На правах рукописи

Решетова Ольга Олеговна

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ МОДЕЛЕЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж 2022

Работа выполнена на кафедре цифровых технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Семёнов Михаил Евгеньевич**
Официальные оппоненты:	**Голован Андрей Андреевич**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра прикладной механики и управления, заведующий лабораторией управления и навигации
	Тихомиров Сергей Германович, доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий», факультет управления и информатики в технологических системах, кафедра информационных и управляющих систем, профессор
Ведущая организация:	«Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»)

Защита диссертации состоится «18» мая 2022 года в 15 ч. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.038.20, доктор физико-математических наук, доцент — Шабров С.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Модели осцилляторов играют фундаментальную роль при описании динамики огромного количества реальных технических систем (колебания атомов в кристаллических решетках, различные виды маятниковых механизмов, периодические процессы в динамике популяций, автоколебательные системы в человеческом организме и многие другие). Особую роль в этом широком классе играют гармонический осциллятор и осциллятор Ван-дер-Поля. Первый из них хорошо известен и является математической моделью малых колебаний математического маятника, колебаний груза на пружине и т.д. Осциллятор Ван-дер-Поля - модель, описывающая колебательные процессы в триодной электрической системе - в настоящее время применятся для моделирования разнообразных периодических движений: различные системы в радиотехнике, такие как триодный генератор и генератор на туннельном диоде, а также разнообразные приложения в робототехнике, в частности, модели поворачивающегося робота. Системы связанных осцилляторов Ван-дер-Поля моделируют сложные нелинейные процессы в физике твердого тела, а также применяются в широком спектре задач, связанных с построением процессов, протекающих в человеческом организме.

Одним из фундаментальных свойств нелинейных систем является синхронизация, а система связанных осцилляторов Ван-дер-Поля является эталоном для реализации данного явления. Этот эффект оказался наблюдаемым в системах различной природы таких, как радиотехнические и электронные устройства, лазеры, а также в ряде механических систем и др. Другое название рассматриваемого явления – "захват частоты что отвечает изменению частоты автоколебаний под действием внешней силы. Результаты в этой области получены лишь для систем с функциональными нелинейностями. Ситуация, когда автоколебания возникают в системах с операторными, в частности гистерезисными нелинейностями, к настоящему моменту не рассматривалась.

Одно из интенсивных направлений нелинейной динамики связано с изучением и стабилизацией хаотических режимов. Хорошо известно, что система осцилляторов Ван-дер-Поля, находящаяся под воздействием внешней гармонической силы, способна демонстрировать различные динамические режимы (периодический, почти периодический, хаотический). Управления такого рода системами традиционно опиралось на классические методы (принцип обратной связи, параметрический и др.). Одно из перспективных направлений управления хаотической динамикой связано с использованием гистерезисных блоков. Этот подход основан на диссипирующем свойстве гистерезисных звеньев: при обходе петли гистерезиса против часовой стрелки, гистерезисное звено удаляет из системы энергию пропорциональную площади петли. В этой связи представляется важным вопрос о возможности регуляризации хаотических движений посредством гистерезисных преобразователей.

Первым шагом, в реализации задачи управления является идентификация динамических режимов. На сегодняшний день основные методы идентификации динамических режимов связаны с вычислением показателей Ляпунова. Однако, существующие, на сегодняшний день, методы применимы лишь в случае гладкости правых частей соответствующих уравнений. В подавляющем числе публикаций, где показатели Ляпунова вычислялись для систем с недифференцируемыми правыми частями, происходила их предварительная аппроксимация гладкими функциями. При этом вопрос о корректности такой замены оставался открытым. В системах с гистерезисными нелинейностями вычисление ляпуновских показателей и вовсе затруднено (классическими методами). В этой связи представляется важным разработка приближенных методов расчета показателей Ляпунова в системах, содержащих модели гистерезисных блоков реальных технических систем.

Таким образом, возникает научная задача анализа колебательных систем (на примере гармонического осциллятора и систем осцилляторов Ван-дер-Поля) с гистерезисными нелинейностями с точки зрения решения задач синхронизации, регуляризации и управления хаотических режимов, а также стабилизации и управления.

Диссертационная работа выполнена в рамках научного направления кафедры Цифровых технологий Воронежского государственного университета и частично поддержана РФФИ (гранты № 16-08-00312, № 17-01-00251, № 19-08-00158). Программное обеспечение, созданное в рамках данной работы, получило свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ (№ 2020613349).

