

**ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. П.Г. ДЕМИДОВА**

На правах рукописи

**ГВОЗДАРЁВ АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ**

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРАЛЬНОЙ  
РАЗНОСТИ ФАЗ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
РАДИОГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ЭТАЛОННЫХ МЕТОДОВ**

01.04.03 - Радиофизика  
(по физико-математическим наукам)

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
кандидат физико-математических наук,  
доцент Т.К. Артёмова

Ярославль  
2014

	стр.
<b>Введение</b>	6
<b>Глава 1. Эталонный фазовый метод, использующий интегральную разность фаз для оценки параметров объектов в задачах радиоголографии</b>	16
1.1 Общая характеристика эталонных методов	16
1.2 Используемые в эталонных методах решения радиофизических задач критерии	16
1.3 Эталонный фазовый метод, использующий интегральную разность фаз. Постановка задачи	18
1.4 Функция плотности распределения вероятности интегральной разности фаз	24
1.5 Асимптотическое поведение функции плотности вероятности интегральной разности фаз	29
1.6 Выводы	36
<b>Глава 2. Вероятностные характеристики интегральной разности фаз для эталонного метода оценки параметров радиоголографических объектов</b>	37
2.1. Представление функции плотности вероятности интегральной разности фаз в полярной системе координат	37
2.2 Функция распределения и моментные функции произвольного порядка интегральной разности фаз	47
2.3 Альтернативная форма представления функции плотности вероятности	63
2.4 Аналитические выражения для моментных функции 1-4-го порядков при больших отношениях сигнал/шум	65
2.5 Аппроксимации функции плотности вероятности	69
2.5.1 Аппроксимация на основе "обёрнутого" нормального распределения	69

2.5.2	Аппроксимация на основе распределения Тихонова-фон Мизеса	70
2.5.3	Аппроксимация на исходной плотности вероятности при большом отношении сигнал/шум и в отсутствие аномальных ошибок	72
2.6	Сравнительный анализ поведения вероятностных характеристик предлагаемых аппроксимаций и точного решения	73
2.7	Рекомендации по использованию предлагаемых аппроксимаций в задаче оценки параметров объектов радиолокации эталонным фазовым методом	79
2.8	Выводы	80
<b>Глава 3. Оценка интегральной разности фаз</b>		<b>81</b>
3.1	Нижняя граница для минимального рассеяния оценки интегральной разности фаз	81
3.1.1	Граница Рао-Крамера	81
3.1.2	Граница Чепмена-Роббинса	83
3.2	Оценка интегральной разности фаз методом моментов	85
3.2.1	Процедура нахождения оценки интегральной разности фаз методом моментов. Характеристики оценки	85
3.2.2	Анализ результатов статистического моделирования оценки интегральной разности фаз методом моментов	91
3.3	Оценка интегральной разности фаз методом максимального правдоподобия	97
3.3.1	Процедура нахождения оценки интегральной разности фаз методом максимального правдоподобия. Характеристики оценки.	97
3.3.2	Анализ результатов статистического моделирования оценки интегральной разности фаз методом максимального правдоподобия	99

3.4 Пример сравнения процедуры оценки параметра объекта эталонным методом с использованием интегральной разности фаз и модульного значения корреляционного интеграла	109
3.5 Выводы	115
<b>Глава 4. Определение минимального шага сетки эталонов эталонного фазового метода, построенного на основе интегральной разности фаз</b>	<b>117</b>
4.1 Постановка задачи	117
4.2 Определение минимального шага при заданном статистическом пределе разрешения	118
4.2.1 Анализ результатов теоретического исследования	118
4.2.2 Анализ результатов статистического моделирования	119
4.3 Определение минимального шага при заданной вероятности правильной/ложной классификации	127
4.3.1 Анализ результатов теоретического исследования	127
4.3.2 Анализ результатов статистического моделирования	131
4.4 Замечания относительно сравнения двух рассматриваемых подходов при выборе минимального шага сетки эталонов	141
4.5 Пример сравнения процедуры выбора минимального шага сетки эталонов на основе заданной вероятности правильной классификации при использовании интегральной разности фаз и евклидова расстояния	143
4.6 Выводы	148
<b>Заключение</b>	<b>150</b>
<b>Литература</b>	<b>153</b>
<b>Приложение А. Программа моделирования радиоголограммы эталонных объектов</b>	<b>165</b>
<b>Приложение Б. Графические зависимости вероятностных характеристик интегральной разности фаз и её аппроксимаций</b>	<b>169</b>
<b>Приложение В. Графические зависимости статистических характеристик оценок, полученных методом моментов</b>	<b>174</b>

<b>Приложение Г. Графические зависимости статистических и временных характеристик оценок максимального правдоподобия</b>	180
<b>Приложение Д. Результаты проверки гипотезы о нормальности распределения оценок</b>	184
<b>Приложение Е. Результаты статистического моделирования для определения шага сетки эталонов</b>	188
<b>Приложение Ж. Экспериментальная апробация рассматриваемого эталонно-фазового метода</b>	197

## **Введение**

Наличие ситуаций в системах дистанционного контроля, досмотра и слежения, когда оптические или термические методы не применимы, привело к резкому росту интереса к системам голографического радиовидения (СГРВ). На данный момент многие современные системы радиовидения и дистанционного зондирования различного назначения используют голографический способ регистрации для получения изображения исследуемых объектов. В частности, на сегодняшний день актуально использование СРГВ в таких областях, как системы персонального и таможенного досмотра (бодисканнеры), системы компьютерной томографии, системы автоматической робототехники, охранные системы, системы военного назначения (идентификация и наведение на цель), системы авиационного автоматического беспилотного обнаружения (Friend-Or-Foe), биомедицинские системы, системы неразрушающего контроля, системы подповерхностного зондирования. При этом в подобного рода системах часто требуется одновременная оценка совокупности параметров исследуемого объекта (местоположения, геометрических параметров, электродинамических параметров и т.д.)

**Проблема оценки параметров объектов в СГРВ** имеет следующие аспекты.

1) **Низкая азимутальная разрешающая способность** классических систем СГРВ, определяющаяся следующими факторами:

- Используемой рабочей частотой. Как правило, на практике используется сантиметровый/миллиметровый диапазон длин волн. Дальнейшее увеличение частоты на практике считается не эффективным, так как в этом случае резко повышается поглощение в препятствиях.
- Используемой апертурой. В реализованных на данный момент стационарных СГРВ размер апертуры (фиксированной или синтезированной) не превышает 1,5 – 2 метров. Дальнейшее увеличение размеров непрактично, так как приводит к избыточным увеличениям массогабаритных параметров установки.
- Дальность действия системы. Существующие реализации СГРВ работают на дальностях, не превышающих единиц метров, хотя зачастую особый интерес представляют задачи, в которых объект отнесён от СГРВ на расстояние нескольких десятков метров.

Необходимо учесть, что классическая разрешающая способность прямо пропорциональна используемой длине волны и дальности до объекта и обратно пропорциональна размеру апертуры, что на практике приводит к необходимости поиска инженерного решения, минимизирующего потери качества изображения и/или оценки параметров.

- 2) **Низкая радиальная разрешающая способность.** Основным фактором, влияющим на радиальную разрешающую способность, является ширина полосы перестройки зондирующего сигнала. Таким образом, проблема обусловлена сложностью (как технической, так и стоимостной) практической реализации сверхширокополосных СВЧ устройств.
- 3) **Сложность процесса получения радиоголографического изображения** для последующей оценки параметров. Это связано с необходимостью использования достаточно сложных и вычислительно ёмких алгоритмов восстановления изображения при большом объёме сцены. Ситуация ещё больше усугубляется в случае необходимости восстановления трёх мерного изображения или работы в ближней зоне объекта, где невозможно использовать вычислительно эффективные приближения моделей распространения сигнала. Данный фактор существенно снижает быстродействие системы, при этом теряется возможность проведения анализа в режиме реального времени.
- 4) **Сложность технической реализации,** на практике связанная с необходимостью использования как можно большего числа приемо-передающих элементов (что позволяет добиться высокой скорости сканирования) и большей точности позиционирования выборки. Однако часто повышение числа приёмо-передатчиков ограничено стоимостными и массогабаритными параметрами реализации.
- 5) **Малое количество априорно заданной информации.** Практически все существующие системы СГРВ используют в качестве основного метода оценки параметров объектов метод оценки по восстановленному изображению. Это связано с тем, что на практике диапазон потенциально возможных объектов исследования столь широк, что заранее невозможно предугадать даже возможный диапазон изменения всей совокупности оцениваемых параметров. В частности, критическим практически для всех существующих методов является недостаток информации об однородности, изотропии, объёмности, конечности и тому подобных свойствах объекта.
- 6) **Общая сложность строгой аналитической постановки задачи,** связанная с тем, что наличие нескольких рассеивающих объектов приводит к формированию в объектном поле интерференционной компоненты поля, которая при цифровой обработке радиоголограммы или получении радиоизображения по радиоголограмме с целью визуального анализа или цифровой обработки существенно искажает отображение и оценки параметров реально присутствующих объектов.
- 7) **Общая сложность решения задачи,** связанная с тем, что в большинстве случаев методы анализа параметров объектов базируются на решении обратной задачи,

которая строго математически является некорректной. При этом теоретическим требованием существования и единственности решения является наличие измерений (поле, радиоголограмма и т.д.), проведённых для всего бесконечного спектра частот и всех углов наблюдения (пространственных частот). На практике данное требование является нереализуемым, в связи с чем и проявляется принципиальная неустойчивость большинства существующих методов.

На данный момент в описываемых в литературе исследованиях предпринимаются попытки извлечь из зарегистрированных данных информацию о размерах объекта, его электродинамических параметрах, местоположении в пространстве, о форме с целью идентификации объекта по набору значений этих параметров. На практике рассмотрение поставленной задачи проводится несколькими путями:

- 1) с использованием методов решения обратных задач рассеяния (основы были заложены в работах Lewis R., Wojarski N. [63-67], [101], [105], [113], [130]). На данный момент они наиболее активно развиваются в нескольких направлениях:
  - используются алгоритмы масштабирующей итеративной обработки [68], [88];
  - используются генетические алгоритмы и системы нечёткой логики [53], [69-72], [74], [88], [111], [114], [119], [133];
  - оптимизируются существующие методы регуляризации решений задач обратного рассеяния [71], [72], [74], [111], [115], [119];
  - используются различного рода вариации существующих методов численных решений: различные модификации быстрых алгоритмов, алгоритмов временного и частотного мультиплексирования приёмо-передающих элементов, методов эквивалентных источников, различные модификации метода Борна и т.п. [58], [61], [73], [76-76], [78], [85], [87], [89-90], [94], [96], [100], [102], [108-110], [116-118], [120], [131-132], [134];
- 2) с использованием методов конформных отображений [60], [79-80], [107], [121-122] и методов анализа коэффициентов разложений [81];
- 3) с использованием методов цифровой обработки изображения, восстановленного по радиоголограмме, в том числе разработанных для систем компьютерного зрения [57], [92-93].

Наиболее развитыми являются методы, базирующиеся на решении обратной задачи рассеяния.

Так, в частности, в работах [63-67], [101], [105], [113], [121-122], [130] в общем виде сформулирована постановка задачи определения формы рассеивателя, хотя стоит отметить, что постановка задачи рассматривается только для идеально проводящих объектов.



Принципиальная неустойчивость решения, получаемого на основе методов, описанных в [63-67], [101], [105], [113], [130], показанная в работе [113], уменьшается путём введения различных методов его регуляризации, рассмотренных в [53], [58], [72], [75], [111], [114], [119].

В работах [69–71], [75], [88], [119] продемонстрирована возможность повышения разрешающей способности отдельных участков восстановленного изображения за счёт применения итерационной масштабирующей схемы восстановления или за счёт применения генетических алгоритмов обработки.

В работе [90] предлагается использование методов кодового и частотного разделения приемопередающих каналов с мультиплексированием для повышения быстродействия системы регистрации и потенциального уменьшения числа приемопередающих элементов.

Однако разработанные на сегодняшний день методы имеют существенные ограничения, в первую очередь, из-за требований к замкнутости апертуры ([88], [94], [96], [109], [110], [114], [118], [133]) (в большинстве методов, основанных на решении обратной задачи рассеяния, удовлетворительное качество достигается лишь при условии кругового сканирования). При этом удовлетворительная разрешающая способность достигается за счёт увеличения числа приемо-передающих элементов (например, 16, 40, 144, или 1024 в [133], [58], [72] и [135] соответственно), что существенно увеличивает стоимость и массогабаритные параметры реализации. В случае же использования плоской апертуры (например, [69], [75], [78] или [117]) или малого числа приемопередатчиков качество восстанавливаемого радиоизображения слишком низкое для проведения по нему оценок геометрических параметров объектов.

Некоторые из существующих на сегодняшний день алгоритмов (например, [88], [78] или [133]) чрезвычайно время- и ресурсоёмки (2,3 ч., 3,3 ч. или 24 ч. соответственно). В результате большой объём обрабатываемых и хранимых данных в подавляющем большинстве случаев не позволяет производить анализ в реальном времени.

Все реализованные на данный момент методы различаются условиями применимости. Так, большинство методов (например, [53], [69], [108]) на восстановленном по радиоголорамме изображении не способны чётко отобразить грани и углы объектов, некоторые ([65-66]) демонстрируют высокую работоспособность лишь на хорошо или идеально проводящих объектах, другие ([5], [57]) - на однородных, изотропных объектах, третьи ([5], [57]) построены для объектов заранее заданной формы. К недостаткам многих методов стоит также отнести использование либо монохроматического сигнала ([65-66]), что не позволяет достаточно полно использовать всю возможную информацию об объекте, либо гармонического сигнала с перестройкой частоты при сверхшироком спектре ([64], [101]), что существенно усложняет и повышает конечную стоимость итоговой реализации.

Важным ограничением многих методов также является максимальная дальность, на которой можно проводить анализ параметров объектов, что является прямым следствием ухудшения разрешающей способности с расстоянием. При этом большинство существующих реализаций работают на расстояниях не более нескольких метров ([5], [11], [36-37], [106]).

Однако задача может быть решена с помощью эталонных методов, как, например, это делается в цифровой обработке оптических изображений идентификации автомобильных номеров, распознавании лиц в системе персональной идентификации и т.д.

Не смотря на то, что на данный момент существуют отдельные работы [128-129] и патент [33], в которых предлагается использование эталонного метода на одном из этапов в качестве вспомогательной процедуры, ни в одной из существующих сейчас реализованных в виде функционирующего промышленного образца СГРВ ([5], [11], [36-38], [106]) не используются эталонные методы оценки параметров радиоголографических объектов. Это объясняется несколькими факторами:

- слишком широким набором исследуемых радиоголографических объектов, что приводит к чрезвычайно большой базе данных эталонов, что в свою очередь снижает быстродействие анализа и предъявляет высокие требования к объёму хранимых данных;
- неиспользованием априорной информации о форме радиоголографического объекта.

Однако для случаев, когда производится поиск объектов с конкретными параметрами (формой, размерами, электродинамическими параметрами и т.д.), например, в случае персонального досмотра на наличие оружия или взрывчатых веществ, поиска мин и фугасов, оценки неоднородностей структуры, можно заранее построить базу данных эталонных объектов с заданными параметрами, тем самым уменьшив её размеры и повысив быстродействие конечной реализации СГРВ.

В работах [1-2], [14-30] продемонстрирована возможность реализации этих идей на практике в СГРВ при использовании эталонного метода на основе интегральной разности фаз. При этом для рассматриваемой авторами совокупности конфигурации системы и объектов исследования был продемонстрирован существенный выигрыш в разрешающей способности.

Однако теоретически данный метод является не до конца проработанным: отсутствуют статистические характеристики и показатели качества метода, их зависимость от параметров объектов, объёма выборки и других факторов, отсутствуют строгое обоснование принципа построения эталонной сетки и рекомендации по проведению процедуры оценивания параметров.

Таким образом, решаемая задача является весьма **актуальной**.

**Целью исследования является** исследование вероятностно-статистических характеристик эталонного метода определения параметров радиоголографических объектов, использующего в качестве критерия сходства интегральную разность фаз.

В работе ставятся следующие **задачи**:

- получение точных, асимптотических и аппроксимирующих выражений для статистических характеристик интегральной разности фаз для эталонного метода определения параметров радиоголографических объектов;
- исследование поведения оценок интегральной разности фаз в зависимости от отношения сигнал/шум и истинного значения интегральной разности фаз;
- определение границ применимости найденных выражений и формулировка рекомендаций по применению рассматриваемых методов оценивания для данной задачи;
- определение принципа построения и выбор минимального шага;
- исследование зависимости шага эталонной сетки от объёма выборки, отношения сигнал/шум и истинного значения интегральной разности фаз.

Решение поставленных задач отражено в четырёх главах диссертации.

**В первой главе** рассмотрены основные вопросы построения эталонных методов оценки параметров объектов в задачах радиоголографии. Проводится обзор наиболее часто используемых на практике критериев сходства, на основе которых можно реализовать эталонные методы. Предлагается применение в системе голографического радиовидения эталонного метода, использующего в качестве критерия сходства интегральную разность фаз. Выделены три основные задачи, требующие решения для успешной реализации эталонного метода на основе интегральной разности фаз:

- определение статистических характеристик интегральной разности фаз для проведения дальнейшей процедуры оценки;
- определение процедуры оценивания интегральной разности фаз и вероятностно-статистических характеристик оценки;
- определение минимально возможного шага сетки эталонов.

Поставлена задача определения параметра радиоголографического объекта с применением эталонного фазового метода, использующего в качестве критерия интегральную разность фаз. Получено общее выражение для плотности вероятности интегральной разности фаз. Проанализировано её асимптотическое поведение.

**Во второй главе** теоретически строго решена задача определения вероятностных характеристик интегральной разности фаз: функции распределения, моментных функций произвольного порядка (в общем виде), математического ожидания и дисперсии (в явном виде).

Получено альтернативное представление функции плотности вероятности и предложены три вида аппроксимации: на основе "обёрнутого" нормального распределения, распределения Тихонова-фон-Мизеса и асимптотическое (при больших отношениях сигнал/шум). Для случая больших отношений сигнал/шум получены асимптотические выражения различной степени точности для моментов 1 – 4-го порядков. Проведён анализ поведения и сравнение первых двух моментов для исходной плотности вероятности и предложенных аппроксимаций. Проведено сравнение аппроксимаций по критерию расстояния полной вариации. Сделаны заключения о применимости полученных асимптотических выражений для моментов и приведены рекомендации по использованию предлагаемых аппроксимаций.

**В третьей главе** рассмотрена задача оценки интегральной разности фаз с учётом полученных ранее её статистических характеристик. Оценка производится с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия. Проанализированы смещение и рассеяние, обеспечиваемые данными методами. Проведено сравнение с минимально возможным значением рассеяния, определяемым границами Рао-Крамера и Чепмена-Роббинса. Проанализировано поведение оценок, получаемых обоими методами для различных значений переменных параметров: истинной интегральной разности фаз, объёма выборки и отношения сигнал/шум. Для случаев малого и большого отношений сигнала/шум и различного объёма статистической выборки произведено сравнение получаемых оценок с точки зрения их смещённости, обеспечиваемого рассеяния и времени, требуемого на проведение процедуры оценивания. Сделаны заключения и даны рекомендации относительно использования рассмотренных методов в задаче оценивания параметров объектов радиологическим эталонным фазовым методом.

**В четвёртой главе** рассмотрена задача выбора минимального шага сетки эталонов на основе двух критериев: ограничения по допустимой полной вероятности ошибки или вероятности правильного принятия решения при решении задачи классификации двух соседних эталонов и ограничения, накладываемого на статистический предел разрешения. Проведён анализ результатов статистического моделирования и их сравнение для этих двух критериев.

**В заключении** сформулированы основные выводы по работе.

**Основные результаты исследований.** В процессе диссертационного исследования теоретически строго решена задача определения статистических характеристик интегральной разности фаз: функции плотности вероятности, функции распределения, моментных функций произвольного порядка, математического ожидания и дисперсии (в явном виде). Получено альтернативное представление функции плотности вероятности и предложены три вида аппроксимации: на основе "обёрнутого" нормального распределения, распределения Тихонова-

фон Мизеса и асимптотическое (при больших соотношениях сигнал/шум). Для случая больших отношений сигнал/шум получены асимптотические выражения различной степени точности для моментов 1 – 4 порядков. Сделаны заключения о применимости полученных асимптотических выражений для моментов и приведены рекомендации по использованию предлагаемых аппроксимаций.

Исследованы оценки методами моментов и максимального правдоподобия интегральной разности фаз с учётом полученных ранее статистических характеристик, их смещение и рассеяние. Приведены рекомендации относительно величины отношения сигнал/шум, необходимого для достижения заданной эффективности получаемой методом моментов и максимального правдоподобия оценки интегральной разности фаз. Проведено сравнение рассмотренных методов оценивания с позиции их смещённости, рассеяния и временных затрат на их получение. Приведены рекомендации по выбору метода оценивания в зависимости от параметров системы. Проведено сравнение процедуры оценки параметра объекта эталонным методом с использованием интегральной разности фаз с методом на основе модуля корреляционного интеграла.

Рассмотрена задача выбора минимального шага сетки эталонов на основе двух критериев: ограничения по допустимой полной вероятности ошибки или вероятности правильного принятия решения при решении задачи классификации двух соседних эталонов и ограничения, накладываемого на статистический предел разрешения. Показано, что при наличии априорной неопределённости относительно коэффициента амплитудного расхождения требования к обеспечиваемому отношению сигнал/шум возрастают. Проведено сравнение требований, предъявляемых к СГРВ рассмотренными критериями, указаны области преимущества как одних, так и других критериев, указан подход позволяющий уменьшить требуемую величину соотношения сигнал/шум. Проведено математическое моделирование сравнения поведения эталонных методов использующих интегральную разность фаз с методами, использующими расстояние Евклида, при выборе минимального шага сетки эталонов на основе ограничений, накладываемых на вероятность правильной классификации двух соседних эталонов. Отмечены области возможных изменений таких параметров, как размеры апертуры и число антенных элементов, при которых метод на основе интегральной разности фаз даёт выигрыш по значению требуемого соотношения сигнал/шум. Указана величина такого выигрыша.

**Положения, выносимые на защиту:**

- точные, асимптотические и аппроксимирующие выражения для статистических характеристик интегральной разности фаз для эталонного метода определения параметров радиоголографических объектов; асимптотические выражения различной

- степени точности для моментов 1 – 4 порядков; аппроксимации функции плотности вероятности интегральной разности фаз и рекомендации по их применению;
- поведение оценок интегральной разности фаз, получаемых методами моментов и максимального правдоподобия в зависимости от отношения сигнал/шум и истинного значения интегральной разности фаз;
  - рекомендации по применению метода моментов и метода максимального правдоподобия для задачи оценки интегральной разности фаз;
  - способ определения минимального шага эталонной сетки;
  - установленная зависимость шага эталонной сетки от объёма выборки, отношения сигнал/шум и истинного значения интегральной разности фаз.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Результаты диссертационного исследования имеют теоретическую и практическую значимость. На основе полученных теоретических выражений и их аппроксимаций возможно проведение дальнейших исследований по синтезу алгоритмов и устройств оценивания интегральной разности фаз. Сформулированные рекомендации позволяют определить требования к СГРВ, выполнение которых обеспечит желаемое качество её функционирования. Исследованный эталонный метод, использующий в качестве критерия интегральную разность фаз, и способы построения её оценки позволяют существенно повысить разрешающую способность систем голографического радиовидения по сравнению с классической аппаратной. Предполагаемые области применения включают в себя: системы персонального и таможенного досмотра (бодисканнеры), системы компьютерной томографии, системы автоматической робототехники, охранные системы, системы военного назначения (идентификация и наведение на цель), системы авиационного автоматического беспилотного обнаружения (Friend-Or-Foe), биомедицинские системы, системы неразрушающего контроля, системы подповерхностного зондирования.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на 17, 19 – 23 Международных конференциях «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (Севастополь, Украина, 2007 г., 2009 – 2013 гг.); XIII, XIV, XVI – XVIII международных научно-технических конференциях «Радиолокация, навигация, связь» Воронеж, 2007, 2008, 2010 – 2012); 15, 17 Международных конференциях «Математика. Компьютер. Образование» (Пушино, 2007, Дубна, 2010), 6 и 7 всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь» (Москва, 2012, 2013).

Результаты диссертации использованы в НИР, выполнявшихся на кафедре радиофизики ЯрГУ им. П.Г. Демидова.

Основные результаты работы отражены в 22-х работах по теме диссертации. Из них 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК для публикаций основных результатов диссертаций, 4 статьи в рецензируемых научно-технических журналах и 14 материалов конференций.

## **Глава 1 Эталонный фазовый метод, использующий интегральную разность фаз для оценки параметров объектов в задачах радиоголографии**

### **1.1 Общая характеристика эталонных методов**

Эталонные методы могут применяться в качестве как основного, так и вспомогательного средства к решению различных радиофизических задач. Зачастую эталонные методы могут быть использованы в качестве вспомогательного инструмента для фильтрации радиоголографических изображений (смотри, например, [115]) или как этап кластерного анализа при проведении внутриклассовой классификации ([115], [41 (глава 6)]). Так же с использованием эталонных методов может быть решена задача оценки параметров объектов по данным радиоголограммы [1-2], [14-30].

Основными этапами реализации эталонных методов являются:

1. определение класса принадлежности объекта (или формирование набора классов);
2. выбор интересующих признаков исследуемого объекта в рамках заданного класса или для каждого класса;
3. построение базы эталонов на основе выбранных признаков;
4. выбор критерия сходства объектов внутри каждого класса и между ними;
5. сравнение регистрируемого в ходе исследования сигнала от объекта с эталонными;
6. принятие решения на основании выбранного критерия сходства;
7. присвоение оцениваемому параметру объекта того же значения, что и у наиболее близкого в смысле принятого критерия сходств эталона.

Двумя ключевыми задачами при использовании эталонных методов являются задача построения набора эталонов и задача выбора критерия сходства.

### **1.2 Используемые в эталонных методах решения радиофизических задач критерии**

Зачастую в литературе отождествляется понятие критерия сходства или, как его ещё называют, функции расстояния (меры близости), с метрикой в пространстве признаков рассматриваемой задачи. Хотя надо отметить, что вводимое из каких-либо соображений расстояние может не удовлетворять всем свойствам метрики и не быть ею в полном смысле этого слова. В этом случае подобного рода критерии называют псевдометрикой.

Так как выходным сигналом любой радиотехнической системы является вещественный сигнал в форме напряжения или тока, то естественно сравнивать амплитудные характеристики



принятого и эталонного сигналов. В частности, подобный подход является практически единственным возможным в системах с асинхронным приёмом, не позволяющим получить сколь-нибудь значимой информации о фазе сигнала. Зачастую на практике даже в случае использования синхронного приёма (например, с использованием квадратурных схем) и восстановления комплексной огибающей сигнала анализируется только амплитуда сигнала. В этих случаях критерий сходства оперирует над вещественнозначными величинами (будем условно в дальнейшем называть такой критерий "амплитудным").

В зависимости от области применения и конкретной задачи существует огромное количество разработанных на данный момент амплитудных критериев ([3]. [41 (глава 6)], [34]), которые можно условно разделить на несколько семейств: семейство, основанное на  $L_p$  метрике Минковского (расстояние Евклида, Чебышева, Минковского, Соренсена, лоренцевское и др.); критерии близости, основанные на скалярном произведении (косинусное, среднегармоническое, Кумара-Хассенброка, Жаккарда и др.); хи-квадрат расстояния (хи-квадрат Пирсона, хи-квадрат Неймана, Кларка и др.); семейство на основе энтропии Шеннона (Кульбака-Лейблера, Шеннона, Джеффриса, Йенсена и др.); семейства, представляющие комбинации вышеперечисленных расстояний (расстояния усреднённых  $L_1$  и  $L_\infty$  норм, Кумара-Джонсона, Танейя и др.).

Подобно амплитудному критерию сходства, можно ввести фазовый критерий, учитывающий расхождение не только амплитудных, но и фазовых характеристик регистрируемого сигнала относительно эталонного. В частности, подобный подход возможен и оправдан в системах с синхронным приёмом (квадратурные схемы регистрации), позволяющим получать информацию одновременно как об амплитуде, так и о фазе сигнала. Особенно актуален данный подход в системах, использующих голографический принцип регистрации ([3-5], [11], [33], [36-38], [52], [62], [76], [106]).

При этом критерий сходства оперирует над комплексными значениями, соответствующими аналитическому продолжению вещественного сигнала: сравниваются аргументы (фазы) или результаты их обработки. Будем условно в дальнейшем называть такой критерий "фазовым".

В отличие от амплитудных, количество фазовых критериев не столь велико, что, вероятно, связано с возрастающей сложностью описания. В частности, стоит отметить критерий "multilook" интерференционной фазы, использующийся в задачах классификации поляриметрических и интерферометрических геоинформационных измерений [97-98], интерференционной фазы в задачах фильтрации изображений поверхности Земли, полученных интерферометрическим радаром с синтезированной апертурой [59], [115].

Автором в работах [1-2], [19],[21], [25-26] предложен ещё один критерий – минимально-фазовый критерий, основанный на использовании интегральной разности фаз. Первые два критерия оперируют над временной выборкой сигнала в фиксированной точке регистрации (например, [97] и [115], соответствующие различным пролётам спутника над одной и той же территорией), а последний работает с пространственными отсчётами, соответствующими значениям регистрируемого сигнала различными антенными элементами (при использовании многоэлементной приёмной антенной системы) или различным пространственным положениям одного и того же антенного элемента (при использовании одноэлементной приёмной системы с последовательным перемещением приёмника). Для стационарных систем, таких как системы персонального и таможенного досмотра, подповерхностного зондирования и т.п., минимально-фазовый критерий является более актуальным.

### **1.3 Эталонный фазовый метод, использующий интегральную разность фаз.**

#### **Постановка задачи**

Поставим задачу оценки параметров объектов эталонным, наблюдаемым системой голографического радиовидения (СГРВ) эталонным фазовым методом (ЭФМ) с использованием минимально-фазового критерия.

Пусть заданы параметры аппаратной реализации системы голографического радиовидения:

- форма сигнала (как правило, ЛЧМ сигнал или гармонический сигнал дискретно перестраиваемой по линейному закону частоты);
- рабочая частота;
- полоса перестройки частоты;
- размер и тип апертуры (плоская прямоугольная или кольцевая антенная решётка, объёмные антенные решётки и др.);
- способ формирования зондирующего и опорного сигналов и регистрации поля, рассеянного объектом (синхронный или асинхронный);
- чувствительность СГРВ и способ обработки регистрируемого поля;
- амплитудно- и фазочастотная характеристики приёмо-передающего тракта;
- параметры используемых антенных элементов (диаграмма направленности, поляризационные характеристики и т.д.).

Пусть при стационарных определённых выше характеристиках СГРВ исследуемый объект облучается зондирующим сигналом с известными параметрами. Без потери общности предположим для удобства, что зондирующий сигнал – гармонический. тогда на некоторой

частоте радиоголограмма или поле, рассеянное объектом с параметром (или совокупностью параметров)  $R$ , в некоторой отсчётной точке на апертуре, характеризующейся направлением  $\alpha$ , имеет комплексную амплитуду  $\dot{i}(\alpha, R)$ .

Необходимо по зарегистрированным данным произвести оценку совокупности параметров, например, размеров рассеивателя, его формы, положения (координат) его электродинамических параметров.

В дальнейшем без потери общности будем рассматривать оценку одного из параметров.

Для ЭФМ, использующего интегральную разность фаз, ход решения выглядит следующим образом.

Пусть для определённости  $R$  – положительный постоянный неизвестный оцениваемый параметр, тогда  $\dot{i}(\alpha, R)$  – комплекснозначная функция вещественных переменных  $\alpha, R$ . Пусть функция  $\dot{i}(\alpha, R)$  дважды непрерывно дифференцируема по обоим переменным, что справедливо предположить, учитывая, что  $\dot{i}(\alpha, R)$  – есть угловое распределение напряжённости электрического или магнитного поля.

Пусть для наблюдения  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$  доступно  $N_{stat}$  реализаций  $\dot{i}(\alpha, R_{ob})$  при фиксированном значении параметра  $R = R_{ob}$ .

Для набора эталонных значений  $\{R_{et_i}\}_{i=1}^{N_{et}}$ , которые может принимать оцениваемый параметр, по правилу  $\dot{i}_{et_i}(\alpha) = \dot{i}(\alpha, R_{et_i})$  сформируем набор эталонных функций  $\{\dot{i}_{et_i}(\alpha)\}_{i=1}^{N_{et}}$ .

Сформируем величину  $\dot{\xi}_i(R_{ob})$ , описывающую связь между наблюдаемой реализацией и  $i$ -м эталоном по следующему правилу:

- если доступная для наблюдения реализация определена для любого  $\alpha$  из диапазона  $[\alpha_1, \alpha_2]$  (при непрерывной в пространстве реализации), то

$$\dot{\xi}_i(R_{ob}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dot{i}_{et_i}(\alpha) \cdot \dot{i}^*(\alpha, R_{ob}) d\alpha;$$

- если доступная для наблюдения реализация определена для конечного набора  $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N_\alpha}$  из диапазона  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , что обеспечивает дискретная в пространстве

регистрация при помощи антенной решётки, то

$$\dot{\xi}_{d_i}(R_{ob}) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \dot{u}_{et_i}(\alpha_j) \cdot \dot{u}^*(R_{ob}, \alpha_j).$$

Введём обозначение  $\varphi_i(R_{ob}) = \left| \arg \left\{ \dot{\xi}_{d_i}(R_{ob}) \right\} \right|$  или  $\varphi_i(R_{ob}) = \left| \arg \left\{ \dot{\xi}_{d_i}(R_{ob}) \right\} \right|$  (в зависимости от доступных данных).

В качестве оценки исследуемого параметра  $\hat{R}_{ob}$  выберем значение эталонного параметра  $R_{et}$ , минимизирующее значение  $\varphi_i(R_{ob})$ , т.е.:

$$\hat{R}_{ob} = \min_i \{ \varphi_i(R_{ob}) \}.$$

В общем случае можно рассмотреть два качественно отличающихся сценария:

1. формируемые эталоны  $\left\{ \dot{u}_{et_i}(\alpha) \right\}_{i=1}^{N_{et}}$  являются «идеальными», т.е. не подверженными шумам и помехам;
2. набор эталонов  $\left\{ \dot{u}_{et_i}(\alpha) \right\}_{i=1}^{N_{et}}$  формируется в присутствии шумов и/или помех.

Первый случай [1], [19], [21], [128-129], [136] реализуется в ситуациях, когда заранее известна аналитически строгая или приближённая электродинамическая модель исследуемого объекта. В этой ситуации набор эталонов формируется с использованием систем аналитического или численного решения задач электродинамики.

Второй случай реализуется в ситуациях, когда электродинамическая модель не доступна (например, в виду её чрезвычайной сложности) и набор эталонов формируется экспериментально [97-98].

Существует промежуточный вариант [115], когда производится предварительная обработка «зашумлённых» эталонов, уменьшающая влияние шумов, после чего они считаются «идеальными», т.е. за счёт использования предобработки второй сценарий переводится в первый.

Стоит также отметить, что второй сценарий является существенно более сложным как качественно, так и количественно. В этом случае приходится искать решение задачи определения вероятностно-статистических характеристик модуля аргумента скалярного произведения двух комплексных случайных векторов, что связано с необходимостью поиска распределения билинейных форм комплексного переменного. На данный момент общего решения задачи не существует. Некоторые результаты, полученные для случая гауссовского распределения векторов [112], к сожалению, не позволяют найти хоть сколько-нибудь

реализуемого алгоритма их использования или расширения результатов на более широкий класс случайных величин.

Однако возможность сведения второго сценария к первому позволяет провести законченный анализ. Поэтому в дальнейшем будем придерживаться именно этого сценария.

Предположим, что регистрация сигнала производится по квадратурной схеме, и пусть существует некоторая априорная информация об объекте, сужающая диапазон оценок неизвестных параметров.

Рассмотрим случай, когда поля регистрируются антенной системой из  $N_\alpha$  антенных элементов. Представим эталонное поле в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$\dot{u}_{etj}^i = a_{etj}^i + j b_{etj}^i, \quad (1.1)$$

а регистрируемое поле – в виде суммы поля, создаваемого «идеальным» рассеивателем, и шума:

$$\dot{u}_j(R) = \dot{u}_{obj}(R) + \dot{n}_j. \quad (1.2)$$

В качестве модели шума выберем модель комплексного аддитивного гауссовского шума. Используемая модель шума на данный момент является наиболее часто используемой в литературе ([3-4], [11], [21], [36], [38], [34], [52], [62], [115]):

$$\dot{n}_j = n_{sj} + j n_{cj}, \quad (1.3)$$

с вещественной частью  $n_{sj}$  и мнимой  $n_{cj}$ .

Подобным же представлением воспользуемся и для поля «идеального» рассеивателя:

$$u_{obj}(R) = a_{obj}(R) + j b_{obj}(R). \quad (1.4)$$

Тогда регистрируемое поле будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{u}_j(R) = \left[ a_{obj}(R) + n_{sj} \right] + j \left[ b_{obj}(R) + n_{cj} \right]. \quad (1.5)$$

Воспользовавшись принятыми обозначениями, получим выражение для скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dot{u}_{et}(\alpha, R_{et}^j) \cdot \dot{u}^*(\alpha, R) d\alpha &= \sum_{j=1}^{N_\alpha} \dot{u}_{etj}^i \cdot \dot{u}_{ij}^*(R) = \\ &= \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left( a_{etj}^i + j b_{etj}^i \right) \cdot \left( \left[ a_{obj}(R) + n_{sj} \right] + j \left[ b_{obj}(R) + n_{cj} \right] \right)^*. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Перегруппировывая слагаемые, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{N\alpha} \dot{u}_{etj}^i \cdot \dot{u}_{ij}^* (R) &= \sum_{j=1}^{N\alpha} \left( a_{etj}^i + j b_{etj}^i \right) \cdot \left( \left[ a_{obj} (R) + n_{s_j} \right] - j \left[ b_{obj} (R) + n_{c_j} \right] \right) = \\
 &= \sum_{j=1}^{N\alpha} \left( \left\{ a_{etj}^i \left[ a_{obj} (R) + n_{s_j} \right] + b_{etj}^i \left[ b_{obj} (R) + n_{c_j} \right] \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + j \left\{ b_{etj}^i \left[ a_{obj} (R) + n_{s_j} \right] - a_{etj}^i \left[ b_{obj} (R) + n_{c_j} \right] \right\} \right). \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

Выделяя вещественную и мнимую части подынтегрального выражения, получим:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left\{ \vec{u}_{et} (\alpha, \xi) \cdot \vec{u}^* (\alpha) \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{N\alpha} \dot{u}_{etj}^i \cdot \dot{u}_{ij}^* (R) \right\} = \sum_{j=1}^{N\alpha} \operatorname{Re} \left\{ \dot{u}_{etj}^i \cdot \dot{u}_{ij}^* (R) \right\} = \\
 &= \sum_{j=1}^{N\alpha} \left\{ a_{etj}^i \left[ a_{obj} (R) + n_{s_j} \right] + b_{etj}^i \left[ b_{obj} (R) + n_{c_j} \right] \right\}, \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \left\{ \vec{u}_{et} (\alpha, \xi) \cdot \vec{u}^* (\alpha) \right\} &= \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^{N\alpha} \dot{u}_{etj}^i \cdot \dot{u}_{ij}^* (R) \right\} = \sum_{j=1}^{N\alpha} \operatorname{Im} \left\{ \dot{u}_{etj}^i \cdot \dot{u}_{ij}^* (R) \right\} = \\
 &= \sum_{j=1}^{N\alpha} \left\{ b_{etj}^i \left[ a_{obj} (R) + n_{s_j} \right] - a_{etj}^i \left[ b_{obj} (R) + n_{c_j} \right] \right\}. \tag{1.9}
 \end{aligned}$$

Тогда выражение для критерия классификации будет выглядеть следующим образом:

$$\min_i \left| \arctan \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{N\alpha} \left\{ b_{etj}^i \left[ a_{obj} (R) + n_{s_j} \right] - a_{etj}^i \left[ b_{obj} (R) + n_{c_j} \right] \right\}}{\sum_{j=1}^{N\alpha} \left\{ a_{etj}^i \left[ a_{obj} (R) + n_{s_j} \right] + b_{etj}^i \left[ b_{obj} (R) + n_{c_j} \right] \right\}} \right\} \right|. \tag{1.10}$$

Для большей наглядности преобразуем подынтегральное выражение таким образом, чтобы выделить в нём отдельно слагаемые, зависящие от шумовой компоненты, и слагаемые, зависящие лишь от эталонного и «идеального» полей:

$$\min_i \left| \arctan \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{N\alpha} \left\{ b_{etj}^i a_{obj} (R) - a_{etj}^i b_{obj} (R) + b_{etj}^i n_{s_j} - a_{etj}^i n_{c_j} \right\}}{\sum_{j=1}^{N\alpha} \left\{ a_{etj}^i a_{obj} (R) + b_{etj}^i b_{obj} (R) + a_{etj}^i n_{s_j} + b_{etj}^i n_{c_j} \right\}} \right\} \right|, \tag{1.11}$$

или используя свойство линейности операции суммирования:

$$\min_i \left| \arctan \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{N\alpha} \{b_{et_j}^i a_{obj}(R) - a_{et_j}^i b_{obj}(R)\} + \sum_{j=1}^{N\alpha} \{b_{et_j}^i n_{s_j} - a_{et_j}^i n_{c_j}\}}{\sum_{j=1}^{N\alpha} \{a_{et_j}^i a_{obj}(R) + b_{et_j}^i b_{obj}(R)\} + \sum_{j=1}^{N\alpha} \{a_{et_j}^i n_{s_j} + b_{et_j}^i n_{c_j}\}} \right\} \right|. \quad (1.12)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$f_{1_j}^i(R) = b_{et_j}^i a_{obj}(R) - a_{et_j}^i b_{obj}(R), \quad (1.13)$$

$$f_{2_j}^i(R) = a_{et_j}^i a_{obj}(R) + b_{et_j}^i b_{obj}(R). \quad (1.14)$$

В новых обозначениях критерий классификации будет иметь вид:

$$\min_i \left| \arctan \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{N\alpha} f_{1_j}^i(R) + \sum_{j=1}^{N\alpha} \{b_{et_j}^i n_{s_j} - a_{et_j}^i n_{c_j}\}}{\sum_{j=1}^{N\alpha} f_{2_j}^i(R) + \sum_{j=1}^{N\alpha} \{a_{et_j}^i n_{s_j} + b_{et_j}^i n_{c_j}\}} \right\} \right|. \quad (1.15)$$

Основные показатели качества работы ЭФМ, основанного на интегральной разности фаз, будут напрямую определяться статистическими характеристиками величины  $\varphi_i$ , её оценкой, а также используемым набором эталонов  $\{\dot{u}_{et_i}(\alpha)\}_{i=1}^{Net}$ . При этом в процессе формирования эталонов  $\{\dot{u}_{et_i}(\alpha)\}_{i=1}^{Net}$  одной из наиболее важных задач является определение минимально возможного шага сетки эталонов (расстояния между ближайшими эталонами по оцениваемому параметру). Тут следует учесть такие факторы, как потенциальная разрешающая способность СГРВ по параметру (в отсутствие шумов), её снижение за счёт наличия шумов, требуемая вероятность правильного определения искомого параметра, существующие ограничения на объём выборки, диктуемые требуемым быстродействием и ресурсоёмкостью системы.

Следует также отметить, что характер  $\xi_i^{\dot{}}(R_{ob})$  будет напрямую определяться полем, рассеянным объектом, а значит, задаётся решением задачи дифракции на этом объекте. Так как аналитически строгое решение задачи дифракции существует лишь для очень ограниченного набора объектов, то и строго аналитического решения в общем случае исходная задача в такой постановке не имеет. Однако, при заданном (аналитически, численно или экспериментально) отображении оцениваемого параметра  $R_{ob}$  объекта в величину  $\varphi_i$  можно рассматривать данную задачу относительно этой величины  $\varphi_i$  (подразумевая, что существует некоторый способ обратного перехода к искомому параметру). Будем в дальнейшем придерживаться этого

подхода. Соответственно поставленная задача сводится к задаче исследования статистических характеристик интегральной разности фаз  $\varphi_i$ . При этом рассмотрение всех практически примеров будем производить, исходя из представлений того, что  $\varphi_i$  определяется для классических тестовых объектов радиоголографии [19-21], для которых существуют аналитические выражения для дифракционного поля, например, идеально проводящих круговых цилиндров (конечных и бесконечных) и бесконечных лент. Стоит оговориться, что разумно рассматривать задачу оценки параметров радиоголографических объектов с помощью СГРВ, работающей в миллиметровом диапазоне, который на данный момент считается наиболее перспективным. В этом случае характерные размеры объектов (оценка которых и будет проводиться) составляют от нескольких единиц до нескольких сотен длин волн. Для примера в Приложении А представлены графики перехода от оцениваемого параметра к величине  $\varphi_i$  для случая бесконечных лент произвольной ширины и круговых цилиндров конечной высоты. Для их построения было создано программное обеспечение, которое в соответствие с теорией, описанной в [46] и [47], генерирует дифракционное поле исследуемого объекта. В дальнейшем, проводя численный анализ, учитывающий конкретное значение интегральной разности фаз, будем подразумевать, что при известных зависимостях перехода ей будут соответствовать определённые размеры конкретных объектов.

Рассмотрим статистические характеристики предлагаемого критерия: функцию плотности вероятности, интегральную функцию распределения вероятности, моментные функции произвольного порядка (в том числе математическое ожидание и дисперсию).

#### 1.4 Функция плотности распределения вероятности интегральной разности фаз

Будем рассматривать комплексный аддитивный гауссов шум (1.3) с дисперсиями  $\sigma_{a_{sh}}^2$ ,  $\sigma_{b_{sh}}^2$  и математическими ожиданиями  $\mu_{a_{sh}}$ ,  $\mu_{b_{sh}}$  синфазной и квадратурной компонент. Как указывалось ранее ([1], [18-19],[21], [97-98], [128-129], [136]), данная модель является адекватной во многих практических ситуациях, иные же могут быть сведены к ней за счёт использования дополнительной предобработки.

Тогда функции условной плотности вероятности квадратурной и синфазной компонент скалярного произведения примут вид:

$$w_{y_i}(x | R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_i}^2}} e^{-\frac{(x - \mu_{y_i}(R))^2}{2\sigma_{y_i}^2}}, \quad (1.16)$$



$$w_{\bar{y}_i}(x | R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{y}_i}^2}} e^{-\frac{(x-\mu_{\bar{y}_i}(R))^2}{2\sigma_{\bar{y}_i}^2}}, \quad (1.17)$$

где математические ожидания квадратурной и синфазной компонент скалярного произведения выражаются как:

$$\mu_{y_i}(R) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \mu_{y_j}^i(R), \quad (1.18)$$

$$\mu_{\bar{y}_i}(R) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \mu_{\bar{y}_j}^i(R), \quad (1.19)$$

а  $\mu_{y_j}^i(R)$ ,  $\mu_{\bar{y}_j}^i(R)$  – математические ожидания квадратурной и синфазной компонент в  $j$ -ой точке на приёмной апертуре и определяется следующим образом:

$$\mu_{y_j}^i(R) = \mu_{b_{sh}} a_{et_j}^i - \mu_{a_{sh}} b_{et_j}^i + f_{1j}^i(R), \quad (1.20)$$

$$\mu_{\bar{y}_j}^i(R) = \mu_{a_{sh}} a_{et_j}^i + \mu_{b_{sh}} b_{et_j}^i + f_{2j}^i(R), \quad (1.21)$$

а  $f_{1j}^i(R)$ ,  $f_{2j}^i(R)$  – детерминированные компоненты квадратурной и синфазной составляющих в  $j$ -ой точке на приёмной апертуре, определяемые только полем рассеяния объекта и эталона в отсутствии шумов:

$$f_{1j}^i(R) = a_{et_j}^i b_{ob}(R) - b_{et_j}^i a_{ob}(R), \quad (1.22)$$

$$f_{2j}^i(R) = a_{et_j}^i a_{ob}(R) + b_{et_j}^i b_{ob}(R). \quad (1.23)$$

Дисперсии же квадратурной и синфазной компонент скалярного произведения определяются следующим образом:

$$\sigma_{y_i}^2 = \sum_{j=1}^{N_\alpha} (\sigma_{y_j}^j)^2, \quad (1.24)$$

$$\sigma_{\bar{y}_i}^2 = \sum_{j=1}^{N_\alpha} (\sigma_{\bar{y}_j}^j)^2, \quad (1.25)$$

где  $(\sigma_{y_j}^j)^2$ ,  $(\sigma_{\bar{y}_j}^j)^2$  – дисперсии квадратурной и синфазной компонент в  $j$ -ой точке на приёмной апертуре и определяется следующим образом:

$$\left(\sigma_{y_i}^j\right)^2 = \sigma_{b_{sh}}^2 \left(a_{et_j}^i\right)^2 + \sigma_{a_{sh}}^2 \left(b_{et_j}^i\right)^2, \quad (1.26)$$

$$\left(\sigma_{\tilde{y}_i}^j\right)^2 = \sigma_{a_{sh}}^2 \left(a_{et_j}^i\right)^2 + \sigma_{b_{sh}}^2 \left(b_{et_j}^i\right)^2. \quad (1.27)$$

В случае же, если математические ожидания шумовых воздействий, как в синфазном, так и в квадратурном канале для любого угла наблюдения равны нулю, а дисперсии одинаковы, т.е. когда

$$\mu_{a_{sh}} = \mu_{b_{sh}} = 0, \quad (1.28)$$

$$\sigma_{a_{sh}}^2 = \sigma_{b_{sh}}^2 = \sigma^2, \quad (1.29)$$

выражения (1.18) – (1.27) приводятся к виду:

$$\mu_{y_i}(R) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{1j}^i(R), \quad (1.30)$$

$$\mu_{\tilde{y}_i}(R) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{2j}^i(R), \quad (1.31)$$

$$\sigma_{y_i}^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left|u_{et_j}^i\right|^2, \quad (1.32)$$

$$\sigma_{\tilde{y}_i}^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left|u_{et_j}^i\right|^2. \quad (1.33)$$

Учитывая, что аргумент комплексного числа можно определить как арктангенс отношения мнимой части к вещественной, проведём поэтапные преобразования полученных выражений для функций условной плотности вероятности квадратурной и синфазной компонент (соответственно мнимой и вещественной частей скалярного произведения) для нахождения функции условной плотности вероятности интегрального набега фазы. Таким образом, если  $\xi_i = \frac{y_i}{\tilde{y}_i}$ , то:

$$w_{\xi_i}(z | R) = \frac{1}{2\pi \sigma_{y_i}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}| e^{-\frac{(\tilde{x} - \mu_{\tilde{y}_i}(R))^2}{2\sigma_{\tilde{y}_i}^2}} e^{-\frac{(z\tilde{x} - \mu_{y_i}(R))^2}{2\sigma_{y_i}^2}} d\tilde{x}. \quad (1.34)$$

Раскрывая выражение, стоящее в показателе экспоненты, и группируя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} (\tilde{x} - \mu_{\tilde{y}_i})^2 + (z\tilde{x} - \mu_{y_i})^2 &= \tilde{x}^2 + \mu_{\tilde{y}_i}^2(R) - 2\tilde{x}\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z^2\tilde{x}^2 + \mu_{y_i}^2(R) - 2z\tilde{x}\mu_{y_i}(R) = \\ &= \tilde{x}^2(1+z^2) - 2\tilde{x}(\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z\mu_{y_i}(R)) + (\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Для удобства записи введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} a_{2_i}(z, R) = \frac{(1+z^2)}{2\sigma_{y_i}^2}, \\ a_{1_i}(z, R) = \frac{(\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z\mu_{y_i}(R))}{2\sigma_{y_i}^2}, \\ a_{0_i}(z, R) = \frac{(\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R))}{2\sigma_{y_i}^2}. \end{cases} \quad (1.36)$$

Перепишем функцию плотности вероятности (1.34) в терминах новых обозначений:

$$w_{\xi_i}(z | R) = \frac{1}{2\pi\sigma_{y_i}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}| e^{-\left(a_{2_i}(z, R)\tilde{x}^2 - 2a_{1_i}(z, R)\tilde{x} + a_{0_i}(z, R)\right)} d\tilde{x}. \quad (1.37)$$

Проводя интегрирование в соответствии с [76], получим:

$$w_{\xi_i}(z | R) = \frac{1}{2\pi\sigma_{y_i}^2} \frac{e^{-a_{0_i}(z)}}{a_{2_i}} \left( 1 + \sqrt{\pi} e^{\frac{a_{1_i}^2(z)}{a_{2_i}(z)}} \frac{a_{1_i}(z)}{\sqrt{a_{2_i}(z)}} \operatorname{erf}\left(\frac{a_{1_i}(z)}{\sqrt{a_{2_i}(z)}}\right) \right). \quad (1.38)$$

Выразим коэффициенты через исходные математические ожидания и дисперсии синфазной и квадратурной компонент, а также выделим в явном виде зависимость от их отношения  $z$ :

$$\frac{a_{1_i}(z)}{\sqrt{a_{2_i}(z)}} = \frac{\frac{(\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z\mu_{y_i}(R))}{2\sigma_{y_i}^2}}{\sqrt{\frac{(1+z^2)}{2\sigma_{y_i}^2}}} = \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z\mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2}\sigma_{y_i}\sqrt{1+z^2}}. \quad (1.39)$$

Тогда полученная функция плотности вероятности отношения квадратурной и синфазной компонент интегрального фазового набег зарегистрированного комплексного распределения по апертуре поля, рассеянного объектом, относительно эталонного поля будет выглядеть следующим образом:

$$w_{\xi_i}(z | R) = \frac{e^{-\frac{(\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R))}{2\sigma_{y_i}^2}}}{\pi(1+z^2)} \left[ 1 + \sqrt{\pi} e^{\left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z\mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2}\sigma_{y_i}\sqrt{1+z^2}} \right)^2} \left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z\mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2}\sigma_{y_i}\sqrt{1+z^2}} \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erf} \left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + z\mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2}\sigma_{y_i}\sqrt{1+z^2}} \right) \right]. \quad (1.40)$$

Если учесть, что  $\varphi = |\arctan(\xi)|$ , а диапазон изменения аргумента определяется, как  $\varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ , то получим:

$$w_{\varphi_i}(u | R) = \frac{w_{\xi_i}(\operatorname{tg}(u)) + w_{\xi_i}(\operatorname{tg}(-u))}{\cos^2(u)}. \quad (1.41)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}{\sigma_{y_i}} = \rho_{\tilde{y}_i}(R), \\ \frac{\mu_{y_i}(R)}{\sigma_{y_i}} = \rho_{y_i}(R), \\ \rho_{\tilde{y}_i}^2(R) + \rho_{y_i}^2(R) = \rho_i^2(R). \end{cases} \quad (1.42)$$

Видно, что  $\rho_{\tilde{y}_i}(R)$ ,  $\rho_{y_i}(R)$ ,  $\rho_i^2(R)$  есть ни что иное, как величины обратные коэффициентам вариации квадратурной, синфазной компонент и модуля скалярного произведения соответственно.

Тогда выражение для функции условной плотности вероятности модуля аргумента скалярного произведения распределения по апертуре полей, рассеянных исследуемым объектом и эталонным, будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi_i}(u | R) = & \frac{e^{-\frac{\rho_i^2(R)}{2}}}{\pi} \left[ \sqrt{\pi} e^{\left( \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)| \right)^2} \left( \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)| \right) \times \right. \\
 & \times \operatorname{erf} \left( \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)| \right) + 2 + e^{\left( \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)| \right)^2} \times \\
 & \left. \times \left( \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)| \right) \operatorname{erf} \left( \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)| \right) \right]. \quad (1.43)
 \end{aligned}$$

Таким образом получено выражение для функции плотности вероятности интегральной разности фаз.

### 1.5 Асимптотическое поведение функции плотности вероятности интегральной разности фаз

Для дальнейшего упрощения записи введём безразмерные коэффициенты:

$$\tilde{a}_i^+(u, R) = \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)|, \quad (1.44)$$

$$\tilde{a}_i^-(u, R) = \frac{\rho_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \rho_{y_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)|, \quad (1.45)$$

В новых обозначениях полученная условная плотность вероятности будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi_i}(u | R) = & \frac{e^{-\frac{\rho_i^2(R)}{2}}}{\pi} \left[ 2 + \sqrt{\pi} e^{\left( \tilde{a}_i^+(u, R) \right)^2} \tilde{a}_i^+(u, R) \operatorname{erf} \left( \tilde{a}_i^+(u, R) \right) + e^{\left( \tilde{a}_i^-(u, R) \right)^2} \times \right. \\
 & \left. \times \left( \tilde{a}_i^-(u, R) \right) \operatorname{erf} \left( \tilde{a}_i^-(u, R) \right) \right]. \quad (1.46)
 \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение для удобства дальнейшего исследования. Для этого разобьём его на сумму отдельных слагаемых:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi_i}(u | R) = & \frac{e^{-\frac{\rho_i^2(R)}{2}}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\tilde{a}_i^+(u, R)}{\sqrt{\pi}} e^{-\left( \tilde{a}_i^+(u, R) \right)^2} \operatorname{erf} \left( \tilde{a}_i^+(u, R) \right) + e^{-\left( \tilde{a}_i^-(u, R) \right)^2} \times \\
 & \times \frac{\tilde{a}_i^-(u, R)}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf} \left( \tilde{a}_i^-(u, R) \right), \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

где преобразованный показатель экспоненты каждого из слагаемых будет иметь вид:

$$\hat{a}_i^+(u, R) = \frac{\rho_{y_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \rho_{\tilde{y}_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)|, \quad (1.48)$$

$$\hat{a}_i^-(u, R) = \frac{\rho_{y_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \rho_{\tilde{y}_i}(R)}{\sqrt{2}} |\cos(u)|, \quad (1.49)$$

или в сокращённой нотации:

$$w_{\varphi_i}(u | R) = I_{0_i}(u, R) + I_{1_i}(u, R) + I_{2_i}(u, R), \quad (1.50)$$

где:

$$I_{0_i}(u, R) = \frac{e^{-\frac{\rho_i^2(R)}{2}}}{\frac{\pi}{2}}, \quad (1.51)$$

$$I_{1_i}(u, R) = \frac{\tilde{a}_i^+(u, R)}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\tilde{a}_i^+(u, R)\right)^2} \operatorname{erf}\left(\tilde{a}_i^+(u, R)\right), \quad (1.52)$$

$$I_{2_i}(u, R) = \frac{\tilde{a}_i^-(u, R)}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\tilde{a}_i^-(u, R)\right)^2} \operatorname{erf}\left(\tilde{a}_i^-(u, R)\right). \quad (1.53)$$

Из физических соображений ясно, что в случае отсутствия шума (идеальная помеховая обстановка), модуль разности фаз становится детерминированной величиной. Математически это означает, что полученная функция условного распределения модуля аргумента в пределе при отношении сигнал/шум, стремящемся к бесконечности, должна переходить в дельта-функцию Дирака с аргументом, соответствующим истинной разности фаз.

