.5$ г) $\omega_0 = 0.3$, $\omega = 0.2$, $\omega_0^2 B = 8$, $\mu = 0.1$

Приведенные зависимости на графиках 4.7 и 4.8 отражают следующую закономерность: управляющий параметр уравнения (4.17) существенным образом влияет на отношение между амплитудой собственных колебаний осциллятора и амплитудой внешнего воздействия. В зависимости от значения μ возрастание амплитуд будет происходить с разной скоростью.

4.2.1 Численное исследование динамических режимов модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля

Исследуем влияния гистерезисного блока, формализованного оператором Прейзаха, на динамику поведения осциллятора, описанным при помощи уравнения (4.17). Для этого проведем сравнительный анализ полученных результатов, с результатами справедливыми для классического осциллятора Ван-дер-Поля, уравнение для которого запишем в виде:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = B^* \cos(\omega t) \quad (4.25)$$

В отличие от уравнений (4.1) и (4.16), уравнения (4.17) и (4.25) зависят от большего числа параметров, однако только при варьировании параметров λ и B^* наблюдаются существенные различия в динамике осцилляторов.

Для начала рассмотрим режимы поведения уравнений (4.17) и (4.25) при изменении параметра λ (рис. 4.9). Отметим, что, как и в случае, рассмотренном в разделе 2.4 и 4.1.1, как только значения $\lambda > 1$ в уравнении (4.17) возникает резонанс. Однако, в отличие от уравнения (4.1) при малых значениях λ стабилизации около нуля не происходит. При этом, как и для случая, рассмотренного ранее, при небольших значениях $\lambda \leq 0.2$, амплитуда собственных колебаний осциллятора (4.17) близка к амплитуде колебаний классического осциллятора Ван-дер-Поля, находящегося под гармоническим воздействием.

Бифуркационные диаграммы для уравнения (4.17) и (4.25) в зависимости от параметра ω_0^2 , демонстрируют, что поведение осциллятора в случае наличия гистерезисного блока, формализованного оператором Прейзаха, будет «близко» к поведению классического осциллятора Ван-дер-Поля, как по частоте, так и по амплитуде. Приведенные далее графики численного решения, подтверждают данное заключение (рис.4.11). Отметим, что, как и для случая с отсутствием гармонического внешнего воздействия, увеличение параметра ω_0^2 позволяет регуляризовать поведение осцилляторов.

Рассмотрим влияние амплитуды внешнего воздействия на осцилля-

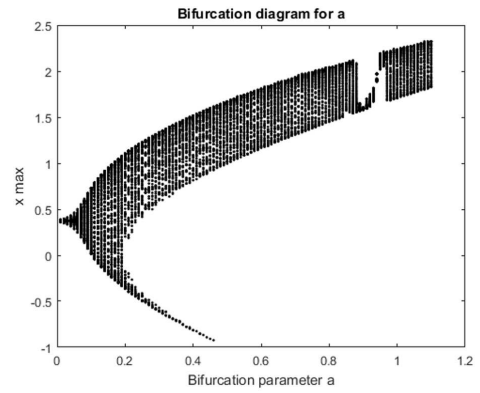
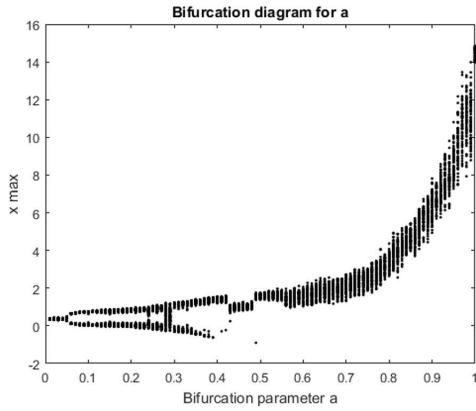


Рис. 4.9. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра λ а) для уравнения (4.17) б) для уравнения (4.25) при значениях параметров $B^* = 1.2$, $\omega = 2.1$ и $\omega_0^2 = 1.2$

тор (4.17) и (4.25), на рис. 4.12 представлена бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра B^* . Из приведенного графика, следует, что собственная амплитуда колебаний в уравнениях (4.17) и (4.25) будет близка.

Проанализируем влияние частоты внешнего воздействия на поведение осцилляторов (4.17) и (4.25). С увеличением параметра ω колебания осцилляторов из гармонических, переходят в квазигармонические. На рис. 4.13 приведены бифуркационные диаграммы для уравнения (4.17) и (4.25) в зависимости от параметра ω .

Выводы

В данной главе

- Исследована модель модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком, формализованным при помощи оператора Прейзаха. С использованием метода малого параметра были получены приближенные аналитические решения для описанной модели, при условии наличия и отсутствия вынуждающей силы.
- Установлено, что наличие гистерезисного блока в левой части уравнения, приводит к возникновению хаотических колебаний в автономной

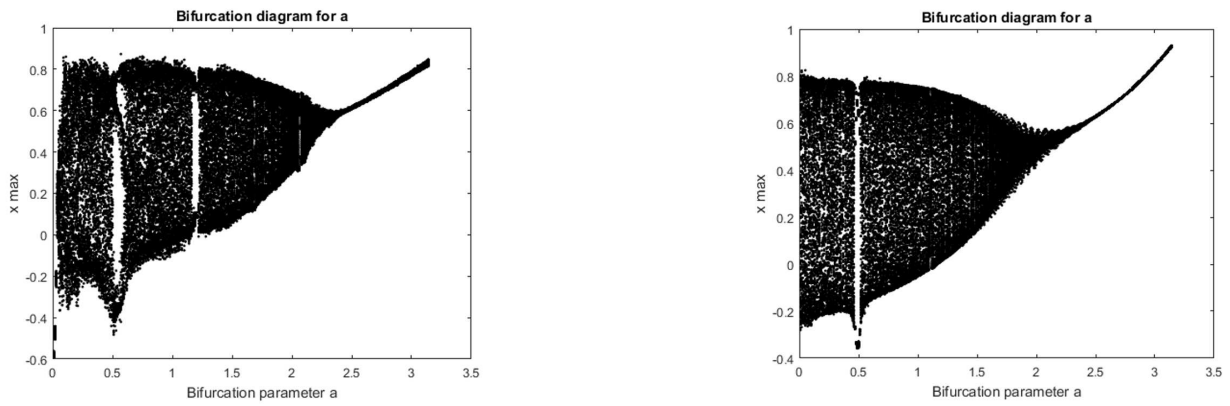


Рис. 4.10. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра ω_0^2 а) для уравнения (4.17) б) для уравнения (4.25) при значениях параметров $\lambda = 0.1, \omega = 2.1$ и $B^* = 1.2$

системе второго порядка. Также было установлено, что в зависимости от управляющего параметра λ , возможно возникновение резонанса, а также при малых значениях λ происходит стабилизация колебаний около нуля.

