

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

ШАЙНА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ
С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ**

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
доцент Шабров Сергей Александрович

Воронеж — 2022

Оглавление

Введение	4
1 Математическая модель малых колебаний стержневой системы	13
1.1 Модель малых поперечных колебаний стержня с особенностями	13
1.2 Единственность решения математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы	21
1.3 О скорости роста собственных значений спектральной задачи	25
1.4 О возможности применения метода разделения переменных для доказательства существования решения математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы	33
1.5 Корректность математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы	37
1.6 Классическое решение смешанной задачи с инволюцией на графе	40
1.6.1 Явное решение в случае симметрического потенциала	41
1.6.2 Спектральная задача в случае произвольного потенциала	44
1.6.3 Решение смешанной задачи в общем случае	46
1.7 Выводы к первой главе	48
2 Адаптация метода конечных элементов для математических моделей четвертого порядка с производными по мере	49
2.1 Построение алгоритма	49
2.2 Оценка погрешности	52
2.3 Построение алгоритма нахождения приближенного решения для математической модели четвертого порядка	62
2.4 Оценка скорости сходимости	66

2.5	Выводы ко второй главе	69
3	Численные эксперименты	71
3.1	Первый пример	71
3.2	Второй пример	73
3.3	Третий пример	75
3.4	Комплекс программ для реализации численных экспери- ментов	77
3.5	Выводы к третьей главе	78
	Заключение	80
	Литература	81
A	Листинги программ	92
B	Таблицы приближенного, точного решений и погрешно- сти	101
C	Свидетельство о регистрации программы	112

Введение

Актуальность темы

Несмотря на активное развитие математического моделирования остаются объекты, моделирование процессов в которых либо трудно формализуемо, либо невозможно с помощью существующих методов и подходов. В случае, когда математическая модель реализуется в виде граничной или смешанной задачи, то как правило, трудности, возникающие как при анализе решений изучаемых моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения, а в некоторых случаях и нарушением непрерывности решения. Возникающие трудности, в большинстве случаев, решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалицин С. Т., Сесекин А. Н. [43], Завалицин С. Т. [42], Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. [36, 38], Владимиров В. С. [22], [23], Егоров Ю. В. [40], Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р. [12], Маслов В. П., Цупин В. А. [54], Дыхта В. А., Самсонок О. Н. [39], Мирзоев К. А., Шкаликов А. А. [55], Митрохин С. И. [56] и многие другие). Однако на этом пути возникает ряд проблем. Одна из них — проблема умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерывных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима [22, 92]; она не до конца разрешима даже при переходе к алгебре обобщенных функций Коломбо [2, 38]. Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ -функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (см., например, работы Мышкиса А. Д. [58] и Владимирова А. А. [24]). Еще одна проблема — слабая разрешимость краевых задач, что для приложений недостаточно.

Именно спектральная теория диктовала здесь главное направление развития. Теория обобщенных функций и теория операторов очень эффективно себя проявили в спектральных вопросах [31, 52, 55] и в дальнейшем многие сотни работ (см. библиографию в [6, 57]).

Еще одно направление развития — качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы, имеющей структуру геометрического графа. Следует отметить, что такой подход очень эффективен, так как моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами.

Цель работы. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей, реализуемых в виде смешанных и граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

- оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи для изучаемой математической модели;
- доказательство возможности применения метода Фурье и корректности изучаемых математических моделей;
- разработка эффективных численных методов решения граничных задач для математических моделей четвертого порядка (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);
- разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;
- решение задач прикладного характера: приближенное решение математических моделей с негладкими решениями.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочленённые одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют между собой только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа. Адаптированный метод конечных элементов для граничных задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравне-

ния с производными Радона–Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи для изучаемой математической модели.

2. Доказательство возможности применения метода Фурье.

3. Доказательство корректности изучаемых математических моделей.

4. Разработка эффективных численных методов решения граничных и смешанных задач для уравнений четвертого порядка (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

5. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим объектом которых является единое уравнение с производными по мере.

2. Доказана возможность применения метода разделения переменных для нахождения решения математической модели; показана корректность математической модели четвертого порядка с производными по мере.

3. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающих колебания одномерных объектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающими из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, которые формализованы в виде единого уравнения с производными по Радону–Никодиму.

Разработаны эффективные численные методы применительно к математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных задач с производными Радона–Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных

математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения» (2015, 2019, 2020 гг.), «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» (2017 г.), «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (2020 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы «Воронежская зимняя математическая школа» (2017, 2019 гг.), на семинарах профессоров А. Д. Бавева (2018–2019 гг.); М. И. Каменского (2018–2019 гг.), С. А. Шаброва (2017–2022 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 12 работах: [9, 19, 20, 62, 82, 85–91], из них [9, 19, 82] из перечня, рекомендованных ВАК и международной базы данных Scopus.

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 92 наименований и 3 приложений, в которых приводятся листинги программ, написанных на Python3 и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 112 страницах и содержит 23 рисунка и 6 таблиц.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цели и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Математическая модель малых колебаний стержневой системы» изучается математическая модель

$$\begin{cases} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{dQ}{d\sigma} u + f(x, t); \\ (pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x), u'_t(x, 0) = \psi_1(x). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

В частности, в интересах возможности применения метода разделения переменных изучена скорость роста собственных значений спектральной задачи. Доказаны теоремы.

Теорема 1.3.1. Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$, $Q(x)$ — не убывает на $[0, \ell]$, λ_n — собственные значения

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = \lambda M'_{\sigma} u; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2/7+\delta}}$$

сходится при любом положительном δ .

Теорема 1.4.1. Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ -абсолютно непрерывны; $M'_\sigma(x) > 0$; $Q(x)$ не убывает на $[0; \ell]$, $M'_\sigma(x) \geq m_0 > 0$; $f(x, t)$ по переменной x раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по нормированным собственным функциям $\varphi_n(x)$, причем

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sqrt{\lambda_n}$, где

$$f_n(t) = \int_0^{\ell} M'_\sigma(s) f(s, t) \varphi_n(s) d\sigma(s),$$

также сходится абсолютно и равномерно на $[0, T^*]$; кроме того, $\psi \in E$, $\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}$ абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$; $\left(\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}\right)'_x - \sigma$ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, ($i = 1, 2$); $l_j\psi_1 = l_j(L\psi_1) = l_j\psi_2 = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} (t - \tau) d\tau \right) \varphi_n(x),$$

$$A_n = \int_0^\ell M'_\sigma(s) \varphi_n(s) \psi_1(s) d\sigma(s), \quad B_n = \int_0^\ell M'_\sigma(s) \varphi_n(s) \psi_2(s) d\sigma(s),$$

является решением математической модели (1.2.1), причем ряд (1.4.2) можно дифференцировать по t дважды, по переменной x четырежды: сначала по x , затем по мере μ , потом по x , и последний — четвертый раз — по σ ; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $[0; \ell] \times [0; T]$.

Доказана корректность изучаемой модели.

В шестом параграфе первой главы изучается смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией, рассматриваемая на геометрическом графе из двух ребер, одно из которых образует цикл.

Во второй главе «Адаптация метода конечных элементов для математических моделей четвертого порядка с производными по мере» метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения изучаемых математических моделей. В первом параграфе строится алгоритм нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} \frac{d}{d\sigma} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{d\mu} \frac{du}{dx} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(r \frac{du}{dx} \right) + \frac{dQ}{d\sigma} u = \frac{d}{d\sigma} F; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Введем энергетическое скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \gamma_1 \varphi'(0) \psi'(0) + \gamma_2 \varphi(0) \psi(0) + \gamma_3 \varphi'(\ell) \psi'(\ell) + \gamma_4 \varphi(\ell) \psi(\ell) +$$

$$+ \int_0^\ell p \varphi_{x_\mu}'' \psi_{x_\mu}'' d\mu + \int_0^\ell r \varphi_x' \psi_x' dx + \int_0^\ell \varphi \psi Q_\sigma' d\sigma$$

в пространстве непрерывных на $[0; \ell]$ функций, имеющих вторую производную, суммируемую с квадратом.

Приближенное решение $u_N(x)$ математической модели (2.1.1) будем в виде

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^n b_k \varphi_{2k}(x), \quad (2.1.4)$$

где a_k и b_k — значения функции и ее производной в узловой точке x_k , $\varphi_i(x)$ — базисные функции, которые строятся следующим образом.

Для этого разобьем промежутки $[0; \ell]$ на части (узловыми) точками $\{x_k\}_{k=0}^{k=N}$, при этом $x_0 = 0$, $x_N = \ell$. Для дальнейшего удобства положим $x_{-1} = -\frac{1}{N}$, $x_{N+1} = \ell + \frac{1}{N}$. Введем обозначение $h = \max(x_{k+1} - x_k)$. Тогда $\varphi_{2k-1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^3$, если $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $\varphi_{2k-1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^3$, если $x \in [x_k, x_{k+1}]$ и 0 в противном случае; $\varphi_{2k}(x) = (x - x_k) \left(1 + \frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^2$, если $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $\varphi_{2k}(x) = (x - x_k) \left(1 - \frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^2$, если $x \in [x_k, x_{k+1}]$ и 0 в противном случае, $k = 0, 1, \dots, n$.

Доказана теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (2.1.1), $u_N(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N частей отрезка $[0; \ell]$. Тогда справедлива оценка

$$\langle u - u_N, u - u_N \rangle \leq C \cdot h,$$

где $h = \max(x_{k+1} - x_k)$, C не зависит от h .

В третьем параграфе приближенное решение $u_N(x, t)$ математической модели

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u \frac{dQ}{d\sigma} + f(x, t), \\ (pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

будем искать в виде

$$u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N a_{2k-1}(t) \varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^N a_{2k}(t) \varphi_{2k}(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные выше.

Доказана теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma \geq 0$, $p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$ и начальные условия $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ таковы, что математическая модель

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u \frac{dQ}{d\sigma} + f(x, t), \\ (pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{array} \right. \quad (2.4.4)$$

имеет единственное решение в классе E ; $u(x, t)$ и $u_N(x, t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда, справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^\ell w_t'^2(x, t) dM + \int_0^\ell p(x) w_{xx}''^2(x, t) dx + \right.$$

$$+ \left(\int_0^\ell r(x) w_x'^2(x, t) dx + \int_0^\ell w^2(x, t) dQ \right)^{1/2} \leq \bar{C} \cdot h,$$

где \bar{C} не зависит от h .

В третьей главе «Численные эксперименты» проведены численные эксперименты, которые подтверждают теоретическую оценку.

Приложения содержит листинги комплексов программ, написанных для нахождения приближенного решения математической модели шестого порядка на Python, и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, полученных при численных экспериментах.

Глава 1

Математическая модель малых колебаний стержневой системы

В этой главе изучается математическая модель малых свободных колебаний системы, состоящей из шарнирно соединенных стержней, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости у решения. При этом концы системы имеют упругое закрепление.

1.1 Модель малых поперечных колебаний стержня с особенностями

Поместим начало координат в один из концов стержневой системы. Пусть в точках $\{\xi_i\}_{i=1}^{i=n}$ стержни соединены шарнирно, и присутствует две пружины, одна — реагирующая на изгиб стержней, находящихся слева и справа от точки ξ_i , а вторая — на отклонение. Изучаемая система в состоянии покоя расположена вдоль некоторой прямой, по которой направим ось абсцисс. Через $u(x, t)$ обозначим отклонение от положения равновесия точки x в момент времени t . Будем рассматривать малые колебания, при которых каждая точка системы смещается перпендикулярно положению равновесия, т. е. оси Ox . В точки ξ_i поместим массы m_i . Кинетическая энергия стержневой системы равна

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\xi_i, t) \right)^2,$$

где $\rho(x)$ — линейное плотное распределение массы (во всех точках, кроме ξ_i). Рассмотрим случай нерастяжимых стержней. Пусть к каждой точке $x = 0$ и $x = \ell$ присоединены еще по две пружины жесткостью γ_1 ,

γ_2 и γ_3 , γ_4 соответственно. Первая пружина, присоединенная к левому концу системы, реагирует на крутящий момент, возникающий в точке $x = 0$, а вторая — на смещение левого конца. Тогда энергия, накапливаемая этими пружинами, равна $\gamma_1 \frac{u_x'^2(0, t)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0, t)}{2}$. Аналогично для пружин, находящихся на правом конце — $\gamma_3 \frac{u_x'^2(\ell, t)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell, t)}{2}$. Потенциальная энергия упругого при постоянной кривизне пропорциональна квадрату кривизны. Следовательно, потенциальная энергия dU_0 элементарного участка dx , не содержащего ни одной точки ξ_i , равна

$$dU_0 = \frac{1}{2} p(x) \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}^2,$$

где $p(x) > 0$ — характеризует материал из которого создан материал, а потенциальная энергия всех стержней системы равна

$$U_0 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+0}} p(x) \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}^2 dx, \quad (1.1.1)$$

здесь для универсальности записи положено $\xi_0 + 0 = 0$ и $\xi_{n+1} - 0 = \ell$. Предположим, что отклонения системы от положения равновесия малы и членом $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ в знаменателе можно пренебречь. Тогда (1.1.1) принимает вид

$$U_0 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+0}} p(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (1.1.2)$$

Теперь к (1.1.2) добавляем потенциальную энергию пружин, реагирующих на изгиб, и пружин, реагирующих на смещение, получим потенциальную энергию всей системы

$$U = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+0}} p(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, t) \right)^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \hat{\gamma}_j (u(\xi_i, t))^2 + \\
& \quad + \gamma_1 \frac{u_x'^2(0, t)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0, t)}{2} + \gamma_3 \frac{u_x'^2(\ell, t)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell, t)}{2},
\end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma}_j$ и $\hat{\gamma}_j$ — жесткости пружин.

Отсюда находим, что интеграл Остроградского-Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^\ell l \rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\xi_i, t) \right)^2 - \right. \\
&- \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \int_{\xi_i+0}^{\xi_i-0} p(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, t) \right)^2 - \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \hat{\gamma}_j (u(\xi_i, t))^2 \right] dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \left(\gamma_1 \frac{u_x'^2(0, t)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0, t)}{2} + \gamma_3 \frac{u_x'^2(\ell, t)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell, t)}{2} \right) dt. \quad (1.1.3)
\end{aligned}$$

Функционал (1.1.3) мы рассмотрим на следующем множестве функций: $u(x; t)$ и частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ непрерывны на замкнутом прямоугольнике $[0; \ell] \times [t_0; t_1]$; $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ равномерно непрерывны на каждом прямоугольнике $(\xi_i; \xi_{i+1}) \times [0; \ell]$ ($i = 0, 1, \dots, n$); интегралы

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^\ell p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \quad \text{и} \quad \int_{t_0}^{t_1} \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} p(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt$$

($i = 0, 1, \dots, n$) конечны. Предположим, что функция $u(x, t)$ имеет частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$, первая из которых непрерывна на $[0; \ell] \times [t_0, t_1]$, остальные — равномерно непрерывны на $(\xi_i, \xi_{i+1}) \times [t_0, t_1]$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Применяя схему Лагранжа к функционалу $\Phi(u)$, будем иметь равенство нулю вариации:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_0^\ell \rho(x) \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \sum_{i=1}^n m_i \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi_i, t) \frac{\partial h}{\partial t}(\xi_i, t) dt - \\
& \quad - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx dt - \\
& \quad - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_{j+0}, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j, t) \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\xi_{j+0}, t) - \frac{\partial h}{\partial x}(\xi_{j-0}, t) \right) dt - \\
& \quad - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \hat{\gamma}_j u(\xi_j, t) h(\xi_j, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} (\gamma_1 u'_x(0, t) h'_x(0, t) + \gamma_2 u(0, t) h(0, t) + \\
& \quad \quad + \gamma_3 u'_x(\ell, t) h'_x(\ell, t) + \gamma_4 u(\ell, t) h(\ell, t)) dt = 0 \quad (1.1.4)
\end{aligned}$$

для всякой $h(x, t)$, равной нулю при $t = t_1$ и $t = t_2$.

Равенство (1.1.4) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_0^\ell \rho(x) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot h \right) - h \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx dt + \\
& \quad + \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\xi_i, t) \cdot h(\xi_i, t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_i, t) \cdot h(\xi_i, t) dt \right] - \\
& \quad - \sum_{i=0}^n \int_{t_0}^{t_1} \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot h \right) + \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot h \right] dx dt - \\
& \quad - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) \times \\
& \quad \quad \quad \times \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) dt -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \hat{\gamma}_j \cdot u(\xi_j, t) \cdot h(\xi_j, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} (\gamma_1 u'_x(0, t) h'_x(0, t) + \gamma_2 u(0, t) h(0, t) + \\
& \quad + \gamma_3 u'_x(\ell, t) h'_x(\ell, t) + \gamma_4 u(\ell, t) h(\ell, t)) dt = 0.
\end{aligned}$$

Применим к первому, второму и третьему двойным интегралам формулу Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dt dx = \int_C P dt + Q dx,$$

взяв в первом случае $P = 0$, $Q = \rho(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot h$; во втором $-P = -p(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$, $Q = 0$ и в третьем $-P = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot h$, $Q = 0$:

$$\begin{aligned}
& \oint_C \rho(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot h dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^\ell \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot h dx dt - \\
& \quad - \sum_{i=1}^n m_i \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_i, t) \cdot h(\xi_i, t) dt - \\
& \quad - \sum_{i=0}^n \left[\oint_{C_i} \left(-p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) dt - \oint_{C_i} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right) \cdot h dt + \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\xi_i+0}^{\xi_{i+1}-0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \cdot h dx dt \right] - \\
& \quad - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) \times \\
& \quad \quad \quad \times \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) dt - \\
& \quad - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \hat{\gamma}_j \cdot u(\xi_j, t) \cdot h(\xi_j, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} (\gamma_1 u'_x(0, t) h'_x(0, t) + \gamma_2 u(0, t) h(0, t) + \\
& \quad \quad + \gamma_3 u'_x(\ell, t) h'_x(\ell, t) + \gamma_4 u(\ell, t) h(\ell, t)) dt = 0, \quad (1.1.5)
\end{aligned}$$

где C — контур, ограничивающий прямоугольник $[0; \ell] \times [t_0; t_1]$, пробегаемый так, чтобы область (прямоугольник) оставалась слева; C_i — контур, ограничивающий прямоугольник $(\xi_i; \xi_{i+1}) \times [t_0; t_1]$, пробегаемый опять же так, чтобы область оставалась слева.

Равенство (1.1.5) вначале рассмотрим для функций равных нулю на всех контурах C_i и выберем $h(x, t)$ так, чтобы пробная функция $h(x, t)$ была равна нулю на всех прямоугольниках вместе с границей $(\xi_i; \xi_{i+1}) \times [t_0; t_1]$, кроме одного. Тогда из классической леммы Лагранжа следует, что на этом прямоугольнике

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \equiv 0. \quad (1.1.6)$$

Так как прямоугольник $(\xi_i; \xi_{i+1}) \times [t_0; t_1]$ произвольный, то (1.1.6) выполняется на каждом таком прямоугольнике, и (1.1.5) принимает вид:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n m_i \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_i, t) \cdot h(\xi_i, t) dt - \\ & - \sum_{i=0}^n \left[\oint_{C_i} \left(-p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) dt - \oint_{C_i} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right) \cdot h dt - \right. \\ & - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) \times \\ & \quad \times \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) dt - \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \hat{\gamma}_j \cdot u(\xi_j, t) \cdot h(\xi_j, t) dt = 0. \quad (1.1.7) \right. \end{aligned}$$

Пусть теперь $h(x, t)$ такая, что $\frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j + 0, t) \neq 0$ при каком-то j , а при остальных $\frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j + 0, t) = 0$ и $\frac{\partial h}{\partial x}(\xi_j - 0, t) = 0$ и $h(\xi_j, t) = 0$ (последние два соотношения выполняются при всех j). Тогда из (1.1.7) следует

$$p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi_i + 0, t) - \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) = 0. \quad (1.1.8)$$

В силу произвольности j делаем вывод о справедливости (1.1.8) для всех j . Аналогично получаем

$$p(\xi_j - 0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi_j - 0, t) + \gamma_j \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j + 0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_j - 0, t) \right) = 0. \quad (1.1.9)$$

Равенство (1.1.7), с учетом (1.1.8) и (1.1.9), можно переписать в виде

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n m_i \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_i, t) h(\xi_i, t) dt - \sum_{i=0}^n \oint_{C_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) h dt - \\ - \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \hat{\gamma}_j u(\xi_j, t) h(\xi_j, t) dt = 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства находим, что

$$\begin{aligned} m_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi_i, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\xi_i + 0, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\xi_i - 0, t) + \\ + \hat{\gamma}_j u(\xi_i, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (1.1.10) \end{aligned}$$

так как каждой отрезок прямой $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), лежащий между точками (x_i, t_0) и (x_i, t_1) , пробегается дважды: один раз при обходе по контуру C_{i+1} (частная производная $\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$) берется со знаком «−», а второй — по контуру C_i (производная берется со знаком «+»).

Таким образом, $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1.6) для $(x, t) \in \bigcup_{i=0}^n (\xi_i + 0, \xi_i - 0) \times [t_0, t_1]$; условию непрерывности: $u(x, t)$ непрерывна на всем $[0; l] \times [t_0; t_1]$; условиям (1.1.8), (1.1.9) и (1.1.10).

Тогда равенство (1.1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} p(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (0, t) h(0, t) dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} p(l) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l, t) \frac{\partial h}{\partial x}(l, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (l, t) h(l, t) dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_1 u'_x(0, t) h'_x(0, t) + \gamma_2 u(0, t) h(0, t) + \end{aligned}$$

$$+\gamma_3 u'_x(\ell, t) h'_x(\ell, t) + \gamma_4 u(\ell, t) h(\ell, t) = 0.$$

Из последнего, беря последовательно одну из величин $h'_x(0, t)$, $h(0, t)$, $h'_x(\ell, t)$, $h(\ell, t)$, равной 1, а остальные нулю, придем к граничным условиям

$$-p(0)u''_{xx}(0, t) + \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \quad (1.1.11)$$

$$(pu''_{xx})'_x(0, t) - r(0)u'_x(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \quad (1.1.12)$$

$$p(\ell)u''_{xx}(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \quad (1.1.13)$$

$$-(pu''_{xx})'_x(\ell, t) + r(\ell)u'_x(\ell, t) + \gamma_4 u(\ell, t) = 0. \quad (1.1.14)$$

Воспользуясь теперь производными по мере при дифференцировании по x , мы можем задачу записать в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial \sigma(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{p}(x) \frac{\partial}{\partial \mu(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial Q}{\partial \sigma(x)} u + \hat{m}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1.15)$$

где $\mu(x) = x + \sum_{i=1}^n \gamma_i \theta(x - \xi_i)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда, $\sigma(x) = x +$

$$\sum_{i=1}^n \theta(x - \xi_i);$$

$$Q(x) = \sum_{i:\xi < x} \hat{\gamma}_i \theta(x - \xi_i);$$

$$\hat{p}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{при } x \neq \xi_i, \\ \gamma_i & \text{при } x = \xi_i, \text{ при каком-то } i; \end{cases}$$

$$\hat{m}(x) = \begin{cases} \rho(x) & \text{при } x \neq \xi_i; \\ m_i & \text{при } x = \xi_i \text{ при каком-то } i. \end{cases}$$

Таким образом, свободные колебания рассматриваемой системы описываются уравнением (1.1.15), которое дополняется граничными условиями (1.1.11), (1.1.12), (1.1.13), (1.1.14).

1.2 Единственность решения математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы

В этом параграфе доказывается, что математическая модель

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{dQ}{d\sigma} u + f(x, t); \\ (pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x), u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

не может иметь более двух различных решений, а именно, доказывается теорема.

Теорема 1.2.1. Пусть $p(x)$, $r(x)$ и $Q(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$; $p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$ и $Q'_\sigma \geq 0$, $f(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных и выполнено одно из следующих условий: 1) $\gamma_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$); 2) $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$ и $\gamma_2 + \gamma_4 > 0$; 3) $\gamma_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$ и $Q(\ell) - Q(0) > 0$; 4) $\gamma_i = 0$, найдется точка x_1 в которой $r(x)$ положительна и непрерывна, $Q(\ell) - Q(0) > 0$. Тогда математическая модель (1.2.1) не может иметь двух различных решений в классе E .

Решение математической модели (1.2.1), мы ищем в классе E функций $u(x, t)$, каждая из которых непрерывна на $[0; \ell] \times [0; T]$; имеет непрерывные производные по переменной t до второго порядка включительно при фиксированном x ; $u(x, t)$ при фиксированном t абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; $u'_x(x, t)$ — μ -абсолютно непрерывна по x на $[0; \ell]$; $p(x)u''_{x\mu}(x, t)$ — абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; производные $u'''_{tx\mu}(x, t)$ и $u'''_{x\mu t}(x, t)$ равны почти всюду в смысле $[\mu \times t]$ меры, заданной на прямоугольнике $[0; \ell] \times [0; T]$; производные $u''_{tx}(x, t)$ и $u''_{xt}(x, t)$ равны почти всюду в смысле меры Лебега, заданной на $[0; \ell] \times [0; T]$.