Цель работы. Разработка методов идентификации динамических режимов математических моделей колебательных систем (гармонического осциллятора и систем осцилляторов Ван-дер-Поля) с гистерезисными нелинейностями. Достижение указанной цели осуществлялось решением следующих задач:

1. анализ динамических особенностей моделей систем с гистерезисными нелинейностями на основе построения математических моделей модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля;

2. аналитическое и численное исследование моделей гармонического осциллятора, находящегося под воздействием внешней гистерезисной силы, посредством модификации классического метода малого параметра;

3. разработка новых модификаций численных методов решения систем дифференциальных уравнений с феноменологическими моделями гистерезисных нелинейностей;

4. алгоритмы организации вычислительного эксперимента для установления динамических режимов исследуемых моделей;

5. разработка комплекса программ, реализующего динамику гистерезисносвязанных осцилляторов Ван-дер-Поля.

Объекты исследования – механические и электротехнические системы с гистерезисными блоками.

Предмет исследования – математические модели систем с гистерезисом, численные и аналитические методы построения решений, на примере гармонического осциллятора и осциллятора Ван-дер-Поля, а также алгоритмы и программные методы, идентифицирующие режимы динамики в системах с гистерезисом.

Методы исследования. При выполнении работы использовались классические методы математического моделирования, вычислительной математики, структурного и объектно-ориентированного программирования, качественная теория дифференциальных уравнений, метод сингулярных возмущений, методы бифуркационного анализа, а также конструктивные и феноменологические модели гистерезисных преобразователей.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- идентифицированы динамические режимы математических моделей колебательных систем, отличительной особенностью которых являлось наличие гистерезисных нелинейностей, что позволило расширить карту динамических режимов исследуемых систем;
- разработан метод синхронизации систем осцилляторов Ван-дер-Поля в условиях гистерезисного воздействия позволяющий реализовать заданный динамический режим – хаотический, периодический, квазипериодический, и отличающийся от всех существующих;
- разработан комплекс программ для организации вычислительного эксперимента и реализации математических моделей колебательных систем (систем осцилляторов Ван-дер-Поля) с гистерезисными нелинейностями.

Область исследований. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки). Область исследования соответствует п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п.2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п.5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Практическая и теоретическая значимость работы. Теоретическая значимость представленной работы заключается в модификации математических моделей колебательных систем с гистерезисными блоками. В разработке метода позволяющего учесть влияние гистерезисных составляющих на динамику модифицированных систем. Результаты, полученные в работе, могут найти применение при моделировании и проектировании технических, радиотехнических систем и устройств, структурные части которых, демонстрируют гистерезисное поведение. Практическая значимость заключается в разработке программного продукта (Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2020613349), а также в организации вычислительного эксперимента позволяющего проверить адекватность построенных математических моделей.

На защиту выносятся:

- математические модели модификаций численных методов, позволяющие идентифицировать режимы динамики класса колебательных систем с гистерезисными нелинейностями;

- алгоритмы синхронизации систем модифицированных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисными блоками, оценки скорости роста неограниченных решений гармонического осциллятора с гистерезисной внешней силой;

- алгоритмы организации вычислительного эксперимента для численного расчета ляпуновских показателей систем с гистерезисными нелинейностями;

- программный комплекс, реализующий предложенные модели и методы.

Личный вклад автора. Все результаты представленной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации» (международный научно-технический семинар, г. Алушта, сентябрь 2017 г., 2018 г.), «Информатика: проблемы, методология, технологии» (международная конференция, г. Воронеж, февраль 2018 г., 2019 г., 2020 г., 2021 г.), «Современные методы и проблемы математической гидродинамики» (международная конференция, г. Воронеж, май 2018 г.), 4th Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis (Morocco, Tangier, June 2018), «Современные сложные системы управления» (HTCS-2018, международная научно-практическая конференция, г. Старый Оскол, октябрь 2018 г.), «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ, международная конференция и молодежная школа, г. Самара, май 2019 г., 2020 г.), «Проблемы и инновационные решения в химической технологии» (ПИРХТ-2019 Всероссийская конференция с международным участием, г. Воронеж, октябрь 2019 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 27 печатных работ в форме статей, тезисов и докладов [1-18], полный список работ приведен в диссертации. Из них 1 в журналах перечня ВАК и 8 в журналах, включенных в международную реферативную базу данных Scopus.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 110 наименования. Общий объем диссертации составляет 121 страницы, включая 61 рисунок.

Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель работы и задачи исследования, показана её научная новизна, приведены положения, выносимые на защиту.

В первой главе проводится обзор литературы, посвященной тематике математических моделей гистерезиса. Описываются основные результаты, полученные при изучении одной из основных моделей нелинейной динамики, а именно, осциллятора Ван-дер-Поля, а также систем связанных осцилляторов. Приводится обзор источников, посвященных применению метода малого параметра для изучения свойств динамических систем. Также подробно рассматриваются математические модели гистерезиса, описываются два подхода: операторный, на примере неидеального реле и преобразователя Прейзаха, свойства которых трактуются согласно М.А. Красносельскому и А.В. Покровскому. А также феноменологический подход, представленный посредством модели Боука-Вена.