- Было показано, что при определенных параметрах поведение модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля близко к классическому осциллятору, как по частоте, так и по амплитуде колебаний. Однако при варьировании параметров λ и B^* в динамике осцилляторов наблюдаются существенные различия, связанные с резонансными свойствами модифицированного уравнения Ван-дер-Поля.

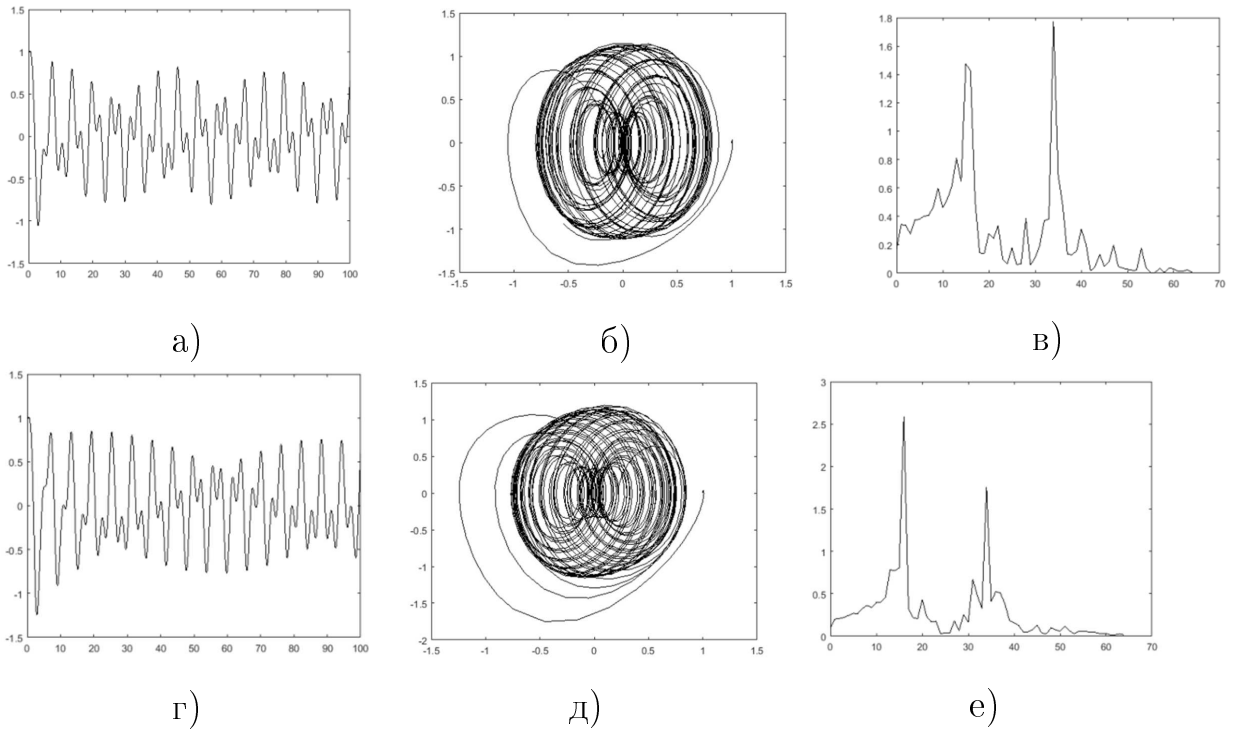


Рис. 4.11. а) решение уравнения (4.17) б) фазовый портрет уравнения (4.17) в) спектральная характеристика уравнения (4.17) г) решение уравнения (4.25) д) фазовый портрет уравнения (4.25) е) спектральная характеристика уравнения (4.25) при значениях параметров $\lambda = 0.1$, $\omega_0^2 = 1$, $B^* = 1.2$ и $\omega = 2.1$

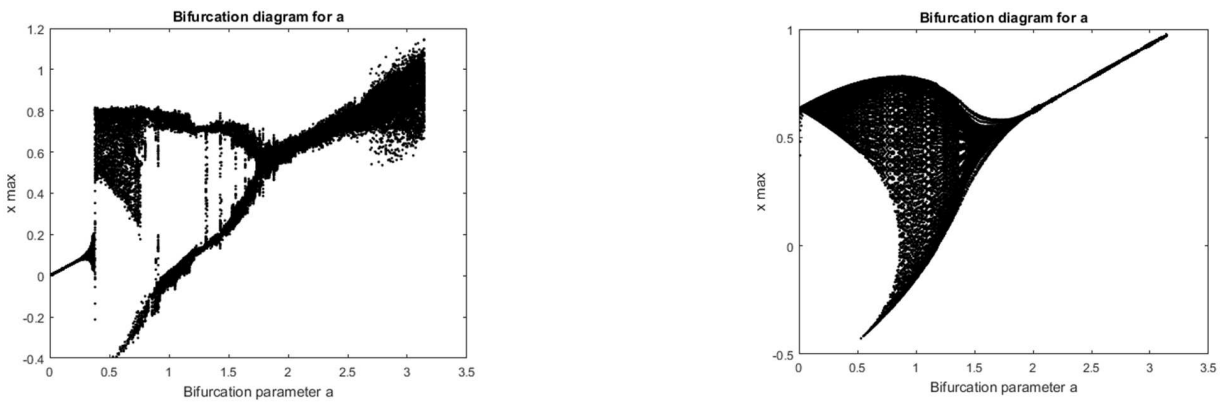


Рис. 4.12. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра B^* а) для уравнения (4.17) б) для уравнения (4.25) при значениях параметров $\lambda = 0.1$, $\omega = 2.1$ и $\omega_0^2 = 1.2$

