на правах рукописи

ШАЙНА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2022

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, доцент,
Шабров Сергей Александрович

Официальные оппоненты:

Сухинов Александр Иванович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет», факультет «Информатика и вычислительная техника», кафедра «Математика и информатика», заведующий

Постников Евгений Борисович, доктор физико–математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», факультет физики, математики, информатики, кафедра физики и нанотехнологий, профессор;

Ведущая организация

ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет» (ВоГУ)

Защита состоится «28» сентября 2022 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/10825/
Диссертация_Шайна_Е.А..pdf

Автореферат разослан 25 июля 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шабров Сергей Александрович

Актуальность темы

Несмотря на активное развитие математического моделирования остаются объекты, моделирование процессов в которых либо трудно формализуемо, либо невозможно с помощью существующих методов и подходов. В случае, когда математическая модель реализуется в виде граничной или смешанной задачи, то как правило, трудности, возникающие как при анализе решений изучаемых моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения, а в некоторых случаях и нарушением непрерывности решения. Возникающие трудности, в большинстве случаев, решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалищин С. Т., Сесекин А. Н., Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М., Владимиров В. С., Егоров Ю. В., Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р., Маслов В. П., Цупин В. А., Дыхта В. А., Самсонюк О. Н., Мирзоев К. А., Шкаликов А. А., Митрохин С. И. и многие другие). Однако на этом пути возникает ряд проблем. Одна из них — проблема умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерывных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима (Владимиров В. С., Шилов Г. Е., Егоров Ю. В., Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р. и многие другие); она не до конца разрешима даже при переходе к алгебре обобщенных функций Коломбо (см. работы Colombeau J.-F., Дерра В. Я., Кинзебулатова Д. М.). Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ-функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (см., например, работы Мышкиса А. Д. и Владимирова А. А.). Еще одна проблема — слабая разрешимость краевых задач, что для приложений недостаточно.

Именно спектральная теория диктовала здесь главное направление развития. Теория обобщенных функций и теория операторов очень эффективно себя проявили в спектральных вопросах (Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Левитан Б. М., Саргсян И. С., Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.) и в дальнейшем многие сотни работ (Митягин Б. С., Korotyaev E. и многие другие).

Еще одно направление развития — качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы, имеющей структуру геометрического графа. Следует отметить, что такой подход очень эффективен, так как моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами.

Цель работы. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей, реализуемых в виде смешанных и граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

— оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи для изучаемой математической модели;

— доказательство возможности применения метода Фурье и корректности изучаемых математических моделей;

— разработка эффективных численных методов решения граничных задач для математических моделей четвертого порядка (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);

— разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

— решение задач прикладного характера: приближенное решение математических моделей с негладкими решениями.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочленённые одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют между собой только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа. Адаптированный метод конечных элементов для граничных задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона–Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи для изучаемой математической модели.

2. Доказательство возможности применения метода Фурье.

3. Доказательство корректности изучаемых математических моделей.

4. Разработка эффективных численных методов решения граничных и смешанных задач для уравнений четвертого порядка (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

5. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим объектом которых является единое уравнение с производными по мере.

2. Доказана возможность применения метода разделения переменных для нахождения решения математической модели; показана корректность математической модели четвертого порядка с производными по мере.

3. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающих колебания одномерных объектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающими из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, которые формализованы в виде единого уравнения с производными по Радону–Никодиму.

Разработаны эффективные численные методы применительно к математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных задач с производными Радона-Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения» (2015, 2019, 2020 гг.), «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» (2017 г.), «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (2020 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы «Воронежская зимняя математическая школа» (2017, 2019 гг.), на семинарах профессоров А. Д. Баева (2018–2019 гг.); М. И. Каменского (2018–2019 гг.), С. А. Шаброва (2017–2022 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 12 работах: [1–12], из них [1–3] из перечня, рекомендованных ВАК и международной базы данных Scopus. Получено свидетельство [13] о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 92 наименований и 3 приложений, в которых приводятся листинги программ, написанных на Python3 и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 112 страницах и содержит 23 рисунка и 6 таблиц.

