на правах рукописи

ЛИТВИНОВ ДМИТРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ГРАФЕ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2022

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, доцент, Шабров Сергей Александрович

Официальные оппоненты:

Постников Евгений Борисович, доктор физико–математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», факультет физики, математики, информатики, кафедра физики и нанотехнологий, профессор;

Горбунов Вячеслав Алексеевич, доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», институт математики, естественных и компьютерных наук, кафедра автоматики и вычислительной техники, профессор

Ведущая организация

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Защита состоится «14» сентября 2022 года в 15 ч. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте hppt://www.science.vsu.ru

Автореферат разослан «___» ____________ 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.038.20, доктор физико–математических наук, доцент — Шабров С. А.

Актуальность темы.

В последние десятилетия возрастает актуальность моделирования и исследований процессов в науке и технических приложениях, имеющих характер сетей, прежде всего в тех областях, где такая особенность обусловлена геометрическими свойствами исследуемых объектов. Прежде всего это заметно в бурно развивающихся приложениях нанотехнологий, где субатомный характер технологических задач предполагает кардинально новые подходы в моделировании процессов и явлений, проходящих в линейных фрагментах изучаемого объекта. Это только одно из возможных приложений математических моделей, которые используют формализмы эволюционных систем с локализованными особенностями на геометрических графах. Группа математиков, работавших под руководством профессора Ю.В. Покорного, создала качественную теорию краевых задач второго порядка на геометрическом графе. К настоящему времени для уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами, рассматриваемых на геометрических графах, изучен вопрос о разрешимости задачи с краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля при условиях трансмиссии во внутренних вершинах графа, вопрос о структуре спектра, получен аналог осцилляционной теоремы Штурма, установлен аналог формулы Даламбера, разработаны алгоритмы для численного решения. Начато исследование задач на графе, когда коэффициенты и правая часть не только не являются непрерывными, но и могут иметь особенности типа дельта-функций и их производных. Здесь можно отметить работы следующих авторов: Ю.В. Покорного, О.М. Пенкина, В.Л. Прядиева, А.В. Боровских, В.В. Провоторова, В.А. Юрко, М.Ш. Бурлуцкую, А.П. Хромова, Ali-Mehmeti F., Belov J., Lagnese J.E., Nicaise S., Rannacher R., Roth J.P. и других. Актуальность диссертационной работы обусловлена необходимостью развивать имеющиеся и разрабатывать новые подходы для анализа математических моделей малых деформаций и вынужденных колебаний на геометрическом графе, численные методы и алгоритмы определения классических решений.

Цель работы. Разработка и развитие новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложной физической системы, состоящей из сетки из струн, помещенной во внешнюю среду, реализуемых в виде граничных и начально-граничных задач для дифференциальных уравнений, разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и практического характера:вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями; вариационное обоснование математической модели, описывающей малые деформации системы, состоящей из сетки из струн, помещённой во внешнюю среду; доказательство корректности рассматриваемых математических моделей; доказательство возможности применения метода Фурье; разработка численных методов для нахождения приближенного решения математических моделей с локализованными особенностями; разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных и начально-граничных задач, разработка комплекса программ для ЭВМ, проведение вычислительных экспериментов на тестовых задачах; решение задач прикладного характера; нахождение приближенного решения математической модели, описывающей малые деформации системы, состоящей из сетки из струн.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, реализуемых в виде начально-краевых задач на геометрических графах.

Методы исследования. Разработанные в диссертации методы исследования математических моделей основаны на теории математического моделирования, теории построения и обоснования метода конечных элементов для уравнений с распределенными параметрами на графе, теории графов. Основным методом является адаптированный метод конечных элементов для граничных и начально-краевых задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и численные методы исследования математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями, численные методы и комплексы программ:

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями;

2. Доказательство корректности математических моделей на геометрическом графе;

3. Доказательство возможности применения метода Фурье для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами;

4. Разработка эффективных численных методов решения рассматриваемых математических моделей (адаптация метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);

5. Разработка программного комплекса для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

— новые подходы, при анализе математических моделей в которых основополагающим математическим объектом является единое уравнение с производной по мере;

—доказательство корректности математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями;

— адаптация метода конечных элементов к рассматриваемым моделям;

—доказательство оценки близости приближенного решения, найденного с помощью адаптированного метода конечных элементов, к точному на геометрическом графе;