Вторая глава посвящена рассмотрению модифицированных математических моделей гармонического осциллятора с гистерезисным звеном. В этой главе описываются динамические особенности систем с гистерезисными нелинейностями, и исследуется синхронизация в подобных системах, посредством применения классического метода малого параметра.

Ниже рассматривается математическая модель гармонического осциллятора, находящегося под воздействием силы, гистерезисной природы. Указанная модель формализуется следующим уравнением:

$$\begin{gathered}\ddot{x}+\omega^2 x = R[\alpha,\beta,\omega_r]x \\ x(0)=x_0;\dot{x}(0)=x_1.\end{gathered} \tag{1}$$

где $R[\alpha,\beta,\omega_r]$ -оператор неидеального реле с отрицательным спином, α,β - пороговые числа, а ω_r -начальное состояние. Важным свойством моделей является наличие или отсутствие неограниченных решений, оказывается, что при неограниченных условиях, наложенных на начальные состояния, уравнение (1) имеет неограниченные решения, а именно, верна следующая теорема.

Теорема: Пусть начальное значение удовлетворяет условию $x_0 \notin [\alpha,\beta]$. Тогда отвечающее ему решение неограниченно.

Замечание 1. Отметим, что решение будет осциллировать и при этом скорость роста амплитуды будет пропорционально $\sqrt{t}$.

Замечание 2. Теорема остается верной и для других гистерезисных нелинейностей. Единственное требование к ним заключается в положительности площади петли и обходе петли по часовой стрелке.

Естественным обобщением рассматриваемой системы являются системы с различными видами трения(сухое и вязкое). Система с вязким трением и гистерезисным блоком в правой части удовлетворяет соотношению:

$$\begin{gathered}\ddot{x}+2b\dot{x}+\omega^2 x = R[\alpha,\beta,\omega_r]x \\ x(0)=x_0;\dot{x}(0)=x_1.\end{gathered} \tag{2}$$

В работе показано, что система (2) имеет единственный устойчивый цикл, при этом квадрат амплитуды колебаний пропорционален площади петли неидеального реле. Аналогичный результат будет верен и для осциллятора с сухим трением.

Явление синхронизации периодических автоколебаний гармонической внешней силой можно сформулировать следующим образом, как только частота внешнего воздействия становится близка к частоте свободных автоколебаний, происходит синхронизация ("захват") частоты. Ниже рассматривается система с соответствующими начальными условиями:

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+\omega_0^2 x = R[\alpha,\beta,\omega_r]x + B_1\sin\omega t. \tag{3}$$

Для построения аналитического решение воспользуемся методом малого параметра. Решение будем искать в виде:

$$x = A\cos\psi + \varepsilon u_1(A,\psi) + \ldots, \tag{4}$$

где ε – малый параметр, $\psi = \omega t + \varphi(t)$, а $u_1(A,\psi), \ldots$ – неизвестные функции, не содержащие резонансных слагаемых. A и φ – амплитуда и фаза колебаний, соответственно, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A,\varphi) + \ldots;\ \dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon F_1(A,\varphi) + \ldots, \tag{5}$$

а $\Delta = \omega - \omega_0$ – расстройка частоты. F_1, f_1 – неизвестные функции, которые подлежат определению из условия отсутствия резонансных слагаемых в функции u_1:

$$\dot{A} = -\beta A - \frac{B_1\sin\varphi}{\omega+\omega_0}, \dot{\varphi} = -\Delta + \frac{R[\alpha,\beta,\omega_r]x}{2} - \frac{B_1\cos\varphi}{A(\omega+\omega_0)}. \tag{6}$$

Рис. 1. а) область захвата частоты; б) бифуркационная диаграмма для уравнения (7) в зависимости от параметра E при $A = 0,5$; $\gamma = 0,1$; $\omega_0^2 = 1$; $\omega = 1$.

Решение этой системы позволяет идентифицировать область захвата частоты, показанную на рис. 1а.

Также в этой главе, для математической модели гармонического осциллятора с вязким трением под действием периодической силы, с гистерезисным блоком, формализованным оператором Прейзаха, проведена идентификация режимов движения в зависимости от параметров системы.

Математическая модель осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \gamma x + \omega_0^2 x = A\sin\omega t + Ey(t). \tag{7}$$

здесь $y(t)$ - выход преобразователя Прейзаха. Бифуркационная диаграмма для уравнения (7) приведена на рис. 1б.