Для подтверждения этого проследим следующие предельные переходы:

$$\lim_{\text{ОСШ} \rightarrow \infty} w_{\varphi_i}(u | R) = \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} w_{\varphi_i}(u | R) = \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \left( I_{0_i}(u, R) + I_{1_i}(u, R) + I_{2_i}(u, R) \right). \quad (1.54)$$

Они возможны при условии, что энергия поля объекта неизменна (параметры объекта фиксированы). Выполнение перехода (1.54) эквивалентно рассмотрению по отдельности трёх пределов:

$$\lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{0_i}(u, R), \quad (1.55)$$

$$\lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{1_i}(u, R), \quad (1.56)$$

$$\lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{2_i}(u, R). \quad (1.57)$$

Очевидно, что предел первого слагаемого будет равен нулю:

$$\lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{0_i}(u, R) = \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{\rho_i^2(R)}{2}}}{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{(\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \mu_{y_i}(R))^2}{2\sigma_{y_i}^2}}}{\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (1.58)$$

При анализе второго и третьего слагаемого удобно вернуться к исходным «физическим переменным»:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{1_i}(u, R) &= \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \frac{\tilde{a}_i^+(u, R)}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\tilde{a}_i^+(u, R)\right)^2} \operatorname{erf}\left(\tilde{a}_i^+(u, R)\right) = \\ &= \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_i}}} |\cos(u)| \right) e^{\left( \frac{\mu_{y_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R)}{\sqrt{2}\sigma_{y_i}} |\cos(u)| \right)^2} \times \\ &\quad \times \operatorname{erf}\left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_i}}} |\cos(u)| \right). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Учтём, что (см. например [56]):

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\phi^2}}}{2\sqrt{\pi\phi}} = \delta(x). \quad (1.60)$$

Если в выражении (1.59) обозначить:

$$\phi = \sigma_{y_i}, \quad (1.61)$$

$$x_1 = \sqrt{2} \left( \mu_{y_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R) \right) |\cos(u)|, \quad (1.62)$$

и учесть, что (см. [56])

$$\lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \operatorname{erf}\left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2\pi\sigma_{y_i}}} |\cos(u)| \right) = 1, \quad (1.63)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \sqrt{2} \left( \mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R) \right) |\cos(u)| \frac{e^{-\frac{x_i^2}{4\sigma_{y_i}^2}}}{2\sqrt{\pi}\sigma_{y_i}} \times \\ & \times \operatorname{erf} \left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_i}} |\cos(u)| \right) = \sqrt{2} \left( \mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R) \right) \times \\ & \times |\cos(u)| \delta \left( \sqrt{2} \left( \mu_{y_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R) \right) |\cos(u)| \right). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Воспользуемся свойством дельта-функции Дирака [50]:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x)|_{x=x_i}}, \quad x_i : g(x_i) \equiv 0. \quad (1.65)$$

Для преобразования выражения (1.64) необходимо найти корни уравнения

$$\sqrt{2} \left( \mu_{y_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R) \right) |\cos(u)| = 0, \quad (1.66)$$

или, что эквивалентно, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(u) = \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}, \\ |\cos(u)| = 0. \end{cases} \quad (1.67)$$

Учитывая, что  $u \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ , получим корни уравнения:

$$\begin{cases} u = \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right), \\ u = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (1.68)$$

$$g'(x) = - \left( \mu_{y_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R) \right) \sin(u) - \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}{\cos(u)}. \quad (1.69)$$

Тогда для первого корня будем иметь выражение:

$$\left| g'(u) \right|_{u=\frac{\pi}{2}} = \infty, \quad (1.70)$$



$$\frac{1}{|g'(u)|} \Big|_{u=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (1.71)$$

а для второго корня:

$$|g'(u)| \Big|_{u=\arctan\left(\frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}\right)} = -\sqrt{\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)}. \quad (1.72)$$

Подставляя полученные значения в (1.64), найдём асимптотическое выражение для (1.56):

$$\lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{1_i}(u, R) = -\frac{\sqrt{2} [\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)] \cos(u)}{\sqrt{\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)}} \delta \left( u - \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right) \right). \quad (1.73)$$

Проведём ту же самую процедуру для третьего слагаемого в (1.54):

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{2_i}(u, R) &= \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \frac{\tilde{a}_i^-(u, R)}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\tilde{a}_i^-(u, R)\right)^2} \operatorname{erf} \left( \tilde{a}_i^-(u, R) \right) = \\ &= \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_i}} \Big|_{\cos(u)} \right) e^{\left( \frac{\mu_{y_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R)}{\sqrt{2} \sigma_{y_i}} \Big|_{\cos(u)} \right)^2} \times \\ &\quad \times \operatorname{erf} \left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_i}} \Big|_{\cos(u)} \right). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Аналогичным образом введём обозначение:

$$x_2 = \sqrt{2} \left( \mu_{y_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R) \right) \Big|_{\cos(u)}. \quad (1.75)$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} \sqrt{2} \left( \mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R) \right) \Big|_{\cos(u)} \frac{e^{-\frac{x_2^2}{4\sigma_{y_i}^2}}}{2\sqrt{\pi} \sigma_{y_i}} \times \\ \times \operatorname{erf} \left( \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_i}} \Big|_{\cos(u)} \right) = \sqrt{2} \left( \mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R) \right) \times \\ \times \Big|_{\cos(u)} \delta \left( \sqrt{2} \left( \mu_{y_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{\tilde{y}_i}(R) \right) \Big|_{\cos(u)} \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Находя корни уравнения:

$$\sqrt{2}(\mu_{y_i}(R) + \operatorname{tg}(u)\mu_{\tilde{y}_i}(R))|\cos(u)| = 0, \quad (1.77)$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(u) = -\frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}, \\ |\cos(u)| = 0 \end{cases} \quad (1.78)$$

для значений аргумента  $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , получим:

$$\begin{cases} u = -\arctan\left(\frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}\right), \\ u = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (1.79)$$

$$g'(x) = -(\mu_{y_i}(R) + \operatorname{tg}(u)\mu_{\tilde{y}_i}(R))\sin(u) + \frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}{\cos(u)}. \quad (1.80)$$

Для первого корня имеем:

$$\left|g'(u)\right|_{u=\frac{\pi}{2}} = \infty, \quad (1.81)$$

$$\frac{1}{\left|g'(u)\right|_{u=\frac{\pi}{2}}} = 0. \quad (1.82)$$

Для второго корня:

$$\left|g'(u)\right|_{u=-\arctan\left(\frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}\right)} = \sqrt{\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)}. \quad (1.83)$$

Тогда асимптотика  $I_{1_i}(u, R)$  будет иметь вид:

$$\lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} I_{1_i}(u, R) = \frac{\sqrt{2}[\mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u)\mu_{y_i}(R)]\cos(u)}{\sqrt{\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)}} \delta\left(u + \arctan\left(\frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}\right)\right). \quad (1.84)$$

Окончательно для функции условной плотности распределения вероятности модуля аргумента скалярного произведения (1.50) получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} w_{\varphi_i}(u | R) &= \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} (I_{0_i}(u, R) + I_{1_i}(u, R) + I_{2_i}(u, R)) = \\ &= -\frac{\sqrt{2} [\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)] \cos(u)}{\sqrt{\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)}} \delta \left( u - \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right) \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{2} [\mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)] \cos(u)}{\sqrt{\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)}} \delta \left( u + \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.85)$$

Приводя подобные слагаемые и упрощая, выражение (1.85) можно записать как:

$$\begin{aligned} w_{\varphi_i}^{as}(u | R) &= \lim_{\sigma_{y_i} \rightarrow 0} w_{\varphi_i}(u | R) = \frac{\sqrt{2} \cos(u)}{\sqrt{\mu_{\tilde{y}_i}^2(R) + \mu_{y_i}^2(R)}} \left( \delta \left( u + \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right) \right) \times \right. \\ &\times [\mu_{\tilde{y}_i}(R) - \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)] - \delta \left( u - \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right) \right) \times \\ &\left. \times [\mu_{\tilde{y}_i}(R) + \operatorname{tg}(u) \mu_{y_i}(R)] \right). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Таким образом, полученное предельным переходом выражение представляет собой дельта-распределение.

Найдём математическое ожидание асимптотического распределения (1.86):

$$E[\varphi_i^{as}(R)] = E[\varphi_i(R)] \Big|_{SNR \rightarrow \infty} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u w_{\varphi_i}^{as}(u | R) du. \quad (1.87)$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции имеем:

$$\begin{aligned} E[\varphi_i^{as}(R)] &= - \left[ \theta \left( \pi - 2 \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right), \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right) \right) + \right. \\ &\left. + \theta \left( -\arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right), \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\mu_{y_i}(R)}{\mu_{\tilde{y}_i}(R)} \right)}{\operatorname{sgn}(\mu_{\tilde{y}_i}(R))}, \end{aligned} \quad (1.88)$$

где  $\theta(\cdot)$  – функция единичного скачка Хэвисайда.

Из физических соображений понятно, что при отсутствии шума в случае совпадения оцениваемого параметра выбранного  $i$ -ого эталона со значением параметра эталона,

ассоциируемого с объектом, их фазы должны совпадать, а следовательно, среднее значение  $E[\varphi_i^{as}(R)]$  должно обращаться в ноль. При этом необходимо учесть, что:

$$R_i = R_{etob} \Rightarrow \mu_{y_i}(R) = 0. \quad (1.89)$$

Действительно, при подстановке (1.89) в (1.88) получим:

$$E[\varphi_i^{as}(R)] \Big|_{\mu_{y_i}(R)=0} = 0, \quad (1.90)$$

что полностью согласуется с исходными теоретическими положениями.

## 1.6 Выводы

1. В данной главе проведён обзор критериев, используемых в эталонных методах определения параметров в радиофизических, в том числе радиоголографических задачах.
2. Рассмотрены этапы ЭФМ оценки параметров радиоголографических объектов, использующего в качестве критерия сходства предложенную автором величину интегральной разности фаз.
3. Выделены две ключевые задачи, решение которых необходимо для успешной реализации ЭФМ оценки параметров радиоголографических объектов с использованием интегральной разности фаз:
  - определение статистических характеристик интегральной разности фаз;
  - определение процедуры оценивания интегральной разности фаз и вероятностно-статистических характеристик;
  - определение минимального шага сетки эталонов.
4. Поставлена задача определения статистических характеристик интегральной разности фаз. Получено теоретически строгое выражение для функции плотности вероятности и проведено исследование его асимптотического поведения.

## Глава 2 Вероятностные характеристики интегральной разности фаз для эталонного метода оценки параметров радиоголографических объектов

### 2.1 Представление функции плотности вероятности интегральной разности фаз в полярной системе координат

Для удобства дальнейшего анализа перейдём к новым переменным по следующим формулам:

$$\begin{cases} \rho_{\tilde{y}_i}(R) = \rho_i(R) \cos(\psi_i(R)), \\ \rho_{y_i}(R) = \rho_i(R) \sin(\psi_i(R)). \end{cases} \quad (2.1)$$

Ясно, что  $\rho_i(R)$  и  $\psi_i(R)$  есть ни что иное как модуль и фаза истинного аргумента скалярного произведения:

$$\rho_i^2(R) = \rho_{\tilde{y}_i}^2(R) + \rho_{y_i}^2(R), \quad (2.2)$$

$$\psi_i(R) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\rho_{y_i}(R)}{\rho_{\tilde{y}_i}(R)}\right), & \rho_{y_i}(R) > 0, \rho_{\tilde{y}_i}(R) > 0, \\ \pi - \arctan\left(\frac{\rho_{y_i}(R)}{\rho_{\tilde{y}_i}(R)}\right), & \rho_{y_i}(R) > 0, \rho_{\tilde{y}_i}(R) < 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{\rho_{y_i}(R)}{\rho_{\tilde{y}_i}(R)}\right), & \rho_{y_i}(R) < 0, \rho_{\tilde{y}_i}(R) < 0, \\ 2\pi - \arctan\left(\frac{\rho_{y_i}(R)}{\rho_{\tilde{y}_i}(R)}\right), & \rho_{y_i}(R) < 0, \rho_{\tilde{y}_i}(R) > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Тогда, учитывая используемые обозначения, получим:

$$\rho_i^2(R) = \left(\frac{\mu_{\tilde{y}_i}(R)}{\sigma_{y_i}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{y_i}(R)}{\sigma_{y_i}}\right)^2. \quad (2.4)$$

Подставим в (2.4) выражения для математического ожидания синфазной и квадратурной компонент:

$$\rho_i^2(R) = \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{1j}^i(R)}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{etj}^i|^2}} \right)^2 + \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{2j}^i(R)}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{etj}^i|^2}} \right)^2. \quad (2.5)$$

Домножим числитель и знаменатель на мощность сигнала от объекта в отсутствие шумов:

$$\rho_i^2(R) = \frac{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{obj}(R)|^2}{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{obj}(R)|^2} \left\{ \frac{\left( \frac{\sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{1j}^i(R)}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{etj}^i|^2}} \right)^2 + \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{2j}^i(R)}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{etj}^i|^2}} \right)^2}{1} \right\}. \quad (2.6)$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\rho_i^2(R) = \frac{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{obj}(R)|^2}{\sigma^2} \left\{ \frac{\left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{1j}^i(R) \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{2j}^i(R) \right)^2}{\left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{etj}^i|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{obj}(R)|^2 \right)} \right\}. \quad (2.7)$$

Можно заметить, что величина, стоящая перед фигурной скобкой, по своему физическому смыслу есть отношение сигнал/шум. Введём для него следующее обозначение:

$$q^2(R) = \frac{\sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{obj}(R)|^2}{\sigma^2}. \quad (2.8)$$

А величина в фигурных скобках есть безразмерный множитель, учитывающий как параметры исследуемого объекта, так и номер выбранного для сравнения эталона:

$$\eta_i^2(R) = \frac{\left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{1j}^i(R) \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} f_{2j}^i(R) \right)^2}{\left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{etj}^i|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{N_\alpha} |u_{obj}(R)|^2 \right)}. \quad (2.9)$$

Или, записывая выражение (2.9) в терминах энергий векторов распределения полей исследуемого и эталонного объектов по антенной решётке:

$$\eta_i^2(R) = \frac{\| (u_{et}^i, u_{ob}(R)) \|^2}{\| u_{et}^i \|^2 \| u_{ob}(R) \|^2} \quad (2.10)$$

В ведённых обозначениях квадрат модуля скалярного произведения будет иметь следующий вид:

$$\rho_i^2(R) = q^2(R) \eta_i^2(R). \quad (2.11)$$

Тогда с учётом вышеописанных замен выражения для коэффициентов (1.44) – (1.45), (1.48) – (1.49) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^+(u, R) &= \frac{\rho_i(R) \sin(\psi_i(R)) - \operatorname{tg}(u) \rho_i(R) \cos(\psi_i(R))}{\sqrt{2}} \cos(u) = \\ &= \frac{\rho_i(R) \sin(\psi_i(R)) \cos(u) - \rho_i(R) \cos(\psi_i(R)) \sin(u)}{\sqrt{2}} = (2.12) \\ &= \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \sin(\psi_i(R) - u) = -\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \sin(u - \psi_i(R)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^-(u, R) &= \frac{\rho_i(R) \sin(\psi_i(R)) + \operatorname{tg}(u) \rho_i(R) \cos(\psi_i(R))}{\sqrt{2}} \cos(u) = \\ &= \frac{\rho_i(R) \sin(\psi_i(R)) \cos(u) + \rho_i(R) \cos(\psi_i(R)) \sin(u)}{\sqrt{2}} = (2.13) \\ &= \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \sin(\psi_i(R) + u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i^+(u, R) &= \frac{\rho_i(R) \cos(\psi_i(R)) + \operatorname{tg}(u) \rho_i(R) \sin(\psi_i(R))}{\sqrt{2}} \cos(u) = \\ &= \frac{\rho_i(R) \cos(\psi_i(R)) \cos(u) + \rho_i(R) \sin(\psi_i(R)) \sin(u)}{\sqrt{2}} = (2.14) \\ &= \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u - \psi_i(R)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_i^-(u, R) &= \frac{\rho_i(R) \cos(\psi_i(R)) - \operatorname{tg}(u) \rho_i(R) \sin(\psi_i(R))}{\sqrt{2}} \cos(u) = \\
 &= \frac{\rho_i(R) \cos(\psi_i(R)) \cos(u) - \rho_i(R) \sin(\psi_i(R)) \sin(u)}{\sqrt{2}} = (2.15) \\
 &= \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u + \psi_i(R)).
 \end{aligned}$$

При этом выражение для условной плотности вероятности (1.47) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi_i}(u | R) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u - \psi_i(R)) e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)(1 - \cos^2(u - \psi_i(R)))} \times \\
 &\times \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u - \psi_i(R))\right) + \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u + \psi_i(R)) \times (2.16) \\
 &\times e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)(1 - \cos^2(u + \psi_i(R)))} \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u + \psi_i(R))\right).
 \end{aligned}$$

Вынося во втором и третьем слагаемых экспоненциальный множитель, дающий основной вклад в выражение при больших отношениях сигнал/шум, получим:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi_i}(u | R) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)}}{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)} \left[ \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u - \psi_i(R)) e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)\cos^2(u - \psi_i(R))} \times \right. \\
 &\times \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u - \psi_i(R))\right) + \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u + \psi_i(R)) \times (2.17) \\
 &\left. \times e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)\cos^2(u + \psi_i(R))} \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u + \psi_i(R))\right) \right].
 \end{aligned}$$

Полученное выражение достаточно наглядно и легко анализируемо, однако с точки зрения практики использования (получение моментных функций, функции распределения, характеристических функций и т.д.) практически не применимо. Это связано с тем, что интегральные преобразования, вычисляемые с привлечением выражения (2.17), например, при оценке моментов распределении, не могут быть вычислены аналитически. В связи с этим необходимо получить представление выражения (2.17) через некоторые более удобные для дальнейших аналитических преобразований функции, в частности, представить (2.17) в виде разложения в ряд по некоторым классическим базисным функциям.



На практике в подобных ситуациях чаще всего используются разложения в ряды Фурье ([42], [43]) в связи с их хорошей аналитической проработанностью, ряды Эджворта [42] в связи с удобством представления исследуемой функции по модам нормального распределения и т.д.

Однако, как оказывается, ни разложение в ряд Фурье (Фурье-Бесселя), ни в ряд Эджворта, ни в ряды Шлёмилха, ни разложения по полиномам Чебышёва невозможны: интегралы, входящие в выражения для коэффициентов разложения, оказываются расходящимися.

Для получения разложения (2.17) в сходящийся ряд, удобный для проведения дальнейших аналитических преобразований, предлагается провести следующую процедуру.

Используя представление для функции ошибок через гипергеометрическую функцию и спадающую экспоненту [50], получим:

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\cos(u \pm \psi_i(R))\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u \pm \psi_i(R)) e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)\cos^2(u \pm \psi_i(R))} \times \\ \times {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\cos(u \pm \psi_i(R))\right)^2\right). \quad (2.18)$$

Подставляя это выражение в исходную функцию условной плотности вероятности, имеем:

$$w_{\varphi_i}(u | R) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)}}{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)} \left[ \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u - \psi_i(R)) e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)\cos^2(u - \psi_i(R))} \times \right. \\ \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)\cos^2(u - \psi_i(R))} {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\cos(u - \psi_i(R))\right)^2\right) \times \\ \times \cos(u - \psi_i(R)) + \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2\pi}} \cos(u + \psi_i(R)) e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)\cos^2(u + \psi_i(R))} \times \quad (2.19) \\ \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u + \psi_i(R)) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\cos(u + \psi_i(R))\right)^2\right) \times \\ \left. \times e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)\cos^2(u + \psi_i(R))} \right].$$

где  ${}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, \square\right)$  – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера первого рода [49].

Преобразовывая полученное выражение, имеем:

$$w_{\varphi_i}(u | R) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i^2(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left[ {}_1F_1 \left( 1, \frac{3}{2}, \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u + \psi_i(R)) \right)^2 \right) \times \right. \\ \times \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u + \psi_i(R)) \right)^2 + {}_1F_1 \left( 1, \frac{3}{2}, \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u - \psi_i(R)) \right)^2 \right) \times \\ \left. \times \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \cos(u - \psi_i(R)) \right)^2 \right]. \quad (2.20)$$

Для сокращения записи введём размерные переменные, по смыслу соответствующие действующему значению модуля скалярного произведения в отсутствие шумов и мгновенному значению аргумента разности фаз:

$$\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} = a, \quad (2.21) \\ u \pm \psi_i(R) = v^\pm(u).$$

Тогда (2.20) запишется в виде:

$$w_\varphi(u | R) = \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} \left[ {}_1F_1 \left( 1, \frac{3}{2}, a^2 \cos^2(v^+(u)) \right) a^2 \cos^2(v^+(u)) + \right. \\ \left. + {}_1F_1 a^2 \cos^2(v^-(u)) a^2 \cos^2(v^-(u)) \right]. \quad (2.22)$$

Воспользуемся интегральным представлением вырожденной гипергеометрической функции [55]:

$${}_1F_1(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt, \quad (2.23)$$

которое возможно при условии, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[b] > \operatorname{Re}[a], \\ \operatorname{Re}[a] > 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

где  $\Gamma(b)$  – гамма функция Эйлера [50].

Тогда:

$$\begin{aligned}
 {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, a^2 \cos^2(v^\pm(u))\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)} \int_0^1 e^{a^2 \cos^2(v^\pm(u))t} t^{1-1} (1-t)^{\frac{3}{2}-1-1} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{a^2 \cos^2(v^\pm(u))t}}{\sqrt{1-t}} dt.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Перепишем выражение для условной плотности вероятности  $w_\varphi(u | R)$ :

$$\begin{aligned}
 w_\varphi(u | R) &= \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{a^2 \cos^2(v^+(u))}{2} \int_0^1 \frac{e^{a^2 \cos^2(v^+(u))t}}{\sqrt{1-t}} dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a^2 \cos^2(v^-(u))}{2} \int_0^1 \frac{e^{a^2 \cos^2(v^-(u))t}}{\sqrt{1-t}} dt \right]
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Перегруппировав слагаемые и преобразовывая тригонометрические функции в показателях экспонент, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 w_\varphi(u | R) &= \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \left[ \cos^2(v^+(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}} e^{\frac{a^2 t}{2} \cos(2v^+(u))}}{\sqrt{1-t}} dt + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \cos^2(v^-(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}} e^{\frac{a^2 t}{2} \cos(2v^-(u))}}{\sqrt{1-t}} dt \right] \right].
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Воспользуемся разложением экспоненциальной функции с вещественным показателем по бесселевым функциям [84]:

$$e^{\lambda \cos(x)} = I_0(\lambda) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\lambda) \cos(nx), \tag{2.28}$$

где  $I_n(\lambda)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода  $n$  – ого порядка.

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi}(u | R) = & \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \left[ \cos^2(v^+(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}}}{\sqrt{1-t}} \left\{ I_0\left(\frac{a^2 t}{2}\right) + \right. \right. \\
 & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(\frac{a^2 t}{2}\right) \cos(2n v^+(u)) \left. \right\} + \cos^2(v^-(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}}}{\sqrt{1-t}} \left\{ I_0\left(\frac{a^2 t}{2}\right) + \right. \\
 & \left. \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(\frac{a^2 t}{2}\right) \cos(2n v^-(u)) \right\} \right]. \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Используя линейность операций суммирования и интегрирования, преобразуем выражение к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi}(u | R) = & \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \left[ \cos^2(v^+(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}}}{\sqrt{1-t}} I_0\left(\frac{a^2 t}{2}\right) dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(v^+(u)) \times \right. \\
 & \times \cos(2n v^+(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}}}{\sqrt{1-t}} I_n\left(\frac{a^2 t}{2}\right) dt + \cos^2(v^-(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}}}{\sqrt{1-t}} I_0\left(\frac{a^2 t}{2}\right) dt + \\
 & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(v^-(u)) \cos(2n v^-(u)) \int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}}}{\sqrt{1-t}} I_n\left(\frac{a^2 t}{2}\right) dt \right]. \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

Выделим отдельно получившиеся интегралы:

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{a^2 t}{2}}}{\sqrt{1-t}} I_0\left(\frac{a^2 t}{2}\right) dt = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(a)}{a}, \quad (2.31)$$

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{at}{2}}}{\sqrt{1-t}} I_n\left(\frac{at}{2}\right) dt = \frac{\sqrt{\pi} (a^2)^n {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1, n + \frac{3}{2}, 2n + 1, a^2\right)}{4^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}, \quad (2.32)$$

где  $\operatorname{erfi}(\square)$  – комплексная функция ошибок,  ${}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1, n + \frac{3}{2}, 2n + 1, a^2\right)$  –

обобщённая гипергеометрическая функция. При этом важно учесть, что в случае предельного перехода при  $n \rightarrow 0$  выражение (2.32) должно переходить в (2.31).

Действительно, можно убедиться, что:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi} (a^2)^n {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1, n + \frac{3}{2}, 2n + 1, a^2\right)}{4^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(a)}{a}. \quad (2.33)$$

Тогда преобразованная условная плотность распределения вероятности модуля аргумента разности фаз примет вид:

$$\begin{aligned} w_\varphi(u | R) = & \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \left[ \cos^2(v^+(u)) \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(a)}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(v^+(u)) \times \right. \\ & \times \cos(2nv^+(u)) \frac{\sqrt{\pi} (a^2)^n {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1, n + \frac{3}{2}, 2n + 1, a^2\right)}{4^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} + \\ & + \cos^2(v^-(u)) \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(a)}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(v^-(u)) \cos(2nv^-(u)) \times \\ & \left. \times \frac{\sqrt{\pi} (a^2)^n {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1, n + \frac{3}{2}, 2n + 1, a^2\right)}{4^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \right] \quad (2.34) \end{aligned}$$

Группируя слагаемые для большей наглядности, перепишем её в виде:

$$\begin{aligned} w_\varphi(u | R) = & \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-a^2}}{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(a)}{a} (\cos^2(v^+(u)) + \cos^2(v^-(u))) + \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2(v^+(u)) \cos(2nv^+(u)) + \cos^2(v^-(u)) \cos(2nv^-(u))) \times \\ & \left. \times \frac{\sqrt{\pi} (a^2)^n {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1, n + \frac{3}{2}, 2n + 1, a^2\right)}{4^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \right] \quad (2.35) \end{aligned}$$

Для анализа полученного выражения вернёмся к исходным переменным:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi_i}(u | R) = & \frac{e^{-\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}} \times \right. \\
 & \times \left( \cos^2(u + \psi_i(R)) + \cos^2(u - \psi_i(R)) \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^n}{4^n} \times \\
 & \times \left\{ \cos^2(u - \psi_i(R)) \cos(2n(u - \psi_i(R))) + \cos^2(u + \psi_i(R)) \times \right. \\
 & \left. \times \cos(2n(u + \psi_i(R))) \right\} \frac{{}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1, n + \frac{3}{2}, 2n + 1, \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \left. \right] \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Выделяя общую для всех слагаемых спадающую экспоненциальную огибающую, определяющую поведение функции распределения при больших отношениях сигнал/шум, имеем:

$$\begin{aligned}
 w_{\varphi_i}(u | R) = & \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{2\rho_i(R)}{\sqrt{2}}} \times \right. \\
 & \times \left\{ \cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R)) \right\} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \\
 & \times 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times \quad (2.37) \\
 & \times \left\{ \cos^2(u - \psi_i(R)) \cos^2(2n(u - \psi_i(R))) + \right. \\
 & \left. + \cos^2(u + \psi_i(R)) \cos^2(2n(u + \psi_i(R))) \right\} \left. \right].
 \end{aligned}$$

При проведении анализа полученного выражения отметим следующие моменты. Выражение (2.37) представляет собой разложение в ряд по гармоническим функциям, что с практической точки зрения является достаточно удобным – позволяет использовать стандартные алгоритмы и библиотеки при необходимости использования цифровых

сигнальных процессоров). При этом важно отметить, что базисные функции в данном случае зависят только от истинного модуля аргумента скалярного произведения, а коэффициенты разложения зависят от отношения сигнал/шум на входе системы. Также стоит отметить, что полученная плотность вероятности унимодальна, т.е. является достаточно удобной и для проведения при необходимости оценки параметров классическими методами оценки параметров ([8 – 10], [42 – 43], [45], [48]).

## 2.2 Функция распределения и моментные функции произвольного порядка интегральной разности фаз

Для дальнейшего анализа статистических характеристик предлагаемого метода получим выражения для функции распределения и моментных функций, в частности, математического ожидания и дисперсии интегральной разности фаз.

Для функции распределения имеем:

$$F_{\varphi_i}(x) = \int_{-\infty}^x w_{\varphi_i}(u | R) du. \quad (2.38)$$

При условии, что  $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , можно изменить пределы интегрирования:

$$F_{\varphi_i}(x) = \int_0^x w_{\varphi_i}(u | R) du. \quad (2.39)$$

Тогда воспользовавшись полученным выражение для условный плотности вероятности модуля аргумента скалярного произведения для (2.39) получим:

$$\begin{aligned}
 F_{\varphi_i}(x) = & \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^x du + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{2\rho_i(R)\sqrt{2}} \times \right. \\
 & \times \int_0^x (\cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R))) du + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \\
 & \times 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{\rho_i(R)}{8}\right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times (2.40) \\
 & \times \int_0^x (\cos^2(u - \psi_i(R)) \cos^2(2n(u - \psi_i(R))) + \\
 & \quad \left. + \cos^2(u + \psi_i(R)) \cos^2(2n(u + \psi_i(R)))) du \right).
 \end{aligned}$$

С учётом вводимых ранее замен (2.21) пределы интегрирования преобразуются к следующему виду:

$$\begin{bmatrix} u_g = x \\ u_n = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v_g^{\pm} = x \pm \psi_i(R) \\ v_n^{\pm} = \pm \psi_i(R) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

При этом функция распределения модуля интегрального фазового набег зарегистрированного комплексного распределения по апертуре поля, рассеянного объектом, относительно эталонного поля будет иметь следующий вид:



$$\begin{aligned}
 F_{\varphi_i}(x) = & \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^x du + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{2\rho_i(R)\sqrt{2}} \times \right. \\
 & \times \int_{v_H^-}^{v_6^-} \cos^2(v^-(u)) du + \int_{v_H^+}^{v_6^+} \cos^2(v^+(u)) du + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \\
 & \times 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{\rho_i(R)}{8}\right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times \\
 & \times \int_{v_H^-}^{v_6^-} \cos^2(v^-(u)) \cos^2(2n(v^-(u))) du + \\
 & \left. + \int_{v_H^+}^{v_6^+} \cos^2(v^+(u)) \cos^2(2n(v^+(u))) du \right), \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Интегралы, стоящие в выражении для  $F_{\varphi_i}(x)$ , имеют следующие значения:

$$\int_{v_H^-}^{v_6^-} \cos^2(v^-(u)) du = \frac{\sin(2(x - \psi_i(R))) + \sin(2\psi_i(R)) + 2x}{4}, \quad (2.43)$$

$$\int_{v_H^+}^{v_6^+} \cos^2(v^+(u)) du = \frac{\sin(2(x + \psi_i(R))) - \sin(2\psi_i(R)) + 2x}{4}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{v_H^-}^{v_6^-} \cos^2(v^-(u)) \cos^2(2n(v^-(u))) du = & \frac{1}{4} \left( \frac{\sin((n-2)(x - \psi_i(R)))}{n-2} + \right. \\
 & + \frac{\sin((n-2)\psi_i(R))}{n-2} + 2 \frac{\sin(n(x - \psi_i(R))) + \sin(n\psi_i(R))}{n} + \\
 & \left. + \frac{\sin((n+2)(x - \psi_i(R))) + \sin((n+2)\psi_i(R))}{n+2} \right), \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

$$\int_{v_H^+}^{v_G^+} \cos^2(v^+(u)) \cos^2(2n(v^+(u))) du = \frac{1}{4} \left( \frac{\sin((n-2)(x+\psi_i(R)))}{n-2} - \frac{\sin((n-2)\psi_i(R))}{n-2} + 2 \frac{\sin(n(x+\psi_i(R))) - \sin(n\psi_i(R))}{n} + \frac{\sin((n+2)(x+\psi_i(R))) - \sin((n+2)\psi_i(R))}{n+2} \right), \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} F_{\varphi_i}(x) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( x + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{2\rho_i(R)} \times \right. \\ &\quad \times \frac{\sin(2(x-\psi_i(R))) + \sin(2\psi_i(R)) + 2x}{4} + \frac{\sin(2(x+\psi_i(R)))}{4} \\ &\quad - \frac{\sin(2\psi_i(R)) - 2x}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{\rho_i(R)^2}{8}\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \times \\ &\quad \times {}_2F_2\left(n+\frac{1}{2}, n+1; n+\frac{3}{2}, 2n+1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{4} \left( \frac{\sin((n-2)(x-\psi_i(R))) + \sin((n-2)\psi_i(R))}{n-2} + \right. \\ &\quad + \frac{\sin((n-2)(x+\psi_i(R))) - \sin((n-2)\psi_i(R))}{n-2} + \\ &\quad + 2 \frac{\sin(n(x-\psi_i(R))) + \sin(n\psi_i(R)) + \sin(n(x+\psi_i(R))) - \sin(n\psi_i(R))}{n} + \\ &\quad + \frac{\sin((n+2)(x-\psi_i(R))) + \sin((n+2)\psi_i(R))}{n+2} + \\ &\quad \left. + \frac{\sin((n+2)(x+\psi_i(R))) - \sin((n+2)\psi_i(R))}{n+2} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Выражения для моментных функций произвольного порядка имеют в самом общем случае вид:

$$M_k[\varphi_i(R)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k w_{\varphi_i}(u) du, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} M_k[\varphi_i(R)] = & \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{2\rho_i(R)}{\sqrt{2}}} \times \right. \\ & \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k (\cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R))) du + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \\ & \times 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{\rho_i(R)^2}{8}\right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times \\ & \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k (\cos^2(u - \psi_i(R)) \cos^2(2n(u - \psi_i(R))) + \\ & \left. + \cos^2(u + \psi_i(R)) \cos^2(2n(u + \psi_i(R)))) du \right). \quad (2.49) \end{aligned}$$

Сначала преобразуем интегральный множитель в третьем слагаемом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k (\cos^2(u - \psi) \cos^2(2n(u - \psi)) + \cos^2(u + \psi) \cos^2(2n(u + \psi))) du. \quad (2.50)$$

Упростим подынтегральное выражение с использованием тригонометрических преобразований произведения тригонометрических функций и формул понижения степени:

$$\begin{aligned} \cos^2(u + \psi) \cos^2(2n(u + \psi)) &= \cos^2(u + \psi) (2 \cos(n(u + \psi)) - 1) = \\ &= 2 (\cos(u + \psi) \cos(n(u + \psi)))^2 - \cos^2(u + \psi) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos((n+1)(u + \psi)) + \cos((n-1)(u + \psi)))^2 - \cos^2(u + \psi) = \quad (2.51) \\ &= \frac{1}{4} (\cos(2(n+1)(u + \psi)) + 2 \cos(2n(u + \psi)) + \cos(2(n-1)(u + \psi))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos^2(u - \psi) \cos^2(2n(u - \psi)) &= \cos^2(u - \psi) (2 \cos(n(u - \psi)) - 1) = \\
 &= 2 (\cos(u - \psi) \cos(n(u - \psi)))^2 - \cos^2(u - \psi) = \\
 &= \frac{1}{2} (\cos((n+1)(u - \psi)) + \cos((n-1)(u - \psi)))^2 - \cos^2(u - \psi) = \quad (2.52) \\
 &= \frac{1}{4} (\cos(2(n+1)(u - \psi)) + 2 \cos(2n(u - \psi)) + \cos(2(n-1)(u - \psi))).
 \end{aligned}$$

Для сокращения записи введём два трехэлементных вектора коэффициентов:

$$\varepsilon_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ n+1 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Тогда выражение (2.50) может быть записано в виде:

$$\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_3} \varepsilon_\alpha (\cos(2\alpha(u - \psi)) + \cos(2\alpha(u + \psi))) du. \quad (2.55)$$

Воспользуемся представлением тригонометрических функций через функции Бесселя первого рода полуцелого порядка:

$$J_{\pm \frac{1}{2}}(cx) = \sqrt{\frac{2}{\pi cx}} \begin{Bmatrix} \sin(cx) \\ \cos(cx) \end{Bmatrix}. \quad (2.56)$$

С учётом (2.56) преобразуем множитель, стоящий под знаком суммирования в (2.55):

$$\begin{aligned}
 \cos(2\alpha(u + \psi)) &= \cos(2\alpha u) \cos(2\alpha \psi) - \sin(2\alpha u) \sin(2\alpha \psi) = \\
 &= \sqrt{\pi \alpha u} \left( \cos(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2\alpha u) - \sin(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2\alpha u) \right), \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(2\alpha(u - \psi)) &= \cos(2\alpha u) \cos(2\alpha \psi) + \sin(2\alpha u) \sin(2\alpha \psi) = \\
 &= \sqrt{\pi \alpha u} \left( \cos(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2\alpha u) + \sin(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2\alpha u) \right). \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые и упрощая получившееся выражение, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_3} \varepsilon_{\alpha} \left( \sqrt{\pi \alpha u} \left( \cos(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) + \sin(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) \right) \right) + \\ & + \sqrt{\pi \alpha u} \left( \cos(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) - \sin(2\alpha \psi) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) \right) \Big) du. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Тогда, подставляя полученное выражение в формулу для моментной функции произвольного порядка (2.49), имеем:

$$\begin{aligned} M_k[\varphi_i(R)] &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{2\rho_i(R)\sqrt{2}} \right) \times \\ & \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \left( \cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R)) \right) du + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \\ & \times 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2 \left( n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_3} \varepsilon_{\alpha} \left( \sqrt{\pi \alpha u} \left( \cos(2\alpha \psi_i(R)) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) + \sin(2\alpha \psi_i(R)) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) \right) \right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\pi \alpha u} \left( \cos(2\alpha \psi_i(R)) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) - \sin(2\alpha \psi_i(R)) J_{\frac{1}{2}}(2 \alpha u) \right) \right) du \Big). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Поменяем порядок суммирования и интегрирования:

$$\begin{aligned}
 M_k[\varphi_i(R)] = & \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{2\rho_i(R)\sqrt{2}} \right) \times \\
 & \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \left( \cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R)) \right) du + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times \\
 & \times \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_3} \varepsilon_\alpha \sqrt{\alpha \pi} \cos(2\alpha \psi_i(R)) \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{k+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(2\alpha u) du \Bigg). \tag{2.61}
 \end{aligned}$$

Для расчёта второго интеграла воспользуемся следующим равенством [39], [40]:

$$\begin{aligned}
 \int_0^a u^{\hat{\alpha}-1} (a^2 - u^2)^{\beta-1} J_\nu(cu) du = \\
 \frac{B\left(\beta, \frac{1}{2}(\nu + \hat{\alpha})\right) c^\nu a^{\hat{\alpha}+2\beta+\nu-2} {}_1F_2\left(\frac{1}{2}(\nu + \hat{\alpha}); \beta + \frac{1}{2}(\nu + \hat{\alpha}), \nu + 1; -\left(\frac{ac}{2}\right)^2\right)}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 1)}, \tag{2.62}
 \end{aligned}$$

где  $B(\square, \square)$  – бета-функция:

$$B\left(\beta, \frac{1}{2}(\nu + \hat{\alpha})\right) = \frac{\Gamma(\beta) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu + \hat{\alpha})\right)}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}(\nu + \hat{\alpha})\right)}. \tag{2.63}$$

Данное интегральное равенство справедливо в случае выполнения ряда условий:

$$\begin{cases} a > 0, \\ \operatorname{Re}(\beta) > 0, \\ \operatorname{Re}(\hat{\alpha} + \nu) > 0. \end{cases} \tag{2.64}$$

В нашем случае имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\pi}{2}, \\ \beta = 1, \\ \nu = \pm \frac{1}{2}, \\ \hat{\alpha} = k + \frac{3}{2}, \\ k \in \mathbb{N}, \quad k > 0, \\ c = 2\alpha. \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Тогда с учётом (2.62) и (2.65) интеграл в (2.61) может быть преобразован следующим образом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{k+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(2\alpha u) du = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+2} \sqrt{2\alpha} \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right) {}_1F_2\left(\frac{k+2}{2}; \frac{k+2}{2} + 1, \frac{3}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2\right)}{2^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+2}{2} + 1\right)}, \quad (2.66)$$

где  ${}_1F_2\left(\frac{k+2}{2}; \frac{k+2}{2} + 1, \frac{3}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2\right)$  – обобщённая гипергеометрическая функция.

Известно, что [84]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Тогда, упрощая полученное выражение, окончательно имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{k+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(2\alpha u) du = \frac{\pi^{k+\frac{3}{2}}}{k+2} \sqrt{\alpha} 2^{-k-1} {}_1F_2\left(\frac{k+2}{2}; \frac{k+2}{2} + 1, \frac{3}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2\right). \quad (2.68)$$

Вычислим соответствующий интеграл для бesselевой функции отрицательного полуцелого порядка:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{k+\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(2\alpha u) du = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1} \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) {}_1F_2\left(\frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2}+1, \frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2\right)}{2^{1/2} \sqrt{2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}, \quad (2.69)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{k+\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(2\alpha u) du = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha} (k+1)} 2^{-k-1} {}_1F_2\left(\frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2}+1, \frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2\right). \quad (2.70)$$

Для получения окончательного аналитического выражения нецентральных моментных функций произвольного порядка в (2.49) или (2.61) необходимо вычислить оставшийся интеграл во втором слагаемом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \left( \cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R)) \right) du. \quad (2.71)$$

Для его расчета воспользуемся свойством предельного перехода к (2.71) от (2.50) при устремлении индекса  $n$  к нулю и выражением, полученным для (2.50):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \left( \cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R)) \right) du = \\ = \lim_{n \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \left( \cos^2(u - \psi) \cos^2(2n(u - \psi)) + \cos^2(u + \psi) \cos^2(2n(u + \psi)) \right) du, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^k \left( \cos^2(u - \psi_i(R)) + \cos^2(u + \psi_i(R)) \right) du = \\ = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1}}{k+1} \left( 1 + \cos(\psi_i(R)) {}_1F_2\left(\frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2}+1, \frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Подставляя полученные выражения для внутренних интегралов в (2.61) получим выражение для моментных функций:



$$\begin{aligned}
 M_k[\varphi_i(R)] = & \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{2\rho_i(R)\sqrt{2}} \right) \times \\
 & \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1} \left( 1 + \cos(\psi_i(R)) {}_1F_2\left(\frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{\rho_i(R)^2}{8}\right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times \\
 & \times \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_3} \varepsilon_\alpha \sqrt{\alpha \pi} \cos(2\alpha \psi_i(R)) \frac{\pi^{k+1/2}}{\sqrt{\alpha}(k+1)} 2^{-k-1} {}_1F_2\left(\frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2\right). \quad (2.74)
 \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые во внутренних суммах и приводя подобные, можно немного упростить получившееся выражение:

$$\begin{aligned}
 M_k[\varphi_i(R)] = & \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)}}{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1} \right) \times \\
 & \times \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}} \left( \left( 1 + \cos(\psi_i(R)) {}_1F_2\left(\frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \right) \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{\rho_i(R)^2}{8}\right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2\left(n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left(\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \times \\
 & \times \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_3} \varepsilon_\alpha \cos(2\alpha \psi_i(R)) {}_1F_2\left(\frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)^2\right). \quad (2.75)
 \end{aligned}$$

Важно отметить, что при предельном переходе ( $n \rightarrow \infty$ ) коэффициенты с ненулевым индексом переходят в точности в нулевой коэффициент, т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma\left(|n| + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2 \left( \left|n\right| + \frac{1}{2}, |n| + 1; |n| + \frac{3}{2}, 2|n| + 1; \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi} \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}}. \quad (2.76)$$

Используя предложенные замены и свойство (2.76) можно упростить запись выражения (2.75):

$$\begin{aligned} M_k[\varphi_i(R)] &= e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)} \left( 1 + \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{2(k+1)} \left( \frac{\pi}{2} \right)^k \times \right. \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma\left(|n| + \frac{3}{2}\right)} {}_2F_2 \left( \left|n\right| + \frac{1}{2}, |n| + 1; |n| + \frac{3}{2}, 2|n| + 1; \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \times \\ &\times \left. \sum_{\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}_1}^{\tilde{\alpha}_3} \varepsilon_{\tilde{\alpha}} \cos(2\tilde{\alpha} \psi_i(R)) {}_1F_2 \left( \frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2} \tilde{\alpha} \right)^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (2.77)$$

где для векторов столбцов  $\varepsilon_{\tilde{\alpha}}$ ,  $\tilde{\alpha}$  используются следующие обозначения:

$$\varepsilon_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} |n| - 1 \\ |n| \\ |n| + 1 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Окончательно выражение для нецентрального момента произвольного порядка для математического ожидания модуля интегрального фазового набег зарегистрированного комплексного распределения по апертуре поля, рассеянного объектом, относительно эталонного поля, представимо в виде:

$$\begin{aligned}
 M_k[\varphi_i(R)] = e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)} & \left( 1 + \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{2(k+1)} \left( \frac{\pi}{2} \right)^k \times \right. \\
 & \times \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi} \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}} \left\{ \left( 1 + \cos(\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( \frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) \right) \right\} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma \left( n + \frac{3}{2} \right)} {}_2F_2 \left( n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \times \\
 & \times \left[ \cos(2(n-1)\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( \frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; - \left( \frac{\pi}{2}(n-1) \right)^2 \right) \right] + \\
 & + 2 \cos(2n\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( \frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; - \left( \frac{\pi}{2}n \right)^2 \right) + \\
 & + \cos(2(n-1)\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( \frac{k+1}{2}; \frac{k+1}{2} + 1, \frac{1}{2}; - \left( \frac{\pi}{2}(n-1) \right)^2 \right) \left. \right\}. \tag{2.80}
 \end{aligned}$$

На практике наибольший интерес представляет моментная функция первого порядка (математическое ожидание исследуемой величины).

Для её нахождения в выражении (2.80) проведём соответствующие преобразования и необходимые упрощения, после чего получим:

$$\begin{aligned}
 E[\varphi_i(R)] = M_1[\varphi_i(R)] = e^{\frac{1}{2}\rho_i(R)} & \left( 1 + \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\pi}{8} \times \right. \\
 & \times \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi} \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}} \left\{ \left( 1 + \cos(\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma \left( n + \frac{3}{2} \right)} {}_2F_2 \left( n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \times \\
 & \times \left[ \cos(2(n-1)\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2}(n-1) \right)^2 \right) + \right. \\
 & + 2 \cos(2n\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2}n \right)^2 \right) + \\
 & \left. \left. \left. + \cos(2(n-1)\psi_i(R)) {}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2}(n-1) \right)^2 \right) \right] \right\} \right]. \tag{2.81}
 \end{aligned}$$

Данное выражение достаточно громоздко, однако из теории обобщённых гипергеометрических функций известно, что функции вида  ${}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -a \right)$  допускают представление посредством обыкновенных тригонометрических функций:

$${}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2}(n-1) \right)^2 \right) = \frac{2(\pi n \sin(\pi(n-1)) + \cos(\pi(n-1)) - 1)}{\pi^2 (n-1)^2}, \tag{2.82}$$

$${}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2}(n+1) \right)^2 \right) = \frac{2(\pi n \sin(\pi(n+1)) + \cos(\pi(n+1)) - 1)}{\pi^2 (n+1)^2}, \tag{2.83}$$

$${}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2}n \right)^2 \right) = \frac{2(\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi^2 n^2}, \tag{2.84}$$

$${}_1F_2 \left( 1; 2\frac{1}{2}; -\left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) = -\frac{4}{\pi^2}. \tag{2.85}$$

Подставляя полученные выражения в (2.81) и производя необходимые упрощения, окончательно имеем представление для математического ожидания модуля интегрального фазового набег зарегистрированного комплексного распределения по апертуре поля, рассеянного объектом, относительно эталонного поля в виде:

$$\begin{aligned}
 E[\varphi_i(R)] = M_1[\varphi_i(R)] = e^{-\frac{1}{2}\rho_i(R)} & \left( 1 + \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\pi}{8} \times \right. \\
 & \times \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi} \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}}} \left\{ \left( 1 - \frac{4 \cos(\psi_i(R))}{\pi^2} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{\rho_i(R)^2}{8} \right)^n}{\Gamma \left( n + \frac{3}{2} \right)} {}_2F_2 \left( n + \frac{1}{2}, n + 1; n + \frac{3}{2}, 2n + 1; \left( \frac{\rho_i(R)}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \times \\
 & \times \left[ \cos(2(n-1)\psi_i(R)) \left( \frac{2(\pi n \sin(\pi(n-1)) + \cos(\pi(n-1)) - 1)}{\pi^2(n-1)^2} \right) + \right. \\
 & + 2 \cos(2n\psi_i(R)) \left( \frac{2(\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi^2 n^2} \right) + \\
 & \left. \left. \left. + \cos(2(n-1)\psi_i(R)) \left( \frac{2(\pi n \sin(\pi(n+1)) + \cos(\pi(n+1)) - 1)}{\pi^2(n+1)^2} \right) \right] \right\} \right\}. \quad (2.86)
 \end{aligned}$$

На практике также часто требуются выражения для центральных моментов произвольного порядка, например второго – дисперсии. Для этого запишем выражение для центральных моментов:

$$M_c_k[\varphi_i(R)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (u - M_1[\varphi_i(R)])^k w_{\varphi_i}(u) du. \quad (2.87)$$

Воспользуемся выражением для бинома Ньютона для  $k$ -ой степени разности, стоящей под интегралом:

$$M_c_k[\varphi_i(R)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} u^{k-l} (-M_1[\varphi_i(R)])^l w_{\varphi_i}(u) du. \quad (2.88)$$

где  $\binom{k}{l}$  – биномиальный коэффициент.

Перегруппировав сомножители, получим:

$$M_{c_k}[\varphi_i(R)] = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^l (M_1[\varphi_i(R)])^l \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{k-l} w_{\varphi_i}(u) du. \quad (2.89)$$

Замечая, что получившееся выражение под знаком интеграла есть ни что иное как нецентральный момент, окончательно запишем:

$$M_{c_k}[\varphi_i(R)] = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} M_{k-l}[\varphi_i(R)] (-1)^l (M_1[\varphi_i(R)])^l. \quad (2.90)$$

В частности, для дисперсии (центрального момента второго порядка) имеем:

$$D[\varphi_i(R)] = M_{c_2}[\varphi_i(R)] = M_2[\varphi_i(R)] - (M_1[\varphi_i(R)])^2. \quad (2.91)$$

Или, воспользовавшись выражениями (2.80) и (2.86), окончательно получаем формулу для дисперсии модуля интегрального фазового набег зарегистрированного комплексного распределения по апертуре поля, рассеянного объектом, относительно эталонного поля, выраженную в виде разложения в бесконечный ряд по гармоническим функциям:



$$w_{\varphi}(u, \rho, \psi) = \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\rho^2}{2}} \left[ \frac{\rho \cos(u - \psi)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2 \cos^2(u - \psi)}{2}} \operatorname{erf} \left( \frac{\rho \cos(u - \psi)}{\sqrt{2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\rho \cos(u + \psi)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2 \cos^2(u + \psi)}{2}} \operatorname{erf} \left( \frac{\rho \cos(u + \psi)}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (2.93)$$

Полученное в пункте 2.1.1 выражение для функции плотности вероятности представляет собой двухкомпонентную смесь распределений Беннетта [123-126], является строгим, однако оно сложно для анализа из-за того, что реализация случайного процесса и неизвестные параметры входят в виде единой связки в целый набор нелинейных функций, что существенно затрудняет анализ и снижает легкость интерпретации получаемых результатов. Этого можно избежать следующим образом.

Воспользуемся представлением функции ошибок  $\operatorname{erf}(\cdot)$  произведения  $\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u - \psi)$  в виде разложения в ряд по полиномам Чебышёва  $T_{2l+1}(\cos(u - \psi))$  и сферическим функциям Бесселя  $i_l^{(1)}\left(\frac{\rho^2}{4}\right)$  отдельных сомножителей:

$$\operatorname{erf} \left( \frac{\rho \cos(u - \psi)}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\rho^2}{2\sqrt{\pi}} e^{\left(\frac{1}{2} - \cos^2(u - \psi)\right) \frac{\rho^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} T_{2l+1}(\cos(u - \psi)) i_l^{(1)} \left( \frac{\rho^2}{4} \right). \quad (2.94)$$

Или, учитывая связь между сферической функцией Бесселя и модифицированной функцией Бесселя  $I_{l+\frac{1}{2}}(\square)$ , получаем:

$$\operatorname{erf} \left( \frac{\rho \cos(u - \psi)}{\sqrt{2}} \right) = 2e^{-\frac{\rho^2}{4}} e^{-\frac{\rho^2 \cos^2(u - \psi)}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} T_{2l+1}(\cos(u - \psi)) I_{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) \quad (2.95)$$

Подставляя данное разложение в выражение (2.93) для функции плотности вероятности, группируя слагаемые и используя явный вид полиномов Чебышёва, имеем:

$$w_{\varphi}(u, \rho, \psi) = \frac{e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\frac{\pi}{2}} + \rho \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} I_{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) \times \\ \times \left( \cos((2l+1)(u - \psi)) \cos((u - \psi)) + \cos((2l+1)(u + \psi)) \cos((u + \psi)) \right). \quad (2.96)$$



Вынося из под знака суммы первое слагаемое и учитывая представление для модифицированной функции Бесселя порядка  $1/2$ , получим:

$$w_{\varphi}(u, \rho, \psi) = \frac{2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(2lu) \cos(2l\psi) \left( I_{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) + I_{l-\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) \right). \quad (2.97)$$

Полученное представление для исходной плотности вероятности (2.93) является строгим. Полученный ряд является сходящимся, т.к. может быть промажорирован сходящимся

рядом  $\sum_{l=0}^{\infty} (\pm 1)^l I_{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right)$ . В качестве основного преимущества (2.97) перед (2.93) можно

отметить то, что в полученном выражении все параметры (отношение сигнал/шум, истинная разность фаз и значение реализации случайной величины) входят в качестве независимых сомножителей и, как следствие, становится значительно проще их находить, а также проводить анализ поведения статистических характеристик исследуемой случайной величины.

Стоит отметить, что представление (2.97) не уникально. На основе связи модифицированных функций Бесселя с другими специальными функциями это выражение можно видоизменить. Например, представить  $w_{\varphi}(u, \rho, \psi)$  в виде ряда по конфлюэнтным гипергеометрическим функциям, G-функциям Мейера, функциям Уиттекера и др. Однако, с точки зрения практической реализации, данные представления являются вычислительно более экстенсивными (требуют подключение дополнительных библиотек, повышенной точности, больших вычислительных ресурсов, большего машинного времени на просчёт), поэтому дальнейшее преобразование считаю не перспективным.

#### 2.4 Аналитические выражения для моментных функции 1 – 4-го порядков при больших отношениях сигнал/шум

На основе альтернативного представления (2.97) для функции плотности вероятности (2.93) можно найти более простые представления для моментных функций (2.80).

Выражение для момента  $k$ -ого порядка (2.80) примет вид:

$$M_k[\varphi] = \frac{\left( \frac{\pi}{2} \right)^k}{k+1} \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} \sum_{l=1}^{\infty} {}_1F_2 \left( \frac{k+1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{k+3}{2}; -\left( \frac{\pi l}{2} \right)^2 \right) \times \right. \quad (2.98)$$

$$\left. \times \cos(2l\psi) \left( I_{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) + I_{l-\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) \right) \right).$$

Несмотря на то, что с точки зрения практического использования и расчётов выражение (2.98) значительно более удобно, чем (2.80), окончательного выражения в замкнутой форме для моментов найти все равно не удаётся. Однако можно попытаться его найти в асимптотическом случае при большом отношении сигнал/шум. Для этого воспользуемся асимптотическим разложением модифицированной функции Бесселя в ряд для случая большого аргумента (в нашем случае аргументом является отношение сигнал/шум):

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l'} \alpha(l', \nu)}{z^{l'}} + \frac{ie^{\pi i \nu} e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{\alpha(l', \nu)}{z^{l'}}, \quad (2.99)$$

где

$$\alpha(l', \nu) = \begin{cases} 1, & l' = 0; \\ \frac{1}{8^{l'} l'!} \prod_{i=1}^{l'} ((2i-1)^2 + 4\nu^2), & l' \neq 0. \end{cases} \quad (2.100)$$

Тогда сумму двух модифицированных функций Бесселя, стоящих в скобках (2.98), можно представить в виде ряда по степеням их индекса. Ограничиваясь первыми четырьмя порядками в ряде разложения и оставляя тем самым ошибку порядка  $O\left(\frac{1}{\rho^9}\right)$ , имеем:

$$\begin{aligned} \left( I_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) + I_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) \right) &= n^8 \frac{4\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{\rho^2}{4}}}{3\rho^9} - (-1)^n n^7 \frac{16\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{4}}}{3\rho^9} + \\ &+ n^6 \frac{e^{\frac{\rho^2}{4}} (448 - 32\rho^2)}{6\sqrt{2\pi}\rho^9} + (-1)^n n^5 \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4}} (-96\rho^2 - 1120)}{6\sqrt{2\pi}\rho^9} + \\ &+ n^4 \frac{e^{\frac{\rho^2}{4}} (48\rho^4 - 400\rho^2 + 3304)}{6\sqrt{2\pi}\rho^9} + (-1)^n n^3 \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4}} (-96\rho^4 - 640\rho^2 - 4816)}{6\sqrt{2\pi}\rho^9} + \\ &+ n^2 \frac{e^{\frac{\rho^2}{4}} (-48\rho^6 + 192\rho^4 - 968\rho^2 + 6512)}{6\sqrt{2\pi}\rho^9} + \\ &+ (-1)^n n \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4}} (-48\rho^6 - 144\rho^4 - 664\rho^2 - 4280)}{6\sqrt{2\pi}\rho^9} + \\ &+ \frac{e^{\frac{\rho^2}{4}} (24\rho^8 - 24\rho^6 + 60\rho^4 - 260\rho^2 + 1625)}{6\sqrt{2\pi}\rho^9} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Учтём также, что в выражении (2.98) перед знаком суммы стоит экспоненциально убывающий множитель, компенсирующий экспоненциально возрастающий множитель у всех чётных слагаемых выражения (2.101). Все нечётные слагаемые в (2.101) имеют дополнительный убывающий по экспоненциальному закону (с увеличением отношения сигнал/шум) множитель, из-за которого они спадают значительно быстрее, чем остаточный член ряда разложения и, следовательно, могут быть отброшены.

Ограничиваясь требуемой точностью разложения в (2.99) и, отбрасывая, соответственно, остаточный член в (2.101), подставим это выражение в (2.98). Сгруппируем слагаемые и воспользуемся следующим набором тождеств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k - 1) k^{2l} \cos(2k\psi) = 0, \quad \forall [l \in Z], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k - 1) \cos(2k\psi)}{k} = \ln(\operatorname{tg}(|\psi|)), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k - 1) \cos(2k\psi)}{k^2} = \pi \left( |\psi| - \frac{\pi}{4} \right), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2k\psi)}{k^2} = \psi^2 - \frac{\pi^2}{12}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2k\psi)}{k} = -\ln(2 \cos(\psi)), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\psi)}{k} = -\ln(2 \sin(\psi)). \end{array} \right. \quad (2.102)$$

Тогда для первых трёх порядков разложения будем иметь следующие асимптотические (при большом отношении сигнал/шум) выражения для математического ожидания:

$$\left\{ \begin{array}{l} E^{(1)}[\varphi] = M_1^{(1)}[\varphi] \approx |\psi| + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \\ E^{(2)}[\varphi] = M_1^{(2)}[\varphi] \approx |\psi| + \frac{2e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\pi\rho^2} \left( \ln(\operatorname{tg}(|\psi|)) + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right) \right) + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right), \\ E^{(3)}[\varphi] = M_1^{(3)}[\varphi] \approx |\psi| + \frac{2e^{-\frac{\rho^2}{2}}}{\pi\rho^2} \left( \left(1 - \frac{2}{\rho^2}\right) \ln(\operatorname{tg}(|\psi|)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{tg}(2\psi)\sin(2\psi)} + O\left(\frac{1}{\rho^6}\right) \right) + O\left(\frac{1}{\rho^6}\right). \end{array} \right. \quad (2.103)$$

Или, отбросив экспоненциально убывающие члены, получим:

$$E^{(1)}[\varphi] \approx E^{(2)}[\varphi] \approx E^{(3)}[\varphi] \approx |\psi|. \quad (2.104)$$

Для 1, 2, 3, 4 и 7 порядков разложения асимптотические выражения для дисперсии имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(1)}[\varphi] \approx 0 + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \\ D^{(2)}[\varphi] \approx \frac{1}{\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right), \\ D^{(3)}[\varphi] \approx \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^6}\right), \\ D^{(4)}[\varphi] \approx \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{8}{3\rho^4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^8}\right), \\ \dots \\ D^{(7)}[\varphi] \approx \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{8}{3\rho^4} + \frac{12}{\rho^6} + \frac{384}{5\rho^8} + \frac{640}{\rho^{10}}\right) + O\left(\frac{1}{\rho^{14}}\right). \end{array} \right. \quad (2.105)$$

На практике зачастую для оценки центральных и абсолютных моментов второго порядка требуется знать выражение для третьего и четвёртого моментов случайной величины.