—комплекс программ для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Теоретическая и практическая значимость. Разработаны эффективные численные методы для программного комплекса, позволяющего найти приближенные решения рассматриваемых математических моделей. Получены оценки близости приближенного решения, найденного с помощью адаптированного метода конечных элементов, к точному на геометрическом графе. Представлены результаты тестирования численных методов на основе тестовых задач.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2017,2018 г.), на конференциях "Современные методы теории краевых задач" на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2016— 20 гг.), на конференции "Актуальные проблемы ПММ" (Воронеж, 2019), на семинарах профессора Баева А. Д. (2019 г.), Каменского М. И. (2018-2019 гг.), доцента Шаброва С. А. (2020-2021 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в следующих работах: [1-23]. Из них 1 [3] издана в журнале, рекомендованном ВАК РФ, 2 [1-2] в рецензируемом издании, входящем в систему цитирования Scopus. Получено 2 свидетельства [4-5] о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные автором лично.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, библиографического списка из 90 наименований и приложения, в котором приводятся тексты разработанных программ, написанных на Python. Работа изложена на 149 страницах.

Основное содержание работы. Во введении обоснована актуальность работы, формулируется цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов.

В работе изучается Γ— геометрическая сеть из R^n, реализованная в виде открытого геометрического графа. Считается, что Γ состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов

$$\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, (i = 1, 2, ..., N),$$

называемых ребрами и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначается далее через $I(\Gamma)$, каждая его точка называется внутренней вершиной (узлом) графа Γ. Концы интервалов, не включенных в $I(\Gamma)$, называются граничными или тупиковыми вершинами Γ, их множество обозначается через $\partial\Gamma$. Объединение всех ребер обозначается через $R(\Gamma)$. Тем самым, $\Gamma = R(\Gamma) \cup I(\Gamma)$. На Γ индуцируется топология из R^n. Любое связное открытое подмножество Γ будем называть подграфом Γ. Подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ имеет внутренние вершины только из $I(\Gamma)$, т.е. любая внутренняя вершина подграфа является внутренней и для Γ. Более того, всегда будет считаться, что $I(\Gamma_0) = I(\Gamma) \cap \Gamma_0$. С граничными для Γ_0 вершинами ситуация другая. Их множество $\partial\Gamma_0$ может содержать точки, не входящие ни в $\partial\Gamma$, ни в $I(\Gamma)$. Это случается тогда, когда точка $a \in \partial\Gamma_0$ оказывается внутренней для одного из ребер графа Γ. Ребра графа Γ предполагаются занумерованными произвольно, их набор $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ вместе с $I(\Gamma)$ определяет Γ. Чтобы выделить из $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ те ребра, которые примыкают к внутренней вершине a_k, введем множество $\Gamma(a_k)$, обозначая так подграф, состоящий из внутренней вершины a_k и примыкающих к нейориентацию в зависимости от наблюдаемого процесса. Далее мы будем постоянно употреблять слова сеть и граф как синонимы.

В дальнейшем исследовании нам также понадобятся следующие определения.

Скалярной функцией $z(x)$ на графе Γ будем называть обычное отображение $z : \Gamma \to R$.

Всюда далее для заданной на $R(\Gamma)$ функции $z(x)$ ее сужение на ребро γ_i обозначим через $z_i(x)$.

Для исследования также понадобятся специальные функции μ и ν, имеющие следующий вид

$$\nu(b_w) = \begin{cases} 1, \text{если ориентация выбрана от вершины } b_w \in \partial\Gamma, \\ 0, \text{если ориентация выбрана к вершине } b_w \in \partial\Gamma. \end{cases},$$

$$\mu_i(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана к вершине } \alpha, \\ 0, \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана от вершины } \alpha. \end{cases}$$

На графе Γ рассматривается следующая математическая модель:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(p(x)\frac{du}{dx}) + u(x)q(x) = f(x), \\ K(b_w)u(b_w) + (-1)^{\nu(b_w)}p(b_w)u'_x(b_w)|_{b_w \in \partial\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где производная на графе определяется следующим образом

$$\frac{d(p(x)u'(x))}{d\Gamma} = \begin{cases} (p(x)u'(x))'_x, x \in R(\Gamma), \\ \sum_{i=1}^{N} (-1)^{\mu_i(\alpha)} p u'_i(\alpha), \ \alpha \in I(\Gamma), \end{cases}$$

Здесь $f(x)$—плотность внешнего воздействия в точке $x \in \Gamma$, $q(x)$—плотность упругой реакции внешней среды в точке $x \in \Gamma$, $p(x)$— сила натяжения в точке $x \in \Gamma$, $u(x)$—отклонение точки от положения равновесия, произошедший под воздействием силы $f(x)$, $K(b_w)$—жесткости пружин, установленных в граничных точках $b_w \in \partial\Gamma : w = \overline{1, r}$, где r—количество точек из $\partial\Gamma$.