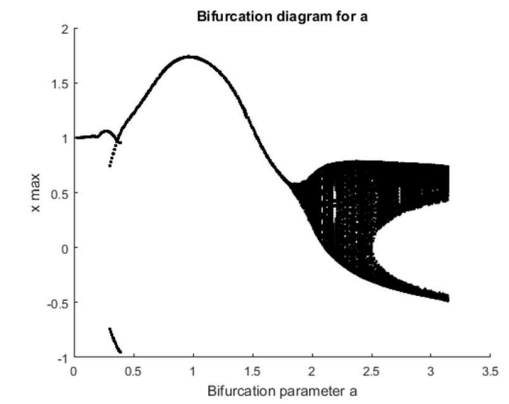
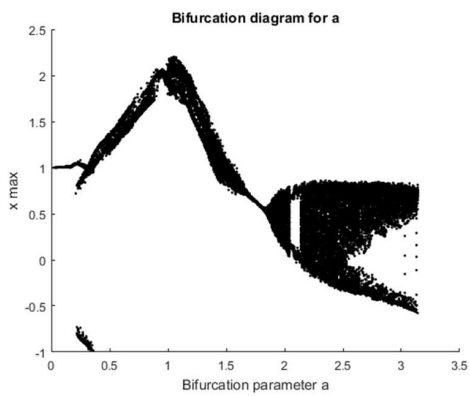


Рис. 4.13. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра ω а) для уравнения (4.17) б) для уравнения (4.25) при значениях параметров $B^* = 1.2$, $\lambda = 0.1$ и $\omega_0^2 = 1.2$

Глава 5

Программная реализация для модифицированной математической модели осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком

Одной из задач настоящей работы является разработка программного комплекса, позволяющего реализовать динамические режимы математических моделей модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля, а также системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Для реализации указанной задачи был разработан программный комплекс, включающий большое количество классов, посредством которых описываются две принципиально разные модели гистерезиса, а также реализовываются различные подходы, для установления динамических режимов исследуемых систем. Математические модели осциллятора и систем связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, для которых разработан программный комплекс, описаны в главе 3 и 4. Ниже приведем их структуру и подробное описание.

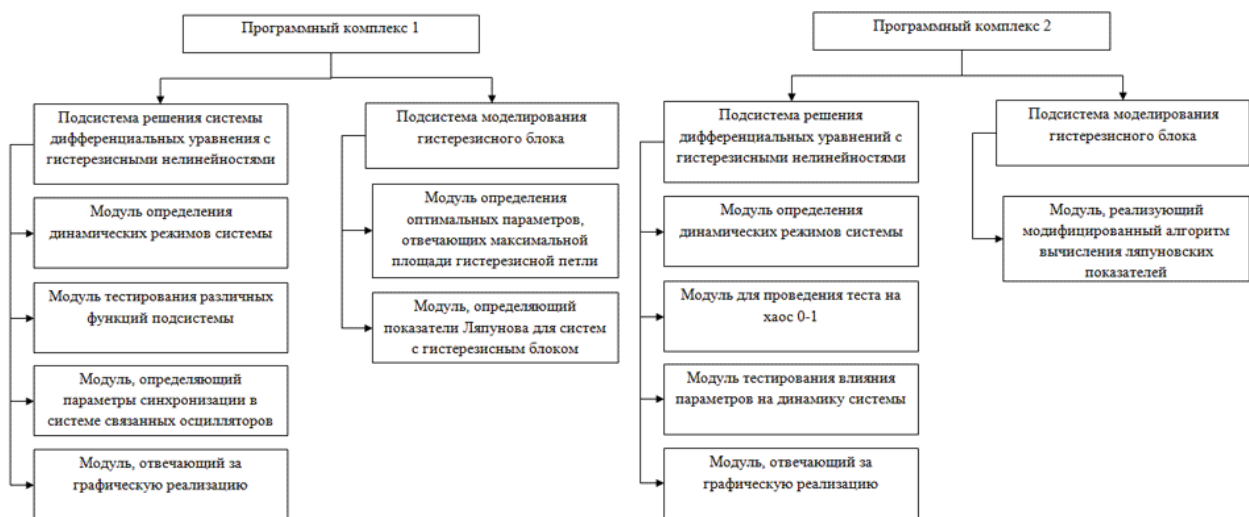


Рис. 5.1. Структура программных комплексов

5.1 Программный комплекс для моделирования динамики системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком

В качестве среды разработки использовался математический пакет MatLab. Для решения поставленной задачи, а именно, для разработки новых модификаций численных методов решения систем дифференциальных уравнений с феноменологическими моделями гистерезисными нелинейностями были созданы следующие классы:

function Van – der – Pol(x, y, t) – класс для решения системы дифференциальных уравнений, с заданными начальными условиями.

function InitBoukWen(a, b, gamma, n, symm) – класс, реализующий феноменологическую модель Боука-Вена.

function TestBoukWen(a, b, gamma, n, symm) – класс, отвечающий за определение оптимальных параметров, соответствующих максимально широкой петли гистерезиса.

function LE(x, y, t) – класс, реализовывающий модифицированный алгоритм вычисления ляпуновских показателей, для систем с гистерезис-

ным блоком.

functionBif – diagram(x, y, t) – класс, позволяющий численными методами определить динамические режимы математической модели.

functionTest – Pr(x, y, t, a, b, gamma, n, symm) – класс, определяющий параметры модели, позволяющие реализовать синхронизацию в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком.

Приведенные классы позволяют изучить поведение в системах связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, для этого программный комплекс выполняет следующие итерации:

1. Для начала, отталкиваясь от утверждения о диссипирующих свойствах гистерезисных преобразователей и используя классы *InitBoukWen* и *TestBoukWen* необходимо определить параметры, отвечающие максимальной площади петли гистерезиса.