Очевидно, что с увеличением параметра E, динамика осциллятора из регулярной переходит в хаотическую. Проведенный тест на хаос 0-1 при фиксированном наборе параметров $A = 0,5$, $\gamma = 0,1$, $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$ показал следующие значения, при $E = 1,1$ - 0,1860, а при $E = 1,6$ - 0,9849 .

Исследование динамических режимов осциллятора в зависимости от параметров A и ω, показало, что варьирование лишь одного из них не позволяет регуляризировать поведение осциллятора. При этом изменение γ существенным образом влияет на динамику уравнения.

В третей главе исследуется математическая модель гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, для которой предложен метод позволяющий получить аналитическое решение системы, а также решить вопрос о синхронизации осцилляторов, как внешней, так и внутренней.

Математическая модель осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным звеном, которая описывается уравнением следующего вида:

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega t) + \Phi_{BW}(x,t), \tag{8}$$

где $\Phi_{BW}(x,t)$ – феноменологической модели Боука-Вена, которая определяется соотношениями:

$$\begin{cases} \Phi_{BW}(x,t) = \alpha x(t) + (1-\alpha)z(t), \\ \dot{z}(t) = A_1\dot{x}(t) - \beta|\dot{x}(t)||z(t)|^{n-1}z(t) - \gamma\dot{x}(t)|z(t)|^n. \end{cases} \tag{9}$$

Применив модифицированный метод малого параметра, запишем уравнения для определения амплитуды и фазы колебаний.

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{\omega_0^2 B + b_1}{2\omega_0}\sin\varphi + \frac{\mu}{2}A\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right), \\ \dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega_0^2 B + a_1}{2\omega_0 A}\cos\varphi. \end{cases} \tag{10}$$

В синхронном режиме, полагая $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ и исключая φ, найдем уравнение для определения A:

$$\left(\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)^2 + 4\frac{\Delta^2}{\mu^2}\frac{(\omega_0^2 B + b_1)^2}{(\omega_0^2 B + a_1)^2}\right)\frac{A^2}{A_0^2} = \alpha\frac{(\omega_0^2 B + b_1)^2}{4\omega_0^2\mu^2}. \tag{11}$$

На рис. 2 приведены графики, полученные при проведении вычислительного эксперимента, описывающие зависимости амплитуды решения от амплитуды внешнего воздействия с учетом различных параметров модели Боука-Вена, а также параметра μ.

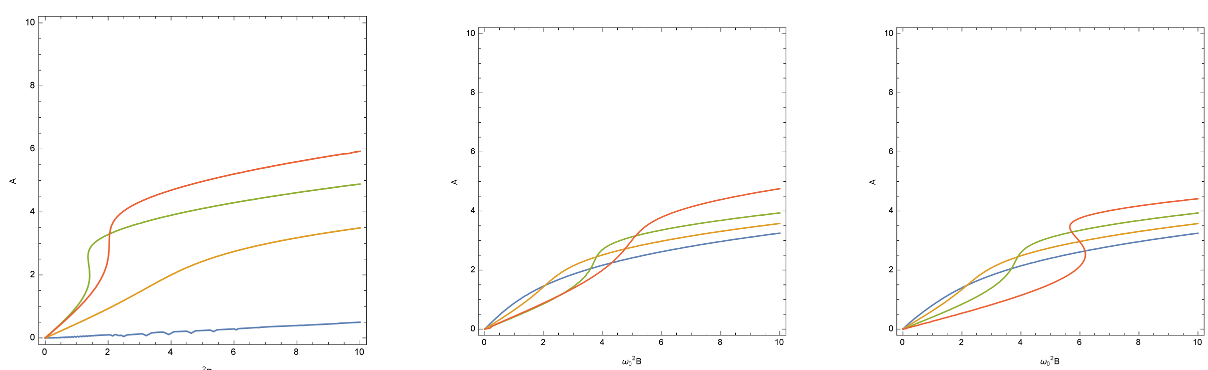

Рис. 2. Вычислительный эксперимент для определения зависимости амплитуд решения A от амплитуды вынуждающей силы $\omega_0^2 B$ для различных значений μ а) для уравнения не содержащего гистерезисный блок; б) при значении параметра модели Боука- Вена $n = 1$; в) при значении параметра модели Боука- Вена $n = 2$.

Так как получить в общем случае аналитическое решение для математической модели осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком формализованным моделью Боука-Вена крайне затруднительно, то далее численное решение уравнения (11) находится посредством следующей реализации:

```
ContourPlot[{eq (A_ {0}, A) = k^{2}}, {A_ {0}, 0.1, pi}, {k, 0, 10}, {A, 0, 10, 0.1}, Frame → True,
  FrameLabel → {…}, PlotLegends → {…}].
```

Рис. 3. Численная реализация для решения уравнения (11).