Асимптотические выражения для 1, 2, и 5 порядков разложения для третьего момента имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_3^{(1)}[\varphi] \approx \frac{3\pi^2\psi^2}{16} + \frac{\pi^3}{2} \left( B_4\left(\frac{2\psi + \pi}{2\pi}\right) - B_4\left(\frac{|\psi|}{\pi}\right) \right) - \frac{\pi^3}{32} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \\ M_3^{(2)}[\varphi] \approx \frac{3\pi^2}{16} \left( \psi^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{\pi^3}{2} \left( B_4\left(\frac{2\psi + \pi}{2\pi}\right) - B_4\left(\frac{|\psi|}{\pi}\right) \right) + \\ \quad + \frac{3}{\rho^2} \left( |\psi| - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi^3}{32} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right), \\ \dots \\ M_3^{(5)}[\varphi] \approx \frac{3\pi^2}{16} \left( \psi^2 + 1 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{8}{3\rho^4} + \frac{12}{\rho^6} \right) + \frac{\pi^3}{2} \left( B_4\left(\frac{2\psi + \pi}{2\pi}\right) - B_4\left(\frac{|\psi|}{\pi}\right) \right) + \\ \quad + \frac{3}{\rho^2} \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{8}{3\rho^4} + \frac{12}{\rho^6} \right) \left( |\psi| - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi^3}{32} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{\rho^{10}}\right), \end{array} \right. \quad (2.106)$$

где  $B_4(\cdot)$  – многочлены Бернулли.

Асимптотические выражения для 1 и 5 порядков для четвёртого момента имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_4^{(1)}[\varphi] \approx \frac{\pi^3 \psi^2}{8} + \pi^4 B_4 \left( \frac{2\psi + \pi}{2\pi} \right) - \frac{\pi^4}{16} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{5} \right) + O\left( \frac{1}{\rho^2} \right), \\ \dots \\ M_4^{(5)}[\varphi] \approx \frac{\pi^3}{8} \left( \psi^2 + 1 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{8}{3\rho^4} + \frac{12}{\rho^6} \right) + \pi^4 B_4 \left( \frac{2\psi + \pi}{2\pi} \right) + \\ + \frac{6}{\rho^2} \left( 1 + \frac{12}{\rho^6} + \frac{8}{3\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) \left( \psi^2 - \frac{\pi^2}{12} \right) + \\ + \frac{49}{\rho^8} \left( 1 + \frac{3}{49\rho^4} + \frac{10}{49\rho^6} \right) - \frac{\pi^4}{16} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{5} \right) + O\left( \frac{1}{\rho^{10}} \right). \end{array} \right. \quad (2.107)$$

## 2.5 Аппроксимации функции плотности вероятности

Несмотря на удобство полученного в разделе 2.1.5 представления для функции плотности вероятности, на практике бывает часто удобно аппроксимировать реальное распределение выборки некоторым модельным, хорошо изученным распределением. В частности, в литературе, посвящённой анализу (оценке, различению и фильтрации) угловых переменных, в качестве таких распределений чаще всего используют "обёрнутое" нормальное распределение и распределение Тихонова-фон-Мизеса ([103 – 104], [115], [123– 126]).

### 2.5.1 Аппроксимация на основе "обёрнутого" нормального распределения

"Обёрнутое" нормальное распределение играет в статистике угловых данных такую же роль, как и нормальное распределение в классической математической статистике [103 – 104] и получается из него путём проекции нормально распределённых данных на окружность и "обёртывания" их несколько раз (в зависимости от периодичности исходных данных).

Выражение для функции плотности вероятности случайной величины, распределенной в диапазоне  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ , в соответствии с "обёрнутым" нормальным распределением записывается следующим образом:

$$WN(\theta; \mu_{wn}, \sigma_{wn}) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_{wn}^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\theta - \mu_{wn} + \frac{\pi n}{2})^2}{2\sigma_{wn}^2}} = \frac{2}{\pi} \mathcal{G}_3(\theta - \mu_{wn}, \sigma_{wn}), \quad (2.108)$$

где  $\mathcal{G}_3(\theta - \mu_{wn}, \sigma_{wn})$  – эллиптическая тета-функция Якоби третьего рода. Его же можно выразить и через гармонические моды:

$$WN(\theta; \mu_{wn}, \sigma_{wn}) = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{wn}^{n^2} \cos(n(\theta - \mu_{wn})) \right\}. \quad (2.109)$$

В качестве основных особенностей "обёрнутого" нормального распределения можно выделить то, что оно является унимодальным, симметричным, устойчивым распределением. А следовательно, случайная величина, равная сумме случайных величин с "обёрнутым" нормальным распределением, будет также иметь "обёрнутое" нормальное распределение. "Обёрнутое" нормальное распределение является предельным распределением на окружности [103].

Используя второе определение (2.109), представим функцию плотности (2.97) в виде суммы двух слагаемых (раскрыв произведение косинусов под знаком суммы). Учтём также, что при больших отношениях сигнал/шум сумма модифицированных функций Бесселя в (2.97) (с учётом множителя перед знаком суммы) при произвольном порядке может быть приближена выражением  $e^{-\frac{2}{\rho^2}}$ . Тогда  $w_\varphi(u, \rho, \psi)$  может быть аппроксимирована следующей двухкомпонентной смесью "обёрнутых" нормальных распределений:

$$w_1(u, \rho, \psi) = \frac{\mathcal{G}_3\left(u - \psi, e^{-\frac{2}{\rho^2}}\right) + \mathcal{G}_3\left(u + \psi, e^{-\frac{2}{\rho^2}}\right)}{\pi}. \quad (2.110)$$

Стоит отметить, что при повышении отношения сигнал/шум и математического ожидания интегральной разности фаз, отличного от нуля, первое слагаемое в выражении (2.110) становится доминирующим, и вторым слагаемым можно приближённо пренебречь.

### 2.5.2 Аппроксимация на основе распределения Тихонова-фон Мизеса

Несмотря на исследованность и удобство некоторых указанных выше свойств, на практике по возможности "обёрнутое" нормальное распределение стараются не использовать вследствие сложности (как аналитической, как и численной) работы с эллиптической тета-

функцией Якоби. Поэтому в качестве аппроксимирующего распределения чаще выбирается распределение Тихонова-фон Мизеса, которое при больших величинах параметра масштаба (малая дисперсия распределения) чрезвычайно близко к "обёрнутому" нормальному [103]. Из-за своей простоты аналитического описания и изученности распределение Тихонова-фон Мизеса занимает особое место в статистике угловых измерений. По этой причине, а также из-за хорошего согласия с практическими данными именно это распределение выбирается большинством исследователей в качестве исходного ([103 – 104], [115], [123 – 126]).

Выражение для функции плотности вероятности случайной величины, распределенной в диапазоне  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  в соответствии с распределением Тихонова-фон Мизеса, записывается следующим образом:

$$vMT(\theta; \mu_{vMT}, \kappa_{vMT}) = \frac{2}{\pi I_0(\kappa_{vMT})} e^{\kappa_{vMT} \cos(\theta - \mu_{vMT})}, \quad (2.111)$$

где  $I_0(\kappa_{vMT})$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка,  $\mu_{vMT}$  – параметр положения, а  $\kappa_{vMT}$  – параметр масштаба, выбираемые исходя из решения задачи приближения исходного распределения аппроксимирующим.

В качестве основных особенностей распределения Тихонова-фон Мизеса можно выделить то, что оно является унимодальным, симметричным, однако не является устойчивым распределением. А следовательно, сумма случайных величин, распределённых в соответствии с (2.111), в общем случае не будет иметь подобную функцию распределения. Однако на практике, этот факт обходят аппроксимацией "обёрнутым" нормальным распределением [103] (допустимой вследствие их близости), которое в свою очередь является устойчивым.

Используя определение (2.111), представим функцию плотности (2.97) в виде суммы двух слагаемых (раскрыв произведение косинусов под знаком суммы). Тогда, учитывая также, что при больших отношениях сигнал/шум сумма модифицированных функций Бесселя в (2.97) может быть оценена сверху, а множитель перед знаком суммы приближен выражением для модифицированной функции Бесселя нулевого порядка, получим аппроксимацию  $w_\varphi(u, \rho, \psi)$  двухкомпонентной смесью распределений Тихонова-фон Мизеса:

$$w_2(u, \rho, \psi) = \frac{e^{\frac{1}{4}\rho^2 \cos(2(u-\psi))} + e^{\frac{1}{4}\rho^2 \cos(2(u+\psi))}}{\pi I_0\left(\frac{\rho^2}{4}\right)}. \quad (2.112)$$

Параметр масштаба выбирался таким образом, чтобы во всём диапазоне изменения параметра положения минимизировать средний (по диапазону изменения случайной величины)

квадрат отклонения аппроксимирующего выражения от исходного. В сравнении с работами [123-126], где решалась аналогичная задача, но для однокомпонентного распределения, точность аппроксимации выше в 5 раз: относительная точность в [126] составляет 5%, в то время как аппроксимация (2.112) при отношении сигнал/шум более 5 дБ позволяет достичь относительной точности более 1%.

### 2.5.3 Аппроксимация на исходной плотности вероятности при большом отношении сигнал/шум и отсутствии аномальных ошибок

При рассмотрении вопроса приближения исходной плотности вероятности можно воспользоваться стандартным подходом (см., например, [42]), при котором исходная функция плотности вероятности упрощается при определённых условиях.

Рассмотрим исходную плотность вероятности, задаваемую выражением (2.93). Рассмотрим случай большого отношения сигнал/шум, ненулевого истинного значения интегральной разности фаз и отсутствия аномальных ошибок. В случае отсутствия аномальных ошибок выборка будет главным образом сгруппирована в области математического ожидания. При этом (в случае большого  $\rho$ ) мы сможем пренебречь функциями ошибок (так как они будут близки к единице) и первым слагаемым (в виду его малости). Полученное выражение необходимо пронормировать, чтобы оно удовлетворяло свойству нормировки функции вероятности. В итоге придём к следующей форме аппроксимации  $w_\varphi(u, \rho, \psi)$ :

$$w_3(u, \rho, \psi) = \frac{\rho \left( \cos(u - \psi) e^{-\left(\frac{\rho \sin(u - \psi)}{\sqrt{2}}\right)^2} + \cos(u + \psi) e^{-\left(\frac{\rho \sin(u + \psi)}{\sqrt{2}}\right)^2} \right)}{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\rho \cos(\psi)}{\sqrt{2}}\right)}. \quad (2.113)$$

Стоит отметить, что в случае, если истинная интегральная разность фаз близка к нулю (или равна ему), данная аппроксимация будет давать значительно худшее приближение исходной плотности в связи с тем, что будет потеряна правомочность пренебрежения функциями ошибок.



## 2.6 Сравнительный анализ поведения предлагаемых аппроксимаций и точного решения

Для анализа поведения и сравнения предлагаемых аппроксимаций были построены графики зависимости математического ожидания и среднеквадратичного отклонения интегральной разности фаз от отношения сигнал/шум (в диапазоне от 0 до 20 дБ) для ряда значений  $\psi = \{1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 46^\circ, 55^\circ\}$ , которые, как указано в приложении Б, могут соответствовать, например, паре идеально проводящих бесконечных лент шириной  $20\lambda$  первая и от  $22\lambda$  до  $27\lambda$  вторая или для двух идеально проводящих круговых цилиндров высотой  $100\lambda$  первый и от  $102,5\lambda$  до  $102,7\lambda$  второй. Значения  $\psi$  были выбраны таким образом, что бы покрывать область малых (близких к нулю), больших (бóльших  $\frac{\pi}{4}$ , т.е. середины возможного диапазона углов) и промежуточных разностей фаз.

На рис. 2.1 – 2.2 представлены графики зависимости математического ожидания интегральной разности фаз от отношения сигнал/шум для трёх предлагаемых аппроксимаций исходной плотности вероятности для значения истинной интегральной разности фаз в  $1^\circ$  и  $5^\circ$ , а в Приложении Б на рисунках Б.1-Б.3 для  $10^\circ$ ,  $46^\circ$  и  $55^\circ$ .

Из анализа полученных графических зависимостей можно сделать заключение, что в отличие от того, что можно было бы предположить на основе выражения (2.104), математическое ожидание в области малых отношений сигнал/шум имеет смещение, зависящее от отношения сигнал/шум. При этом величина отношения сигнал/шум, при котором оно становится пренебрежимо мало (менее 1 %), уменьшается с увеличением истинного значения интегральной разности фаз в диапазоне от 0 до  $45^\circ$  и увеличивается в диапазоне от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ :

- 16 дБ при  $\psi = 1^\circ$ ;
- 11,5 дБ при  $\psi = 5^\circ$ ;
- 9,5 дБ при  $\psi = 10^\circ$ ;
- 4 дБ при  $\psi = 46^\circ$ ;
- 5,5 дБ при  $\psi = 55^\circ$ .

На рисунке 2.3 и 2.4 представлены зависимости СКО интегральной разности фаз истинного значения интегральной разности фаз для случая исходной плотности вероятности и трёх её аппроксимаций для значения истинной интегральной разности фаз в  $1^\circ$  и  $5^\circ$ , а в Приложении Б на рисунках Б.4-Б.6 для  $10^\circ$ ,  $46^\circ$  и  $55^\circ$ .

Исходя из этих зависимостей, можно сделать заключение, что СКО интегральной разности фаз достаточно слабо зависит от её истинного значения, особенно, если оно больше  $10^\circ$ , но меньше  $80^\circ$ . При отношениях сигнал/шум больше 6 дБ разница при использовании любой из аппроксимаций незначительна (менее 0,5 %).

При сравнении аппроксимаций можно сказать, что в области больших отношений сигнал/шум (более 6 дБ) любая из аппроксимаций является вполне удовлетворительной. В области же малых отношений сигнал/шум (менее 6 дБ) предпочтительной является первая аппроксимация, так как она демонстрирует наименьшее отклонение математического ожидания и дисперсии от их значений, вычисленных с использованием строго выражения.

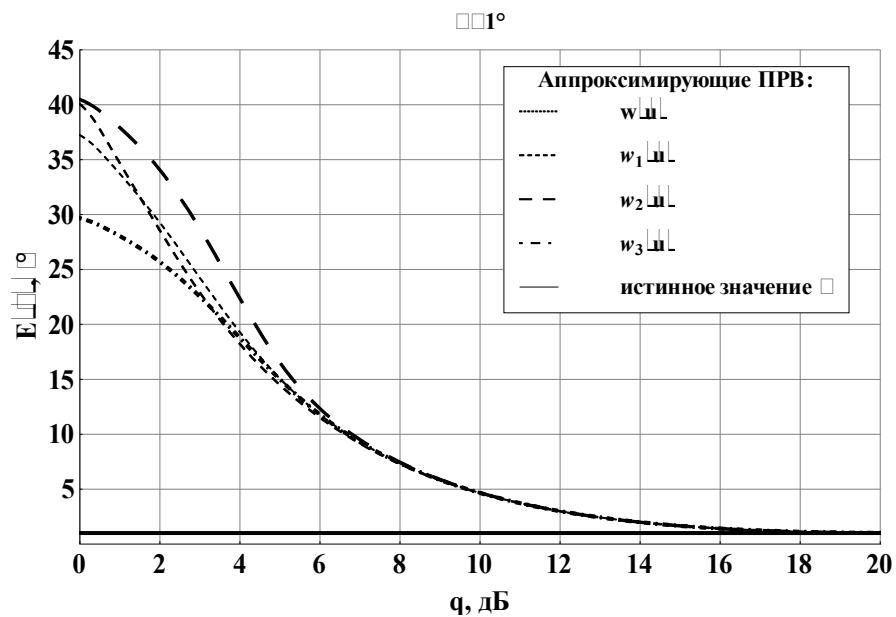


Рисунок 2.1 Зависимость математического ожидания интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум для случая  $\psi = 1^\circ$

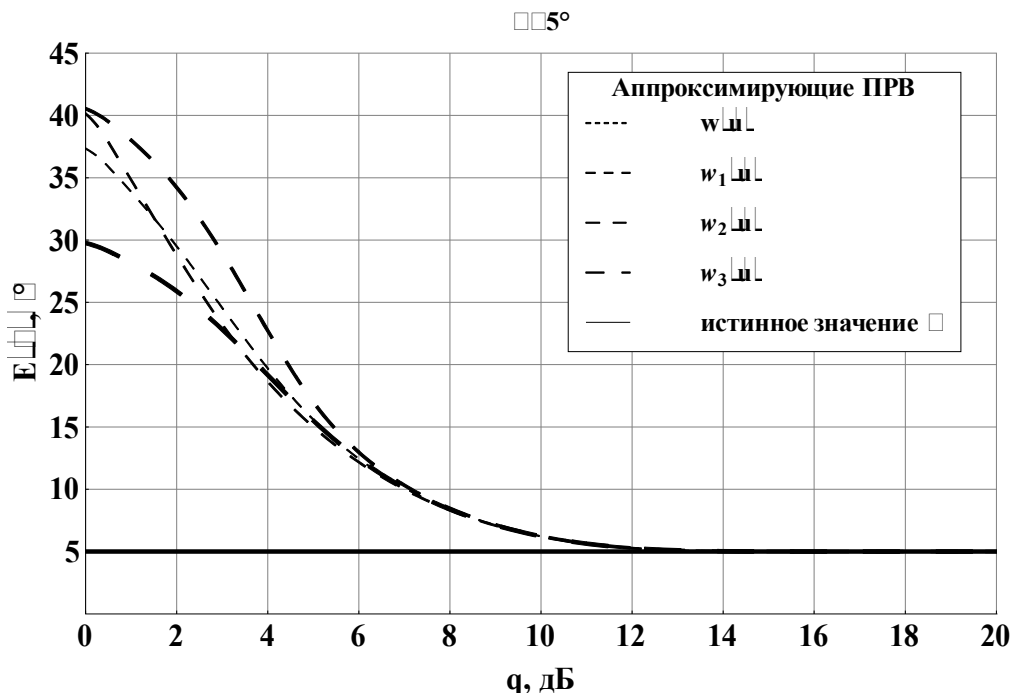


Рисунок 2.2 Зависимость математического ожидания интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум для случая  $\psi = 5^\circ$

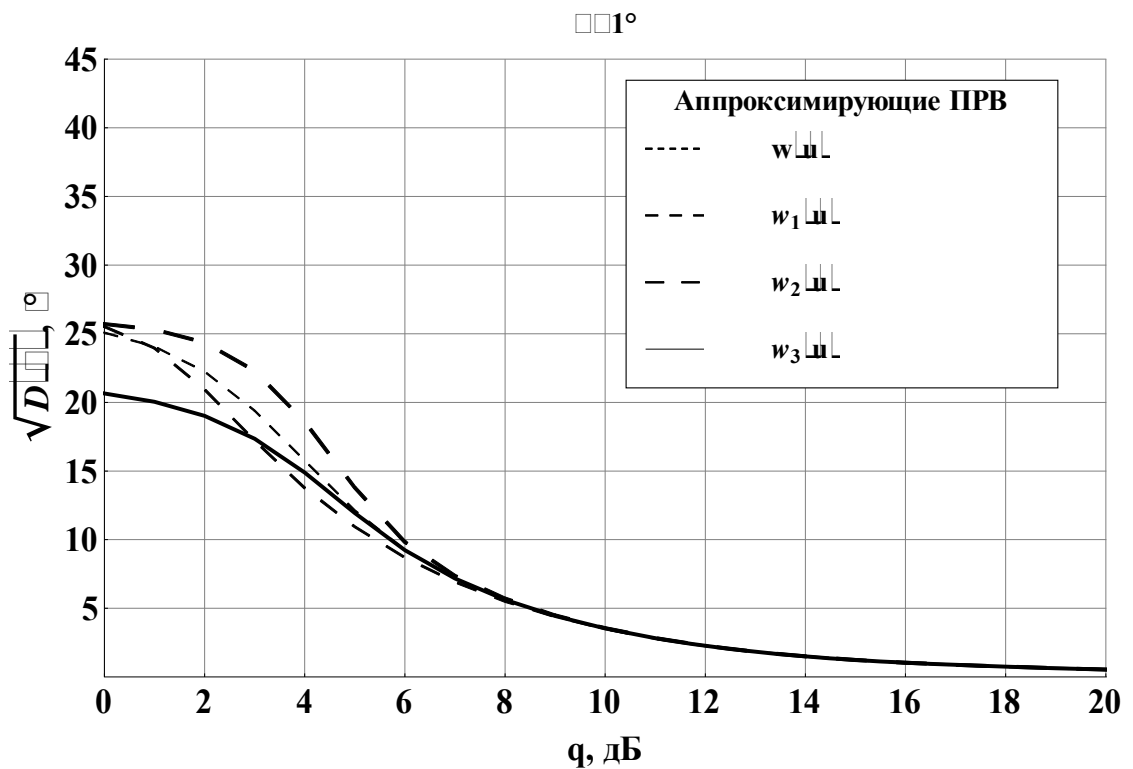


Рисунок 2.3 Зависимость СКО интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения/сигнал шум для случая  $\psi = 1^\circ$

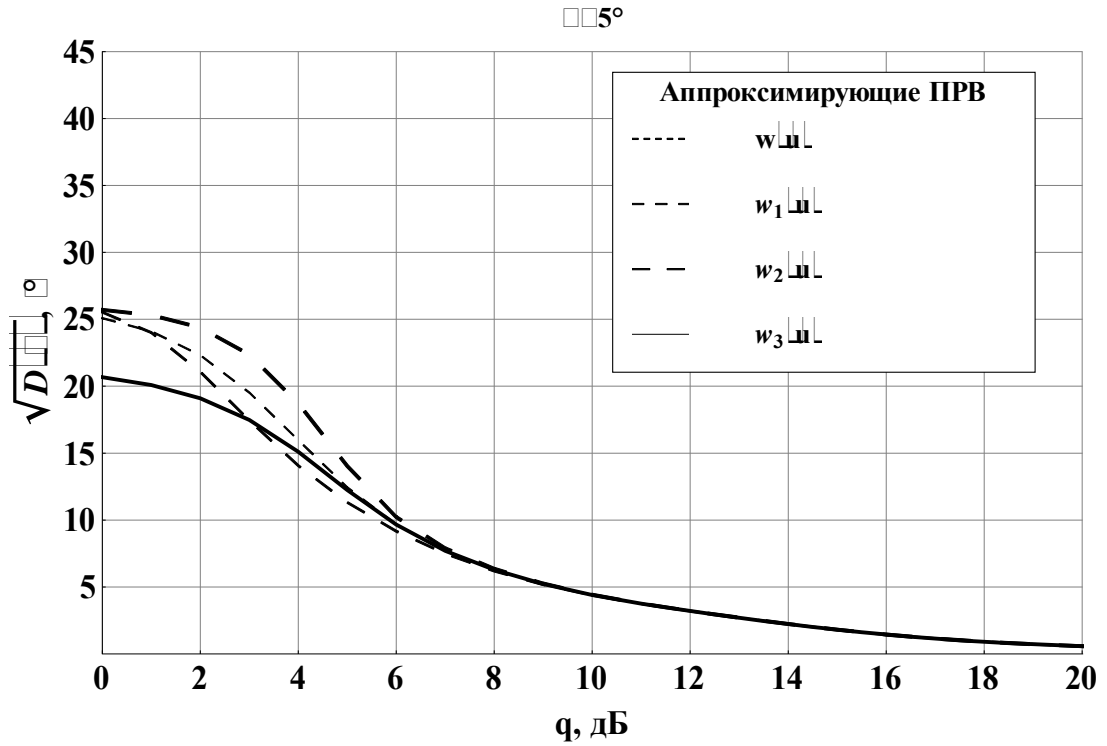


Рисунок 2.4 Зависимость СКО интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум для случая  $\psi = 5^\circ$

Для сравнения степени близости функции плотности вероятности исходного распределения и предложенных аппроксимирующих распределений использовался часто применяемый в подобного рода задачах критерий минимума расстояния полной вариации [41], которое определяется следующим образом:

$$\delta(w(u, \rho, \psi), w_i(u, \rho, \psi)) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} |w(u, \rho, \psi) - w_i(u, \rho, \psi)| du, \quad (2.114)$$

где  $i$  – номер распределения, которое сравнивается с исходным.

На рис. 2.5 – 2.6 и Б.7 – Б.9 (Приложение Б) представлены графики зависимости расстояния полной вариации от отношения сигнал/шум для того же набора истинных разностей фаз, что и ранее.

Анализируя эти графики, можно отметить, что практически для любых  $\psi$  и  $\rho$  (исключая  $\psi$ , близкие к  $\pi/4$ , и (для этого случая)  $\rho$ , близкие к 0 дБ) аппроксимация  $w_1$  на основе "обёрнутого" нормального распределения более точна в смысле расстояния полной вариации, чем аппроксимация  $w_2$  на основе распределения Тихонова-фон Мизеса. Максимальное расхождение между ними в анализируемом диапазоне значений отношения сигнал/шум и истинных значений интегральной разности фаз составляет порядка 12 – 15 дБ.

При этом, как уже было отмечено, в области малых отношений сигнал/шум, кривые для математического ожидания и дисперсии для первой аппроксимации тоже идут значительно ближе к истинным. Соответственно при прочих равных условиях, в случае необходимости выбора одной из этих двух аппроксимаций, предпочтение следует отдать первой. В случае же необходимости использования более простой модели предпочтительнее лучше вторую.

Однако при анализе расстояния полной вариации между исходной плотностью вероятности и третьей её аппроксимацией столь однозначных выводов сделать не удаётся. Исходя из кривых для математического ожидания и дисперсии, можно сделать предположение о том, что данная аппроксимация является наихудшей, однако расстояние полной вариации демонстрирует её существенное преимущество перед другими, начиная уже с небольших отношений сигнал/шум (порядка 1 дБ при малых  $\psi$ ). При этом точка (по отношению сигнал/шум), до которой третья аппроксимация проигрывает, передвигается в сторону меньших шумов (большого ОСШ) при увеличении  $\psi$  (порядка 5 – 5,5 дБ при  $\psi = 55^\circ$ ).

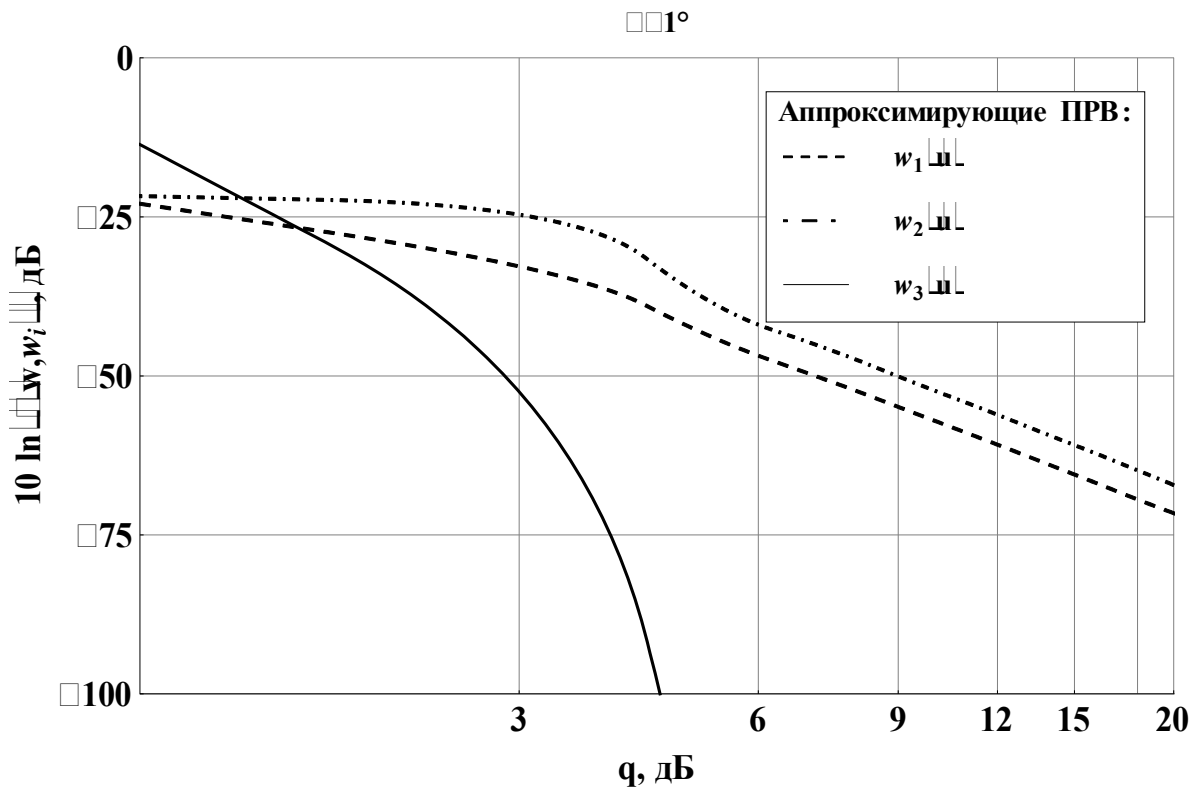


Рисунок 2.5 Зависимость расстояния полной вариации (в логарифмическом масштабе) от отношения сигнал/шум между исходной функцией плотности вероятности и тремя предложенными аппроксимациями для случая  $\psi = 1^\circ$

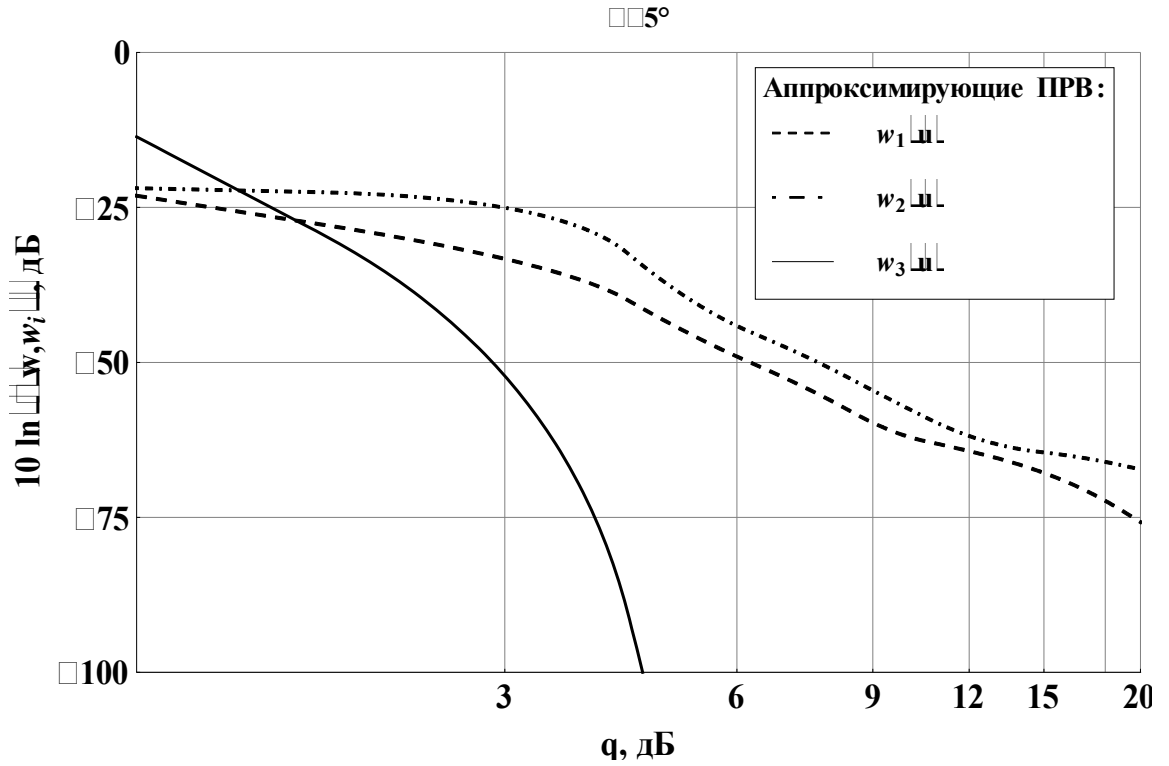


Рисунок 2.6 Зависимость расстояния полной вариации (в логарифмическом масштабе) от отношения сигнал/шум между исходной функцией плотности вероятности и тремя предложенными аппроксимациями для случая  $\psi = 5^\circ$

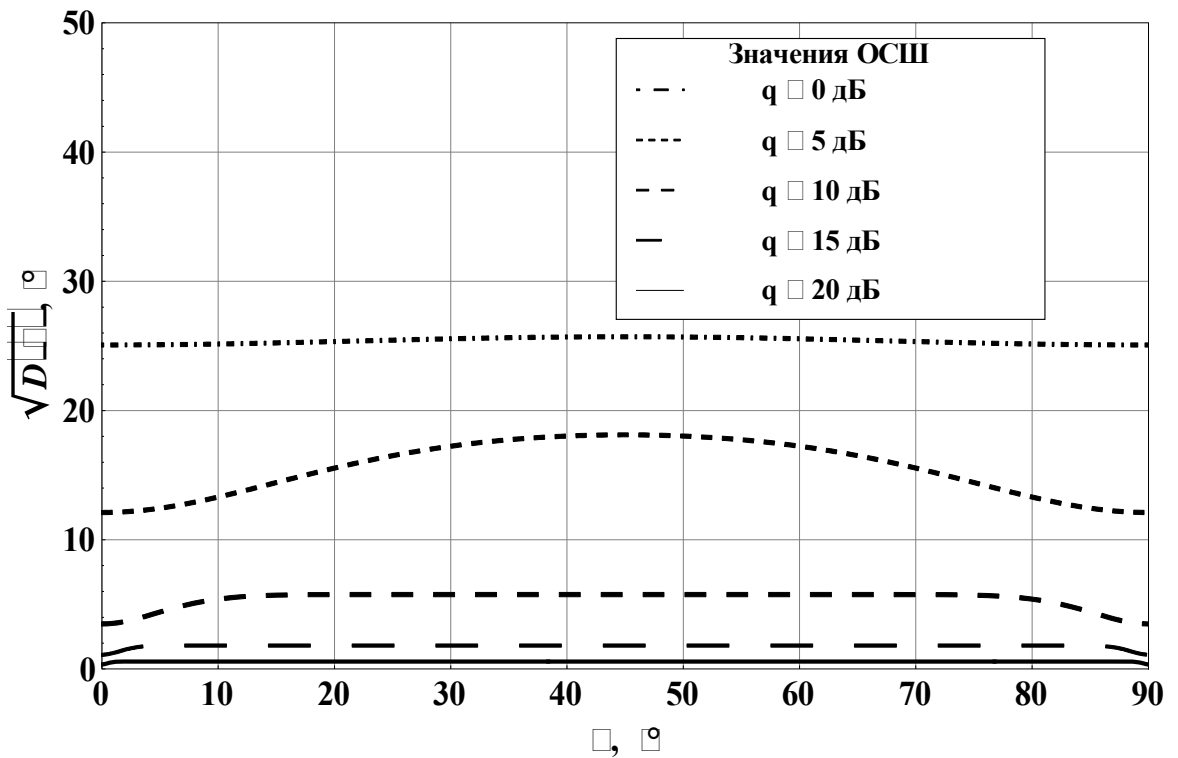


Рисунок 2.7 Зависимость СКО интегральной разности фаз от истинного значения интегральной разности фаз для случая исходной плотности вероятности при различных значениях ОСШ

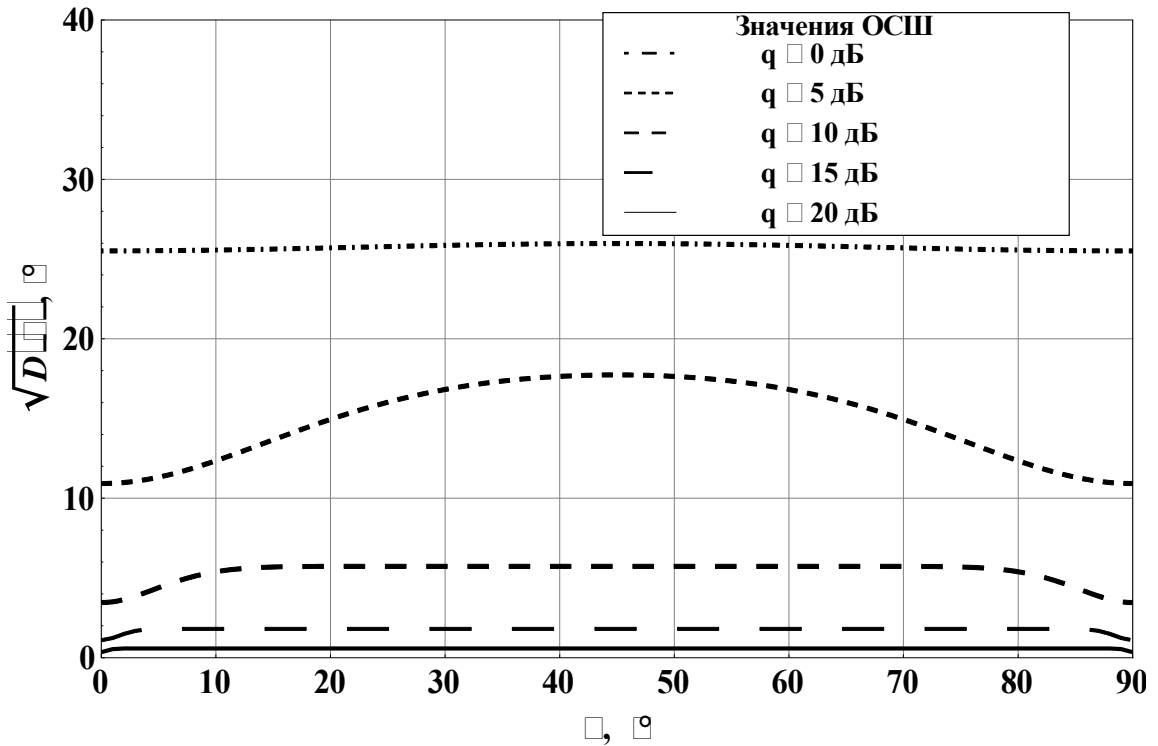


Рисунок 2.8 Зависимость СКО интегральной разности фаз от истинного значения интегральной разности фаз для случая первой аппроксимирующей функции плотности вероятности при различных значениях ОСШ

На рисунках 2.7-2.8 представлены зависимости СКО интегральной разности фаз от истинного значения интегральной разности фаз для случая исходной плотности вероятности и первой аппроксимирующей функции плотности вероятности при различных значениях ОСШ: 0, 5, 10, 15, 20 дБ. Исходя из анализа графиков можно сделать заключение, что в пределах используемой в пункте 2.4 точности поведение СКО практически не зависит от того, какая форма плотности вероятности: строгое выражение или аппроксимирующее используется для вычислений.

### 2.7 Рекомендации по использованию предлагаемых аппроксимаций в задаче оценки параметров объектов радиоголографии эталонным фазовым методом

Анализируя полученные зависимости можно сформулировать несколько рекомендаций относительно использования точных и аппроксимирующих выражений:

- в области больших отношений сигнал/шум (более 6 дБ) любая из аппроксимаций является вполне удовлетворительной и, как следствие, стоит обратить внимание на вычислительные особенности описывающих их выражений:

- для реализации первой аппроксимации на данный момент необходимо использование специализированных вычислительных пакетов с установленными библиотеками специальных функций и преобразованиями над ними, а значит вычислительная сложность практической реализации первой аппроксимации значительно выше, чем у двух других;
- вычислительная сложность второй и третьей аппроксимаций примерно равны;
- в области малых отношений сигнал/шум (менее 6 дБ) предпочтительной является 1 аппроксимация, так как она демонстрирует наименьшее отклонение математического ожидания и дисперсии от их значений, вычисленных с использованием строго выражения;
- в случае если необходимо использовать аппроксимирующее выражение плотности вероятности с наименьшим абсолютным отклонением от истинной во всём диапазоне значений анализируемого параметра, то в области отношений сигнал/шум более 4 – 5 дБ следует отдать предпочтение третьей аппроксимации.

## 2.8 Выводы

1. В данной главе была решена задача определения вероятностных характеристик интегральной разности фаз. Были получены теоретически строгие выражения для:
  - функции распределения интегральной разности фаз;
  - её моментных функций произвольного порядка (в общем виде);
  - её математического ожидания и дисперсии (в явном виде).
2. Получено альтернативное представление функции плотности вероятности и предложены три вида аппроксимации:
  - на основе "обёрнутого" нормального распределения;
  - на основе распределения Тихонова-фон Мизеса;
  - асимптотическое (при больших соотношениях сигнал/шум).
3. Для случая больших отношений сигнал/шум получены асимптотические выражения различной степени точности для моментов 1 – 4-го порядков.
4. Проведены анализ поведения и сравнение первых двух моментов для исходной плотности вероятности и предложенных аппроксимаций. Проведено сравнение аппроксимаций по критерию расстояния полной вариации.
5. Сделаны заключения о применимости полученных асимптотических выражений для моментов и приведены рекомендации по использованию предлагаемых аппроксимаций в задачах оценки параметров объектов радиоголографии эталонным фазовым методом.



### Глава 3 Оценка интегральной разности фаз

Задача оценки интегральной разности фаз является одной из ключевых при построении на её основе эталонного метода определения параметров радиологических объектов. Для построения процедуры оценки воспользуемся выражениями для статистических характеристик, полученными в главе 2, как строгими, так и асимптотическими. Однако стоит отметить, что полученная функция плотности вероятности не удовлетворяет критерию факторизации [35], т.е. достаточной статистики найти не удаётся, а значит, в соответствие с теоремой Неймана-Фишера [6] оптимальной оценки тоже найти не удастся. Исходя из этого, выберем наиболее простую процедуру оценивания, обеспечивающую удовлетворительный результат. Так как на практике чаще всего наиболее простые оценки синтезируются на основе метода моментов, в дальнейшем будем рассматривать именно этот метод. С другой стороны, наиболее распространённым подходом, асимптотически гарантирующим достаточно хорошие свойства получаемой оценки, является метод максимального правдоподобия. Поэтому, определим процедуры получения оценок интегральной разности фаз по заданной выборке методом моментов и максимального правдоподобия. Для получаемых оценок найдём смещения и рассеяния, проанализируем их зависимости от объёма выборки, истинного значения интегральной разности фаз и наличия априорной неопределённости относительно величины коэффициента амплитудного расхождения. Сравним времена, требуемые на получение оценки каждым из рассматриваемых методов, и установим возможность их использования для проведения оценивания в режиме реального времени. А также сформулируем рекомендации по их использованию в зависимости от значений величин учитываемых параметров.

#### 3.1 Нижняя граница для минимального рассеяния оценки интегральной разности фаз

##### 3.1.1 Граница Рао-Крамера

На практике при оценивании неизвестных параметров важно иметь представление о максимально возможной точности оценки: минимальном рассеянии получаемой оценки.

Из литературы [35] хорошо известно, что нижняя граница рассеяния оценки задаётся неравенством Рао-Крамера:

– для случая несмещённой оценки скалярного параметра  $\psi$  :

$$E \left[ (\hat{\psi} - \psi)^2 \right] \geq \frac{1}{N_{stat} I(\psi)}, \quad (3.1)$$

где  $N_{stat}$  – объём статистической выборки (которая предполагается независимой), а  $I(\psi)$  – количество информации по Фишеру, содержащееся в одной выборке, определяющееся выражением:

$$I(\psi) = \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial \ln(w_\varphi(u, \rho, \psi))}{\partial \psi} \right)^2 \right] = -\mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln(w_\varphi(u, \rho, \psi))}{\partial \psi^2} \right]; \quad (3.2)$$

– для случая несмещённой оценки векторного параметра  $\vec{\psi} = \{\psi_1 \dots \psi_{n1}\}$  (где  $n1$  – длина вектора оцениваемых параметров):

$$\mathbf{E} \left[ \left( \hat{\vec{\psi}} - \vec{\psi} \right)^2 \right] \geq \mathbf{I}^{-1}(\vec{\psi}), \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{E} \left[ \left( \hat{\vec{\psi}} - \vec{\psi} \right)^2 \right]$  – ковариационная матрица оценок элементов вектора  $\vec{\psi}$ , а  $\mathbf{I}^{-1}(\vec{\psi})$  – матрица, обратная к информационной матрице Фишера, элементы которой определяются следующим образом:

$$[\mathbf{I}(\vec{\psi})]_{ij} = -\mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2 \ln(w_\varphi(u, \vec{\psi}))}{\partial \psi_i \partial \psi_j} \right]. \quad (3.4)$$

При этом функция плотности вероятности должна быть дважды дифференцируема по оцениваемому параметру и удовлетворять условию регулярности:

$$\mathbf{E} \left[ \frac{\partial w_\varphi(u, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right] = 0, \quad \forall \psi. \quad (3.5)$$

Выражение для границы Рао-Крамера рассеяния несмещённой оценки скалярного параметра  $\psi$  применительно к функции плотности вероятности (2.93) примет вид:

$$\mathbf{E} \left[ \left( \hat{\psi} - \psi \right)^2 \right] \geq (N_{stat} I(\psi))^{-1} = \left( N_{stat} \int_0^{\pi/2} \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial \ln(w_\varphi(u, \rho, \psi))}{\partial \psi} \right)^2 \right] w_\varphi(u, \rho, \psi) du \right)^{-1}, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial \ln(w_\varphi(u, \rho, \psi))}{\partial \psi} \right)^2 \right]$  определяется выражением:

$$E \left[ \left( \frac{\partial \ln(w_\varphi(u, \rho, \psi))}{\partial \psi} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sum_{i=1}^2 v_i(u, \rho, \psi) + 2} \times$$

$$\times \left[ \sqrt{\pi} \left\{ (\rho^2 \cos^2(u - \psi) + 1) \operatorname{tg}(u - \psi) v_1(u, \rho, \psi) + \right. \right. \quad (3.7)$$

$$\left. \left. + (\rho^2 \cos^2(u + \psi) + 1) \operatorname{tg}(u + \psi) v_2(u, \rho, \psi) \right\} - \right. \\ \left. - \rho^2 \sin(2u) \cos(2\psi) \right],$$

$$v_i(u, \rho, \psi) = \frac{\rho \cos(u + \varepsilon_i \psi)}{\sqrt{2}} e^{\frac{\rho^2 \cos^2(u + \varepsilon_i \psi)}{2}} \operatorname{erf} \left( \frac{\rho \cos(u + \varepsilon_i \psi)}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon = \{1, -1\}$ ,  $i = 1, 2$ .

В случае наличия у получаемой оценки параметрического (не постоянного) смещения  $b(\rho, \psi)$  его необходимо учитывать, и выражение для границы Рао-Крамера (3.1) переходит в

$$E \left[ (\hat{\psi} - \psi)^2 \right] \geq b^2(\rho, \psi) + \frac{\left( 1 + \frac{\partial b(\rho, \psi)}{\partial \psi} \right)^2}{E \left[ \left( \frac{\partial \ln(w_\varphi(\bar{u}, \rho, \psi))}{\partial \psi} \right)^2 \right]}. \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Граница Чепмена-Роббинса

Хорошо известно, что формула Рао-Крамера получена при достаточно жёстких ограничениях на модель регистрируемого сигнала и использование её на практике в случае малых соотношений сигнал/шум даёт существенно заниженный результат для величины рассеяния/дисперсии оценки, так называемый пороговый эффект. Это, как правило, связано с тем, что выражения (3.1), (3.9) не учитывают наличия аномальных ошибок, приводящих к появлению ложных максимумов функции автокорреляции принимаемого сигнала, и, как следствие, значительного отклонения оцениваемого параметра от истинного значения, в то время, как эти ошибки и отклонения существенно проявляют себя именно в области малых соотношений сигнал/шум.

Эта проблема является достаточно хорошо изученной, и на данный момент существует большое количество более точных выражений для нижней границы дисперсии несмещённой оценки, среди которых стоит отметить границы Баттачария, Баранкина, Зива-Закая, Абея, Чепмена-Роббинса, Маколэя-Сейдемана, Вайса-Вайнштейна, Руэвена-Мессера, Бобровского-

Закая и др. Несмотря на различный подход при построении этих границ, все они демонстрируют значения минимальной дисперсии оценки большие, чем предсказывает границей Рао-Крамера, то есть ближе к реальным значениям. Обычно указывается, что граница Рао-Крамера является наименьшей из всех возможных границ. Одновременно с этим особую роль играет граница Баранкина, которая теоретически является наивысшей из всех границ минимального значения дисперсии оценки, а значит, является наиболее точной.

Однако, важно указать, что в подавляющем большинстве случаев граница Баранкина не может быть найдена в виде замкнутого аналитического выражения, а численные реализации её поиска чрезвычайно сложны и редко используются на практике, так как требуют решения многомерной условной оптимизационной задачи. С другой стороны, граница Рао-Крамера очень часто (но не всегда) может быть вычислена строго аналитически при заданной модели сигнала и шума.

Разумным, часто используемым компромиссом является граница Чепмена-Роббинса, которая учитывает наличие порогового эффекта и в области малых соотношений сигнал/шум хотя и проигрывает границе Баранкина, точнее, чем граница Рао-Крамера, описывает характер поведения минимально достижимой дисперсии оценки. Дополнительным преимуществом границы Чепмена-Роббинса является отсутствие требования регулярности функции плотности вероятности. При этом в случае использования лишь одной тестовой точки (максимизации по одной переменной) граница Чепмена-Роббинса совпадает с границей Баранкина. Известно также, что асимптотически (при больших временах наблюдения или большом объёме выборки) граница Чепмена-Роббинса совпадает с границей Рао-Крамера.

В литературе широко используется определение границы Чепмена-Роббинса для случая несмещённой оценки:

$$E \left[ (\hat{\psi} - \psi)^2 \right] \geq \sup_h \frac{h^2}{E \left[ \left( \frac{w_\varphi(\vec{u} + h, \rho, \psi)}{w_\varphi(\vec{u}, \rho, \psi)} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (3.10)$$

Однако, как указывалось ранее многими, удобные с точки зрения практического использования процедуры оценивания привносят некоторое смещение, которое не может игнорироваться. Проведённый в ходе диссертационного исследования поиск выражения для границы Чепмена-Роббинса, для смещённой оценки результатов не принёс и, как следствие, была поставлена и решена задача модификации выражения (3.10), учитывающей данный эффект. Отметим, что асимптотически граница Чепмена-Роббинса должна сходиться к границе Рао-Крамера, определяемой выражением (3.9). Отметим также, что она должна находиться

всегда выше, чем граница Рао-Крамера. Исходя из этих положений, можно модифицировать (3.10) до следующей формы:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(\hat{\psi} - \psi)^2\right] &\geq b^2(\rho, \psi) + \sup_h \left\{ \frac{h^2 \left(1 + \frac{\partial b(\rho, \psi)}{\partial \psi}\right)^2}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{w_\varphi(\bar{u} + h, \rho, \psi)}{w_\varphi(\bar{u}, \rho, \psi)}\right)^2 - 1\right]} \right\} = \\ &= b^2(\rho, \psi) + \left(1 + \frac{\partial b(\rho, \psi)}{\partial \psi}\right)^2 \inf_h \left\{ \frac{1}{h^2} \mathbb{E}\left[\left(\frac{w_\varphi(\bar{u} + h, \rho, \psi)}{w_\varphi(\bar{u}, \rho, \psi)}\right)^2 - 1\right] \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Анализ полученного выражения показывает, что в силу выполнения неравенства

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \mathbb{E}\left[\left(\frac{w_\varphi(\bar{u} + h, \rho, \psi) - w_\varphi(\bar{u}, \rho, \psi)}{h w_\varphi(\bar{u}, \rho, \psi)}\right)^2\right] \right) \geq \inf_h \left( \mathbb{E}\left[\left(\frac{w_\varphi(\bar{u} + h, \rho, \psi) - w_\varphi(\bar{u}, \rho, \psi)}{h w_\varphi(\bar{u}, \rho, \psi)}\right)^2\right] \right), \quad (3.12)$$

при фиксированном смещении граница Рао-Крамера будет лежать всегда ниже, чем граница Чепмена-Роббинса. Поэтому именно этим выражением и будем пользоваться в дальнейшем для оценки минимальной дисперсии оценки интегральной разности фаз.

### 3.2 Оценка интегральной разности фаз методом моментов

#### 3.2.1 Процедура нахождения оценки интегральной разности фаз методом моментов.

##### Характеристики оценки

Несмотря на то, что в общем случае оценки, получаемые методом моментов, имеют эффективность и асимптотическую эффективность меньше единицы [35], во многих задачах они позволяют получить сильно состоятельную и асимптотически нормальную оценку [6].

В соответствии с выражениями (2.103) – (2.105) математическое ожидание и дисперсия (с точностью до слагаемых порядка  $\frac{1}{\rho^4}$ , т.е., используя второе приближение выражений (2.103) – (2.105), определяются как:

$$\mathbb{E}[\varphi] \approx |\psi|, \quad (3.13)$$

$$D[\varphi] \approx \frac{1}{\rho^2}. \quad (3.14)$$

Тогда в соответствии с методом моментов оценки для  $\psi$  и  $\rho$  (обозначим их  $\hat{\psi}_{MM}$  и  $\hat{\rho}_{MM}$ ) могут быть найдены достаточно простым образом:

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{MM} = \bar{\varphi}, \\ \hat{\rho}_{MM} = \left(\bar{\varphi}^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.15)$$

где черта сверху означает операцию нахождения выборочного среднего.

Важно отметить, что при отбрасывании в выражении (2.103) слагаемых, соответствующих (по порядку малости) порядку разложения, математическое ожидание перестаёт зависеть от других параметров: коэффициента амплитудного расхождения и отношения сигнал-шум. Однако численный анализ характеристик распределения  $\varphi$  (см. рис. 1.1–1.5) показал, что для исходной функции плотности вероятности, как и для любой предложенной её аппроксимации, в области малых отношений сигнал-шум математическое ожидание  $\varphi$  зависит не только от отношения сигнал-шум, но и от истинного значения  $\psi$ . Так, например, для случая истинного значения  $\psi = 10^\circ$  математическое ожидание, рассчитанное с использованием любой из представленных аппроксимаций (как и с использованием истинной функции распределения вероятности), при отношениях сигнал-шум более 9 дБ отличается от истинного значения не более чем на 1%. При увеличении истинного значения  $\psi$  граничное отношение сигнал-шум, при котором наблюдается отличие не более 1%, уменьшается.

Исходя из вышесказанного, можно сделать предварительное заключение о применимости метода моментов для оценки интегральной разности фаз. В частности, можно отметить, что:

- получаемая оценка  $\hat{\psi}_{MM}$  не зависит от априорного знания ОСШ и коэффициента амплитудного расхождения;
- получаемая оценка  $\hat{\psi}_{MM}$  будет асимптотически несмещённой;
- получаемая оценка  $\hat{\psi}_{MM}$  будет асимптотически эффективной [6];
- исходя из рис. 1.1 – 1.5, в области малых ОСШ оценки  $\hat{\psi}_{MM}$  будут иметь смещение, зависящее от  $\psi$ , при этом:
  - при истинном значении  $\psi < 45^\circ$  и малых ОСШ получаемая  $\hat{\psi}_{MM}$  является завышенной;
  - при истинном значении  $\psi > 45^\circ$  и малых ОСШ получаемая  $\hat{\psi}_{MM}$  является заниженной;

– исходя из графиков, представленных на рисунках 1.11–1.12, можно сделать заключение, что зависимости дисперсии и рассеяния оценки будут расходиться в области малых ОСШ, что связано с наличием параметрического (по  $\rho$  и  $\psi$ ) смещения, при этом зависимость дисперсии от  $\psi$  достаточно слабая.

Стоит отметить также, что использование более высокого порядка аппроксимации при определении математического ожидания выражения (3.13) не даёт преимуществ, т.к. в соответствии с (2.104) первый момент при любом порядке аппроксимации остаётся неизменен, что связано с исходными положениями, в условиях которых он получен (большое ОСШ и, как следствие, отбрасывание слагаемых  $\frac{1}{\rho^{2n}}$ , где  $n$  – порядок аппроксимации).

Определим основные характеристики оценки интегральной разности фаз, получаемой методом моментов: её распределение, состоятельность, смещённость, эффективность.

Для определения закона распределения оценок модуля интегральной разности фаз воспользуемся предположением о их независимости. В этом случае известно, что плотность вероятности суммы независимых случайных величин определяется через  $n$ -кратную свёртку плотностей вероятности отдельных случайных величин (где  $n$  – количество слагаемых в сумме). Тогда

$$w_{\hat{\psi}_{MM}}(x) = \left( w_{\varphi} *_{x} w_{\varphi} \right)^{N_{stat}}, \quad (3.16)$$

где под оператором  $\left( f *_{x} g \right)$  подразумевается  $N_{stat}$ -кратная свёртка функций  $f$  и  $g$  относительно переменной  $x$ . Стоит отметить, что, так как оцениваемая случайная величина (а значит и её функция плотности распределения вероятности) является  $\frac{\pi}{2}$  периодичной, то под свёрткой надо подразумевать круговую свёртку.

Прямая подстановка в (3.16) выражения для  $w_{\varphi}(u, \rho, \psi)$  приводит к необходимости  $N_{stat}$ -кратного интегрирования выражений вида (2.93), что, к сожалению, является в общем случае не решаемой в замкнутом аналитическом виде задачей. Однако, возможно найти предельное распределение оценки при стремлении объёма выборки к бесконечности. Для этого учтём, что получаемая оценка является статистикой первого рода и в соответствии с теоремой 1 из § 7 в [6] распределение оценок модуля интегральной разности фаз слабо сходится к нормальному закону распределению вероятности:

$$\sqrt{N_{stat}} (\hat{\psi}_{MM} - E[\varphi]) \Rightarrow \xi, \quad (3.17)$$

где случайная величина  $\xi$  подчинена нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной дисперсии  $\varphi$ , т.е.  $\xi \square N(0, D[\varphi])$ , а символ  $\Rightarrow$  означает слабую сходимость.

По определению оценка, получаемая методом моментов, будет являться состоятельной, если при  $N_{stat} \rightarrow \infty$  будет выполняться  $\hat{\psi}_{MM} \xrightarrow{P} \psi$ , где сходимость понимается в смысле сходимости по вероятности, т.е. для любого сколь угодно малого наперёд заданного  $\varepsilon$  при неограниченном возрастании доступного объёма выборки должно выполняться равенство

$$\lim_{N_{stat} \rightarrow \infty} P(|\hat{\psi}_{MM} - \psi| > \varepsilon) = 0. \quad (3.18)$$

Для доказательства состоятельности оценки (3.15) воспользуемся неравенством Чебышёва:

$$P(|\hat{\psi}_{MM} - E[\hat{\psi}_{MM}]| > \varepsilon) \leq \frac{D[\hat{\psi}_{MM}]}{\varepsilon^2}. \quad (3.19)$$

Приведём его к виду (3.18). Будем считать, что оценки  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_{stat}}$ , получаемые на практике, независимы и одинаково распределены. Из этого непосредственно следует, что для математического ожидания и дисперсии оценки интегральной разности фаз, полученной методом моментов, можно записать:

$$E[\hat{\psi}_{MM}] = E[\bar{\varphi}] = E\left[\frac{1}{N_{stat}} \sum_{j=1}^{N_{stat}} \varphi_j\right] = \frac{1}{N_{stat}} \sum_{j=1}^{N_{stat}} E[\varphi_j] = E[\varphi], \quad (3.20)$$

$$D[\hat{\psi}_{MM}] = D[\bar{\varphi}] = D\left[\frac{1}{N_{stat}} \sum_{j=1}^{N_{stat}} \varphi_j\right] = \frac{1}{N_{stat}^2} \sum_{j=1}^{N_{stat}} D[\varphi_j] = \frac{D[\varphi]}{N_{stat}}. \quad (3.21)$$

Учитывая асимптотические выражения (3.13) и (3.14), можно записать:

$$E[\hat{\psi}_{MM}] \approx |\psi|, \quad (3.22)$$

$$D[\hat{\psi}_{MM}] \approx \frac{1}{\rho^2 N_{stat}}. \quad (3.23)$$

Подставляя (3.22), (3.23) в неравенство (3.19) и учитывая, что под истинным значением подразумевается именно модуль интегральной разности фаз, имеем:



$$\begin{aligned} \lim_{N_{stat} \rightarrow \infty} P(|\hat{\psi}_{MM} - \psi| > \varepsilon) &= \lim_{N_{stat} \rightarrow \infty} P(|\hat{\psi}_{MM} - E[\hat{\psi}_{MM}]| > \varepsilon) \leq \\ &\leq \lim_{N_{stat} \rightarrow \infty} \frac{D[\hat{\psi}_{MM}]}{\varepsilon^2} = \lim_{N_{stat} \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\varepsilon^2 \rho^2 N_{stat}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Стоит отметить, что для доказательства состоятельности оценки были использованы асимптотические выражения для дисперсии и математического ожидания в предположении большого ОСШ. Данное предположение удобно с точки зрения наглядности, однако необязательно: для получения того же результата можно воспользоваться более общими формулами (2.86), (2.92).