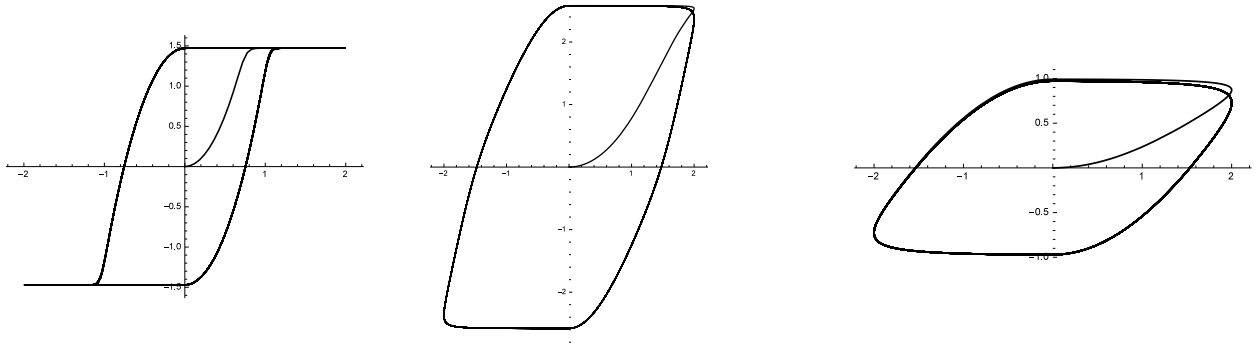


Рис. 5.2. Петля гистерезиса при значении параметров а) $A = 10$, $\beta = 1.1$, $\gamma = 0.1$, $n = 10$; б) $A = 3$, $\beta = -0.1$, $\gamma = 0.5$, $n = 2$; в) $A = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.9$, $n = 1$;

2. Далее при помощи класса *Van – der – Pol* выполняется построение численного решения системы посредством стандартных методов пакета MatLab, а именно с помощью метода Рунге - Кутты 4-го и 5-го порядка точности.

3. Для дальнейшего исследования системы, необходимо исследовать динамические режимы в зависимости от параметров, для этого используются классы *Bif – diagram* и *LE*.

дующие классы:

function Van – der – Pol_mod(x, t) – класс для решения модифицированного дифференциального уравнений Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком формализованным оператором Прейзаха.

function Preisach(L, h, mu, r, symm) – класс, реализующий модель гистерезиса – оператор Прейзха.

function Bif – diagram(x, t) – класс, позволяющий численными методами определить динамические режимы математической модели.

function ZeroOneTest(x, t) – класс, реализующий алгоритм теста на хаос 0-1, позволяющего установить динамические характеристики системы.

function LE(x, t) – класс, реализовывающий модифицированный алгоритм вычисления ляпуновских показателей, для систем с гистерезисным блоком.

function Test – Pr(x, t, a, b, gamma, n, symm) – класс, определяющий влияние параметров модели на динамику системы.

Модифицированная модель, предложенная в главе 4, принципиально отличается тем, что гистерезисный блок включен в левую часть дифференциального уравнения. Ниже приведем подробное описание программного комплекса, позволяющего изучить динамические особенности предложенной математической модели.

1. Для описания гистерезисного блока, формализованного оператором Прейзаха, используется класс *Preisach*. Конечномерная аппроксимация преобразователя Прейсаха содержит n неидеальных реле. Дополнительные коэффициенты задают наклон характеристик неидеальных реле и, как следствие, форму характеристики преобразователя Прейсаха в целом, в данной работе будем считать, характеристика преобразователя будет иметь вид, показанный на рис. 5.4.

2. Класс *Van – der – Pol – mod* выполняется построение численного решения системы посредством стандартных методов пакета MatLab, а именно с помощью метода Рунге - Кутты 4-го и 5-го порядка. Далее проводится исследование влияния параметров модели на ее динамику при помощи класса *Test – Pr*.

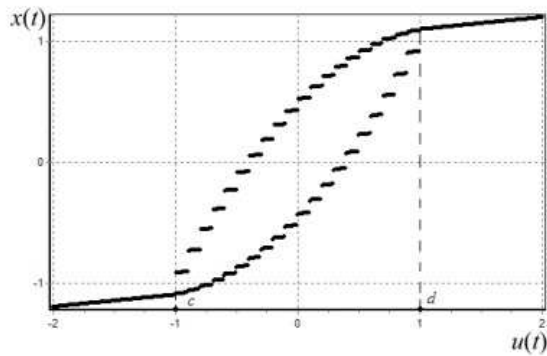


Рис. 5.4. Характеристика преобразователя Преисаха.

3. Класс *Bif – diagram* позволяет исследовать динамические режимы модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля численными методами. Классы *ZeroOneTest* и *LE* реализуют алгоритмы, позволяющие определить наличие или отсутствие хаотического поведения в системе.

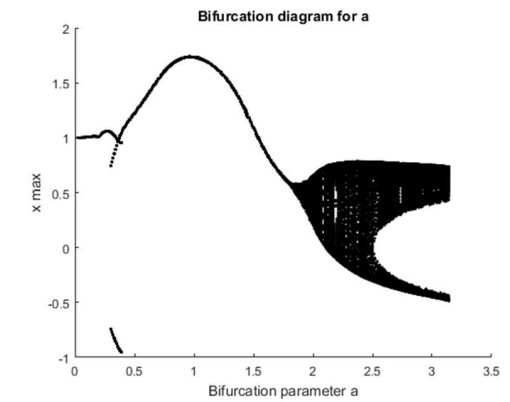
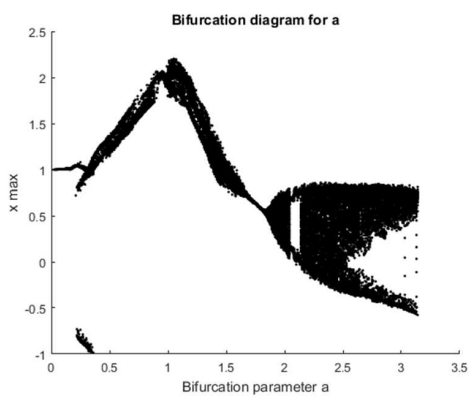


Рис. 5.5. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра ω а) для уравнения (4.17) б) для уравнения (4.25) при значениях параметров $B^* = 1.2$, $\lambda = 0.1$ и $\omega_0^2 = 1.2$

Программный комплекс, описанный в данном разделе, позволил смоделировать и исследовать модель модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. Были получены принципиально новые результаты для автономных систем, а именно, установлено возникновение хаотического поведения.

Выводы

В данной главе

- Приведено описание программной реализации для систем связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком.
- Приведено описание программной реализации для модифицированной математической модели осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком.