Доказательство теоремы 1.2.1. Предположим противное: существуют два различных на $[0; \ell] \times [0; T]$ решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ математической модели (1.2.1). Это означает, что найдется точка $(x^*; T^*)$ в которой решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ различны. Разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

является решением модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{dQ}{d\sigma} u; \\ (pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Тождество

$$M'_\sigma(x) u''_{tt} + M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{dQ}{d\sigma} u \equiv 0,$$

полученное после подстановки $u(x, t)$ в уравнение (1.2.2), умножим на $\frac{\partial u}{\partial t}$, проинтегрируем по прямоугольнику $[0; \ell] \times [0; T^*]$ по мере $[\sigma \times t]$ и разобьем полученный интервал на четыре:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \int_0^{T^*} M'_\sigma(x) u''_{tt} \cdot u'_t dt d\sigma + \int_0^\ell \int_0^{T^*} u'_t (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} dt d\sigma - \\ - \int_0^\ell \int_0^{T^*} u'_t (ru'_x)'_\sigma dt d\sigma + \int_0^\ell \int_0^{T^*} u'_t u Q'_\sigma dt d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Первый интеграл в левой части равенства (1.2.3) равен

$$\int_0^\ell \int_0^{T^*} M'_\sigma(x) u''_{tt} \cdot u'_t dt d\sigma = \frac{1}{2} \int_0^\ell M'_\sigma (u'_t(x, T^*))^2 d\sigma,$$

так как $u'_t(x, 0) = 0$.

Ко второму и третьему интегралам применим теорему Фубини (проверка возможности её применения проводится непосредственно), второй интеграл проинтегрируем дважды по частям,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \int_0^{T^*} u_t (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} dt d\sigma - \int_0^\ell \int_0^{T^*} u'_t (ru'_x)'_\sigma dt d\sigma = \\ = \int_0^{T^*} \int_0^\ell (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} u'_t d\sigma dt - \int_0^{T^*} \int_0^\ell (ru'_x)'_\sigma u'_t d\sigma dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{T^*} \left[(pu''_{x\mu})'_x u'_t \Big|_0^\ell - u''_{x\mu} u''_{tx} \Big|_0^\ell + \int_0^\ell pu''_{x\mu} d_x(u''_{tx}) \right] dt - \\
&\quad - \int_0^{T^*} \left[ru'_x u'_t \Big|_0^\ell - \int_0^\ell ru'_x d_x(u'_x) \right] dt = \\
&= \int_0^{T^*} ((pu''_{x\mu})'_x(\ell, t)u'_t(\ell, t) - (pu''_{x\mu})'_x(0, t)u'_t(0, t) + ru'_x(0, t)u'_t(0, t)) dt - \\
&\quad - \int_0^{T^*} pu''_{x\mu}(\ell, t)u''_{tx}(\ell, t)dt + \\
&\quad + \int_0^{T^*} pu''_{x\mu}(0, t)u''_{tx}(0, t)dt + \int_0^{T^*} \int_0^\ell pu''_{x\mu} u'''_{tx\mu} d\mu dt + \int_0^{T^*} \int_0^\ell ru'_x u''_{tx} dx dt
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу граничных условий и свойств функций из класса E , применяя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T^*} \gamma_4 u(\ell, t) u'_t(\ell, t) dt + \int_0^{T^*} \gamma_3 u'_x(\ell, t) u''_{tx}(\ell, t) dt + \int_0^{T^*} \gamma_2 u(0, t) u'_t(0, t) dt + \\
&+ \int_0^{T^*} \gamma_1 u'(0, t) u''_{tx}(0, t) dt + \int_0^\ell \int_0^{T^*} \frac{1}{2} ((pu''_{x\mu})^2)'_t dt d\mu + \int_0^\ell \int_0^{T^*} \frac{1}{2} ((ru'_x)^2)'_t dt dx = \\
&= \gamma_4 \frac{u^2(\ell, T^*)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2(\ell, T^*)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0, T^*)}{2} + \gamma_1 \frac{u'^2(0, T^*)}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^\ell pu''_{x\mu}{}^2(x, T^*) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^\ell ru'_x{}^2(x, T^*) dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (1.2.3) допускает перезапись

$$\begin{aligned}
&\gamma_4 \frac{u^2(\ell, T^*)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2(\ell, T^*)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0, T^*)}{2} + \gamma_1 \frac{u'^2(0, T^*)}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^\ell pu''_{x\mu}{}^2(x, T^*) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^\ell ru'_x{}^2(x, T^*) dx +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\ell} u^2(x, T^*) Q \sigma d\sigma dx + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} M'_\sigma(x) (u'_t(x, T^*))^2 dx = 0. \quad (1.2.4)$$

Но в левой части равенства (1.2.4) стоит сумма неотрицательных слагаемых, следовательно, все они равны нулю.

Из равенства

$$\int_0^{\ell} p(x) u''_{x\mu}{}^2(x, T^*) dx = 0$$

вытекает, что $p(x) u''_{x\mu}{}^2(x, T^*) dx = 0$ почти всюду в смысле меры μ . Тогда $u''_{x\mu}(x, T^*) = 0$ почти всюду, следовательно, в силу μ -абсолютной непрерывности $u'_x(x, T^*)$ на $[0; \ell]$ и абсолютной непрерывности $u(x, T^*)$ на $[0; \ell]$, $u(x, T^*) = c_1 + c_2 x$ при некоторых постоянных c_1 и c_2 .

Если все γ_i положительны, то, $u(0, t) = u'_x(0, t) = 0$, что приводит к тождеству $u(x, T^*) \equiv 0$, которое противоречит нашему предположению.

Пусть $\gamma_i \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$ и $\gamma_2 + \gamma_4 > 0$. Тогда $u'_x(0, t) \times u(0, t) = 0$, $u'_x(\ell, t) \cdot u(\ell, t) = 0$ и $u(0, t) \cdot u(\ell, t) = 0$. Последнее равенство возможно, если: 1) $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$; 2) $u(0, t) = 0$ или $u(\ell, t) = 0$.

В первом случае мы сразу приходим к тождеству $u(x, T^*) \equiv 0$, которое противоречит нашему предположению. Второй случай также приводит нас к противоречию, так как справедливо одно из равенств $u'_x(0, t) = 0$ и $u'_x(\ell, t) = 0$.

Пусть теперь $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$ и $Q(\ell) - Q(0) > 0$. Из первых двух неравенств вытекают равенства $u'_x(0, t) \cdot u(0, t) = 0$ и $u'_x(\ell, t) \cdot u(\ell, t) = 0$. Тогда $u(x, T^*) \equiv c_0$ при некоторой постоянной c_0 . Из равенства

$$\int_0^{\ell} u^2(x, T^*) Q'_\sigma(x) d\sigma = 0$$

мы получаем, $c_0 = 0$, что опять нас приводит к противоречию.

Наконец, пусть в $\gamma_i = 0$ найдется число x_1 , что $r(x_1) > 0$ и $Q(\ell) - Q(0) > 0$.

Из равенства

$$\int_0^{\ell} r(x) u'^2(x, T^*) dx = 0$$

вытекает тождество $u'_x(x, T^*) \equiv 0$. Отсюда, мы приходим к $u(x, T^*) \equiv c_2$ при некоторой постоянной c_2 . Подставляя в равенство

$$\int_0^{\ell} u^2(x, T^*) Q'_\sigma(x) d\sigma = 0,$$

мы приходим к тождеству $u(x, T^*) \equiv 0$, что вновь приводит к противоречию. Теорема доказана. \square

1.3 О скорости роста собственных значений спектральной задачи

В работе [82] получена оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = 0; \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

которая возникает при применении метода Фурье для нахождения решения математической модели, описывающей малые свободные колебания стержневой системы, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящие к потере гладкости у решения.

В работе [85] эта оценка была уточнена.

В этом параграфе будет получен результат, улучшающий оценку, полученную в [85] для более общего случая, а именно, будет доказана теорема.

Теорема 1.3.1. Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$, $Q(x)$ — не убывает на $[0, \ell]$, λ_n — собственные значения

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2/7+\delta}}$$

сходится при любом положительном δ .

Доказательство. Обозначим через $K(x, s)$ функцию влияния граничной задачи

$$\begin{cases} Lu = F'_\sigma; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0, \end{cases}$$

где $F(x) - \sigma$ -абсолютно непрерывная на $[0, \ell]$ функция. Существование и единственность $K(x, s)$ в классе непрерывных на квадрате $[0, \ell] \times [0, \ell]$ доказаны в [77]. Тогда спектральная задача (1.3.2) эквивалентна

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell K(x, s)u(s)M'_\sigma(s)d\sigma(s),$$

и собственные значения (1.3.2) определяются как нули оператора Фредгольма, определяемый, в нашем случае, следующим образом:

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n, \quad (1.3.3)$$

где

$$A_n = \int_0^\ell \dots \int_0^\ell \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & \dots & K(s_i, s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_n, s_1) & \dots & K(s_n, s_n) \end{vmatrix} dM(s_1) \dots dM(s_n).$$

Ряд (1.3.3) сходится при всех λ (см. [26, 53]).

Разности $K(s_{i+1}, s_j) - K(s_i, s_j)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, n$) при некоторых $\chi_{ij}^{(1)}$, лежащих между $\inf_{x, s \in [0, \ell]} K'_x(x, s)$ и $\sup_{x, s \in [0, \ell]} K'_x(x, s)$ можно записать в виде

$$K(s_{i+1}, s_j) - K(s_i, s_j) = \chi_{ij}^{(1)}(s_{i+1} - s_i).$$

Так как $K(x, s)$ решение уравнения $Lu = \delta(x - s)$, где $\delta(x - s)$ — классическая функция Дирака, $K'_x(x, s)$ ограничена на всем квадрате $[0; \ell] \times [0; \ell]$. Тогда величины $\chi_{ij}^{(1)}$ ограничены в совокупности некоторой

постоянной c . Тогда при $n \geq 5$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) & \dots & K(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1}, s_1) & K(s_{n-1}, s_2) & \dots & K(s_{n-1}, s_n) \\ K(s_n, s_1) & K(s_n, s_2) & \dots & K(s_n, s_n) \end{array} \right| = \\
& = \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) & \dots & K(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1}, s_1) & K(s_{n-1}, s_2) & \dots & K(s_{n-1}, s_n) \\ \chi_{n-1,1}^{(1)} & \chi_{n-1,2}^{(1)} & \dots & \chi_{n-1,n}^{(1)} \end{array} \right| \cdot (s_n - s_{n-1}) = \\
& = \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ \chi_{1,1}^{(1)} & \chi_{1,2}^{(1)} & \dots & \chi_{1,n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{n-2,1}^{(1)} & \chi_{n-2,2}^{(1)} & \dots & \chi_{n-2,n}^{(1)} \\ \chi_{n-1,1}^{(1)} & \chi_{n-1,2}^{(1)} & \dots & \chi_{n-1,n}^{(1)} \end{array} \right| \cdot (s_2 - s_1) \cdot (s_3 - s_2) \cdot \dots \cdot (s_n - s_{n-1}) = \\
& = \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ \chi_{1,1}^{(1)} & \chi_{1,2}^{(1)} & \dots & \chi_{1,n}^{(1)} \\ \chi_{1,1}^{(2)} & \chi_{1,2}^{(2)} & \dots & \chi_{1,n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{n-3,1}^{(2)} & \chi_{n-3,2}^{(2)} & \dots & \chi_{n-3,n}^{(2)} \\ \chi_{n-2,1}^{(2)} & \chi_{n-2,2}^{(2)} & \dots & \chi_{n-2,n}^{(2)} \end{array} \right| \cdot (s_2 - s_1) \cdot (s_3 - s_2) \cdot \dots \cdot (s_n - s_{n-1}) \times \\
& \quad \times (\mu(s_3) - \mu(s_1)) \cdot (\mu(s_4) - \mu(s_2)) \cdot \dots \cdot (\mu(s_n) - \mu(s_{n-2})) = \\
& = \left| \begin{array}{cccc} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ \chi_{1,1}^{(1)} & \chi_{1,2}^{(1)} & \dots & \chi_{1,n}^{(1)} \\ \chi_{1,1}^{(2)} & \chi_{1,2}^{(2)} & \dots & \chi_{1,n}^{(2)} \\ \chi_{1,1}^{(3)} & \chi_{1,2}^{(3)} & \dots & \chi_{1,n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{n-4,1}^{(3)} & \chi_{n-4,2}^{(3)} & \dots & \chi_{n-4,n}^{(3)} \\ \chi_{n-3,1}^{(3)} & \chi_{n-3,2}^{(3)} & \dots & \chi_{n-3,n}^{(3)} \end{array} \right| \cdot (s_2 - s_1) \cdot (s_3 - s_2) \cdot \dots \cdot (s_n - s_{n-1}) \times \\
& \quad \times (\mu(s_3) - \mu(s_1)) \cdot (\mu(s_4) - \mu(s_2)) \cdot \dots \cdot (\mu(s_n) - \mu(s_{n-2})) \times \\
& \quad \times (s_4 - s_1) \cdot (s_5 - s_2) \cdot \dots \cdot (s_n - s_{n-3}),
\end{aligned}$$

где

$$\chi_{m,j}^{(2)} = \frac{\chi_{m+1,j}^{(1)} - \chi_{m,j}^{(1)}}{\mu(s_{m+2}) - \mu(s_m)}$$

$(m = 1, 2, \dots, n-2; j = 1, 2, \dots, n)$ и

$$\chi_{m,j}^{(3)} = \frac{\chi_{m+1,j}^{(2)} - \chi_{m,j}^{(2)}}{s_{m+3} - s_m}$$

$(m = 1, 2, \dots, n-3; j = 1, 2, \dots, n)$.

Нетрудно видеть, что величины $\chi_{m,j}^{(2)}$ и $\chi_{m,j}^{(3)}$ ограничены в совокупности некоторой C .

Применяя неравенство Адамара и оценки

$$|(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1})| \leq \left(\frac{\ell}{n-1}\right)^{n-1},$$

$$|(\mu(s_3) - \mu(s_1))(\mu(s_4) - \mu(s_2)) \dots (\mu(s_n) - \mu(s_{n-2}))| \leq \left(\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{n-2}\right)^{n-2},$$

$$|(s_4 - s_1)(s_5 - s_2) \dots (s_n - s_{n-3})| \leq \left(\frac{\ell}{n-3}\right)^{n-3}$$

для A_n ($n \geq 5$) будем иметь

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq c^n \cdot n^{n/2} \cdot (M(\ell) - M(0))^n \cdot \left(\frac{\ell}{n-1}\right)^{n-1} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{n-2}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{\ell}{n-3}\right)^{n-3} = \\ &= \frac{1}{\ell^4(\mu(\ell) - \mu(0))^2} \cdot (c(M(\ell) - M(0))\ell^2)^n \times \\ &\quad \times \frac{n^{n/2}}{(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}(n-3)^{n-3}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n^{\varepsilon n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n^{\varepsilon n}} = 0,$$

то при достаточно большом n , зависящем от ε , справедливо неравенство:

$$|A_n| \leq c_1 \cdot c_2^n \cdot n^{-\frac{5}{2}n + \varepsilon n},$$

где через c_1 и c_2 обозначены постоянные, от n не зависящие. Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [82, 85], показывает,

что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $2/7 - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $2/7$, следовательно, для произвольного $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/7+\delta}}$$

сходится. Теорема доказана. \square

Лемма 1.3.1. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функции, принадлежащие классу E и удовлетворяют граничным условиям, т. е. $l_j \varphi = l_j \psi = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Тогда

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi),$$

где

$$(u, v) = \int_0^\ell uv \, d\sigma.$$

Доказательство. В выражении $(L\varphi, \psi)$ интеграл разобьем на три и первые два проинтегрируем соответствующее число раз:

$$\begin{aligned} (L\varphi, \psi) &= \int_0^\ell (p\varphi''_{x\mu})''_{x\sigma} \psi \, d\sigma - \int_0^\ell (r\varphi'_x)'_\sigma \psi \, d\sigma + \int_0^\ell \varphi \psi Q'_\sigma \, d\sigma = \\ &= (p\varphi''_{x\mu})'_x \psi \Big|_0^\ell - p\varphi''_{x\mu} \psi'_x \Big|_0^\ell + p\psi''_{x\mu} \varphi'_x \Big|_0^\ell - (p\psi''_{x\mu})'_x \varphi \Big|_0^\ell + \int_0^\ell (p\psi''_{x\mu})''_{x\sigma} \varphi \, d\sigma - \\ &\quad - r\varphi'_x \psi \Big|_0^\ell + r\psi'_x \varphi \Big|_0^\ell - \int_0^\ell (r\psi'_x)'_\sigma \varphi \, d\sigma + \int_0^\ell \varphi \psi Q'_\sigma \, d\sigma = \\ &= l_4 \varphi \cdot \psi(\ell) + \gamma_4 \varphi(\ell) \psi(\ell) - l_2 \varphi \cdot \psi(0) + \gamma_2 \varphi(0) \psi(0) - \\ &\quad - l_3 \varphi \cdot \psi'_x(\ell) + \gamma_3 \varphi'_x(\ell) \psi'_x(\ell) + l_1 \varphi \cdot \psi'_x(0) + \gamma_1 \varphi'_x(0) \psi'_x(0) - \\ &\quad - l_4 \psi \cdot \varphi(\ell) - \gamma_4 \psi(\ell) \varphi(\ell) + l_2 \psi \cdot \varphi(0) - \gamma_2 \psi(0) \varphi(0) + l_3 \psi \cdot \varphi'_x(\ell) - \\ &\quad - \gamma_3 \psi'_x(\ell) \varphi'_x(\ell) - l_1 \psi \cdot \varphi'_x(0) - \gamma_1 \psi'_x(0) \varphi'_x(0) + (\varphi, L\psi) = (\varphi, L\psi), \end{aligned}$$

так как внеинтегральные слагаемые либо обращаются в нуль, в силу условий леммы, либо сокращаются. Лемма доказана. \square

Доказательная лемма позволяет утверждать, что спектр задачи

$$\begin{cases} Lu = \lambda M'_\sigma u; \\ l_j u = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

где λ — спектральный параметр вещественен.

В работе [80] доказано, что геометрическая кратность каждого собственного значения равна 1. Покажем, что и алгебраическая кратность равна 1. Предположим, что у некоторого значения λ^* , которому отвечает собственная функция $\varphi^*(x)$, есть присоединенная функция $\psi(x)$. Последняя является нетривиальным решением задачи

$$\begin{cases} Lu = \lambda^*u + \varphi^*; \\ l_j u = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Подставляя $\psi(x)$ в уравнение из (1.3.4), умножая полученное тождество на $\varphi^*(x)$ и интегрируя по мере σ по отрезку $[0; \ell]$, будем иметь

$$(L\psi, \varphi^*) = \lambda^*(\psi, \varphi^*) + (\varphi^*, \varphi^*).$$

В силу леммы, последнее равенство допускает переапись

$$(\psi, L\varphi^*) = \lambda^*(\psi, \varphi^*) + (\varphi^*, \varphi^*).$$

Так как $\varphi^*(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ^* , из (1.3.4) следует, что $\int_0^\ell \varphi^{*2} d\sigma = 0$.

Последнее, непрерывность $\varphi^*(x)$ влечет тождество $\varphi^*(x) \equiv 0$, и мы приходим к противоречию.

В заключение параграфа мы произведем оценку спектрального зазора.

Теорема 1.3.2. Пусть λ_0 — ведущее собственное значение граничной задачи (1.3.1). Тогда, любое, отличное от λ_0 , собственное значение (1.3.1) удовлетворяет условию

$$\lambda \geq \lambda_0 \sqrt{\frac{\nu_0 + \|Au_0\|_C}{\nu_0 - \|Au_0\|_C}},$$

где $\nu_0 = \sup_{(0, \ell)} \frac{w_0(x)}{u_0(x)}$, $w_0(x) = \int_0^\ell G(x, s) d\sigma(s)$.

Доказательство. На основании оценок функции влияния, полученных в работе [80], легко оценить ядро

$$G_2(x, s) = \int_0^\ell G(x, t)G(t, s) d\sigma(t)$$

второй итерации A^2 интегрального оператора A :

$$(AF)(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) F'_\sigma(s) d\sigma(s).$$

Обозначим через $w_0(x)$ решение граничной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'(0) = 0; \\ u(\ell) = u'(\ell) = 0. \end{cases}$$

при $F'_\sigma(x) \equiv 1$. Нетрудно видеть, что

$$w_0(x) = (Av_0)(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) d\sigma(s),$$

где $v_0(x) \equiv 1$. Из

$$u_0(x)v_1(s) \leq G(x, s) \leq u_0(x)v_2(s),$$

где $u_0(x) = \int_0^x (x-\tau) d\mu(\tau) \cdot \int_x^{\ell} (\tau-x) d\mu(\tau)$, $v_1(s)$, $v_2(s)$ — σ -суммируемые функции [80], мы находим, что

$$w_0(x) = \int_0^{\ell} G(x, s) d\sigma(s) \leq u_0(x) \int_0^{\ell} v_2(s) d\sigma(s).$$

А так как $v_2(s)$ — σ -суммируема, то отношение $\frac{w_0(x)}{u_0(x)}$ ограничено сверху.

Пусть

$$\nu_0 = \sup_{(0, \ell)} \frac{w_0(x)}{u_0(x)}.$$

Из

$$G(x, s) \geq u_0(x)G(\tau, s),$$

[80] вытекают неравенства

$$u_0(x) \cdot \|AF\|_C \leq (AF)(x) \leq \|AF\|_C \cdot v_0(x), \quad (1.3.5)$$

здесь $\|\cdot\|_C$ — норма в $C[0; \ell]$.

Применяя ко всем частям неравенства (1.3.5) оператор A получим

$$(Au_0)(x) \cdot \|AF\|_C \leq (A^2F)(x) \leq \|AF\|_C \cdot (Av_0)(x),$$

из которого находим

$$u_0(x) \cdot \|Au_0\|_C \cdot \|AF\|_C \leq (A^2F)(x) \leq \|AF\|_C \cdot \nu_0 u_0(x). \quad (1.3.6)$$

Из (1.3.6) окончательно получаем

$$tu_0(x) \leq (A^2F)(x) \leq \rho tu_0(x), \quad (1.3.7)$$

где $t = \|Au_0\|_C \cdot \|AF\|_C$ и $\rho = \frac{\nu_0}{\|Au_0\|_C \cdot \|AF\|_C}$.

Доказанное неравенство (1.3.7) позволяет утверждать, что вторая итерация $B = A^2$ является фокусирующим оператором, т. е. $BK \subset K_{u_0, \rho}$, где $K_{u_0, \rho}$ — конус, состоящий из элементов $v \in K$, для каждого из которых

$$tu_0 \leq v \leq \rho tu_0$$

при некотором $t = t(v) > 0$.

Доказанное включение $A^2K \subset K_{u_0, \rho}$ означает справедливость теоремы. \square

1.4 О возможности применения метода разделения переменных для доказательства существования решения математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы

В этом параграфе изучается возможность применения метода Фурье для нахождения решения математической модели

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ \quad = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{dQ}{d\sigma} u + f(x, t); \\ (pv''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pv''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pv''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pv''_{x\mu})(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x), u'_t(x, 0) = \psi_1(x). \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} l_1 v &\equiv (pv''_{x\mu})(0) - \gamma_1 v(0), \\ l_2 v &\equiv (pv''_{x\mu})'_x(0) - (rv'_x)(0) + \gamma_2 v(0), \\ l_3 v &\equiv (pv''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 v'_x(\ell), \\ l_4 v &\equiv (pv''_{x\mu})'_x(\ell) - (rv'_x)(\ell) - \gamma_4 v(\ell). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_n(x)$ — нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n , т. е.

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^\ell \varphi_n^2(x) M'_\sigma(x) d\sigma(x) = 1.$$

Теорема 1.4.1. Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ -абсолютно непрерывны; $M'_\sigma(x) > 0$; $Q(x)$ не убывает на $[0; \ell]$, $M'_\sigma(x) \geq m_0 > 0$; $f(x, t)$ по переменной x раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по нормированным собственным функциям $\varphi_n(x)$, причем

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sqrt{\lambda_n}$, где

$$f_n(t) = \int_0^\ell M'_\sigma(s) f(s, t) \varphi_n(s) d\sigma(s),$$

также сходится абсолютно и равномерно на $[0, T^*]$; кроме того, $\psi \in E$, $\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}$ абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$; $\left(\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}\right)'_x$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, ($i = 1, 2$); $l_j\psi_1 = l_j(L\psi_1) = l_j\psi_2 = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{B_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} (t - \tau) d\tau \right) \varphi_n(x), \quad (1.4.2)$$

$$A_n = \int_0^\ell M'_\sigma(s) \varphi_n(s) \psi_1(s) d\sigma(s),$$

$$B_n = \int_0^\ell M'_\sigma(s) \varphi_n(s) \psi_2(s) d\sigma(s),$$

является решением математической модели (1.4.1), причем ряд (1.4.2) можно дифференцировать по t дважды, по переменной x четырежды: сначала по x , затем по мере μ , потом по x , и последний — четвертый раз — по σ ; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $[0; \ell] \times [0; T]$.

Доказательство. Оценим коэффициенты A_n и B_n ряда (1.4.2). Имеем

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^\ell \psi_1(x) M'_\sigma(x) \varphi_n(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\ell \psi_1(x) (L\varphi_n)(x) d\sigma(x) = \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\ell \varphi_n(x) (L\psi_1)(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\ell \varphi_n(x) M'_\sigma(x) \frac{L\psi_1(x)}{M'_\sigma(x)} d\sigma(x). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Равенство (1.4.3) означает, что числа $\lambda_n A_n$ есть коэффициенты ряда Фурье функции $\frac{L\psi_1(x)}{M'_\sigma(x)}$, следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^3 A_n^2|$$

сходится.