Основное содержание работы

В первой главе изучается математическая модель

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial \mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{dQ}{d\sigma}u + f(x,t); \\ (pu''_{x\mu})(0,t) - \gamma_1 u'_x(0,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0,t) - (ru'_x)(0,t) + \gamma_2 u(0,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell,t) + \gamma_3 u'_x(\ell,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell,t) - (ru'_x)(\ell,t) - \gamma_4 u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x), u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

В частности, в интересах возможности применения метода разделения переменных изучена скорость роста собственных значений спектральной задачи. Доказаны теоремы.

Теорема 1 (1.3.1). *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ–абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$, $\inf_{[0,\ell]} p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$, $Q(x)$ — не убывает на $[0,\ell]$, λ_n — собственные значения*

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2/7+\delta}} \tag{3}$$

сходится при любом положительном δ.

Теорема 2 (1.4.1). *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ-абсолютно непрерывны; $M'_\sigma(x) > 0$; $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$, $M'_\sigma(x) \geqslant m_0 > 0$; $f(x,t)$ по переменной x раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по нормированным собственным функциям $\varphi_n(x)$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sqrt{\lambda_n}$, где*

$$f_n(t) = \int\limits_0^\ell M'_\sigma(s) f(s,t) \varphi_n(s)\, d\sigma(s), \tag{4}$$

также сходится абсолютно и равномерно на $[0, T^*]$; кроме того, $\psi \in E$, $\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$; $\left(\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}\right)'_x$ — σ–абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$, $(i = 1,2)$; $l_j\psi_1 = l_j(L\psi_1) = l_j\psi_2 = 0$ $(j = 1,2,3,4)$. Тогда функция

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{B_n}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\, d\tau \right) \varphi_n(x), \tag{5}$$

$$A_n = \int\limits_0^\ell M'_\sigma(s)\varphi_n(s)\psi_1(s) d\sigma(s),\; B_n = \int\limits_0^\ell M'_\sigma(s)\varphi_n(s)\psi_2(s) d\sigma(s),$$

является решением математической модели (1), причем ряд (5) можно дифференцировать по t дважды, по переменной x четырежды: сначала по x, затем по мере μ, потом по x, и последний — четвертый раз — по σ; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $[0;\ell] \times [0;T]$.

Доказана корректность изучаемой модели.

В шестом параграфе первой главы изучается смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией, рассматриваемая на геометрическом графе из двух ребер, одно из которых образует цикл.

Во второй главе «Адаптация метода конечных элементов для математических моделей четвертого порядка с производными по мере» метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения изучаемых математических моделей. В первом параграфе строится алгоритм нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} \frac{d}{d\sigma}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{d\mu}\frac{du}{dx}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(r\frac{du}{dx}\right) + \frac{dQ}{d\sigma}u = \frac{d}{d\sigma}F; \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - (ru'_x)(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - (ru'_x)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Введем энергетическое скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \gamma_1\varphi'(0)\psi'(0) + \gamma_2\varphi(0)\psi(0) + \gamma_3\varphi'(\ell)\psi'(\ell) + \gamma_4\varphi(\ell)\psi(\ell) + \\ + \int\limits_0^\ell p\varphi''_{x\mu}\psi''_{x\mu}d\mu + \int\limits_0^\ell r\varphi'_x\psi'_x dx + \int\limits_0^\ell \varphi\psi Q'_\sigma d\sigma \tag{7}$$

в пространстве непрерывных на $[0;\ell]$ функций, имеющих вторую производную, суммируемую с квадратом.

Приближенное решение $u_N(x)$ математической модели (6) будем в виде

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_{2k}(x), \tag{8}$$

где a_k и b_k — значения функции и ее производной в узловой точке x_k, $\varphi_i(x)$ — базисные функции, которые строятся следующим образом.