Заключение

Сформулируем основные результаты, изложенные в диссертации:

1. Проведен анализ динамических особенностей математических моделей автономных систем, содержащих гистерезисные звенья с инверсией пороговых чисел. Установлено возникновение автоколебательных режимов в системах с сухим и вязким трением, при наличии в них гистерезисного блока. Посредством метода малого параметра получено аналитическое решение подобных систем и исследована задача о «захвате» частоты внешнего гармонического воздействия.
2. Предложен метод позволяющий изучить динамические режимы осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком в контуре обратной связи, с использованием техники асимптотических разложений (метод малого параметра) получено аналитическое решение. Установлена регуляризирующая роль гистерезисного звена в части редукции хаотических режимов.
3. Предложен метод идентификации параметров, отвечающих за синхронизацию в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Определены интервалы значений, соответствующие как внешней, так и внутренней синхронизации. Установлено, что в системах гистерезисно-связанных осцилляторов синхронизация с внешним воздействием затруднительна.
4. Разработан алгоритм для организации вычислительного эксперимента для установлении динамических режимов, систем связанных ос-

цилляторов Ван-дер-Поля, основанный на модифицированном методе вычисления ляпуновских показателей.

5. Разработан комплекс программ для реализации вычислительного эксперимента по моделированию динамики модифицированных осцилляторов Ван-дер-Поля.

Литература

- [1] *Блехман, И. И.* Синхронизация в природе и технике / И. И. Блехман. — М.: Наука, 1981. — 352 с.
- [2] *Кузнецов, А. П.* Нелинейные колебания / А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. — М.: Физматлит, 2005. — 292 с.
- [3] The van der pol oscillator under hysteretic control: regular and chaotic dynamics / М.Е. Semenov, О.О. Reshetova, А.М. Solovyov et al. // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2019. — Vol. 1368. — P. 042030.
- [4] *Андронов, А.А.* Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, Хайкин; С.Э. — М.: Наука, 1981. — 914 с.
- [5] *Ланда, П.С.* Нелинейные колебания и волны / П.С Ланда. — М.: Наука, 1997. — 495 с.
- [6] *Ландау, Л.Д.* Механика / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Физматлит, 1958.
- [7] *Красносельский, М. А.* Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М.: Наука, 1983. — 272 с.
- [8] *Mayergoyz, I. D.* Mathematical models of hysteresis / I. D. Mayergoyz // *IEEE Transaction On Magnetics*. — 1986. — Vol. MAG-22, no. 5.
- [9] Modeling discontinuous flow through porous media using odes with preisach operator / D. Flynn, A. Zhezherun, A. Pokrovskii, J. P. O’Kane // *Physica B: Cond. Matter*. — 2008. — Vol. 403. — Pp. 440–442.

- [10] Rate-independent hysteresis in terrestrial hydrology: A vegetated soil model with preisach hysteresis / B. Appelbe, D. Flynn, H. McNamara et al. // *IEEE Control Systems Magazine*. — 2009. — Vol. 29. — Pp. 44–69.
- [11] *Brokate, M.* Weak differentiability of scalar hysteresis operators / M. Brokate, P. Krejci // *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*. — 2015. — Vol. 35. — Pp. 2405–2421.
- [12] Analysis of an operator-differential model for magnetostrictive energy harvesting / D. Davino, P. Krejci, A. Pimenov et al. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2016. — Vol. 39. — Pp. 504–519.
- [13] *Mayergoyz, I. D.* Mathematical models of hysteresis and their applications / I. D. Mayergoyz // *Elsevier*. — 2003.
- [14] *Kuczmann, M.* Dynamic Preisach hysteresis model / M. Kuczmann // *Journal of Advanced Research in Physics*. — 2010. — Vol. 1, no. 1.
- [15] *Iyer, R. V.* Approximate inversion of the Preisach hysteresis operator with application to control of smart actuators / R. V. Iyer // *IEEE Transactions On Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 6.
- [16] *Рачинский, Д. И.* О естественных континуумах периодических решений систем с гистерезисом / Д. И. Рачинский // *Автоматика и телемеханика*. — 2003. — № 3. — С. 84–103.
- [17] *Ikhouane, F.* On the hysteretic Bouc-Wen model / F. Ikhouane, J. Rodellar // *Nonlinear Dynamics*. — 2005. — no. 42. — Pp. 63–78.
- [18] *Ikhouane, F.* Systems with hysteresis: analysis, identification and control using the Bouc-Wen model / F. Ikhouane, J. Rodellar. — NJ: John Wiley, 2007.

- [19] *Charalampakis, A.E.* Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm / A.E. Charalampakis, V.K. Koumouis // *Journal of Sound and Vibration*. — 2008. — Pp. 571–585.
- [20] *Charalampakis, A.E.* Bouc-Wen model compatible with plasticity postulates / A.E. Charalampakis, V.K. Koumouis // *Journal of Sound and Vibration*. — 2009. — Pp. 954–968.
- [21] *Charalampakis, A.E.* On the response and dissipated energy of Bouc-Wen hysteretic model / A.E. Charalampakis, V.K. Koumouis // *Journal of Sound and Vibration*. — 2008. — Pp. 887–895.
- [22] *Belhaq, M.* Hysteresis suppression for primary and subharmonic resonances using fast excitation / M. Belhaq, A. Fahsi // *Nonlinear Dynamics*. — 2009. — Pp. 275–287.
- [23] *Lacarbonara, W.* Nonlinear phenomena in hysteretic systems / W. Lacarbonara, F. Vestroni // *Procedia IUTAM*. — 2012. — Pp. 69–75.
- [24] *Carboni, B.* Hysteretic beam model for steel wire ropes hysteresis identification / B. Carboni, C. Mancini, W. Lacarbonara // *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*. — 2015. — Pp. 261–282.
- [25] *Carboni, B.* Nonlinear vibration absorber with pinched hysteresis: Theory and experiments / B. Carboni, W. Lacarbonara // *Journal of Engineering Mechanics*. — 2016. — Vol. 142. — P. 04016023.
- [26] *Ван дер Поль, Б. Б.* Нелинейная теория электрических колебаний / Б. Ван дер Поль. — М.: Гос. изд-во по технике связи, 1935. — 42 с.
- [27] Van der pol type self-excited micro-cantilever probe of atomic force microscopy / H. Yabuno, H. Kaneko, M. Kuroda, T. Kobayashi // *Nonlinear Dyn.* — 2008. — Vol. 54. — P. 137.
- [28] *Dutra, M.S.* Modeling of a bipedal locomotor using coupled nonlinear oscillators of van der pol / M.S. Dutra, A.C. de Pina Filho, V.F. Romano // *Biol. Cybern.* — 2003. — Vol. 88. — P. 286.