Доказательство можно было провести также основываясь на том факте, что выборочное среднее является статистикой первого рода [6], а, следовательно, оценки получаемые на основе таких статистик являются состоятельными.

Для определения смещения оценки в соответствии с выражением

$$b(\rho, \psi) = E[\hat{\psi}_{MM}] - \psi \quad (3.25)$$

произведём усреднение значений модуля интегральной разности фаз по выборке в предположении независимости и одинакового распределения её элементов. Используя полученное выражение (3.20), имеем:

$$b(\rho, \psi) = E[\varphi] - \psi. \quad (3.26)$$

При анализе поведения смещения оценки можно рассматривать два режима:

1. Режим большого ОСШ – смещение  $b_I(\rho, \psi)$ . В этом случае можно пользоваться приближёнными выражениями (2.104), тогда среднее значение оценки совпадает с истинным значением интегральной разности фаз, а значит, оценка получается несмещённой, т.е.  $b_I(\rho, \psi) = 0$ .
2. Режим малого ОСШ – смещение  $b_{II}(\rho, \psi)$ . В этом случае приходится использовать строгое выражение (2.86) или (2.98) для  $E[\varphi]$ ; последняя оказывается несколько более удобной для вычислений. Тогда смещение для режима малого ОСШ будет определяться следующим выражением:

$$b_{II}(\rho, \psi) = \left( \frac{\pi}{4} - \psi \right) + \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l - 1}{l^2} \cos(2l\psi) \left( I_{l+\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) + I_{l-\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho^2}{4} \right) \right). \quad (3.27)$$

Выражение (3.27) в общем случае не удаётся представить в замкнутой форме, и для более детального его анализа приходится использовать численные алгоритмы.

Говоря об эффективности получаемой оценки, стоит отметить, что, как было указано выше, плотность вероятности интегральной разности фаз (представляющая собой двухкомпонентную смесь распределений Беннетта) не принадлежит экспоненциальному семейству, а значит, не может быть факторизована для нахождения достаточной статистики, как следствие, можно говорить в лучшем случае о её асимптотической эффективности.

При определении степени эффективности оценки, получаемой методом моментов, можно, как и при анализе её смещения, рассматривать два режима:

1. режим большого ОСШ (рассеяние -  $D_I(\rho, \psi)$  и дисперсия  $\hat{D}_I(\rho, \psi)$ );
2. режим малого ОСШ (рассеяние -  $D_{II}(\rho, \psi)$  и дисперсия  $\hat{D}_{II}(\rho, \psi)$ ).

В режиме большого ОСШ получаемая оценка оказывается несмещённой и, как следствие, дисперсия совпадает с рассеянием оценки и определяется выражением (3.23).

В случае малого ОСШ дисперсия оценки будет определяться следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{D}_{II}(\rho, \psi) = & \frac{\pi^2}{48} + \sqrt{\frac{\pi^3}{32}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + 1}{l^2} \cos(2l\psi) \left( I_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) + I_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) \right) - \\ & - \frac{1}{8\pi} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2}} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l - 1}{l^2} \cos(2l\psi) \left( I_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) + I_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

а рассеяние примет вид

$$\begin{aligned} D_{II}(\rho, \psi) = & \left( \frac{\pi^2}{12} - \psi^2 \right) + \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{4}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (1 - 2\psi) + 2\psi}{l^2} \times \\ & \times \cos(2l\psi) \left( I_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) + I_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2}{4}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Анализируя полученные выражения, особенно отметим предельное выражение при  $\rho = 0$ . Данный случай соответствует отсутствию полезной компоненты, соответствующей полю рассеяния исследуемого объекта в регистрируемом сигнале. Очевидно, что в этом случае

$\varphi$  описывает модуль фазы (в диапазоне  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ) нормально распределённого гауссовского

вектора с нулевым математическим ожиданием. Очевидно, что закон распределения фазы будет носить равномерный характер и как, следствие, дисперсия фазы, равномерно распределённой в

диапазоне  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , будет равна  $\hat{D}_{II}(\rho = 0, \psi) = \frac{\pi^2}{48}$ .

### 3.2.2 Анализ результатов статистического моделирования оценки интегральной разности фаз методом моментов

Для моделирования оценки интегральной разности фаз методом моментов в соответствии с (3.13) в среде Wolfram Mathematica 8.0 была написана программа, генерирующая выборку из распределения (2.93) для значений ОСШ от 1 до 20 дБ с шагом 1 дБ и для ряда значений интегральной разности фаз  $\psi = \{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ\}$ . Для каждого значения ОСШ и  $\psi$  было сгенерировано  $10^6$  отсчётов, сгруппированных в  $10^3$  групп по  $10^3$  отсчётов в каждой. После чего для каждой группы было проведено оценивание  $\hat{\psi}_{MM}$ , в результате чего для каждого значения ОСШ и  $\psi$  было получено  $10^3$  оценок. Для каждого набора оценок была построена гистограмма и проверена гипотеза о нормальности их распределения по критерию Колмогорова-Смирнова с уровнем значимости 0,05 (снимки экрана результата работы программы для отдельных значений ОСШ и  $\psi$  представлены в приложении Д). Также для полученного набора оценок были рассчитаны смещения и рассеяния оценок.

На рисунке 3.1 представлено смещение оценок полученных методом моментов для случая  $\psi = \{1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 30^\circ\}$ . Из анализа графика можно сделать заключение, что, как и предполагалось ранее, получаемая методом моментов оценка  $\hat{\psi}_{MM}$  в области малых отношений сигнал/шум обладает смещением. При этом пороговое значение отношения сигнал/шум (назовём его  $q_{nop}$ ), при котором оно становится пренебрежимо мало (например, 1% от максимального значения), монотонно уменьшается с увеличением истинного значения интегральной разности фаз: от 16 дБ при  $\psi = 1^\circ$  до 6 дБ при  $\psi = 30^\circ$ .

На рисунках 3.2 – 3.3 и в приложении В (В.1 – В.6) (в логарифмическом масштабе по обеим осям) представлены корень из рассеяния оценок полученных методом моментов для случая  $\psi = \{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ\}$ . Пунктирной линией нанесены графики рассеяния полученной оценки, а сплошной – граница Рао-Крамера для случая данного  $\psi$ .

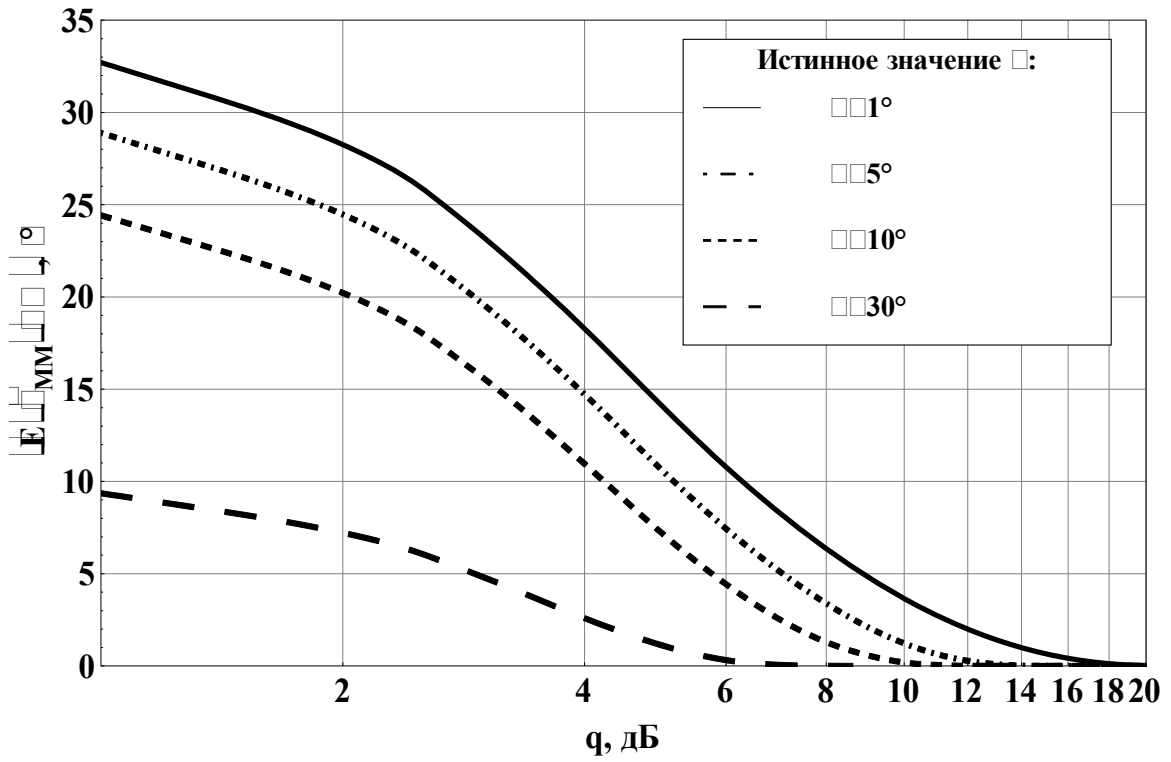


Рисунок 3.1 Зависимость смещения оценки от отношения сигнал/шум для ряда значений

$$\psi = \{1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 30^\circ\}$$

$$\psi = 1^\circ$$

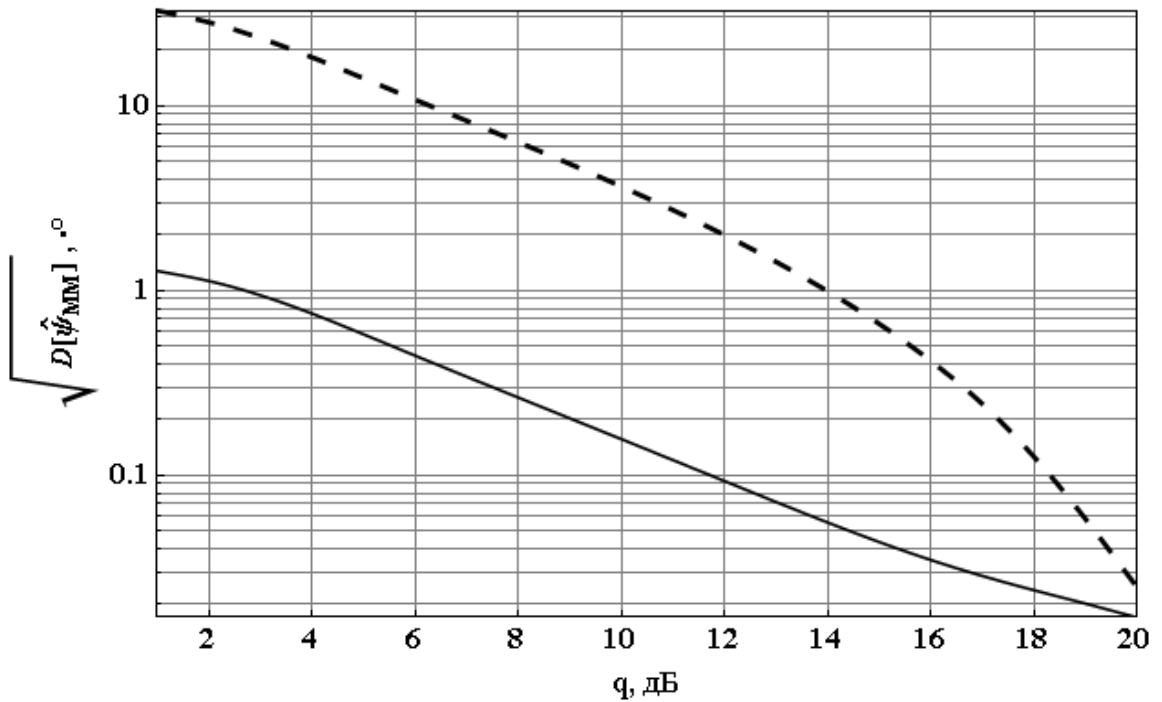


Рисунок 3.2 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном

значении  $\psi = 1^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов,

сплошная – граница Рао-Крамера

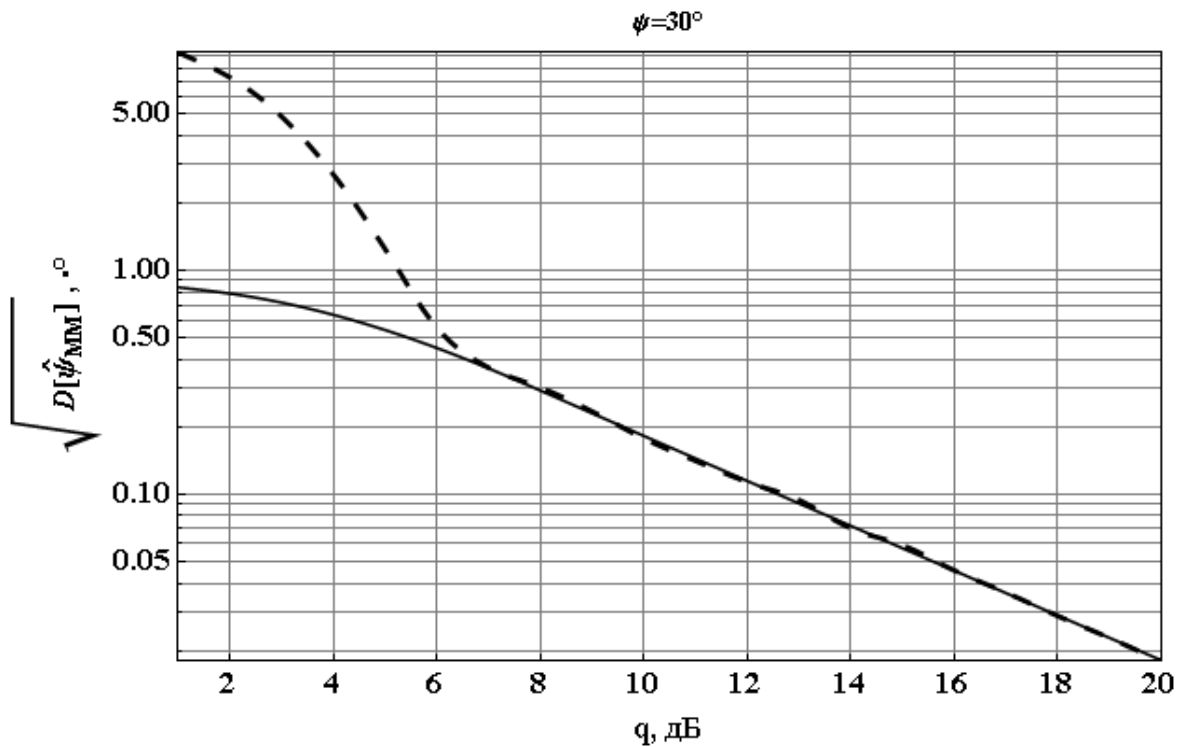


Рисунок 3.3 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном значении  $\psi = 30^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов, сплошная – граница Рао-Крамера

Полученные зависимости ярко демонстрируют наличие порогового эффекта при оценке интегральной разности фаз методом моментов, при этом в области больших отношений сигнал/шум рассеяние оценки совпадает с минимально возможным значением, определяемым границей Рао-Крамера, а в области малых отношении сигнал/шум существенно с ней расходится из-за появления аномальных ошибок. При этом сопоставление графиков, представленных на рисунках 3.1 и 3.2-3.3, указывает, что область пороговых значений отношения сигнал/шум совпадает с участком, на котором проявляется существенная смещённость оценки. Быстрая сходимость рассеяния оценки  $\hat{\psi}_{MM}$  в области отношений сигнал/шум больше  $q_{пор}$  позволяет сделать заключение, что получаемая оценка асимптотически эффективна. Это можно объяснить нормализацией распределения оценок, что косвенно подтверждается в приложении Д, где с помощью написанного программного обеспечения распределение оценок проверялось на нормальность с помощью теста Колмогорова-Смирнова.

Выберем в качестве критерия применимости используемой оценки величину допустимого отклонения СКО получаемой (в общем случае не эффективной) оценки методом моментов относительно границы Рао-Крамера в 0,1 %:

$$x_q(\psi) : \left| \sqrt{D[\hat{\psi}_{\text{ММ}}]}(x_q) - \sqrt{\text{CRB}(\psi, x_q)} \right| \leq 0.01. \quad (3.30)$$

Тогда, исходя из графиков, представленных на рисунках 3.2 – 3.3 и в приложении В (В.1 – В.6), можно сказать, что процедура оценивания неизвестного параметра радиологического объекта методом моментов может быть эффективно используема, если:

- при  $\psi = 1^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 20 дБ;
- при  $\psi = 2^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 18 дБ;
- при  $\psi = 3^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 16,5 дБ;
- при  $\psi = 4^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 15 дБ;
- при  $\psi = 5^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 13 дБ;
- при  $\psi = 10^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 11 дБ;
- при  $\psi = 20^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 8 дБ;
- при  $\psi = 30^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 6 дБ.

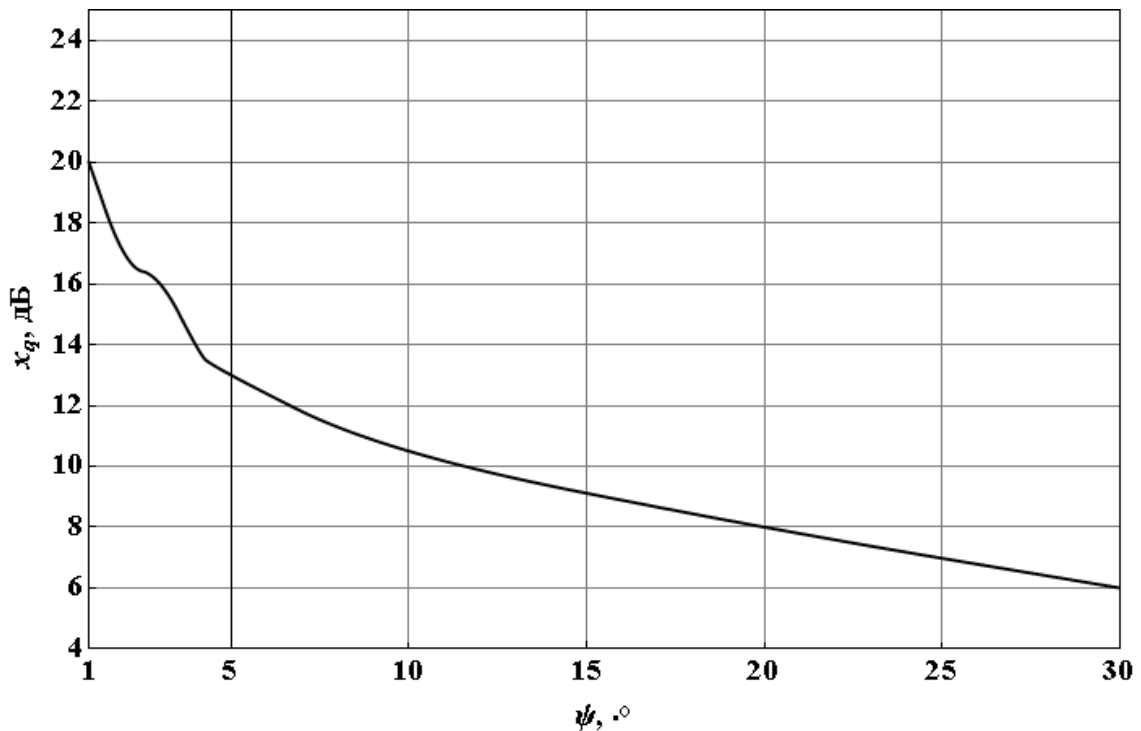


Рисунок 3.4 Зависимость величины порогового отношения сигнал/шум от истинного значения интегральной разности фаз

Как указывалось в пункте 3.1.2 граница Рао-Крамера в области малых отношений сигнал/шум даёт существенно заниженное значение минимально возможной

дисперсии/рассеяния оценки и в этом случае более точное значение даётся границей Чепмена-Роббинса.

На рисунках 3.5 – 3.6 для  $\psi = \{5^\circ, 10^\circ\}$  и в приложении В (В.7 – В.12) для  $\psi = \{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 20^\circ, 30^\circ\}$  представлены сравнения зависимостей от отношения сигнал/шум корня из рассеяния оценок полученных методом моментов, с границами Рао-Крамера и Чепмена-Роббинса.

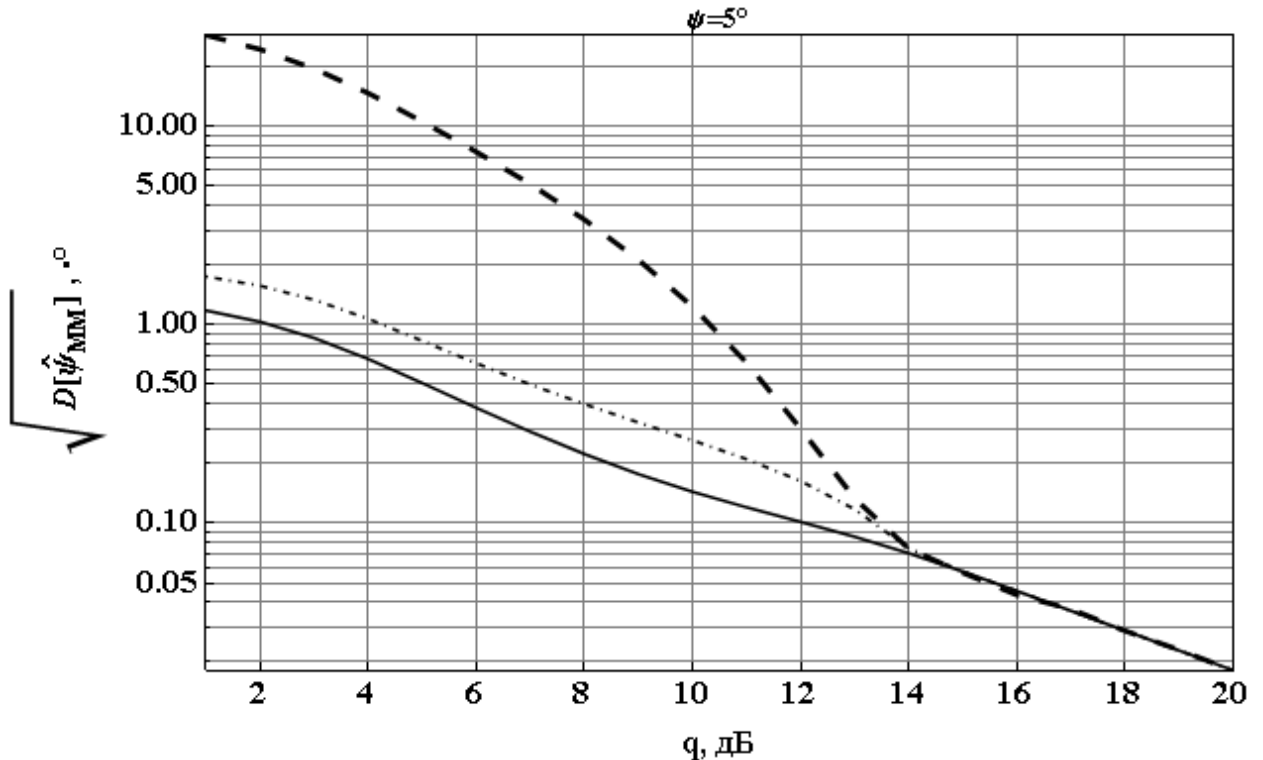


Рисунок 3.5 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 5^\circ$

Анализ полученных зависимостей указывает, что, как и ожидалось, граница Чепмена-Роббинса монотонна во всём диапазоне отношений сигнал/шум и лежит ближе к выборочному рассеянию, нежели граница Рао-Крамера, а значит, точнее её приближает.

Зависимость рассеяний, задаваемых границами Рао-Крамера (3.9) и Чепмена-Роббинса (3.11), от объёма выборки неявным образом учтена в многомерной плотности вероятности выборки, и при увеличении  $N_{stat}$  они монотонно уменьшаются.

Значение порогового отношения сигнал/шум (определяемого по расхождению границы Чепмена-Роббинса и рассеянию оценки по методу моментов в 1%) составляет:

- при  $\psi = 1^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 20 дБ;

- при  $\psi = 2^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 17 дБ;
- при  $\psi = 3^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 15 дБ;
- при  $\psi = 4^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 14 дБ;
- при  $\psi = 5^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 13 дБ;
- при  $\psi = 10^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 10 дБ;
- при  $\psi = 20^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 7,5 дБ;
- при  $\psi = 30^\circ$  отношение сигнал/шум в системе составляет не менее 6 дБ.

Сравнение с пороговым отношением сигнал/шум, определённым относительно границы Рао-Крамера (см. рисунок 3.4) показывает, что в районе 1–2 дБ (в зависимости от истинного значения интегральной разности фаз) в области порога граница Чепмена-Роббинса совпадает (с точностью до 1%) с рассеянием оценки, полученной с помощью метода моментов (см., например, рисунок 3.6). А значит характеристики методов (точность, вероятность ошибки, разрешающая способность и др.), использующих моментные оценки интегральной разности фаз, будут больше приближены к реальности.

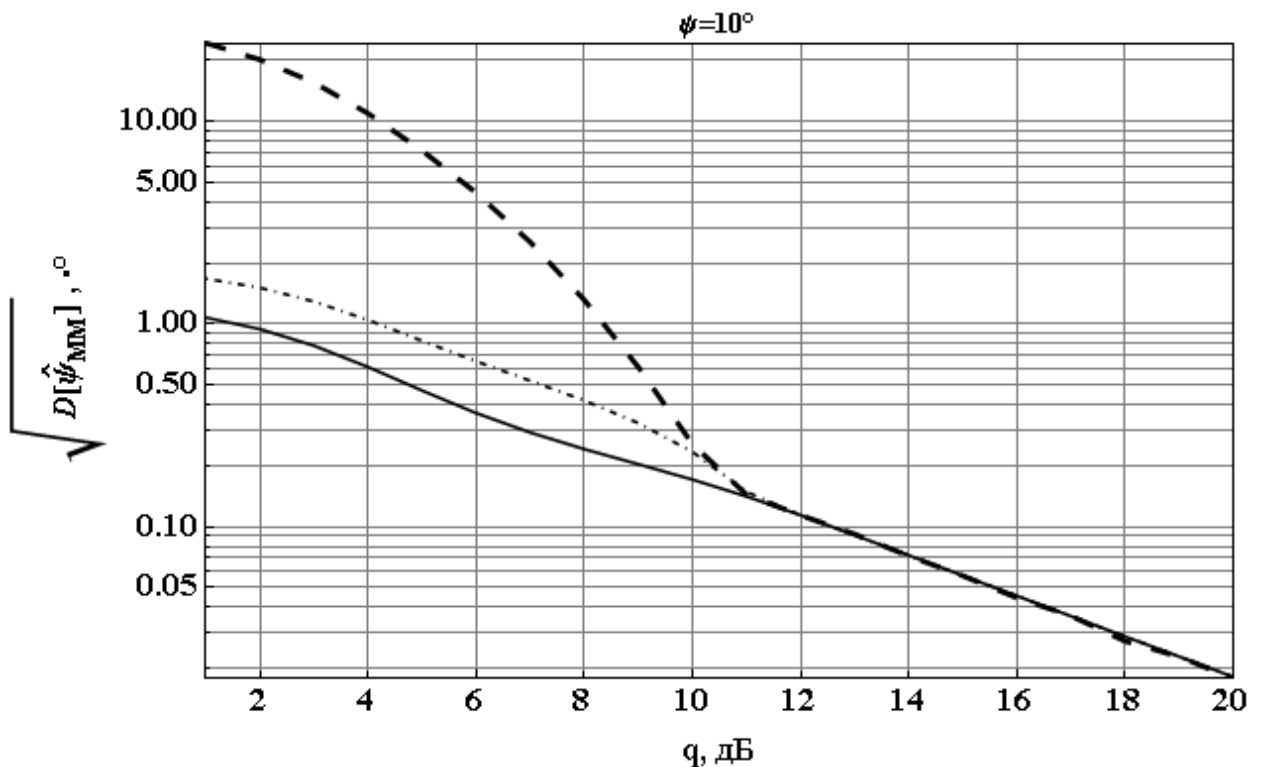


Рисунок 3.6 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 10^\circ$



При этом важно отметить, что в выражение (3.15) не входят значения отношения сигнал шум и коэффициент амплитудного расхождения, а значит, рассеяние получаемой оценки не зависит от априорного знания этих параметров, что является несомненным плюсом этой процедуры оценивания.

### 3.3 Оценка интегральной разности фаз методом максимального правдоподобия

#### 3.3.1 Процедура нахождения оценки интегральной разности фаз методом максимального правдоподобия. Характеристики оценки

Одним из наиболее широко используемых подходов определения параметра положения распределений Беннетта (или Тихонова-фон-Мизеса) является максимально правдоподобное оценивание (МП) [105-106], [117], [125-128]. Логично рассматривать данный метод для оценки истинного значения интегральной разности фаз  $\psi$ . На практике существующие методы и алгоритмы максимально правдоподобной оценки параметров, использующие фазовую структуру сигнала, достаточно чувствительны к наличию аномальных ошибок (выбросов) и применяются при достаточно больших соотношениях сигнал/шум. Хорошо известно, что при таком условии начинает сказываться "хорошее" (близкое к асимптотическому) поведение МП оценок: асимптотическая несмещённость, эффективность и нормальность. При этом в области малого соотношения сигнал/шум МП оценки теряют свои "хорошие" характеристики и могут вести себя достаточно непредсказуемо. На данный момент не существует однозначного ответа на вопрос о величине порогового соотношения сигнал/шум, при котором обеспечивается подобное поведение оценок. При этом эта величина будет однозначно зависеть от объёма выборки, доступной для анализа (или, что эквивалентно, времени анализа при непрерывном наблюдении), истинного значения интегральной разности фаз и коэффициента амплитудного расхождения.

Предположим, что для анализа доступна выборка значений независимых реализаций интегральной разности фаз  $\varphi$  объёмом  $N_{stat}$ . В этом случае ПВ выборки и логарифм функции правдоподобия (ФП) запишутся в виде:

$$w_{\varphi}(\vec{u}, \rho, \psi) = w_{\varphi}(u_1, \dots, u_{N_{stat}}, \rho, \psi) = \prod_{n=1}^{N_{stat}} w_{\varphi}(u_n, \rho, \psi); \quad (3.31)$$

$$\Lambda(\vec{u}, \rho, \psi) = \sum_{n=1}^{N_{stat}} \ln w_{\varphi}(u_n, \rho, \psi). \quad (3.32)$$

МП оценка истинного значения интегральной разности фаз  $\hat{\psi}_{МП}$  будет искажаться путём максимизации полученного логарифма ФП:

$$\hat{\psi}_{МП} = \arg \max_{0 \leq \psi \leq \pi/2} (\Lambda(\vec{u}, \rho, \psi)). \quad (3.33)$$

Стоит отметить, так как полученная плотность вероятности (2.93) не удовлетворяет критерию факторизации, а, следовательно, процедура максимизации функционала при большом объёме выборки будет являться достаточно трудоёмкой. Исходя из этого, удобнее воспользоваться алгоритмом прямого поиска корня уравнения

$$\hat{\psi}_{МП} : \begin{cases} \left. \frac{\partial \Lambda(\vec{u}, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\hat{\psi}_{МП}} = 0; \\ \left. \frac{\partial^2 \Lambda(\vec{u}, \rho, \psi)}{\partial \psi^2} \right|_{\psi=\hat{\psi}_{МП}} \leq 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Раскрывая первое равенство системы уравнений (3.34), получим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \sum_{n=1}^{N_{stat}} \ln w_{\varphi}(u_n, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\hat{\psi}_{МП}} &= \sum_{n=1}^{N_{stat}} \left. \frac{\partial \ln w_{\varphi}(u_n, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\hat{\psi}_{МП}} = \\ &= \sum_{n=1}^{N_{stat}} \frac{1}{w_{\varphi}(u_n, \rho, \hat{\psi}_{МП})} \left. \frac{\partial w_{\varphi}(u_n, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\hat{\psi}_{МП}} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Подставляя функцию плотности распределения вероятности (2.93), производя дифференцирование и упрощение, первое условие приводим к виду:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_{stat}} \left( \frac{\frac{\rho^2}{2} \sin(2(u_n - \hat{\psi}_{МП})) {}_1F_1\left(2; \frac{3}{2}; \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n - \hat{\psi}_{МП})\right)^2\right) -}{1 + \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n - \hat{\psi}_{МП})\right)^2 {}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n - \hat{\psi}_{МП})\right)^2\right)} + \right. \\ \left. \frac{-\frac{\rho^2}{2} \sin(2(u_n + \hat{\psi}_{МП})) {}_1F_1\left(2; \frac{3}{2}; \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n + \hat{\psi}_{МП})\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n + \hat{\psi}_{МП})\right)^2 {}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n + \hat{\psi}_{МП})\right)^2\right)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

или, вводя обозначения

$$\vec{v}_n = \left\{ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n - \hat{\psi}_{МП}), \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u_n + \hat{\psi}_{МП}) \right\}, \quad (3.37)$$

$$\vec{\mu}_n = \left\{ \frac{\rho^2}{2} \sin(2(u_n - \hat{\psi}_{МП})), -\frac{\rho^2}{2} \sin(2(u_n + \hat{\psi}_{МП})) \right\}, \quad (3.38)$$

можно привести (3.36) к достаточно компактной форме записи:

$$\sum_{n=1}^{N_{stat}} \left( \frac{\sum_{i=1}^2 \mu_{n,i} {}_1F_1\left(2; \frac{3}{2}; v_{n,i}^2\right)}{1 + \sum_{i=1}^2 v_{n,i}^2 {}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; v_{n,i}^2\right)} \right) = 0. \quad (3.39)$$

В случае, когда оценка производится лишь по одному наблюдению ( $N_{stat} = 1$ ), уравнение (3.39) эквивалентно решению следующего трансцендентного уравнения:

$$\begin{aligned} & \sin(2(u - \hat{\psi}_{МП})) {}_1F_1\left(2; \frac{3}{2}; \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u - \hat{\psi}_{МП})\right)^2\right) + \\ & + \sin(2(u + \hat{\psi}_{МП})) {}_1F_1\left(2; \frac{3}{2}; \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(u + \hat{\psi}_{МП})\right)^2\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Учитывая свойства корней конфлюэнтной гипергеометрической функции [50] и ограничение на допустимый диапазон изменения оцениваемой величины, можно показать, что данное уравнение имеет только один вещественный корень, удовлетворяющий постановке задачи  $\hat{\psi}_{МП} = u$ , что является достаточно очевидным и ожидаемым результатом.

Таким образом, можно формализовать процедуру поиска оценки максимального правдоподобия следующими шагами: по полученной выборке в соответствии с вероятностной моделью измеряемой величины (2.93) формируется набор величин (3.37), (3.38), используя которые, ищется корень уравнения (3.39), удовлетворяющий второму условию системы (3.34).

### 3.3.2 Анализ результатов статистического моделирования оценки интегральной разности фаз методом максимального правдоподобия

Для возможности сравнения результатов, получаемых методом максимального правдоподобия, с результатами, полученными в пункте 3.2.2 методом моментов, параметры моделирования были выбраны идентичными параметрам в пункте 3.2.2 за исключением величины диапазона изменения соотношения сигнал/шум: не от 1 до 20 дБ, а от 5 до 20 дБ с

шагом 1 дБ. Для каждого значения ОСШ и  $\psi$  было сгенерировано  $10^6$  отсчётов, сгруппированных в  $10^3$  групп по  $10^3$  отсчётов в каждой. После чего для каждой группы было проведено оценивание  $\hat{\psi}_{МП}$ , в результате чего для каждого значения ОСШ и  $\psi$  было получено  $10^3$  оценок. Для нахождения оценки максимального правдоподобия использовался метод, описанный в пункте 3.3,1: полученная выборка использовалась для нахождения решения системы (3.34), где первое из них записывалось в виде (3.39). К системе также добавлялись ограничения на получаемое решение, соответствующие тому, что сигнал, регистрируемый приёмником, содержит полезную компоненту (т.е.  $\rho \neq 0$ ), что получаемая величина лежит по определению в диапазоне от 0 до  $\pi/2$ . Для решения данной условной оптимизационной задачи использовался метода Бройдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно, который является разновидностью квазиньютоновских методов и совмещает в себе высокую скорость и точность поиска решения при больших объёмах выборки.

На рисунках 3.7 и 3.8 приведены графики зависимостей смещения и корня из рассеяния максимально правдоподобных оценок от соотношения сигнал/шум, действующего на входе системы, для значения истинной интегральной разности фаз  $1^\circ$ ,  $4^\circ$  и  $10^\circ$  и объёма выборки 1000 отсчётов. Для наглядности при  $\psi = 1^\circ, 10^\circ$  приведено десятикратное значение рассеяния.

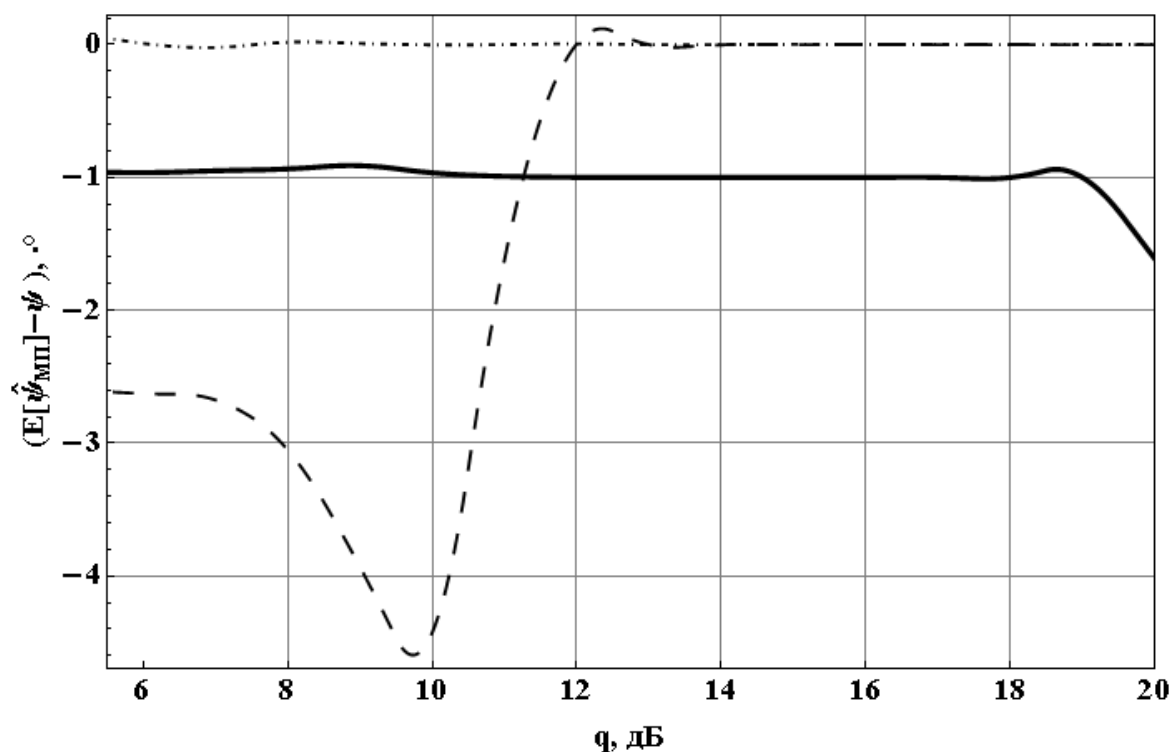


Рисунок 3.7 Смещение максимально правдоподобной оценки для случаев  $\psi = 1^\circ$  (сплошная кривая),  $\psi = 4^\circ$  (пунктирная кривая),  $\psi = 10^\circ$  (штрихпунктирная кривая) при объёме выборки 1000 отсчётов

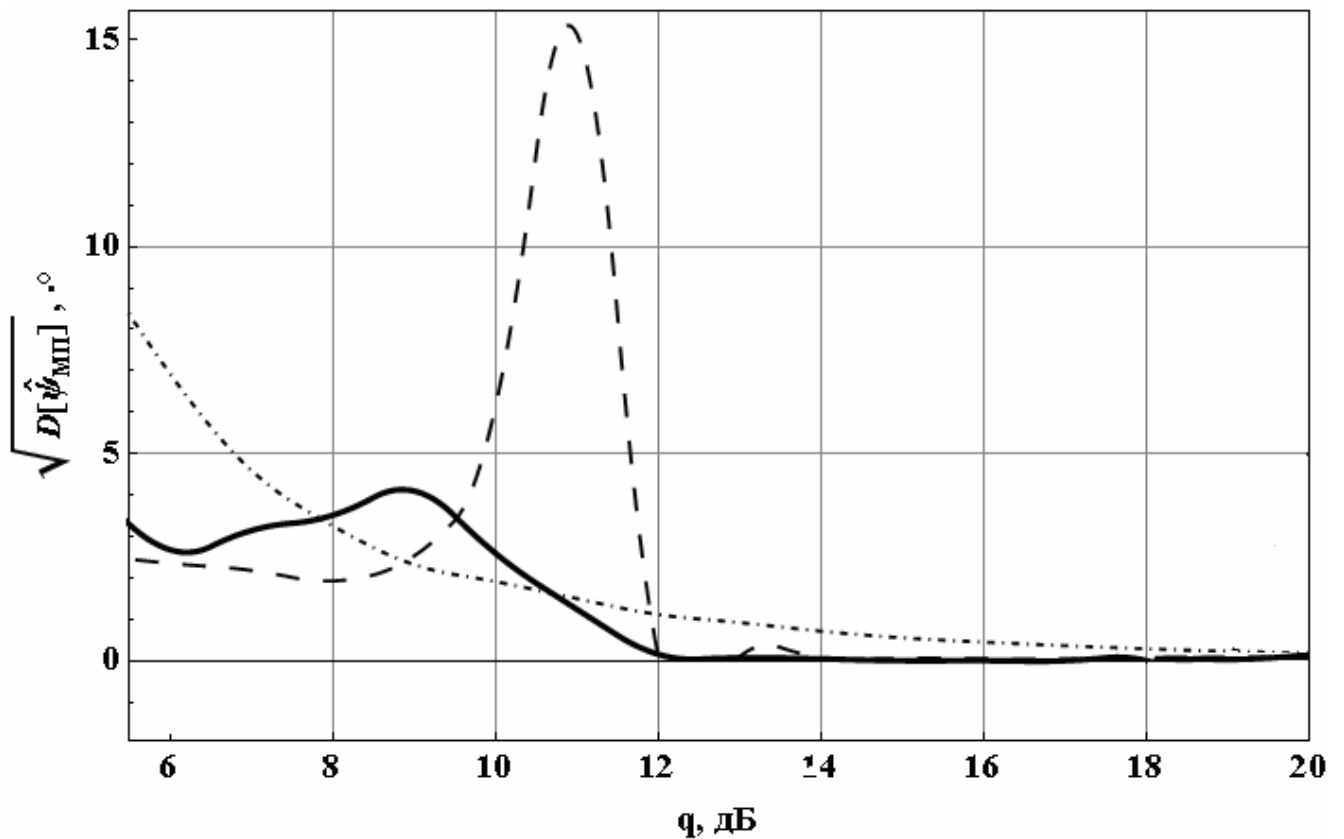


Рисунок 3.8 Корень из рассеяния максимально правдоподобной оценки для случаев  $\psi = 1^\circ$  (сплошная кривая),  $\psi = 4^\circ$  (пунктирная кривая),  $\psi = 10^\circ$  (штрихпунктирная кривая) при объёме выборки 1000 отсчётов

Результаты моделирования при одинаковом объёме выборки (1000 отсчётов) показали, что получаемая максимально правдоподобная оценка интегральной разности фаз, также как и оценка, получаемая методом моментов, обладает существенным параметрическим смещением для малых значений истинной интегральной разности фаз (до  $5^\circ$ ) и малого соотношения сигнал/шум (до 12 дБ). Однако, если в при использовании метода моментов смещение монотонно уменьшается с увеличением соотношения сигнал/шум, то при использовании максимально правдоподобного алгоритма смещение ведёт себя существенно не монотонно (при том же объёме выборки).

С увеличением интегральной разности фаз смещение оценки при ОСШ более 12 дБ становится незначительным (выполняется свойство асимптотической несмещённости максимально правдоподобных оценок). Рассеяние оценки максимального правдоподобия также демонстрирует немонотонное поведение при ОСШ до 14 дБ и интегральной разности фаз до  $10^\circ$ , что затрудняет возможность использования таких оценок на практике.

Такое крайне неординарное поведение оценок максимального правдоподобия может быть объяснено недостаточным объёмом статистической выборки. Стоит отметить, что в

теории, как уже отмечалось, вопрос о необходимом объёме выборки не имеет строго решения (так как это во многом определяется используемой моделью сигнала, шума и схемой приёма/предобработки), и изначально выбранный объём в 1000 отсчётов казался достаточным. Косвенно идею о недостаточности объёма выборки подтверждал факт отсутствия нормальности в распределении оценок: также как и для метода моментов, при максимально правдоподобном оценивании проверялась гипотеза о нормальности их распределения по критерию Колмогорова-Смирнова с уровнем значимости 0,05, и для объёма выборки 1000 элементов данная гипотеза при соотношении сигнал/шум менее 15 дБ отвергалась.

Для улучшения характеристик МП оценок объём статистической выборки был увеличен в 2 раза. Полученные результаты для тех же значений параметров моделирования, представленные на рисунках 3.9 и 3.10, продемонстрировали хорошее согласие с гипотезой о недостаточности объёма выборки в 1000 отсчётов для проведения максимально правдоподобного оценивания. При увеличении объёма выборки существенно улучшается поведение рассеяния и смещения оценки в области малых ОСШ. Для удобства сравнения кривые на рисунке 3.9 приведены с десятикратным увеличением.

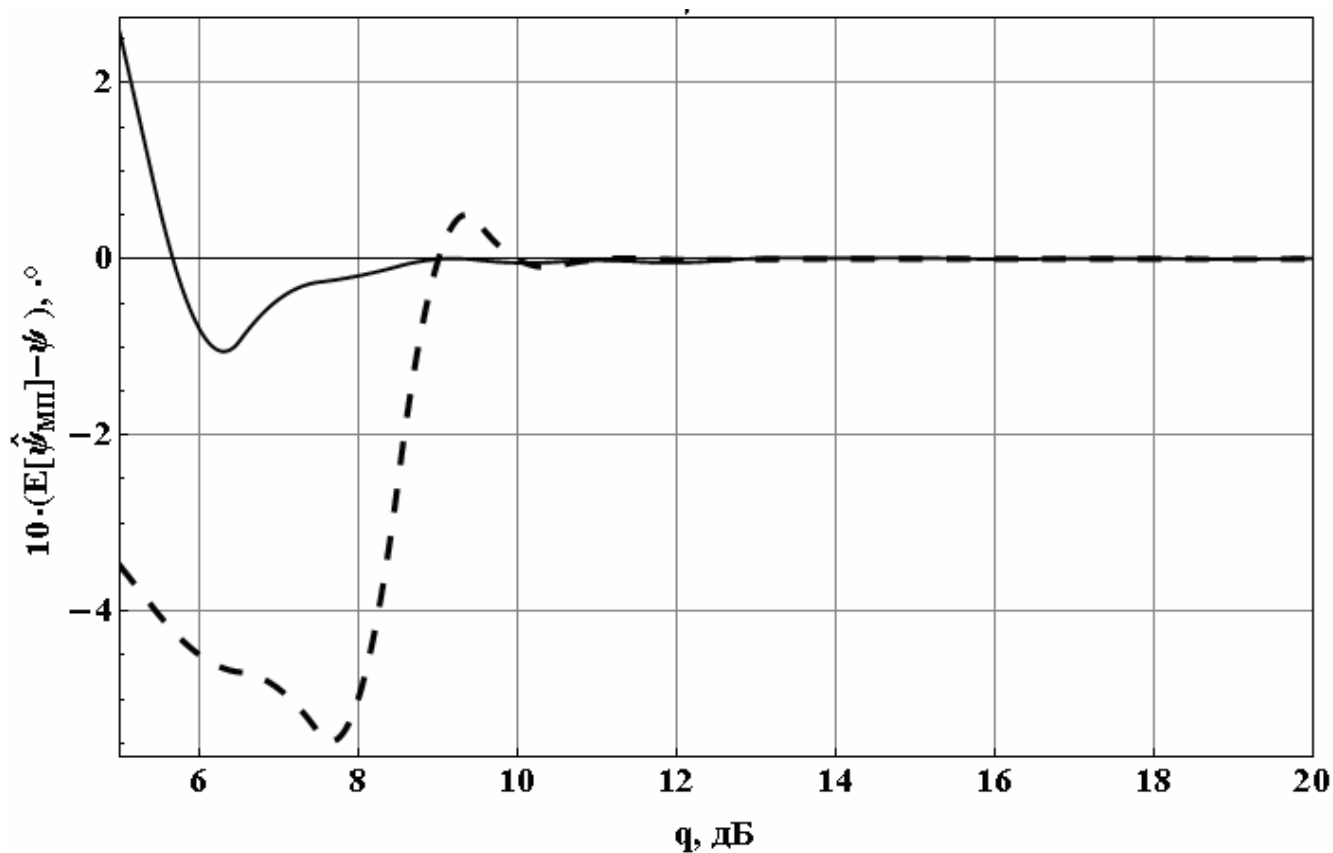


Рисунок 3.9 Смещение максимально правдоподобной оценки для  $\psi = 5^\circ$  при объёме выборки 2000 отсчётов (сплошная кривая) и 1000 отсчётов (пунктирная кривая)

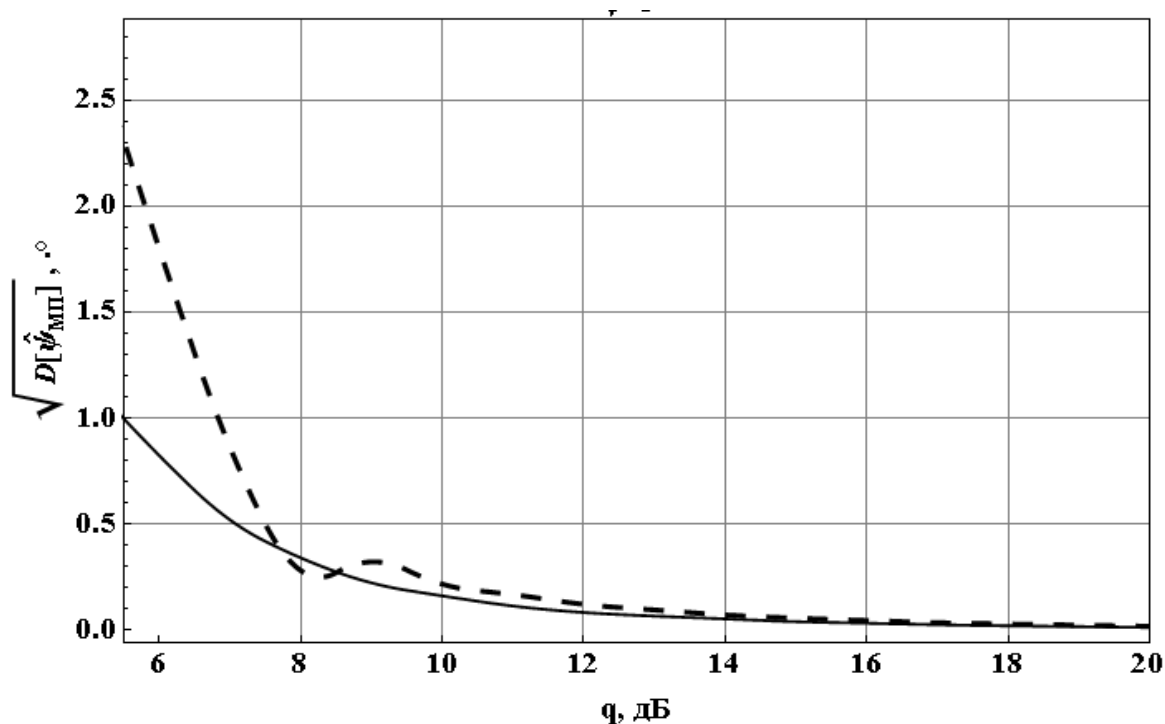


Рисунок 3.10 Корень из рассеяния максимально правдоподобной оценки для  $\psi = 5^\circ$  при объёме выборки 2000 отсчётов (сплошная кривая) и 1000 отсчётов (пунктирная кривая)

На рисунках 3.11 и 3.12 приведено сравнение зависимостей корня из рассеяния максимально правдоподобных оценок и оценок, получаемых на основе метода моментов, от соотношения сигнал/шум, действующего на входе системы, для значения истинной интегральной разности фаз  $1^\circ$  и  $5^\circ$  и объёма выборки 1000 отсчётов. Аналогичные зависимости для случаев интегральной разности фаз  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  и  $4^\circ$  вынесены на рисунки Г.1 – Г.3 Приложения Г. Сравнение рисунка 3.12 с рисунком 3.13, где при тех же остальных параметрах объём выборки увеличен до 2000 отсчётов демонстрирует влияние объёма выборки на величину корня из рассеяния оценки. На всех графиках также нанесены граница Рао-Крамера (сплошной жирной линией) и граница Чепмена-Роббинса (штрих-пунктирной линией).

Как видно из полученных результатов дисперсия максимально правдоподобной оценки в области малых отношений сигнал шум (до 10 дБ) практически не меняется и крайне слабо зависит от истинного значения интегральной разности фаз, что говорит о чрезвычайно малой информативности такой оценки, хотя её дисперсия несколько меньше, чем у метода моментов. Такое поведение максимально правдоподобной оценки может частично быть объяснено нехваткой объёма выборки, что косвенно было подтверждено при увеличении последнего.

Расхождение оценок относительно границ (как Рао-Крамера, так и Чепмена-Роббинса) в области малых соотношений сигнал/шум велико, что, как уже было отмечено, объясняется наличием аномальных ошибок, неучитываемых границей Рао-Крамера.

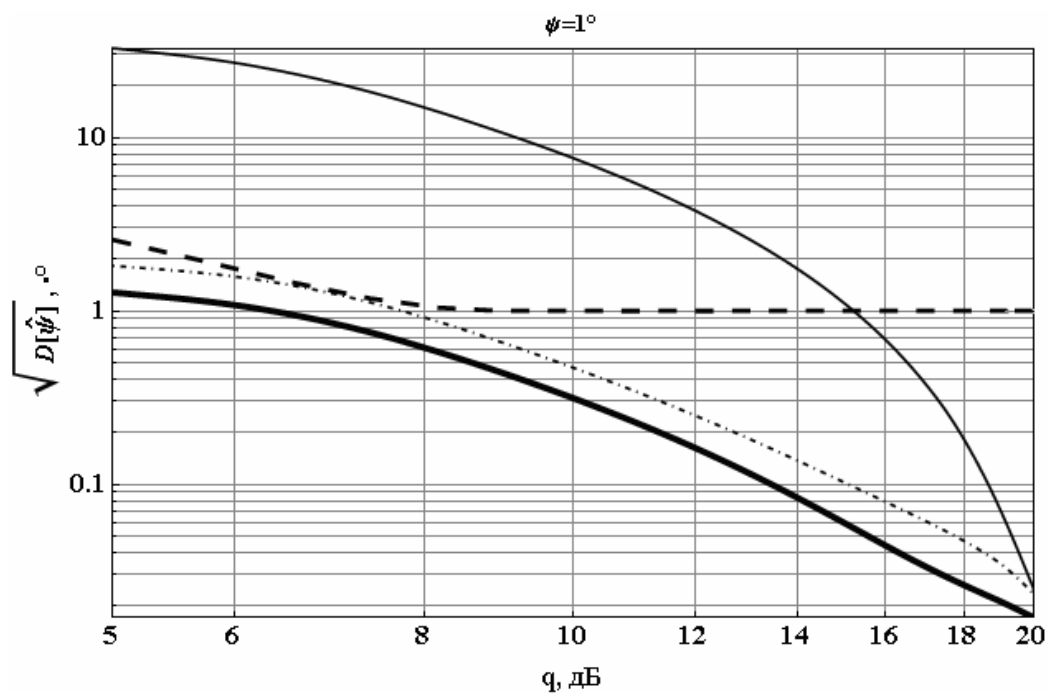


Рисунок 3.11 Корень из рассеяния оценки для  $\psi = 1^\circ$  при объёме выборки 1000 отсчётов для метода максимального правдоподобия (пунктирная кривая), метода моментов (сплошная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная жирная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

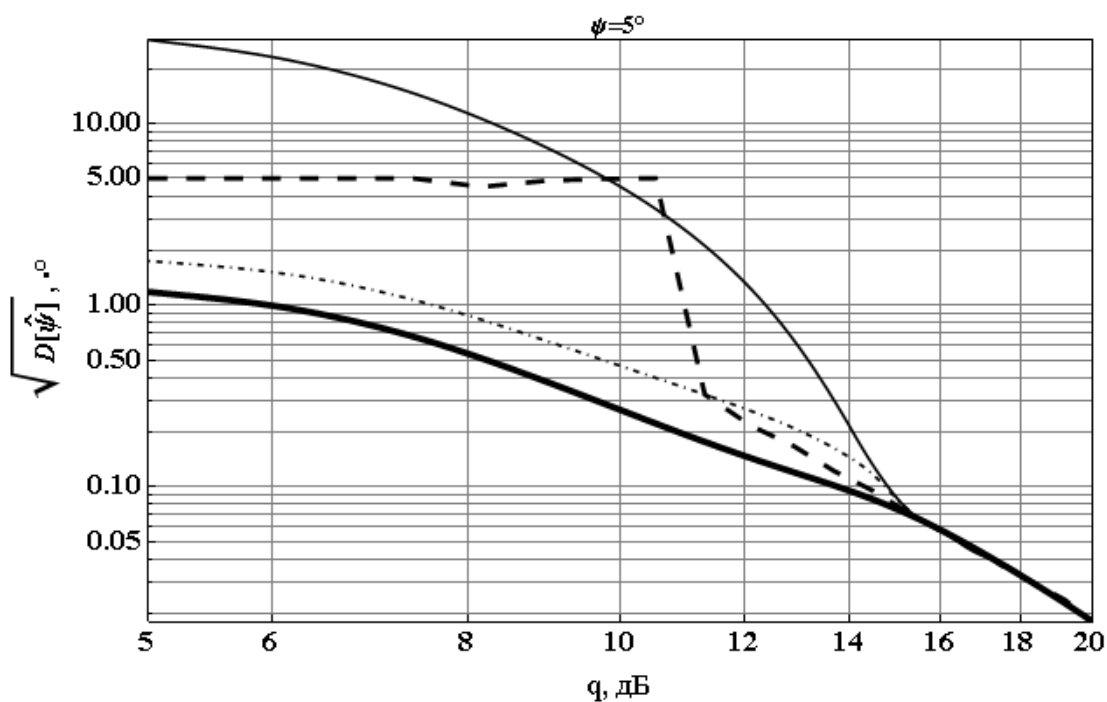


Рисунок 3.12 Корень из рассеяния оценки для  $\psi = 5^\circ$  при объёме выборки 1000 отсчётов для метода максимального правдоподобия (пунктирная кривая), метода моментов (сплошная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная жирная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)



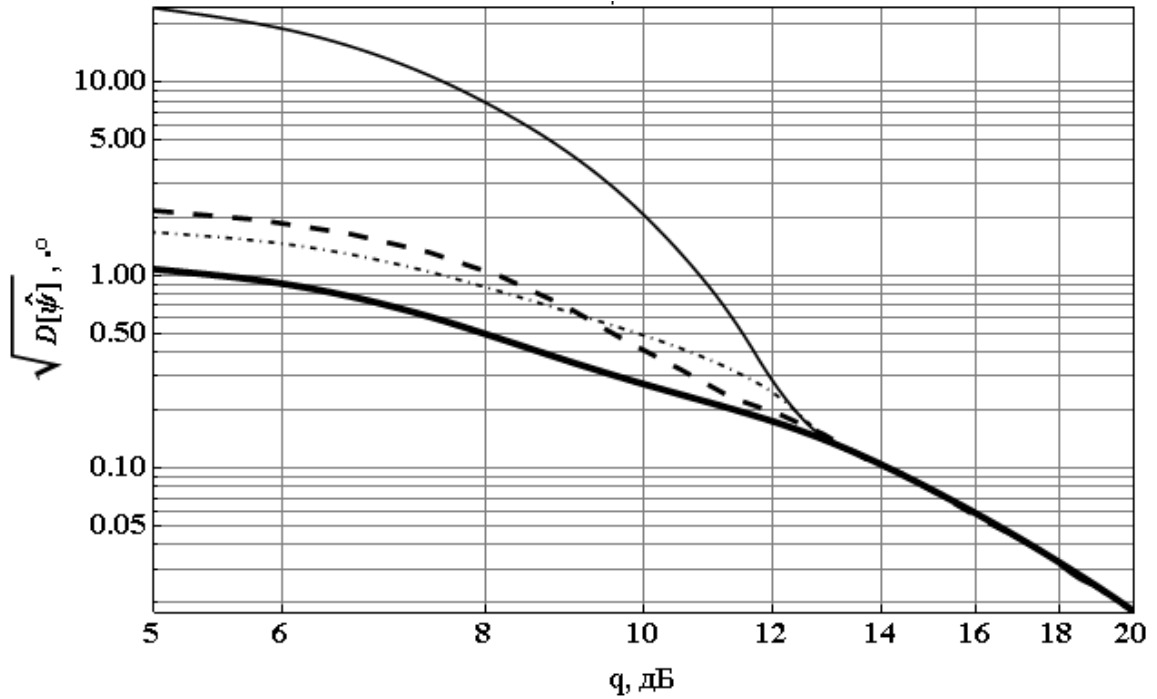


Рисунок 3.13 Корень из рассеяния оценки для  $\psi = 5^\circ$  при объёме выборки 2000 отсчётов для метода максимального правдоподобия (пунктирная кривая), метода моментов (сплошная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная жирная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

Несмотря на достаточно высокий выигрыш в дисперсии получаемой оценки за счёт применения метода максимального правдоподобия по сравнению с методом моментов на увеличенной выборке, он существенно проигрывает во времени получения оценки.