Понятие интеграла на графе определяется как

$$\int\limits_{\Gamma} u(x)d\Gamma = \sum_{\alpha\in I(\Gamma)} u(\alpha) + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\gamma_i} u_i(x)d\sigma_i(x),$$

где $\sigma_i(x)$—функция, порождающая меру на ребре γ_i.

Далее изучается спектральная задача.

Доказана

Теорема 1.4.1. Пусть $p(x)$—функция конечного на Γ изменения, $q(x)$ и $f(x)$ суммируемы в смысле меры, определенной на графе, и ограничены на нем, $q \geqslant 0$ на Γ и $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$. Более того, пусть $\{\lambda_n\}$—собственные значения задачи (1.3.1), причем каждое из них является простым. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n)^{2/3+\delta}}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Во второй главе диссертации «Математическая модель малых колебаний стержня и струны» изучается математическая модель

$$\begin{cases} -m(x)u''_{tt}(x,t) + (p(x)u'_x(x,t))'_{\Gamma} - u(x,t)q(x) = 0, \\ K(b_w)u(b_w,t) + (-1)^{\nu(b_w)}p(b_w)u'_x(b_w,t)|_{b_w\in d\Gamma} = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $q(x)$— плотность упругой реакции внешней среды в точке $x \in \Gamma$, $p(x)$— сила натяжения в точке $x \in \Gamma$, $u(x,t)$—отклонение точки от положения равновесия в заданный момент времени, $K(b_w)$—жесткости пружин, установленных в граничных точках $b_w : w = \overline{1,r}$, $m(x)$ — функция, равная плотности струны в точке $x \in \Gamma\backslash I(\Gamma)$ и массе в точке $x \in I(\Gamma)$, $\psi_0(x)$—отклонение точки от положения равновесия в начальный момент времени, $\psi_1(x)$—начальная скорость точки.

Дается вариационное обоснование избранного подхода.

Доказана единственность решения математической модели в классе E—множестве функций $u(x,t)$, частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ равномерно непрерывна на множестве $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;T]$,частные производные по переменной t непрерывны до второго порядка на множестве $(\Gamma\cup\partial\Gamma)\times[0;T]$.

Показана возможность применения метода Фурье для получения решения, а именно доказана теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть $p(x)$—функция конечного на Γ изменения, $q(x)$ и $f(x)$ суммируемы в смысле меры, определенной на графе, и ограничены на нем, $q \geqslant 0$ на Γ и $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, пусть ψ_i — абсолютно непрерывны на $\Gamma \cup \partial\Gamma$, производные ψ_i' имеют конечное на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ изменение, $(p\psi_i')'$ — Γ-абсолютно непрерывна на $\Gamma\cup\partial\Gamma$; функции $\frac{(L\psi_0)(x)}{m(x)}$ непрерывны на $\Gamma\cup\partial\Gamma$, ее производная абсолютно непрерывна; $(l_i\psi_0)(b)|_{b\in\partial\Gamma} = 0$, $(l_i\psi_1)(b)|_{b\in\partial\Gamma} = 0$, $(l_i(L\psi_0))(b)|_{b\in\partial\Gamma} = 0$. Тогда функция

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)(A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k}t)), \qquad (3)$$

где $\varphi_k(x)$— нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k,

$$A_k = \int\limits_{\Gamma} m(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)d\Gamma,\ B_k = \int\limits_{\Gamma} m(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\Gamma$$

является решением математической модели (2), причем, ряд (3) можно дифференцировать по t дважды: сначала трижды по x, потом по Γ; на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ дважды: по x и по Γ; полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно на множестве $(\Gamma \cup \partial\Gamma) \times [0;T]$.

Третья глава «Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковых математических моделей с негладкими решениями» посвящена адаптации метода конечных элементов для нахождения приближенного решения изучаемых математических моделей.