- [29] *Ryzhii, E.* Modeling of heartbeat dynamics with a system of coupled nonlinear oscillators / E. Ryzhii, M. Ryzhii // *Communications in Computer and Information Science*. — 2014. — Vol. 404. — Pp. 67–75.
- [30] *Dos Santos Angela, M.* Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled van der pol oscillators in a model for the heartbeat / M. Dos Santos Angela, R.L. Lopes Sergio R., Viana, L. Ricardo // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier*. — 2004. — Vol. 338(3). — Pp. 335–355.
- [31] Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» / Н.С. Булдаков, Н.С. Самочетова, А.В. Ситников, С.И. Суютинов // *Наука и образование, Электронный научно-технический журнал*. — 2013. — С. 123.
- [32] *Lucero, J.* Modeling vocal fold asymmetries with coupled van der pol oscillators / J. Lucero, J. Schoentgen // *Proceedings of Meetings on Acoustics*. — 2013. — Vol. 19. 060165. — P. 1.
- [33] *Long, G.R.* Modeling synchronization and suppression of spontaneous otoacoustic emissions using van der pol oscillators: Effects of aspirin administration / G.R. Long, A. Tubis, K.L. Jones // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1991. — Vol. 89, no. 3. — P. 1201.
- [34] *Wirkus, S.* Modeling the dynamics of two coupled van der pol oscillators with delay coupling. / S. Wirkus, R. Rand // *Nonlinear Dynamics*. — 2002. — Vol. 30. — Pp. 205–221.
- [35] Synchronization of two nonscalar-coupled limit-cycle oscillators / M.V. Ivanchenko, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, J. Kurths // *Physica D*. — 2004. — Vol. 189, no. 1-2. — Pp. 8–33.
- [36] *Каганов, В.И.* Ветроэнергетический метод предотвращения развития тропического циклона / В.И. Каганов // *Письма в ЖТФ*. — 2006. — Т. 32, № 6. — С. 42.

- [37] *Гембаржевский, Г.В.* Электроразрядный эффект в плазменном течении следа: перераспределение энергии пульсаций в область низких частот / Г.В. Гембаржевский // *Письма в ЖТФ.* — 2009. — Т. 35, № 5. — С. 95.
- [38] *Poincare, H.* Les methods nouvelles de la mecanique celeste / H. Poincare. — Paris: Gauthier-Villars, 1892. — 408 pp.
- [39] *Крылов, Н.М.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. — 408 с.
- [40] *Тихонов, А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных / А. Н. Тихонов // *Матем. сб.* — 1952. — № 3. — С. 575–586.
- [41] *Понтрягин, Л.С.* Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных / Л.С. Понтрягин, Л.В. Родыгин // *Докл. АН СССР.* — 1960. — № 132. — С. 537–540.
- [42] *Edward, O.* Physical review letters / O. Edward, G. Celso, J. A. Yorke // *Controlling Chaos.* — 1990. — Vol. 64, no. 11. — Pp. 1196–1199.
- [43] *Dutra Luo, A.C.J.* Analytical solutions for periodic motions to chaos in nonlinear systems with/without time-delay / A.C.J. Dutra Luo // *International Journal of Dynamics and Control.* — 2013. — Vol. 1. — Pp. 330–359.
- [44] Pattern self-organization and pattern transition on the route to chaos in a spatiotemporal discrete predator–prey system, / T. Huang, X. Cong, H. Zhang et al. // *Advances in Difference Equations.* — 2018. — Vol. 2018. — P. 175.

- [45] Кузнецов, С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике / С. П. Кузнецов // *УФН*. — 2011. — № 181.2. — С. 121–149.
- [46] Талагаев, Ю.В. Стабилизация хаоса осциллятора Дуффинга?ван дер Поля оптимальной коррекцией управляющих параметров / Ю.В. Талагаев, А.Ф. Тараканов // *Письма в ЖТФ*. — 2006. — № 24. — С. 1–9.
- [47] Mohamed, M. Chaos suppression in forced van der pol oscillator / M. Mohamed, T. Karim, S. Belghith // *International Journal of Computer Applications*. — 2013. — Vol. 68. — Pp. 18–23.
- [48] Жусубалиев, Ж. Т. Хаотические колебания в релейной системе с гистерезисом / Ж. Т. Жусубалиев, В. С. Титов // *Автомат. и телемех.* — 2001. — № 1. — С. 67–79.
- [49] Bizzarri, F. Storage two-dimensional bifurcation diagrams of a chaotic circuit based on hysteresis / F. Bizzarri, M. Storace // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.* — 2002. — Vol. 12(1). — Pp. 43–69.
- [50] The Science of Hysteresis / M. Brokate, A. Pokrovskii, D. Rachinskii, O. Rasskazov. — Oxford: Academic Press, 2006. — 125–291 pp.
- [51] Radons, G. Nonlinear dynamics of complex hysteretic systems: Oscillator in a magnetic field / G Radons, A. Zienert // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* — 2013. — Vol. 222. — Pp. 1675–1684.
- [52] Lapshin, R. V. Analytical model for the approximation of hysteresis loop and its application to the scanning tunneling microscope / R. V. Lapshin // *Rev. Sci. Instrum.* — 1995. — Vol. 66, no. 9.
- [53] Семенов, М. Е. Модель равновесного ценообразования в условиях гистерезисной функции спроса / М. Е. Семенов, Т. В. Рудченко // *Вестник ВГУ*. — 2007. — Т. Физика, Математик, № 1. — С. 184–189.
- [54] Angeli, D. Detection of multistability, bifurcations, and hysteresis in a large class of biological positive-feedback systems / D. Angeli,