Аналогично для B_n :

$$\begin{aligned} B_n &= \int_0^\ell M'_\sigma(x) \varphi_n(x) \psi_2(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\ell \psi_2(x) (L\varphi_n)(x) d\sigma(x) = \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\ell \varphi_n(x) (L\psi_2)(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\ell \varphi_n(x) M'_\sigma(x) \frac{L\psi_2(x)}{M'_\sigma(x)} d\sigma(x), \end{aligned}$$

и, как следствие, $\lambda_n B_n$ — коэффициенты ряда Фурье непрерывной на $[0; \ell]$ функции $\left(\frac{L\psi_2}{M'_\sigma}\right)(x)$. Отсюда вытекает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n B_n)^2$$

сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi'_{kx}(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) d\tau \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial \mu \partial x} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} (p \varphi''_{kx})''_{x\sigma}(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) d\tau \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} (r \varphi'_{kx})'_{\sigma}(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) d\tau \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t + B_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \right.$$

$$+ \int_0^t f_k(\tau) \cos \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau \Big),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi'_k(x) \left(-A_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t + B_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \right. \\ \left. + \int_0^t f_k(\tau) \cos \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k \lambda_k \cos \sqrt{\lambda_k} t - B_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t + \right. \\ \left. + f_k(t) - \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau \right).$$

Все ряды, написанные выше и не содержащие члены с $f_k(t)$, оцениваются рядом

$$K \sum_{k=1}^{\infty} \left(|A_k \lambda_k| + |B_k \sqrt{\lambda_k}| \right),$$

который сходится; ряды с $f_k(t)$ сходятся по условию теоремы. Отсюда вытекает равномерная и абсолютная сходимость всех рядов, полученных из (1.4.2) почленным дифференцированием. А так как функция $u(x, t)$, определенная равенством (1.4.2), очевидно удовлетворяет граничным и начальным условиям, то $u(x, t)$ — действительно решение задачи (1.4.1). Теорема доказана. \square

1.5 Корректность математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы

В этом параграфе доказывается, что при малом изменении начальных условий решение математической модели

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{dQ}{d\sigma} u + f(x, t), \\ (pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x), u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{array} \right. \quad (1.5.1)$$

мало изменится, разумеется, при условии, что решение существует и единственно. Для простоты рассмотрим случай, когда $\gamma_i > 0$. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — решения математической модели (1.5.1) при начальных условиях $u(x, 0) = \psi_0^{(1)}(x)$, $u'_t(x, 0) = \psi_1^{(1)}(x)$ и $u(x, 0) = \psi_0^{(2)}(x)$, $u'_t(x, 0) = \psi_1^{(2)}(x)$ соответственно. Тогда разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ является решением (1.5.1) при $f(x, t) \equiv 0$, $u(x, 0) = \psi_0(x)$ и $u'_t(x, 0) = \psi_1(x)$, где $\psi_i(x) = \psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)$ ($i = 1, 2$).

Так же, как и в § 1.2 доказывается равенство (для произвольного фиксированного $T^* \in [0; T]$)

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \frac{u'^2_x(0, T^*)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0, T^*)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2_x(\ell, T^*)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell, T^*)}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\ell (u'_t(x, T^*))^2 dM + \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) (u''_{x\mu}(x, T^*))^2 d\mu + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\ell r(x) (u'_x(x, T^*))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell u^2(x, T^*) dQ = \\ & = \gamma_1 \frac{\psi_1^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{\psi_0^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{\psi_1^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{\psi_0^2(\ell)}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\ell (\varphi_1(x))^2 dM + \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) (\varphi_0''_{x\mu}(x))^2 d\mu + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\ell r(x) (\varphi_{0x}'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell (\varphi_0(x))^2 dQ. \quad (1.5.2)$$

Из последнего равенства находим, что левая часть мала, так как по условию правая часть мала. Обозначим через ε^2 правую часть (1.5.2). Для всякого $x \in [0; \ell] \setminus S(\sigma)$ и $T^* \in [0; T]$ будем иметь

$$\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s, T^*) \right)^2 dM(s) \leq \varepsilon^2, \quad \int_0^x p(s) (u''_{x\mu}(s, T^*))^2 d\mu \leq \varepsilon^2$$

и

$$\int_0^x r(x) (u'_x(x, T^*))^2 dx \leq \varepsilon^2.$$

Покажем, что для всех $x \in [0; \ell]$ и $T^* \in [0; T]$ величина $|u(x, T^*)|$ мала, если ε мало. Имеем

$$\begin{aligned} |u(x, T^*) - u(0, T^*)| &= \left| \int_0^x u'_x(s, T^*) ds \right| = \\ &= \left| \int_0^x \left(u'_x(0, T^*) + \int_0^s u''_{x\mu}(\eta, T^*) d\mu(\eta) \right) ds \right| \leq \\ &\leq |u'_x(0, T^*)| \ell + \int_0^x (x - \eta) |u''_{x\mu}(\eta, T^*)| d\mu(\eta), \end{aligned}$$

или, после применения неравенства Коши–Буняковского,

$$\begin{aligned} |u(x, T^*) - u(0, T^*)| &\leq |u'_x(0, T^*)| \ell + \int_0^\ell 1 \cdot |u''_{x\mu}(\eta, T^*)| d\mu(\eta) \leq \\ &\leq |u'_x(0, T^*)| \cdot \ell + \ell \sqrt{\int_0^\ell 1^2 d\mu(\eta)} \cdot \sqrt{\int_0^\ell u''_{x\mu}^2(\eta, T^*) d\mu(\eta)} \leq \\ &\leq |u'_x(0, T^*)| \cdot \ell + \ell \frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0} \varepsilon. \quad (1.5.3) \end{aligned}$$

Для оценки $|u'_x(0, T^*)|$ имеем

$$|u'_x(x, T^*) - u'_x(0, T^*)| = \left| \int_0^x u''_{x\mu}(s, T^*) d\mu(s) \right| \leq \int_0^\ell 1 \cdot |u''_{x\mu}(s, T^*)| d\mu(s) \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^\ell 1^2 d\mu(s)} \sqrt{\int_0^\ell u_{x\mu}^{\prime 2}(s, T^*) d\mu(s)} \leq C \cdot \varepsilon, \quad (1.5.4)$$

где $C = \frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{\sqrt{c_0}}$ ($c_0 = \inf_{[0; \ell]} p(x)$). Из неравенства (1.5.4) мы находим

$$-C \cdot \varepsilon \leq u'_x(x, T^*) - u'_x(0, T^*) \leq C \cdot \varepsilon, \quad (1.5.5)$$

причем последнее неравенство справедливо при всех $x \in [0; \ell]$. Проинтегрируем (1.5.5) по x по всему отрезку $[0; \ell]$, получим

$$-C \cdot \varepsilon \cdot \ell \leq -u'_x(0, T^*) \cdot \ell \leq C \cdot \varepsilon \cdot \ell,$$

так как $u(0, T^*) = u(\ell, T^*) = 0$. Из последнего неравенства находим, что

$$|u'_x(x, T^*)| \leq C \cdot \varepsilon.$$

Теперь неравенство (1.5.3) принимает вид

$$|u(x, T^*) - u(0, T^*)| \leq \bar{C} \cdot \varepsilon, \quad (1.5.6)$$

где \bar{C} — некоторая константа. Из (1.5.6) вытекает неравенство

$$|u(x, T^*)| \leq |u(0, T^*)| + \bar{C} \cdot \varepsilon,$$

из которого и вытекает требуемое ввиду малости $|u(0, T^*)|$ (последнее является следствием (1.5.2)).

1.6 Классическое решение смешанной задачи с инволюцией на графе

В этом параграфе исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией, рассматриваемая на геометрическом графе из двух ребер, одно из которых образует цикл.

Рассматривается простейший геометрический граф Γ , состоящий из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю, а второе примыкает к нему. Ребра графа параметризованы отрезком $[0, 1]$. На Γ исследуется смешанная задача, определяемая как задача в пространстве вектор-функций $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$ (T — знак транспонирования):

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_k(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q_k(x) u_k(x, t), \quad k = 1, 2 \quad (1.6.1)$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = u_2(0, t), \quad (1.6.2)$$

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \quad (1.6.3)$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Предполагаем выполненными требования: $q_k(x) \in C^1[0, 1]$ и вещественные, $\varphi_k(x) \in C^1[0, 1]$, и

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1), \quad \varphi_1'(0) + \varphi_1(0) (q_1(0) - q_2(0)) - \varphi_2'(1) = 0. \quad (1.6.4)$$

Решение ищется в классе вектор-функций, непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0, 1] \times (-\infty, +\infty)$. Краевые условия (1.6.2) обеспечивают непрерывность решения задачи в узле графа. Условия (1.6.4) являются естественными и минимальными для существования классического решения (необходимо следуют из постановки задачи).

Решая задачу методом Фурье, мы используем прием ускорения сходимости рядов, который на базе уточненных асимптотик собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи позволяет получить классическое решение при минимальных требованиях гладкости на начальные данные задачи. Рассматриваемый граф имеет минимальную структуру, что упрощает вычисления, но служит базой для построения других моделей. Задача (1.6.1)–(1.6.3) обобщает задачи, рассмотренные в [17], [18].

К начально-краевым задачам и задачам граничного управления на графах приводит моделирование колебательных процессов на сетевых структурах, например, струнных и струнно-стержневых конструкций

(см. [61, 66]). В указанных работах обсуждаются и вопросы, связанные с обоснованием метода Фурье (см., например, [61]).

Согласно методу Фурье, положим $u_1(x, t) = y_1(x)T(t)$, $u_2(x, t) = y_2(x)T(t)$. Тогда $T(t) = e^{\lambda it}$, а соответствующая (1.6.1)–(1.6.3) спектральная задача есть $Ly = \lambda y$, $y = (y_1, y_2)^T$, где

$$Ly = \left(y_1'(1-x) + q_1(x)y_1(x), y_2'(1-x) + q_2(x)y_2(x) \right)^T, \\ y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

1.6.1 Явное решение в случае симметрического потенциала

Сначала рассмотрим задачу для уравнений

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_k(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q_k^0(x)u_k(x, t), \quad k = 1, 2,$$

с условиями (1.6.2), (1.6.3) (так называемую эталонную задачу), где $q_k^0(x)$, удовлетворяют условиям $q_k^0(x) = q_k^0(1-x)$. Здесь достаточно требовать $q_k^0(x) \in C[0, 1]$. Соответствующий оператор будем обозначать L_0 .

Используя формулу из [18, Лемма 2] для общего решения уравнения

$$y_k'(1-x) + q_k^0(x)y_k(x) = \lambda y_k(x),$$

где $y_k(x)$ — скалярная функция, в случае симметрической $q_k^0(x)$, получим

Лемма 1.6.1 (см. [86]). *Если $a_1 = \int_0^1 q_1^0(t) dt$, $a_2 = \pi/2 + \int_0^1 q_2^0(t) dt$ не кратны 2π , и $a_1 \neq a_2$, то собственные значения оператора L_0 простые и образуют две серии $\lambda_{1n}^0 = a_1 + 2\pi n$, $\lambda_{2n}^0 = a_2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующие собственные функции*

$$y_{1n}^0(x) = \left(g_1^0(x, \lambda_{1n}^0), \gamma g_2^0(x, \lambda_{1n}^0) \right)^T, \quad y_{2n}^0(x) = \left(0, g_2^0(x, \lambda_{2n}^0) \right)^T,$$

где $\gamma = \frac{1+i}{1-e^{ai}}$, $a = a_1 - a_2$, $g_k^0(x, \lambda) = s_k(1-x)e^{\lambda i(1-x)} - i s_k(x)e^{\lambda i x}$,

$$s_k(x) = \exp \left(-i \int_0^x q_k^0(t) dt \right).$$

Сопряженный оператор L_0^* имеет те же собственные значения, его собственные функции есть:

$$z_{1n}^0(x) = \left(g_1^0(x, \lambda_{1n}^0), 0 \right)^T, \quad z_{2n}^0(x) = \left(g_1^0(x, \lambda_{2n}^0), \frac{i}{\gamma e^{ai}} g_2^0(x, \lambda_{2n}^0) \right)^T.$$

Также как в [18] устанавливается

Лемма 1.6.2. Системы $\{y_{1n}^0(x)\} \cup \{y_{2n}^0(x)\}$ и $\{z_{1n}^0(x)\} \cup \{z_{2n}^0(x)\}$ образуют полные системы в пространстве вектор-функций $L_2^2[0, 1]$.

Всюду далее через (\cdot, \cdot) будем обозначать скалярное произведение в $L_2^2[0, 1]$ или $L_2[0, 1]$ (в зависимости от рассматриваемых функций).

Формальное решение смешанной задачи (1.6.1)–(1.6.3) представляется рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} y_{1n}^0(x) e^{\lambda_{1n}^0 i t} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} y_{2n}^0(x) e^{\lambda_{2n}^0 i t}$$

Из условия (1.6.3) при $t = 0$ имеем

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} y_{1n}^0(x) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} y_{2n}^0(x). \quad (1.6.5)$$

Лемма 1.6.3. Если $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ удовлетворяет условиям $\varphi_j(x) \in C^1[0, 1]$ и $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0)$, то $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi, z_{1n}^0) y_{1n}^0(x) + \frac{\gamma i}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\varphi, z_{2n}^0) y_{2n}^0(x), \quad (1.6.6)$$

и ряды в (1.6.6) сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. В (1.6.5) имеем $c_{1n} = \frac{(\varphi, z_{1n}^0(x))}{(y_{1n}^0(x), z_{1n}^0(x))}$, $c_{2n} = \frac{(\varphi, z_{2n}^0(x))}{(y_{2n}^0(x), z_{2n}^0(x))}$. Учитывая свойства $g_k^0(x, \lambda)$ (см. [18]), получим $(y_{1n}^0(x), z_{1n}^0(x)) = 2$, $(y_{2n}^0(x), z_{2n}^0(x)) = -\frac{2}{\gamma}$. Тогда $c_{1n} = \frac{1}{2}(\varphi_1, g_1^0(x, \lambda_{1n}^0))$, $c_{2n} = \frac{\gamma}{2}(\varphi_1, g_1^0(x, \lambda_{2n}^0)) + \frac{1}{2}(\varphi_2, g_2^0(x, \lambda_{2n}^0))$.

Далее $(\varphi, z_{kn}^0(x)) = \frac{1}{\lambda_{kn}^0}(\varphi, L^* z_{kn}^0(x)) = \frac{1}{\lambda_{kn}^0}(w, z_{kn}^0(x))$, где $w = L\varphi \in L_2^2[0, 1]$, $k = 1, 2$. Обозначая через α_n любые числа такие, что $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, имеем $(w, z_{kn}^0(x)) = \alpha_n$ (см. [18]), откуда в силу того, что $\frac{1}{\lambda_n^0} = O(1/n)$, коэффициенты Фурье имеют оценку $\frac{\alpha_n}{n}$. Учитывая, что $y_{1n}^0(x)$, $y_{2n}^0(x)$ ограничены, получаем абсолютную и равномерную сходимость рядов в (1.6.6). \square

Таким образом, для формального решения $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$ имеем следующую формулу:

$$u_1(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} g_1^0(x, \lambda_{1n}^0) e^{\lambda_{1n}^0 i t},$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} \gamma g_2^0(x, \lambda_{1n}^0) e^{\lambda_{1n}^0 it} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} g_2^0(x, \lambda_{2n}^0) e^{\lambda_{2n}^0 it}.$$

Здесь ряды сходятся абсолютно и равномерно при всех $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 1.6.1. При выполнении условий (1.6.4) классическое решение задачи (1.6.1)–(1.6.3) существует и имеет вид: $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$, где

$$u_1(x, t) = [p_1(1-x)f_1(1-x+t) - ip_1(x)f_1(x+t)] e^{a_1 it}, \quad (1.6.7)$$

$$u_2(x, t) = \gamma [p_3(1-x)f_1(1-x+t) - ip_3(x)f_1(x+t)] e^{a_1 it} + [p_2(1-x)f_2(1-x+t) - ip_2(x)f_2(x+t)] e^{a_2 it}, \quad (1.6.8)$$

$f_k(x)$ — непрерывно дифференцируемые при $x \in (-\infty, +\infty)$, периодические, с периодом 1, функции, причем при $x \in [0, 1]$

$$f_1(x) = \frac{1}{2p_1(x)} [i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2p_2(x)} [i\varphi_2(x) + \varphi_2(1-x)] - \frac{\gamma}{2p_4(x)} [i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)],$$

$$p_1(x) = s_1(x)e^{a_1 ix}, \quad p_2(x) = s_2(x)e^{a_2 ix}, \quad p_3(x) = s_2(x)e^{a_1 ix}, \quad p_4(x) = s_1(x)e^{a_2 ix}.$$

Доказательство. Учитывая вид $g_k^0(x, \lambda)$ имеем:

$$u_1(x, t) = \left[s_1(1-x)e^{a_1 i(1-x)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} e^{2\pi ni(1-x+t)} - i s_1(x)e^{a_1 ix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1n} e^{2\pi ni(x+t)} \right] e^{a_1 it},$$

откуда, полагая

$$f_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_{1n} e^{2n\pi ix}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

придем к (1.6.7). В свою очередь, c_{1n} преобразуется к виду $c_{1n} = \frac{1}{2} \left(\overline{p_1(x)} (\varphi_1(1-x) + i\varphi_1(x)) / 2, e^{2\pi nix} \right)$. Отсюда в силу полноты тригонометрической системы имеем при $x \in [0, 1]$ $f_1(x) = \frac{1}{2p_1(x)} [i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)]$.

Аналогично для $u_2(x, t)$ получим (1.6.8), где $f_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_{2n} e^{2n\pi i x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим подробнее $f_2(x)$. Имеем

$$c_{2n} = -\frac{\gamma}{2}(\varphi_1, g_1(x, \lambda_{2n}^0) + \frac{1}{2}(\varphi_2, g_2(x, \lambda_{2n}^0) = -\frac{\gamma}{2}(\tilde{\varphi}_1, e^{2n\pi i x}) + \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_2, e^{2n\pi i x}),$$

где $\tilde{\varphi}_1(x) = \overline{s_1(x)e^{a_2 i x}}[i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)]$, $\tilde{\varphi}_2(x) = \overline{s_2(x)e^{a_2 i x}}[i\varphi_2(x) + \varphi_2(1-x)]$.

Обозначая суммы рядов $f_3(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (\tilde{\varphi}_1, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i x}$, $f_4(x) = \frac{\gamma}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (\tilde{\varphi}_2, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i x}$, при $x \in [0, 1]$ имеем $f_3(x) = \frac{i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)}{2s_1(x)e^{a_2 i x}}$, $f_4(x) = \frac{i\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)}{2s_2(x)e^{a_2 i x}}$, откуда $f_2(x) = f_3(x) - f_4(x)$.

Так как по условию $\varphi_1(x) \in C^1[0, 1]$, то $f_1(x) \in C^1[0, 1]$, а из $\varphi_1(0) = \varphi_1(1)$, $\varphi_1'(0) = \varphi_1'(1)$ и периодичности $f_1(x)$, следует $f_1(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$.

Функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ – периодические с периодом 1 и, вообще говоря, разрывны при $x \in \mathbb{Z}$. Однако, учитывая (1.6.4) непосредственной проверкой (как, например, в [18]) можем убедиться, что $f_2(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$. \square

1.6.2 Спектральная задача в случае произвольного потенциала

Решение спектральной задачи $Ly = \lambda y$ связано с решением уравнения

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (1.6.9)$$

которое сводится к известной системе Дирака (см. [18, Лемма 1], а также [78]). Используя результаты из [78], получим

Лемма 1.6.4. *При достаточно больших $|\lambda|$ общее решение уравнения (1.6.9) есть $y(x) = y(x, \mu) = sg(x, \mu)$, где s – произвольная постоянная,*

$$g(x, \lambda) = p_{11}(x, \lambda)a(\lambda) + p_{12}(x, \lambda), \quad (1.6.10)$$

$$p_{11}(x, \lambda) = (h_1(x)u_{11}(x) - ih_2(x)u_{21}(x))e^{-i\lambda x}, \quad p_{12}(x, \lambda) = (h_1(x)u_{12}(x) - ih_2(x)u_{22}(x))e^{i\lambda x}, \quad h_j(x) = \exp\left(\frac{\varepsilon_j i}{2} \int_0^x (q(t) + q(1-t))dt\right), \quad \varepsilon_j = (-1)^{j+1},$$

$j = 1, 2$, $a(\lambda) = \frac{h_2(1/2)u_{22}(1/2) - h_1(1/2)u_{12}(1/2)}{h_1(1/2)u_{11}(1/2) - h_2(1/2)u_{21}(1/2)} e^{i\lambda}$, $u_{ij}(x)$ определены в [78, Теорема 3.2].

Решением спектральной задачи $Ly = \lambda y$ является вектор-функция $y(x) = (c_1 g_1(x, \lambda), c_2 g_2(x, \lambda))^T$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а $g_k(x, \lambda)$ задается формулой (1.6.10), где все функции определяются через $q_k(x)$. Уравнение для собственных значений имеет вид: $(g_1(0, \lambda) - g_1(1, \lambda))g_2(0, \lambda) = 0$. Учитывая лемму 1.6.4 и уточненные асимптотические формулы из [78, Теорема 3.2], также как в [78] получим следующие утверждения

Теорема 1.6.2. *Если a_1 и a_2 из леммы 1.6.1, то собственные значения оператора L , достаточно большие по модулю, простые и образуют две серии:*

$$\lambda_{1n} = \lambda_{1n}^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad \lambda_{2n} = \lambda_{2n}^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots),$$

где λ_{kn}^0 из леммы 1.6.1, через α обозначаются различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n такие константы, что $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

Собственные функции оператора L образуют две серии:

$$y_{1n}(x, \lambda_{1n}) = (g_1(x, \lambda_{1n}), \gamma_n g_2(x, \lambda_{1n}))^T, \quad y_{2n}(x, \lambda_{2n}) = (0, g_2(x, \lambda_{2n}))^T,$$

где $\gamma_n = g_1(0, \lambda_{1n})/g_2(0, \lambda_{1n})$.

Для сопряженного оператора L^* , имеющего вид $L^*z = Lz$, $z_2(0) = z_1(1) - z_1(0) + iz_2(1) = 0$, где $z = z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, аналогично получим

Теорема 1.6.3. *Сопряженный оператор L^* имеет те же собственные значения, что и оператор L . Соответствующие собственные функции есть*

$$z_{1n}(x, \lambda_{1n}) = (g_1(x, \lambda_{1n}), 0)^T, \quad z_{2n}(x, \lambda_{2n}) = (g_1(x, \lambda_{2n}), \tilde{\gamma}_n g_2(x, \lambda_{2n}))^T,$$

где $\tilde{\gamma}_n = \frac{g_1(0, \lambda_{2n}) - g_1(1, \lambda_{2n})}{g_2(1, \lambda_{2n})}$.

Всюду далее будем обозначать λ_n одно из собственных значений в теореме 1.6.2, λ_n^0 — его главная часть, и $y_n(x, \lambda_n)$ ($z_n(x, \lambda_n)$) — соответствующие собственные функции оператора L (L^*). Также как [78, Теорема 3.6] получим

Лемма 1.6.5. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$g_k(x, \lambda_n) = g_k^0(x, \lambda_n^0) + \Omega_n(x, \lambda_n^0) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $g_k^0(x, \lambda_n^0) = h_{k2}(1-x)e^{\lambda_n^0 i(1-x)} - ih_{k2}(x)e^{\lambda_n^0 ix}$, $h_{k2}(x) = \exp(-\frac{i}{2}(q_k(t) + q_k(1-t))dt)$, $\Omega_n(x, \lambda_n^0) = \Omega_{1n}(x, \lambda_n^0) + \Omega_{2n}(x, \lambda_n^0)$, $\Omega_{kn}(x, \lambda_n^0)$ определены в [78, Теорема 3.6] через суммы выражений вида $\frac{1}{n}b(x)e^{\pm\lambda_n^0 ix}$, $\frac{1}{n}b(x) \int_0^x e^{\pm\lambda_n^0 i\tau} b(x) d\tau$, $b(x)$ обозначают различные непрерывные функции из некоторого конечного набора. Оценки $O(\frac{1}{n^2})$ равномерны по x .

Замечание 1.6.1. Отметим, что если $q_k^0(x) = (q_k(x) + q_k(1-x))/2$, то $s_k(x)$ из § 1.6.1 и есть $h_{k2}(x)$.

Лемма 1.6.6. Для собственных функций операторов L и L^* справедливы асимптотические формулы

$$y_n(x, \lambda_n) = y_n^0(x, \lambda_n^0) + (\Omega_n(x, \lambda_n^0), \Omega_n(x, \lambda_n^0))^T + O(1/n^2),$$

$$z_n(x, \lambda_n) = z_n^0(x, \lambda_n^0) + (\Omega_n(x, \lambda_n^0), \Omega_n(x, \lambda_n^0))^T + O(1/n^2),$$

где $y_n^0(x, \lambda_n) = y_n^0(x)$, $z_n^0(x, \lambda_n) = z_n^0(x)$ из леммы 1.6.1.

Также, как в [78], используя ограниченность ядра резольвенты, доказывается, что собственные функции операторов L и L^* образуют полные системы в $L_2^2[0, 1]$, и всякая функция $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, удовлетворяющая условиям $f_j(x) \in C^1[0, 1]$ и $f_1(0) = f_1(1) = f_2(0)$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора L .