Известно, что в осцилляторе Ван-дер-Поля, находящегося под воздействием внешней периодической силы, могут реализовываться различные режимы динамики: периодический, квазипериодический, хаотический режим. В процессе работы был разработан алгоритм для численного расчета ляпуновских показателей систем с гистерезисными нелинейностями. Ниже приведем его основные шаги:

1. находим новое состояние системы $\mathbf{x}^j$;

2. находим матрицу Якоби $\mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})$;

$$\dot{\mathbf{G}}_t(x_0) = \frac{\partial \mathbf{f}[\phi_t(\mathbf{x}_0)]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{G}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{I} \tag{12}$$

3. вычисляем новые возмущения $u_i^{(j)} = \mathbf{G}_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})\delta\hat{\mathbf{x}}_i^{(j-1)}$

4. используя алгоритм Шмидта-Грамма строим ортогональную систему начальных возмущений. Получаем оценку ляпуновских показателей

$$\lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^{J} \ln |\delta \mathbf{x}_i^j|}{t_J} \tag{13}$$

5. оценка матрицы Якоби

$$\mathbf{G}_t(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\Delta}[\varphi_t(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{e}_1) - \varphi_t(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_t(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{e}_n) - -\varphi_t(\mathbf{x})] \tag{14}$$

   для малого $\Delta \in R$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ - канонический базис в R^N. Параметр Δ выбирается таким образом, чтобы $\Delta \gg h$, где h - шаг интегрирования и $\Delta \ll T$, где T - время соответствующей оценки ляпуновского показателя.

Используя алгоритм описанный выше, для значений $\mu = 3, 4$, $\omega_0^2 B = 2\pi, \omega = 0,7$ и $\omega_0^2 = \pi$ был вычислен спектр показателей Ляпунова: [0,109414; -2,41502; 0,0] соответствующий хаотическому режиму. Известно, что гистерезисное слагаемое способно регуляризировать сложные, в том числе, и хаотические движения. Приведем результаты вычислительного эксперимента.

Объяснить существенные отличия в динамике уравнений можно тем, что включение гистерезисного звена приводит к диссипации энергии. При

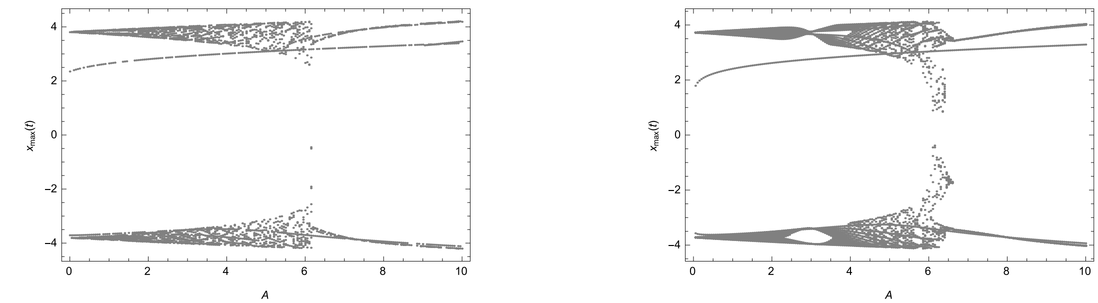

Рис. 4. Вычислительный эксперимент - бифуркационные диаграммы в зависимости от амплитуды внешнего воздействия для уравнения (8) и для аналогичного уравнения без гистерезисного блока при значении параметров $\mu = 3,4$; $\omega_0^2 = \pi$; $\omega_0^2 B = 2\pi$; $\omega = 0,7$.

значении параметров $\mu = 3,4$, $\omega_0^2 = \pi$, $\omega_0^2 B = 2\pi$, $\omega = 0,7$ уравнению (8) соответствует регулярное движение. Это подтверждают показатели Ляпунова, они будут равны: [0,00017; -0,93562; -11,16941].

Далее рассмотрим модифицированную математическую модель, описывающую систему связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком в первом уравнении.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x & = & B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) + b\Phi_{BW}(x,t), \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y & = & \nu x. \end{array} \right. \tag{15}$$

Наибольший интерес представляет динамика осциллятора y в зависимости от наличия или отсутствия гистерезисного блока в системе (15). На рис.5 приведены результаты вычислительного эксперимента для поведения осциллятора y в зависимости от параметра ν:

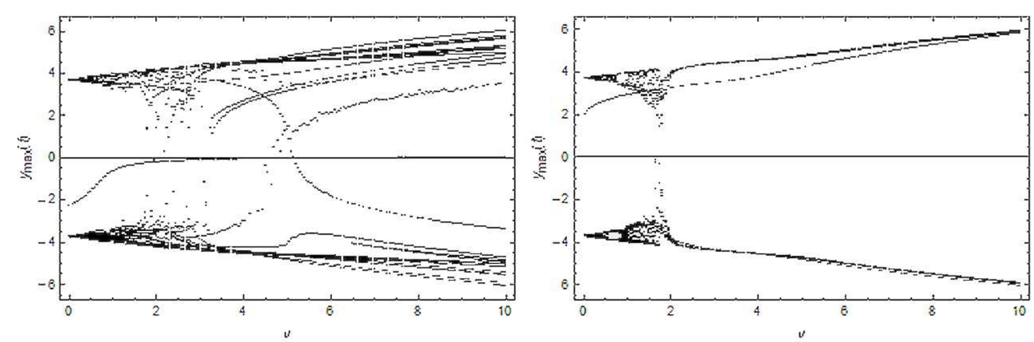

Рис. 5. Вычислительный эксперимент - бифуркационные диаграммы для осциллятора y в зависимости от параметра ν для системы без гистерезисного блока и системы (15).

Вычислительный эксперимент для построенной модели посредством использования разработанного комплекса программ позволяет показать, что при параметрах $\mu = 3,4$, $\omega_1^2 = \omega_1^2 = \pi$, $B = 2$, $\omega = 0,7$ и $\nu = 2$ спектры показателей Ляпунова равны - [0,11029; -0,15691; -2,41723; -4,93154] для системы без гистерезисного блока, и [0,00019; -0,183281; -0,935938; -5,54008; -11,1454] для системы (15) при тех же значениях параметров, а также при $b = 1,7$. Полученные данные показывают, что включение в математическую модель гистерезисного блока позволяет регуляризовать поведение системы.

Также предложена математическая модель для перекрестно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля с несимметричной связью, в которой вынуждающая сила, действующая на первый из них, определяется выходом гистерезисного преобразователя, на вход которого подается рассогласование между скоростями осцилляторов:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \mu(1-\lambda x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x = B\omega_1^2 \cos(\omega_v t) + b\Phi_{BW}(\dot{y}-\dot{x}), \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y = \nu x. \end{cases} \tag{16}$$

В отличие от (15), синхронизация в системе (16) затруднительна, так как вынуждающая сила, действующая на первый осциллятор, определяется выходом гистерезисного преобразователя, вход которого, в свою очередь, зависит от рассогласования между скоростями осцилляторов.

В четвертой главе диссертации выполняется построение математической модели модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. В процессе компьютерного моделирования было проведено исследование динамики такой системы и выполнен сравнительный анализ с результатами, полученными для классического осциллятора Ван-дер-Поля.

Рассмотрим уравнение, которое является аналогом уравнения Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком, включенным в левую часть

$$\ddot{x} - (\lambda - y^2(t))\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{17}$$

где $y(t)$ – это выход преобразователя Прейзаха, входом для которого является переменное состояние осциллятора Ван-дер-Поля $(x(t))$.

Отметим, что в отличие от классического математической модели осциллятора Ван-дер-Поля, для которого характерно только периодическое движение с различной частотой и амплитудой, осциллятор, движение которого подчинено уравнению (17) демонстрирует несколько режимов поведения, в том числе, возможны и хаотические колебания.

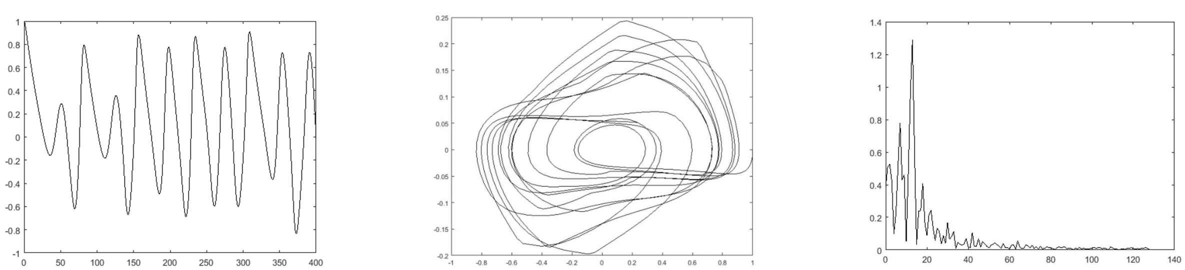

Рис. 6. Вычислительный эксперимент для уравнения (17) при значениях параметров $\lambda = 0,2$ и $\omega_0^2 = 0,04$.