Для этого разобьем промежуток $[0;\ell]$ на части (узловыми) точками $\{x_k\}_{k=0}^{k=N}$, при этом $x_0 = 0$, $x_N = \ell$. Для дальнейшего удобства положим $x_{-1} = -\frac{1}{N}$, $x_{N+1} = \ell + \frac{1}{N}$. Введем обозначение $h = \max(x_{k+1} - x_k)$. Тогда $\varphi_{2k-1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^3$, если $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $\varphi_{2k-1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^3$, если $x \in [x_k, x_{k+1}]$ и 0 в противном случае; $\varphi_{2k}(x) = (x - x_k)\left(1 + \frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^2$, если $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $\varphi_{2k}(x) = (x-x_k)\left(1 - \frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^2$, если $x \in [x_k, x_{k+1}]$ и 0 в противном случае, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Доказана теорема.

Теорема 3 (2.2.1). *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (6), $u_N(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N частей отрезка*

$[0;\ell]$. *Тогда справедлива оценка*

$$\langle u-u_N, u-u_N\rangle \leqslant C\cdot h, \tag{9}$$

где $h=\max(x_{k+1}-x_k)$, *C не зависит от h.*

В третьем параграфе приближенное решение $u_N(x,t)$ математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ (pu''_{x\mu})(0,t) - \gamma_1 u'_x(0,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0,t) - (ru'_x)(0,t) + \gamma_2 u(0,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell,t) + \gamma_3 u'_x(\ell,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell,t) - (ru'_x)(\ell,t) - \gamma_4 u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{10}$$

будем искать в виде

$$u_N(x,t) = \sum_{k=0}^{N} a_{2k-1}(t)\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^{N} a_{2k}(t)\varphi_{2k}(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные выше.

Доказана теорема.

Теорема 4 (2.4.1). *Пусть* $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma \geqslant 0$, $p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$ *и начальные условия* $\psi_0(x)$ *и* $\psi_1(x)$ *таковы, что математическая модель*

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ (pu''_{x\mu})(0,t) - \gamma_1 u'_x(0,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})'_x(0,t) - (ru'_x)(0,t) + \gamma_2 u(0,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell,t) + \gamma_3 u'_x(\ell,t) = 0; \\ (pu''_{x\mu})(\ell,t) - (ru'_x)(\ell,t) - \gamma_4 u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{11}$$

имеет единственное решение в классе E; $u(x,t)$ и $u_N(x,t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда, справедливо неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^\ell w_t'^2(x,t)\,dM + \int_0^\ell p(x) w_{xx}''^2(x,t)\,dx + \right.$$

$$+ \int_0^\ell r(x) w_x'^2(x,t)\, dx + \int_0^\ell w^2(x,t)\, dQ \Bigg)^{1/2} \leqslant \overline{C} \cdot h, \quad (12)$$

где $\overline{C}$ не зависит от h.

В третьей главе «Численные эксперименты» проведены численные эксперименты, которые подтверждают теоретическую оценку.