1.6.3 Решение смешанной задачи в общем случае

Формальное решение задачи (1.6.1)–(1.6.3) по методу Фурье есть

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda_n|=r} (R_\lambda \varphi)(x) e^{\lambda it} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(\varphi, z_n(x, \lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)} y_n(x, \lambda_n) e^{\lambda_n it}, \quad (1.6.11)$$

где $\gamma(\lambda_n) = (y_n(x, \lambda_n), z_n(x, \lambda_n))$, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L , λ — спектральный параметр, E — единичный оператор. Здесь $r > 0$ фиксировано и таково, что при $|\lambda_n| > r$ все λ_n — простые.

Так как $(\varphi, z_n(x, \lambda_n)) = \frac{1}{\lambda_n}(\varphi, L^* z_n(x, \lambda_n)) = \frac{1}{\lambda_n}(L\varphi, z_n(x, \lambda_n))$, то справедлива

Лемма 1.6.7. Если $\varphi \in D_L$, λ_n — собственное значение операторов L и L^* , то

$$(\varphi, z_n(x, \lambda_n)) = \frac{1}{\lambda_n}(L\varphi, z_n(x, \lambda_n)).$$

Поскольку $(L\varphi, z_n(x, \lambda_n)) = \alpha_n$, то ряд в (1.6.11) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и всем $t \in [-A, A]$, при любом $A > 0$.

Представим (1.6.11) в виде:

$$u(x, t) = u^0(x, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda_n|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0)\varphi)(x) e^{\lambda it} d\lambda + \sum_{\substack{|\lambda_n|>r \\ |\lambda_n^0|>r}} A_n(x, t), \quad (1.6.12)$$

где $u^0(x, t)$ решение эталонной задачи (1.6.1)–(1.6.3) с симметричным потенциалом $q_k^0(x) = \frac{1}{2}(q_k(x) + q_k(1-x))$, $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть оператор L , в котором $q_k(x)$ заменяется на $q_k^0(x)$,

$$A_n(x, t) = \frac{(\varphi, z_n(x, \lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)} y_n(x, \lambda_n) e^{\lambda_n it} - \frac{(\varphi, z_n^0(x, \lambda_n^0))}{\gamma^0(\lambda_n^0)} y_n^0(x, \lambda_n^0) e^{\lambda_n^0 it},$$

λ_n^0 – собственные числа, а $y_n^0(x, \lambda_n^0)$, $z_n^0(x, \lambda_n^0)$ – собственные функции операторов L_0 и L_0^* соответственно, $\gamma^0(\lambda_n^0) = (y_n^0(x, \lambda_n^0), z_n^0(x, \lambda_n^0))$.

Лемма 1.6.8. *Если $q_k(0) = q_k(1)$, то для $A_n(x, t)$ справедливы оценки:*

$$A_n(x, t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n^2}\right), \quad A'_{n,x}(x, t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right), \quad A'_{n,t}(x, t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right),$$

равномерные по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Доказательство. Из леммы 1.6.7 имеем:

$$A_n(x, t) = \frac{(L\varphi, z_n(x, \lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)\lambda_n} y_n(x, \lambda_n) e^{\lambda_n it} - \frac{(L_0\varphi, z_n^0(x, \lambda_n^0))}{\gamma^0(\lambda_n^0)\lambda_n^0} y_n^0(x, \lambda_n^0) e^{\lambda_n^0 it},$$

а из леммы 1.6.6, учитывая, что $(L\varphi, \Omega_n) = \alpha_n/n$ (см. [78, Лемма 3.17]), получим

$$\frac{(L\varphi, z_n(x, \lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)} = \frac{(L_0\varphi, z_n^0(x, \lambda_n^0))}{\lambda_n^0} + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

Отсюда, с учетом лемм 1.6.5, 1.6.6, при условии $q_k(0) = q_k(1)$, справедливо представление:

$$A_n(x, t) = \frac{\alpha_n}{n} B_n(x, t) + \frac{\alpha_n}{n^2} C_n(x, t),$$

где

$$B_n(x, t) = y_n(x, \lambda_n) e^{\lambda_n it} - y_n^0(x, \lambda_n^0) e^{\lambda_n^0 it},$$

$C_n(x, t) = y_n(x, \lambda_n) e^{\lambda_n it}$, при этом имеют место оценки:

$$B_n(x, t) = O(1/n), \quad (B_n(x, t))'_x = O(1), \quad (B_n(x, t))'_t = O(1),$$

равномерные по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Отсюда следует утверждение леммы. \square

Из леммы 1.6.8, также как в [78], следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$\sum A_n(x, t), \quad \sum (A_n(x, t))'_x$$

и

$$\sum (A_n(x, t))'_t.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (1.6.12) удовлетворяет уравнению (1.6.1) и условиям (1.6.2)–(1.6.3). Таким образом справедлива

Теорема 1.6.4. *Если $q_k(x)$ вещественные, $q_k(x) \in C^1[0, 1]$, $q_k(0) = q_k(1)$, числа*

$$a_1 = \int_0^1 q_1^0(t) dt, \quad a_2 = \pi/2 + \int_0^1 q_2^0(t) dt$$

не кратны 2π , и $a_1 \neq a_2$, $\varphi_k(x) \in C^1[0, 1]$ и удовлетворяют условиям (1.6.4) ($k = 1, 2$), то классическое решение задачи (1.6.1)–(1.6.3) существует и имеет вид (1.6.12). Ряды в (1.6.12) и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием по x и t , абсолютно и равномерно сходятся при $x \in [0, 1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

1.7 Выводы к первой главе

Глава посвящена анализу линейной математической модели четвертого порядка и смешанной задачи с инволюцией на графе.

Основные результаты главы.

1. Получена оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи для изучаемой математической модели.

2. Доказана возможность применения метода Фурье; корректность изучаемых математических моделей.

3. Показано существование классического решения одной смешанной задачи с инволюцией на графе.

Глава 2

Адаптация метода конечных элементов для математических моделей четвертого порядка с производными по мере

2.1 Построение алгоритма

В этом параграфе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} \frac{d}{d\sigma} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{d\mu} \frac{du}{dx} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(r \frac{du}{dx} \right) + \frac{dQ}{d\sigma} u = \frac{d}{d\sigma} F; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Для приближенного решения уравнения из (2.1.1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого разобьем промежуток $[0; \ell]$ на части (узловыми) точками $\{x_k\}_{k=0}^{k=N}$, при этом $x_0 = 0$, $x_N = \ell$. Для дальнейшего удобства положим $x_{-1} = -\frac{1}{N}$, $x_{N+1} = \ell + \frac{1}{N}$. Введем обозначение $h = \max(x_{k+1} - x_k)$. Базисные функции зададим следующим образом

$$\varphi_{2k-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3 \left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}} \right)^3, & \text{для } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ 1 - 3 \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^2 + 2 \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^3, & \text{для } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$$\varphi_{2k}(x) = \begin{cases} (x - x_k) \left(1 + \frac{x - x_k}{x_k - x_{k-1}}\right)^2, & \text{для } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ (x - x_k) \left(1 - \frac{x - x_k}{x_k - x_{k-1}}\right)^2, & \text{для } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения и значения ее производной в узловых точках, и, в связи с этим, будем использовать в уравнениях вместо $u(x)$ функцию

$$v(x) = \sum_{i=-1}^{2n} v_i \varphi_i(x), \quad (2.1.4)$$

где v_{2i-1} и v_{2i} — значения функции и ее производной в узловой точке x_i .

Уравнение

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{d\mu} \frac{du}{dx} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(r \frac{du}{dx} \right) + \frac{dQ}{d\sigma} u = \frac{d}{d\sigma} F$$

умножим на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем по мере σ по всему отрезку $[0; \ell]$:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell (pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(x) \varphi_k(x) d\sigma - \int_0^\ell (ru'_x)'_{\sigma} \varphi_k(x) d\sigma + \int_0^\ell u(x) Q'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma = \\ = \int_0^\ell F'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Первый интеграл в левой части дважды проинтегрируем по частям, а второй — один раз:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell (pu''_{x\mu})''_{x\sigma}(x) \varphi_k(x) d\sigma = \\ = (pu''_{x\mu})'_x(x) \varphi_k(x) \Big|_0^\ell - (pu''_{x\mu})(x) \varphi'_k(x) \Big|_0^\ell + \int_0^\ell (pu''_{x\mu})(x) \varphi''_k(x) d\mu(x), \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\int_0^\ell (ru'_x)'_{\sigma} \varphi_k(x) d\sigma = ru'_x \varphi_k \Big|_0^\ell - \int_0^\ell ru'_x \varphi'_k dx. \quad (2.1.7)$$

Тогда равенство (2.1.5), с учетом (2.1.6) и (2.1.7), принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ell} (pu''_{x\mu})(x)\varphi''_k(x) dx + [(pu''_{x\mu})'_x(\ell) - pu'_x(\ell)] \varphi_k(\ell) - \\ & - (pu''_{x\mu})(\ell)\varphi'_k(\ell) - [(pu''_{x\mu})'_x(0) - pu'_x(0)] \varphi_k(0) + (pu''_{x\mu})(0)\varphi'_k(0) + \\ & + \int_0^{\ell} \varphi_k(x)u(x)Q'_\sigma(x) d\sigma = \int_0^{\ell} \varphi_k(x)F'_\sigma(x) d\sigma, \quad (2.1.8) \end{aligned}$$

или, с учетом граничных условий из (2.1.1), равенство (2.1.8) равносильно

$$\begin{aligned} & \gamma_1 u'_x(0)\varphi'_k(0) + \gamma_2 u(0)\varphi_k(0) + \gamma_3 u'_x(\ell)\varphi'_k(\ell) + \gamma_4 u(\ell)\varphi_k(\ell) + \\ & + \int_0^{\ell} (pu''_{x\mu})(x)\varphi''_{kx\mu}(x) dx + \int_0^{\ell} r(x)\varphi'_k(x)u'_x(x) dx + \int_0^{\ell} u(x)\varphi_k(x)Q'_\sigma(x) d\sigma = \\ & = \int_0^{\ell} \varphi_k(x)F'_\sigma(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Подставим сюда вместо $u(x)$ функцию (2.1.4). Получим систему из $2n+2$ уравнений относительно $2n+2$ неизвестных $\{v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^{2n} v_i \left(\gamma_1 \varphi'_i(0)\varphi'_k(0) + \gamma_2 \varphi_i(0)\varphi_k(0) + \gamma_3 \varphi'_i(\ell)\varphi'_k(\ell) + \gamma_4 \varphi_i(\ell)\varphi_k(\ell) + \right. \\ & \left. + \int_0^{\ell} p\varphi''_{ix\mu}(x)\varphi''_{kx\mu}(x) d\mu + \int_0^{\ell} r\varphi'_{ix}(x)\varphi'_{kx}(x) d\mu + \int_0^{\ell} \varphi_i(x)\varphi_k(x)Q'_\sigma d\sigma \right) = \\ & = \int_0^{\ell} \varphi_k(x)F'_\sigma(x) d\sigma \quad (k = -1, 0, 1, 2, \dots, 2n). \quad (2.1.9) \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle &= \gamma_1 \varphi'(0)\psi'(0) + \gamma_2 \varphi(0)\psi(0) + \gamma_3 \varphi'(\ell)\psi'(\ell) + \gamma_4 \varphi(\ell)\psi(\ell) + \\ & + \int_0^{\ell} p\varphi''_{x\mu}\psi''_{x\mu} d\mu + \int_0^{\ell} r\varphi'_x\psi'_x dx + \int_0^{\ell} \varphi\psi Q'_\sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Очевидно, что это билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывных на $[0; \ell]$ функций, имеющих вторую производную, суммируемую с квадратом. Благодаря условиям на коэффициенты модели он еще и невырожденный:

$$\langle \varphi, \psi \rangle \geq 0, \quad \langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \iff \varphi = 0.$$

Поэтому может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты $A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$ уравнений (2.1.9) образуют матрицу Грама системы линейно независимых векторов φ_k . Поэтому определитель матрицы A отличен от нуля, следовательно, система (2.1.9) имеет единственное решение.

2.2 Оценка погрешности

В дальнейшем, чтобы не затенять суть дела, мы будем считать $p(x) \equiv 1$ и $\mu(x) \equiv x$. Кроме того, мы будем использовать обозначение $h_k = x_{k+1} - x_k$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (2.1.1), $u_N(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N частей отрезка $[0; \ell]$. Тогда справедлива оценка

$$\langle u - u_N, u - u_N \rangle \leq C \cdot h,$$

где $h = \max(x_{k+1} - x_k)$, C не зависит от h и

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle = & \gamma_1 u'^2(0) + \gamma_2 u^2(0) + \gamma_3 u'^2(\ell) + \gamma_4 u^2(\ell) + \\ & + \int_0^\ell u''^2 dx + \int_0^\ell r u'^2 dx + \int_0^\ell u^2 dQ. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Доказательство. Интерполянт $u_I(x)$ точного решения $u(x)$ математической модели (2.1.1) можно выразить через базисные функции следующим образом

$$u_I(x) = \sum_{k=0}^n u(x_k) \varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^n u'_x(x_k) \varphi_{2k}(x).$$

Через $w(x)$ обозначим разность $u(x) - u_I(x)$. Оценим $|w(x)|$ в энергетической норме (2.2.1).

Для оценки $|w(x)|$ и $|w'(x)|$ нам понадобятся оценки $|w'''_{xxx}(x_k + 0)|$ и $|w''_{xx}(x_k)|$.

Для $|w'''(x_k + 0)|$ имеем

$$w'''(x_k + 0) = u'''(x_k + 0) + u(x_{k+1})\frac{12}{h_k^3} - u'(x_{k+1})\frac{6}{h_k^2} - u(x_k)\frac{12}{h_k^3} - u'(x_k)\frac{6}{h_k^2},$$

или, после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} w'''(x_k + 0) &= \frac{6}{h_k^3}u'''(x_k + 0)\frac{h_k^3}{6} + \frac{6}{h_k^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s u''(t) dt ds - \\ &\quad - \frac{6}{h_k^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_k} u''(t) dt ds = \frac{6}{h_k^3}u'''(x_k + 0) \left(-\frac{h_k^3}{6}\right) + \\ &\quad + \frac{6}{h_k^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s \int_{x_k+0}^t u'''(\tau) d\tau dt ds + \frac{6}{h_k^3}u'''(x_k + 0)\frac{h_k^3}{3} - \\ &\quad - \frac{6}{h_k^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} \int_{x_k+0}^t u'''(\tau) d\tau dt ds = \\ &= \frac{6}{h_k^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s \int_{x_k+0}^t (u'''(\tau) - u'''(x_k + 0)) d\tau dt ds + \\ &\quad + \frac{6}{h_k^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} \int_{x_k+0}^t (u'''(x_k + 0) - u'''(\tau)) d\tau dt ds \end{aligned}$$

Из последнего равенства находим

$$|w'''(x_k + 0)| \leq \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3. \quad (2.2.2)$$

Оценим $|w''(x_k)|$. Из равенства

$$w''_{xx}(x_k) = u''(x_k) - \frac{6}{h_k^2}u(x_{k+1}) + \frac{2}{h_k}u'(x_{k+1}) + \frac{6}{h_k^2}u(x_k) + \frac{4}{h_k}u'(x_k)$$

последовательно находим

$$w''(x_k) = u''(x_k) - \frac{2}{h_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (2u'(s) - 2u'(x_k) + u'(s) - u'(x_{k+1})) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= u''(x_k) - \frac{2}{h_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(2 \int_{x_k}^s u''(t) dt - \int_s^{x_{k+1}} u''(t) dt \right) ds = \\
&= \frac{2}{h_k^2} u''(x_k) h_k^2 - \frac{2}{h_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2 \int_{x_k}^s u''(t) dt ds - \frac{2}{h_k^2} u''(x_k) \frac{h_k^2}{2} + \frac{2}{h_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} u''(t) dt ds = \\
&= \frac{2}{h_k^2} \cdot 2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^s (u''(x_k) - u''(t)) dt ds + \frac{2}{h_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_s^{x_{k+1}} (u''(t) - u''(x_k)) dt ds.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекают оценки

$$|w''_{xx}(x_k)| \leq \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} (u'') \cdot 3 \text{ и } |w''_{xx}(x_k)| \leq \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''| \cdot 6.$$

Оценим теперь $|w(x)|$, когда $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Ввиду того, что $w(x_k) = w'_x(x_k) = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
w(x) &= \int_{x_k}^x \int_{x_k}^s \left(w''_{xx}(x_k) + \int_{x_k+0}^t w'''_{xxx}(x_k+0) + \int_{x_k+0}^\tau u''''_{xxx\sigma} d\sigma \right) d\tau dt ds = \\
&= w''_{xx}(x_k) \frac{(x-x_k)^2}{2} + w'''_{xxx}(x_k+0) \frac{(x-x_k)^3}{6} + \\
&\quad + \int_{x_k}^x \int_{x_k}^s \int_{x_k+0}^t \int_{x_k+0}^\tau u''''_{xxx\sigma} d\sigma d\tau dt ds.
\end{aligned}$$

Поэтому, с учетом полученных ранее оценок для $|w''_{xx}(x_k)|$ и $|w'''_{xxx}(x_k+0)|$,

$$\begin{aligned}
|w(x)| &\leq |w''_{xx}(x_k)| \cdot \frac{h_k^2}{2} + \\
&+ |w'''_{xxx}(x_k+0)| \cdot \frac{h_k^3}{6} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h_k^3}{6} \leq \\
&\leq 6 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h_k^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h_k^3}{6} + \\
&\quad + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h_k^3}{6}.
\end{aligned}$$

А так как h_k — малая величина, то можно записать

$$|w(x)| \leq C_{k,1} \cdot \frac{h_k^2}{2},$$

где

$$C_{k,1} = 6 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Так как

$$w'(x) = w''_{xx}(x_k)(x - x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0) \frac{(x - x_k)^2}{2} + \int_{x_k}^x \int_{x_k+0}^s \int_{x_k+0}^t u''''_{xxx\sigma} d\sigma dt ds,$$

то

$$|w'(x)| \leq |w''_{xx}(x_k)| \cdot h + |w'''_{xxx}(x_k + 0)| \cdot \frac{h_k^2}{2} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \frac{h_k^2}{2} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma),$$

или, с учетом оценок (2.2.3), (2.2.2),

$$\begin{aligned} |w'(x)| \leq 6 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''(x)| \cdot h_k + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3 \cdot \frac{h_k^2}{2} + \\ + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h_k^2}{2} \leq C_{k,1} \cdot h_k. \end{aligned}$$

Далее, из равенства

$$w''_{xx}(x) = w''_{xx}(x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0)(x - x_k) + \int_{x_k+0}^x \int_{x_k+0}^s u''''_{xxx\sigma} d\sigma ds$$

вытекает оценка вариации

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (w''_{xx}) \leq |w'''_{xxx}(x_k + 0)| \cdot h_k + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot h_k \leq C_{k,2} \cdot h_k,$$

где

$$C_{k,2} = \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u''') \cdot 3 + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Оценим теперь близость $u_I(x)$ к $u(x)$ по энергетической норме (2.2.1).

Первый интеграл в правой части (2.2.1) проинтегрируем по частям:

$$\int_0^\ell w''_{xx}{}^2 dx = w''_{xx} w'_x \Big|_0^\ell - \int_0^\ell w'_x dw''_{xx} = - \int_0^\ell w'_x dw'',$$

так как $w'_x(0) = w'_x(\ell) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell w'_x dw''_{xx} &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w'_x dw''_{xx} + \\ &+ w'_x(0) \Delta^+ w''_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{N-1} w'_x(x_k) \Delta w''_{xx}(x_k) + w'_x(\ell) \Delta^- w''_{xx}(\ell). \end{aligned}$$

Все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $w'_x(x_k) = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, N$. На основании оценок, полученных ранее, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\ell w'_x dw''_{xx} \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |w'_x(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (w''_{xx}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} C_{k,1} \cdot h \cdot C_{k,2} \cdot h = h^2 \sum_{k=1}^{N-1} C_{k,1} \cdot C_{k,2}, \end{aligned}$$

или, вспоминая определения $C_{k,1}$ и $C_{k,2}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\ell w'_x dw''_{xx} \right| &\leq h^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \right) \times \\ &\quad \times \left(\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \right). \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

Из равенства $u'''_{xxx} = u'''_{xxx}(x_k + 0) + \int_{x_k+0}^x u''''_{xxx\sigma} d\sigma$ вытекает неравенство

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \leq \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Тогда последнее неравенство (2.2.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\ell w'_x dw''_{xx} \right| &\leq h^2 \left(6 \cdot \sup_{0 < x < \ell} |u''_{xx}(x)| + 2 \cdot \sup_{0 < x < \ell} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_0^\ell(\sigma) \right) \times \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} 4 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \leq \\
&\leq h^2 \cdot 8 \cdot \left(3 \cdot \sup_{0 < x < \ell} |u''_{xx}(x)| + \sup_{0 < x < \ell} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_0^\ell(\sigma) \right) \times \\
&\quad \times \sup_{0 < x < \ell} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_0^1(\sigma) \leq h^2 \cdot \widehat{C}_1, \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

где \widehat{C}_1 зависит только от коэффициентов уравнения $u''''_{xxx\sigma} = (ru'_x)'_\sigma - uQ'_\sigma + F'_\sigma$.

Для слагаемого $\int_0^\ell rw'_x{}^2 dx$ имеем

$$\int_0^\ell rw'_x{}^2 dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w'_x{}^2 dR,$$

где $R(x) = \int_0^x r(s) ds$. Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\ell rw'_x{}^2 dx \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |w'_x{}^2(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leq \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}^2 \cdot h_k^2 \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leq \\
&\leq \bigvee_0^\ell(R) \cdot h^2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \cdot \sup_{(x_k, x_{k+1})} |u''_{xx}| \cdot h_k + 2h_k^2 \sup_{(x_k, x_{k+1})} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right)^2 \leq \\
&\leq \bigvee_0^\ell(R) \cdot h^2 \cdot 4 \left(3 \sup_{[0, \ell]} |u''_{xx}| \cdot h + h^2 \sup_{[0, \ell]} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_0^\ell(\sigma) \right) \times \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \left(3 \sup_{(x_k, x_{k+1})} |u''_{xx}| \cdot h_k + h_k^2 \sup_{(x_k, x_{k+1})} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigvee_0^\ell (R) 4h^3 \left(3 \sup_{[0,\ell]} |u''_{xx}| + h \sup_{[0,\ell]} |u''''_{xxxx\sigma}| \cdot \bigvee_0^\ell (\sigma) \right) \times \\
&\times \left(\sum_{k=0}^{N-1} 3 \sup_{[0,1]} |u''_{xx}| \cdot h_k + h_k^2 \sup_{[0,\ell]} |u''''_{xxxx\sigma}| \sum_{k=0}^{N-1} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \right) \leq \\
&\leq \bigvee_0^\ell (R) 4h^3 \left(3 \sup_{[0,\ell]} |u''_{xx}| + \sup_{[0,\ell]} |u''''_{xxxx\sigma}| \cdot \bigvee_0^\ell (\sigma) \right) \leq h^3 \cdot \widehat{C}_2, \quad (2.2.6)
\end{aligned}$$

так как $h_k \leq \ell$ и $\sum_{k=0}^{N-1} h_k = \ell$; \widehat{C}_2 не зависит от h .

Аналогично для слагаемого $\int_0^\ell w^2 dQ$ последовательно находим

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell w^2 dQ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2 dQ + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} w^2(x_k) \Delta Q(x_k) + w^2(0) \Delta^+ Q(0) + w^2(\ell) \Delta^- Q(1) = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2 dQ \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h_k^2}{2} + \right. \\
&+ \left. \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h_k^3}{6} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h_k^3}{6} \right)^2 \leq \\
&\leq h^3 \left(\sup_{0 < x < 1} |u''_{xx}| + \bigvee_0^\ell (u'''_{xxx}) \cdot \frac{h}{2} + \sup_{0 < x < 1} |u''''_{xxxx\sigma}| \cdot \bigvee_0^\ell (\sigma) \frac{h}{2} \right) \times \\
&\times \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot h_k + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \frac{h_k^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \frac{h_k^2}{6} \right) \leq \\
&\leq h^3 \left(\sup_{0 < x < \ell} |u''_{xx}| + \bigvee_0^\ell (u'''_{xxx}) + \sup_{0 < x < \ell} |u''''_{xxxx\sigma}| \bigvee_0^\ell (\sigma) \right)^2 \times
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1} \left(h_k + \frac{h_k^2}{2} + \frac{h_k^2}{6} \right) \leq h^3 \times \widehat{C}_3. \quad (2.2.7)$$

Так как $\sum_{k=0}^{N-1} \left(h_k + \frac{2h_k^2}{3} \right) \leq \ell + h \cdot \ell \leq 2\ell$ (h мало и изначально может быть взято меньшим единицы); константа \widehat{C}_3 от h не зависит.

Соединяя теперь неравенства (2.2.5), (2.2.6) и (2.2.7) мы получим требуемое неравенство для интерполянта.

Докажем, что приближенное решение $u_N(x)$ дает приближение не хуже.

Покажем, что задача решения математической модели (2.1.1) эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала на множестве $H^{4,\sigma}$ абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций $u(x)$; производная $u'_x(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; вторая производная $u''_{xx}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; третья производная $u'''_{xxx}(x)$ — σ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, причём $(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x)$ σ -суммируема с квадратом на $[\overline{0}; \ell]_{\sigma}$.

В самом деле, решение $u(x)$ математической модели (2.1.1), как показал анализ модели в первой главе, принадлежит $H^{4,\sigma}$.