Как уже отмечалось выше, динамика модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля обладает рядом особенностей, отличающих его от классического. На рис. 6 приведено решение, фазовый портрет и спектральная характеристика осциллятора (17) при значениях параметров $\lambda = 0,2$ и $\omega_0^2 = 0,04$. Если $\omega_0^2 \leq 0,04$, то в поведении осциллятора (17) возникают следующие закономерности: при малых λ ($\lambda \leq 0,15$) с увеличением времени система стабилизируется в нуле. В случае, когда $\lambda \in (0,15; 0,5)$ уравнению (17) соответствует хаотическое поведение осциллятора. Для анализа поведения уравнения (17) был проведен тест на хаос 0-1. Так для параметров $\lambda = 0,2$, $\omega_0^2 = 0,04$ в уравнении (17) получено - 0,9871, что соответствует хаотическому поведению. При $\lambda = 0,18$, $\omega_0^2 = 0,04$ - 0,9252. А при $\lambda = 0,5$, $\omega_0^2 = 0,02$ - 0,0226 значение, соответствующее регулярной динамике. Таким образом, тест подтверждает, полученные ранее результаты.

Пятая глава посвящена программной реализации и описанию предложенных алгоритмов, структура разработанного комплекса программ представлена на рис. 7. Слева представлена реализации алгоритма вычисления решения дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью формализованной феноменологической моделью Боука-Вена, а справа модифицированный алгоритм численного расчета ляпуновских показателей для уравнения с гистерезисной нелинейностью, а также построения численного решения для математической модели осциллятора Ван-дер-Поля с операторной нелинейностью.

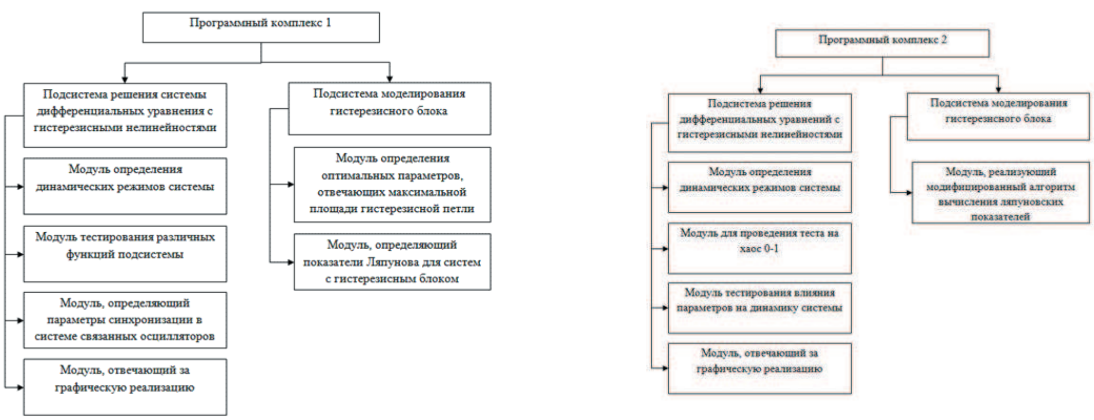

Рис. 7. Структура программных комплексов.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты:

1. проведен анализ динамических особенностей математических моделей автономных систем, содержащих гистерезисные звенья с инверсией пороговых чисел. Установлено возникновение автоколебательных режимов в системах с сухим и вязким трением, при наличие в них гистерезисного блока. Посредством метода малого параметра получено аналитическое решение подобных систем и исследована задача о «захвате» частоты внешнего гармонического воздействия;

2. предложен метод позволяющий изучить динамические режимы осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком в контуре обратной связи, с использованием техники асимптотических разложений (метод малого параметра) получено аналитическое решение. Установлена регуляризирующая роль гистерезисного звена в части редукции хаотических режимов;

3. предложен метод идентификации параметров, отвечающих за синхронизацию в системе связанных осцилляторов Ван-дер-Поля. Определены интервалы значений, соответствующие как внешней, так и

внутренней синхронизации. Установлено, что в системах гистерезисно-связанных осцилляторов синхронизация с внешним воздействием затруднительна;

4. разработан алгоритм для организации вычислительного эксперимента для установлении динамических режимов, систем связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, основанный на модифицированном методе вычисления ляпуновских показателей;

5. разработан комплекс программ для реализации вычислительного эксперимента по моделированию динамики модифицированных осцилляторов Ван-дер-Поля.

Публикации автора по теме диссертации

Публикация в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

[1] Неограниченные и диссипативные колебания в системах с релейными нелинейностями / М. Е. Семёнов, П. А. Мелешенко, О. О. Решетова // *Вестник ВГУ: Физика. Математика* .— 2018.— № 3.— С. 158-171.