Для сравнения можно указать, что для оценивания интегральной разности фаз методом моментов по выборке в  $N$  элементов, требуется ровно  $N + 1$  операция ( $N$  сложений и одно деления). Соответственно время, требуемое на расчёт, сравнимо с временем, необходимым вычислительному устройству на проведение  $N + 1$  операции (сложения/деления), что для современных ПК, микропроцессоров или микроконтроллеров составляет от микро- до миллисекунд.

Для проведения же оценки по методу максимального правдоподобия требуется решать оптимизационную задачу (3.33) или искать решение (3.39). На практике последнее оказывается несколько более предпочтительным: сокращается время вычислений и понижается чувствительность к выбору начального приближения. Для поиска решения чаще всего используются метод Брента, ньютоновские/квазиньютоновские алгоритмы, метод сечений, метод сопряжённых градиентов или метод Бroyдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно. Сравнение показало, что в области малых соотношений сигнал/шум (до 10 дБ) все методы и условия оптимизации, и поиска корня чрезвычайно чувствительны к выбору начального приближения.

При этом время, требуемое для поиска корня уравнения (3.39) при объёме выборки 1000 отсчётов варьируется от нескольких секунд (квазиньютоновский метод и метод сопряженных градиентов), до нескольких десятков секунд (ньютоновский метод, метод Нелдера-Мида, дифференциальной эволюции) и существенно зависит от настроек каждого из возможных методов. Сокращение времени достигается за счёт снижения устойчивости алгоритмов, что не может быть приемлемым на практике. Таким образом, использование максимально правдоподобного алгоритма на выборках от 100 отсчётов даёт решение за время на несколько порядков большее, чем требуется методу моментов. Важно отметить, что, как показал анализ рассеяния оценки, выборки в 100 и даже 1000 отсчётов с практической точки зрения не достаточно, а для случая 2000 отсчётов время возрастает ещё существеннее.

Сложность данной задачи может быть несколько понижена путём аппроксимации (при больших величинах соотношений сигнал/шум) производной функционала правдоподобия её разложением в ряд Тейлора, при котором оставляется такое количество слагаемых, чтобы итоговая относительная ошибка не превосходила некоторый заданный порог. Например, задаваясь порогом в 1%, можно ограничиться только первым членом ряда разложения:

$$\left. \frac{\partial \ln(w_\varphi(u_n, \rho, \psi))}{\partial \psi} \right|_{\rho \rightarrow \infty} \approx \frac{\sin(2(u_n - \psi)) \sqrt{\cos^2(u_n + \psi)} e^{\frac{\rho^2}{2} \cos^2(u_n - \psi)} (\rho^2 \cos^2(u_n - \psi) + 1) - \sin(2(u_n + \psi)) \sqrt{\cos^2(u_n - \psi)} e^{\frac{\rho^2}{2} \cos^2(u_n + \psi)} (\rho^2 \cos^2(u_n + \psi) + 1) - \cos^2(u_n - \psi) \sqrt{\cos^2(u_n + \psi)} e^{\frac{\rho^2}{2} \cos^2(u_n - \psi)}}{2 \left( \sqrt{\cos^2(u_n - \psi)} \cos^2(u_n + \psi) e^{\frac{\rho^2}{2} \cos^2(u_n + \psi)} + \cos^2(u_n - \psi) \sqrt{\cos^2(u_n + \psi)} e^{\frac{\rho^2}{2} \cos^2(u_n - \psi)} \right)} = 0. \quad (3.41)$$

Тогда, используя обозначения (3.37) и (3.38), можно привести (3.39) к форме:

$$\sum_{n=1}^{N_{stat}} \left. \frac{\partial w_\varphi(u_n, \rho, \psi)}{\partial \psi} \right|_{\rho \rightarrow \infty} \approx \sum_{n=1}^{N_{stat}} \left( \frac{\sum_{i=1}^2 \mu_{n,i} \sqrt{v_{n,3-i}^2} e^{v_{n,i}^2} \left( v_{n,i}^2 + \frac{1}{2} \right)}{\sum_{i=1}^2 v_{n,i}^2 \sqrt{v_{n,3-i}^2} e^{v_{n,i}^2} \left( v_{n,i}^2 + \frac{1}{2} \right)} \right) = 0. \quad (3.42)$$

Выражение (3.42) является несколько более простым с точки зрения вычисления корня уравнения, чем (3.39), и, как следствие, при незначительном снижении точности даёт существенный выигрыш во времени расчёта.

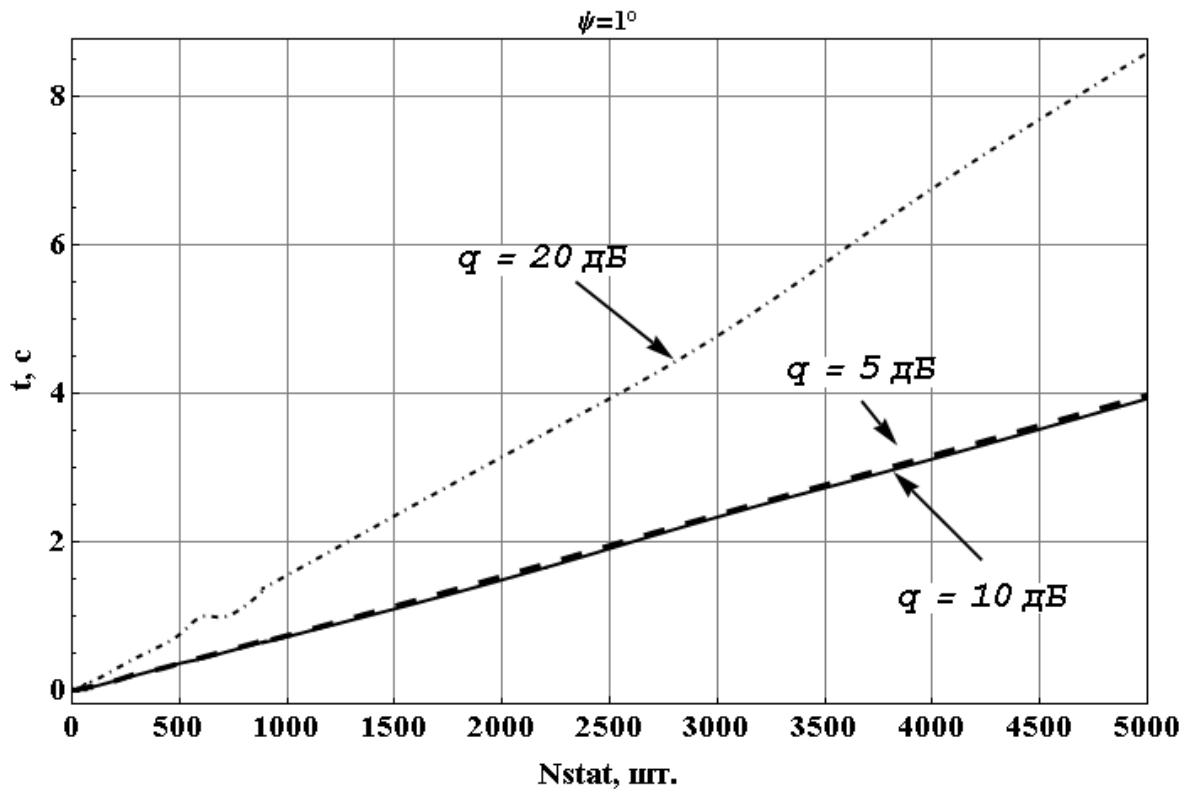


Рисунок 3.16 Время нахождения максимально правдоподобной оценки при  $\psi = 1^\circ$

На рисунке 3.16 приведены зависимости времени получения оценки максимального правдоподобия интегральной разности фаз (при её истинном значении  $1^\circ$ ) от объёма статистической выборки для трёх соотношений сигнал/шум (5, 10 и 20 дБ).

Исследование показало, что при малых значениях истинной интегральной разности фаз время, требуемое на получение оценки, существенно зависит от отношения сигнал шум. Более, чем двукратное увеличение времени при увеличении отношения сигнал/шум от 10 до 20 дБ можно объяснить наличием вычислительных сложностей, связанных (также как и в исходных выражениях) с необходимостью оперировать величинами на грани уровня переполнения разрядной сетки (так как соотношение сигнал/шум стоит в показателе экспоненты).

На рисунках 3.17 и 3.18 (а также на рисунках Г.4 – Г.5 в приложении Г) приведены зависимости разности во времени получения МП оценок ИРФ от объёма выборки для различных истинных значений интегральной разности фаз:  $\Delta t = t_{\psi=1^\circ} - t_{\psi=2^\circ}$ ,  $\Delta t = t_{\psi=1^\circ} - t_{\psi=3^\circ}$ ,  $\Delta t = t_{\psi=1^\circ} - t_{\psi=5^\circ}$ ,  $\Delta t = t_{\psi=1^\circ} - t_{\psi=10^\circ}$  и различных значений отношения сигнал/шум: 5, 10, 15 и 20 дБ. Каждая кривая представляет собой статистическое среднее и была получена путём усреднения по выборочным 50 кривым.

Исходя из анализа полученных зависимостей, можно сделать заключение, что для значений отношения сигнал/шум до 15 дБ разница во времени получения оценки

максимального правдоподобия носит сугубо нелинейный знакопеременный характер, и в максимуме не превышает 0,1 с на объёмах выборки до 5000 отсчетов.

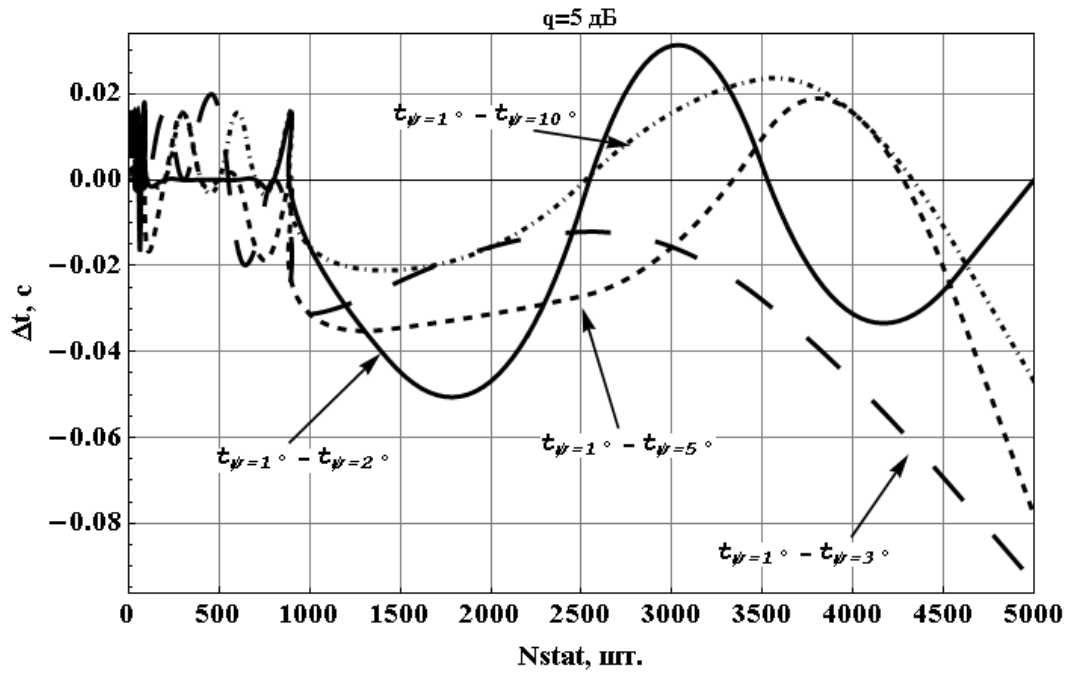


Рисунок 3.17 Зависимость разницы во времени нахождения максимально правдоподобной оценки от объёма выборки для случая отношения сигнал/шум 5 дБ

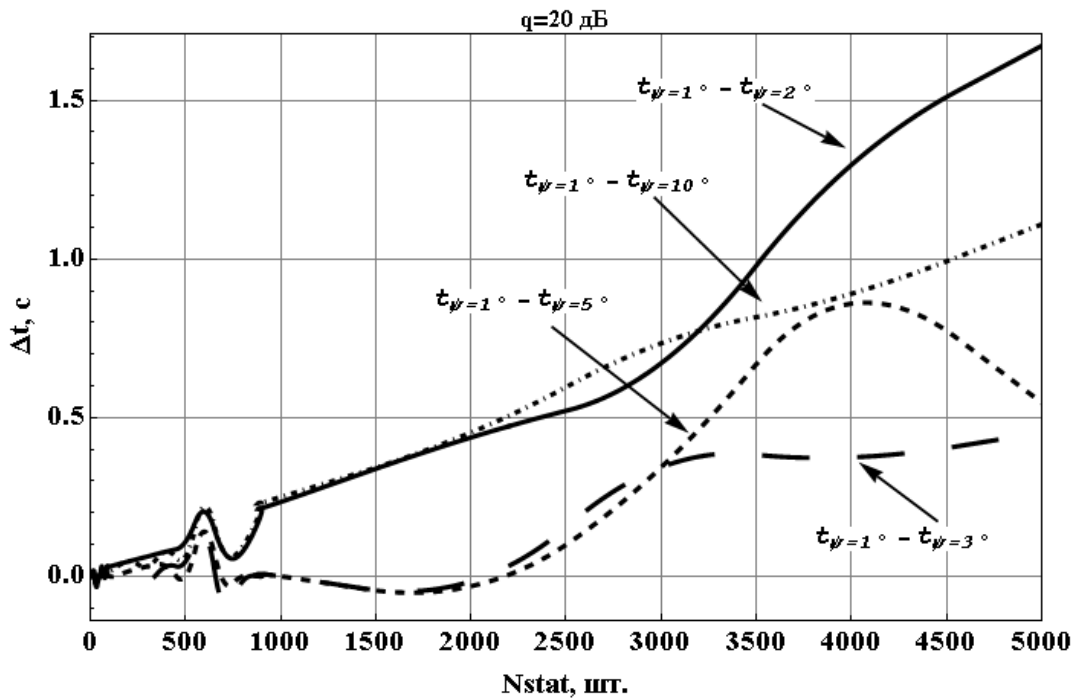


Рисунок 3.18 Зависимость разницы во времени нахождения максимально правдоподобной оценки от объёма выборки для случая отношения сигнал/шум 20 дБ

Важно отметить, что даже разница во времени работы максимально правдоподобного алгоритма оценивания для случаев различных интегральных разностей фаз больше, чем время,

требуемое для проведения оценки методом моментов при максимальном из рассматриваемых значений объёме выборки (5000 отсчётов).

Немонотонный характер поведения зависимостей разницы во времени получения оценок максимального правдоподобия при малых значениях объёма выборки (до 1000 элементов) можно частично объяснить недостаточностью выборки в 50 кривых и работой алгоритма: на таких объёмах выборки, как указывалось ранее, МП оценка имеет существенное немонотонное смещение и рассеяние, что делает её чрезвычайно чувствительной к конкретной реализации, а значит, алгоритм поиска корня уравнения (и время его работы) также существенным образом зависят от выборки.

Важно отметить, что все МП оценки и их временные характеристики были получены в предположении, что входное отношение сигнал/шум и коэффициент амплитудного расхождения известны. Однако, на практике это не выполняется, что приводит к необходимости учитывать наличие априорной неопределённости относительно данных величин. В этом случае все статистические характеристики, а также полученные оценки будут уже условными. Для построения безусловной оценки потребуется проводить дополнительную оценку неизвестных параметров: либо использовать итерационные алгоритмы, с последовательным оцениванием неизвестных параметров и уже по ним интегральной разности фаз, либо проводить совместную оценку. И в том и в другом случае это приводит к существенному увеличению времени работы алгоритма при сохранении точности или к снижению точности при наличии ограничений на время работы.

### **3.4 Пример сравнения процедуры оценки параметра объекта эталонным методом с использованием интегральной разности фаз и модульного значения корреляционного интеграла**

Описанная в главах 1-3 процедура эталонной оценки, основанная на использовании интегральной разности фаз, напрямую не использует информацию, полученную при сравнении амплитудных характеристик регистрируемой объектной и опорных радиолограмм, т.е. не является оптимальной в смысле теории оптимального приёма. Хотя стоит отметить, что один из параметров, описывающих полученную в пункте 2.1 плотность распределения вероятности интегральной разности фаз, – коэффициент амплитудного расхождения  $\eta$ , представляет собой нормированную величину модуля корреляционного интеграла (МКИ) объектной и эталонных радиолограмм.

В связи с этим разумно сравнить поведение оценки рассматриваемым методом с оценкой, полученной на основе оптимального метода, – значением модуля корреляционного интеграла.

Ввиду невозможности проведения непосредственного сравнения получаемых оценок без указания конкретного объекта исследования для сравнения поведения методов были выбраны бесконечные идеально проводящие ленты, которые часто используются в качестве тестовых радиологических моделей реальных объектов, например, при определении разрешающей способности СГРВ, т.к. для них существуют аналитические решения задачи рассеяния (см. [46], [47]). В приложении А приведён написанный программный код (в среде Wolfram Mathematica) для их расчёта. В качестве оцениваемого параметра  $R_{ob}$  были выбраны ширины лент.

Рассматривалась модель СГРВ с рабочей длиной волны  $\lambda = 0,008$  м, дуговой апертурой с углом раскрыва  $2\alpha = 8^\circ$  и радиусом кривизны 21,2 м, с  $N_\alpha = 80$  пространственных дискретов радиолограммы (антенных элементов) взятых с шагом  $0,1^\circ$ . Расстояние между объектом и центром СГРВ 21,2 м. Теоретическая аппаратная разрешающая способность системы в такой конфигурации составляет  $15\lambda$ . Соотношение сигнал-шум изменялось в диапазоне от 5 до 20 дБ с шагом 1 дБ. Радиолограммы тестовых объектов записывались в присутствии шума, моделируемого комплексным АБГШ с нулевыми математическими ожиданиями и уровнями дисперсии синфазной и квадратурной компонент, определяемыми, исходя из требуемой величины отношения сигнал/шум, а для эталонных — без шума.

Рассматривались две ситуации соотношений сетки эталонов и объектов: объект точно совпадает с одним из эталонов по оцениваемому параметру и объект попадает между элементами эталонной сетки (точного совпадения не наблюдается).

Величина объёма выборки для нахождения оценки в каждой точке апертуры  $N_{stat}$  составляла 1000 отсчётов. Смещение и рассеяние получаемых оценок определялось путём усреднения по массиву из  $N_{estim} = 1000$  накопленных оценок. Процедура сравнения оценок выглядела следующим образом.

1. Для выбранного объекта и фиксированной сетки эталонных объектов моделировались процессы записи радиолограмм: в условиях наличия шума для объекта и без шума для эталонов.
2. Для каждого элемента выборки объёмом  $N_{stat}$  элементов производилось формирование оцениваемой величины: интегральной разности  $\varphi$  и модуля корреляционного интеграла  $Z$ .

3. По выборке производилась оценка величин истинного значения ИРФ  $\hat{\psi}$  и МКИ  $\hat{z}$ .
4. Процедура повторялась  $N_{estim}$  раз, после чего определялись смещение и рассеяние получаемой оценки.
5. С помощью кривых отображения, примеры которых представлены в приложении Г (рисунки Г.6 и Г.7), сопоставляющих оцениваемый параметр объекта  $\hat{R}_{ob}$  с оцениваемой величиной ( $\hat{\psi}$  или  $\hat{z}$ ), определялись рассеяния оцениваемой величины  $\sqrt{D_{\hat{R}_{ob}}}$ , которые и являлись критерием сравнения двух методов.

Можно отметить, что с практической точки зрения наибольший интерес несёт оценка минимального значения ИРФ или МКИ, так как именно по ней и принимается решение о соответствии объекту некоторого эталона. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать именно эту оценку.

Оценка ИРФ проводилась с помощью описанного ранее в главе 2 метода моментов. В пунктах 3.2.1 и 3.2.2 указывалось, что получаемая таким образом оценка для малых значений  $\psi$  и малых соотношений сигнал/шум оказывается смещённой. При этом смещение носит хоть и монотонный, однако достаточно сложный параметрический характер. Однако в случае точного совпадения объекта с одним из эталонов истинное значение ИРФ  $\psi$  должно быть равно нулю, а значит, смещение перестаёт быть параметрическим и для его компенсации возможно использовать выражение (3.27).

Для оценки величины МКИ было учтено, что для рассматриваемой модели шума  $z$  подчиняется распределению Райса ( $z \sim \text{Rice}(\alpha, \beta)$ ) с двумя параметрами:  $\alpha$  - искомый параметр, описывающее значение МКИ без шума, и  $\beta$  - учитывает соотношение сигнал/шум [44-45]. При моделировании считалось, что соотношение сигнал/шум известно (наилучший из возможных на практике сценариев), а оценка МКИ  $\hat{z}$  величины  $\alpha$  оценивалась с помощью метода моментов на основе первого момента.

На рисунках 3.19 и 3.20 приведены зависимости рассеяния оценок ИРФ и МКИ от величины соотношения сигнал/шум. В случае 1 размер объекта был выбран равным  $10\lambda$ , а эталонная сетка состояла из 20 объектов с  $R_{ob}$  изменяющимся от  $1\lambda$  до  $20\lambda$  с шагом  $\lambda$ , таким образом, что объект в точности соответствовал десятому эталону, а в 2 – объекты были равны  $1,1\lambda$ , а эталонная сетка состояла из 20 объектов с  $R_{ob}$  изменяющимся от  $0,1\lambda$  до  $10\lambda$  с шагом  $\lambda$  (объект не был равен по величине оцениваемого параметра ни одному из эталонов). Стоит отметить, что разница между радиусом объекта и крайними эталонами эталонной сетки меньше величины классической аппаратной разрешающей способности системы, т.е. данные объекты

гарантированно не могли быть различены методами классической радиолокации (например, при обработке восстановленного изображения).

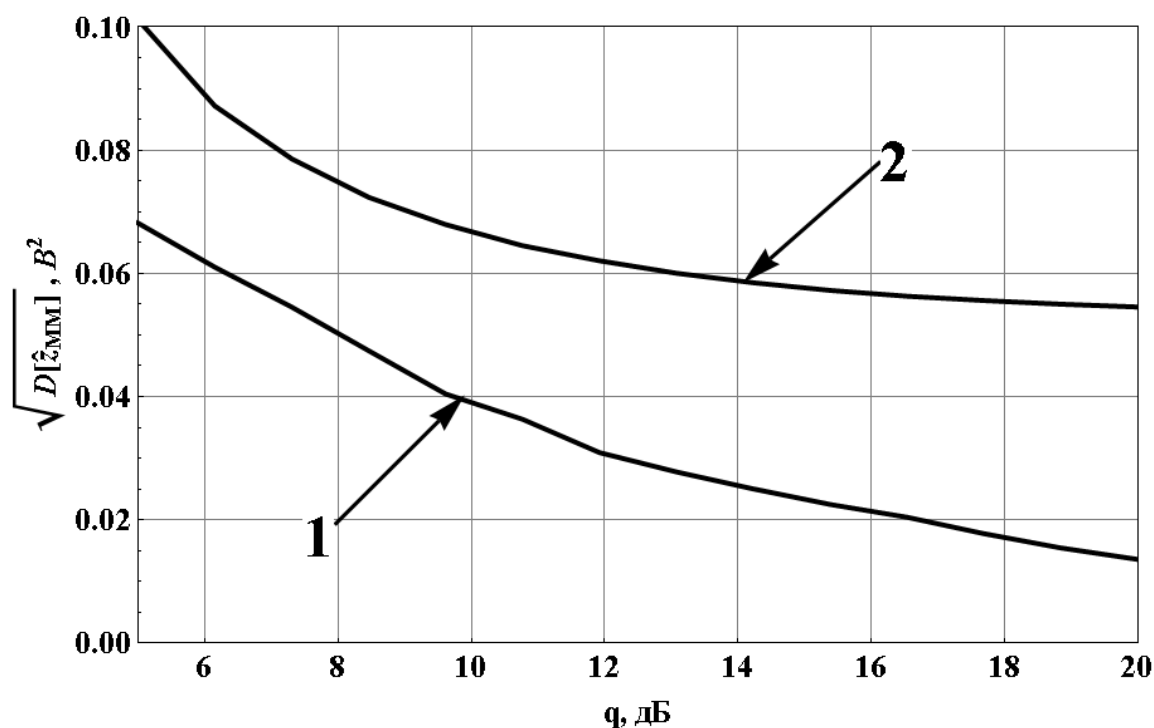


Рисунок 3.19 Зависимость рассеяния оценки модуля корреляционного интеграла от соотношения сигнал/шум: 1 –  $R_{ob} = 10\lambda$  и сетка эталонов от  $1\lambda$  до  $20\lambda$  с шагом  $\lambda$ ,  
2 –  $R_{ob} = 1,1\lambda$  и сетка эталонов от  $0,1\lambda$  до  $10\lambda$  с шагом  $\lambda$

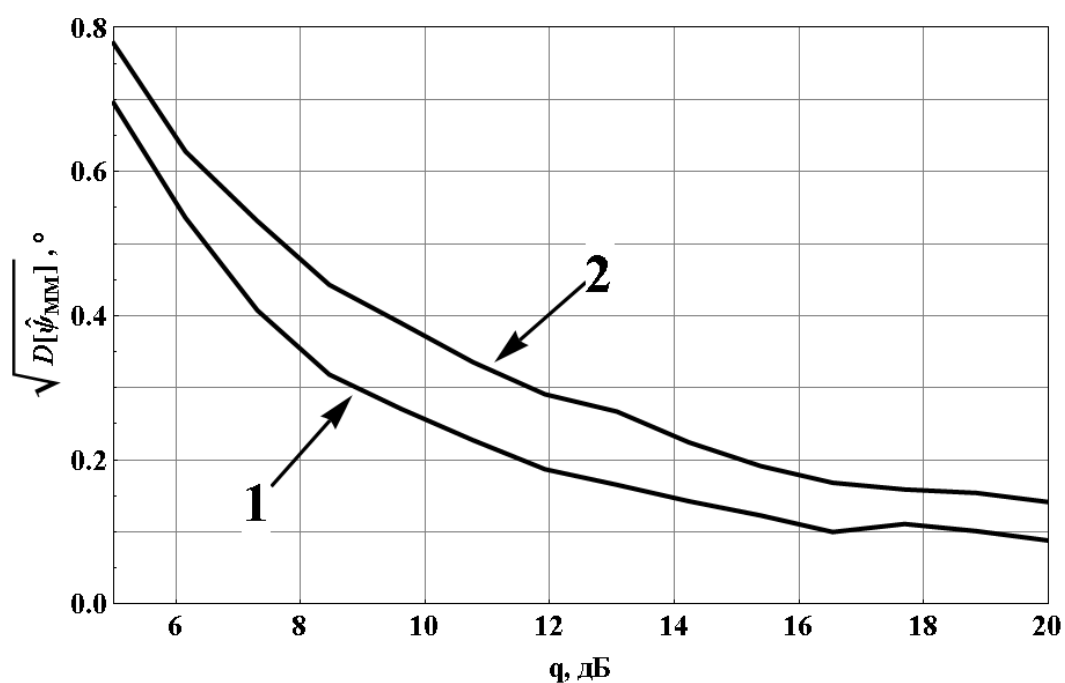


Рисунок 3.20 Зависимость рассеяния оценки интегральной разности фаз от соотношения сигнал/шум: 1 –  $R_{ob} = 10\lambda$  и сетка эталонов от  $1\lambda$  до  $20\lambda$  с шагом  $\lambda$ ,  
2 –  $R_{ob} = 1,1\lambda$  и сетка эталонов от  $0,1\lambda$  до  $10\lambda$  с шагом  $\lambda$



В соответствии с описанной выше процедурой полученные рассеяния оценок ИРФ и МКИ были использованы для нахождения рассеяния оценки  $R_{ob}$  путём сопоставления по кривым отображения (см. рисунки Г.6 и Г.7). Результат представлен в виде графиков на рисунках 3.21 и 3.22.

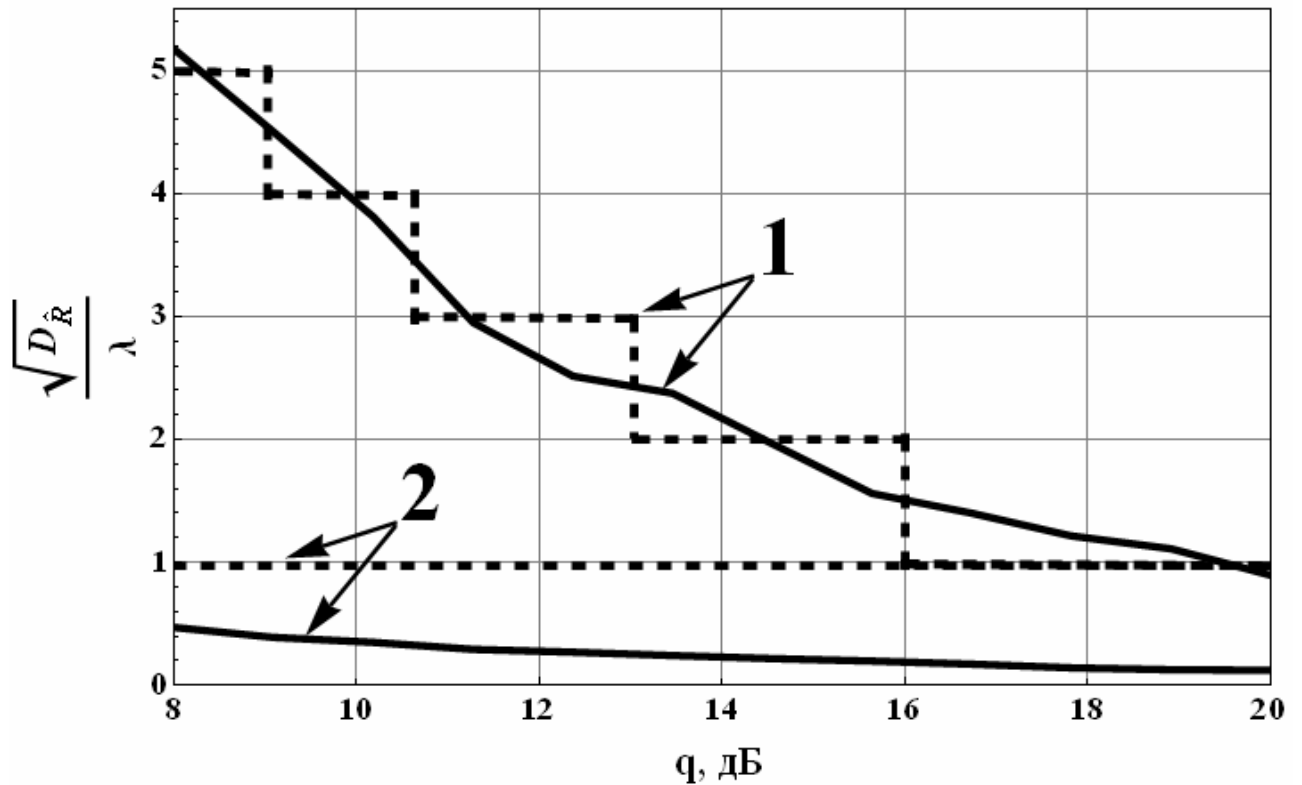


Рисунок 3.21 Зависимость рассеяния оценки размера объекта на основе анализа:

1 – интегральной разности фаз, 2 – модуля корреляционного интеграла

от соотношения сигнал/шум для случая  $R_{ob} = 10\lambda$

На графике для удобства представления рассеяние оценки  $R_{ob}$  нормировано на длину волны. Сплошные кривые получены путём интерполяционного продолжения значений эталонов между элементами сетки. Пунктирные кривые получены путём округления соответствующих оценок до шага сетки эталонов, т.е. до разрешающей способности эталонных методов оценки.

Проведённое исследование позволило сделать заключение, что в случае совпадения объекта с одним из эталонов метод оценки, использующий корреляционный интеграл является более чувствительным; и практически во всех рассмотренных случаях он позволял добиться рассеяния оценки  $R_{ob}$  не хуже, чем шаг сетки эталонов.

В случае использования интегральной разности фаз в области малых соотношений сигнал/шум рассеяние оценки составляет несколько шагов эталонной сетки, что на практике затрудняет использование. Однако в области соотношений сигнал/шум от 16 дБ оно становится сравнимо с шагом эталонной сетки, т.е. соответствует точности метода, использующего МКИ. Данное поведение может быть объяснено высокой величиной рассеяния оценки нулевого значения ИРФ: так, например, в соответствии с рис. 3.2 уже при ИРФ, равной  $1^\circ$  рассеяние оценки  $\hat{\psi}_{MM}$  не сходится к асимптотической границе даже при величине соотношения сигнал/шум 20 дБ.

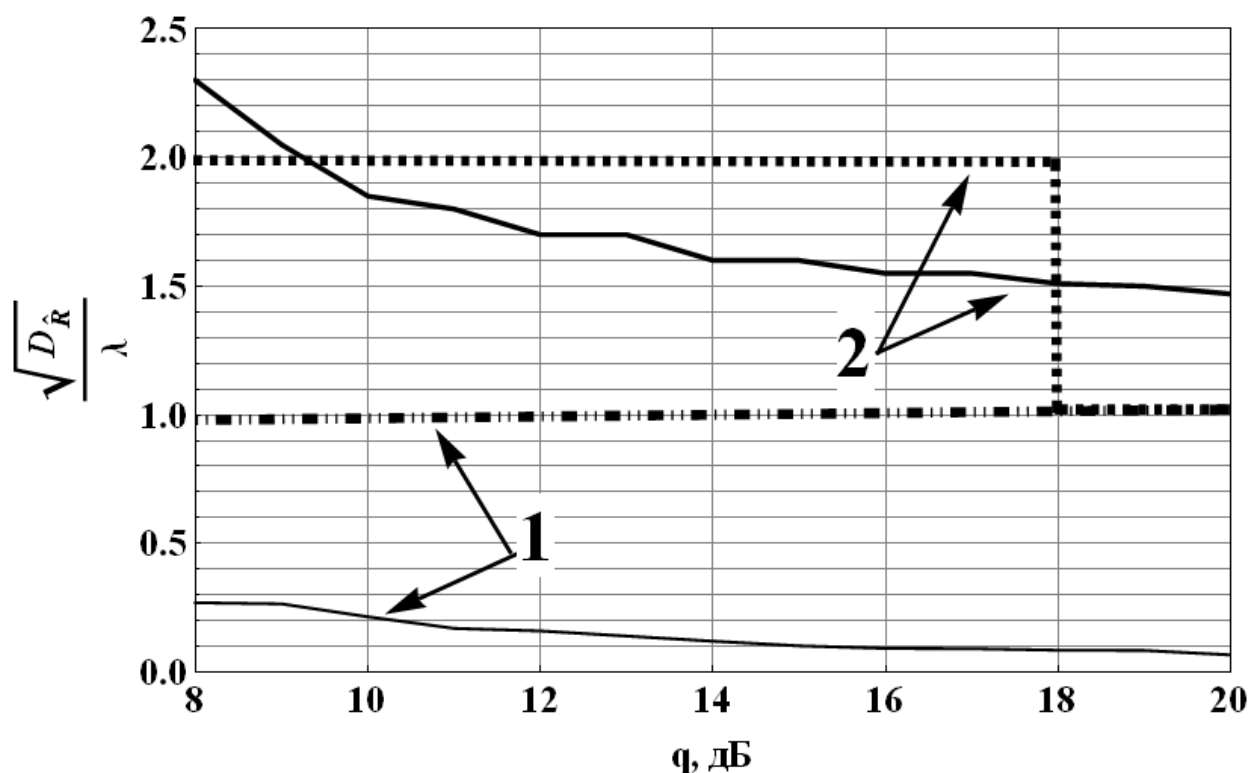


Рисунок 3.22 Зависимость рассеяния оценки размера объекта на основе анализа:

1 – интегральной разности фаз, 2 – модуля корреляционного интеграла

от соотношения сигнал/шум для  $R_{ob} = 1,1\lambda$

В случае, когда объект не совпадал ни с одним из эталонов (см. рисунок 3.22), при формальной интерполяции между элементами сетки эталонов использование ИРФ позволяет добиться существенно более высокой оценки (меньшего рассеяния оценки), что объясняется лучшим качеством получаемой оценки  $\hat{\psi}_{MM}$  для не нулевого значения истинной ИРФ. Однако, учитывая конечность разрешающей способности метода (пунктирные кривые на рисунке 3.22), разница в получаемых рассеяниях (а, следовательно, и потенциальный выигрыш за счёт использования ИРФ) невелика – порядка одного шага сетки эталонов.

При этом стоит отметить, что проведение оценки (даже методом моментов) с использованием МКИ требует значительно большего времени, чем при использовании ИРФ. Повысить качество получаемой оценки ИРФ можно при замене метода моментов на метод максимального правдоподобия, однако при этом существенно уменьшится быстродействие. В этом случае на основе анализа, проведённого в пунктах 3.3.1 и 3.3.2, можно ожидать как минимум двукратного уменьшения рассеяния, а значит и меньшего выигрыша метода на основе МКИ даже в случае совпадения одного объекта с одним из эталонов.

### 3.5 Выводы

1. В данной главе рассмотрена оценка интегральной разности фаз методом моментов и методом максимального правдоподобия с учётом полученных в главе 2 её статистических характеристик. Описаны процедуры получения оценок.
2. Получены аналитические выражения для смещения, рассеяния и дисперсии моментной оценки при больших и малых отношениях сигнал/шум.
3. Аналитически показано, что моментная оценка является состоятельной и асимптотически (при больших отношениях сигнал/шум) несмещённой.
4. Получены аналитические выражения для минимального значения рассеяния смещённой и несмещённой оценок интегральной разности фаз в форме границ Рао-Крамера и Чепмена-Роббинса.
5. В результате имитационного моделирования показано, что как моментная, так и максимально правдоподобная оценки в области малых отношений сигнал/шум являются существенно смещёнными и значительно расходятся с границей Рао-Крамера.
6. В результате имитационного моделирования показано, что моментная оценка является асимптотически (при больших отношениях сигнал/шум) эффективной.
7. Обнаружена возможность существенно более точного описания рассеяния моментной оценки в области порогового отношения сигнал/шум границей Чепмена-Роббинса, чем граница Рао-Крамера.
8. Определено значение порогового отношения сигнал/шум, позволяющего обнаружить область, в которой обе оценки (ММ и МП) будут являться с точностью до некоторой наперёд заданной погрешности эффективными.
9. С использованием имитационного моделирования проанализированы зависимости смещений и рассеяний, обеспечиваемых методом моментов и максимального

правдоподобия, от значений переменных параметров: истинной интегральной разности фаз, объёма выборки и отношения сигнал/шум.

10. Сделаны заключения и даны рекомендации относительно использования рассмотренных методов в задаче оценивания параметров объектов радиологическим эталонным фазовым методом.
11. Проведено сравнение процедуры оценки параметра объекта эталонным методом с использованием интегральной разности фаз с методом, использующим модульное значение корреляционного интеграла. Проанализировано рассеяние оценки ширины идеально проводящей ленты двумя методами, указаны области соотношений сигнал/шум, при которых они дают схожие результаты, указаны выигрыш и проигрыш одного метода относительно другого при точном совпадении объекта с одним из эталонов и не совпадении. Отмечены возможные модификации, позволяющие повысить качество оценки.

**Глава 4 Определение минимального шага сетки эталонов ЭФМ, построенного на основе интегральной разности фаз**

**4.1 Постановка задачи**

Одной из основных задач, возникающих при использовании эталонных методов оценки параметров наблюдаемых объектов, например, в системах голографического радиовидения (СГРВ), является задача, связанная с построением сетки эталонов, и в частности – задача выбора минимального шага сетки. На практике при наличии шумов и помех точность оценки, обеспечиваемая эталонными методами на основе выборки из  $N_{stat}$  измерений, ограничена сверху, а шаг сетки эталонов, как следствие, ограничен снизу, и приходится искать разумный компромисс между точностью оценки, обеспечиваемой выбранным набором эталонов, и связкой быстродействие/объём хранимых данных.

В случае наличия заранее сформированной сетки эталонов  $\left\{ \dot{\vec{u}}_{et_j} \right\}_{j=1}^{N_{et}} = \left\{ \dot{\vec{u}}_{et} \left( R_{et_j} \right) \right\}_{j=1}^{N_{et}}$  и выборки объёмом  $N_{stat}$  реализаций регистрируемой величины (радиоголограммы)  $\left\{ \dot{\vec{u}}_{obl_l} \right\}_{l=1}^{N_{stat}} = \left\{ \dot{\vec{u}}_{obl} \left( R_{obl} \right) \right\}_{l=1}^{N_{stat}}$ , доступной для наблюдения, возможно рассматривать задачу оценки  $\hat{R}_{ob}$  неизвестного параметра  $R_{ob}$  (т.е. ассоциирование регистрируемой выборки с одним из эталонов) двояко.

- 1) С позиции теории оценивания. В этом случае вводится некоторая функция  $F(\cdot)$ , указывающая степень "сходства" объекта и эталона (мера близости). Она, по сути, является проекцией пространства комплексных векторов размерности  $(\square^{N_\alpha}$  или  $\square^{2N_\alpha})$ , соответствующей длине вектора радиоголограммы  $\dot{\vec{u}}_{obl}$ , на некоторое подпространство, например,  $\square$  или  $\square$ . По  $N_{stat}$  наблюдениям производится оценка  $\hat{F}(\cdot)$  и выбирается тот из эталонов, который обеспечивает минимум  $\hat{F}(\cdot)$ . В эталонном фазовом методе такой мерой близости является интегральная разность фаз

$$\varphi_j(R_{ob}) = \left| \arg \left\{ \left( \dot{\vec{u}}(R_{obl}), \dot{\vec{u}}_{et_j} \right) \right\} \right|.$$

- 2) С позиции теории проверки гипотез. В этом случае выдвигается и проверяется серия гипотез  $\left\{ H_j : R_{ob} = R_{et_j} \right\}_{j=1}^{N_{et}}$  о том, что регистрируемая радиоголограмма

была порождена одним из эталонов. При использовании эталонного фазового метода их можно свести к серии последовательных проверок простых гипотез

$$\left\{ H_{j,1} : \varphi_j(R_{ob}) = 0 \right\}_{j=1}^{N_{et}} \text{ против альтернатив } \left\{ H_{j,0} : \varphi_j(R_{ob}) = \psi \right\}_{j=1}^{N_{et}}.$$

Учитывая это, можно отметить, что выбор шага сетки эталонов будет зависеть от того, какой из подходов рассматривается. При этом на практике возможно их совмещение.

Необходимо также учесть, что даже в случае полного отсутствия шумов любая реальная система обладает ограниченной разрешающей способностью, которая, как правило, связана с её чувствительностью. Поэтому на практике под минимальным шагом сетки эталонов следует подразумевать максимальную величину из двух возможных: шага сетки, ограниченного чувствительностью СГРВ, работающей в отсутствие шумов, и шага сетки, ограниченного параметрами СГРВ с неограниченно высокой чувствительностью, но работающей при наличии шумов. Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что чувствительность СГРВ в отсутствие шумов значительно меньше и ею без потери общности можно пренебречь.

Для решения этой задачи в работе применительно к эталонному фазовому методу, используемому в качестве критерия интегральную разность фаз, рассматриваются два подхода: первый – использование в качестве минимального шага сетки эталонов величины статистического предела разрешения (СПР) СГРВ и второй – выбор шага сетки на основе ограничения снизу (сверху) вероятности правильной классификации (полной ошибки классификации) двух соседних эталонов.

Найдём величину минимального шага сетки эталонов, получаемого в рамках рассматриваемых подходов, и исследуем её зависимость от размера выборки, отношения сигнал/шум, истинного значения интегральной разности фаз и наличия априорной неопределённости относительно величины коэффициента амплитудного расхождения.

## **4.2 Определение минимального шага при заданном статистическом пределе разрешения**

### **4.2.1 Анализ результатов теоретического исследования**

Для определения минимального шага сетки этого можно воспользоваться критерием статистического предела разрешения (statistical resolution limit, SRL), введённого Смитом в работе [129] применительно к задаче оценки положения полюсов при их разделении. Также критерий широко применялся для определения разрешающей способности системы оценки углового положения источника излучения в условиях шумов [82] и [83]. В соответствии с этим

подходом считается, что два объекта разрешаются, если угловое расстояние между ними было не больше удвоенного корня из дисперсии оценки угла прихода сигнала для данной системы. Таким образом, статистический предел разрешения определялся следующим образом:

$$SRL = 2\sqrt{D[\varphi]}, \quad (4.43)$$

где  $D[\varphi]$  – дисперсия оценки интегральной разности фаз или её рассеяние, в зависимости от смещённости процедуры оценивания.

Выражение для статистического предела разрешения (4.43) в литературе несколько раз модифицировалось в зависимости от рассматриваемой задачи [51], [82 – 83], [129], в частности, изменялся множитель перед корнем. Будем придерживаться классического определения (4.43), так как для данной задачи именно оно кажется наиболее адекватным: если рассматривать аналогию с определением углового отклонения относительно некоторого выделенного направления (угол соответствует интегральной разности фаз, а исходное направление нулевому значению), то корень из дисперсии можно рассматривать как меру неопределённости оценки так как в системе может быть как переоценка, так и недооценка интегральной разности фаз.

Статистический предел разрешения можно оценить снизу границей Рао-Крамера, полученной в разделе 3.1.1. В этом случае мы получим минимально возможное разрешение системы по оцениваемому параметру (интегральной разности фаз) в условиях шумов.

В дополнение к требованию превышения шагом сетки величины статистического предела разрешения, очевидно, необходимо добавить и требование минимизации смещения оценки ИРФ. При его невыполнении даже достаточно малая величина (4.43) будет приводить к существенной ошибке оценки параметра, т.к. будет приниматься в качестве верного эталон, не соответствующий истинному.

Стоит учесть также, что в зависимости от априорного знания или незнания величины амплитудного расхождения необходимо выбирать или скалярную (3.1), (3.9) или векторную (3.3) границу. Можно ожидать, что априорная неопределённость относительно амплитудного расхождения должна ухудшить статистический предел разрешения за счёт необходимости его дополнительной оценки с ненулевой дисперсией.

#### **4.2.2 Анализ результатов математического моделирования**

Моделирование процесса определения минимального шага сетки эталонов на основе статистического предела разрешения производилось в среде Wolfram Mathematica 8.0 в соответствии с процедурой, описанной в пункте 4.2.1. Для этого использовалась функция плотности вероятности, задаваемая выражением (2.93), определялись величины скалярной и

векторной границ Рао-Крамера (3.1) и (3.3). Зависимость минимального шага сетки эталонов от параметров была проанализирована для значений отношения сигнал/шум от 1 до 20 дБ с шагом 1 дБ для ряда значений интегральной разности фаз  $\psi = \{1^\circ, 5^\circ, 10^\circ\}$  (которые, как указывалось в пункте 1.3, могут быть пересчитаны в реальные размеры радиологических объектов), для ряда значений объёма выборки  $N_{stat} = \{50, 100, 200, 500, 1000\}$  и для случаев известного и неизвестного параметра  $\eta = 1$ .

Зависимости величины статистического предела разрешения в градусах от значения отношения сигнал шум при различных объёмах выборки  $N_{stat} = \{50, 100, 200, 500, 1000\}$ , доступной для анализа, и известного коэффициента амплитудного расхождения  $\eta = 1$  приведены на рисунках 4.1 – 4.2 для случаев  $\psi = \{1^\circ, 10^\circ\}$ , а при  $\psi = 5^\circ$  – на рисунке Е.2 в Приложении Е.

Пунктиром на всех графиках обозначена истинная разность фаз. Для построения верхней оценки статистического предела разрешения использовались выражения для скалярной границы Рао-Крамера (так как коэффициент амплитудного расхождения и отношение сигнал/шум считаются известными) в форме (3.2).

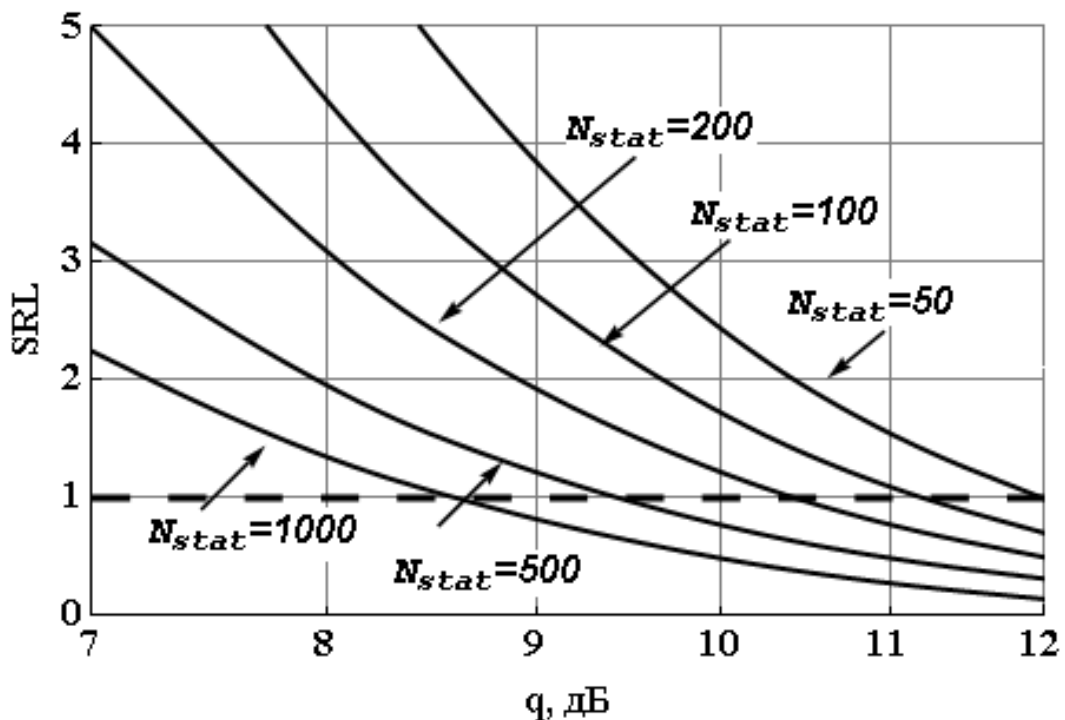


Рисунок 4.1 Зависимость статистического предела разрешения от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки, значения  $\psi = 1^\circ$  и известном  $\eta = 1$



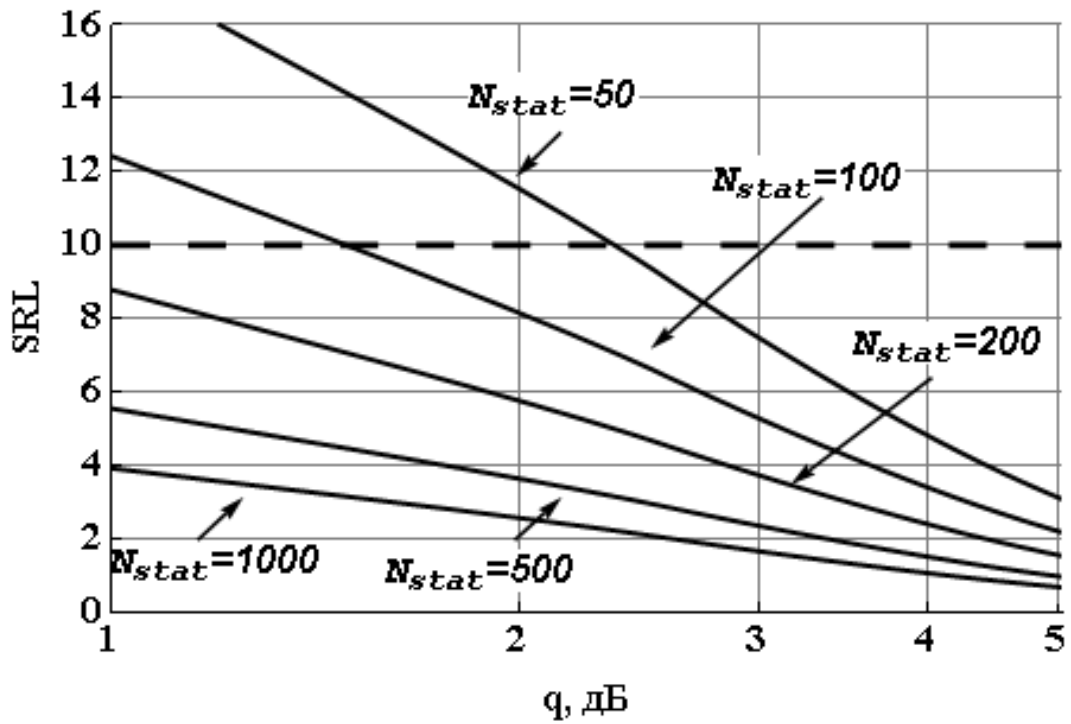


Рисунок 4.2 Зависимость статистического предела разрешения от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки, значении  $\psi = 10^\circ$  и известном  $\eta = 1$

Анализируя зависимости, представленные на рисунках 4.1 – 4.2, можно заключить следующее:

- в рассматриваемом диапазоне изменения параметров все характеристики представляют собой монотонно спадающие зависимости;
- при фиксированном значении интегральной разности фаз увеличение выборки приводит к уменьшению статистического предела разрешения (улучшение разрешающей способности системы по данному параметру), при этом он достигается:
  - для случая  $\psi = 1^\circ$  и  $\eta = 1$ :
    - при ОСШ 12 дБ для случая  $N_{stat} = 50$ ;
    - при ОСШ 11,2 дБ для случая  $N_{stat} = 100$ ;
    - при ОСШ 10,5 дБ для случая  $N_{stat} = 200$ ;
    - при ОСШ 9,4 дБ для случая  $N_{stat} = 500$ ;
    - при ОСШ 8,5 дБ для случая  $N_{stat} = 1000$ ;
  - для случая  $\psi = 5^\circ$  и  $\eta = 1$ :
    - при ОСШ 5,2 дБ для случая  $N_{stat} = 50$ ;
    - при ОСШ 4,5 дБ для случая  $N_{stat} = 100$ ;

- при ОСШ 3,7 дБ для случая  $N_{stat} = 200$ ;
- при ОСШ менее 3 дБ для случая  $N_{stat} = 500$ ;
- при ОСШ менее 1 дБ для случая  $N_{stat} = 1000$ ;
- для случая  $\psi = 10^\circ$  и  $\eta = 1$ :
  - при ОСШ 2,4 дБ для случая  $N_{stat} = 50$ ;
  - при ОСШ менее 1,5 дБ для случая  $N_{stat} \geq 100$ ;
- выигрыш по значению статистического предела разрешения получаемый в результате увеличения объёма выборки в 2 раза (например, с 50 до 100 или со 100 до 200) составляет:
  - 0,8 дБ для случая  $\psi = 1^\circ$  и  $\eta = 1$ ;
  - 0,7 дБ для случая  $\psi = 5^\circ$  и  $\eta = 1$ ;
  - 0,6 дБ для случая  $\psi = 10^\circ$  и  $\eta = 1$ ;
- выигрыш по значению статистического предела разрешения получаемый в результате увеличения объёма выборки в 10 раза (например, с 50 до 500) составляет:
  - 2,6 дБ для случая  $\psi = 1^\circ$  и  $\eta = 1$ ;
  - 2,2 дБ для случая  $\psi = 5^\circ$  и  $\eta = 1$ ;
  - 2,2 дБ для случая  $\psi = 10^\circ$  и  $\eta = 1$ .

Из анализа характеристик можно сделать заключение о том, что величина СПР уменьшается с увеличением как  $N_{stat}$ , так и  $\psi$ . Однако, очевидно, что данные зависимости носят нелинейный характер и, например, для достижения заданного уровня СПР постоянное увеличение объёма выборки на фиксированную величину приводит к уменьшению энергетического выигрыша во входном ОСШ, при котором данная СПР достигается.

Стоит отметить, выигрыш в отношении сигнал/шум для различных  $N_{stat}$  практически не меняется при увеличении  $\psi$  в 5 раза (с  $1^\circ$  до  $5^\circ$ ).

Исходя из этих зависимостей, можно сделать заключение о том, что попытка резкого увеличения количества используемых эталонов – уменьшение шага по  $\psi$  (для повышения разрешающей способности метода) может привести к необходимости серьёзного повышения объёма выборки  $N_{stat}$  и, как следствие, к снижению быстродействия системы в целом.