- J. E. Ferrell, E. D. Sontag // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2004. — Vol. 101. — Pp. 1822–1827.
- [55] *Dixit, A.* Hysteresis, import penetration, and exchange rate pass-through / A. Dixit // *The Quarterly Journal of Economics*. — 1989. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 205–228.
- [56] *Iyer, R. V.* Hysteresis parameter identification with limited experimental data / R. V. Iyer, M. Shirley // *IEEE Transactions on Magnetics*. — 2004. — Vol. 40, no. 5. — Pp. 3227–3239.
- [57] *Janocha, H.* FPGA-based compensator of hysteretic actuator nonlinearities for highly dynamic applications / H. Janocha, D. Pesotski, K. Kuhnen // *Proceedings of the 10th International Conference on New Actuators*. — 2006. — Pp. 1013–1016.
- [58] *Brokate, M.* Hysteresis and phase transistions / M. Brokate, J. Sprekels. — N.Y.: Springer, 1996.
- [59] *Visintin, A.* Differential Models of hysteresis (Applied Mathematical Sciences) / A. Visintin. — Berlin: Springer, 1994. — 418 pp.
- [60] *Krejci, P.* Hysteresis, convexity and dissipation in hyperbolic equations / P. Krejci. — Tokyo: Gakkotosho, 1996.
- [61] *Cook, P. A.* Nonlinear Dynamics Systems / P. A. Cook. — London: Prentice-Hall International, 1986.
- [62] *Bouc, R.* Forced vibrations of a mechanical system with hysteresis / R. Bouc // *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations*. — 1967. — Pp. 315–321.
- [63] *Bouc, R.* Modele mathematique d’hysteresis (a mathematical model for hysteresis) / R. Bouc // *Acustica*. — 1971. — Vol. 21. — Pp. 16–25.

- [64] *Wen, Y.K.* Method for random vibration of hysteretic systems / Y.K. Wen // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. — 1976. — Vol. 102 (EM2). — Pp. 246–263.
- [65] *Wen, Y.K.* Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation. / Y.K. Wen // *Journal of Applied Mechanics*. — 1980. — Vol. 47. — Pp. 150–154.
- [66] *Yoshioka, H.* Spencer jr. b.f. “smart” base isolation strategies employing magnetorheological dampers / H. Yoshioka, J.C. Ramallo, Jr. B.F. Spencer // *Journal of Engineering Mechanics*. — 2002. — Vol. 128, no. 5. — Pp. 540–551.
- [67] *Foliente, G.C.* Hysteresis modelling of wood joints and structural systems / G.C. Foliente // *ASCE Journal of Structural Engineering*. — 1995. — Vol. 121, no. 6. — Pp. 1013–1022.
- [68] *Nagarajaiah, S.* Response of base-isolated usc hospital building in northridge earthquake / S. Nagarajaiah, S. Xiaohong // *ASCE Journal of Structural Engineering*. — 2000. — Vol. 126, no. 10. — Pp. 1177–1186.
- [69] *Ismail, M.* The hysteresis bouc-wen model, a survey / M. Ismail, F. Ikhoulane, J. Rodellar // *Archives of Computational Methods in Engineering*. — 2009. — Vol. 16. — Pp. 161–188.
- [70] Charged inverted pendulum as a new model for control of unstable system / M.E. Semenov, P.A. Meleshenko, V.A. Gorlov et al. // *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*. — 2016. — P. 1938–1942.
- [71] Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems / A.M. Soloviyov, M.E. Semenov, P.A. Meleshenko et al. // *Procedia Engineering*. — 2017. — Vol. 201. — Pp. 578–583.
- [72] Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве / В.И. Рязских, М.Е. Семенов, А.Г. Рукавицын и др. //

- Вестник ЮУГУ, серия: математика, физика, механика.* — 2017. — № 3. — С. 27–33.
- [73] *Charalampos (Haris), S. G. Chaos Detection and Predictability / S. G. Charalampos (Haris), G.J. A. Laskar.* — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2016.
- [74] *Bernardini, D. An overview of 0–1 test for chaos / D. Bernardini, G. Litak // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* — 2016. — Vol. 38. — P. 1433–1450.
- [75] *Семенов, М. Е. Неограниченные и диссипативные колебания в системах с релейными нелинейностями / М. Е. Семенов, П. А. Мелешенко, О. О. Решетова // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика.* — 2018. — № 3. — С. 158–171.
- [76] *Модель стабилизации неустойчивых периодических режимов в задаче об обратном маятнике с гистерезисным управлением / М.Е. Семёнов, О.И. Канищева, П. А. Мелешенко, О. О. Решетова // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика.* — 2019. — № 1. — С. 128–136.
- [77] *On the hysteretic operators with random parameters / M.E. Semenov, O.I. Kanishcheva, P.A. Meleshenko, et al. // MATEC Web of Conferences.* — 2018. — no. 241. — P. 01020.
- [78] *Решетова, О.О. Резонансные свойства колебательной системы с гистерезисным воздействием в условиях параметрической неопределенности / О.О. Решетова // Математическое моделирование и информационные технологии в инженерных и бизнес-приложениях: Материалы международной научной конференции).* — г. Воронеж: 2018. — С. 273–279.
- [79] *Гистерезисные операторы со случайными параметрами / М. Г. Матвеев, М.Е. Семенов, О.О. Решетова и др. // Актуальные пробле-*

- мы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции. — г. Воронеж: 2017. — С. 794–798.
- [80] *Решетова, О.О.* Синхронизация периодических автоколебаний внешней силой в колебательных системах с гистерезисом / О.О. Решетова // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XVIII Международной научно-методической конференции. — г. Воронеж: 2018. — С. 31.
- [81] *Решетова, О. О.* Уравнение Дуффинга с гистерезисной нелинейностью / О. О. Решетова // Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации: труды XXVII международной научно-технической конференции. — г. Алушта: 2018. — С. 262–263.
- [82] *Семенов М. Е. and Решетова, О.О.* Динамика гармонического осциллятора с гистерезисным внешним воздействием / О.О. Семенов, М. Е. and Решетова // Современные сложные системы управления (HTCS'2018): Сборник трудов XIII Международной научно-практической конференции (17–19 октября). — г. Старый Оскол: 2018. — С. 23–25.
- [83] *Решетова, О.О.* Стабилизация неустойчивых периодических режимов в задаче о диссипативном движении обратного маятника с гистерезисным управлением / О.О. Решетова, З. Хатиф // Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации: Труды XXVI Международной научно-технической конференции. — г. Алушта: 2017. — С. 275.
- [84] *Решетова, О.О.* Синхронизация колебаний в системах с гистерезисными нелинейностями / О.О. Решетова // Современные методы и проблемы математической гидродинамики: материалы Международной научной конференции. — г. Воронеж: 2018. — С. 275.