Публикация в журналах из реферативной базы данных Scopus:

[2] Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems / A. M. Solovyov, M. E. Semenov, P. A. Meleshenko et al.// *Procedia Engineering.* — 2017. — Vol. 201. — Pp. 578–583.

[3] Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems / M. E. Semenov, A. M. Solovyov, P. A. Meleshenko, O. O. Reshetova // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena.* — 2020. — Vol. 15. — Pp. 43.

[4] Oscillations and hysteresis: from simple harmonic oscillator and unusual unbounded increasing amplitude phenomena to the van der Pol oscillator and chaos control / M. E. Semenov, O. O. Reshetova, P. A. Meleshenko, A. F. Klinskikh // *Int. J. Engineering Systems Modelling and Simulation.* —2020. — Vol. 11. — Pp. 147–159.

[5] Unstable Oscillating Systems with Hysteresis: Problems of Stabilization and Control / A. L. Medvedsky, P. A. Meleshenko, V. A. Nesterov, . O. O. Reshetova, M. E. Semenov, A. M. Solovyov // *Journal of Computer and Systems Sciences International* . —2020. — Vol. 59. — Pp. 533–556.

[6] Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach/ M. E. Semenov, O. O. Reshetova, S. V. Borzunov, P. A. Meleshenko // *European Physical Journal: Special Topicsthis link is disabled* . —2021.

[7] Dynamics of Hysteretic-Related Van-Der-Pol Oscillators: the Small Parameter Method / A. L. Medvedsky, P. A. Meleshenko, V. A. Nesterov, . O. O. Reshetova, M. E. Semenov // *Journal of Computer and Systems Sciences International* . —2021. — Vol. 60. — Pp. 511–529.

[8] The van der Pol oscillator under hysteretic control: regular and chaotic dynamics / M. E. Semenov, O. O. Reshetova, V. A. Sobolev et al.// *Journal of Physics: Conference Series.* — London: 2019. — Vol. 1368. — Pp. 1–8.

[9] Synchronization in the system of coupled van der Pol oscillators under hysteretic bonds: An analytic approach within the small parameter method/ M. E. Semenov, P. A. Meleshenko, O. O. Reshetova, A. M. Solovyov// *Proceedings of ITNT 2020 - 6th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology* . —2020. — Pp. 9253354.

Прочие журналы, материалы конференций, статьи в сборниках:

[10] Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А. Л. Медведский, П. А. Мелешенко, В. А. Нестеров, О. О. Решетова, М. Е. Семёнов, А. М. Соловьёв // *Изв. РАН. ТиСУ* . — 2020. — № 4. — С. 58-82.

[11] Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов ван-дер-поля: метод малого параметра / А. Л. Медведский, П. А. Мелешенко, В. А. Нестеров, О. О. Решетова, М. Е. Семёнов, А. М. Соловьёв // *Изв. РАН. ТиСУ* . — 2021. — № 4. — С. 7-26.

[12] Автоколебания в системе с гистерезисом: метод малого параметра / М. Е. Семёнов, О. О. Решетова, С. В. Борзунов, П. А. Мелешенко, О. И. Канищева // *Вестник ВГУ: Системный анализ и информационные технологии* . — 2021. — № 4. — С. 37-53.

[13] Модель стабилизации неустойчивых периодических режимов в задаче об обратном маятнике с гистерезисным управлением / М. Е. Семёнов, О. И. Канищева, П. А. Мелешенко, О. О. Решетова, З. Хатиф // *Вестник ВГУ: Физика. Математика* . — 2019. — № 1. — С. 128-136.

[14] *Решетова, О. О.* Синхронизация периодических автоколебаний внешней силой в колебательных системах с гистерезисом / О. О. Решетова // *Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XVIII Международной научно-методической конференции.* — Т. 2. — г. Воронеж: 2018. — С. 31.

[15] *Решетова, О. О.* Уравнение Дуффинга с гистерезисной нелинейностью / О. О. Решетова // *Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации: труды XXVII международной научно-технической конференции.* — г. Алушта: 2018. — С. 262-263.

[16] *Решетова, О. О.* Динамика осциллятора Ван дер Поля под воздействием гистерезисного управления / О. О. Решетова // *Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIX Международной научно-методической конференции.* — г. Воронеж: 2019.

[17] *Решетова, О. О.* Особенности синхронизации осцилляторов Ван-дер-Поля в условии гистерезисной связи / О. О. Решетова // *Интеллектуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС2019): материалы десятой международной научно-технической конференции.* — г. Вологда: 2019. — С. 105-110.

[18] *Решетова, О. О.* Особенности динамики модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком / О. О. Решетова // *Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XXI Международной научно-методической конференции.* — г. Воронеж: 2021. — С. 568-574.

Свидетельства о регистрации программных продуктов

[1] Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2020613349.