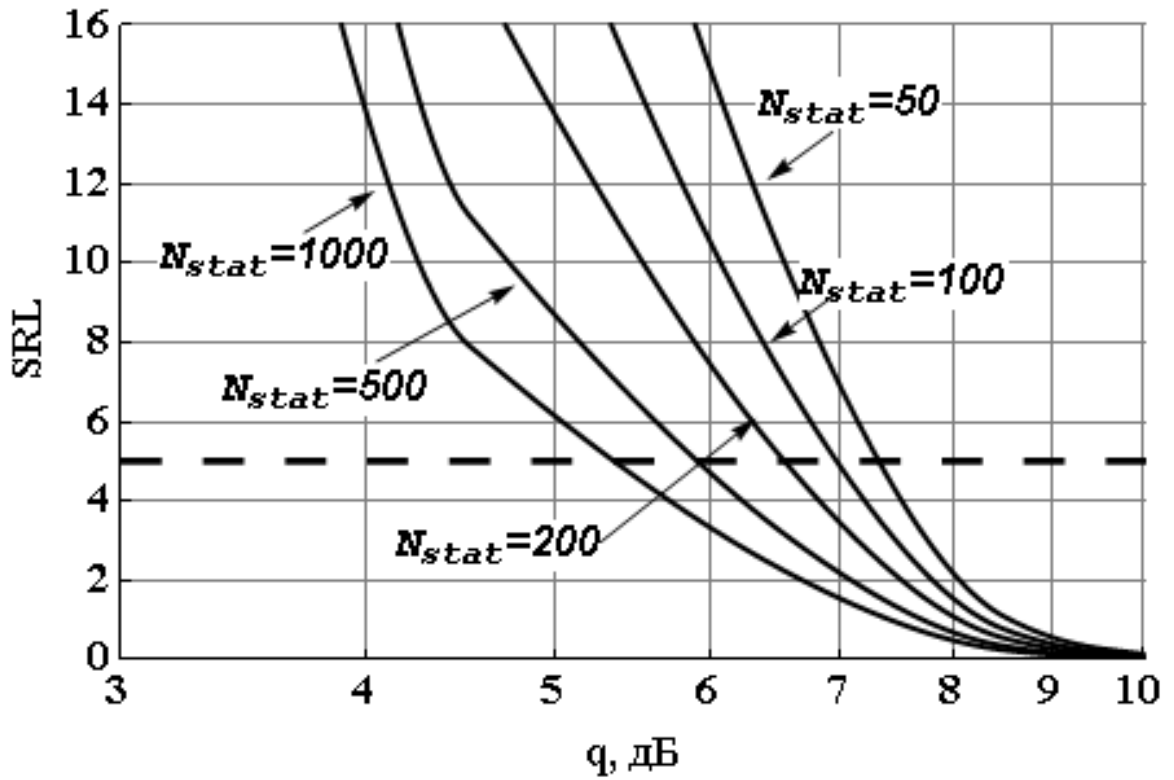


Рисунок 4.3 Зависимость статистического предела разрешения от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки, значении  $\psi = 5^\circ$  и неизвестном  $\eta = 1$

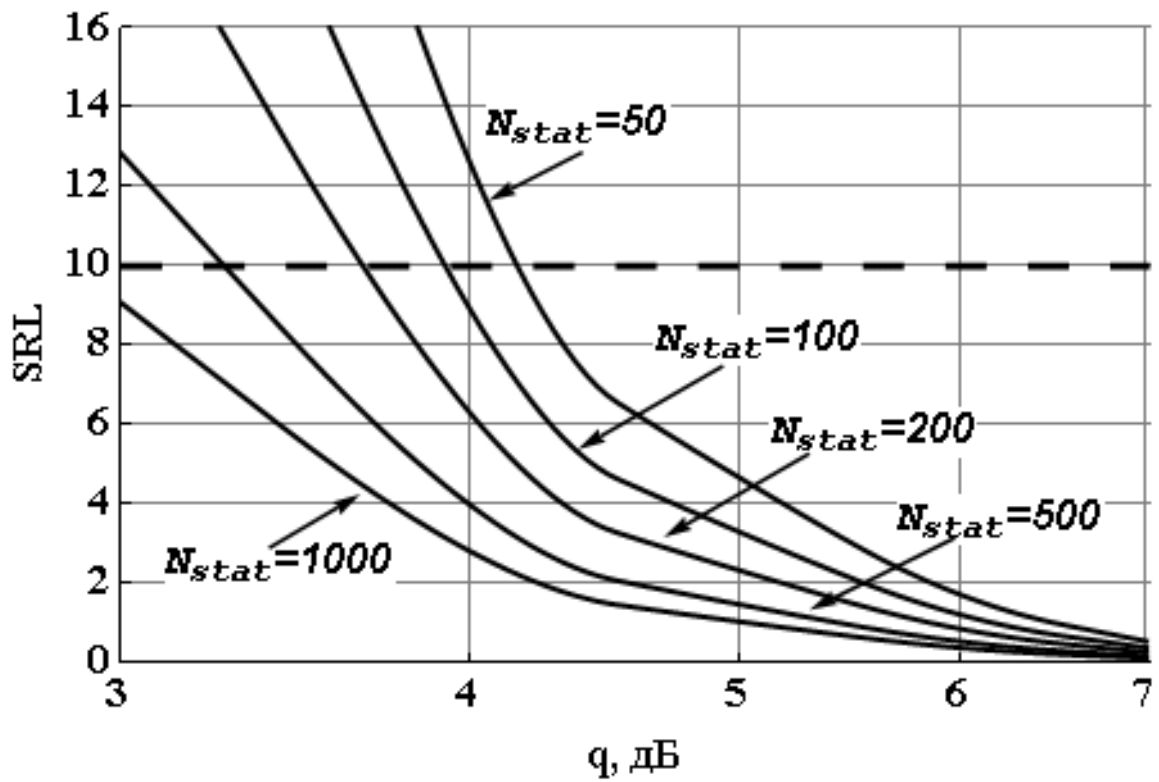


Рисунок 4.4 Зависимость статистического предела разрешения от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки, значении  $\psi = 10^\circ$  и неизвестном  $\eta = 1$

На рисунках 4.3 – 4.4 изображены зависимости СПР от значения отношения сигнал/шум при различных объёмах выборки  $N_{stat} = \{50, 100, 200, 500, 1000\}$ , доступной для анализа, и различных значений шага сетки  $\psi = \{5^\circ, 10^\circ\}$  для случая неизвестного коэффициента амплитудного расхождения  $\eta = 1$ .

Сравнительный анализ зависимостей, представленных на рисунках 4.1 – 4.4 и рисунка Е.17 в Приложении Е показывает:

- в рассматриваемом диапазоне изменения параметров все характеристики представляют собой монотонно спадающие функции, вне зависимости от наличия или отсутствия априорной неопределённости относительно знания величины коэффициента амплитудного расхождения;
- в ситуации, когда коэффициент амплитудного расхождения неизвестен, величина статистического порога разрешения достигается при большем отношении сигнал/шум:
  - при  $\psi = 5^\circ$  и объёме выборки в 50 отсчётов - при 5,3 дБ в случае известного  $\eta$  против 7,4 дБ при неизвестном  $\eta$ ;
  - при  $\psi = 5^\circ$  объёме выборки в 100 отсчётов - при 4,5 дБ в случае известного  $\eta$  против 7 дБ при неизвестном  $\eta$ ;
  - при  $\psi = 10^\circ$  и объёме выборки в 50 отсчётов - при 2,5 дБ в случае известного  $\eta$  против 4,2 дБ при неизвестном  $\eta$ ;
  - при  $\psi = 10^\circ$  объёме выборки в 100 отсчётов - при 1,6 дБ в случае известного  $\eta$  против 3,9 дБ при неизвестном  $\eta$ ;
- степень выигрыша в величине отношения сигнал/шум, требуемого для достижения статистического предела разрешения, получаемая за счёт увеличения объёма выборки, уменьшается в случае, когда коэффициент амплитудного расхождения неизвестен.

Исходя из графиков, представленных на рисунках 4.1 – 4.4, можно сделать заключение, что величина статистического предела разрешения существенно зависит от знания амплитудного расхождения, что, соответственно, накладывает дополнительное требование проведения его предварительной оценки.

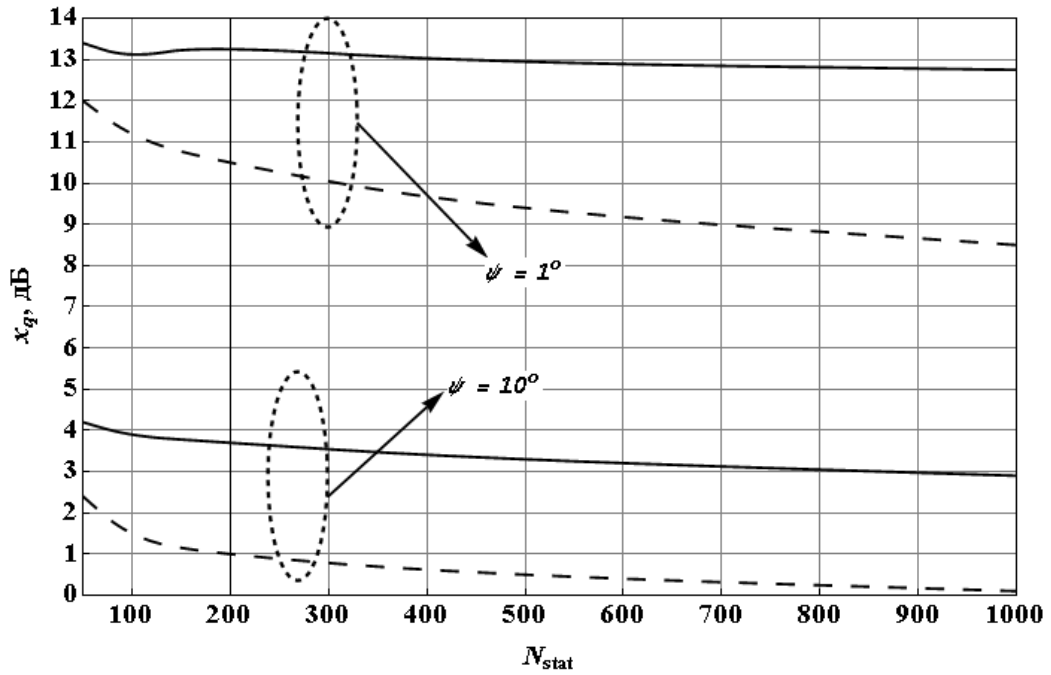


Рисунок 4.5 Зависимость величины  $x_q$ , необходимой для достижения требуемого СПР, от доступного объёма выборки для случаев  $\psi = \{1^\circ, 10^\circ\}$  при неизвестном  $\eta$  (сплошные кривые) и известном  $\eta$  (пунктирные кривые)

Определим пороговое отношение сигнал/шум, необходимое для достижения статистического предела разрешения (т.е. величины отношения сигнал/шум, при которой два ближайших эталона в сетке эталонов будут системой определены как два различных объекта), исходя из соотношения:

$$x_q(N_{stat}): \text{SRL}(x_q) \leq \psi .$$

Зависимость  $x_q$  от  $N_{stat}$  представлена на рисунке 4.5 для двух случаев истинного значения интегральной разности фаз:  $1^\circ$  и  $10^\circ$ , а также для ситуаций, когда коэффициент амплитудного расхождения известен и неизвестен.

Анализ показывает, что:

- в случае отсутствия информации относительно величины коэффициента амплитудного расхождения проигрыш в соотношении сигнал/шум, при котором достигается СПР, для  $\psi = 1^\circ$  и  $\psi = 10^\circ$  различается на 10 дБ;
- выигрыш по  $x_q$  от факта наличия информации о величине  $\eta$  при увеличении объёма выборки растёт от 1,5 дБ при малых объёмах выборки до 4,5 дБ при

больших для случая  $\psi = 1^\circ$  и от 1,5 дБ при малых объёмах выборки до 3 дБ при больших для случая  $\psi = 10^\circ$ ;

- выигрыш по  $x_q$  от факта наличия информации о величине  $\eta$  при увеличении  $N_{stat}$  для случая  $\psi = 10^\circ$  максимален до 170 отсчётов;
- в случае  $\psi = 1^\circ$  подобной зависимости не наблюдается, вплоть до  $N_{stat} = 1000$  отсчётов;
- для объёма выборки до 1000 отсчётов кривые для случая  $\psi = 10^\circ$  всегда лежат ниже, чем для  $\psi = 1^\circ$ ; это означает, что для системы с шагом эталонной сетки в  $1^\circ$  даже при проведении дополнительной предварительной оценки  $\eta$  невозможно достичь значений  $x_q$  таких же, как в случае  $\psi = 10^\circ$  (даже при известном  $\eta$ ).

Из рисунка 4.5 видно, что при выборе достаточно большого объёма выборки (порядка 1000 отсчётов) и проведении дополнительной предварительной оценки  $\eta$  можно даже при небольших отношениях сигнал/шум потенциально добиться достаточно малой величины статистического предела разрешения, а значит и шага классификационной сетки. Однако, как указывалось ранее, данное требование необходимо дополнить требованием минимизации смещения оценки ИРФ, по которой и принимается решение о величине оцениваемого параметра. При использовании эталонных фазовых методов на основе ИРФ с моментной оценкой величины  $\hat{\psi}_{MM}$  получаемая оценка, как следует из пункта 3.2.2, в области малых отношений сигнал/шум является существенно смещённой, и, как следствие, результирующая ошибка будет велика. Что означает, что при использовании метода моментов для оценки ИРФ в условиях малых отношений сигнал/шум и малого истинного значения ИРФ, требование минимизации смещения будет доминирующим. Исправить ситуацию возможно либо искусственно разрежая сетку эталонов (в этом случае уменьшается величина смещения при заданном отношении сигнал/шум), либо производя дополнительную предобработку по оценке и компенсации смещения, либо заменяя используемый метод оценивания (например, на метод максимального правдоподобия, хотя при этом, как показано в пункте 3.3.2, существенно упадёт быстродействие системы в целом).

### **4.3 Определение минимального шага при заданной вероятности правильной классификации (полной ошибки классификации) двух соседних эталонов**

#### **4.3.1 Анализ результатов теоретического исследования**

Как указывалось в пункте 4.2, минимальный шаг сетки эталонов можно выбрать как величину статистического предела разрешения, который по сути дела определяется минимальной дисперсией/рассеянием (в зависимости от наличия смещения) оценки ИРФ. Это означает, что получаемые в эксперименте ИРФ между выборкой и всеми сформированными эталонами будут сгруппированы "в основном" в окрестности их истинных значений (после чего и производится процедура выбора минимального из них). Однако это ни в коей мере не гарантирует, что все наблюдения будут отнесены к верному эталону и даже не указывает на вероятность такого события. Для указания возможного значения такой вероятности можно искусственно увеличить минимальный шаг сетки эталонов (выбранный в соответствии с критерием статистического предела разрешения), гарантировав тем самым, что разрешение будет произведено в статистическом смысле с заданной вероятностью.

Для этого, как было отмечено в пункте 4.1, минимальный шаг сетки эталонов можно оценить, воспользовавшись подходом, основывающимся на теории проверки гипотез. В этом случае можно условно ввести вероятности правильной классификации и полной ошибки классификации двух соседних эталонов.

Под вероятностью правильной классификации будем подразумевать полную вероятность (в серии из  $N_{stat}$  испытаний с одинаковыми условиями) того, что система классификации примет решение о равенстве значения оцениваемого параметра исследуемого объекта и эталона, выбранного для сравнения. А под вероятностью ошибочной классификации будем подразумевать взвешенную (с весовыми коэффициентами, соответствующими уровням значимости) сумму вероятности ошибочной классификации (система принимает решение о равенстве оцениваемого параметра у объекта и выбранного эталона при их исходном различии), и пропуска классификации (система не принимает решения о равенстве оцениваемого параметра объекта и выбранного эталона при их исходном совпадении).

В такой постановке задачу можно рассматривать с позиций теории принятия статистических решений как задачу проверки простой гипотезы против сложной односторонней альтернативы [26-28]. Тогда искомые оценки границы качества можно свести к классическим вероятностям обнаружения  $P_D$ , промаха  $P_M$  и ложного срабатывания  $P_F$ :

$$P_F = \int_{Z_1} w(u | H_0) dy, \quad (4.1)$$

$$P_M = \int_{Z_0} w(u | H_1) dy, \quad (4.2)$$

$$P_D = 1 - P_M = \int_{Z_1} w(u | H_1) dy, \quad (4.3)$$

где  $w(u | H_i), i = 0, 1$  – функции плотности вероятности (ПВ) по гипотезе  $H_1$  и альтернативе  $H_0$ , приведённые на рис. 4.1, а  $Z_i, i = 0, 1$  – области значения параметров, соответствующие принятию гипотезы или отклонению её в пользу альтернативы.

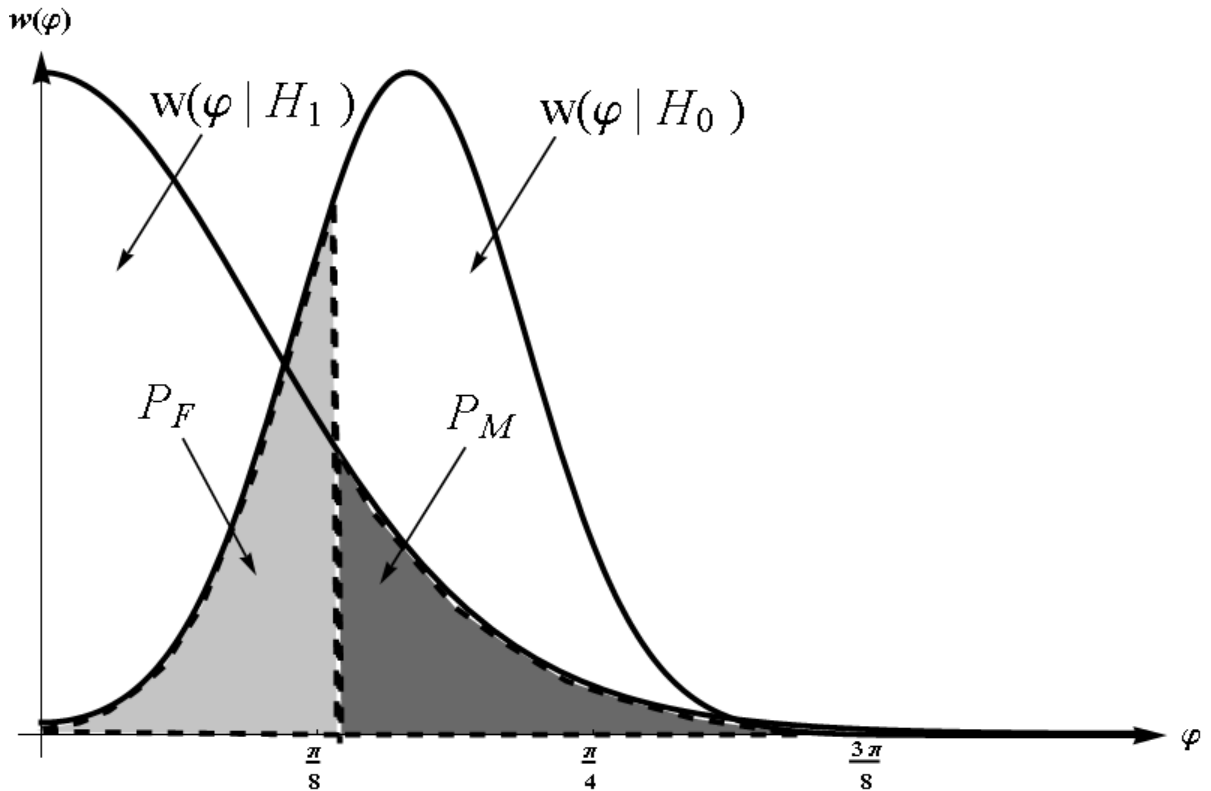


Рисунок 4.6 Вид типичных функций плотности вероятности для обеих гипотез

Для упрощения дальнейшей нотации будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{cases} w(u | H_{j,1}) = w_{\varphi_j}(u | R, R_j = R) = w_{\varphi_j}(u | \rho(R, R) = q, \psi(R, R) = 0), \\ w(u | H_{j,0}) = w_{\varphi_j}(u | R, R_j \neq R) = w_{\varphi_j}(u | \rho(R, R_j) = q \eta(R, R_j), \psi(R, R_j) \neq 0). \end{cases} \quad (4.4)$$

Необходимо учесть, что зависимость всех статистических характеристик от оцениваемого параметра имеет сугубо нелинейный и неоднозначный вид и определяется решением задачи дифракции на конкретном объекте. Так как в общем случае для



произвольного объекта решение данной задачи не может быть получено в аналитическом виде, то и характер зависимости  $\rho(R, R_j), \psi(R, R_j)$  и, как следствие,  $w_{\varphi_i}(u | R, R_j)$  от  $R$  и  $R_j$  невозможно определить для произвольного объекта.

Однако, для исследования качества работы системы классификации (при произвольном объекте и эталоне) удобно проводить анализ её характеристик относительно  $\{\rho, \psi\}$  (подобный переход уже производился в разделе 2.1.5) как независимых аргументов, получая тем самым ограничения на них, связанные с предельно достижимым качеством, и уже потом для каждого конкретного объекта и эталона, для которых задано отображение  $\{R, R_j\}$  в  $\{\rho, \psi\}$  с помощью определённых численно-аналитических преобразований получать ограничения на  $\{R, R_j\}$ . Поэтому в дальнейшем у всех функций будем опускать аргументы, указывающие на конкретный объект  $R$  или эталон  $R_j$ :  $\rho = \rho(R, R_j), \psi = \psi(R, R_j), H_{j,1} = H_1, H_{j,0} = H_0$ .

Предположим также, что элементы выборки (объёмом  $N_{stat}$  значений) независимы. В этом случае ПВ выборки по каждой из гипотез запишется в виде:

$$w(\bar{u} | H_i) = w(u_1, \dots, u_{N_{stat}} | H_i) = \prod_{n=1}^{N_{stat}} w(u_n | H_i), \quad i = 0, 1. \quad (4.5)$$

На практике одним из наиболее часто употребляемых критериев в задачах проверки гипотез является критерий отношения правдоподобия (КОП) [42]:

$$l(u_1, \dots, u_{N_{stat}}) = l(\bar{u}) = \ln(\Lambda(\bar{u})) = \ln \left( \frac{w(\bar{u} | H_0)}{w(\bar{u} | H_1)} \right) \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} \gamma, \quad (4.6)$$

где  $\gamma$  – порог, по которому производится сравнение.

Тогда для определения  $P_D, P_M$  и  $P_F$  в соответствии с выражениями (4.1) – (4.3) необходимо найти ПВ функции отношения правдоподобия (4.6):

$$P_F = \int_0^\gamma w(l(\bar{u}) | H_0) d\bar{u}, \quad (4.7)$$

$$P_M = \int_\gamma^{\pi/2} w(l(\bar{u}) | H_1) d\bar{u}, \quad (4.8)$$

$$P_D = 1 - P_M = \int_0^\gamma w(l(\bar{u}) | H_1) d\bar{u}. \quad (4.9)$$

В выражениях (4.7) – (4.9) интегрирование производится  $N_{stat}$  раз.

В случае ЭФМ по обеим гипотезам  $(H_0, H_1)$  ПВ определяется соотношением (4.4). С учётом того, что она является смесью распределений, не относящихся к экспоненциальному семейству, ни достаточной статистики, ни закона распределения КОП найти невозможно, поэтому выражения (4.7) – (4.9) напрямую не могут быть использованы для непосредственного вычисления. Однако следуя методике, описанной в [8] и [91], можно найти оценки (сверху и снизу) этих величин. Нас будет интересовать только верхняя оценка, как наиболее значимая, так как она позволяет сделать заключение о максимально достижимой вероятности правильной классификации и минимально возможной вероятности ошибки классификации, а значит о работоспособности и целесообразности практического использования предлагаемого метода.

Для этого определим производящую функцию моментов  $\Phi_{H_1}(s)$  по гипотезе  $H_1$ :

$$\exp(\mu(s, \psi, \rho)) = \Phi_{H_1}(s) = \int_0^{\pi/2} e^{sl(\bar{u})} w(\bar{u} | H_1) d\bar{u}, \quad (4.10)$$

где в силу независимости выборки [8]  $\mu(s, \psi, \rho) = \sum_{n=1}^{N_{stat}} \mu_n(s, \psi, \rho)$ .

Тогда величина  $\mu(s, \psi, \rho)$  запишется в виде:

$$\mu(s, \psi, \rho) = \ln \left( \int_0^{\pi/2} \dots \int_0^{\pi/2} \exp \left( \sum_{n=1}^{N_{stat}} s l(u_n) \right) \prod_{n=1}^{N_{stat}} w(u_n | H_1) du_1 \dots du_{N_{stat}} \right). \quad (4.11)$$

Учитывая независимость интегралов и способ введения КОП, выражение (4.6) можно упростить:

$$\mu(s, \psi, \rho) = N_{stat} \ln \left( \int_0^{\pi/2} \left( \frac{w(u | H_0)}{w(u_i | H_1)} \right)^s w(u | H_1) du \right). \quad (4.12)$$

При использовании простой границы Чернова [91] для оценки вероятностей  $P_D$ ,  $P_M$  и  $P_F$  выражения (4.7) – (4.9) примут вид:

$$P_F(\psi, \rho) = \exp(\mu(s_m, \psi, \rho) - s_m \mu'(s_m, \psi, \rho)), \quad (4.13)$$

$$P_M(\psi, \rho) = \exp(\mu(s_m, \psi, \rho) + (1 - s_m) \mu'(s_m, \psi, \rho)), \quad (4.14)$$

$$P_D(\psi, \rho) = 1 - P_M, \quad (4.15)$$

где  $\mu'(s_m, \psi, \rho) = \left. \frac{d\mu(s, \psi, \rho)}{ds} \right|_{s=s_m}$ , а значение параметра  $s \in [0, 1]$  выбирается из условия

минимизации показателей экспонент в выражениях для ошибки:

$$s_m : \mu'(s_m, \psi, \rho) = \gamma,$$

где  $\gamma$  – как и раньше, порог сравнения по КОП.

Принимая во внимание равноправность гипотез ( $\gamma = 0$ ), определим полную вероятность ошибки классификации как:

$$P_\varepsilon(\psi, \rho) = \frac{1}{2} P_M(\psi, \rho) + \frac{1}{2} P_F(\psi, \rho). \quad (4.16)$$

Для упрощения дальнейшего анализа здесь и далее рассмотрим случай  $N_\varphi = 1$ . При этом выражение для  $\rho$  переходит в:

$$\rho(R, R_j) = q. \quad (4.17)$$

Стоит отметить, что оценка с использованием лишь одного антенного элемента является одним из худших возможных случаев: при увеличении числа приёмников увеличивается количество регистрируемых пространственных частот (как следствие, увеличивается количество информации об объекте), одновременно увеличивается объём статистической выборки для анализа, а также (в случае наличия когерентности между каналами) возрастает результирующее ОСШ. Таким образом, получаемые ниже зависимости характеризуют границы качества в одном из наихудших случаев.

#### 4.3.2 Анализ результатов математического моделирования

Моделирование процесса определения минимального шага сетки эталонов на основе ограничения снизу (сверху) вероятности правильной классификации (полной ошибки классификации) двух соседних эталонов производилось в соответствии с процедурой, описанной в пункте 4.3.1. Для этого в среде Wolfram Mathematica 8.0 была написана программа, вычисляющая вероятности (4.15) и (4.16) для функции плотности вероятности, задаваемой выражением (2.93). Также было проведено моделирование для сравнения влияния аппроксимации на вероятность правильной классификации для аппроксимирующей функции плотности вероятности (2.110). Для сравнения была выбрана именно эта аппроксимация в соответствии с выданными в пункте 2.4 рекомендациями.

Зависимость минимального шага сетки эталонов от параметров была проанализирована для значений отношения сигнал/шум от 1 до 20 дБ с шагом 1 дБ, для ряда значений интегральной разности фаз  $\psi = \{1^\circ, 5^\circ, 10^\circ\}$  (которые, как указывалось в пункте 1.3, могут

быть пересчитаны в реальные размеры радиологических объектов) и для ряда значений объёма выборки  $N_{stat} = \{50, 100, 200, 500, 1000\}$ .

Зависимости вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = 1^\circ$  на рисунке 4.7, а при  $\psi = \{5^\circ, 10^\circ\}$  – на рисунках Е.2 – Е.3 в Приложении Е.

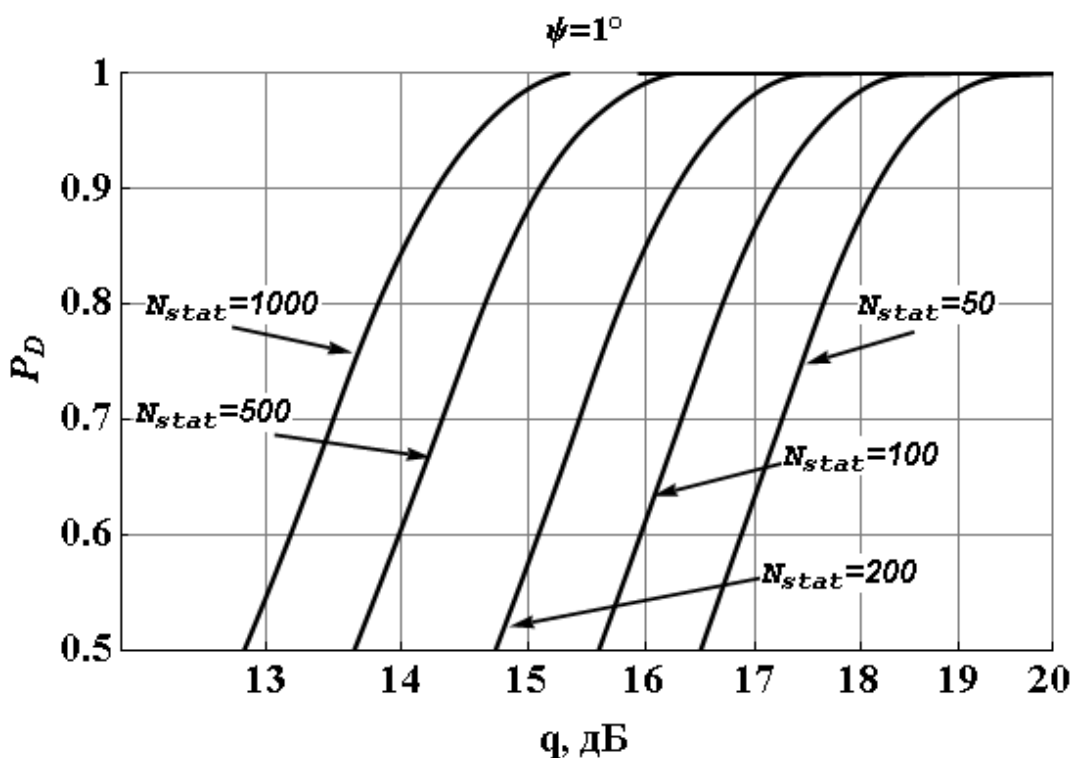


Рисунок 4.7 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = 1^\circ$

Как указывалось ранее, особый интерес представляет анализ работоспособности системы, проектируемой с использованием эталонных фазовых методов в условиях плохой помеховой обстановки и жёстких требований к работе системы в режиме реального времени (высокого быстродействия), что эквивалентно режиму малых отношений сигнал/шум (до 5-10 дБ) и малого объёма выборки (до 50-100 отсчётов). С этой целью на примере системы, работающей в условиях отношения сигнал/шум 5 дБ и объёма выборки 50 отсчётов, была исследована зависимость вероятности правильной классификации от величины истинного значения интегральной разности фаз, представленная на рисунке 4.8.

Её анализ позволяет сделать заключение, что для выполнения столь жёстких требований при построении эталонной сетки эталонного фазового метода, использующего интегральную

разность фаз, шаг сетки, обеспечивающий вероятность различения двух ближайших эталонов в наборе (вероятность правильной классификации) на уровне не ниже 0,99, должен быть не меньше чем  $27^\circ$ . Это обеспечивает возможность использования набора, состоящего лишь из 3 эталонов, так как сама  $\psi$  меняется в диапазоне  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

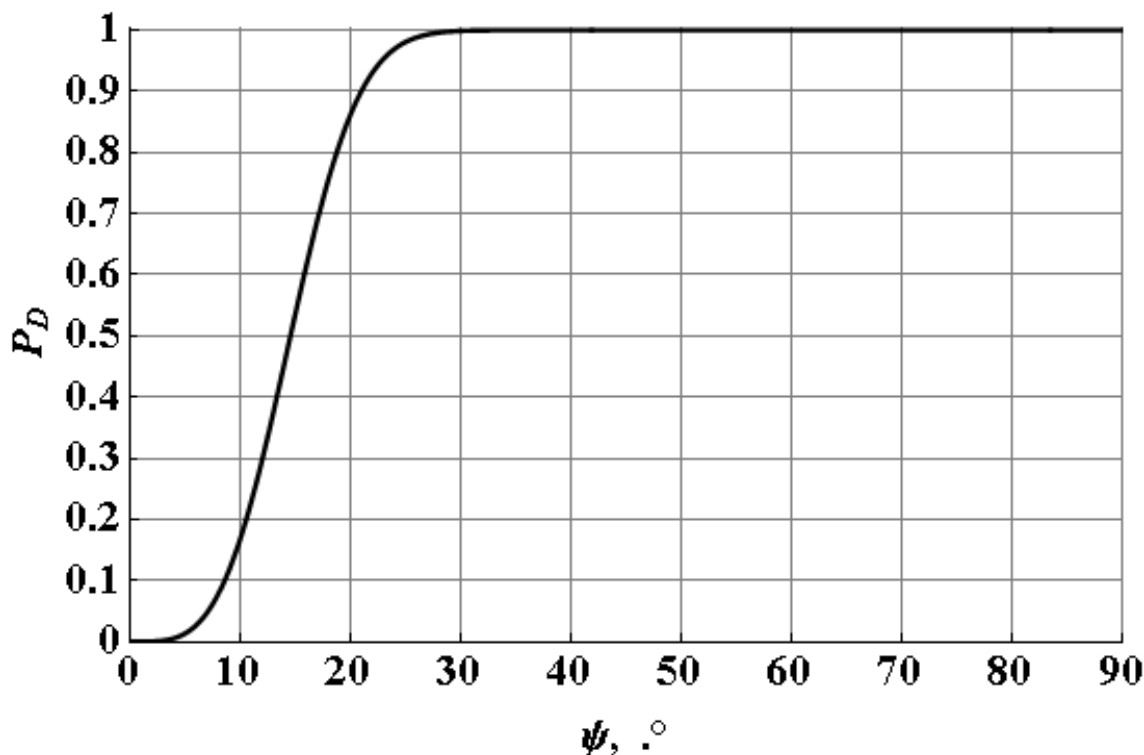


Рисунок 4.8 Зависимость вероятности правильной классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум 5 дБ и объеме выборки 50 отсчетов

Таким образом, можно сделать заключение, что в случае одновременно плохой помеховой обстановки и малого доступного объема выборки использование в качестве критерия при построении сетки эталонов эталонного фазового метода вероятности правильной классификации двух соседних эталонов приводит к синтезу системы, обеспечивающей достаточно грубую классификацию, допустимую лишь на этапе предварительного анализа.

Данная ситуация не является приемлемой в случае необходимости различения большого числа эталонов. В связи с этим были проанализированы возможные пути повышения качества работы такой системы, а также достижимые выигрыши в величине шага сетки эталонов или объема выборки или отношения сигнал/шум.

Зависимости вероятности правильной классификации от величины истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум 10 дБ и объема выборки 50, 100, 200, 500 и 1000 отсчетов приведены на рисунке 4.9, а для случая отношения сигнал/шум шум 5

и 20 дБ – на рисунках Е.4 – Е.5 в Приложении Е. На рисунке 4.10, а так же на рисунках Е.6 – Е.9 в приложении Е представлены зависимости вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз для всего рассматриваемого диапазона значений ряда выборки.

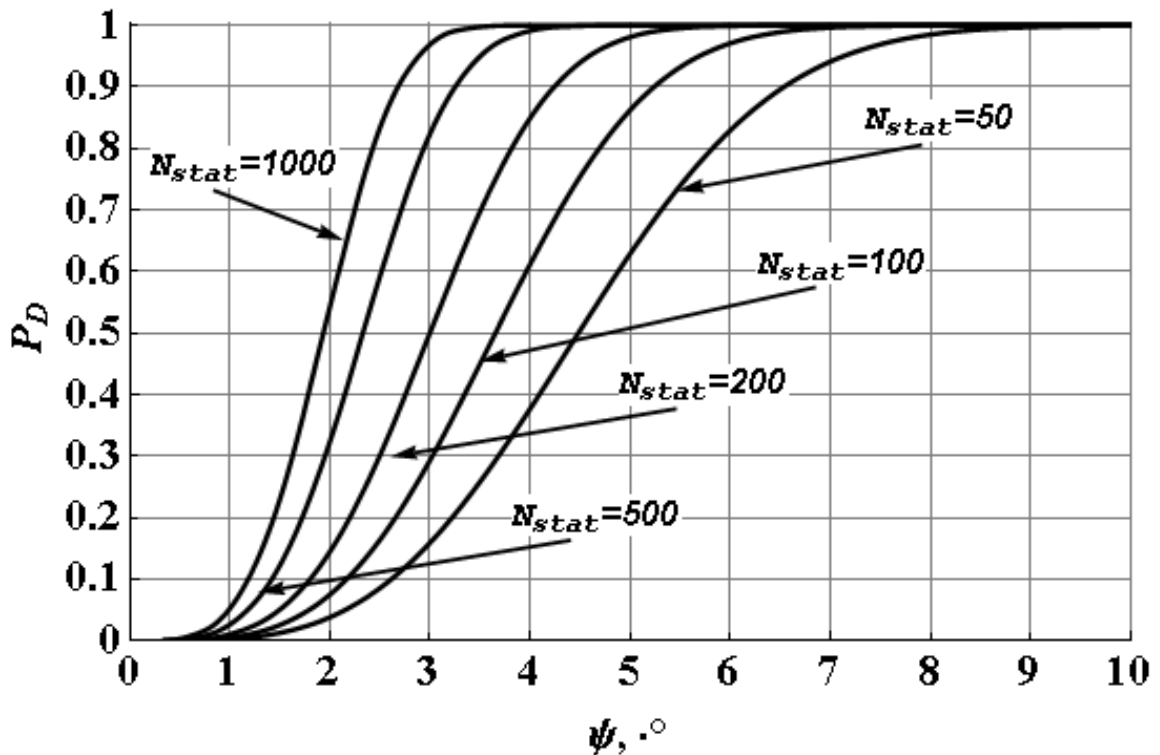


Рисунок 4.9 Зависимость вероятности правильной классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум 10 дБ при различном объёме выборки

Из анализа характеристик можно сделать заключение, о том, что  $P_D$  возрастает с увеличением как  $N_{stat}$ , так и  $\psi$ . Однако, очевидно, что данные зависимости носят нелинейный характер и, например, для достижения заданного уровня  $P_D$  постоянное увеличение объёма выборки на фиксированную величину приводит к уменьшению энергетического выигрыша во входном ОСШ, при котором данная  $P_D$  достигается. Тот же вывод можно сделать и по поводу уменьшения полной ошибки.

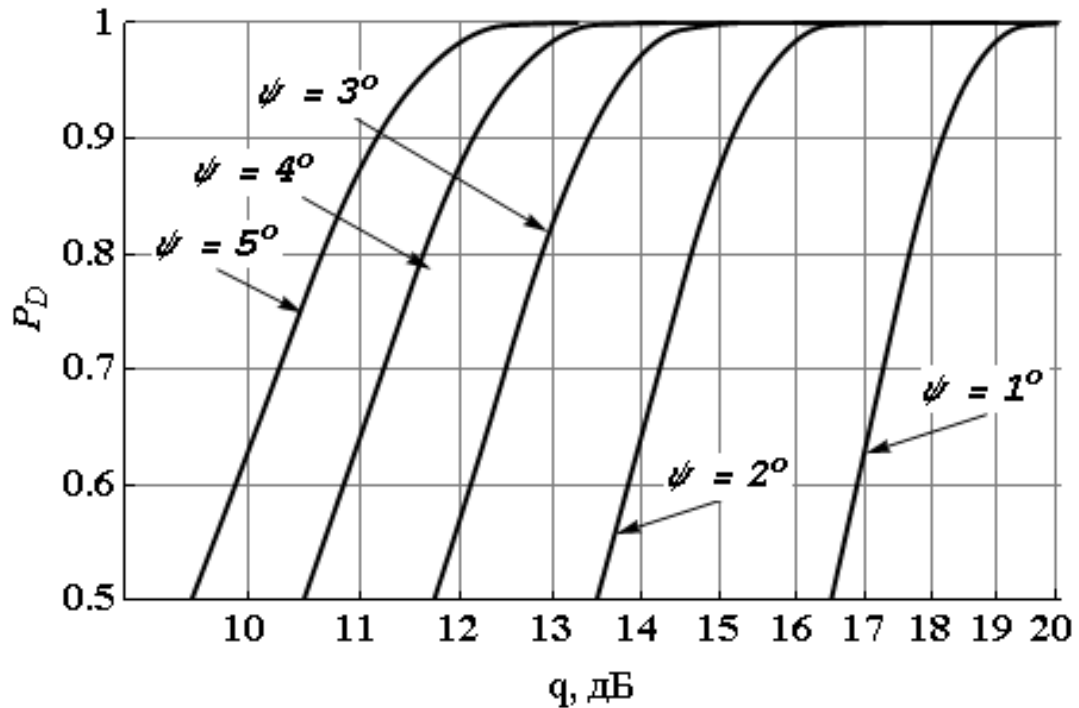


Рисунок 4.10 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 50 отсчётов

Для случая построения сетки эталонов по фиксированному значению вероятности правильной классификации двух соседних эталонов в наборе (например, на уровне  $P_D=0,99$ ) анализ полученных результатов показал, что:

– при фиксированных значениях интегральной разности фаз и отношения сигнал/шум объём выборки, требуемый для достижения заданного  $P_D$ , монотонно возрастает (см. рисунки 4.7 и Е.2 – Е.3 в приложении Е), достигая:

- 1000 отсчётов при  $\psi = 1^\circ$  и  $q = 15,5$  дБ;
- 1000 отсчётов при  $\psi = 5^\circ$  и  $q = 8,5$  дБ;
- 1000 отсчётов при  $\psi = 10^\circ$  и  $q = 5,5$  дБ;
- 500 отсчётов при  $\psi = 1^\circ$  и  $q = 16,5$  дБ;
- 500 отсчётов при  $\psi = 5^\circ$  и  $q = 9,5$  дБ;
- 500 отсчётов при  $\psi = 10^\circ$  и  $q = 6,5$  дБ;
- 50 отсчётов при  $\psi = 1^\circ$  и  $q = 19,5$  дБ;
- 50 отсчётов при  $\psi = 5^\circ$  и  $q = 12,5$  дБ;

– 50 отсчётов при  $\psi = 10^\circ$  и  $q = 9,5$  дБ,

что соответствует выигрышу во входном отношении сигнал/шум в 10 дБ при разрежении сетки эталонов в 10 раз (с  $1^\circ$  до  $10^\circ$ ), т.е. возможности различения 10 эталонов в наборе) или 7 дБ при разрежении в 5 раз (с  $1^\circ$  до  $5^\circ$ ).

Исходя из этого, можно заключить, что при выборе шага сетки эталонов в  $1^\circ$  даже при использовании объёма выборки в 1000 отсчётов невозможно добиться работы системы (различающей два ближайших эталона с вероятностью 0,99) при входных отношениях сигнал/шум менее 10 дБ. Однако при выборе шага сетки в  $5^\circ$  обеспечение режима реального времени в условиях малого отношения сигнал/шум возможно, но для этого необходимо обеспечить объём выборки 1000 отсчётов и более, что возможно реализовать лишь в случае, если сравнение эталонов происходит на основе оценки, полученной при использовании метода моментов, но не максимального правдоподобия.

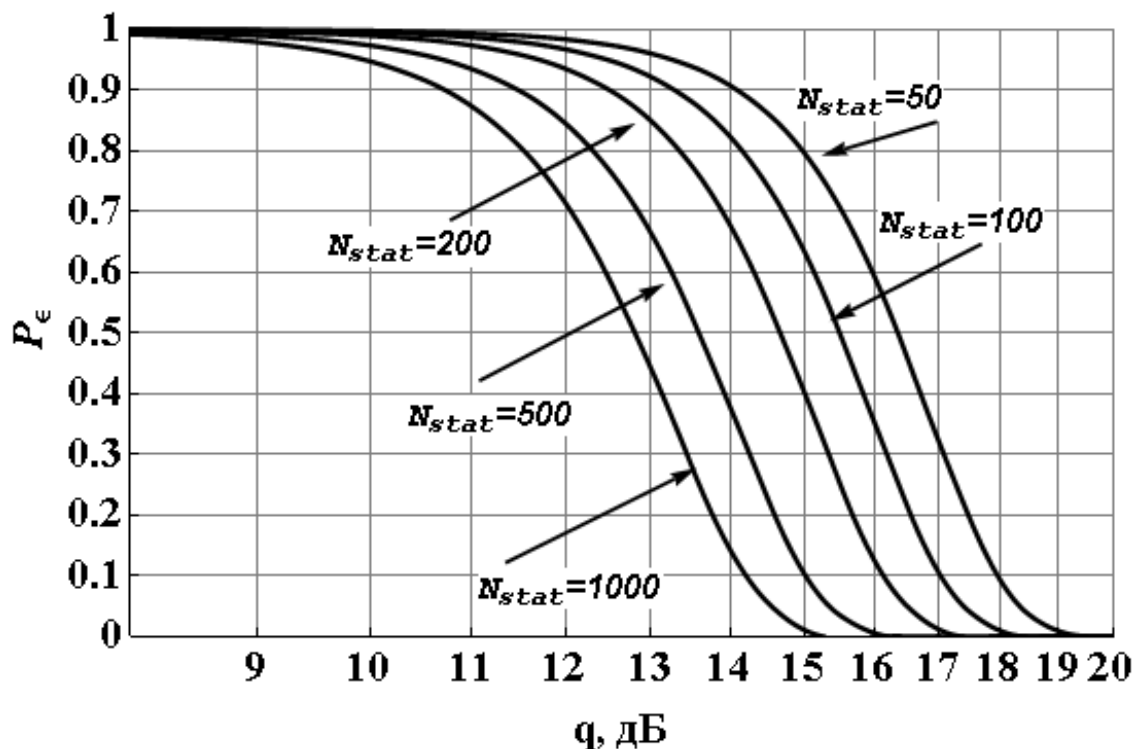


Рисунок 4.11 Зависимость вероятности полной ошибки классификации от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = 1^\circ$

На рисунке 4.11, а также на рисунках Е.10 – Е.11 в приложении Е представлены зависимости вероятности полной ошибки классификации от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = \{1^\circ, 5^\circ, 10^\circ\}$ ,



а на рисунке 4.12 – зависимость вероятности полной ошибки классификации от величины истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум 5 дБ и объема выборки 50 отсчетов.

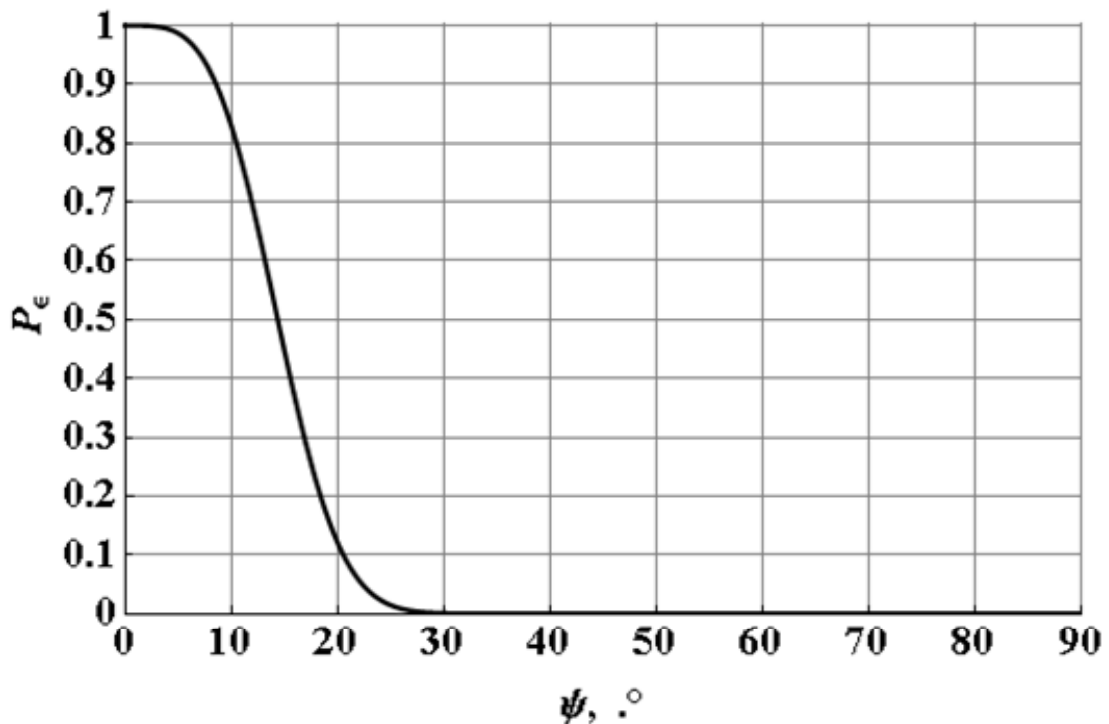


Рисунок 4.12 Зависимость вероятности полной ошибки классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум 5 дБ и объема выборки в 50 отсчетов

Анализ результатов позволяет сделать заключение, что требования, накладываемые на систему: шаг сетки эталонов, объем статистической выборки, доступный для наблюдения, отношение сигнал/шум, определяемые при наложении ограничений на величину полной вероятности ошибки классификации двух соседних эталонов, с точностью до 0,5 дБ совпадают с требованиями, накладываемыми при ограничении на вероятность правильной классификации.

На рисунке 4.13, а так же на рисунках E.12 – E.13 в приложении E представлены зависимости вероятности полной ошибки классификации от величины истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум 5, 10 и 20 дБ и объема выборки 50, 100, 200, 500 и 1000 отсчетов.

На рисунке 4.14, а так же на рисунках E.14 – E.17 в приложении E представлены зависимости вероятности полной ошибки классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз для всего рассматриваемого диапазона значений ряда выборки.

Стоит отметить, что (см. рисунок 4.14) при увеличении шага эталонной сетки (значения интегральной разности фаз) степень выигрыша по отношению сигнал/шум, при котором достигается желаемая вероятность правильной классификации двух соседних эталонов в эталонной сетке, уменьшается, например, при переходе от  $\psi = 1^\circ$  к  $\psi = 2^\circ$  требуемое входное отношение сигнал/шум сокращается на 3 дБ, а при переходе от  $\psi = 4^\circ$  к  $\psi = 5^\circ$  – всего на 1 дБ.

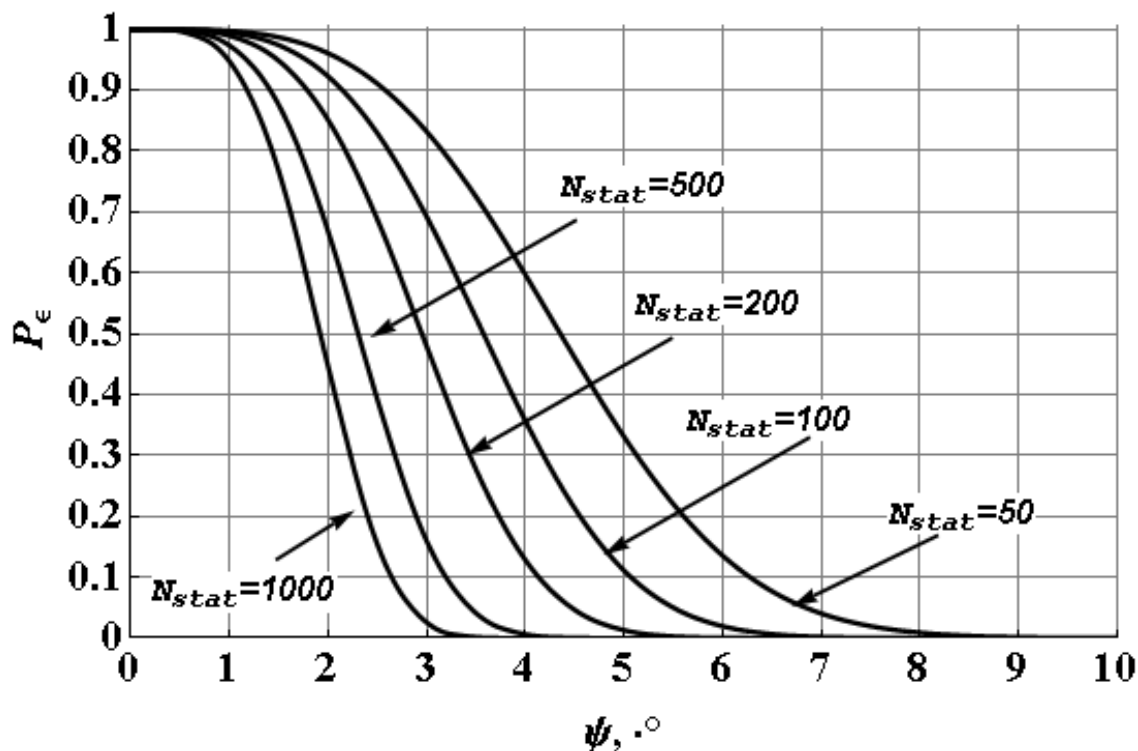


Рисунок 4.13 Зависимость вероятности полной ошибки классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум равного 10 дБ при различном объеме выборки

Стоит отметить, что система классификации значительно более чувствительна к увеличению  $\psi$ , чем  $N_{stat}$ . Например, увеличение  $\psi$  в 2 раза (с  $1^\circ$  до  $2^\circ$ ) приводит к выигрышу во входном ОСШ в 3 дБ (см. рисунок 4.10). Для достижения такого же эффекта необходимо значительно увеличить  $N_{stat}$ : при  $\psi = 1^\circ$  – в 10 раз (с 50 до 500).

Попытка резкого увеличения количества используемых эталонов – уменьшение шага по  $\psi$  (для повышения разрешающей способности метода) может привести к необходимости серьезного повышения объема выборки  $N_{stat}$  и, как следствие, к снижению быстродействия системы в целом (одного главных её преимуществ) или, при сохранении фиксированного  $N_{stat}$ , к снижению вероятности правильной классификации за счёт того, что система будет чаще «путать» мало различающиеся по оцениваемому параметру эталоны.

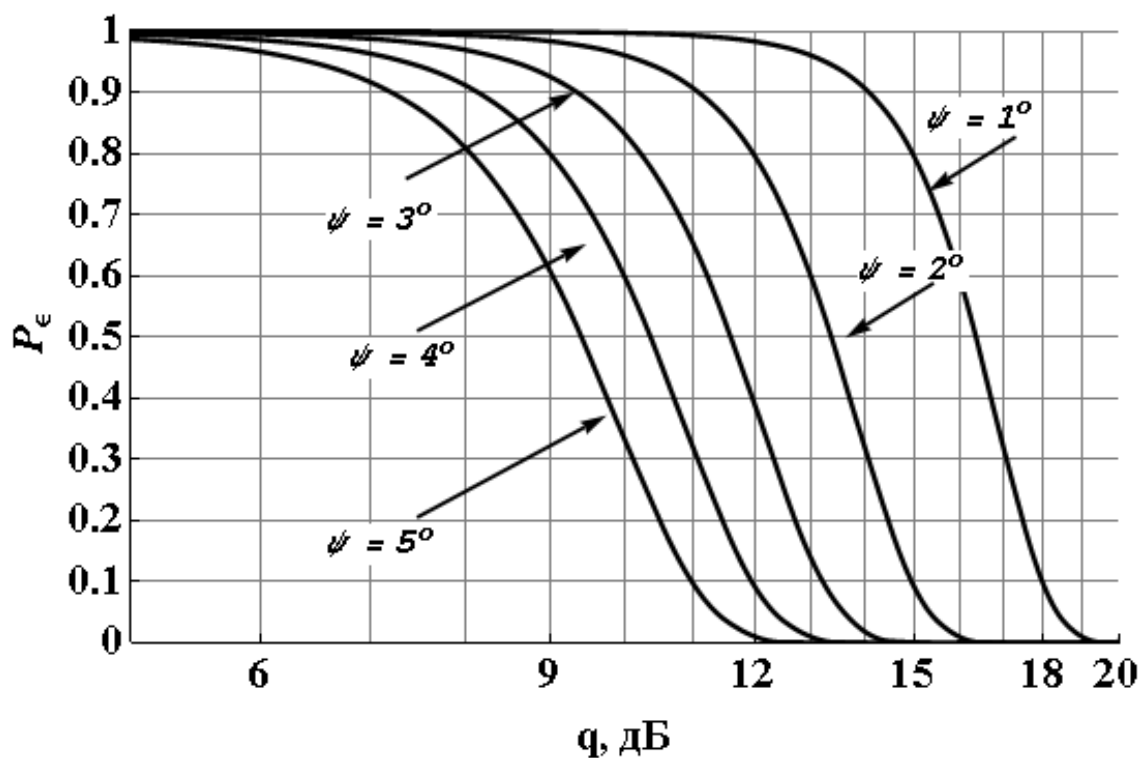


Рисунок 4.14 Зависимость полной вероятности ошибочной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 50 отсчётов

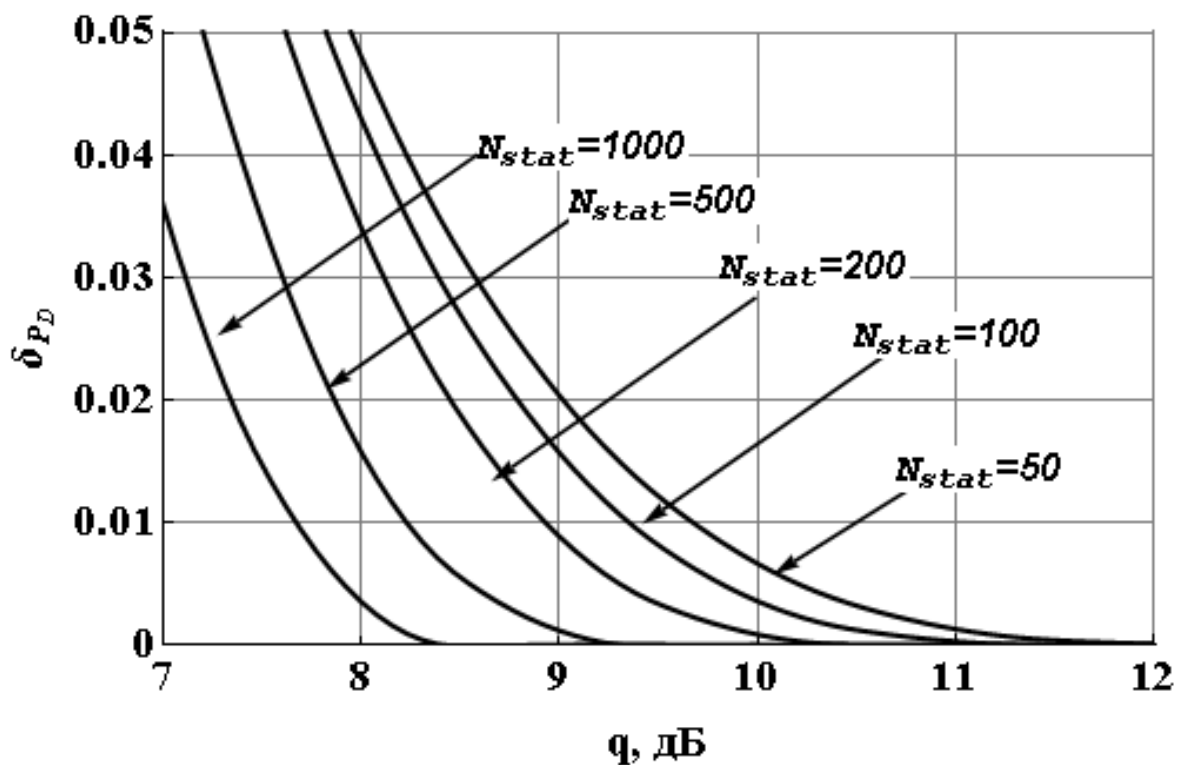


Рисунок 4.15 Зависимость относительной ошибки по вероятности правильной классификации, вносимой аппроксимацией (2.110), от отношения сигнал/шум для различного объёма выборки и  $\psi = 5^\circ$

На рисунках 4.15 – 4.16 представлены графики зависимостей относительной ошибки по вероятности правильной классификации, вносимой заменой строгого выражения (2.93) аппроксимацией (2.110), от отношения сигнал/шум для различного объёма выборки при  $\psi = 5^\circ$  и для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 1000 отсчётов.