Каждое из ребер графа Γ мы разобьем на N_i равных частей, где i— номер ребра, точки разбиения мы обозначим через $x_j^i : j = \overline{0, N_i}$. Тогда

$$\varphi_j^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}^i}{x_j^i - x_{j-1}^i} \text{ для } x \in [x_{j-1}^i; x_j^i], \\ \frac{x - x_{j+1}^i}{x_j^i - x_{j+1}^i} \text{ для } x \in [x_j^i; x_{j+1}^i], \\ 0 \text{ для остальных } \ x, j = \overline{1, N_i - 1}, \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}_0^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1^i}{x_0^i - x_1^i} \text{ для } x \in [x_0^i; x_1^i], \\ 0 \text{ для остальных } \ x, \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}_{N_i}^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N_i-1}^i}{x_{N_i}^i - x_{N_i-1}^i} \text{ для } x \in [x_{N_i-1}^i; x_{N_i}^i], \\ 0 \text{ для остальных } \ x. \end{cases}$$

Приближенное решение $u_M(x)$ математической модели

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+u(x)q(x)=f(x), \\ K(b_w)u(b_w)+(-1)^{\nu(b_w)}p(b_w)u'_x(b_w)|_{b_w\in\partial\Gamma}=0 \end{cases}$$

будем искать в виде

$$u_M(x)=\sum_{i=1}^{M}v_i\varphi_i(x),$$

где $M=\sum\limits_{i=1}^{N}(N_i-1)+|I(\Gamma)|+|\partial\Gamma|$—общее количество базисных функций, v_i—значения функции в узловой точке, $\varphi_i(x)$ — базисные функции, определенные выше и занумерованные некоторым образом.

Доказана теорема.

Теорема 3.2.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (1), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении i—го ребра на N_i. Тогда, справедлива оценка

$$a(u-v,u-v)\leqslant C\cdot h,$$

где $h=\max\{\frac{l_i}{N_i}\}$, C не зависит от h, а $a(u,u)$—энергетическая норма:

$$a(u,u)=\int\limits_{\Gamma}p(x)u'(x)^2dx+\int\limits_{\Gamma}u^2(x)q(x)d\Gamma+\sum_{w=1}^{r}K(b_w)u^2(b_w).$$

Приближенное решение $u_M(x,t)$ математической модели

$$\begin{cases} m(x)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{d}{d\Gamma}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x})-u(x)q(x), \\ K(b_w)u(b_w,t)+(-1)^{\nu(b_w)}p(b_w)u'_x(b_w,t)|_{b_w\in\partial\Gamma}=0, \\ u(x,\ 0)=\psi_0(x), \\ u'_t(x,\ 0)=\psi_1(x) \end{cases}$$

будем искать в виде

$$u_M(x,t)=\sum_{i=1}^{M}a_i(t)\varphi_i(x),$$

где $a_i(t)$—неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_i(x)$—базисные функции, определенные выше.

Доказана, теорема.

Теорема 3.4.1. Пусть $p(x)$—функция конечного на Γ изменения, $q(x)$ и $f(x)$ суммируемы в смысле меры, определенной на графе, и ограничены на нем, $q \geqslant 0$ на Γ и $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$ и начальные условия таковы, что математическая модель

$$\begin{cases} m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d}{d\Gamma}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - u(x)q(x), \\ K(b_w)u(b_w,t) + (-1)^{\nu(b_w)}p(b_w)u'_x(b_w,t)|_{b_w\in\partial\Gamma} = 0, \\ u(x,\ 0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x,\ 0) = \psi_1(x) \end{cases}$$

имеет единственное решение в классе : $u(x,t)$ и $v(x,t)$—точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда справедливо неравенство

$$\max_t\{(w(\cdot,\ t); w(\cdot,\ t)) + [w(\cdot,\ t); w(\cdot,\ t)]\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{c}\cdot\sqrt{h},$$

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_\Gamma \varphi(x)\psi(x)m(x)d\Gamma,$$

$$[\varphi,\ \psi] = \int\limits_\Gamma p(x)\varphi'_x(x)\psi'_x(x)dx + \int\limits_\Gamma \varphi(x)\psi(x)q(x)d\Gamma + \sum_{w=1}^{r} K(b_w)\varphi(b_w)\psi(b_w).$$

Здесь r—количество точек из $\partial\Gamma$. Проведены численные эксперименты с помощью комплекса программ,написанных языке программирования Python. Проведены численные эксперименты с помощью комплекса программ,написанных языке программирования Python.