Составим функционал

$$I(v) = (v''_{xx})'_x(0)v(0) - (v''_{xx})(0)v'_x(0) - \\ - (v''_{xx})'_x(\ell)v(\ell) + (v''_{xx})(\ell)v'_x(\ell) + (Lv, v) - 2(F'_{\sigma}, v),$$

где

$$Lu \equiv (u''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (ru'_x)'_{\sigma}(x) + u(x)Q'_{\sigma}(x)$$

$$\text{и } (u, v) = \int_0^{\ell} uv \, d\sigma.$$

Выражение (Lv, v) разобьем на три интеграла, и, как и в первой главе, первый интеграл проинтегрируем два раза по частям, второй — один раз:

$$(Lv, v) = \int_0^{\ell} \left((v''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (r(x)v'_x)'_{\sigma}(x) + v(x)Q'_{\sigma}(x) \right) v \, d\sigma = \\ = (v'''_{xxx})(x)v \Big|_0^{\ell} - v''_{xx}(x)v'_x \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} v''_{xx}{}^2 dx - (rv'_x)v \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} rv'_x{}^2 dx + \int_0^{\ell} v^2 dQ.$$

Таким образом, функционал, который необходимо минимизировать, принимает вид

$$I(v) = \gamma_1 v_x'^2(0) + \gamma_2 v^2(0) + \gamma_3 v_x'^2(\ell) + \gamma_4 v^2(\ell) + \\ + \int_0^\ell v_{xx}''^2 dx + \int_0^\ell r v_x'^2 dx + \int_0^\ell v^2 dQ - 2 \int_0^\ell v dF, \quad (2.2.8)$$

так как $v(x)$ удовлетворяет граничным условиям в (2.1.1).

Решение математической модели (2.1.1) и дает минимум функционалу (2.2.8) на $H^{4,\sigma}$.

Так как функционал (2.2.8) содержит производные до третьего порядка, то его можно определить на функциях, у которых третья производная суммируема с квадратом, т. е. на \widehat{H}^2 пополнении $H^{4,\sigma}$, по энергетической норме

$$\|u\|_{\widehat{H}^2}^2 = \gamma_1 v_x'^2(0) + \gamma_2 v^2(0) + \gamma_3 v_x'^2(\ell) + \gamma_4 v^2(\ell) + \\ + \int_0^\ell u_{xx}''^2 dx + \int_0^\ell r u_x'^2 dx + \int_0^1 u^2 dQ.$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимума: каждое новое значение $I(v)$ есть предел $I(v_n)$, где $v_n \in H^{4,\sigma}$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{H}^2} \rightarrow 0$ если u — функция из \widehat{H}^2 , на которой функционал $I(v)$ принимает наименьшее значение, и если элемент $u \in H^{4,\sigma}$ доставлял минимум $I(v)$, то она становится минимизирующей на \widehat{H}^2 .

В обратную сторону: минимизация $I(v)$ на \widehat{H}^2 приводит к математической модели (2.1.1). В самом деле, в первой главе при минимизации $\Phi(u)$ на E мы получили равенство

$$\int_0^\ell \left(u_{xx}''(x) - \int_0^x (r(s)u_x'(s) - \alpha(s)) ds \right) dh_x'(x) = 0,$$

где $\alpha(x) = \int_0^x u dQ - F(x)$, для любой $h \in E$.

В нашем случае мы получим аналогичное равенство с одной лишь оговоркой — $h \in \widehat{H}^2$. Отсюда мы получим почти всюду

$$u_{xx}''(x) - \int_0^x (r(s)u_x'(s) - \alpha(s)) ds = C_1 + C_2 x$$

при некоторых постоянных C_1 и C_2 . Как и в первой главе, доказывается, что $u \in E$ и удовлетворяет всем граничным условиям. И это замыкает круг: минимизация $I(v)$ на $h \in \widehat{H}^2$ эквивалентна решению математической модели (2.1.1).

Таким образом, $I(v)$ мы можем минимизировать на \widehat{H}^2 .

После решения линейной системы $A\alpha = \widehat{F}$ мы получим приближенное решение $v(x)$, которое в тоже время будет аппроксимацией Рунта.

Теперь все готово для доказательства того, что интерполянт дает приближение не лучше, чем $v(x)$. Это утверждение основано на аналоге классического результата теории конечных элементов, а именно:

предположим, что $v_0(x)$ минимизирует $I(u)$ на множестве \widehat{H}^2 , H_N — конечномерное его подпространство. Тогда

1) минимум $I(v_h)$ и минимум $\langle u - v_h, u - v_h \rangle$, v_h , пробегает подпространство H_N , достигается на одной и той же функции u_h .

2) по отношению к энергетическому скалярному произведению u_h есть проекция u на H_N или, что то же самое, ошибка $u - u_h$ ортогональна H_N :

$$\langle u - u_h, v_h \rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in H_N. \quad (2.2.9)$$

3) функция u_h , на которой достигается минимум, удовлетворяет условию

$$\langle u_h, v_h \rangle = (F'_\sigma, v_h) \text{ для всех } v_h \in \widehat{H}^2. \quad (2.2.10)$$

и

$$\langle u, v \rangle = (F'_\sigma, v) \text{ для всех } v \in H_N. \quad (2.2.11)$$

Как и в классической теории, для нас эта теорема ключевая. Более того, все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве со скалярным произведением функция из подпространства H_N , ближайшая к заданной функции u , всегда является ее проекцией на H_N . Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle = \langle u - u_h, u - u_h \rangle - 2 \langle u - u_h, v_h \rangle + \langle v_h, v_h \rangle.$$

Если справедливо равенство (2.2.9), то

$$\langle u - u_h, u - u_h \rangle \leq \langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle.$$

Равенство возможно только когда $\langle v_h, v_h \rangle = 0$, т. е. когда $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция, на которой $\langle u - u_h, u - u_h \rangle$ достигает минимума, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (2.2.11) справедливо для всех $v \in \widehat{H}^2$, то оно справедливо и для $v_h \in H_N$; вычитая из него (2.2.10), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3) — из него вытекает 2) и из него следует 1). Если u_h минимизирует $I(u)$ на H_N , то

$$I(u_h) \leq I(u_h + \varepsilon v_h)$$

для всех ε и v_h , или, вспоминая выражение $I(u)$ через $\langle u, u \rangle$ и (F'_σ, u) :

$$\begin{aligned} \langle u_h, u_h \rangle - 2(F'_\sigma, u_h) &\leq \\ &\leq \langle u_h, u_h \rangle - 2(F'_\sigma, u_h) + 2\varepsilon \left[\langle u_h, v_h \rangle - (F'_\sigma, v_h) \right] + \varepsilon^2 \langle v_h, v_h \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$0 \leq 2\varepsilon \left[\langle u_h, v_h \rangle - (F'_\sigma, v_h) \right] + \varepsilon^2 \langle v_h, v_h \rangle.$$

Так как это верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h \rangle = (F'_\sigma, v_h)$. Последнее уравнение выражает равенство нулю первой вариации функционала $I(u)$ в точке u_h в направлении v_h . Таким образом, утверждение 3) доказано.

Теорема доказана. \square

2.3 Построение алгоритма нахождения приближенного решения для математической модели четвертого порядка

Приближенное решение $u_N(x, t)$ математической модели

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u \frac{dQ}{d\sigma} + f(x, t), \\ (pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

будем искать в виде

$$u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N a_{2k-1}(t) \varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^N a_{2k}(t) \varphi_{2k}(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определяемые в § 2.1 равенствами (2.1.2) и (2.1.3). Количество базисных функций объясняется тем, что все граничные условия не являются главными, т. е. базисные функции не обязаны им удовлетворять.

Уравнение в (2.3.1) умножим на базисную функцию $\varphi_n(x)$ ($n = -1, 0, 1, 2, \dots, 2N - 2, 2N$) и проинтегрируем по мере σ по $[0; \ell]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} M'_\sigma(x) u''_{tt}(x, t) \varphi_n(x) d\sigma = \\ = - \int_0^{\ell} (p(x) u''_{xx}(x, t))''_{x\sigma} \varphi_n(x) d\sigma + \int_0^{\ell} (r(x) u'_x)'_{\sigma} \varphi_n d\sigma - \\ - \int_0^{\ell} u(x, t) \varphi_n(x) Q'_\sigma(x) d\sigma + \int_0^{\ell} f(x, t) \varphi_n(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Проинтегрируем интеграл $\int_0^{\ell} (p(x) u''_{xx}(x, t))''_{x\sigma} \varphi_n(x) d\sigma$ дважды по ча-

стям, интеграл $\int_0^{\ell} (r(x) u'_x)'_{\sigma} \varphi_n d\sigma$ один раз проинтегрируем по частям и воспользовавшись граничными условиями, которым удовлетворяет решение $u(x, t)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma_1 u'_x(0, t) \varphi'_n(0) + \gamma_2 u(0, t) \varphi_n(0) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) \varphi'_n(\ell) + \gamma_4 u(\ell, t) \varphi_n(\ell) + \\ + \int_0^{\ell} M'_\sigma(x) u''_{tt}(x, t) \varphi_n(x) d\sigma + \int_0^{\ell} p(x) u''_{xx}(x, t) \varphi_{nxx}(x) dx + \\ + \int_0^{\ell} r(x) u'_x \varphi_{nx}' dx + \int_0^{\ell} u(x, t) \varphi_n(x) Q'_\sigma(x) d\sigma = \int_0^{\ell} f(x, t) \varphi_n(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя $u_N(x, t)$ в последнее равенство, получим

$$\sum_{k \in I} a_k''(t) \int_0^{\ell} \varphi_k(x) \varphi_n(x) dM(x) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k \in I} a_k(t) \left(\gamma_1 \varphi_{k_x}'(0) \varphi_n'(0) + \gamma_2 \varphi_k(0) \varphi_n(0) + \gamma_3 \varphi_{k_x}'(\ell) \varphi_n'(\ell) + \right. \\
& + \gamma_4 \varphi_k(\ell) \varphi_n(\ell) + \int_0^\ell p(x) \varphi_{k_{xx}}''(x) \varphi_{n_{xx}}''(x) dx + \int_0^\ell r(x) \varphi_{k_x}'(x) \varphi_{n_x}'(x) dx + \\
& \left. + \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_n(x) dQ(x) \right) = \int_0^\ell f(x, t) \varphi_n(x) d\sigma
\end{aligned}$$

($I = \{0, 1, 2, \dots, 2N-3, 2N-2, 2N\}$, $n \in I$). Таким образом, мы получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widehat{A}a''(t) + \widehat{B}a = \widehat{F}, \quad (2.3.2)$$

где \widehat{A} и \widehat{B} — квадратные матрицы порядка $2N + 2$, коэффициенты которых находятся по формулам

$$\widehat{A}_{kn} = \widehat{A}_{nk} = \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_n(x) dM(x),$$

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_{kn} = \widehat{B}_{nk} = & \gamma_1 \varphi_{k_x}'(0) \varphi_n'(0) + \gamma_2 \varphi_k(0) \varphi_n(0) + \gamma_3 \varphi_{k_x}'(\ell) \varphi_n'(\ell) + \\
& + \gamma_4 \varphi_k(\ell) \varphi_n(\ell) + \int_0^\ell p(x) \varphi_{k_{xx}}''(x) \varphi_{n_{xx}}''(x) dx + \\
& + \int_0^\ell r(x) \varphi_{k_x}'(x) \varphi_{n_x}'(x) dx + \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_n(x) dQ(x),
\end{aligned}$$

$a(t) = (a_{-1}(t), a_0(t), a_1(t), a_2(t), \dots, a_{2N-2}(t), a_{2N}(t))^T$ и $\widehat{F}(t) = (F_{-1}(t), F_0(t), F_1(t), F_2(t), \dots, F_{2N-2}(t), F_{2N}(t))^T$ — вектор-столбцы, компоненты $F_n(t)$ определяются равенствами

$$F_n(t) = \int_0^\ell f(x, t) \varphi_n(x) d\sigma.$$

Умножим каждое начальное условие $u(x, 0) = \psi_0(x)$ и $u_t'(x, 0) = \psi_1(x)$ на базисную функцию $\varphi_n(x)$, проинтегрируем по $M(x)$ в пределах от 0

до ℓ , подставим вместо $u(x, t)$ функцию $u_N(x, t)$:

$$\sum_{k \in I} a_k(0) \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_n(x) dM = \int_0^\ell \psi_0(x) \varphi_n(x) dM,$$

$$\sum_{k \in I} a'_k(0) \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_n(x) dM = \int_0^\ell \psi_1(x) \varphi_n(x) dM,$$

или в матричном виде

$$\widehat{C}a(0) = H_1, \quad \widehat{C}a'(0) = H_2, \quad (2.3.3)$$

где \widehat{C} — квадратная матрица с коэффициентами

$$\widehat{C}_{kn} = \widehat{C}_{nk} = \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_n(x) dM,$$

H_1 и H_2 — вектор-столбцы с координатами ($j = 1, 2$)

$$(H_j)_n = \int_0^\ell \psi_{j-1}(x) \varphi_n(x) dM.$$

Матрицы \widehat{A} и \widehat{C} являются матрицами Грамма системы $\{\varphi_k(x)\}_{k \in I}$ линейно независимых функций. Поэтому \widehat{A} и \widehat{C} имеют обратные матрицы. Тогда (2.3.2) и (2.3.3) принимают вид

$$a''(t) + \widehat{A}^{-1} \widehat{B}a = \widehat{A}^{-1} \widehat{F}, \quad (2.3.4)$$

$$a(0) = \widehat{C}^{-1} H_1, \quad a'(0) = \widehat{C}^{-1} H_2. \quad (2.3.5)$$

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что (2.3.4), дополненная начальными условиями (2.3.5), имеет единственное решение.

Для численного решения (2.3.4), (2.3.5) возможно применение различных разностных схем. Мы применим явную схему (τ — шаг по временной переменной). Для реализации алгоритма имеем следующие формулы

$$\frac{a_k((j+1)\tau) - 2a_k(j\tau) + a_k((j-1)\tau)}{\tau^2} + \sum_{i \in I} \eta_{k,i} a_i(j\tau) = F_k(j\tau), \quad k \in I,$$

где $\eta_{k,n}$ — коэффициенты матрицы $\widehat{A}^{-1} \widehat{B}$. Два начальных слоя мы найдем используя начальные данные:

$$a_k(0) = \left(\widehat{C}^{-1} H_1 \right)_k, \quad \frac{a_k(\tau) - a_k(0)}{\tau} = \left(\widehat{C}^{-1} H_2 \right)_k.$$

2.4 Оценка скорости сходимости

Обозначим $w(x, t) = u(x, t) - u_N(x, t)$ и

$$u_I(x, t) = \sum_{k=0}^N u(x_k, t) \varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^N u'_x(x_k, t) \varphi_{2k}(x).$$

Для всех $t \in [0; T]$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell w''_{tt}(x, t) M'_\sigma(x) \varphi_n(x) d\sigma + \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, t) \varphi''_{nxx}(x) dx + \\ & + \int_0^\ell r(x) w'_x(x, t) \varphi'_{nn}(x) dx + \int_0^\ell w(x, t) \varphi_n(x) Q'_\sigma(x) d\sigma \equiv 0 \quad (n \in I), \\ & \int_0^\ell w'_t(x, 0) \varphi_n(x) dM = 0, \quad \int_0^\ell w(x, 0) \varphi_n(x) dM = 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x, \tau) w'_t(x, \tau) M'_\sigma(x) d\sigma d\tau + \int_0^t \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, \tau) w'''_{txx}(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\ell r(x) w'_x(x, \tau) w''_{tx}(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell Q'_\sigma(x) w(x, \tau) w'_t(x, \tau) d\sigma d\tau \equiv \\ & \equiv \int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau)) M'_\sigma(x) d\sigma d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau))''_{xx} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\ell r(x) w'_x(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau))'_x dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\ell Q'_\sigma(x) w(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau)) d\sigma d\tau. \quad (2.4.1) \end{aligned}$$

Доказательство (2.4.1) проводится непосредственной проверкой.

Применяя теорему Фубини, левую часть (2.4.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x, \tau) w'_t(x, \tau) M'_\sigma(x) d\sigma d\tau + \int_0^t \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, \tau) w'''_{txx}(x, \tau) dx d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^\ell r(x) w'_x(x, \tau) w''_{tx}(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell Q'_\sigma(x) w(x, \tau) w'_t(x, \tau) d\sigma d\tau = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^\ell w_t'^2(x, t) M'_\sigma(x) d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^\ell w_t'^2(x, 0) M'_\sigma(x) d\sigma + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) w''_{xx}{}^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) w''_{xx}{}^2(x, 0) dx + \\
& \frac{1}{2} \int_0^\ell r(x) w_x'^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell r(x) w_x'^2(x, 0) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\ell Q'_\sigma(x) w^2(x, t) d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^\ell Q'_\sigma(x) w^2(x, 0) d\sigma.
\end{aligned}$$

Тогда, из (2.4.1) вытекает равенство

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell w_t'^2(x, t) M'_\sigma(x) d\sigma + \int_0^\ell p(x) w''_{xx}{}^2(x, t) dx + \\
& + \int_0^\ell r(x) w_x'^2(x, t) dx + \int_0^\ell w^2(x, t) Q'_\sigma(x) d\sigma = \\
& = \int_0^\ell w_t'^2(x, 0) M'_\sigma(x) d\sigma + \int_0^\ell p(x) w''_{xx}{}^2(x, 0) dx + \\
& + \int_0^\ell r(x) w_x'^2(x, 0) dx + \int_0^\ell w^2(x, 0) Q'_\sigma(x) d\sigma + \\
& + 2 \int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau) M'_\sigma(x)) d\sigma d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^t \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau))''_{xx} dx d\tau + \\
& + 2 \int_0^t \int_0^\ell r(x) w'_x(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau))'_x dx d\tau + \\
& + 2 \int_0^t \int_0^\ell Q'_\sigma(x) w(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau)) d\sigma d\tau. \quad (2.4.2)
\end{aligned}$$

После несложных преобразований (2.4.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell w_t'^2(x, t) M'_\sigma(x) d\sigma + \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, t) dx + \\
& + \int_0^\ell r(x) w_x'^2(x, t) dx + \int_0^\ell w^2(x, t) Q'_\sigma(x) d\sigma = \\
& = \int_0^\ell w_t'^2(x, 0) M'_\sigma(x) d\sigma + \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, 0) dx + \\
& + \int_0^\ell r(x) w_x'^2(x, 0) dx + \int_0^\ell w^2(x, 0) Q'_\sigma(x) d\sigma + \\
& + 2 \int_0^\ell w'_t(x, t) (u'_t(x, t) - u'_{I_t}(x, t)) M'_\sigma(x) d\sigma - \\
& - 2 \int_0^\ell w'_t(x, 0) (u'_t(x, 0) - u'_{I_t}(x, 0)) M'_\sigma(x) d\sigma - \\
& - 2 \int_0^t \int_0^\ell w'_t(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau))'_t M'_\sigma(x) d\sigma d\tau + \\
& + 2 \int_0^t \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau))''_{xx} dx d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^t \int_0^\ell r(x) w'_x(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau))'_x dx d\tau + \\
& \quad + 2 \int_0^t \int_0^\ell Q'_\sigma(x) w(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{I_t}(x, \tau)) d\sigma d\tau.
\end{aligned}$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в параграфе 2.2, мы получим оценку

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^\ell w_t^2(x, t) dM + \int_0^\ell p(x) w''_{xx}(x, t) dx + \right. \\
\left. + \int_0^\ell r(x) w_x^2(x, t) dx + \int_0^\ell w^2(x, t) dQ \right)^{1/2} \leq \bar{C} \cdot h, \quad (2.4.3)
\end{aligned}$$

где \bar{C} не зависит от h . Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma \geq 0$, $p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$ и начальные условия $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ таковы, что математическая модель

$$\left\{ \begin{aligned}
M'_\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(r(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u \frac{dQ}{d\sigma} + f(x, t), \\
(pu''_{x\mu})(0, t) - \gamma_1 u'_x(0, t) &= 0; \\
(pu''_{x\mu})'_x(0, t) - (ru'_x)(0, t) + \gamma_2 u(0, t) &= 0; \\
(pu''_{x\mu})(\ell, t) + \gamma_3 u'_x(\ell, t) &= 0; \\
(pu''_{x\mu})(\ell, t) - (ru'_x)(\ell, t) - \gamma_4 u(\ell, t) &= 0; \\
u(x, 0) &= \psi_0(x), \\
u'_t(x, 0) &= \psi_1(x),
\end{aligned} \right. \quad (2.4.4)$$

имеет единственное решение в классе E ; $u(x, t)$ и $u_N(x, t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда справедливо неравенство (2.4.3).

2.5 Выводы ко второй главе

В этой главе метод конечных элементов адаптирован для математических моделей четвертого порядка. Несмотря на то, что в качестве базисных функций берутся классические функции, приближенное решение

сходится к точному при измельчении сетки. Это вызвано тем обстоятельством, что при построении алгоритма интегрирование производится по мере, которая содержит все (локализованные) особенности, порожденные как внутренней структурой изучаемого объекта, так и внешними факторами.

Основные результаты главы.

- 1) Построен алгоритм получения приближенного решения математических моделей четвертого порядка.
- 2) Произведена оценка погрешности полученного приближенного решения для каждой математической модели.

Глава 3

Численные эксперименты

В этой главе приводятся численные эксперименты, проведенные с помощью программ, написанных на языке программирования Python3.

3.1 Первый пример

Рассмотрим математическую модель

$$\begin{cases} \frac{d}{d\sigma} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{d\mu} \frac{du}{dx} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(r \frac{du}{dx} \right) + \frac{dQ}{d\sigma} u = \frac{d}{d\sigma} F; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\ell = 1$, $\mu(x) \equiv x$, $\sigma(x) = x + \theta(x-1/2) + \theta(x-3/4) + \theta(x-9/11)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равна 0 при $x < 0$ и 1 в противном случае, $p(x) \equiv 1$, $r(x) \equiv 0$, $Q'_\sigma(x) \equiv 10$, при $x \neq 1/2, 3/4, 9/11$, $F'_\sigma(x) = 10x$, при $x \neq 1/2, 3/4, 9/11$, $Q'_\sigma(1/2) = 10$, $Q'_\sigma(3/4) = 1$, $Q'_\sigma(9/11) = 11$, $F'_\sigma(1/2) = 5$, $F'_\sigma(3/4) = 3/4$, $F'_\sigma(9/11) = 9$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 10$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 0$, точное решение имеет вид $u(x) = x$.

Графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на две равные части и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.1.1, а график погрешности для этого N — на рисунке 3.1.2; графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на 10 равных частей и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.1.3 и 3.1.4, аналогично, графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на 100 равных частей и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.1.5 и 3.1.6.

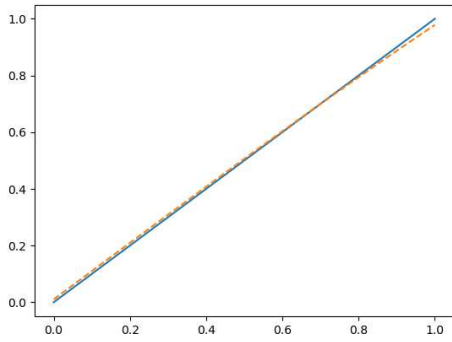


Рис. 3.1.1. Точное и приближенные решения (при $N = 2$) в первом примере

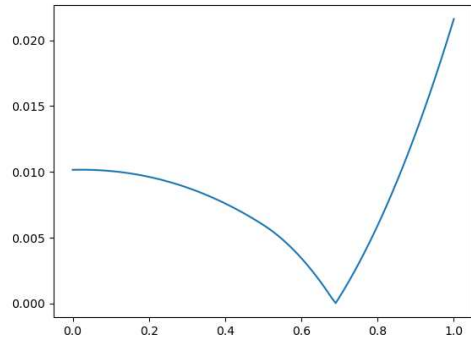


Рис. 3.1.2. Погрешность при $N = 2$

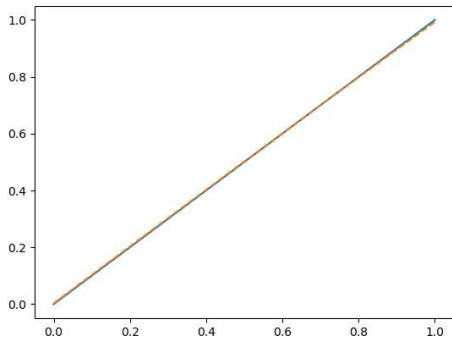


Рис. 3.1.3. Точное и приближенные решения (при $N = 10$) в первом примере

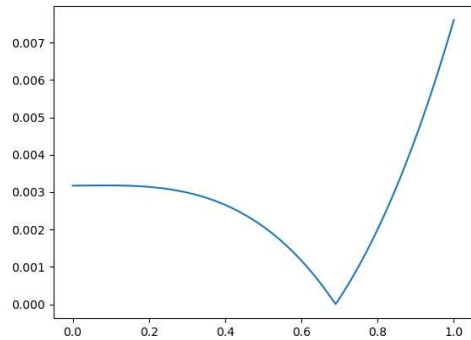


Рис. 3.1.4. Погрешность при $N = 10$

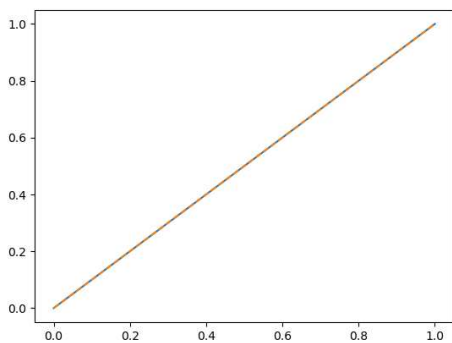


Рис. 3.1.5. Точное и приближенные решения (при $N = 100$) в первом примере

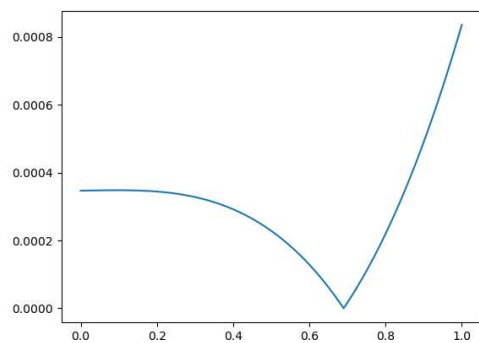


Рис. 3.1.6. Погрешность при $N = 100$

Таблицы В.1 и В.2 содержит значения точного и приближенного решений, а также погрешности при $N = 10$ и $N = 100$ соответственно.