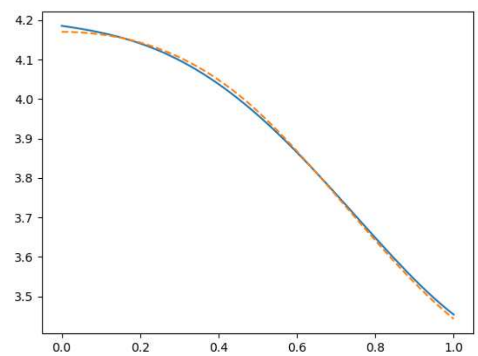

Рис. 1. *Графики точного и приближенного решений при $N = 2$)*

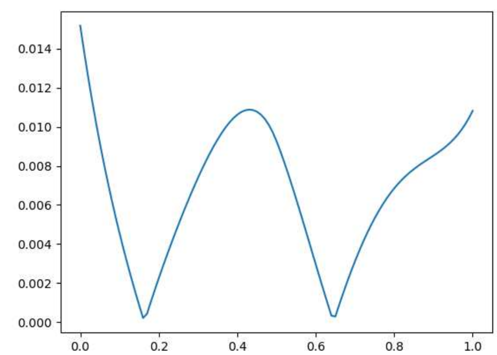

Рис. 2. *График погрешности при $N = 2$*

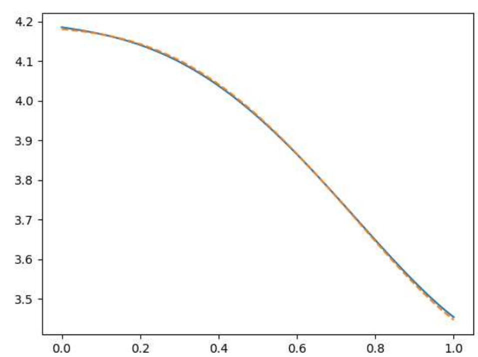

Рис. 3. *Графики точного и приближенного решений при $N = 10$*

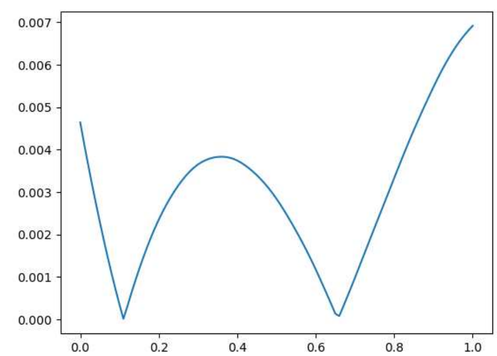

Рис. 4. *График погрешности при $N = 10$*

Программа работает по следующему алгоритму. Задаются коэффициенты модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается и получается приближенное решение. Строится либо график, либо таблица значений. Схема взаимодействия модулей скрипта довольно проста и представлена на рисунке 7.

Общие сведения о программе. Программа называется OSch_1.0.1.py. Для работы программы необходим интерпретатор языка Python3, пакеты math, scipy.integrate, pylab и matplotlib.pyplot.

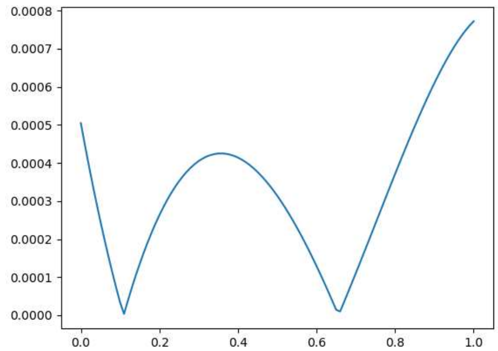

Рис. 5. *График погрешности при* $N = 100$

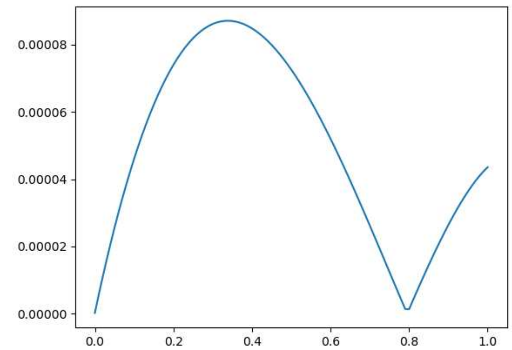

Рис. 6. *График погрешности при* $N = 1000$

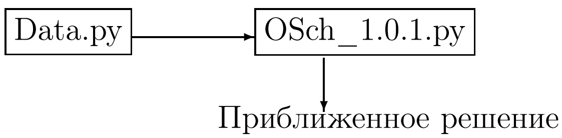

Рис. 7. *Схема взаимодействия модулей*

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 Гб оперативной памяти. Объём исходного текста составляет 6059 байта.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения граничной задачи четвертого порядка с интегралом Стилтьеса, которая возникает при моделировании малых деформаций продольно растянутой упругой балки на упругом основании, по заданным параметрам модели, при этом концы системы имеют упругое закрепление.