Дано описание алгоритма, комплекса программ. В заключении излагаются основные результаты диссертации.

Проведены численные эксперименты с помощью комплекса программ,написанных языке программирования Python.

Дано описание алгоритма, комплекса программ.

В этой главе приводится комплекс программ, разработанных для проведения численных экспериментов. Программы написаны на высокоуровневом языке программирования общего назначения Python, ориентированным на повышение производительности и читаемости кода.

Программа для реализации численных экспериментов для динамической системы с заданными краевыми и промежуточными условиями

Наименование программы program1.py. Входные данные программы приведены в модуле Data2.py.

Для функционирования программы требуется следующее программное обеспечение: одна из операционных систем: Linux, Windows7, Windows 8, Windows 10; интерпретатор языка Python; пакеты: math, sympy, numpy, scipy, matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо 128 Мб. оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 17 Кб. Программа написана на высокоуровневом языке программирования Python и предназначена для поиска решения систем уравнений с краевыми условиями на геометрической сети методом конечных элементов. Данные системы используются для моделирования различных сетей, таких как нефтепроводы, газопроводы, электрическая сеть и другие.

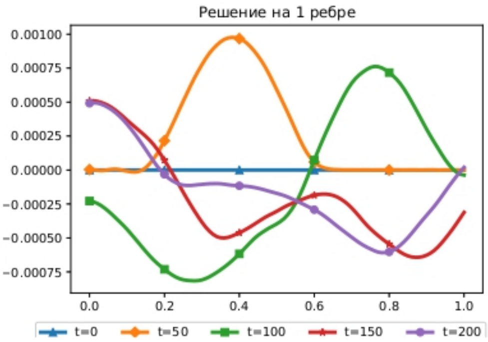
Загрузка программы осуществляется при помощи запуска консольного приложения. После этого происходит поиск решения системы.

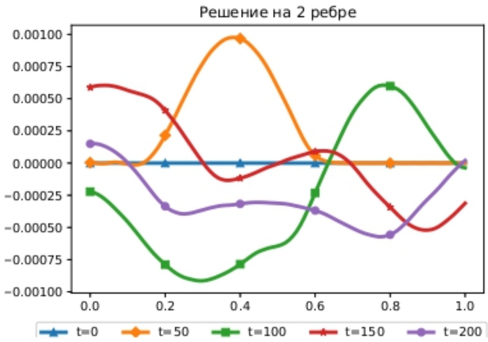
Входными данными для программы являются параметры математической модели (2), которые задаются в модуле Data2.py, а именно:—$\_T$—временной промежуток; $\_timesvalue$—длина отрезков на которые разбит временной промежуток T; $\_deg1$—количество ребер, примыкающих к перемычке с левой стороны; $\_deg2$—количество ребер, примыкающих к перемычке с правой стороны; $\_m$—функция плотности струны; $\_p$—функция силы натяжения струны; $\_q$—функция упругости струны в точке x; $\_ma$—масса струны в точках из $I(\Gamma)$; $\_qa$—упругость струны в точках из $I(\Gamma)$; $\_psi0$—функция отклонения точки x от положения равновесия в начальный момент времени; $\_psi1$—функция начальной скорости точки x; $\_F$—функция плотности внешней силы в точке x в момент времени t; $\_fa$—функция плотности внешней силы в момент времени t в точках из $I(\Gamma)$; $\_K$—жесткости пружин, установленных в граничных точках;

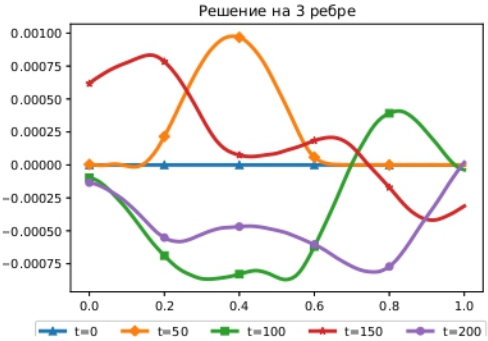
Выходными данными являются:

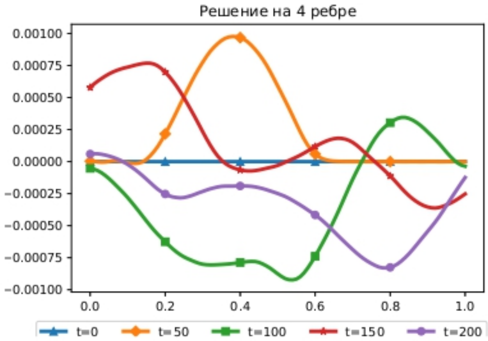
—функции $u(x,t)$ отклонения от положения равновесия в точке x в момент времени t в табличном виде; графики функций $u(x,t)$; графики отклонения приближенного решения от точного.