3.2 Второй пример

Пусть $\ell = 1$, $\mu(x) \equiv x$, $\sigma(x) = x + \theta(x - 1/4) + \theta(x - 2/5) + \theta(x - 7/9) + \theta(x - 99/100)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равна 0 при $x < 0$ и 1 в противном случае, $p(x) \equiv 1 + x$, $r(x) \equiv 1 - x$, $Q'_\sigma(x) \equiv 1 + x^2$, при $x \neq 1/4, 2/5, 7/9, 99/100$, $F'_\sigma(x) = -x^3 + x^2 - x$, при $x \neq 1/4, 2/5, 7/9, 99/100$, $Q'_\sigma(1/4) = 1/7$, $Q'_\sigma(2/5) = 5$, $Q'_\sigma(7/9) = 1/8$, $Q'_\sigma(99/100) = 3$, $F'_\sigma(1/4) = 0,10714285714285714$, $F'_\sigma(2/5) = 3$, $F'_\sigma(7/9) = 0,045454545454545456$, $F'_\sigma(99/100) = 0,03$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 0$, точное решение имеет вид $u(x) = 1 - x$.

Графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на две равные части и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.2.7, а график погрешности для этого N — на рисунке 3.2.8; графики точного и приближенного решений (последнее най-

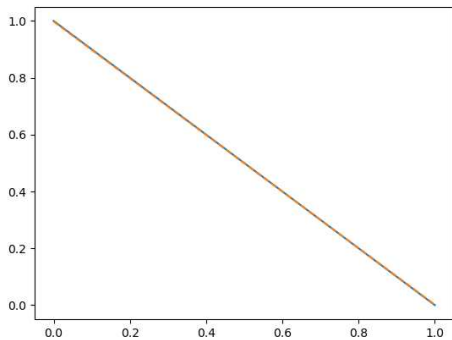


Рис. 3.2.7. Точное и приближенные решения (при $N = 2$) во втором примере

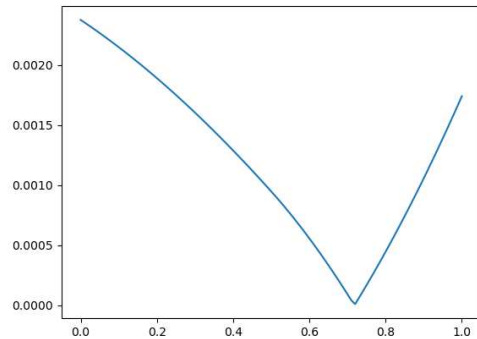


Рис. 3.2.8. Погрешность при $N = 2$

дено при разбиении на 10 равных частей и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.2.9 и 3.2.10, аналогично, графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на 100 равных частей и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.2.11 и 3.2.12.

Таблицы В.3 и В.4 содержит значения точного и приближенного решений, а также погрешности при $N = 10$ и $N = 100$ соответственно.

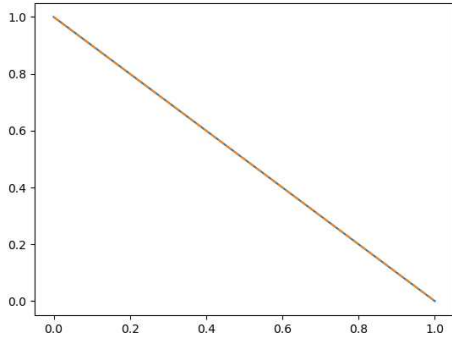


Рис. 3.2.9. Точное и приближенные решения (при $N = 10$) во втором примере

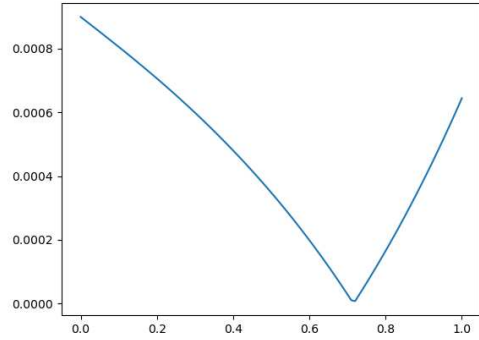


Рис. 3.2.10. Погрешность при $N = 10$

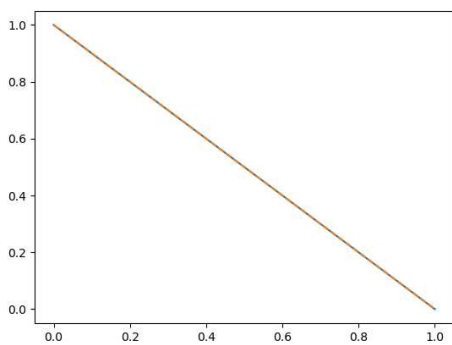


Рис. 3.2.11. Точное и приближенные решения (при $N = 100$) во втором примере

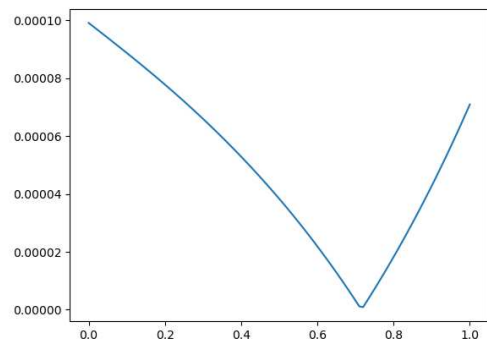


Рис. 3.2.12. Погрешность при $N = 100$

3.3 Третий пример

Пусть $\ell = 1$, $\mu(x) \equiv x$, $\sigma(x) = x + \theta(x - 1/5) + \theta(x - 2/5) + \theta(x - 1/2) + \theta(x - 2/3) + \theta(x - 9/10)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равна 0 при $x < 0$ и 1 в противном случае, $p(x) \equiv 1 - x/2$, $r(x) \equiv 1$, $Q'_\sigma(x) \equiv 1 - x$, при $x \neq 1/5, 2/5, 1/2, 2/3, 9/10$, $F'_\sigma(x) = -(97x^5 - 237x^4 + 126x^3 + 1164x^2 + 3072x - 3602)/97$, при $x \neq 1/5, 2/5, 1/2, 2/3, 9/10$, $Q'_\sigma(1/5) = 7$, $Q'_\sigma(2/5) = 5$, $Q'_\sigma(1/2) = 2$, $Q'_\sigma(2/3) = 8$, $Q'_\sigma(9/10) = 3$, $F'_\sigma(1/5) = 28,986870103092784$, $F'_\sigma(2/5) = 20,189855670103096$, $F'_\sigma(1/2) = 7,918814432989692$, $F'_\sigma(2/3) = 30,360697467226682$, $F'_\sigma(9/10) = 10,62809381443299$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = 2$, $\gamma_4 = 2$, точное решение имеет вид $u(x) = x^4 + 406/97 - 14x/97 - 14x^2/97 - 140x^3/97$.

Графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на две равные части и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.3.13, а график погрешности для этого N — на рисунке 3.3.14; графики точного и приближенного решений (последнее

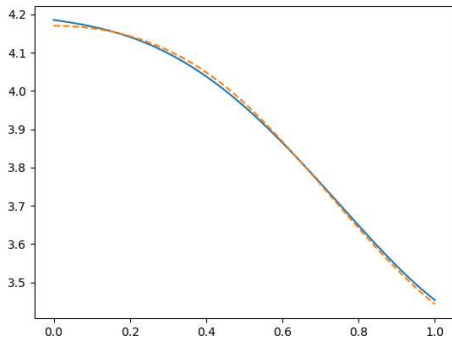


Рис. 3.3.13. Точное и приближенные решения (при $N = 2$) в третьем примере

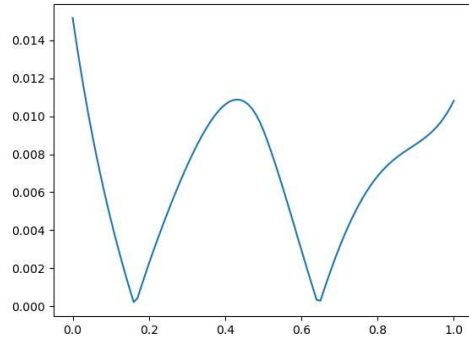


Рис. 3.3.14. Погрешность при $N = 2$

найдено при разбиении на 10 равных частей и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.3.15 и 3.3.16, аналогично, графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на 100 равных частей и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.3.17 и 3.3.18, графики точного и приближенного решений (последнее найдено при разбиении на 1000 равных частей и изображено пунктирной линией) представлены на рисунке 3.3.19 и 3.3.20.

Таблицы В.5 и В.6 содержит значения точного и приближенного решений, а также погрешности при $N = 10$ и $N = 100$ соответственно.

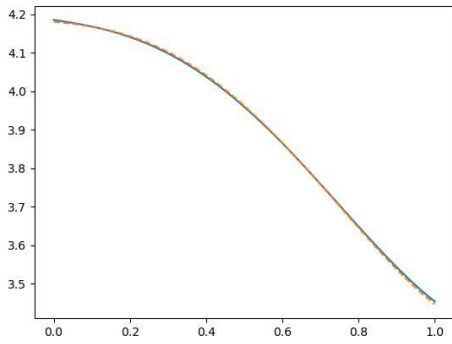


Рис. 3.3.15. Точное и приближенные решения (при $N = 10$) в третьем примере

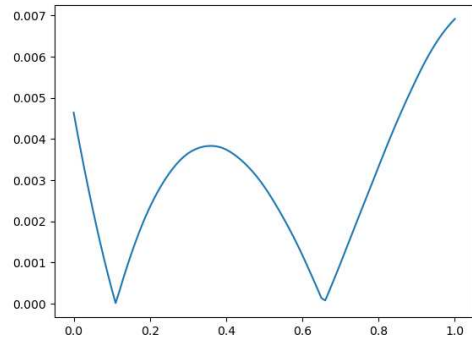


Рис. 3.3.16. Погрешность при $N = 10$

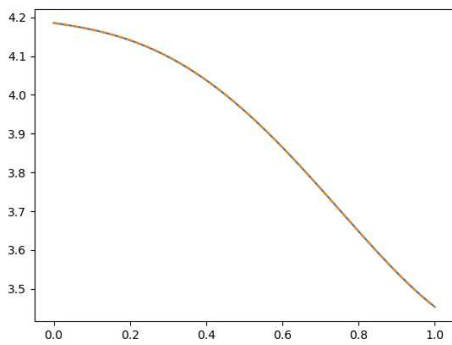


Рис. 3.3.17. Точное и приближенные решения (при $N = 100$) в третьем примере

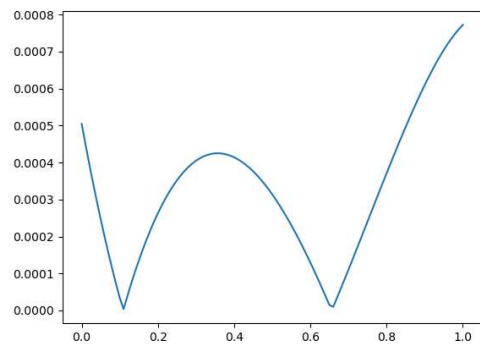


Рис. 3.3.18. Погрешность при $N = 100$

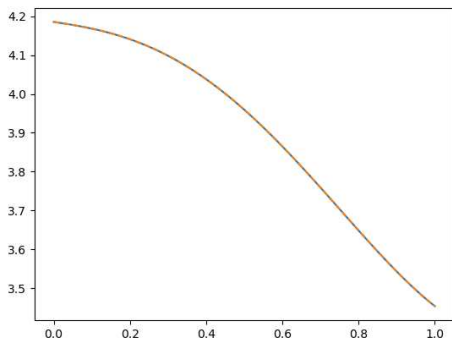


Рис. 3.3.19. Точное и приближенные решения (при $N = 1000$) в третьем примере

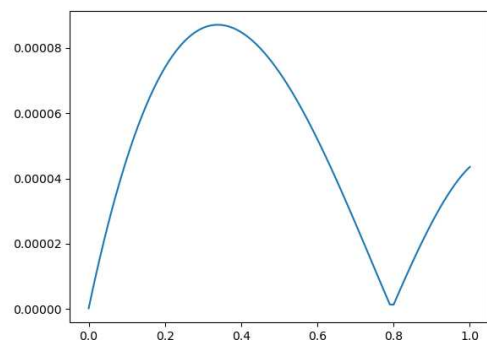


Рис. 3.3.20. Погрешность при $N = 1000$

3.4 Комплекс программ для реализации численных экспериментов

Здесь приводится описание комплекса программ, написанных на Python, для нахождения приближенного решения.

Программа работает по следующему алгоритму. Задаются коэффициенты модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается и получается приближенное решение. Строится либо график, либо таблица значений. Схема взаимодействия модулей скрипта довольно проста и представлена на рисунке 3.4.21.

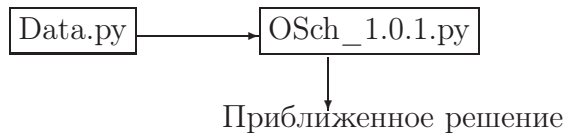


Рис. 3.4.21. Схема взаимодействия модулей

Общие сведения о программе. Программа называется OSch_1.0.1.py. Для работы программы необходим интерпретатор языка Python3, пакеты math, scipy.integrate, pylab и matplotlib.pyplot.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 Гб оперативной памяти. Объём исходного текста составляет 6059 байта.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения граничной задачи четвертого порядка с интегралом Стилтгеса, которая возникает при моделировании малых деформаций продольно растянутой упругой балки на упругом основании по заданным параметрам модели, при этом концы системы имеют упругое закрепление.

Структура программы. В модуле с названием Data.py задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт OSch_1.0.1.py, который запрашивает количество интервалов, на которые необходимо разбить интервал, и необходимое действие (построить график приближенного решения или записать значения приближенного решения в текстовый файл). Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается и получается приближенное решение.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows 8, 10.

Эксплуатация программы. Для запуска программы необходимо задать параметры модели: $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$, $F(x)$, ξ_i , γ_j , которые необходимо ввести в файл с именем Data.py и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем OSch_1.0.1.py. На выходе будет получен либо график приближенного решения, либо таблица приближенного решения, которая может быть записана в файл.

На рисунках 3.4.22 и 3.4.23 представлена работающая программа на Python3 после задания N , до выбора вывода результата и после соответственно, при этом запуск осуществлялся в операционной системе Ubuntu 20.04 LTS.

Текст программы представлен в приложении А.

3.5 Выводы к третьей главе

В этой главе проведены численные эксперименты для математических моделей четвертого порядка с помощью адаптированного метода конечных элементов. Проведенные эксперименты подтверждают теоретическую оценку погрешности, доказанную в предыдущей главе.

```
OSch_1.0.1.py /home/sergey/Documents/Lectures/2021-22/Dissertation_Шайна/Prorgam/OSch_1.0.1.py (3.8.10)
File Edit Format Run Options Window Help
import math
import scipy.special
f
in Python 3.8.10 (default, Mar 15 2022, 12:22:08)
in [GCC 9.4.0] on linux
in Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
in >>>
in = RESTART: /home/sergey/Documents/Lectures/2021-22/Dissertation_Шайна/Prorgam/OSch
in 1.0.1.py
in Введите N
in 100
in Вы хотите построить график приближенного решения или получить таблицу значений?
a= 1 - график
b= 2 - таблица
cc 3 - записать в recordTeX-файл
VV 4 - вычислить значение приближенного решения в конкретной точке
wh Сделай выбор. По умолчанию 1:
Ln 14 Col 0
```

Рис. 3.4.22. Запущенная программа на Python3 до вывода результата

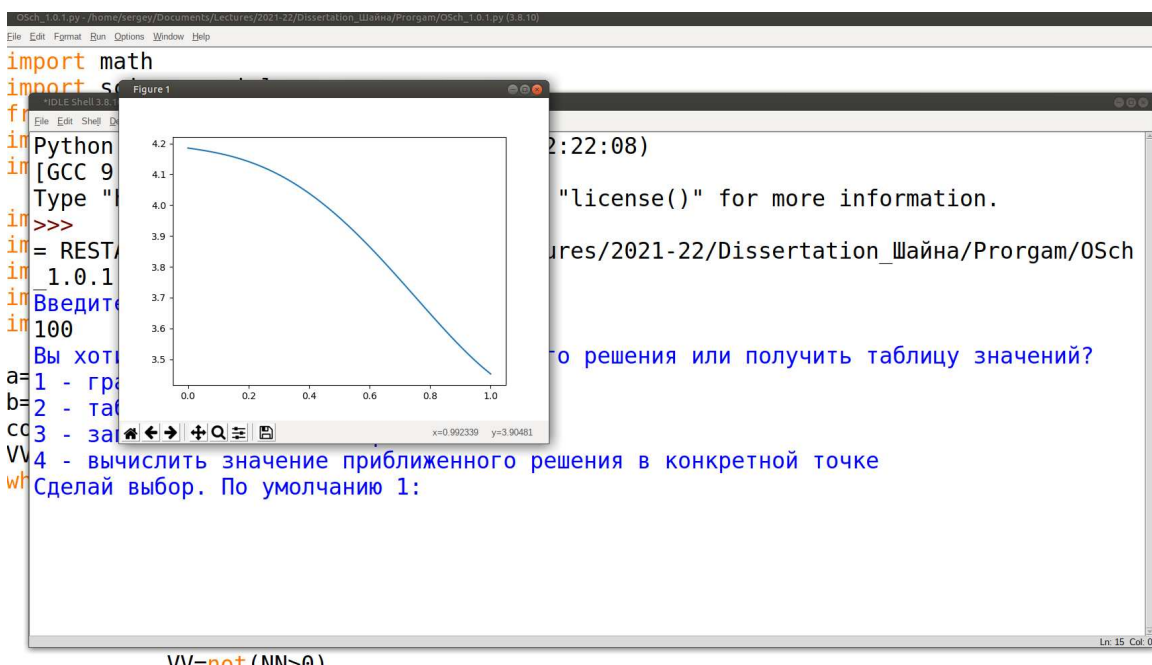


Рис. 3.4.23. Запущенная программа на Python3 после вывода результата

Заключение

В диссертационной работе представлены новые качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, реализуемых в виде смешанных и граничных задач для дифференциальных уравнений. Современный аналитический аппарат изучения таких моделей находится в начальной стадии формирования. Полученные качественные аналитические методы исследования основываются на эффективных результатах анализа граничных задач с производными по мере. В настоящее время численные методы для уравнений с производными по мере, их обоснование также находятся в стадии формирования.

В работе получены новые результаты, относящиеся к области приближенного решения смешанных задач с производными Радона–Никодима, а также дана оценка погрешности. Представлены комплексы проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем.

1. Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде смешанных задач с производными по мере.

2. Получена оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи для изучаемой математической модели.

3. Доказана возможность применения метода Фурье; корректность изучаемых математических моделей.

4. Разработаны и реализованы численные методы и алгоритмы приближенного решения изученных математических моделей, комплексы программ, выполненных на языке высокого уровня Python3. Представлены результаты численных экспериментов тестовых задач и листинги программ.

Литература

- [1] Albeverio, S. Bounds on variation of spectral subspaces under j -self-adjoint perturbations / S. Albeverio, A. K. Motovilov, A. A. Shkalkov // Integral Equations and Operator Theory. — 2009. — Vol. 64, no. 4. — P. 455–486.
- [2] Colombeau, J.-F. Elementary introduction to new generalized functions / J.-F. Colombeau. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1985. — P. 281.
- [3] Foukzon, Ja. The point free colombeau geometry in singular general relativity / Ja. Foukzon, A. A. Potapov, E. R. Menkova // Nonlinear World. — 2021. — Vol. 19, no. 1. — P. 58–72.
- [4] Guolan, Cai. On a class of second-order impulsive boundary value problem at resonance / Cai Guolan, Du Zengji, Ge Weigao // Int. J. Math. and Math. Sci. — 2006. — no. 2. — P. 1–11.
- [5] Kadchenko, S. I. Numerical methods for solving spectral problems on quantum graphs / S. I. Kadchenko, A. V. Stavtseva, L. S. Ryazanova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2021. — Vol. 8, no. 3. — P. 49–70.
- [6] Korotyaev, E. Characterization of the spectrum of schrödinger operator with periodic distributions / E. Korotyaev // Int. Math. Res. Not. — 2003. — no. 37. — P. 2019–2031.
- [7] Lagnese, J. E. Control of planar networks of timoshenko beams / J. E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt // SIAM J. Control Optim. — 1993. — Vol. 31. — P. 780–811.
- [8] Lagnese, J. E. Modelling analysis and control of dynamic elastic multi-link structures / J. E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt. — Boston: Birkhauser, 1994. — P. 549.

- [9] On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with radon-nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1479(1). — P. 012044.
- [10] Агибалова, А. В. Реализации оператора Дирака с неограниченным матричным потенциалом и максимальными индексами дефекта / А. В. Агибалова, В. С. Будыка // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. — 2021. — № 2. — С. 3–8.
- [11] Антоневи́ч, А. Б. Умножение распределений и алгебры мнемофункций / А. Б. Антоневи́ч, Т. Г. Шагова // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2019. — Т. 65, № 3. — С. 339–389.
- [12] Антосик, П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Минусинский, Р. Сикорский. — М.: Мир, 1976. — С. 449.
- [13] Баскаков, А. Г. Спектральная теория функций в исследовании дифференциальных операторов с частными производными / А. Г. Баскаков, Е. Е. Дикарев // Уфимский математический журнал. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 3–18.
- [14] Баскаков, А. Г. О спектральных свойствах классических операторов Дирака и операторов с инволюцией в однородных пространствах функций / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 10. — С. 1299–1304.
- [15] Борзов, В. В. Реализация оператора уничтожения обобщённого осциллятора Чебышева дифференциальным оператором / В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 2020. — Т. 494. — С. 75–102.
- [16] Борисов, А. В. О математическом моделировании динамики многозвенных систем и экзоскелетов / А. В. Борисов, И. Е. Каспирович, Р. Г. Мухарлямов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2021. — Т. 5, № 5. — С. 162–176.
- [17] Бурлуцкая, М. Ш. Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом / М. Ш. Бурлуцкая // Докл. АН. — 2012. — Т. 447, № 5. — С. 479–482.

- [18] Бурлуцкая, М. Ш. Явное решение одной смешанной задачи с инволюцией на графе / М. Ш. Бурлуцкая // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 3. — С. 79–88.
- [19] Бурлуцкая, М. Ш. Классическое решение смешанной задачи с инволюцией на графе / М. Ш. Бурлуцкая, И. В. Колесникова, Е. А. Шайна // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2018. — № 1. — С. 60–68.
- [20] Бурлуцкая, М. Ш. Об одной смешанной задаче с инволюцией на графе / М. Ш. Бурлуцкая, Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXVII»: дополнительный выпуск. — 2016. — С. 10–11.
- [21] Валовик, Д. В. Интегральная характеристическая функция нелинейной задачи Штурма-Лиувилля / Д. В. Валовик, Г. В. Чалышов // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 12. — С. 1589–1598.
- [22] Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — С. 280.
- [23] Владимиров, В. С. Обобщенные функции и их применения / В. С. Владимиров. — М.: Знание, 1990. — С. 41.
- [24] Владимиров, А. А. К осцилляционной теории задачи Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами / А. А. Владимиров // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609–1621.
- [25] Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М.: Мир, 1984. — С. 428.
- [26] Гантмахер, Ф. Р. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1950. — С. 359.
- [27] Гилёв, А. В. Краевые задачи для нагруженного гиперболического уравнения / А. В. Гилёв // Вестник молодых ученых и специалистов Самарского университета. — 2020. — Т. 16, № 1. — С. 163–169.

- [28] Голованева, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованева, М. Меач, С. А. Шабров // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т. 3. — 2015. — С. 292–295.
- [29] Голованёва, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для одной математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров, М. Меач // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. — 2016. — № 1 (22). — С. 89–92.
- [30] Гоф, Д. Э. Использование дифференциальных свойств обобщенных мер Лебега-Фейнмана при исследовании квантовых аномалий / Д. Э. Гоф, Т. С. Ратью, О. Г. Смолянов // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. — 2020. — Т. 310. — С. 107–118.
- [31] Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1965. — С. 448.
- [32] Григорьева, А. И. Задача Дирихле для уравнений составного типа высокого порядка с разрывными коэффициентами / А. И. Григорьева // Математические заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28, № 4. — С. 17–29.
- [33] Дао, Н. К. Численное исследование изгиба гибких пластин на упругом основании / Н. К. Дао, В. В. Филатов, Т. Л. К. Хоанг // Инновации и инвестиции. — 2022. — № 1. — С. 152–156.
- [34] Дерр, В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщёнными функциями в коэффициентах / В. Я. Дерр // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 2. — С. 269–272.
- [35] Дерр, В. Я. Дифференциальные уравнения в алгебре C -обобщенных функций / В. Я. Дерр // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 62–75.
- [36] Дерр, В. Я. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями, допускающими умножение на разрывные функции / В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов // Вестник Удмуртского Университета. — 2005. — № 1. — С. 35–58.