Структура программы. В модуле с названием Data.py задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт OSch_1.0.1.py, который запрашивает количество интервалов, на который необходимо разбить интервал, и необходимое действие (построить график приближенного решения или записать значения приближенного решения в текстовый файл). Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается и получается приближенное решение.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows 8, 10.

Эксплуатация программы. Для запуска программы необходимо задать параметры модели: $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$, $F(x)$, ξ_i, γ_j которые необходимо ввести в файл с именем Data.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем OSch_1.0.1.py. На выходе будет получен либо график приближенного решения, либо таблица приближенного решения, которая может быть записана в файл.

В заключении излагаются основные результаты диссертации.

Заключение

В диссертационной работе представлены новые качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, реализуемых в виде смешанных и граничных задач для дифференциальных уравнений. Современный аналитический аппарат изучения таких моделей находится в начальной стадии формирования. Полученные качественные аналитические методы исследования основываются на эффективных результатах анализа граничных задач с производными по мере. В настоящее время численные методы для уравнений с производными по мере, их обоснование также находятся в стадии формирования.

В работе получены новые результаты, относящиеся к области приближенного решения смешанных задач с производными Радона–Никодима, а также дана оценка погрешности. Представлены комплексы проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем.

1. Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде смешанных задач с производными по мере.

2. Получена оценка скорости роста собственных значений спектральной задачи для изучаемой математической модели.

3. Доказана возможность применения метода Фурье; корректность изучаемых математических моделей.

4. Разработаны и реализованы численные методы и алгоритмы приближенного решения изученных математических моделей, комплексы программ, выполненных на языке высокого уровня Python3. Представлены результаты численных экспериментов тестовых задач и листинги программ.

Публикации из Перечня ВАК и приравненных к нему

[1] On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with radon-nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1479(1). — P. 012044.

[2] Бурлуцкая, М. Ш. Классическое решение смешанной задачи с инволюцией на графе / М. Ш. Бурлуцкая, И. В. Колесникова, Е. А. Шайна // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2018. — № 1. — С. 60–68.

[3] Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Е. А. Шайна // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2018. — № 4. — С. 207–216.

Прочие публикации

[4] Шабров, С. А. Об уточнении скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, М. В. Шаброва, Е. А. Шайна // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. — 2021. — Т. 193. — С. 158–162.

[5] Бурлуцкая, М. Ш. Об одной смешанной задаче с инволюцией на графе / М. Ш. Бурлуцкая, Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXVII»: дополнительный выпуск. — 2016. — С. 10–11.

[6] О скорости роста собственных значений спектральной задачи четвертого порядка с проиозводными Радона-Никодима / С. А. Шабров, О. М. Ильина, Е. А. Шайна, Д. А. Чечин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции. — 2020. — С. 1197–1200.

[7] Шайна, Е. А. О собственных функциях для оператора с инволюцией и потенциалом специального вида на графе / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. : Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения–XXVI». — 2015. — С. 221–222.

[8] Шайна, Е. А. Аналог формулы Даламбера для решения начальной задачи для уравнения с инволюцией / Е. А. Шайна // Современные проблемы математики. Третий международный молодежный симпозиум «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» : Воронеж. — 2017. — С. 71–72.

[9] Шайна, Е. А. О собственных функциях оператора с инволюцией и симметричным потенциалом на графе / Е. А. Шайна // Современные методы теории функций и смежных проблем: материалы международной конференции ВЗМШ. — 2017. — С. 217–218.

[10] Шайна, Е. А. Единственность решения математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы / Е. А. Шайна //

Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — 2019. — С. 286–288.

[11] Шайна, Е. А. О возможности применения метода Фурье к математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения XXX. — 2019. — С. 310–312.

[12] Шайна, Е. А. О достаточных условиях возможности применения метода Фурье к математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы с локализованными особенностями / Е. А. Шайна // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения XXXI. — 2020. — С. 244–246.

Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ:

[13] Шабров С. А., Шайна Е. А. Программа OSch_1.0.1.py для нахождения приближенного решения граничной задачи четвертого порядка с негладкими решениями. 2022.