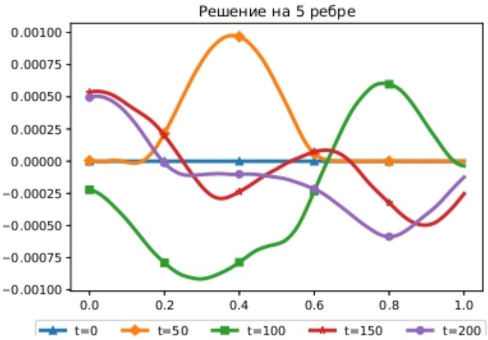
В заключении представим основные результаты диссертационного исследования:

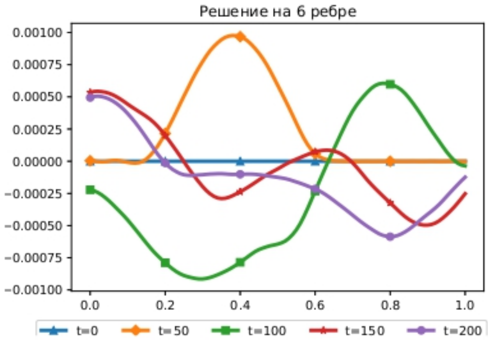


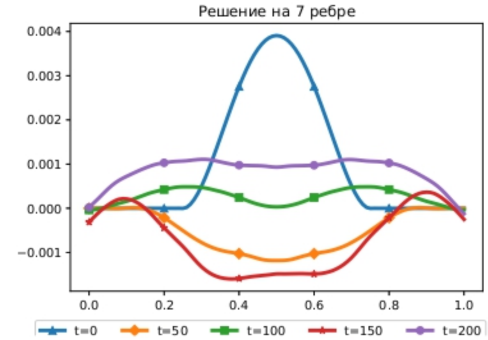












1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

2. Доказательство корректности математических моделей на геометрическом графе.

3. Доказательство возможности применения метода Фурье для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами.

4. Разработка эффективных численных методов решения рассматриваемых математических моделей (адаптация метода конечных элементов для математических моделей и оценка сходимости приближенного решения к точному решению);

4. Разработка структуры программного комплекса для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Основные публикации по теме диссертации в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus:

[1]Litvinov, D. A Development of solution for control problem based on cascade decomposition method / D. A Litvinov, Yu. V. Bugaev // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series vol 1479 012024, doi:10. 1088/1742–6596/1479/1/012024, — 2020

[2]Shabrov, S. A Adaptation of the finite element method for a mathematical model on a geometric graph / S. A. Shabrov, D. A Litvinov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series vol 1902 012087, doi:10. 1088/1742–6596/1902/1/012087, — 2021

Основные публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки:

[3]Литвинов, Д. А. О построении обратной связи в задачах управления линейными динамическими системами. // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. — 2017. — № 5. — С. 164–170.

Программы для ЭВМ:

[4]Литвинов, Д. А. Автоматизация решения задачи управления модифицированным методом каскадной декомпозиции с использованием языка программирования Python / Д. А. Литвинов, Козлов В. Г., Зубова С. П., Скрыпников А. А., Денисенко В. В., Могутнов Р. В., Тихомиров П. В. // Номер регистрации (свидетельства): 2020611098 Дата регистрации: 24. 01. 2020 Номер и дата поступления заявки: 2019663938 05. 11. 2019, Дата публикации и номер бюллетеня: 24. 01. 2020 Бюл. № 2 1,72 Мб.

[5]Литвинов, Д. А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021667414 Российская Федерация. Поиск решения краевой задачи на геометрическом графе: 2021665963 : заявл. 12.10.2021 : опубл. 28.10.2021 / Д. А. Литвинов, С. В. Шахов; // заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет инженерных технологий».

Другие публикации:

[6]Зубова С. П. , Литвинов Д. А. Построение управления с краевыми условиями и частичным ограничением для линейной стационарной динамической системы // Вестник ИЖГТУ им. М. Т. Калашникова. — 2016. — Вып. 2. — С. 116–118.