- [37] Дерр, В. Я. Динамические обобщенные функции и проблема умножения / В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 5. — С. 33–45.
- [38] Дерр, В. Я. Динамические обобщенные функции и проблема умножения / В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 5 (540). — С. 33–45.
- [39] Дыхта, В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок. — М.: Физматлит, 2003. — С. 255.
- [40] Егоров, Ю. В. Об обобщенных функциях и линейных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Егоров // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. — 1990. — № 2. — С. 96–99.
- [41] Жук, А. И. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 2015. — Т. 59, № 2. — С. 17–22.
- [42] Завалицин, С. Т. Специальные нелинейные дифференциальные уравнения в обобщенных функциях / С. Т. Завалицин // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26, № 8. — С. 1316.
- [43] Завалицин, С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалицин, А. Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — С. 256.
- [44] Залукаева, Ж. О. Метод Фурье в моделировании колебаний разрывной стилтьесовской струны / Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 92–94.
- [45] Зверева, М. Б. Моделирование колебаний системы струн на графе с условиями типа возмущенных sweeping процессов / М. Б. Зверева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2021. — № 3. — С. 59–73.
- [46] Ишкин, Х. К. Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с мероморфным потенциалом / Х. К. Ишкин, А. А. Набиуллина // Вестник Казахского национального университета. Серия математика, механика, информатика. — 2019. — Т. 104, № 4. — С. 24–31.

- [47] Ким, И. Г. Неосцилляция решений дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными функциями Коломбо в коэффициентах / И. Г. Ким // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25, № 1. — С. 21–28.
- [48] Климов, В. С. Внутренние оценки решений линейных эллиптических неравенств / В. С. Климов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2021. — Т. 85, № 1. — С. 98–117.
- [49] Кожанов, А. И. Начально-граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений / А. И. Кожанов // Сибирские электронные математические известия. — 2021. — Т. 18, № 1. — С. 43–53.
- [50] Колокольцов, В. Н. Дробные уравнения Маккина - Власова и Гамильтона - Якоби - Беллмана-Айзекса / В. Н. Колокольцов, М. С. Троева // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 87–100.
- [51] Корииков, Д. В. Асимптотика оператора рассеяния для волнового уравнения в сингулярно-возмущенной области / Д. В. Корииков // Математический сборник. — 2021. — Т. 212, № 10. — С. 96–130.
- [52] Левитан, Б. М. Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М.: Наука, 1970. — С. 672.
- [53] Ловитт, У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: ГИТТЛ, 1957. — С. 268.
- [54] Маслов, В. П. δ -образные обобщенные по Соболеву решения квазилинейных уравнений / В. П. Маслов, В. А. Цупин // УМН. — 1979. — Т. 34, № 1. — С. 235–236.
- [55] Мирзоев, К. А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями / К. А. Мирзоев, А. А. Шкаликов // Математические заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.
- [56] Митрохин, С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами / С. И. Митрохин // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. — 2010. — Т. 270. — С. 188–197.

- [57] Митягин, Б. С. Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака / Б. С. Митягин // Докл. РАН. — 2003. — Т. 393, № 4. — С. 456–459.
- [58] Мышкис, А. Д. О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенным коэффициентом / А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.
- [59] Мышкис, А. Д. Элементы теории математических моделей / А. Д. Мышкис. — М.: КомКнига, 2007. — С. 192.
- [60] Назаров, С. А. О собственных числах и функциях задач Дирихле и Неймана в области с дырчатыми перегородками / С. А. Назаров // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57, № 6. — С. 752–768.
- [61] О возможности применения метода Фурье к разнорядковой математической модели / Н. И. Головкин, Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2017. — № 1. — С. 91–98.
- [62] О скорости роста собственных значений спектральной задачи четвертого порядка с производными Радона-Никодима / С. А. Шабров, О. М. Ильина, Е. А. Шайна, Д. А. Чечин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. — 2020. — С. 1197–1200.
- [63] Покорный, Ю. В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.
- [64] Покорный, Ю. В. О непрерывной зависимости от параметра решения краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ю. В. Покорный, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестник физико-математического факультета Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина. — 2006. — № 1. — С. 70–72.
- [65] Прогибы сжатой балки на двойном упругом основании (в обобщенной модели Власова–Леонтьева) / И. А. Гнеушев, И. В. Колесникова, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 173–181.

- [66] Прядиев, В. Л. Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости / В. Л. Прядиев, О. В. Коровина // Известия Саратовского университета. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, № 3. — С. 37–46.
- [67] Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — С. 432.
- [68] Самарский, А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — С. 320.
- [69] Сидоров, Н. А. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части и неклассическими начальными условиями / Н. А. Сидоров, А. И. Дрегля // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2020. — Т. 183. — С. 120–129.
- [70] Скубачевский, А. Л. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами / А. Л. Скубачевский, Н. О. Иванов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2021. — Т. 67, № 3. — С. 576–595.
- [71] Смолянов, О. Г. Мультипликативные структуры в линейном пространстве векторнозначных распределений / О. Г. Смолянов, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович // Доклады Академии наук. — 2002. — Т. 383, № 1. — С. 28–31.
- [72] Солонуха, О. В. О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями / О. В. Солонуха // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2021. — Т. 67, № 2. — С. 349–362.
- [73] Старовойтов, Э. И. Изгиб трехслойной пластины равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке / Э. И. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. — 2021. — Т. 48, № 3. — С. 56–62.
- [74] Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М.: Мир, 1977. — С. 351.

- [75] Суханов, В. В. Асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения Шредингера с медленно зависящим от времени потенциалом / В. В. Суханов // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В. А. Стеклова РАН. — 2020. — Т. 493. — С. 323–335.
- [76] Томин, Н. Г. Об одной абстрактной формуле регуляризованных следов дискретных операторов и ее применениях / Н. Г. Томин, И. В. Томина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2021. — Т. 193. — С. 142–152.
- [77] Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, М. Меач // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.
- [78] Хромов, А. П. Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные / А. П. Хромов, М. Ш. Бурлуцкая // Известия Саратовского университета. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 171–198.
- [79] Шабров, С. А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка / С. А. Шабров. — Saarbrücken, 2015: Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка с производными по мере. — С. 162.
- [80] Шабров, С. А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере: Дисс... доктора физ.-мат. наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. консультант А. Д. Баев. — 20.12.2017. — С. 412.
- [81] Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для разнорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 120–129.
- [82] Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Е. А. Шайна // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2018. — № 4. — С. 207–216.

- [83] Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Ф. В. Голованева, М. Меач // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 190–191.
- [84] Шабров, С. А. О методе конечных элементов для математической модели четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Ф. В. Голованева, М. Меач // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 213–215.
- [85] Шабров, С. А. Об уточнении скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, М. В. Шаброва, Е. А. Шайна // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. — 2021. — Т. 193. — С. 158–162.
- [86] Шайна, Е. А. О собственных функциях для оператора с инволюцией и потенциалом специального вида на графе / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. : Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения–XXVI». — 2015. — С. 221–222.
- [87] Шайна, Е. А. Аналог формулы Даламбера для решения начальной задачи для уравнения с инволюцией / Е. А. Шайна // Современные проблемы математики. Третий международный молодежный симпозиум «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» : Воронеж. — 2017. — С. 71–72.
- [88] Шайна, Е. А. О собственных функциях оператора с инволюцией и симметричным потенциалом на графе / Е. А. Шайна // Современные методы теории функций и смежных проблем: материалы международной конференции ВЗМШ. — 2017. — С. 217–218.
- [89] Шайна, Е. А. Единственность решения математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы / Е. А. Шайна // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — 2019. — С. 286–288.

- [90] Шайна, Е. А. О возможности применения метода Фурье к математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения XXX. — 2019. — С. 310–312.
- [91] Шайна, Е. А. О достаточных условиях возможности применения метода Фурье к математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы с локализованными особенностями / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения XXXI. — 2020. — С. 244–246.
- [92] Шилов, Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 207.

Приложение А

Листинги программ

Data.py

```
import math
a=0
b=1

def p(x):
    if a<=x and x<=b:
        return 1-x/2
    else:
        return 0

def r(x):
    if a<=x and x<=b:
        return 1
    else:
        return 0

def q(x):
    if a<=x and x<=b:
        return 1-x
    else:
        return 0

def f(x):
    if a<=x and x<=b:
        return -(97*x**5-237*x**4+126*x**3+\
1164*x**2+3072*x-3602)/97
    else:
```

```

        return 0

xii=[1/5, 2/5, 1/2, 2/3, 9/10]

Mxii=5

qxi=[7, 5, 2, 8, 3]

fxi=[1, 1, 11, 1, 1]

gamma0=[2, 2] # Жесткости пружин на левом конце
# gamma2, gamma1
gamma1=[2, 2] # Жесткости пружин на правом конце
# gamma4, gamma3

```

OSch_1.0.1.py

```

import math
import scipy.special
from numpy import *
import copy
import time

import scipy.integrate as integral
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import Data as Data
import Base as Base

a=0
b=1
countInt=10 #количество интервалов
VV=True
while VV:
    try:
        print("Введите N ")

```

```

    NN=int(input())
    if (not(NN>0)) or NN!=int(NN):
        print("Число должно быть натуральным")
    else:
        VV=not(NN>0)
except:
    print("Некорректное число")
print("Вы хотите построить график приближенного\
решения или получить таблицу значений?")
print("1 - график")
print("2 - таблица")
print("3 - записать в recordTeX-файл")
print("4 - вычислить значение приближенного\
решения в конкретной точке")
Vibor=1
VV=True
while VV:
    try:
        print("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
        Vibor=int(input())
    except:
        Vibor=1
    VV=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3 or Vibor==4)

countInt=NN
h = 1/countInt
N = 2 * countInt + 2 # количество базисных функций
MNOG=1
Mm=countInt
A=[]
for j in range(N):
    A+=[[0 for i in range(N)]]
F=[]
F += [0 for i in range(N)]
def pI(x):
    return Data.p(x)*Base.PhiDD(x, i, countInt)*\
    Base.PhiDD(x, j, countInt)
def rI(x):
    return Data.r(x)*Base.PhiD(x, i, countInt)*\

```

```

Base.PhiD(x, j, countInt)
def qI(x):
    return Data.q(x)*Base.Phi(x, i, countInt)*\
        Base.Phi(x, j, countInt)
def fI(x):
    return (MNOG*Data.f(x))*Base.Phi(x, i, countInt)
for i in range(N):
    xk = (i//2) * h
    for j in range(i, N):
        if i % 2 == 0 and i==j:
            c1, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.p(xk+t*h)*(1+2*t)**2, -1, 0)
            c2, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.p(xk+t*h)*(1-2*t)**2, 0, 1)
            c3, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.r(xk+t*h)*(t+t**2)**2, -1, 0)
            c4, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.r(xk+t*h)*(t-t**2)**2, 0, 1)
            c5, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.q(xk+t*h)*(1-3*t**2-2*t**3)**2, -1, 0)
            c6, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.q(xk+t*h)*(1-3*t**2+2*t**3)**2, 0, 1)
            A[i][j]=(c5+c6)*h+((c3+c4)*36)/h+\
                ((c1+c2)*36)/(h**3)
        if i % 2 ==0 and j == i+1:
            c1, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.p(xk+t*h)*(1+2*t)*(4+6*t), -1, 0)
            c2, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.p(xk+t*h)*(1-2*t)*(-4+6*t), 0, 1)
            c3, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.r(xk+t*h)*(t+t**2)*(1+t)*(1+3*t), -1, 0)
            c4, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.r(xk+t*h)*(t-t**2)*(1-t)*(1-3*t), 0, 1)
            c5, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.q(xk+t*h)*(1-3*t**2-2*t**3)*\
                t*(1+t)**2, -1, 0)
            c6, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
                Data.q(xk+t*h)*(1-3*t**2+2*t**3)*\
                t*(1-t)**2, 0, 1)

```

```

A[i][j]=(c5+c6)*h*h+((c3+c4)*(-6))+\
((c1+c2)*(-6))/(h**2)
if i % 2 ==0 and j == i+2:
    c2, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.p(xk+t*h)*(1-2*t)*(2*t-1), 0, 1)
    c4, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.r(xk+t*h)*(t-t**2)*(t-1)*t, 0, 1)
    c6, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.q(xk+t*h)*(1-3*t**2+2*t**3)*\
(1-3*(t-1)**2-2*(t-1)**3), 0, 1)
    A[i][j]=c6*h+c4*36/h+c2*36/(h**3)
if i % 2 ==0 and j == i+3:
    c2, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.p(xk+t*h)*(1-2*t)*(3*t-1), 0, 1)
    c4, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.r(xk+t*h)*(t-t**2)*t*(3*t-2), 0, 1)
    c6, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.q(xk+t*h)*(1-3*t**2+2*t**3)*\
(t-1)*t**2, 0, 1)
    A[i][j]=c6*h*h+c4*(-6)-12*c2/(h**2)
if i % 2 == 1 and j==i:
    c1, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.p(xk+t*h)*(4+6*t)**2, -1, 0)
    c2, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.p(xk+t*h)*(-4+6*t)**2, 0, 1)
    c3, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.r(xk+t*h)*((1+t)*(1+3*t))**2, -1, 0)
    c4, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.r(xk+t*h)*((1-t)*(1-3*t))**2, 0, 1)
    c5, d1 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.q(xk+t*h)*(t*(1+t)**2)**2, -1, 0)
    c6, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.q(xk+t*h)*(t*(1-t)**2)**2, 0, 1)
    A[i][j]=(c5+c6)*h**3+(c3+c4)*h+(c1+c2)/h
if i % 2 ==1 and j == i+1:
    c2, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.p(xk+t*h)*(6*t-4)*(2*t-1), 0, 1)
    c4, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.r(xk+t*h)*(1-t)*(1-3*t)*\

```



```

        t*(t-1), 0, 1)
        c6, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.q(xk+t*h)*t*(1-t)**2*\
(1-3*(t-1)**2-2*(t-1)**3), 0, 1)
        A[i][j]=c6*h*h -6*c4 -6*c2/(h**2)
if i % 2 ==1 and j == i+2:
        c2, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.p(xk+t*h)*(6*t-4)*(6*t-2), 0, 1)
        c4, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.r(xk+t*h)*(1-t)*(1-3*t)*t*(3*t-2), 0, 1)
        c6, d2 = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.q(xk+t*h)*t*(1-t)**2*(t-1)*t**2, 0, 1)
        A[i][j]=c6*h**3+c4*h+(1)*c2/h
for m in range(Data.Mxii):
        A[i][j] += (Data.qxi[m]*\
Base.Phi(Data.xii[m], i,\
countInt)*Base.Phi(Data.xii[m], j,\
countInt))
A[j][i]=A[i][j]
if i % 2 == 0:
        c1, d = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.f(xk+t*h)*(1-3*t**2+2*t**3), 0, 1)
        c2, d = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.f(xk+t*h)*(1-3*t**2-2*t**3), -1, 0)
if i % 2 == 1:
        c1, d = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.f(xk+t*h)*t*(1-t)**2, 0, 1)
        c2, d = scipy.integrate.quad(lambda t:\
Data.f(xk+t*h)*t*(1+t)**2, -1, 0)
F[i] += (c1+c2)*h
for m in range(Data.Mxii):
        F[i] += (Data.fx[m]*Base.Phi(Data.xii[m],\
i, countInt))
F[0] += Data.ff[0]
F[1] += Data.ff1[0]
F[N-2] += Data.ff[1]
F[N-1] += Data.ff1[1]
A[0][0] += Data.gamma0[0]
A[1][1] += Data.gamma0[1]

```

```

A[N-2][N-2] += Data.gamma1[0]
A[N-1][N-1] += Data.gamma1[1]

xx = [0 for i in range(N)]
for k in range(N):
    F[k] = F[k]/A[k][k]
    for j in range(N-1, k-1, -1):
        A[k][j]=A[k][j]/A[k][k]
    for j in range(k+1, N):
        r=A[j][k]
        for i in range(k, N):
            A[j][i]=A[j][i]-r*A[k][i]
        F[j]=F[j]-r*F[k]
for k in range(N-1, -1, -1):
    r=0
    for j in range(k+1, N):
        g=A[k][j]*xx[j]
        r=r+g
    xx[k]=(F[k]-r)/A[k][k]
def pr(x):
    qw=0
    for m in range(N):
        qw += xx[m]*Base.Phi(x, m, countInt)
    return qw
Mm=100
if Vibor==1:
    x = [i/Mm for i in range(Mm+1)]
    y2 = [pr(i) for i in x]
    plt.plot(x, y2)
    plt.show()

elif Vibor==2:
    NNn=20
    for lk in range(NNn+1):
        print("x=", a+lk*1.0/NNn, "u=", pr(a+lk*1.0/(NNn)))
elif Vibor==3:
    NNn=countInt
    recordTeX=open('RESULT.recordTeX','w')
    recordTeX.write('\documentclass\

```

```

[a4paper,12pt]{article}\r')
recordTeX.write('\usepackage[utf8]{inputenc}\r')
recordTeX.write('\usepackage[russian]{babel}\r')
\r\usepackage{longtable}\r\begin{document}\r')
recordTeX.write('\begin{longtable}{|l|l|l|l|l|}\r')
recordTeX.write('\hline\r')
for lk in range(NNn+1):
    recordTeX.write('$')
    S=str(a+lk*1.0/NNn)
    S=S.replace('.', '{,}')
    recordTeX.write(S)
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write(' & ')
    recordTeX.write('$')
    S=str(Data.Toch(a+lk*1/NNn))
    S=S.replace('.', '{,}')
    recordTeX.write(S)
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write(' & ')
    recordTeX.write('$')
    S=str(pr(a+lk*1/NNn))
    S=S.replace('.', '{,}')
    recordTeX.write(S)
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write(' & ')
    recordTeX.write('$')
    S=str(Pogr(a+lk*1/NNn))
    S=S.replace('.', '{,}')
    recordTeX.write(S)
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write(' & ')
    recordTeX.write('$')
    if pr(a+lk*1/NNn)==0 or Data.Toch(a+lk*1/NNn)==0:
        recordTeX.write('-')
    else:
        S=str(100*((Pogr(a+lk*1/NNn))/\
(Data.Toch(a+lk*1/NNn))))
        S += '\\%'
        S=S.replace('.', '{,}')

```

```
        recordTeX.write(S)
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write('\\\\ \\hline\r')
recordTeX.write('\\end{longtable}\r\\end{document}')
recordTeX.close()
```

Приложение В

Таблицы приближенного, точного решений и погрешности

Здесь представлены значения точного, приближенного решений и погрешности (при некоторых N) для тестовых примеров.

Таблица В.1. Для первого примера (при $N = 10$)

x	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
0,0	0,0	$3,1723 \cdot 10^{-3}$	$3,1723 \cdot 10^{-3}$	—
0,1	0,1	0,1032	$3,1796 \cdot 10^{-3}$	3,1796%
0,2	0,2	0,2031	$3,1401 \cdot 10^{-3}$	1,5701%
0,3	0,3	0,3030	$2,9891 \cdot 10^{-3}$	0,9964%
0,4	0,4	0,4027	$2,6585 \cdot 10^{-3}$	0,6646%
0,5	0,5	0,5021	$2,0775 \cdot 10^{-3}$	0,4155%
0,6	0,6	0,6012	$1,1694 \cdot 10^{-3}$	0,1949%
0,7	0,7	0,6998	$1,5886 \cdot 10^{-4}$	0,0227%
0,8	0,8	0,7980	$2,0045 \cdot 10^{-3}$	0,2506%
0,9	0,9	0,8956	$4,4617 \cdot 10^{-3}$	0,4957%
1,0	1,0	0,9924	$7,6052 \cdot 10^{-3}$	0,7605%

Таблица В.2. Для первого примера (при $N = 100$)

x	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
0,0	0,0	$3,4673 \cdot 10^{-4}$	$3,4673 \cdot 10^{-4}$	—
0,01	0,01	0,0103	$3,4689 \cdot 10^{-4}$	3,4689%

0,02	0,02	0,0203	$3,4707 \cdot 10^{-4}$	1,735%
0,03	0,03	0,0303	$3,4725 \cdot 10^{-4}$	1,1575%
0,04	0,04	0,0403	$3,4742 \cdot 10^{-4}$	0,8686%
0,05	0,05	0,0503	$3,4759 \cdot 10^{-4}$	0,6952%
0,06	0,06	0,0603	$3,4774 \cdot 10^{-4}$	0,5796%
0,07	0,07	0,0703	$3,4786 \cdot 10^{-4}$	0,4969%
0,08	0,08	0,0803	$3,4795 \cdot 10^{-4}$	0,4349%
0,09	0,09	0,0903	$3,4800 \cdot 10^{-4}$	0,3867%
0,1	0,1	0,1003	$3,4801 \cdot 10^{-4}$	0,3480%
0,11	0,11	0,1103	$3,4797 \cdot 10^{-4}$	0,3163%
0,12	0,12	0,1203	$3,4787 \cdot 10^{-4}$	0,2899%
0,13	0,13	0,1303	$3,4770 \cdot 10^{-4}$	0,2675%
0,14	0,14	0,1404	$3,4746 \cdot 10^{-4}$	0,2482%
0,15	0,15	0,1503	$3,4714 \cdot 10^{-4}$	0,2314%
0,16	0,16	0,1603	$3,4674 \cdot 10^{-4}$	0,2167%
0,17	0,17	0,1703	$3,4624 \cdot 10^{-4}$	0,2037%
0,18	0,18	0,1803	$3,4563 \cdot 10^{-4}$	0,1920%
0,19	0,19	0,1903	$3,4492 \cdot 10^{-4}$	0,1815%
0,2	0,2	0,2003	$3,4410 \cdot 10^{-4}$	0,1720%
0,21	0,21	0,2103	$3,4315 \cdot 10^{-4}$	0,1634%
0,22	0,22	0,2203	$3,4207 \cdot 10^{-4}$	0,1555%
0,23	0,23	0,2303	$3,4086 \cdot 10^{-4}$	0,1482%
0,24	0,24	0,2403	$3,3949 \cdot 10^{-4}$	0,1415%
0,25	0,25	0,2503	$3,3798 \cdot 10^{-4}$	0,1352%
0,26	0,26	0,2603	$3,3631 \cdot 10^{-4}$	0,1293%
0,27	0,27	0,2703	$3,3447 \cdot 10^{-4}$	0,1239%
0,28	0,28	0,2803	$3,3245 \cdot 10^{-4}$	0,1187%
0,29	0,29	0,2903	$3,3025 \cdot 10^{-4}$	0,1139%
0,3	0,3	0,3003	$3,2787 \cdot 10^{-4}$	0,1093%
0,31	0,31	0,3103	$3,2528 \cdot 10^{-4}$	0,1049%
0,32	0,32	0,3203	$3,2249 \cdot 10^{-4}$	0,1008%
0,33	0,33	0,3303	$3,1949 \cdot 10^{-4}$	0,0968%
0,34	0,34	0,3403	$3,1626 \cdot 10^{-4}$	0,0930%
0,35	0,35	0,3503	$3,1281 \cdot 10^{-4}$	0,0894%
0,36	0,36	0,3603	$3,0912 \cdot 10^{-4}$	0,0859%
0,37	0,37	0,3703	$3,0519 \cdot 10^{-4}$	0,0825%
0,38	0,38	0,3803	$3,0100 \cdot 10^{-4}$	0,0792%

0,39	0,39	0,3903	$2,9656 \cdot 10^{-4}$	0,0760%
0,4	0,4	0,4003	$2,9185 \cdot 10^{-4}$	0,0730%
0,41	0,41	0,4103	$2,8686 \cdot 10^{-4}$	0,0700%
0,42	0,42	0,4203	$2,8160 \cdot 10^{-4}$	0,0670%
0,43	0,43	0,4303	$2,7603 \cdot 10^{-4}$	0,0642%
0,44	0,44	0,4403	$2,7017 \cdot 10^{-4}$	0,0614%
0,45	0,45	0,4503	$2,6400 \cdot 10^{-4}$	0,0587%
0,46	0,46	0,4603	$2,5752 \cdot 10^{-4}$	0,0560%
0,47	0,47	0,4703	$2,5071 \cdot 10^{-4}$	0,0533%
0,48	0,48	0,4802	$2,4357 \cdot 10^{-4}$	0,0507%
0,49	0,49	0,4902	$2,3609 \cdot 10^{-4}$	0,0482%
0,5	0,5	0,5002	$2,2826 \cdot 10^{-4}$	0,0457%
0,51	0,51	0,5102	$2,2008 \cdot 10^{-4}$	0,0432%
0,52	0,52	0,5202	$2,1153 \cdot 10^{-4}$	0,0407%
0,53	0,53	0,5302	$2,0260 \cdot 10^{-4}$	0,0382%
0,54	0,54	0,5402	$1,9328 \cdot 10^{-4}$	0,0358%
0,55	0,55	0,5502	$1,8357 \cdot 10^{-4}$	0,0334%
0,56	0,56	0,5602	$1,7344 \cdot 10^{-4}$	0,0310%
0,57	0,57	0,5702	$1,6290 \cdot 10^{-4}$	0,0286%
0,58	0,58	0,5802	$1,5193 \cdot 10^{-4}$	0,0262%
0,59	0,59	0,5901	$1,4051 \cdot 10^{-4}$	0,0238%
0,6	0,6	0,6001	$1,2865 \cdot 10^{-4}$	0,0214%
0,61	0,61	0,6101	$1,1632 \cdot 10^{-4}$	0,0191%
0,62	0,62	0,6201	$1,0352 \cdot 10^{-4}$	0,0167%
0,63	0,63	0,6301	$9,0237 \cdot 10^{-5}$	0,0143%
0,64	0,64	0,6401	$7,6459 \cdot 10^{-5}$	0,0120%
0,65	0,65	0,6501	$6,2176 \cdot 10^{-5}$	0,0096%
0,66	0,66	0,6600	$4,7377 \cdot 10^{-5}$	0,0072%
0,67	0,67	0,6700	$3,2052 \cdot 10^{-5}$	0,0048%
0,68	0,68	0,6800	$1,6190 \cdot 10^{-5}$	0,0024%
0,69	0,69	0,6900	$2,1964 \cdot 10^{-7}$	$3,1831 \cdot 10^{-5}\%$
0,7	0,7	0,7000	$1,7189 \cdot 10^{-5}$	0,0025%
0,71	0,71	0,7100	$3,4726 \cdot 10^{-5}$	0,0049%
0,72	0,72	0,7199	$5,2844 \cdot 10^{-5}$	0,0073%
0,73	0,73	0,7299	$7,1552 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,74	0,74	0,7399	$9,0862 \cdot 10^{-5}$	0,0123%
0,75	0,75	0,7499	$1,1078 \cdot 10^{-4}$	0,0148%