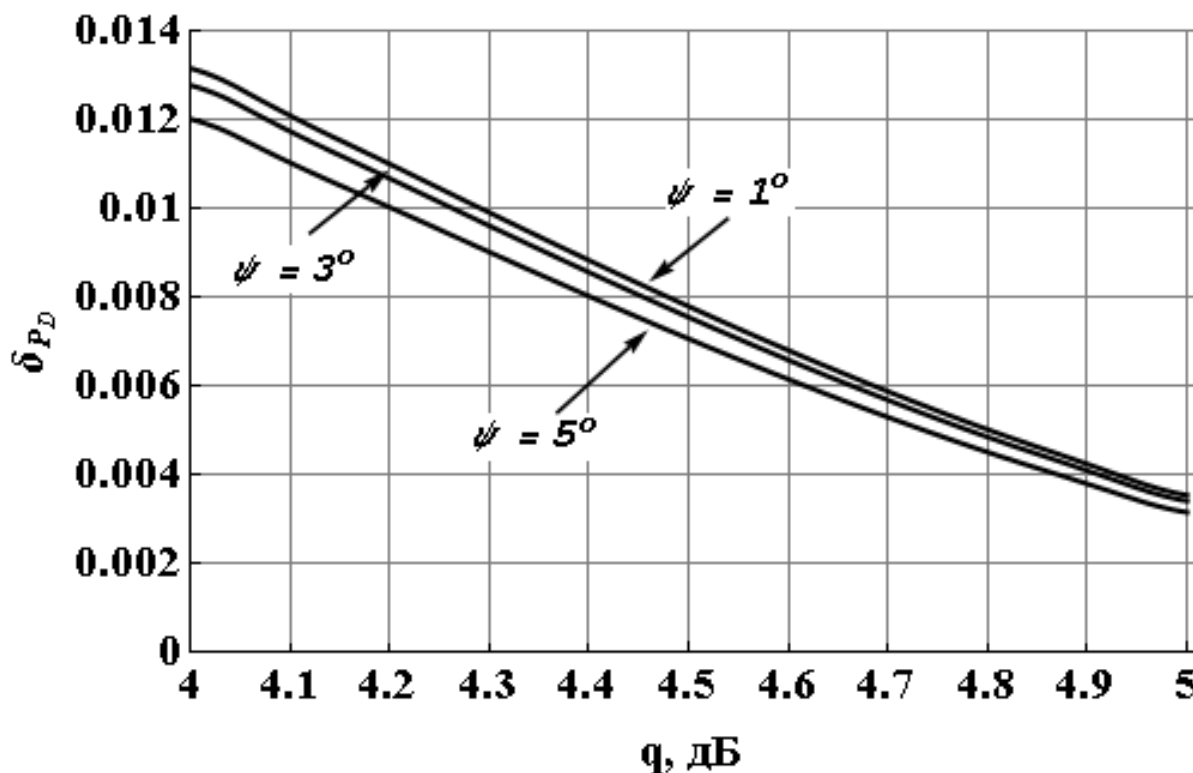


Рисунок 4.16 Зависимость относительной ошибки по вероятности правильной классификации, вносимой аппроксимацией (2.110), от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 1000 отсчётов

В качестве аппроксимации в соответствии с рекомендациями, сформулированными в главе 2, была выбрана модель двухкомпонентной смеси "обёрнутого" нормального распределения, так как в области малых отношений сигнал/шум именно она является предпочтительной.

Анализируя полученные зависимости, можно сделать вывод, что ввиду повышения точности аппроксимации (см. глава 2 рисунки 2.2 – 2.6) относительная ошибка по вероятности правильной классификации также уменьшается.

Ошибка, вносимая аппроксимацией, может быть скомпенсирована за счёт увеличения объёма статистики: например, при  $\psi = 5^\circ$  и отношении сигнал/шум 9 дБ увеличение  $N_{stat}$  в четыре раза (с 50 до 200) приведёт к уменьшению относительной ошибки в 2 раза с 0,02 до 0,01. Одновременно с этим, как уже указывалось ранее, в системах, использующих для сравнения

объекта с эталоном оценки максимального правдоподобия, это приведёт к существенному снижению быстродействия системы в целом. Это позволяет сделать заключение о возможности использования такого метода компенсации ошибки, вносимой аппроксимацией, для систем, работающих в режиме реального времени с использованием лишь моментных оценок.

Уменьшения относительной ошибки можно добиться и за счёт разрежения сетки эталонов (см. рисунок 4.16). Однако эффект от таких действий оказывается значительно менее существенным и не может серьёзно рассматриваться в практических целях: проигрыш по разрешающей способности метода в три раза (увеличение шага сетки с  $1^\circ$  до  $3^\circ$ ) даёт выигрыш по относительной ошибке оценки всего с 0,011 до 0,01.

#### **4.4 Замечания относительно сравнения двух рассматриваемых подходов при выборе минимального шага сетки эталонов**

Оба рассмотренных подхода справедливы и равноправны в зависимости от назначения и требований, предъявляемых к проектируемой системе. Однако, отмечая равноправность предлагаемых подходов, стоит указать на их неравносильность, например, в частности, по величинам соотношений сигнал/шум и требуемым объёмам выборки для достижения разрешения заданной ИРФ:

–исходя из рисунка 4.5 в худшем случае (при неизвестной величине коэффициента амплитудного расхождения) при объёме статистической выборки в 1000 отсчётов для достижения статистического предела разрешения требуется обеспечить:

- соотношение сигнал/шум 12,7 дБ при истинном значении ИРФ в  $1^\circ$ ;
- соотношение сигнал/шум 3 дБ при истинном значении ИРФ в  $10^\circ$ ;

при известном  $\eta$  требования к величине соотношения сигнал/шум существенно понижаются (до 8,5 и 0,1 дБ соответственно);

–исходя из рисунков Е.3 и Е.9 в приложении Е, для достижения разрешения в смысле заданной  $P_D$  (на уровне 0,99) при том же объёме выборки в 1000 отсчётов требуется обеспечить:

- соотношение сигнал/шум более 15,5 дБ при истинном значении ИРФ в  $1^\circ$  (см. рисунок Е.9);
- соотношение сигнал/шум более 5,5 дБ при истинном значении ИРФ в  $10^\circ$  (см. рисунок Е.3);

так же, например, как следует из рисунка Е.4, при соотношении сигнал/шум в 5 дБ и  $N_{stat}=1000$  величина  $P_D=0,99$  достигается для ИРФ не менее  $12^\circ$ .

Это означает, что требования, предъявляемые к проектируемой системе, более жёсткие в случае использования в качестве критерия ограничения на величину  $P_D$ , а значит, сетка эталонов будет более редкая и, как следствие, разрешающая способность такой сетки будет несколько ниже.

В дополнение стоит отметить уже указанное в пунктах 4.2.1 и 4.2.2 требование минимизации смещения оценки ИРФ, на основе которой и производится сравнение, так как при наличии большого смещения в оцениваемой величине даже существенное разрежение эталонной сетки может не привести к верному выбору наиболее подходящего эталона. При этом использование метода моментов для оценки ИРФ делает требование минимизации смещения доминирующим над требованием достижения статистического предела разрешения или заданной вероятности  $P_D (P_\varepsilon)$ . Как демонстрируют результаты статистического моделирования в пункте 3.2.2, получаемая оценка  $\hat{\psi}_{MM}$  обладает существенным смещением, которое становится пренебрежимо малым при:

- соотношении сигнал/шум более 16 дБ и истинном значении ИРФ в  $1^\circ$ ;
- соотношении сигнал/шум более 12 дБ и истинном значении ИРФ в  $5^\circ$ ;
- соотношении сигнал/шум более 10 дБ и истинном значении ИРФ в  $10^\circ$ ,

что существенно больше, чем требования, сформулированные в пунктах 4.2.2 и 4.3.2. Уменьшить величину смещения оценки, а значит, и понизить значимость данного критерия при выборе минимального шага сетки, можно за счёт использования, например, оценок, полученных на основе метода максимального правдоподобия, в сочетании увеличением выборки: в соответствии с результатами, полученными в пункте 3.3.2, смещение становится пренебрежимо малым, например, для ИРФ в  $5^\circ$ , уже начиная с 5,5 дБ.

Таким образом, в различных практических ситуациях (доступный объём выборки, отношение сигнал/шум, наличие априорной неопределённости относительно знания величины коэффициента амплитудного расхождения, метод оценивания ИРФ и её истинная величина) значения шага сетки, определяемые с помощью этих критериев, будут существенно отличаться, вследствие чего разумно выбирать наибольший из них, тем самым гарантируя, что в построенной таким образом сетке эталонов два ближайших эталона будут гарантированно различаться в смысле статистического предела разрешения с некоторой заданной вероятностью  $P_D$ .

**4.5 Пример сравнения процедуры выбора минимального шага сетки эталонов на основе  $P_D$  при использовании интегральной разности фаз и евклидова расстояния**

Как отмечалось в пункте 4.1, исходя из наиболее общих положений, оцениваемая мера "сходства" объекта и эталона представляет собой проекцию многомерного пространства, в котором определяются вектора объектной и эталонных радиоголограмм, на некоторое подпространство, удобное для описания. В частности это производится для снижения размерности рассматриваемой задачи. Как указывалось ранее (см. [20]), интегральная разность фаз представляет собой, по сути, отображение  $\square^{N_\alpha}$  в  $\square$ . В 1.2 приводился широкий круг возможных отображений (мер "сходства"). Однако, в радиоголографии наибольшее распространение нашло классическое евклидово расстояние, минимизация которого относительно заданной эталонной сетки в случае нормального распределения элементов вектора радиоголограммы приводит к методу максимального правдоподобия или при использовании байесовского подхода к принятию решения об отнесении исследуемого объекта к одному из классов с равными априорными вероятностями – к методу максимума апостериорной вероятности.

В случае использования модели шума, описанной в пунктах 1.3-1.4, евклидово расстояние подчиняется нецентральному хи-квадрат распределению:  $w_e(u, l, \lambda) \square \chi_l^2(\lambda)$ , где  $l$  – число степеней свободы, которое равно удвоенному количеству пространственных дискретов радиоголограммы (антенных элементов)  $N_\alpha$ , а  $\lambda = \lambda(R_{ob}, R_{et_j})$  – параметр нецентральности, равный евклидову расстоянию между двумя рассматриваемыми эталонами в отсутствие шумов.

Исходя из введённых обозначений, можно сформулировать задачу проверки гипотезы о различимости двух соседних эталонов при применении эталонных методов, использующих ИРФ и евклидово расстояние, следующим образом [20]:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 : \left\{ \begin{array}{l} \rho(R_{et_i}, R_{et_j}) = q, \\ \psi(R_{et_i}, R_{et_j}) = 0, \end{array} \right. \\ \\ H_0 : \left\{ \begin{array}{l} \rho(R_{et_i}, R_{et_j}) = q \eta(R_{et_i}, R_{et_j}), \\ \psi(R_{et_i}, R_{et_j}) \neq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1 : \left\{ \begin{array}{l} \lambda(R_{et_i}, R_{et_j}) = 0, \\ \lambda(R_{et_i}, R_{et_j}) \neq 0, \end{array} \right. \\ \\ H_0 : \left\{ \begin{array}{l} \lambda(R_{et_i}, R_{et_j}) = 0, \\ \lambda(R_{et_i}, R_{et_j}) \neq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Таким образом, пользуясь выражениями (4.12) – (4.15) и задавая разумные ограничения на  $P_D$ , можно определить значение минимального шага для двух методов.

В пункте 4.3.2 для случая эталонного метода, использующего ИРФ, был проведён подробный анализ зависимостей величины минимального шага эталонной сетки от таких параметров как объём статистической выборки, истинное значение ИРФ, соотношение сигнал/шум и др. Характер поведения для случая евклидова расстояния остаётся схожим. При этом с точки зрения практической реализации СГРВ, использующей эталонные методы оценки, основной интерес представляет зависимость минимального шага сетки от отношения сигнал/шум. Поэтому далее будем сравнивать результаты, полученные с применением амплитудного и фазового критериев, по величине соотношения сигнал/шум, необходимого для достижения желаемого уровня  $P_D$  (обоими критериями) при заданной конфигурации системы, и по выигрышу по соотношению сигнал/шум (их разность  $\Delta_q$ ).

Ввиду невозможности проведения сравнения без указания конкретного объекта исследования для сравнения поведения методов были выбраны бесконечные идеально проводящие ленты, которые часто используются в качестве тестовых радиоголографических моделей реальных объектов, например, при определении разрешающей способности СГРВ, т.к. для них существует аналитические решения задачи рассеяния (см. [46], [47]). В приложении А приведён написанный программный код (в среде Wolfram Mathematica) для их расчёта.

Использовалась модель СГРВ с рабочей длиной волны  $\lambda = 0,008$  м, дуговой апертурой с углом раскрытия  $2\alpha$  от  $1^\circ$  до  $20^\circ$  с шагом  $0,2^\circ$  и радиусом кривизны 21,2 м, количеством пространственных дискретов радиоголограммы (антенных элементов)  $N_\alpha$  от 5 до 100 с шагом 1. Расстояние между объектом и центром СГРВ 21,2 м. Теоретическая аппаратная разрешающая способность системы в такой конфигурации составляет  $15\lambda$ . Соотношение сигнал-шум изменялось в диапазоне от 10 до 50 дБ с шагом 0,2 дБ. Величина объёма выборки для усреднения в каждой точке апертуры  $N_{stat}$  составляла 5000 отсчётов и выбиралась в соответствии с результатами моделирования в пункте 4.2.2 и замечаниями в пункте 4.4 таким образом, чтобы величина смещения оценок была незначительной, а значение статистического предела разрешения было гарантированно меньше, чем значение минимального шага, определяемого, исходя из ограничений на  $P_D$ . Минимальный уровень  $P_D$  был выбран равным 0,99. Радиоголограммы тестовых объектов записывались в присутствии шума, моделируемого комплексным АБГШ с нулевыми математическими ожиданиями и уровнями дисперсии синфазной и квадратурной компонент, определяемыми, исходя из требуемой величины отношения сигнал/шум, а для эталонных — без шума. В качестве эталонов для различения были выбраны 2 ленты шириной  $10\lambda$  и  $11\lambda$ , такие, чтобы они гарантированно не могли быть



различены методами классической радиолокации (например, при обработке восстановленного изображения).

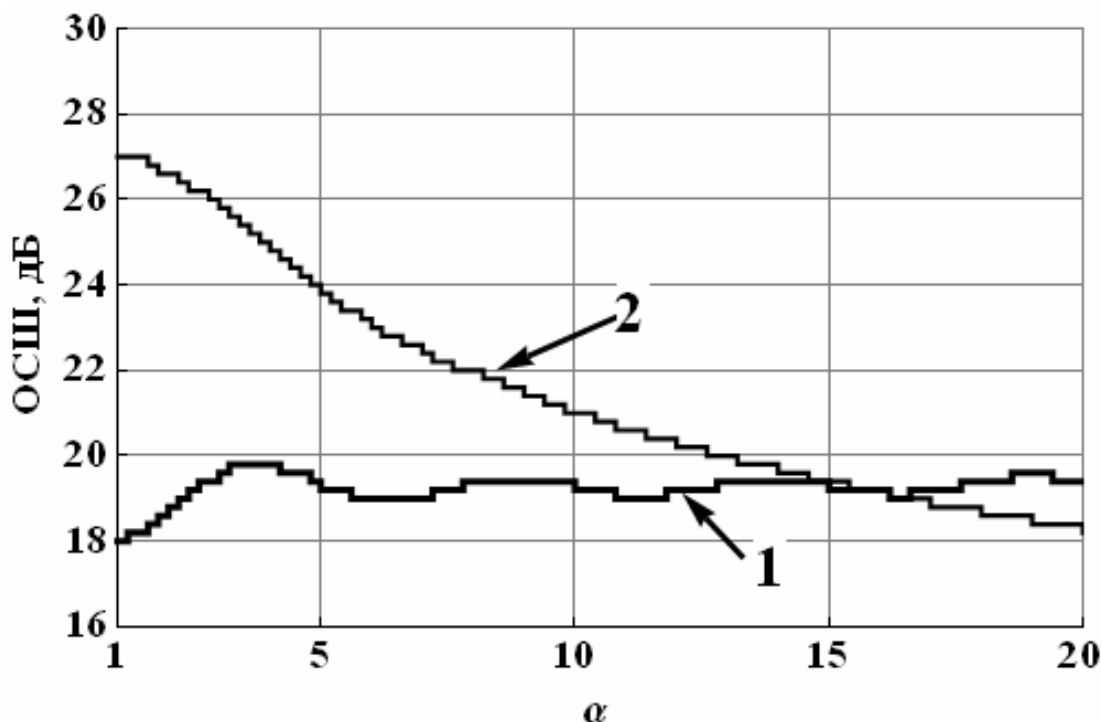


Рисунок 4.17 Зависимость величины ОСШ, необходимого для достижения заданного  $P_D$ , от величины угла раскрытия приёмной апертуры для случая  $N_\alpha = 10$ :

1 – расстояние Евклида, 2 – ИРФ

На рисунке 4.17 для примера, представлены графики зависимости величины ОСШ, необходимого для достижения заданного  $P_D$  от величины угла раскрытия приёмной апертуры (в градусах) для случая 10 пространственных отсчётов радиолограммы (числа антенных элементов) при использовании расстояния Евклида и ИРФ.

На основе анализа полученных результатов можно сделать заключение, что величина необходимого ОСШ для случая использования расстояния Евклида крайне слабо зависит от угла раскрытия антенной системы СГРВ. Так, например, при  $N_\alpha = 10$  и  $\alpha > 5^\circ$  требуемое ОСШ колеблется в диапазоне от 18,4 до 18,8 дБ при шаге 0,2 дБ. Однако уже при  $N_\alpha = 50$  зависимость полностью исчезает, и требуемое ОСШ постоянно во всём выбранном для анализа диапазоне изменения  $\alpha$  и равно 22,8 дБ, а для  $N_\alpha = 100$  также постоянно и равно 23,8 дБ.

Для ИРФ, наоборот, обнаруживается явная зависимость уменьшения требуемого ОСШ с увеличением  $\alpha$ . При увеличении  $N_\alpha$  с 10 до 50 и с 10 до 100 общее смещение графика

незначительно и находится в пределах 0,2 – 0,6 дБ, что частично можно отнести к вычислительным погрешностям используемых алгоритмов численного интегрирования.

Очевидно, что такое поведение рассматриваемых зависимостей условно разбивает всю область изменения выбранного параметра на участки, где тот или иной подход даёт выигрыш в величине ОСШ  $\Delta_q$ , требуемого для достижения желаемой  $P_D$ .

На рисунках 4.18 и 4.19 изображены графики зависимостей выигрыша метода на основе расстояние Евклида над методом на основе ИРФ по величине ОСШ от числа пространственных отсчётов радиоголограммы (числа антенных элементов) для трёх значений угла раскрыва приёмной апертуры (см. рисунок 4.18) и от угла раскрыва приёмной апертуры для трёх значений  $N_\alpha$  (см. рисунок 4.19).

Зависимости, представленные на рисунках 4.18 и 4.19, демонстрируют монотонное уменьшение  $\Delta_q$  с ростом как  $\alpha$  (при фиксированном  $N_\alpha$ ), так и  $N_\alpha$  (при фиксированном  $\alpha$ ). Однако видно, что при увеличении  $N_\alpha$  (в условиях фиксированного  $\alpha$ ) более некоторой величины «порога насыщения» спадание  $\Delta_q$  существенно замедляется. Для зависимости  $\Delta_q$  от  $\alpha$  такого эффекта не наблюдается.

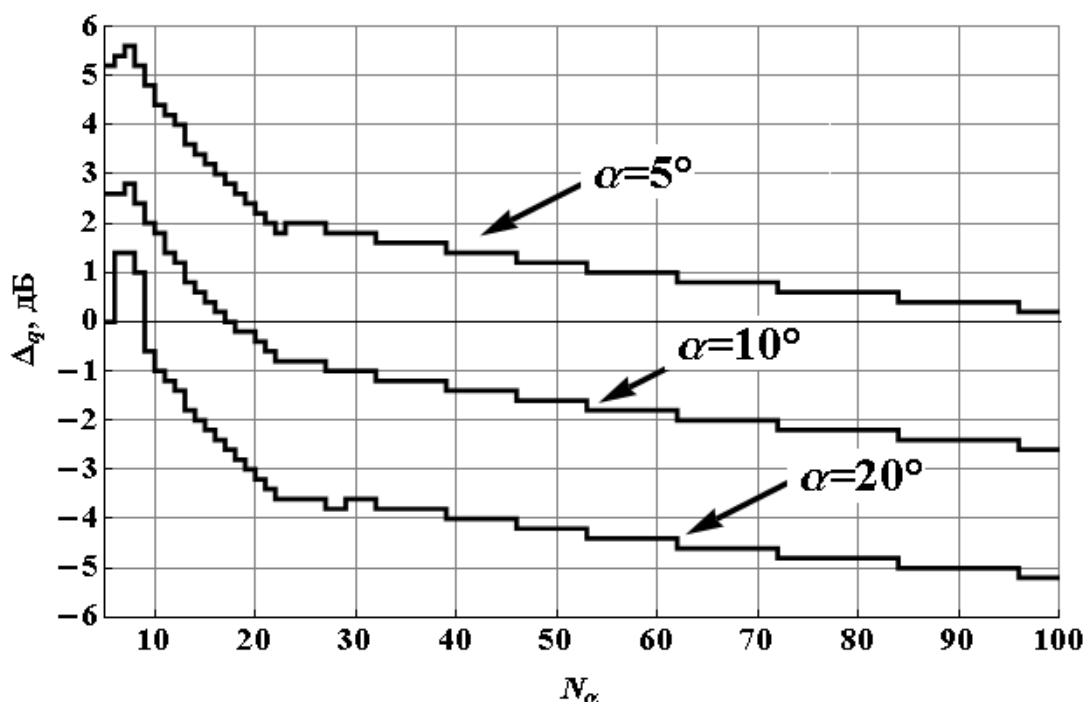


Рисунок 4.18 Зависимость выигрыша при использовании расстояния Евклида над ИРФ по величине ОСШ, необходимому для достижения заданного  $P_D$ , от числа пространственных отсчётов радиоголограммы (числа антенных элементов) для трёх значений угла раскрыва приёмной апертуры

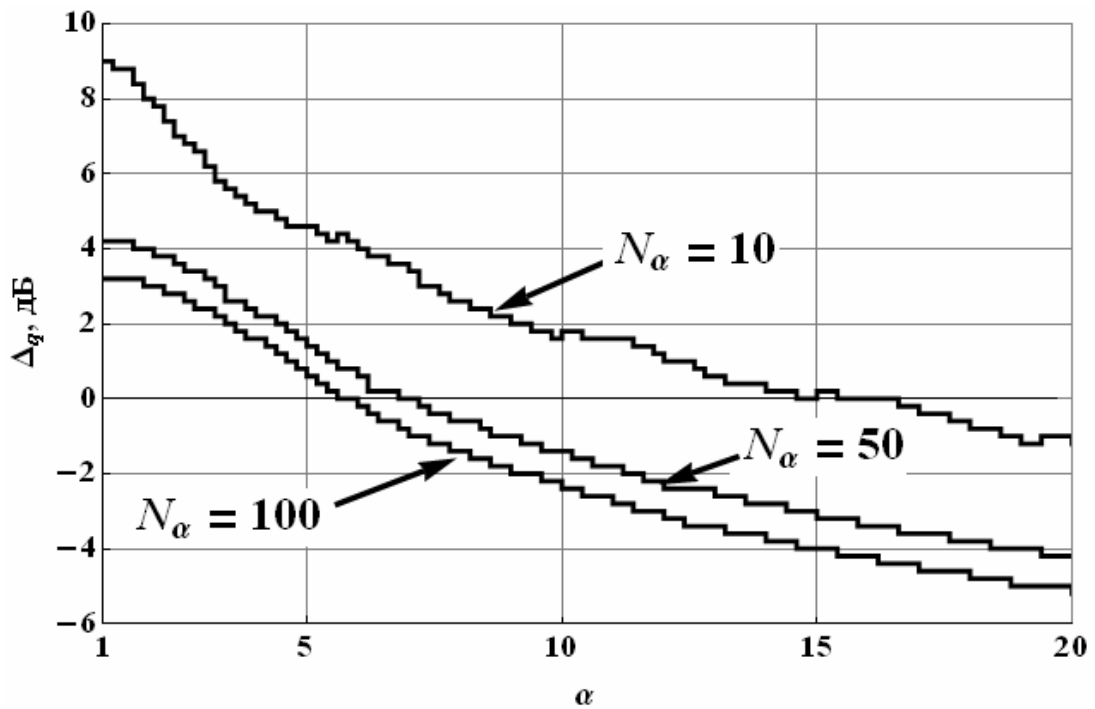


Рисунок 4.19 Зависимость выигрыша при использовании расстояния Евклида над ИРФ по величине ОСШ, необходимому для достижения заданного  $P_D$ , от угла раскрытия приёмной апертуры СРГВ для трёх значений числа пространственных отсчётов радиоголограммы (числа антенных элементов)

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы относительно поведения амплитудной и фазовой метрик:

- для случая малых раскрытий (до  $5^\circ$ ) при фиксировании угла раскрытия апертуры СРГВ увеличение числа антенных элементов позволяет минимизировать проигрыш (см. рисунок 4.17) метода, использующего ИРФ, по величине ОСШ, требуемого для достижения желаемого уровня  $P_D$ , и достичь равенства ОСШ при использовании  $N_\alpha$  от 95 до 100 (для  $\alpha = 5^\circ$ );
- для случая  $\alpha > 10^\circ$  при  $N_\alpha > 20$  элементов наблюдается проигрыш по ОСШ при использовании метода, использующего расстояние Евклида (см. рисунок 4.17);
- для широкоапертурных многоэлементных СРГВ ( $\alpha > 20^\circ$  и  $N_\alpha > 100$ ) выигрыш ИРФ над расстоянием Евклида в ОСШ потенциально может достигать 5,2 дБ (см. рисунки 4.18 и 4.19);
- скорость роста выигрыша максимальна при увеличении числа пространственных дискретов радиоголограммы (числа антенных элементов) с 10 до 20 (см. рисунок 4.17);

- при фиксировании  $N_\alpha$  увеличение в 2 раза  $\alpha$  (например, с  $5^\circ$  до  $10^\circ$  и с  $10^\circ$  до  $20^\circ$ ) позволяет получить выигрыш ИРФ над расстоянием Евклида в ОСШ порядка 3 дБ (см. рисунок 4.17);
- при фиксировании  $\alpha$  пятикратное увеличение  $N_\alpha$  (например, с 10 до 50) позволяет получить выигрыш ИРФ над расстоянием Евклида в ОСШ порядка 3 дБ, при этом дальнейшее увеличение 50 до 100 лишь на 1 дБ (см. рисунок 4.18).

Исходя из проведённого анализа, можно сделать заключение о наличии областей параметров СГРВ, использующей эталонные методы оценки, в которых наблюдается очевидное преимущество интегральной разности фаз как критерия принятия решения над расстоянием Евклида. Наиболее заметен данный эффект на широкоапертурных многоэлементных СГРВ. Это, в частности, можно объяснить тем фактом, что при увеличении числа антенных элементов (при фиксированной апертуре) лучше воспроизводится закон изменения фазы комплексной радиоголограммы.

#### 4.5 Выводы

1. В данной главе рассмотрена задача выбора минимального шага сетки эталонов эталонного фазового метода определения параметров объектов в радиоголографии на основе двух критериев:
  - ограничения по допустимой полной вероятности ошибки или вероятности правильного принятия решения при решении задачи классификации двух соседних эталонов;
  - ограничения, накладываемого на статистический предел разрешения.
2. Проведено математическое моделирование процесса определения полной вероятности ошибки или вероятности правильного принятия решения для случая использования простой границы Чернова. Проведён анализ полученных результатов.
3. Проведено математическое моделирование процесса определения статистического предела разрешения для случаев отсутствия и наличия априорной неопределённости относительно величины коэффициента амплитудного расхождения с использованием скалярной и векторной границ Рао-Крамера. Проведён анализ полученных результатов.
4. Показано, что величина статистического предела разрешения существенно зависит от знания амплитудного расхождения, что, соответственно, накладывает дополнительное требование проведения его предварительной оценки.

5. Проведено сравнение требований, предъявляемых к СГРВ рассмотренными критериями, указаны области доминирования как одних, так и других критериев, указан подход позволяющий уменьшить требуемую величину соотношения сигнал/шум.
6. Проведено математическое моделирование сравнения поведения эталонных методов использующих интегральную разность фаз с методами, использующими расстояние Евклида, при выборе минимального шага сетки эталонов на основе ограничений, накладываемых на вероятность правильной классификации двух соседних эталонов. Отмечены области возможных изменений таких параметров, как размеры апертуры и число антенных элементов, при которых метод на основе ИРФ даёт выигрыш по значению требуемого соотношения сигнал/шум. Указана величина такого выигрыша.

## **Заключение**

Целью диссертационного исследования являлся анализ вероятностно-статистических характеристик эталонного фазового метода определения параметров радиоголографических объектов, использующего в качестве критерия сходства интегральную разность фаз.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Рассмотрены основные вопросы построения эталонных методов оценки параметров. Проведён обзор наиболее часто используемых на практике критериев сходства, на основе которых можно реализовать эталонные методы. Предложен для использования в системах голографического радиовидения эталонный метод, использующий в качестве критерия сходства интегральную разность фаз. Выделены 3 основные задачи, требующие решения для успешной реализации эталонного метода на основе интегральной разности фаз:
  - определение статистических характеристик интегральной разности фаз для проведения дальнейшей процедуры оценки;
  - определение процедуры оценивания интегральной разности фаз и её характеристик;
  - определение минимально возможного шага сетки эталонов.
2. Теоретически строго решена задача определения статистических характеристик интегральной разности фаз: функции плотности вероятности, функции распределения, моментных функций произвольного порядка (в общем виде), математического ожидания и дисперсии (в явном виде). Получено альтернативное представление функции плотности вероятности и предложены три вида аппроксимации, позволяющие упростить расчёты: на основе "обёрнутого" нормального распределения, на основе распределения Тихонова-фон Мизеса и асимптотическое (при больших отношениях сигнал/шум). Для случая больших отношений сигнал/шум получены асимптотические выражения различной степени точности для моментов 1–4-го порядков. Проведён анализ поведения и сравнение первых двух моментов для исходной плотности вероятности и предложенных аппроксимаций. Проведено сравнение аппроксимаций по критерию расстояния полной вариации. Сделаны заключения о применимости полученных асимптотических выражений для моментов и приведены рекомендации по использованию предлагаемых аппроксимаций.

3. Рассмотрена задача оценки интегральной разности фаз с учётом полученных ранее её статистических характеристик. Оценка производится с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия. Проанализированы смещение и рассеяние, обеспечиваемые данными методами. Проведено сравнение с минимально возможным значением рассеяния, определяемым границами Рао-Крамера и Чепмена-Роббинса. Проанализировано поведение оценок, получаемых обоими методами для различных значений переменных параметров: истинной интегральной разности фаз и отношения сигнал/шум. Для случаев малого и большого отношений сигнал/шум, и различного объёма статистической выборки произведено сравнение получаемых оценок с позиции их смещённости, обеспечиваемого рассеяния и времени, требуемого на проведение процедуры оценивания. Сделаны заключения и рекомендации относительно использования рассмотренных методов в задаче оценивания параметров объектов радиологическими эталонными фазовыми методами. Проведено сравнение процедуры оценки параметра объекта эталонным методом с использованием интегральной разности фаз с методом, использующим модульное значение корреляционного интеграла. Проанализировано рассеяние оценки ширины идеально проводящей ленты двумя методами, указаны области соотношений сигнал/шум, при которых они дают схожие результаты, указаны выигрыш и проигрыш одного метода относительно другого при точном совпадении объекта с одним из эталонов и не совпадении. Отмечены возможные модификации, позволяющие повысить качество оценки.
4. Рассмотрена задача выбора минимального шага сетки эталонов на основе двух критериев: ограничения по допустимой полной вероятности ошибки или вероятности правильного принятия решения при решении задачи классификации двух соседних эталонов и ограничения, накладываемого на статистический предел разрешения. Проведён анализ результатов и их сравнение для этих двух критериев. Проведено математическое моделирование процесса определения статистического предела разрешения для случаев отсутствия и наличия априорной неопределённости относительно величины коэффициента амплитудного расхождения с использованием скалярной и векторной границ Рао-Крамера. Проведён анализ полученных результатов. Проведено сравнение требований, предъявляемых к СГРВ рассмотренными критериями, указаны области доминирования как одних, так и других критериев, указан подход, позволяющий уменьшить требуемую величину соотношения сигнал/шум. Проведено математическое моделирование сравнения поведения эталонных методов, использующих интегральную разность фаз, с методами, использующими расстояние

Евклида, при выборе минимального шага сетки эталонов на основе ограничений, накладываемых на вероятность правильной классификации двух соседних эталонов. Отмечены области возможных изменений таких параметров как размеры апертуры и число антенных элементов, при которых метод на основе ИРФ даёт выигрыш по значению требуемого соотношения сигнал/шум. Указана величина такого выигрыша.

Моделирование производилось с применением набора объектов, соответствующих тестовым объектам классической радиоголографии:

- бесконечные идеально проводящие круговые цилиндры;
- идеально проводящие круговые цилиндры конечной длины;
- идеально проводящие бесконечные ленты.

В Приложении Ж приведено описание системы голографического радиовидения для экспериментальной апробации и описание проведённой апробации эталонного фазового метода, использующего интегральную разность фаз, с целью извлечения набора параметров исследуемых объектов. Апробация проводилась на модели кругового фольгированного цилиндра. Результаты апробации демонстрируют работоспособность предлагаемого метода и выигрыш в точности оценки относительно классических методов.

**Основные результаты, полученные в диссертации:**

- получены точные, асимптотические и аппроксимирующие выражения для статистических характеристик интегральной разности фаз для эталонного метода определения параметров радиоголографических объектов;
- получены асимптотические выражения различной степени точности для моментов 1 – 4-го порядков;
- получены аппроксимации функции плотности вероятности интегральной разности фаз и даны рекомендации по их применению;
- исследовано поведение оценок интегральной разности фаз, получаемых методами моментов и максимального правдоподобия, в зависимости от отношения сигнал/шум, объёма статистической выборки и истинного значения интегральной разности фаз;
- определены границы применимости найденных выражений и сформулированы рекомендации по применению метода моментов и метода максимального правдоподобия для задачи оценки интегральной разности фаз;
- определён минимальный шаг эталонной сетки;
- установлена и исследована зависимость шага эталонной сетки от объёма выборки, отношения сигнал/шум и истинного значения интегральной разности фаз.



## Литература

1. **Артёмова, Т.К.** Минимально-фазовый метод эталонной оценки размеров объектов в задачах радиоголографии / Т.К. Артёмова, А.С. Гвоздарёв // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2011. – №4. – С. 22–30.
2. **Артёмова, Т.К.** Исследование вероятностных характеристик интегральной разности фаз, используемой в эталонных фазовых методах / Т.К. Артёмова, А.С. Гвоздарёв, А.С. Захаров // Вестник ЯрГУ. Серия «Естественные и технические науки». — Ярославль, 2012. – №4. – С. 30–36.
3. **Базарский, О.В.** Принципы Фурье-оптики и распознавания образов / О.В. Базарский. – Воронеж: ВВВАИУ, 2005. – 216 с.
4. **Бахрах, Л.Д.** Голография в микроволновой технике / Л.Д. Бахрах, А.П. Курочкин. – М.: Сов. радио, 1979. – 320 с.
5. **Богданович, В.И.** Радиоголографический прибор для изучения двумерных полей / В.И. Богданович, И.Ф. Добровольский // Приборы и техника эксперимента. – 1996. – №2. – С. 138 – 140.
6. **Боровков, А. А.** Математическая статистика / Боровков А. А. — М.: Наука, 1984. – 472 с.
7. **Брычков, Ю. А.** Таблицы неопределенных интегралов: монография / Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, А. П. Прудников. – 2.изд., испр. – М.: Физматлит, 2003. – 200 с.
8. **Ван Трис, Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции (в 4 томах) / Г. Ван Трис. – М.: Сов. Радио, 1972. – Т. I : Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции / ред., пер. В. И. Тихонов, 1972. – 742 с.
9. **Ван Трис, Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции (в 4 томах) / Г. Ван Трис. – М.: Сов. Радио, 1972. – Т. II: Теория нелинейной модуляции / пер. В. В. Липьяйнен, ред., пер. В. Т. Горяинов. –М. , 1975. – 344 с.
10. **Ван Трис Г.,** Теория обнаружения, оценок и модуляции (в 4 томах) / Г. Ван Трис. — М.: Сов. радио., 1972. –Т. III: Обработка сигналов в радио- и гидролокации и приём случайных гауссовых сигналов на фоне помех / пер. В. В. Липьяйнен, ред., пер. В. Т. Горяинов. — М., 1977. – 664 с.
11. **Воронин, Е.Н.** Устройство визуального отображения для СВЧ диапазона / Е.Н. Воронин, А.Ю. Гринев, И.А. Чебаков // Радиотехника. – 1996. – №3. – С. 113 – 121.
12. **Гвоздарёв, А.С.** Моделирование объекта в ближней радиоголографии по бистатической диаграмме рассеяния / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова // Сборник научных трудов «Актуальные проблемы физики». — Ярославль, 2007. — №6. — С. 14–21.

13. **Гвоздарёв, А.С.** Метод повышения качества радиоголографических изображений объектов, находящихся за оптически непрозрачными препятствиями / А.С. Гвоздарёв, К.С. Артёмов, Т.К. Артёмова, Е.А. Кузнецов, А.С. Леонтьев // Труды XIV международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». — Воронеж, 2008. — Т. 3. — С. 1447–1457.
14. **Гвоздарёв, А.С.** Метод классификации объектов по их диаграммам рассеяния, полученным при помощи системы голографического радиовидения / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова // Тезисы IX Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные вопросы разработки и внедрения информационных технологий двойного применения». — Ярославль, 2008. — С. 57-58.
15. **Гвоздарёв, А.С.** Метод классификации объектов на основе корреляционного анализа их рассеянных полей / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова // Материалы 19 Международной конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». — Севастополь, 2009. — Т. 2. — С. 957 - 958.
16. **Гвоздарёв, А.С.** Анализ расширения возможности радиовидения при помощи радиоголографической системы миллиметрового диапазона / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова // Вестник ЯрГУ. Серия «Физика. Радиотехника. Связь». — Ярославль, 2009. — №1. — С. 46–49.
17. **Гвоздарёв, А.С.** Композиционная обработка радиоголограммы для задач идентификации объектов / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова // Вестник ЯрГУ. Серия «Естественные и технические науки». — Ярославль, 2010. — №1. — С. 50–55.
18. **Гвоздарёв, А.С.** Метод определения размеров объектов на основе анализа их полей рассеяния, восстановленных по данным радиоголограммы / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова // Труды XVI международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». — Воронеж, 2010. — Т. 3. — С. 1689–1697.
19. **Гвоздарёв, А.С.** Статистические характеристики эталонной оценки параметров тестовых объектов радиоголографии минимально-фазовым методом / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова // Материалы 20 Международной конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». — Севастополь, 2010. — Т. 2. — С. 1257 - 1258.
20. **Гвоздарёв, А.С.** Сравнение поведения амплитудной и фазовой метрик при формировании набора опорных радиоголограмм в задачах эталонной оценки параметров радиоголографических объектов / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмова, К.С. Артёмов // Труды XX международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». — Воронеж, 2014. — Т. 2. — С. 982-993.

21. **Гвоздарёв, А.С.** Исследование минимально-фазового метода оценки размеров на примере тестовых объектов радиоголографии / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов // Труды XVII международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». — Воронеж, 2011 — Т. 1. — С. 73-81.
22. **Гвоздарёв, А.С.** Метод анализа параметрического портрета многочастотного поля рассеяния для оценки параметров радиоголографических объектов / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов // Материалы 21 Международной конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». — Севастополь, 2011. — Т. 2. — С. 1108 - 1109.
23. **Гвоздарёв, А.С.** Использование границы Чернова для определения точности оценки параметров радиоголографических объектов минимально-фазовым методом / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов // Материалы 22 Международной конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». — Севастополь, 2012. — Т. 2. — С. 1094 - 1095.
24. **Гвоздарёв, А.С.** Построение классификационной сетки эталонов минимально-фазового метода на основе статистического предела разрешения // Материалы 22 Международной конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». — Севастополь, 2012. — Т. 2. — С. 1096 - 1097.
25. **Гвоздарёв, А.С.** Способ повышения качества эталонной оценки размеров объектов радиоголографии в условиях малоэлементной антенной решётки / А.С. Гвоздарёв, К.С. Артёмов, Т.К. Артёмов // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2012. – №1. – С. 65–74.
26. **Гвоздарёв, А.С.** Анализ границ качества минимально-фазового метода эталонной оценки параметров объектов по радиоголограмме / А.С. Гвоздарёв, К.С. Артёмов, Т.К. Артёмов // Труды XVIII международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». — Воронеж, 2012. — Т. 1. — С. 168-177.
27. **Гвоздарёв, А.С.** Использование границы Чернова и статистического предела разрешения для определения точности оценки параметров радиоголографических объектов минимально-фазовым методом и построения классификационной сетки эталонов метода / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов // Тезисы VI Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва, 2012. — С. 184–188.
28. **Гвоздарёв, А.С.** Использование границы Чернова и статистического предела разрешения для определения точности оценки параметров радиоголографических объектов минимально-фазовым методом и построения классификационной сетки эталонов метода решётки [Электронный ресурс] / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов, К.С. Артёмов // Журнал

- радиоэлектроники. – Декабрь 2012. – №12. — Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/dec12/11/text.pdf>
29. **Гвоздарёв, А.С.** Определение начала пороговой области отношения сигнал/шум применительно к задаче оценки интегральной разности фаз / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов // Материалы международного научно-технического семинара «Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов в инфокоммуникациях». — Ярославль, 2013. — С. 212-214.
  30. **Гвоздарёв, А.С.** Построение максимально правдоподобной оценки интегральной разности фаз в эталонном фазовом методе // Материалы 23 Международной конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». — Севастополь, 2013. — Т. 2. — С. 1096 - 1097.
  31. **Гвоздарёв, А.С.** Сравнение максимально правдоподобной и моментной оценок интегральной разности фаз / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов, К.С. Артёмов // Тезисы VII Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва, 2013. — С. 184–188.
  32. **Гвоздарёв, А.С.** Сравнение максимально правдоподобной и моментной оценок интегральной разности фаз [Электронный ресурс] / А.С. Гвоздарёв, Т.К. Артёмов, К.С. Артёмов // Журнал радиоэлектроники. – Декабрь 2013. – №12. — Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/alt/dec13/8/text.pdf>
  33. **Гончаров, О. П.** Пат. 2498339 Российская Федерация, МПК G01S13/00. Способ активной радиолокации / Гончаров О. П., Понькин В.А.; заявитель и патентообладатель Гончаров О. П. (RU). – № 2012107869/07; заявл. 01.03.2012; опубл. 10.11.2013, Бюл. № 31. – 14 с.
  34. **Дюран, Б.** Кластерный анализ / Б. Дюран, П. Оделл . – М.: Статистика, 1977. – 128 с.
  35. **Ивченко, Г. И.** Математическая статистика. Учебное пособие для вузов / Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. — М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.
  36. **Иммореев, И. Я.** Сверхширокополосные радары: новые возможности, необычные проблемы, системные особенности / И. Я. Иммореев. // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. – 1998. – №4. – с.
  37. **Копейкин, В.В.** Пат. 2269811 Российская Федерация, МПК G03H1/00. Устройство для получения СВЧ-голограмм и визуализации восстановленного изображения / В.В. Копейкин, П.А. Морозов, А.Н. Козляков, А.И. Беркут, С.П. Бородько; заявители и патентообладатели В.В. Копейкин (RU), П.А. Морозов (RU), А.Н. Козляков (RU), А.И. Беркут (RU), С.П. Бородько (RU). – № 2004112280/28; заявл. 23.04.2004; опубл. 10.02.2006, Бюл. № 4. –4 с.

38. **Кухарчик, П. Д.** Методы улучшения параметров радиоголографических устройств / Кухарчик П. Д., Курило Н. И., Семенчик В. Г. // Методы и устройства радио- и акустической голографии. – Л. – 1983. – С. 14 – 33.
39. **Прудников, А. П.** Интегралы и ряды / Прудников А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, 2-е изд., испр. – М.: Физматлит. Т. 1 : Элементарные функции, 2003. – 631 с.
40. **Прудников, А. П.** Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, 2-е изд., испр. – М.: Физматлит. Т. 3: Элементарные функции, 2003. – 687 с.
41. **Соколов, А. В.** Вопросы перспективной радиолокации / под ред. проф. А.В. Соколова. – М.: Радиотехника, 2003. – 512 с.
42. **Тихонов, В. И.** Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособие для вузов / В.И.Тихонов, В.Н.Харисов. – М.: Радио и связь, 2004. – 608 с.
43. **Тихонов, В. И.** Случайные процессы. Примеры и задачи: учебное пособие / Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. – М.: Радио и связь. Т. 2., 2004. – 399 с.
44. **Трифонов, А. П.** Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. — М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
45. **Трифонов, А. П.** Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами: монография / А.П. Трифонов, Н.П. Нечаев, В.И. Парфенов; под ред. А.П. Трифонова. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1991. – 246 с.
46. **Уфимцев, П. Я.** Метод краевых волн в физической теории дифракции / П. Я. Уфимцев — М. : Сов. радио, 1962. – 244 с.
47. **Хенл, Х.** Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
48. **Шахтарин, Б. И.** Случайные процессы в радиотехнике: цикл лекций Учеб. пособие для студентов вузов радиотехн. и прибор. специальностей / Б.И. Шахтарин. – М.: Радио и связь, 2000. – 568 с.
49. **Янке, Е.** Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Изд. 3-е, стереот. Пер.с 6-го перераб. немецкого издания / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш; под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977. – 344 с.
50. **Abramowitz, M.** Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / Edited by Milton Abramowitz, Irene A. Stegun. — Washington: NBS Applied Mathematics Series 55, National Bureau of Standards, 1964.
51. **Amar, A.** Fundamental limitations on the resolution of deterministic signals / A. Amar, A. Weiss // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2005. – Vol. , № 11. – P. 5309–5318.

52. **Anderson, S.J.** Target classification, recognition and identification with HF radar / S.J. Anderson // Proceedings of the NATO Research and Technology Agency Sensors and Electronics Technology Panel Symposium SET-080/RSY17/RFT: «Target identification and recognition using RF systems», 11—13 October, 2004, Oslo, Norway. RTO-MP-SET-080. — P. 1—20.
53. **Anyong, Q.** Microwave imaging of two-dimensional perfectly conducting objects using real-coded genetic algorithm / Anyong Qing, Shunshi Zhong // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – June 1998. – P. 726-729.
54. **Arfken, G.** Bessel Functions FL / G. Arfken // Ch. 11 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press. –1985. –P. 573-636.
55. **Arfken, G.** Hypergeometric Functions FL / G. Arfken // §13.5 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press. –1985. – P. 748-752.
56. **Arfken, G.** Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed. Orlando, FL / G. Arfken // Academic Press. – 1985. – P. 481-485.
57. **Azad, P.** 3D shape acquisition using a combined SSD and least squares correlation approach scanning / P. Azad, T. Gockel, R. Dillmann // International Conference on Information Technology: Coding and Computing, 2004. Proceedings. ITCC 2004. – April 2004. – Vol.29, №2. – P. 367- 371.
58. **Bagci, H.** Sparsity-regularized Born iterations for electromagnetic inverse scattering / H. Bagci, R. Raich, A.E Hero, E. Michielssen // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – June 2007. – P. 1-4, 5-11 July 2008
59. **Bamler, R.** Phase Statistics and Decorrelation in SAR Interferograms / R. Bamler, J. Dieter // Proceedings of the International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Tokyo, Japan. – 1993. – P. 980–984.
60. **Baricco, G.A.** Conformal mapping-based image processing: theory and applications / G.A. Baricco, E.J. Rodriguez, J.L.C. Sanz, A.M. Olivero, F.G. Safar // Proceedings of the 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition, Conference C: Signal Processing. – Oct. 1994. – Vol. 3. – P. 88-92.
61. **Belkebir, K.** Microwave imaging-Location and shape reconstruction from multifrequency scattering data / K. Belkebir, R.E. Kleinman, C. Pichot // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Apr 1997. – Vol. 45, № 4. – P. 469-476.
62. **Bennett, C.** Target classification with multiple frequency illumination / C. Bennett, J. Toomey // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1981. – Vol. 29, № 2. – P. 352—358.
63. **Boerner, W.-M.** Comments on the Bojarski identity / W.-M. Boerner // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Sep 1981. – Vol. 29, № 5. – P. 825- 825.

64. **Bojarski, N.** A survey of the physical optics inverse scattering identity / N. Bojarski // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Sep 1982. – Vol. 30, №5. – P. 980-989.
65. **Bojarski, N.** Electromagnetic inverse scattering identity / N. Bojarski // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – Sep 1971. – Vol. 9. – P. 356- 358.
66. **Bojarski, N.** Low frequency inverse scattering / N. Bojarski // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – July 1982. – Vol. 30, №4. – P. 775- 778.
67. **Bojarski, N.** A survey of the near-field far-field inverse scattering inverse source integral equation / N. Bojarski // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Sep 1982. – Vol. 30, №5. – P. 975- 979.
68. **Caorsi, S.** A new methodology based on an iterative multiscaling for microwave imaging / S. Caorsi, M. Donelli, D. Franceschini, A. Massa // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Apr 2003. – Vol. 51, № 4. – P. 1162- 1173.
69. **Caorsi S.** An approach to microwave imaging using a multiview moment method solution for a two-dimensional infinite cylinder / S. Caorsi, G.L. Gragnani, M. Pastorino // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Jun 1991. – Vol. 39, № 6. – P. 1062-1067.
70. **Caorsi, S.** Detection of buried inhomogeneous elliptic cylinders by a memetic algorithm / S. Caorsi, A. Massa, M. Pastorino, M. Raffetto, A. Randazzo // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Oct. 2003. – Vol. 51, № 10. – P. 2878- 2884.
71. **Caorsi, S.** Microwave imaging of cylindrical inhomogeneities based on an analytical forward solver and multiple illuminations / S. Caorsi, A. Massa, M. Pastorino, M. Raffetto, A. Randazzo // IEEE International Workshop on Imaging Systems and Techniques. – May 2004. – P. 100-105.
72. **Casagrandia, A.** Assessment of the reliability and exploitation of the information content of inverse scattering data through a fuzzy-logic-based strategy - preliminary results / A. Casagrandia, D. Franceschini, A. Massa // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – Jan. 2005. – Vol. 2, № 1. – P. 36- 39.
73. **Chai-Yu, Lin** Inverse scattering for conductors by the equivalent source method / Chai-Yu Lin, Yean-Woei Kiang // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Mar 1996. – Vol. 44, № 3. – P. 310-316.
74. **Chien-Ching, Ch.** Electromagnetic imaging for an imperfectly conducting cylinder by the genetic algorithm [medical application] / Chien-Ching Chiu, Wei-Ting Chen // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Nov 2000. – Vol. 48 № 11. – P. 1901-1905.

75. **Chien-Ching, Ch.** Image reconstruction of a complex cylinder illuminated by TE waves / Chien-Ching Chiu, Po-Tsun Liu // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Oct 1996. – Vol. 44, № 10. – P. 1921-1927.
76. **Cho-Ping, Chou** Inverse scattering of dielectric cylinders by a cascaded TE-TM method / Cho-Ping Chou, Yean-Woei Kiang // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Oct 1999. – Vol. 47, № 10. – P. 1923-1930.
77. **Chu, T.-H.** On microwave imagery using Bojarski's identity / T.-H. Chu, D.-B. Lin // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Jul 1989. – Vol. 37, № 7. – P. 1141-1144.
78. **Chun, Yu** Active Microwave Imaging II: 3-D System Prototype and Image Reconstruction From Experimental Data / Chun Yu, Mengqing Yuan, J. Stang, E. Bresslour, R.T. George, G.A. Ybarra, W.T. Joines, Qing Huo Liu // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – April 2008. – Vol. 56, № 4. – P. 991-1000.
79. **Cmielewski O.** On the Characterization of Buried Targets Under a Rough Surface Using the Wigner & Ville Transformation / O. Cmielewski, M. Saillard, K. Belkebir, H. Tortel // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – Oct. 2006. – Vol. 3, № 4. – P. 442-446.
80. **Cmielewski, O.** Surface roughness estimation towards a buried target characterization / O. Cmielewski, H. Tortel, A. Litman, M. Saillard // IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS 2007). – July 2007. – P. 436-439.
81. **Datta, A.** On the inverse scattering problem for dielectric cylindrical scatterers / A. Datta, Subodh Som // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Mar 1981. – Vol. 29, № 2. – P. 392-397.
82. **Delmas, J.-P.** Statistical resolution limits of DOA for discrete sources / J.-P. Delmas, H. Abeida // Proceedings of IEEE International Conference on Acoustic, Speech, Signal Processing (Toulouse, France, 2006). – Vol. 4. – P. 889—892.
83. **El Korso, M. N.** Statistical resolution limit: Application to passive polarized source localization / M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, S. Marcos // 5<sup>ie</sup>me seminaire sur les systemes de detection: architecture et technologies. (Alger, 21–23 fevrier 2011).
84. **Erdélyi, A.** Higher Transcendental Functions / A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi. – New York: Krieger. – Vol. 1, 1981.
85. **Estatico, C.** An inexact-Newton method for short-range microwave imaging within the second-order Born approximation / C. Estatico, M. Pastorino, A. Randazzo // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – Nov. 2005. – Vol. 43, № 11. – P. 2593-2605.
86. **Fisher, N. I.** Statistical Analysis of Circular Data / Nick I. Fisher. – Cambridge University Press, 1995.



87. **Fenghua, Li** Three-dimensional reconstruction of objects buried in layered media using Born and distorted Born iterative methods/ Fenghua Li, Qing Huo Liu, Lin-Ping Song // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – April 2004. – Vol. 1, № 2. – P. 107- 111.
88. **Franceschini, D.** Iterative image reconstruction of two-dimensional scatterers illuminated by TE waves / D. Franceschini, S. Caorsi, M. Donelli, A. Massa // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Apr 2006. – Vol. 54, № 4. – P. 1484-1494.
89. **Franchois, A.** Microwave imaging-complex permittivity reconstruction with a Levenberg-Marquardt method / A. Franchois, C. Pichot // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Feb 1997. – Vol. 45, № 2. – P. 203-215.
90. **Fu-Chiarng Chen** Code-division multiplexing and frequency-division multiplexing for nonlinear inverse scattering/ Fu-Chiarng Chen, Weng Cho Chew // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – June 2007. – P. 2128-2131 vol.3, Aug 1999
91. **Gallager, R. G.** Lower Bounds on the Tails of Probability Distributions / Gallager R. G. // M.I.T., RLE/QPR. –1965. –№ 77. –P. 277-291.
92. **Gockel, T.** 3D Vision Sensing for Grasp Planning: A New, Robust and Affordable Structured Light Approach / T. Gockel, J. Ahlmann, R. Dillmann // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2005). – April 2005. – P. 2529- 2534.
93. **Gockel, T.** Calibration issues for projector-based 3D-scanning / T. Gockel, J. Ahlmann, R. Dillmann, P. Azad // Proceedings of Shape Modeling Applications. – June 2004. – P. 367- 370.
94. **Harada, H.** Wall D.J.N. Takenaka T. Tanaka M. Conjugate gradient method applied to inverse scattering problem / H. Harada, D.J.N. Wall, T. Takenaka, M. Tanaka // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Aug 1995. – Vol. 43, № 8. – P. 784-792.
95. **Jing Wu** Radar imaging of PEC targets using limited scattered information / Jing Wu; Tie Jun Cui; Wei Hong // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – July 2005. – Vol. 1A. – P. 201-204.
96. **Joachimowicz, N.** Inverse scattering: an iterative numerical method for electromagnetic imaging / N. Joachimowicz, C. Pichot, J.P. Hugonin // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Dec 1991. – Vol. 39, № 12. – P. 1742-1753.
97. **Jong-Sen Lee** Intensity and Phase Statistics of Multilook Polarimetric and Interferometric SAR Imagery / J.-S. Lee, K.W. Hoppel, S. A. Mango and A. R. Miller // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – September 1994. – Vol. 32, № 5. – P. 543-545.
98. **Joughin, I. R.** Effective Number of Looks For a Multilook Interferometric Phase Distribution / I. R Joughin, D. P. Winebrenner // IEEE 1994
99. **Kong, A.** Identification of terrain cover using the optimal polarimetric classifier / A. Kong et al. // J. Electromagnet. Waves Applicat. –1987. – Vol. 2, № 2. – P. 171-194.

100. **Kooij, B.J.** Nonlinear inversion in TE scattering / B.J. Kooij, P.M. van den Berg // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Nov 1998. – Vol. 46, № 11. – P. 1704-1712.
101. **Lewis, R.** Physical optics inverse diffraction / Lewis R. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – May 1969. – Vol. 17, № 3. – P. 308- 314.
102. **Lin-Ping Song** A new approximation to three-dimensional electromagnetic scattering/ Lin-Ping Song, Qing Huo Liu // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – April 2005. – Vol. 2, № 2. – P. 238- 242.
103. **Mardia, K. V.** Directional Statistics / K. V. Mardia and P. Jupp. – New York: Wiley,1999.
104. **Mardia, K. V.** Statistics of directional data: An overview / K. V. Mardia // J. App. Statist. – 1988. – Vol. 15. – P.115–122.
105. **Marengo, E.A.** Green's function extraction from field correlations from Porter-Bojarski's integral equation and implications in imaging / E.A. Marengo // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, APSURSI '09. – June 2009. – Vol. 17. – P. 1-4.
106. **McMakin, D. L.** Патент США №US 5859609. Голографическая цилиндрическая широкополосная система досмотра реального времени / Douglas L. McMakin, Thomas E. Hall, David M. Sheen и др., 1999.
107. **Miao, J.** Computing Teichmuller Shape Space / M. Jin, W. Zeng, F. Luo, X. Gu // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. – May-June 2009. – № 4. – P. 504-517.
108. **Miller, E.L.** A new shape-based method for object localization and characterization from scattered field data/ E.L. Miller, M. Kilmer, C. Rappaport // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – Jul 2000. – Vol. 38, № 4. – P. 1682-1696.
109. **Morris, J.B.** A homomorphic filtering method for imaging strongly scattering penetrable objects / J.B. Morris, F.C. Lin, D.A. Pommet, R.V. McGahan, M.A. Fiddy // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Oct 1995. – Vol. 43, № 10. – P. 1029-1035.
110. **Nie, Z.** Hybrid Born iterative method in low-frequency inverse scattering problem/ Nie Zaiping, Zhang Yerong // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – May 1998. – Vol. 36, № 3. – P. 749-753.
111. **Pastorino, M.** A microwave inverse scattering technique for image reconstruction based on a genetic algorithm / M. Pastorino, A. Massa, S. Caorsi // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – May 1969. – Vol., №. – P. vol.49, no.3, pp.573-578, Jun 2000
112. **Pawula, R. F.** Distribution of the phase angle between two vectors perturbed by Gaussian noise / R. F. Pawula, S. O. Rice, and J. H. Roberts // International Journal of Electronic Communications – Aug. 1982. – Vol. COM-30. – P. 1828–1841.