- [85] Veskos, P. Developmental acquisition of entrainment skills in robot swinging using van der pol oscillators / P. Veskos, Y. Demiris // *Proceedings of the Fifth International Workshop on Epigenetic Robotics: Modeling Cognitive Development in Robotic Systems Lund University Cognitive Studies*. — 2005. — P. 8.
- [86] Modeling oscillations under hysteretic conditions: From simple oscillator to discrete sine-gordon model / M.E. Semenov, O.O. Reshetova, A. Tolkachev et al. // *in Topics in Nonlinear Mechanics and Physics, Singapore: Springer*. — 2019. — Vol. 228. — Pp. 229–253.
- [87] Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами / М.Е. Семенов, М. Г. Матвеев, Г. Н. Лебедев, А. М. Соловьёв // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2017. — № 8. — С. 516–525.
- [88] Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems / M.E. Semenov, A. M. Solovyov, P.A. Meleshenko, O. O. Reshetova // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. — 2020. — Vol. 15. — P. 43.
- [89] Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами / С. В. Борзунов, М. Е. Семенов, Н. И. Сельвесюк, П. А. Мелешенко // *Математическое моделирование*. — 2019. — № 7. — С. 109–126.
- [90] Semenov, M.E. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case / M.E. Semenov, A.M. Solovyov, P.A. Meleshenko // *Journal of Vibration and Control*. — 2020. — Vol. 0(0). — Pp. 1–14.
- [91] Решетова, О. О. Динамика осциллятора Ван дер Поля под воздействием гистерезисного управления / О. О. Решетова // *Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIX Международной научно-методической конференции*. — г.Воронеж: 2019. — С. 539–543.
- [92] Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов ван-дер-поля: метод

- малого параметра / А.Л. Медведский, П.А. Мелешенко, В.А. Нестеров и др. // *Изв. РАН. ТуСУ*. — 2021. — № 4. — С. 7–26.
- [93] Unstable oscillating systems with hysteresis: Problems of stabilization and control / A.L. Medvedsky, P.A. Meleshenko, V.A. Nesterov, et al. // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2020. — no. 59. — P. 533–556.
- [94] Dynamics of hysteretic-related van-der-pol oscillators: the small parameter method / A.L. Medvedsky, P.A. Meleshenko, V.A. and Nesterov, et al. // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2021. — no. 60. — P. 511–529.
- [95] Synchronization in the system of coupled van der pol oscillators under hysteretic bonds: An analytic approach within the small parameter method / M.E. Semenov, P.A. Meleshenko, O.O. Reshetova, A.M. Solovyov // *Proceedings of ITNT 2020 - 6th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology*. — 2020. — P. 9253354.
- [96] Синхронизация системы связанных осцилляторов ван дер Поля с гистерезисными звеньями: аналитический подход в рамках метода малого параметра / М.Е. Семенов, П.А. Мелешенко, А.М. Соловьев, О.О. Решетова // Сборник трудов по материалам VI Международной конференции и молодежной школы. — г. Самара: 2020. — С. 213–219.
- [97] *Semenov M.E. and, Reshetova O.O.* The van der pol oscillator under hysteretic control: regular and chaotic dynamics / Reshetova O.O. Semenov, M.E. and, V.A. Sobolev, et al. // *Journal of Physics: Conference Series*. — No. 1368. — London: 2019. — Pp. 1–8.
- [98] *Решетова, О. О.* Особенности синхронизации осцилляторов Ван-дер-Поля в условии гистерезисной связи / О. О. Решетова // *Интеллектуальноинформационные технологии и интеллектуальный*

- бизнес (ИНФОС2019): материалы десятой международной научно-технической конференции. — г. Вологда: 2019. — С. 105–110.
- [99] *Семенов, М.Е.* Гистерезисное управление динамикой осциллятора Ван-дер-Поля / М.Е. Семенов, О.О. Решетова // Проблемы и инновационные решения в химической технологии (ПИРХТ-2019) : материалы всероссийской конференции с международным участием. — г. Воронеж: 2019. — С. 25–26.
- [100] *Решетова, О.О.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном / О.О. Решетова, А. В. Толкачев // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XX Международной научно-методической конференции. — г. Воронеж: 2020. — С. 790–796.
- [101] Динамические особенности систем гистерезисно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля / М. Е. Семенов, П. А. Мелешенко, А. М. Соловьев, О.О. Решетова // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2019) : сборник трудов 5-й Международной конференции и молодежной школы. — г. Самара: 2019. — С. 483–488.
- [102] *Kuznetsov, A.P.* Coupled van der pol and van der pol–duffing oscillators: dynamics of phase and computer simulation / A.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich, L.V. Turukina // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. — 2008. — Vol. 16(4). — Pp. 101–136.
- [103] *Carboni B. and Lacarbonara, W.* Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems / W. Carboni, B. and Lacarbonara, S. Brewick, P. and Masri // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. — 2018. — Vol. 29. — Pp. 2795–2810.
- [104] *Rios, L.* A model of hysteresis arising from social interaction within a firm / L. Rios, D. Rachinskii, R. Cross // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2017. — P. 811(1):012011.

- [105] *Rios, L.* On the rationale for hysteresis in economic decisions / L. Rios, D. Rachinskii, R. Cross // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2017. — P. 811(1):012012.
- [106] Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А. Медведский, Р. Meleshenko, В. Нестеров и др. // *Изв. РАН. ТуСУ.* — 2020. — № 4. — С. 58–82.
- [107] Hopf bifurcation in symmetric networks of coupled oscillators with hysteresis / Z. Balanov, W. Krawcewicz, D. Rachinskii, A. Zhezherun // *Journal of Dynamics and Differential Equations.* — 2012. — Vol. 24. — Pp. 713–759.
- [108] Oscillations and hysteresis: from simple harmonic oscillator and unusual unbounded increasing amplitude phenomena to the van der pol oscillator and chaos control / M.E. Semenov, O.O. Reshetova, P.A. Meleshenko, A.F. Klinskikh // *Int. J. Engineering Systems Modelling and Simulation.* — 2021. — no. 11. — Pp. 147–159.
- [109] Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach / M. E. Semenov, O. O. Reshetova, S. V. Borzunov, P.A. Meleshenko // *European Physical Journal: Special Topics* *this link is disabled.* — 2021.
- [110] *Решетова, О. О.* Особенности динамики модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком / О. О. Решетова // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XXI Международной научно-методической конференции. — г.Воронеж: 2021. — С. 568–574.