[7]Литвинов, Д. А. Различные способы поиска матрицы обратной связи для линейной динамической системы. Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. Изд. во ФГБОУ ВО ВГУИТ, Воронеж. — 2018. — № 3 — С. 56–62.

[8]Литвинов, Д. А. Об ограниченности функции управления, являющейся решением линейной стационарной динамической системы / Д. А. Литвинов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. ВГЛТУ. Воронеж. — 2015. — Т. 3. № 5-2 (16-2). — С. 27–28.

[9]Литвинов, Д. А. Построение линейной обратной связи для задач управления. // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2017. — Т. 5, № 7-2. — С. 58–60.

[10]Литвинов, Д. А. Об автоматизации решения задач управления для линейной стационарной динамической системы / Д. А. Литвинов // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-XXV». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр “Научная книга”, — 2014. — С. 41–42.

[11]Литвинов, Д. А. Об ограниченности функции управления, являющейся решением линейной стационарной динамической системы. / Д. А. Литвинов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно–практической конференции «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» 2015 г. ,№ 5,часть 2. Воронеж: Издательско–полиграфический центр “Научная книга”, — 2015. — С. 27–28.

[12]Литвинов, Д. А. Поиск матрицы обратной связи для линейных динамических систем / Д. А. Литвинов // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы– Воронеж, Издательский дом ВГУ. — 2017. — С. 112–113.

[13]Литвинов, Д. А. Численное нахождение матрицы обратной связи для линейных динамических систем / Д. А. Литвинов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа – Воронеж, Издательский дом ВГУ. — 2017. — С. 140–141.

[14]Литвинов, Д. А. Об ограниченности нормы управления для линейной стационарной динамической системы / Д. А. Литвинов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. ООО ИПЦ «Научная книга» , Воронеж. — 2017 г. — Т. 5, № 8-1. — С. 257–259.

[15]Литвинов, Д. А. Нахождение минимального ограничения для нормы функции управления. / Д. А. Литвинов // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018» -ООО ИПЦ «Научная книга» , Воронеж. — 2018 г. — С. 268–269.

[16]Литвинов, Д. А. Построение минимально возможного ограничения для евклидовой нормы функции управления с помощью метода каскадной декомпозиции. / Д. А. Литвинов // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции, посвященной 90 летию Владимира Александровича Ильина(2–6 мая 2018 г.).–Москва:МАКС Пресс. — 2018. — С. 147–148,

[17]Литвинов, Д. А. Построение решения задачи управления на основе метода каскадной декомпозиции / Д. А. Литвинов, С. П. Зубова, Ю. В. Бугаев // Актуальные проблемы прикладной математики информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж. 11–13 ноября 2019 г. — С. 827–834.

[18]Литвинов, Д. А. Построение функции управления, ограниченной по норме заданным числом / Д. А. Литвинов // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-XXX. — 2019 — С. 182–184.

[19]Литвинов, Д. А. Построение общей формулы для функций состояния и управления методом каскадной декомпозиции / Д. А. Литвинов // СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ПМТУКТ–2019),Сборник трудов XII Международной конференции. — 2019. — С. 204–206.

[20]Литвинов, Д. А. Способы нахождения матрицы обратной связи в задачах управления линейными динамическими системами / Д. А. Литвинов // МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГОИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, Сборник материалов VII национальной научно–практической конференции с международным участием. — 2019 — С. 78–84.

[21]Литвинов, Д. А. Поиск решения динамической системы модифицированным методом каскадной декомпозиции / Д. А. Литвинов // VIII Международная научно–практическая интернет конференция «Моделирование энергоинформационных процессов» . – Воронеж. гос. ун–т инж. технол. – Воронеж: ВГУИТ, — 2020 г. — -С. 67–70.

[22]Литвинов, Д. А. О корректности одной математической задачи на графе(тезисы докладов научной конференции). / Д. А. Литвинов, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции, посвященной 80–летию Юлия Витальевича Покорного (3–9 мая 2020 г.).–Воронеж: АНО «Наука–Юнипресс». — 2020. — С. 219–220.

[23]Шабров, С. А. Об адаптации метода конечных элементов для математической модели на геометрическом графе / С. А. Шабров, Д. А. Литвинов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 28 января – 02 2021 года. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, — 2021. — С. 304–308.