0,76	0,76	0,7599	$1,3133 \cdot 10^{-4}$	0,0173%
0,77	0,77	0,7698	$1,5251 \cdot 10^{-4}$	0,0198%
0,78	0,78	0,7798	$1,7433 \cdot 10^{-4}$	0,0223%
0,79	0,79	0,7898	$1,9681 \cdot 10^{-4}$	0,0249%
0,8	0,8	0,7998	$2,1995 \cdot 10^{-4}$	0,0275%
0,81	0,81	0,8098	$2,4377 \cdot 10^{-4}$	0,0301%
0,82	0,82	0,8197	$2,6827 \cdot 10^{-4}$	0,0327%
0,83	0,83	0,8297	$2,9347 \cdot 10^{-4}$	0,0354%
0,84	0,84	0,8397	$3,1937 \cdot 10^{-4}$	0,0380%
0,85	0,85	0,8497	$3,4599 \cdot 10^{-4}$	0,0407%
0,86	0,86	0,8596	$3,7332 \cdot 10^{-4}$	0,0434%
0,87	0,87	0,8696	$4,0138 \cdot 10^{-4}$	0,0461%
0,88	0,88	0,8796	$4,3017 \cdot 10^{-4}$	0,0489%
0,89	0,89	0,8895	$4,5970 \cdot 10^{-4}$	0,0517%
0,9	0,9	0,8995	$4,8999 \cdot 10^{-4}$	0,0544%
0,91	0,91	0,9095	$5,2102 \cdot 10^{-4}$	0,0573%
0,92	0,92	0,9194	$5,5282 \cdot 10^{-4}$	0,0601%
0,93	0,93	0,9294	$5,8539 \cdot 10^{-4}$	0,0629%
0,94	0,94	0,9394	$6,1874 \cdot 10^{-4}$	0,0658%
0,95	0,95	0,9493	$6,5287 \cdot 10^{-4}$	0,0687%
0,96	0,96	0,9593	$6,8779 \cdot 10^{-4}$	0,0716%
0,97	0,97	0,9693	$7,2351 \cdot 10^{-4}$	0,0746%
0,98	0,98	0,9792	$7,6003 \cdot 10^{-4}$	0,0776%
0,99	0,99	0,9892	$7,9737 \cdot 10^{-4}$	0,0805%
1,0	1,0	0,9992	$8,3552 \cdot 10^{-4}$	0,0836%

Таблица В.3. Для второго примера (при $N = 10$)

x	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
0,0	1,0	0,9991	$8,9913 \cdot 10^{-4}$	0,0899%
0,1	0,9	0,8992	$8,0501 \cdot 10^{-4}$	0,0894%
0,2	0,8	0,7993	$7,0605 \cdot 10^{-4}$	0,0883%
0,3	0,7	0,6994	$5,9868 \cdot 10^{-4}$	0,0855%
0,4	0,6	0,5995	$4,8021 \cdot 10^{-4}$	0,0800%
0,5	0,5	0,4997	$3,4809 \cdot 10^{-4}$	0,0696%

0,6	0,4	0,3998	$1,9888 \cdot 10^{-4}$	0,0497%
0,7	0,3	0,3000	$2,8923 \cdot 10^{-5}$	0,0096%
0,8	0,2	0,2002	$1,6551 \cdot 10^{-4}$	0,0828%
0,9	0,1	0,1004	$3,8844 \cdot 10^{-4}$	0,3884%
1,0	0,0	0,0006	$6,4424 \cdot 10^{-4}$	—

Таблица В.4. Для второго примера (при $N = 100$)

x	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
0,0	1,0	0,9999	$9,9100 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,01	0,99	0,9899	$9,8072 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,02	0,98	0,9799	$9,7043 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,03	0,97	0,9699	$9,6013 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,04	0,96	0,9599	$9,4981 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,05	0,95	0,9499	$9,3947 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,06	0,94	0,9399	$9,2909 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,07	0,93	0,9299	$9,1868 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,08	0,92	0,9199	$9,0823 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,09	0,91	0,9099	$8,9773 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,1	0,9	0,8999	$8,8718 \cdot 10^{-5}$	0,0099%
0,11	0,89	0,8899	$8,7658 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,12	0,88	0,8799	$8,6592 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,13	0,87	0,8699	$8,5520 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,14	0,86	0,8599	$8,4440 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,15	0,85	0,8499	$8,3354 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,16	0,84	0,8399	$8,2260 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,17	0,83	0,8299	$8,1158 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,18	0,82	0,8199	$8,0047 \cdot 10^{-5}$	0,0098%
0,19	0,81	0,8099	$7,8928 \cdot 10^{-5}$	0,0097%
0,2	0,8	0,7999	$7,7800 \cdot 10^{-5}$	0,0097%
0,21	0,79	0,7899	$7,6663 \cdot 10^{-5}$	0,0097%
0,22	0,78	0,7799	$7,5516 \cdot 10^{-5}$	0,0097%
0,23	0,77	0,7699	$7,4359 \cdot 10^{-5}$	0,0097%
0,24	0,76	0,7599	$7,3192 \cdot 10^{-5}$	0,0096%
0,25	0,75	0,7499	$7,2014 \cdot 10^{-5}$	0,0096%

0,26	0,74	0,7399	$7,0825 \cdot 10^{-5}$	0,0096%
0,27	0,73	0,7299	$6,9626 \cdot 10^{-5}$	0,0095%
0,28	0,72	0,7199	$6,8414 \cdot 10^{-5}$	0,0095%
0,29	0,71	0,7099	$6,7191 \cdot 10^{-5}$	0,0095%
0,3	0,7	0,6999	$6,5956 \cdot 10^{-5}$	0,0094%
0,31	0,69	0,6899	$6,4709 \cdot 10^{-5}$	0,0094%
0,32	0,68	0,6799	$6,3450 \cdot 10^{-5}$	0,0093%
0,33	0,67	0,6699	$6,2177 \cdot 10^{-5}$	0,0093%
0,34	0,66	0,6599	$6,0892 \cdot 10^{-5}$	0,0092%
0,35	0,65	0,6499	$5,9593 \cdot 10^{-5}$	0,0092%
0,36	0,64	0,6399	$5,8281 \cdot 10^{-5}$	0,0091%
0,37	0,63	0,6299	$5,6954 \cdot 10^{-5}$	0,0090%
0,38	0,62	0,6199	$5,5614 \cdot 10^{-5}$	0,0090%
0,39	0,61	0,6099	$5,4260 \cdot 10^{-5}$	0,0089%
0,4	0,6	0,5999	$5,2891 \cdot 10^{-5}$	0,0088%
0,41	0,59	0,5899	$5,1508 \cdot 10^{-5}$	0,0087%
0,42	0,58	0,5799	$5,0109 \cdot 10^{-5}$	0,0086%
0,43	0,57	0,5700	$4,8695 \cdot 10^{-5}$	0,0085%
0,44	0,56	0,5600	$4,7265 \cdot 10^{-5}$	0,0084%
0,45	0,55	0,5500	$4,5818 \cdot 10^{-5}$	0,0083%
0,46	0,54	0,5400	$4,4355 \cdot 10^{-5}$	0,0082%
0,47	0,53	0,5300	$4,2874 \cdot 10^{-5}$	0,0081%
0,48	0,52	0,5200	$4,1376 \cdot 10^{-5}$	0,0080%
0,49	0,51	0,5100	$3,9860 \cdot 10^{-5}$	0,0078%
0,5	0,5	0,5000	$3,8326 \cdot 10^{-5}$	0,0077%
0,51	0,49	0,4900	$3,6772 \cdot 10^{-5}$	0,0075%
0,52	0,48	0,4800	$3,5200 \cdot 10^{-5}$	0,0073%
0,53	0,47	0,4700	$3,3608 \cdot 10^{-5}$	0,0072%
0,54	0,46	0,4600	$3,1996 \cdot 10^{-5}$	0,0070%
0,55	0,45	0,4500	$3,0363 \cdot 10^{-5}$	0,0067%
0,56	0,44	0,4400	$2,8710 \cdot 10^{-5}$	0,0065%
0,57	0,43	0,4300	$2,7036 \cdot 10^{-5}$	0,0063%
0,58	0,42	0,4200	$2,5340 \cdot 10^{-5}$	0,0060%
0,59	0,41	0,4100	$2,3622 \cdot 10^{-5}$	0,0058%
0,6	0,4	0,4000	$2,1881 \cdot 10^{-5}$	0,0055%
0,61	0,39	0,3900	$2,0118 \cdot 10^{-5}$	0,0052%
0,62	0,38	0,3400	$1,8332 \cdot 10^{-5}$	0,0048%

0,63	0,37	0,3700	$1,6522 \cdot 10^{-5}$	0,0045%
0,64	0,36	0,3600	$1,4688 \cdot 10^{-5}$	0,0041%
0,65	0,35	0,3500	$1,2830 \cdot 10^{-5}$	0,0037%
0,66	0,34	0,3400	$1,0947 \cdot 10^{-5}$	0,0032%
0,67	0,33	0,3300	$9,0391 \cdot 10^{-6}$	0,0027%
0,68	0,32	0,3200	$7,1053 \cdot 10^{-6}$	0,0022%
0,69	0,31	0,3100	$5,1454 \cdot 10^{-6}$	0,0017%
0,7	0,3	0,3000	$3,1591 \cdot 10^{-6}$	0,0011%
0,71	0,29	0,2900	$1,1460 \cdot 10^{-6}$	0,0004%
0,72	0,28	0,2800	$8,9448 \cdot 10^{-7}$	0,0003%
0,73	0,27	0,2700	$2,9627 \cdot 10^{-6}$	0,0011%
0,74	0,26	0,2600	$5,0590 \cdot 10^{-6}$	0,0019%
0,75	0,25	0,2500	$7,1839 \cdot 10^{-6}$	0,0029%
0,76	0,24	0,2400	$9,3379 \cdot 10^{-6}$	0,0039%
0,77	0,23	0,2300	$1,1521 \cdot 10^{-5}$	0,0050%
0,78	0,22	0,2200	$1,3735 \cdot 10^{-5}$	0,0062%
0,79	0,21	0,2100	$1,5978 \cdot 10^{-5}$	0,0076%
0,8	0,2	0,2000	$1,8253 \cdot 10^{-5}$	0,0091%
0,81	0,19	0,1900	$2,0559 \cdot 10^{-5}$	0,0108%
0,82	0,18	0,1800	$2,2896 \cdot 10^{-5}$	0,0127%
0,83	0,17	0,1700	$2,5266 \cdot 10^{-5}$	0,0149%
0,84	0,16	0,1600	$2,7668 \cdot 10^{-5}$	0,0173%
0,85	0,15	0,1500	$3,0104 \cdot 10^{-5}$	0,02011%
0,86	0,14	0,1400	$3,2573 \cdot 10^{-5}$	0,0233%
0,87	0,13	0,1300	$3,5076 \cdot 10^{-5}$	0,0270%
0,88	0,12	0,1200	$3,7614 \cdot 10^{-5}$	0,0313%
0,89	0,11	0,1100	$4,0186 \cdot 10^{-5}$	0,0365%
0,9	0,1	0,1000	$4,2795 \cdot 10^{-5}$	0,0428%
0,91	0,09	0,0900	$4,5439 \cdot 10^{-5}$	0,0505%
0,92	0,08	0,0800	$4,8120 \cdot 10^{-5}$	0,0602%
0,93	0,07	0,0701	$5,0838 \cdot 10^{-5}$	0,0726%
0,94	0,06	0,0601	$5,3594 \cdot 10^{-5}$	0,0893%
0,95	0,05	0,0501	$5,6388 \cdot 10^{-5}$	0,1128%
0,96	0,04	0,0401	$5,9220 \cdot 10^{-5}$	0,1481%
0,97	0,03	0,0301	$6,2092 \cdot 10^{-5}$	0,2070%
0,98	0,02	0,0201	$6,5003 \cdot 10^{-5}$	0,3250%
0,99	0,01	0,0101	$6,7955 \cdot 10^{-5}$	0,6796%

1,0	0,0	$7,0947 \cdot 10^{-5}$	$7,0947 \cdot 10^{-5}$	—
-----	-----	------------------------	------------------------	---

Таблица В.5. Для третьего примера (при $N = 10$)

x	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
0,0	4,1856	4,1810	$4,6426 \cdot 10^{-3}$	0,1110%
0,1	4,1683	4,1680	$3,5186 \cdot 10^{-4}$	0,0084%
0,2	4,1410	4,1433	$2,3513 \cdot 10^{-3}$	0,0568%
0,3	4,0984	4,1021	$3,6520 \cdot 10^{-3}$	0,0891%
0,4	4,0380	4,0417	$3,7450 \cdot 10^{-3}$	0,0927%
0,5	3,9594	3,9623	$2,8444 \cdot 10^{-3}$	0,0718%
0,6	3,8649	3,8660	$1,1809 \cdot 10^{-3}$	0,0306%
0,7	3,7589	3,7579	$9,8293 \cdot 10^{-4}$	0,0261%
0,8	3,6484	3,6450	$3,3312 \cdot 10^{-3}$	0,0913%
0,9	3,5427	3,5372	$5,4744 \cdot 10^{-3}$	0,1545%
1,0	3,4536	3,4467	$6,9185 \cdot 10^{-3}$	0,2003%

Таблица В.6. Для третьего примера (при $N = 100$)

x	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
0,0	4,1856	4,1851	$5,0440 \cdot 10^{-4}$	0,01211%
0,01	4,1841	4,1837	$4,4891 \cdot 10^{-4}$	0,0107%
0,02	4,1826	4,1822	$3,9533 \cdot 10^{-4}$	0,0095%
0,03	4,1811	4,1807	$3,4365 \cdot 10^{-4}$	0,0082%
0,04	4,1795	4,1792	$2,9386 \cdot 10^{-4}$	0,0070%
0,05	4,1778	4,1776	$2,4592 \cdot 10^{-4}$	0,0059%
0,06	4,1761	4,1759	$1,9983 \cdot 10^{-4}$	0,0048%
0,07	4,1743	4,1741	$1,5556 \cdot 10^{-4}$	0,0037%
0,08	4,1724	4,1723	$1,1310 \cdot 10^{-4}$	0,0027%
0,09	4,1704	4,1703	$7,2423 \cdot 10^{-5}$	0,0017%
0,1	4,1683	4,1683	$3,3513 \cdot 10^{-5}$	0,0008%
0,11	4,1662	4,1662	$3,6484 \cdot 10^{-6}$	$8,7571 \cdot 10^{-5}\%$
0,12	4,1639	4,1639	$3,9082 \cdot 10^{-5}$	0,0009%

0,13	4,1615	4,1616	$7,2808 \cdot 10^{-5}$	0,0017%
0,14	4,1590	4,1591	$1,0485 \cdot 10^{-4}$	0,0025%
0,15	4,1563	4,1564	$1,3522 \cdot 10^{-4}$	0,0033%
0,16	4,1535	4,1537	$1,6394 \cdot 10^{-4}$	0,0039%
0,17	4,1506	4,1508	$1,9104 \cdot 10^{-4}$	0,0046%
0,18	4,1475	4,1478	$2,1653 \cdot 10^{-4}$	0,0052%
0,19	4,1443	4,1446	$2,4044 \cdot 10^{-4}$	0,0058%
0,2	4,1410	4,1412	$2,6278 \cdot 10^{-4}$	0,0063%
0,21	4,1375	4,1378	$2,8359 \cdot 10^{-4}$	0,0069%
0,22	4,1338	4,1341	$3,0287 \cdot 10^{-4}$	0,0073%
0,23	4,1300	4,1303	$3,2065 \cdot 10^{-4}$	0,0078%
0,24	4,1260	4,1263	$3,3695 \cdot 10^{-4}$	0,0082%
0,25	4,1218	4,1222	$3,5179 \cdot 10^{-4}$	0,0085%
0,26	4,1175	4,1179	$3,6519 \cdot 10^{-4}$	0,0089%
0,27	4,1130	4,1134	$3,7717 \cdot 10^{-4}$	0,0092%
0,28	4,1083	4,1087	$3,8776 \cdot 10^{-4}$	0,0094%
0,29	4,1034	4,1038	$3,9697 \cdot 10^{-4}$	0,0097%
0,3	4,0984	4,0988	$4,0482 \cdot 10^{-4}$	0,0099%
0,31	4,0932	4,0936	$4,1135 \cdot 10^{-4}$	0,0100%
0,32	4,0878	4,0882	$4,1656 \cdot 10^{-4}$	0,0102%
0,33	4,0822	4,0826	$4,2049 \cdot 10^{-4}$	0,0103%
0,34	4,0764	4,0769	$4,2316 \cdot 10^{-4}$	0,0104%
0,35	4,0705	4,0709	$4,2458 \cdot 10^{-4}$	0,0104%
0,36	4,0644	4,0648	$4,2479 \cdot 10^{-4}$	0,0105%
0,37	4,0580	4,0585	$4,2381 \cdot 10^{-4}$	0,0104%
0,38	4,0515	4,0520	$4,2166 \cdot 10^{-4}$	0,0104%
0,39	4,0448	4,0453	$4,1837 \cdot 10^{-4}$	0,0103%
0,4	4,0380	4,0384	$4,1396 \cdot 10^{-4}$	0,0103%
0,41	4,0309	4,0313	$4,0845 \cdot 10^{-4}$	0,0101%
0,42	4,0237	4,0241	$4,0188 \cdot 10^{-4}$	0,0100%
0,43	4,0163	4,0166	$3,9426 \cdot 10^{-4}$	0,0098%
0,44	4,0087	4,0090	$3,8562 \cdot 10^{-4}$	0,0096%
0,45	4,0009	4,0013	$3,7598 \cdot 10^{-4}$	0,0094%
0,46	3,9929	3,9933	$3,6537 \cdot 10^{-4}$	0,0092%
0,47	3,9848	3,9852	$3,5381 \cdot 10^{-4}$	0,0089%
0,48	3,9765	3,9768	$3,4133 \cdot 10^{-4}$	0,0086%
0,49	3,9680	3,9684	$3,2795 \cdot 10^{-4}$	0,0083%

0,5	3,9594	3,9597	$3,1370 \cdot 10^{-4}$	0,0079%
0,51	3,9506	3,9509	$2,9861 \cdot 10^{-4}$	0,0076%
0,52	3,9417	3,9419	$2,8270 \cdot 10^{-4}$	0,0072%
0,53	3,9326	3,9328	$2,6600 \cdot 10^{-4}$	0,0068%
0,54	3,9233	3,9236	$2,4853 \cdot 10^{-4}$	0,0063%
0,55	3,9139	3,9141	$2,3034 \cdot 10^{-4}$	0,0059%
0,56	3,9044	3,9046	$2,1143 \cdot 10^{-4}$	0,0054%
0,57	3,8947	3,8949	$1,9185 \cdot 10^{-5}$	0,0049%
0,58	3,8849	3,8850	$1,7161 \cdot 10^{-4}$	0,0044%
0,59	3,8749	3,8751	$1,5076 \cdot 10^{-4}$	0,0039%
0,6	3,8649	3,8650	$1,2932 \cdot 10^{-4}$	0,0033%
0,61	3,8547	3,8548	$1,0732 \cdot 10^{-4}$	0,0028%
0,62	3,8444	3,8444	$8,4791 \cdot 10^{-5}$	0,0022%
0,63	3,8340	3,8341	$6,1769 \cdot 10^{-5}$	0,0016%
0,64	3,8235	3,8235	$3,8285 \cdot 10^{-5}$	0,0010%
0,65	3,8129	3,8129	$1,4372 \cdot 10^{-5}$	0,0004%
0,66	3,8022	3,8022	$9,9354 \cdot 10^{-6}$	0,0003%
0,67	3,7915	3,7915	$3,4604 \cdot 10^{-5}$	0,0009%
0,68	3,7807	3,7806	$5,9597 \cdot 10^{-5}$	0,0016%
0,69	3,7698	3,7697	$8,4879 \cdot 10^{-5}$	0,0023%
0,7	3,7589	3,7588	$1,1041 \cdot 10^{-4}$	0,0029%
0,71	3,7479	3,7477	$1,3616 \cdot 10^{-4}$	0,0036%
0,72	3,7369	3,7367	$1,6208 \cdot 10^{-4}$	0,0043%
0,73	3,7258	3,7256	$1,8814 \cdot 10^{-4}$	0,0050%
0,74	3,7147	3,7145	$2,1430 \cdot 10^{-4}$	0,0058%
0,75	3,7036	3,7034	$2,4051 \cdot 10^{-4}$	0,0065%
0,76	3,6926	3,6923	$2,6673 \cdot 10^{-4}$	0,0072%
0,77	3,6815	3,6812	$2,9292 \cdot 10^{-4}$	0,0080%
0,78	3,6704	3,6701	$3,1904 \cdot 10^{-4}$	0,0087%
0,79	3,6594	3,6590	$3,4504 \cdot 10^{-4}$	0,0094%
0,8	3,6484	3,6480	$3,7087 \cdot 10^{-4}$	0,0102%
0,81	3,6374	3,6370	$3,9650 \cdot 10^{-4}$	0,0109%
0,82	3,6265	3,6261	$4,2187 \cdot 10^{-4}$	0,0116%
0,83	3,6157	3,6152	$4,4692 \cdot 10^{-4}$	0,0124%
0,84	3,6049	3,6044	$4,7162 \cdot 10^{-4}$	0,0131%
0,85	3,5942	3,5938	$4,9592 \cdot 10^{-4}$	0,0138%
0,86	3,5837	3,5832	$5,1975 \cdot 10^{-4}$	0,0145%

0,87	3,5732	3,5727	$5,4306 \cdot 10^{-4}$	0,0152%
0,88	3,5629	3,5623	$5,6581 \cdot 10^{-4}$	0,0159%
0,89	3,5527	3,5521	$5,8792 \cdot 10^{-4}$	0,0165%
0,9	3,5427	3,5421	$6,0936 \cdot 10^{-4}$	0,0172%
0,91	3,5328	3,5322	$6,3005 \cdot 10^{-4}$	0,0178%
0,92	3,5231	3,5225	$6,4993 \cdot 10^{-4}$	0,0184%
0,93	3,5136	3,5130	$6,6894 \cdot 10^{-4}$	0,0190%
0,94	3,5043	3,5036	$6,8701 \cdot 10^{-4}$	0,0196%
0,95	3,4953	3,4945	$7,0407 \cdot 10^{-4}$	0,0201%
0,96	3,4864	3,4857	$7,2005 \cdot 10^{-4}$	0,0207%
0,97	3,4778	3,4771	$7,3488 \cdot 10^{-4}$	0,0211%
0,98	3,4695	3,4687	$7,4848 \cdot 10^{-4}$	0,0216%
0,99	3,4614	3,4606	$7,6078 \cdot 10^{-4}$	0,0220%
1,0	3,4536	3,4528	$7,7169 \cdot 10^{-4}$	0,0223%

Приложение С

Свидетельство о регистрации программы

01.07.2022, 13:55

ПрЭВМ №2022661989

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU

2022661989

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
(12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):

[2022661989](#)

Дата регистрации: **28.06.2022**

Номер и дата поступления заявки:

2022660841 15.06.2022

Дата публикации: [28.06.2022](#)

Контактные реквизиты:

office@main.vsu.ru

Авторы:

**Шабров Сергей Александрович (RU),
Шайна Екатерина Александровна (RU)**

Правообладатель:

**федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный университет» (RU)**

Название программы для ЭВМ:

OSch_1.0.1.py

Реферат:

Программа предназначена для нахождения приближенного решения граничной задачи четвертого порядка с негладкими решениями, которая возникает при моделировании малых деформаций продольно растянутой упругой балки на упругом основании с локализованными особенностями. Применяется адаптированный для рассматриваемого случая метод конечных элементов, при этом при решении полученной линейной системы применяется метод последовательных приближений. Программа может выдавать (по желанию пользователя) график приближенного решения, таблицу значений, записывать таблицу значений в tex-файл или вычислять значения приближенного решения в конкретных точках (по желанию пользователя).

Язык программирования: Python

Объем программы для ЭВМ: 6059 байт