113. **Perry, W.** On the Bojarski-Lewis inverse scattering method / W. Perry // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Nov 1974. – Vol. 22, № 6. – P. 826- 829.
114. **Qing A.** Microwave imaging of a perfectly conducting cylinder using a real-coded genetic algorithm / A. Qing, C.K. Lee // IEE Proceedings Microwaves, Antennas and Propagation. – Dec 1999. – Vol. 146, № 6. – P. 421-425.
115. **Reinhold, H.** SAR Interferogram Phase Filtering based on the von Mises Distribution / Reinhold H., Luciano V. Dutra and Corina da Costa Freitas // 2011. – Vol. 54. – P. 189-195.
116. **Rekanos, I.T.** Shape Reconstruction of a Perfectly Conducting Scatterer Using Differential Evolution and Particle Swarm Optimization/ I.T. Rekanos // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – July 2008. – Vol. 46, № 7. – P. 1967-1974.
117. **Rekanos, I.T.** Inverse scattering using the finite-element method and a nonlinear optimization technique / I.T. Rekanos, T.V. Yioultsis, T.D. Tsiboukis // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – Mar 1999. – Vol. 47, № 3. – P. 336-344.
118. **Rekanos, I.T.** An inverse scattering approach based on the differential E-formulation/ I.T. Rekanos, T.V. Yioultsis, C.S. Hilar // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – July 2004. – Vol. 42, № 7. – P. 1456- 1461.
119. **Sabouni, A.** Efficient microwave breast imaging technique using parallel finite difference time domain and parallel genetic algorithms algorithm / A. Sabouni, Meilian Xu, S. Noghianian, P. Thulasiraman, S. Pistorius // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – June 2007. – P. 2176-2179.
120. **Semnani, A.** Reconstruction of One-Dimensional Dielectric Scatterers Using Differential Evolution and Particle Swarm Optimization/ A. Semnani, M. Kamyab, I.T. Rekanos // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – Oct. 2009. – Vol. 6, № 4. – P. 671-675.
121. **Sen Wang** 3D Surface Matching and Recognition Using Conformal Geometry Stitching / Sen Wang, Yang Wang, Miao Jin, X.D. Gu, D. Samaras // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2006. –P. 2453- 2460.
122. **Sen Wang** Conformal Geometry and Its Applications on 3D Shape Matching, Recognition, and Stitching / Sen Wang, Yang Wang, Miao Jin, X.D. Gu, D. Samaras // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – July 2007. – Vol. 29, № 7. – P. 1209-1220.
123. **Shmaliy, Yu. S.** Approximate estimates of limiting errors of passive wireless SAW sensing with DPM / Yu. S. Shmaliy, O. Ibarra-Manzano, J. Andrade-Lucio, R. Rojas-Laguna // IEEE Transactions on Ultrasonic Ferroel. Freq. Contr.. – Oct. 2005. – Vol. 52. –P. 1797–1805.
124. **Shmaliy, Yu. S.** Limiting phase errors of passive wireless SAW sensing with differential measurement / Yu. S. Shmaliy // IEEE Journal of Sensors. – Dec. 2004. – Vol. 4. – P. 819–827.

125. **Shmaliy, Yu. S.** Probability density of the phase of a random RF pulse in the presence of Gaussian noise / Yu. S. Shmaliy // International Journal of Electronic Communications – Jan. 2009. – Vol. 63. – № 1. – P. 15-23.
126. **Shmaliy, Yu. S.** Von Mises/Tikhonov-based distributions for systems with differential phase measurement / Yu. S. Shmaliy // Journal of Signal Processing – Apr. 2005. – Vol. 85. – P. 693–703.
127. **Smith, S. T.** Statistical resolution limits and the complexified Cramer-Rao bound / S. T. Smith // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2005. – Vol. 53, № 5. – P. 1597—1609.
128. **Soulez, F.** Inverse-problem approach for numerical suppression of the twin-image particle digital holography: accurate location based on local optimization. / F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, E. Thi.ebaut, and C. Goepfert // Journal of Optic Society of America (A). – 2007. – № 24(4). – P. 1164–1171.
129. **Soulez, F.** Inverse problem approach for particle digital holography: particle detection and accurate location / F. Soulez, L. Denis, E. Thi.ebaut, and C. Fournier // Proceedings of the Fifth International Conference Physics in Signal Processing, Mulhouse, France. – 2007. – P. 1-5.
130. **Stone, W.** The application of the Bojarski exact inverse scattering theory to the remote probing of inhomogeneous media / W. Stone // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – Jun 1979. – Vol. 17. – P. 236- 239.
131. **Weiyang, W.** Unrelated illumination method for electromagnetic inverse scattering of inhomogeneous lossy dielectric bodies / W. Weiyang, Z. Shourong // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Nov 1992. – Vol. 40, № 11. – P. 1292-1296.
132. **Wenhua, Yu** A fast convergent method in electromagnetic inverse scattering / Wenhua Yu Zhongqiu Peng Lang Jen // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Nov 1996. – Vol. 44, № 11. – P. 1529-1532.
133. **Wildman, R.A.** Inverse scattering of homogeneous dielectric cylinders using genetic programming / R.A. Wildman // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – June 2007. – P. 2205-2208.
134. **Xuemin, M.** A fast volume integral equation solver for electromagnetic scattering from large inhomogeneous objects in planar layered media / Xuemin Millard, Qing Huo Liu // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Sep 2003. – Vol. 51, № 9. – P. 2393- 2401.
135. **Yuan Ye** The CG-FFT algorithm for inversion [EM inverse scattering applications] / Yuan Ye, Tie Jun Cui // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – June 2007. – P. 168- 171 vol. 4B, 3-8 July 2005.
136. **Yin, Z.** Phase contrast image restoration via dictionary representation of diffraction patterns/ Yin Z., Su H., Yin Z., Kanade T., Huh S. // International conference on Medical Image Computing and Computing Assistant Intervention. – 2012. – P. 615-622.

**Приложение А**

**Программа моделирования радиоголограммы эталонных объектов**

Исходный код написанного программного приложения, генерирующего дифракционное поле рассеяния объекта в соответствии с выражениями, приведенными в [26] и [27], для случая идеально проводящих бесконечных лент переменной толщины и идеально проводящих круговых цилиндров переменной длины для случая произвольно задаваемого угла падения.

(\* ===== Поле бесконечной ленты (z компонента) ===== \*)

$$\text{Stripf1}[\alpha \_, \phi \_] := \frac{\text{Cos}\left[\frac{\alpha + \phi}{2}\right] - \text{Sin}\left[\frac{\alpha - \phi}{2}\right]}{\text{Sin}[\alpha] - \text{Sin}[\phi]};$$

$$\text{Stripf2}[\alpha \_, \phi \_] := -\frac{\text{Cos}\left[\frac{\alpha + \phi}{2}\right] + \text{Sin}\left[\frac{\alpha - \phi}{2}\right]}{\text{Sin}[\alpha] - \text{Sin}[\phi]};$$

$$\text{StripInt}[x \_] := \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Erf}\left[(-1)^{3/4} x\right];$$

$$\text{StripF1}[a \_, \phi \_] := \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left( \text{StripInt}\left[2\sqrt{ka} \text{Cos}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]\right] + \frac{i}{4\sqrt{ka}} \frac{e^{2ika(1+\text{Sin}[\phi])}}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right]} \right);$$

$$\text{StripF2}[a \_, \phi \_] := \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left( \text{StripInt}\left[2\sqrt{ka} \text{Cos}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right]\right] + \frac{i}{4\sqrt{ka}} \frac{e^{2ika(1-\text{Sin}[\phi])}}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right]} \right);$$

$$\begin{aligned} \text{StripEz}[r \_, \phi \_, \alpha \_, a \_] := & \text{StripF1}[a, \phi] \text{Stripf1}[\alpha, \phi] e^{ika(\text{Sin}[\alpha] - \text{Sin}[\phi])} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} + \\ & + \text{StripF2}[a, \phi] \text{Stripf2}[\alpha, \phi] e^{-ika(\text{Sin}[\alpha] - \text{Sin}[\phi])} \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} \end{aligned}$$

(\* ===== \*)

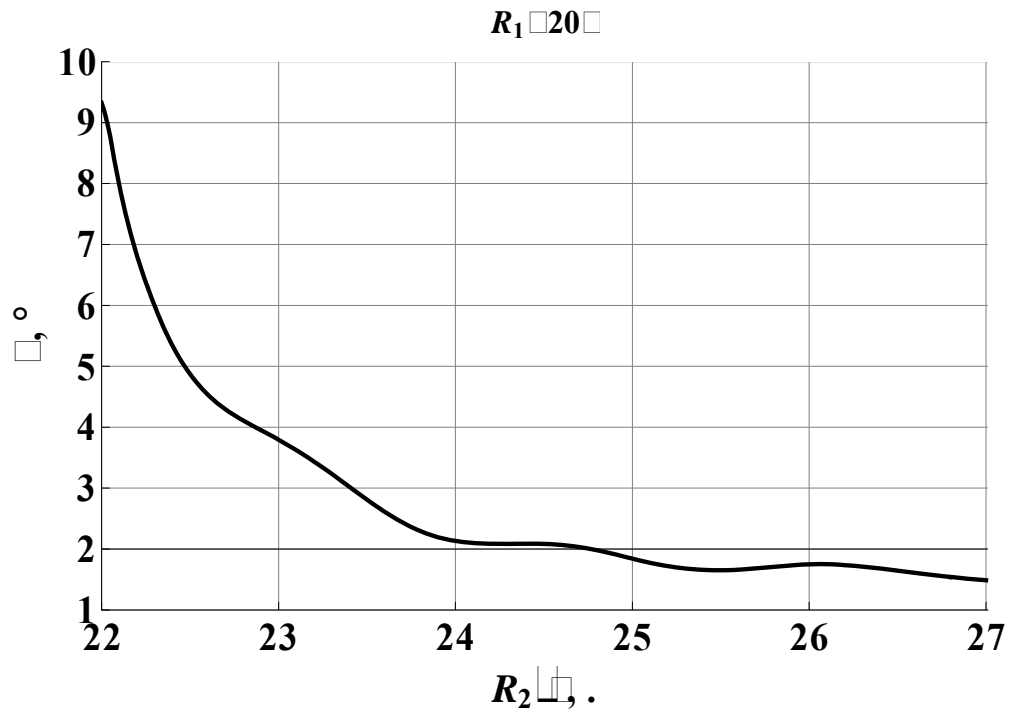


Рисунок А.1 Зависимость интегральной разности фаз от ширины одной из лент (нормированной на длину волны), при фиксированном значении ширины второй  $R_1=20\lambda$

(\* ===== Поле конечного цилиндра ( $\phi$  компонента) ===== \*)

$$\text{FinCylf3}[\theta] := \frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right]}{\text{FinCyln}} \left( \frac{1}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right] - 1} - \frac{1}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right] - \text{Cos}\left[\frac{\pi + 2\theta}{\text{FinCyln}}\right]} \right);$$

$$\text{FinCylM1}[\theta] := \frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right]}{\text{FinCyln}} \left( \frac{1}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right] - \text{Cos}\left[\frac{\pi - 2\theta}{\text{FinCyln}}\right]} + \frac{1}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right] - \text{Cos}\left[\frac{2\theta}{\text{FinCyln}}\right]} \right);$$

$$\text{FinCylN1}[\theta] := \frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right]}{\text{FinCyln}} \left( \frac{2}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right] - 1} - \frac{1}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right] - \text{Cos}\left[\frac{\pi - 2\theta}{\text{FinCyln}}\right]} - \frac{1}{\text{Cos}\left[\frac{\pi}{\text{FinCyln}}\right] - \text{Cos}\left[\frac{2\theta}{\text{FinCyln}}\right]} \right);$$

$$\text{FinCyl}\zeta[\theta, a] := 2ka \text{Sin}[\theta];$$

$$\text{FinCylE}\phi[r, \theta, a, l] := \frac{ia e^{ikr}}{2r} (\text{FinCylM1}[\theta] \text{BesselJ}[1, \text{FinCyl}\zeta[\theta, a]] +$$

$$+ i \text{FinCylN1}[\theta] \text{BesselJ}[2, \text{FinCyl}\zeta[\theta, a]]) e^{ikl \text{Cos}[\theta]} -$$

$$- \text{FinCylf3}[\theta] (\text{BesselJ}[1, \text{FinCyl}\zeta[\theta, a]] - i \text{BesselJ}[2, \text{FinCyl}\zeta[\theta, a]]) e^{-ikl \text{Cos}[\theta]}$$

(\* ===== \*)

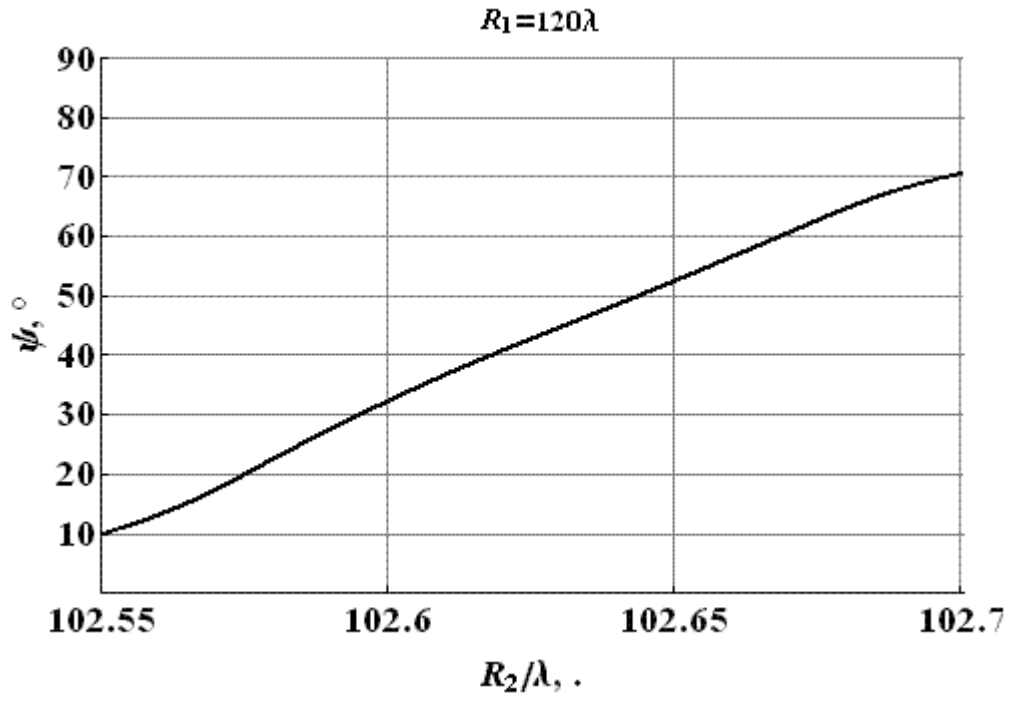


Рисунок А.2 Зависимость интегральной разности фаз от длины одного из цилиндров (нормированной на длину волны), при фиксированном значении длины второго  $R_1=120\lambda$



Приложение Б

Графические зависимости вероятностных характеристик интегральной разности фаз и её аппроксимаций

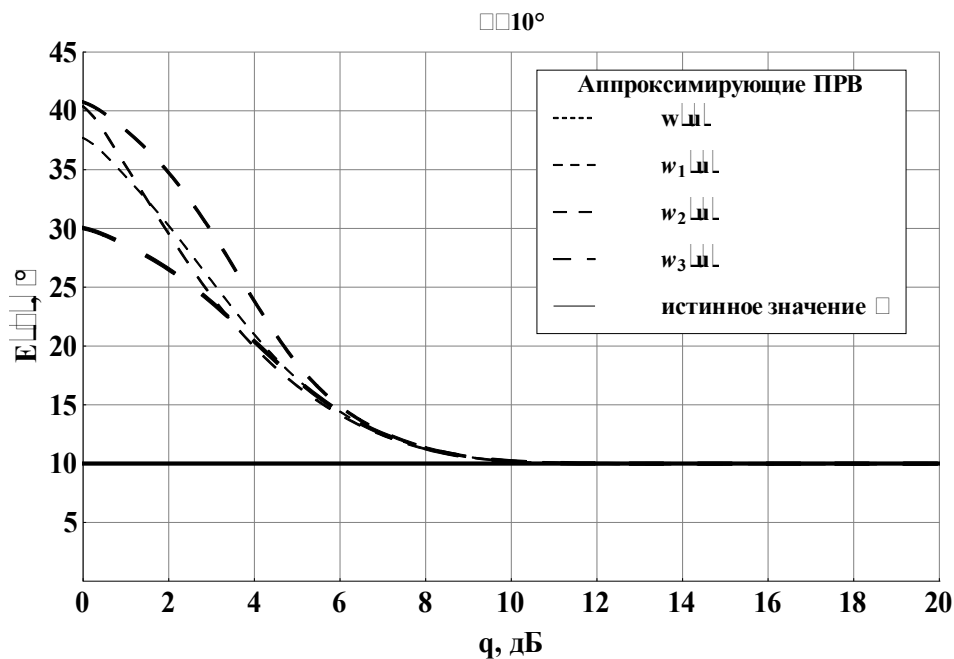


Рисунок Б.1 Зависимость математического ожидания интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум

для случая  $\psi = 10^\circ$

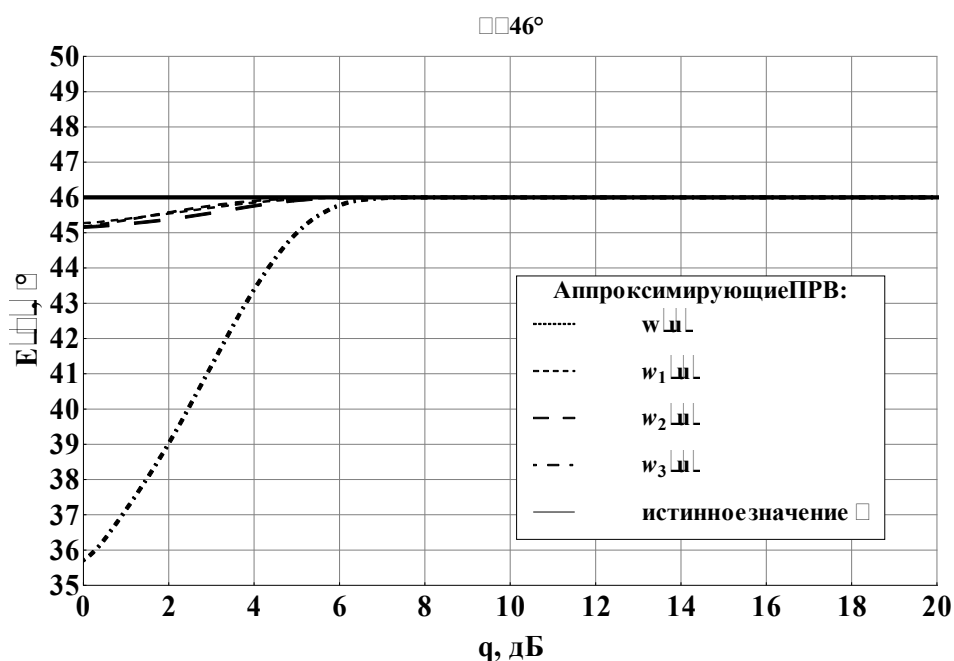


Рисунок Б.2 Зависимость математического ожидания интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум

для случая  $\psi = 46^\circ$

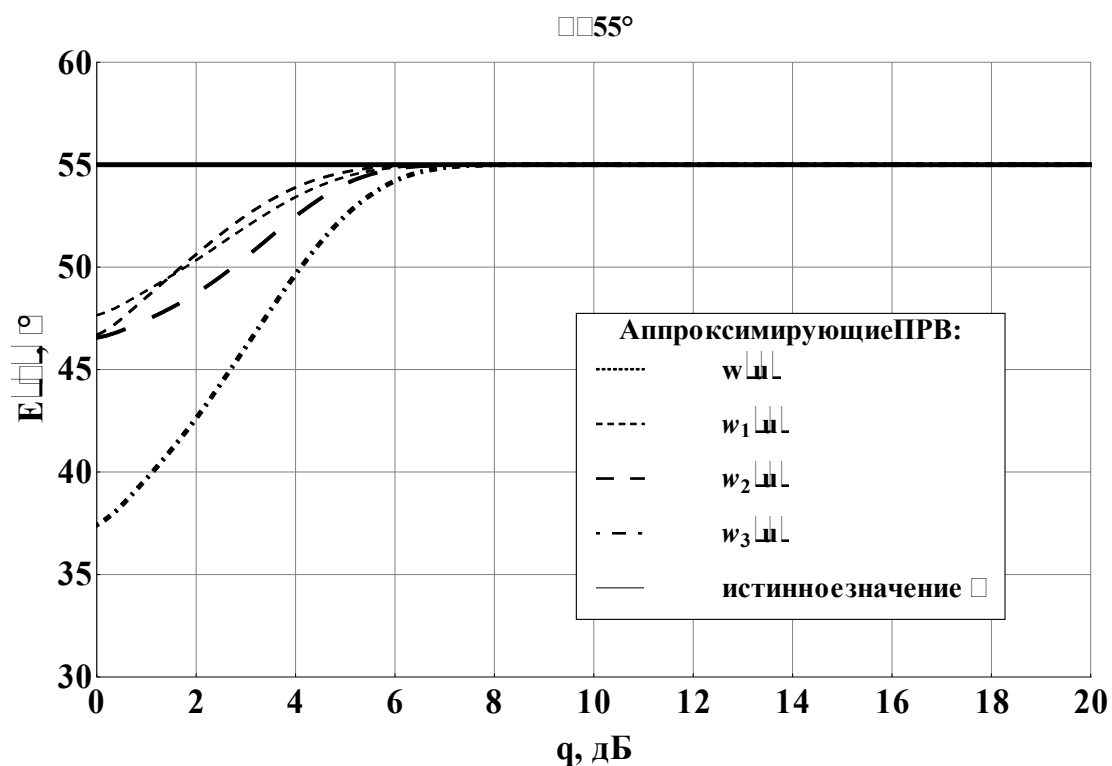


Рисунок Б.3 Зависимость математического ожидания интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум

для случая  $\psi = 55^\circ$

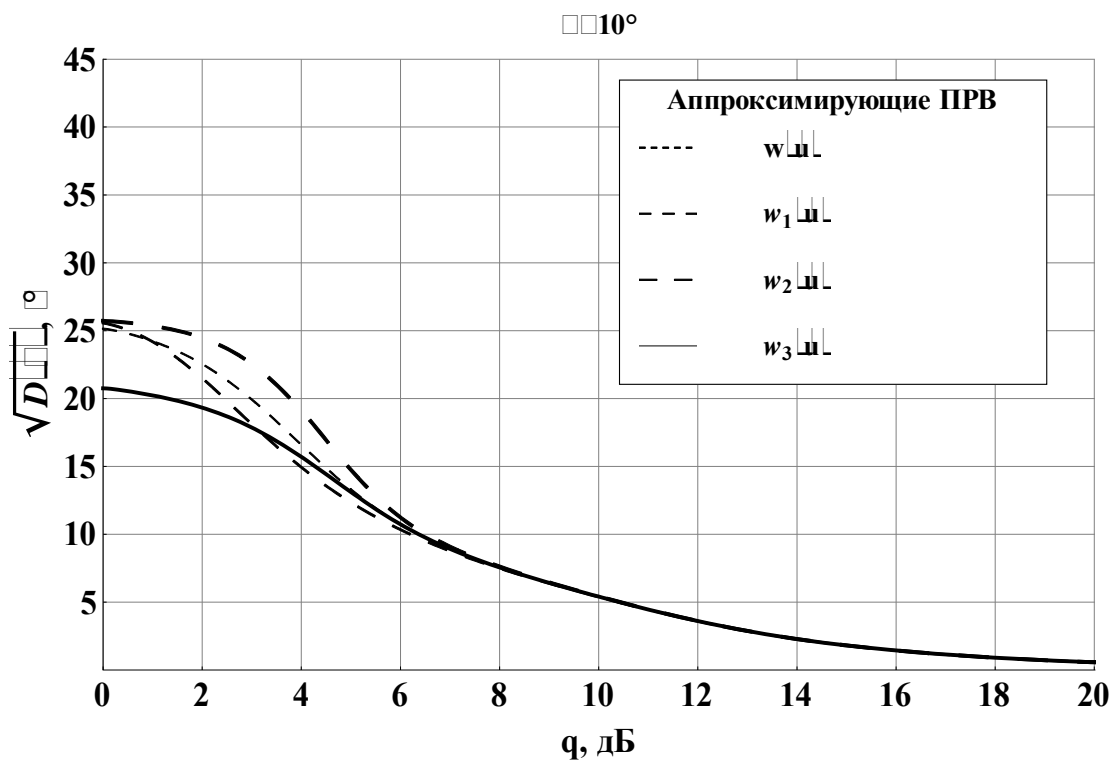


Рисунок Б.4 Зависимость СКО интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум для случая

$\psi = 10^\circ$

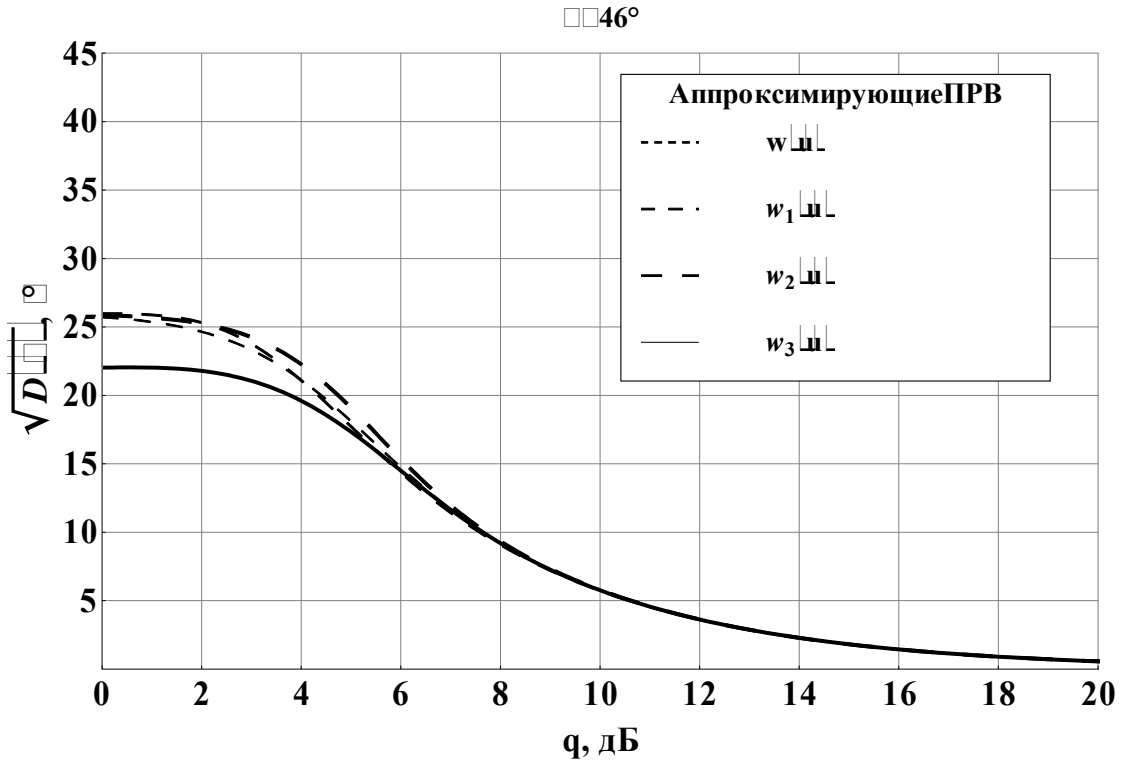


Рисунок Б.5 Зависимость СКО интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум для случая

$$\psi = 46^\circ$$

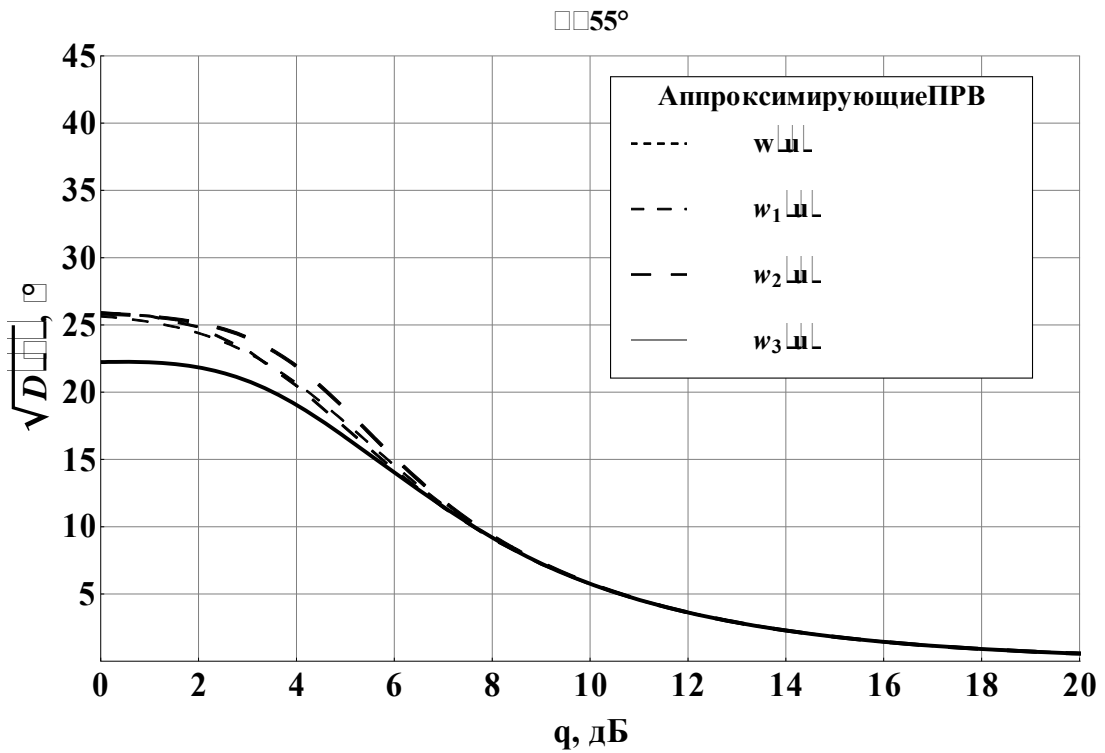


Рисунок Б.6 Зависимость СКО интегральной разности фаз, рассчитанной для предлагаемых аппроксимаций функции плотности вероятности, от отношения сигнал/шум для случая

$$\psi = 55^\circ$$

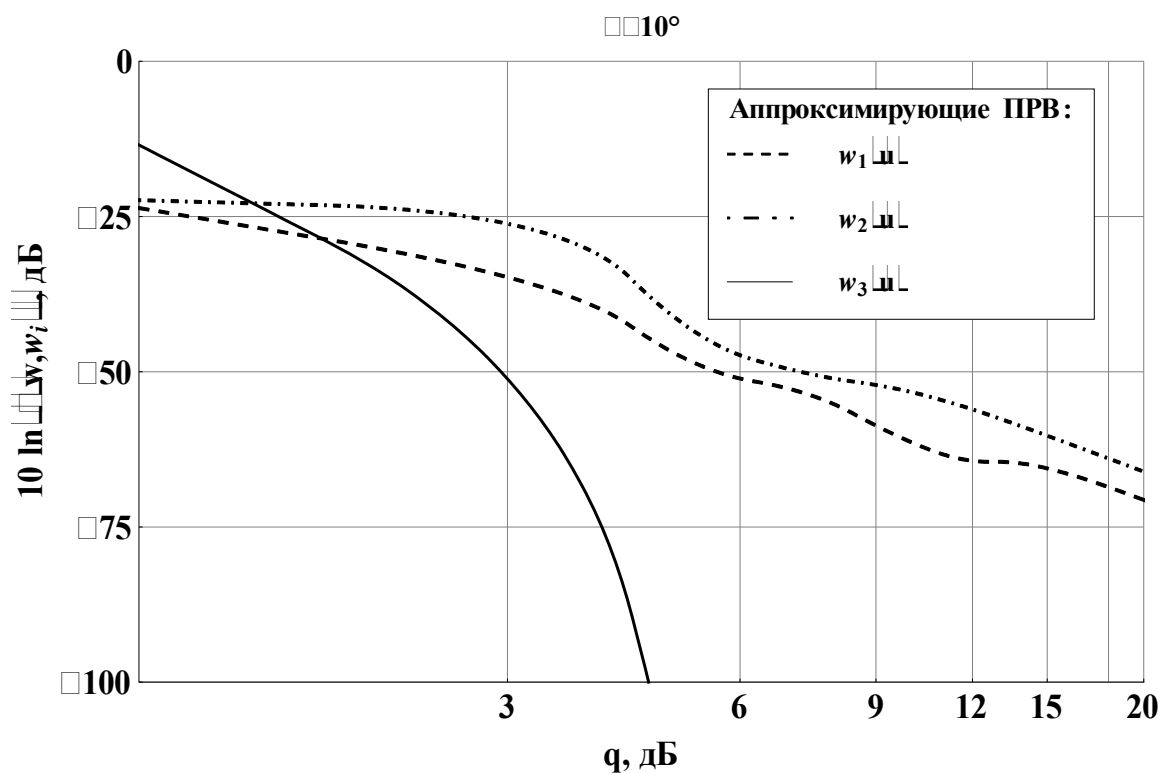


Рисунок Б.7 Зависимость расстояния полной вариации (в логарифмическом масштабе) от отношения сигнал/шум между исходной функцией плотности вероятности и тремя предложенными аппроксимациями для случая  $\psi = 10^\circ$

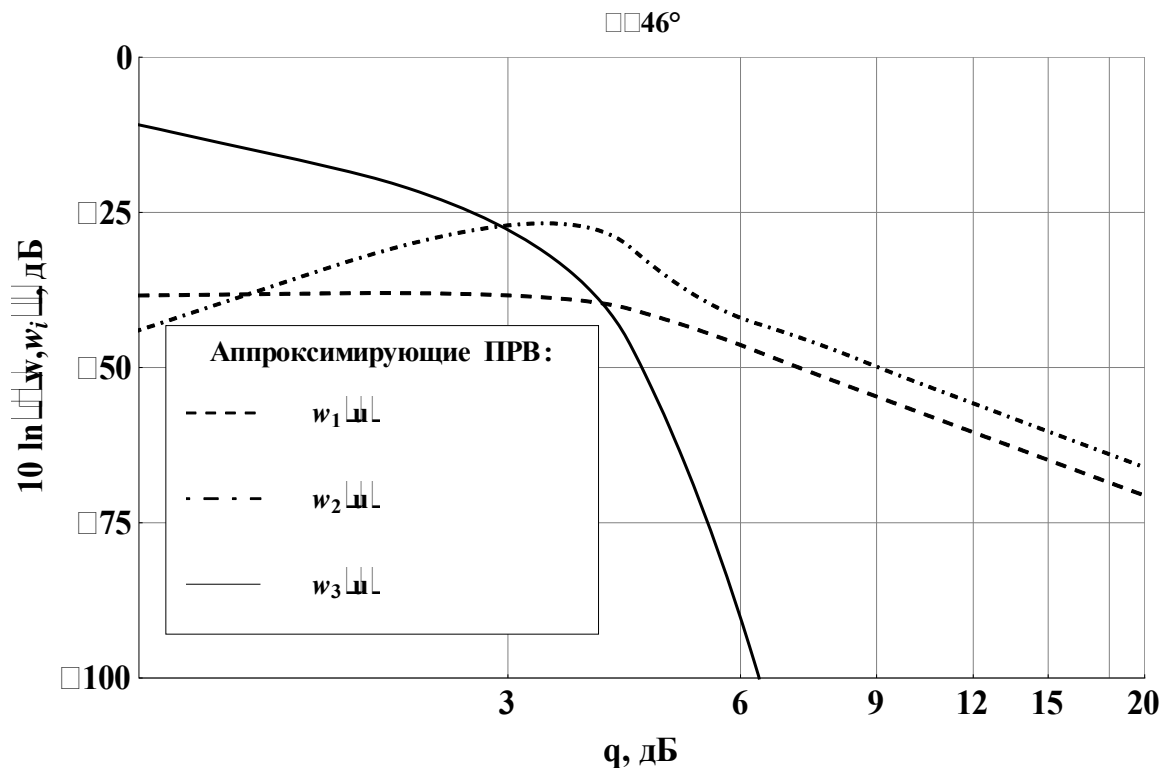


Рисунок Б.8 Зависимость расстояния полной вариации (в логарифмическом масштабе) от отношения сигнал/шум между исходной функцией плотности вероятности и тремя предложенными аппроксимациями для случая  $\psi = 46^\circ$

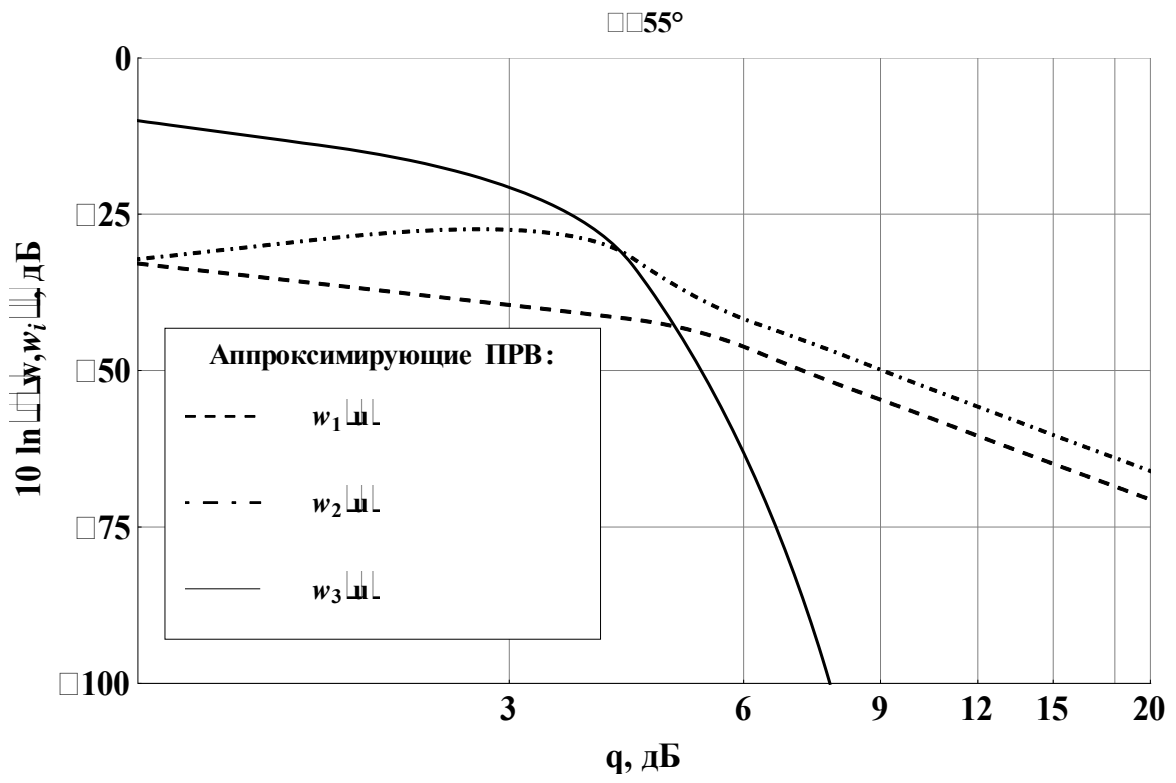


Рисунок Б.9 Зависимость расстояния полной вариации (в логарифмическом масштабе) от отношения сигнал/шум между исходной функцией плотности вероятности и тремя предложенными аппроксимациями для случая  $\psi = 55^\circ$

## Приложение В

### Графические зависимости статистических характеристик оценок, полученных методом моментов

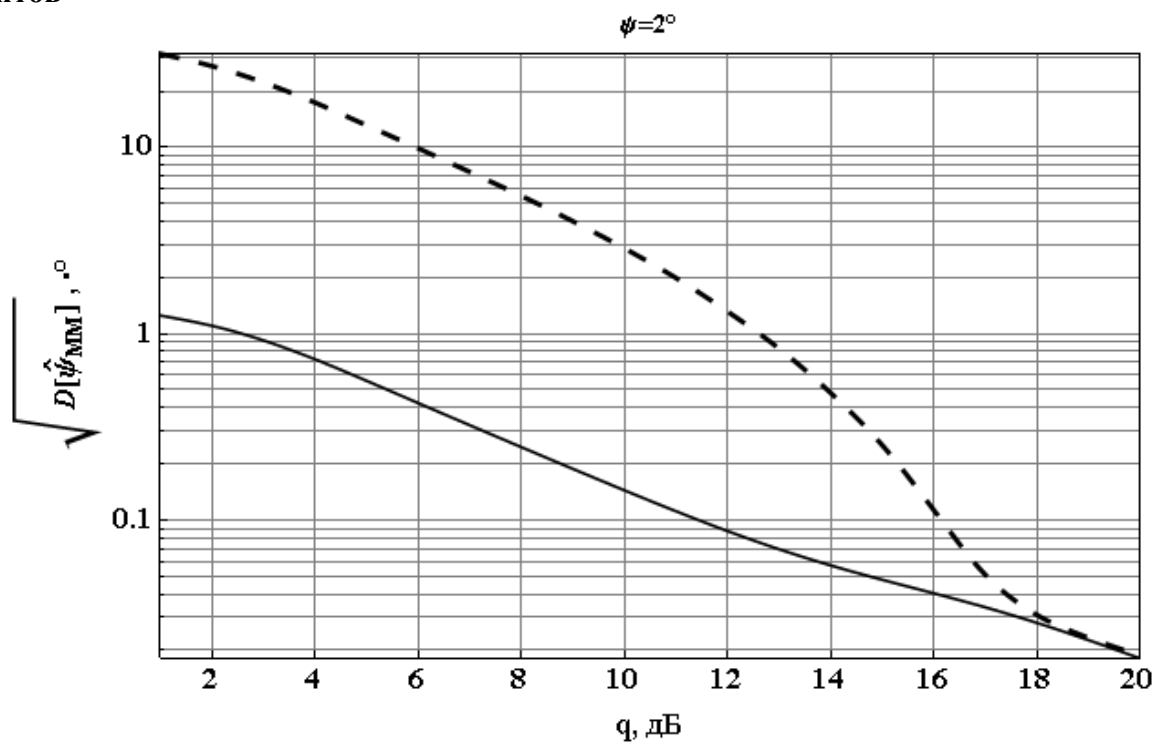


Рисунок В.1 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном значении  $\psi = 2^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов, сплошная – граница Рао-Крамера

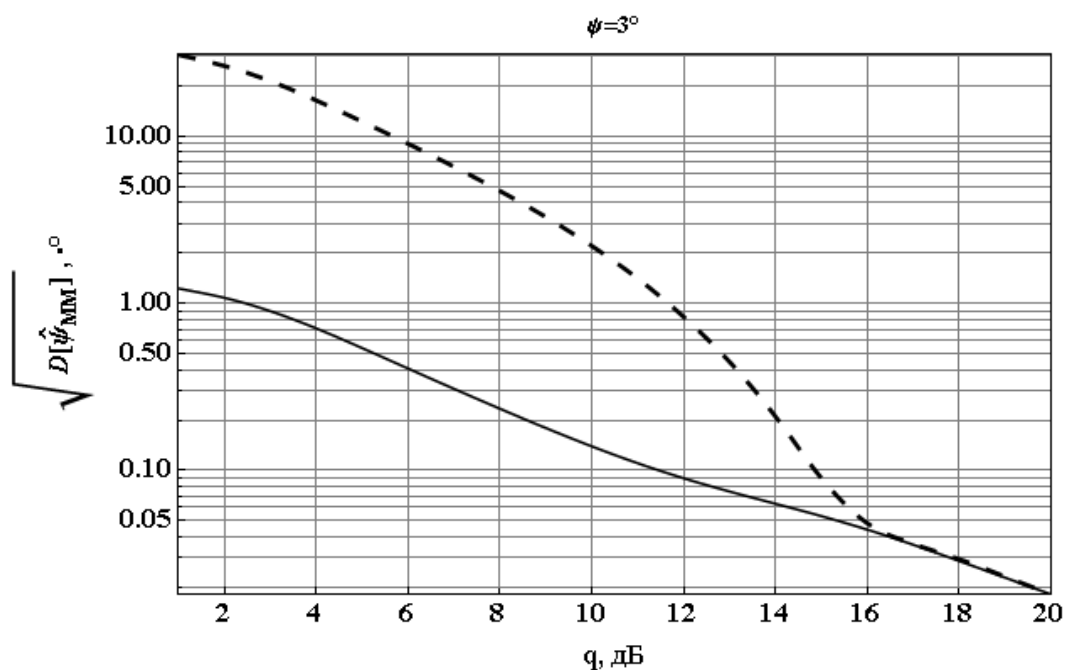


Рисунок В.2 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном значении  $\psi = 3^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов, сплошная – граница Рао-Крамера

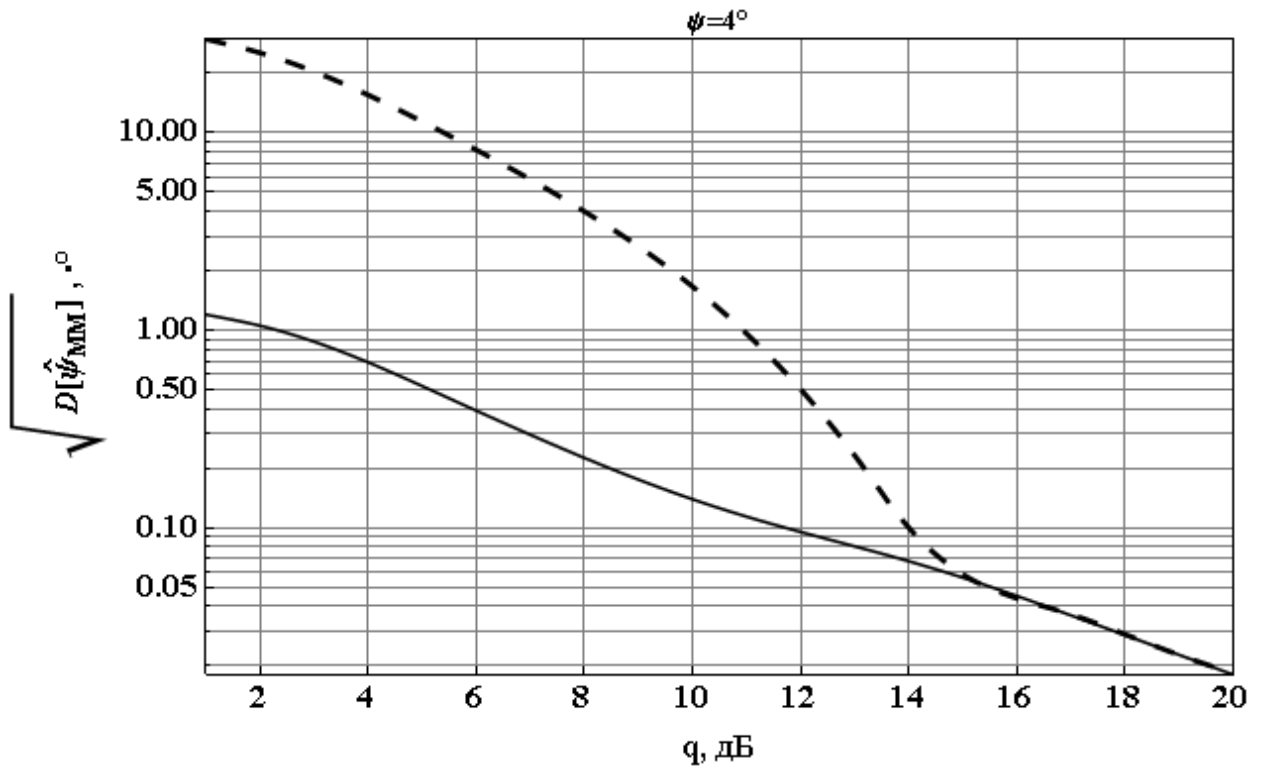


Рисунок В.3 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном значении  $\psi = 4^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов, сплошная – граница Рао-Крамера

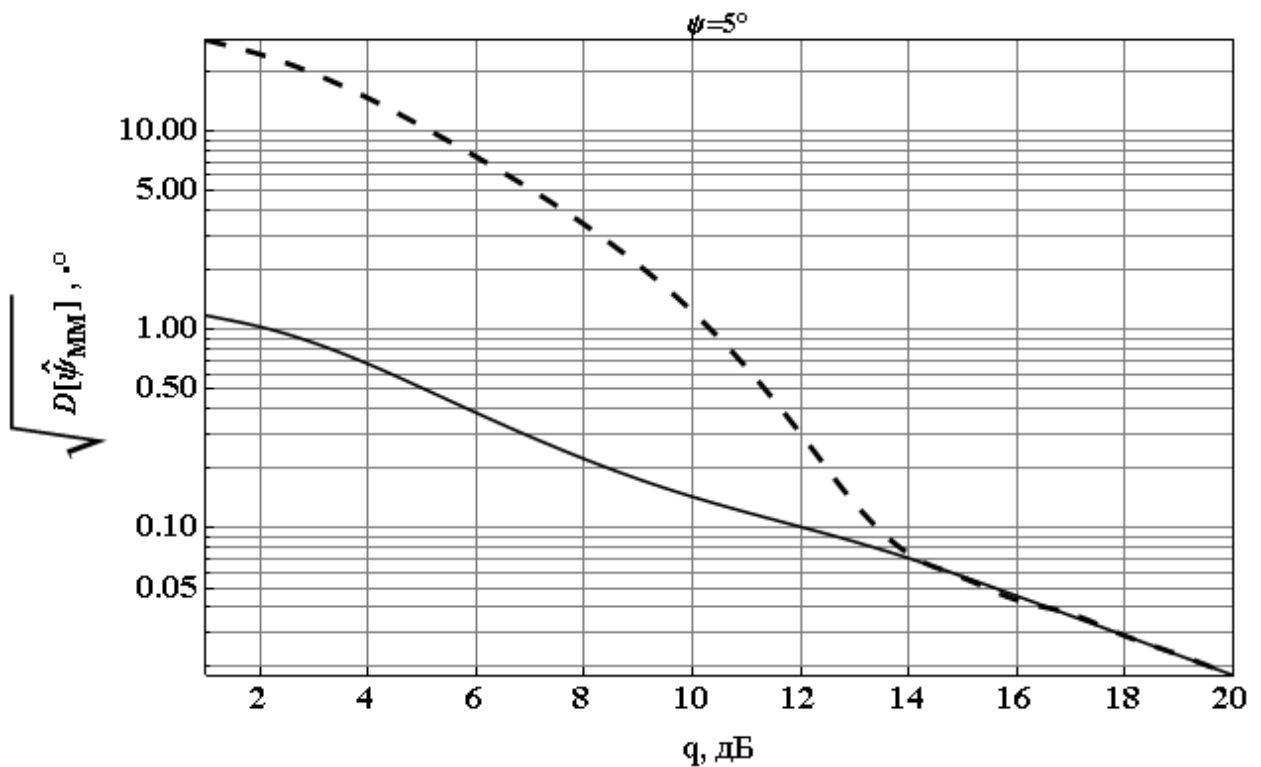


Рисунок В.4 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном значении  $\psi = 5^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов, сплошная – граница Рао-Крамера

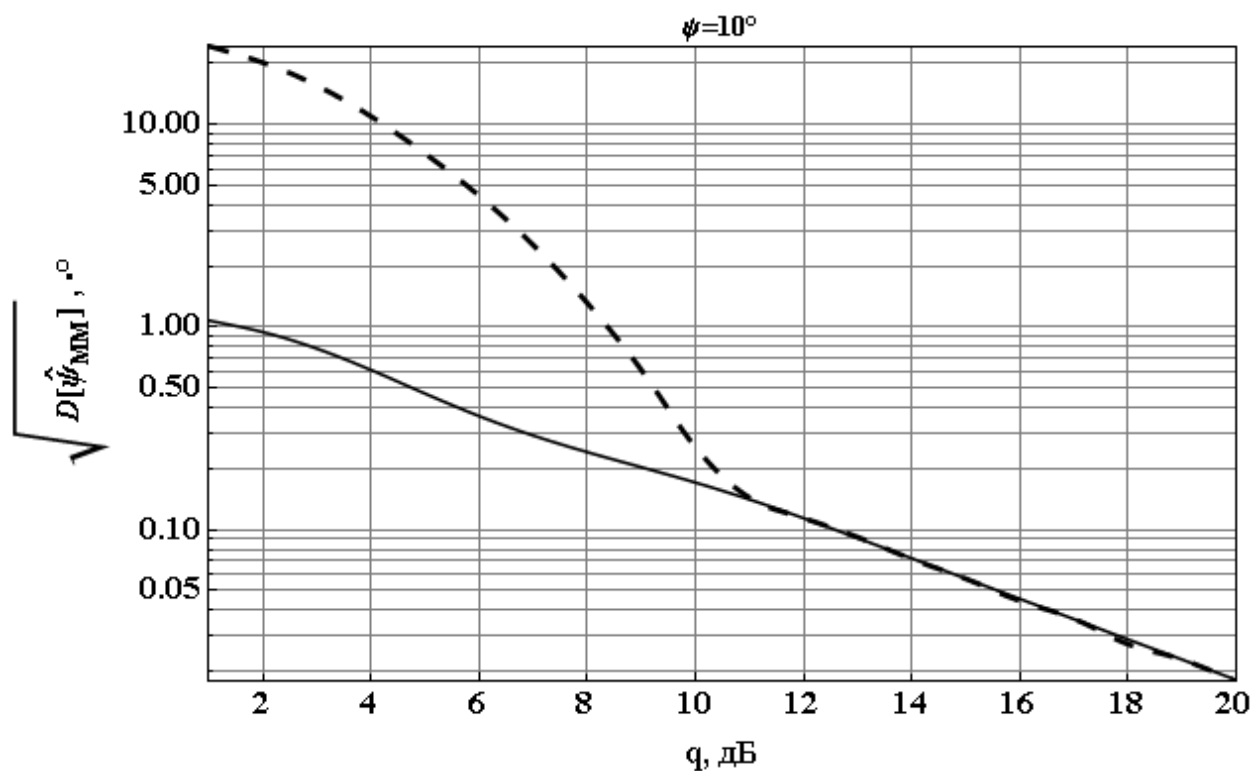


Рисунок В.5 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном значении  $\psi = 10^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов, сплошная – граница Рао-Крамера

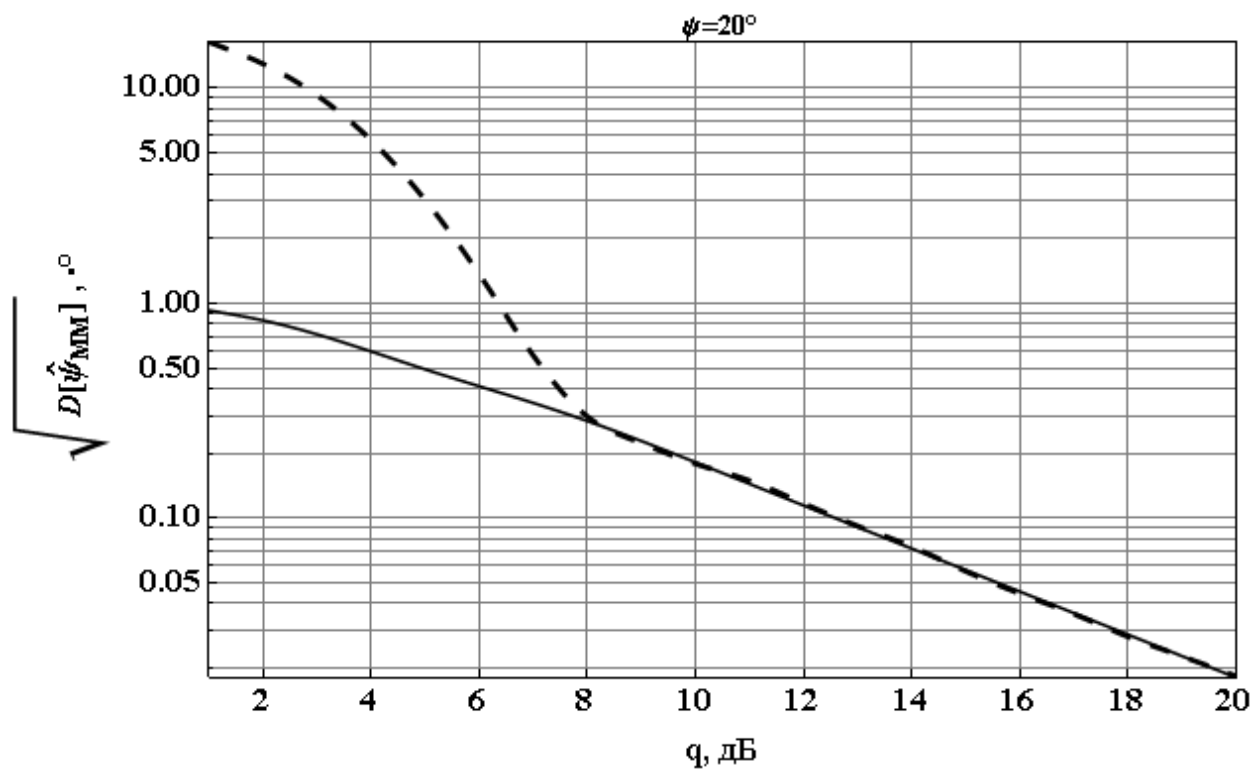


Рисунок В.6 Зависимость корня из рассеяния оценки от отношения сигнал/шум при истинном значении  $\psi = 20^\circ$ . Пунктирная линия – оценка по методу моментов, сплошная – граница Рао-Крамера



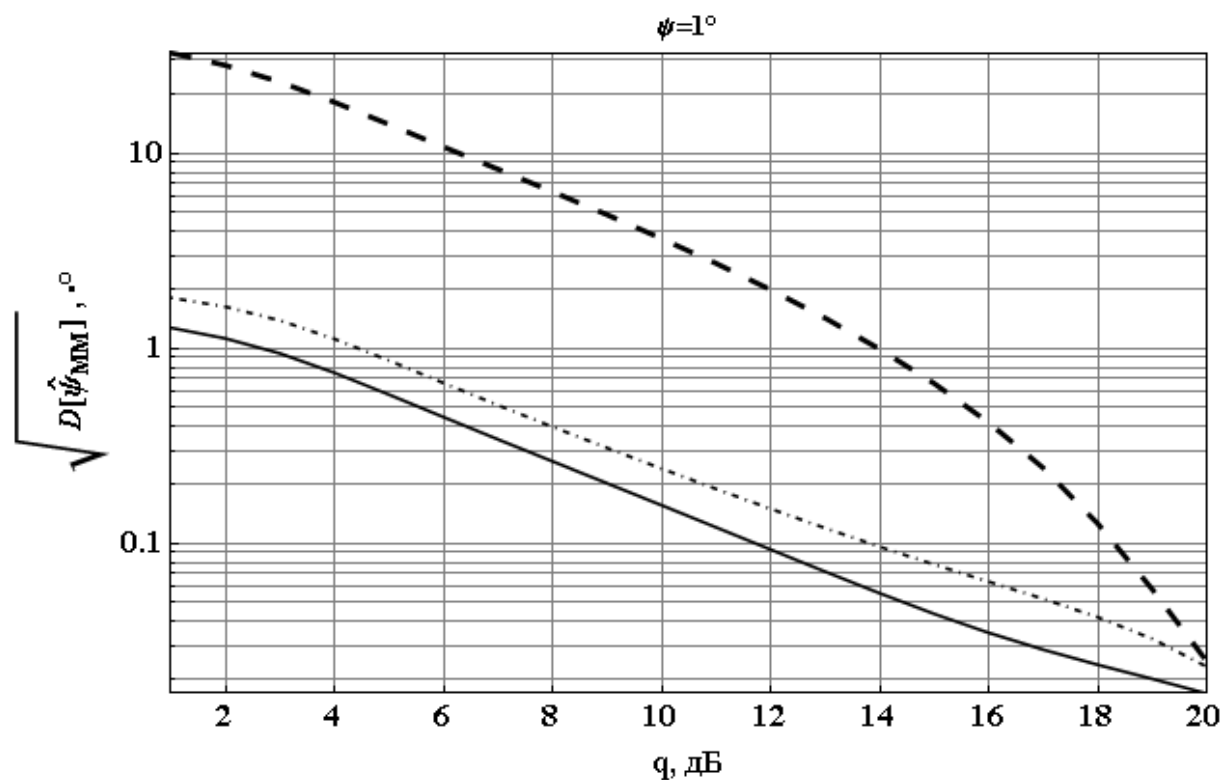


Рисунок В.7 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 1^\circ$ .

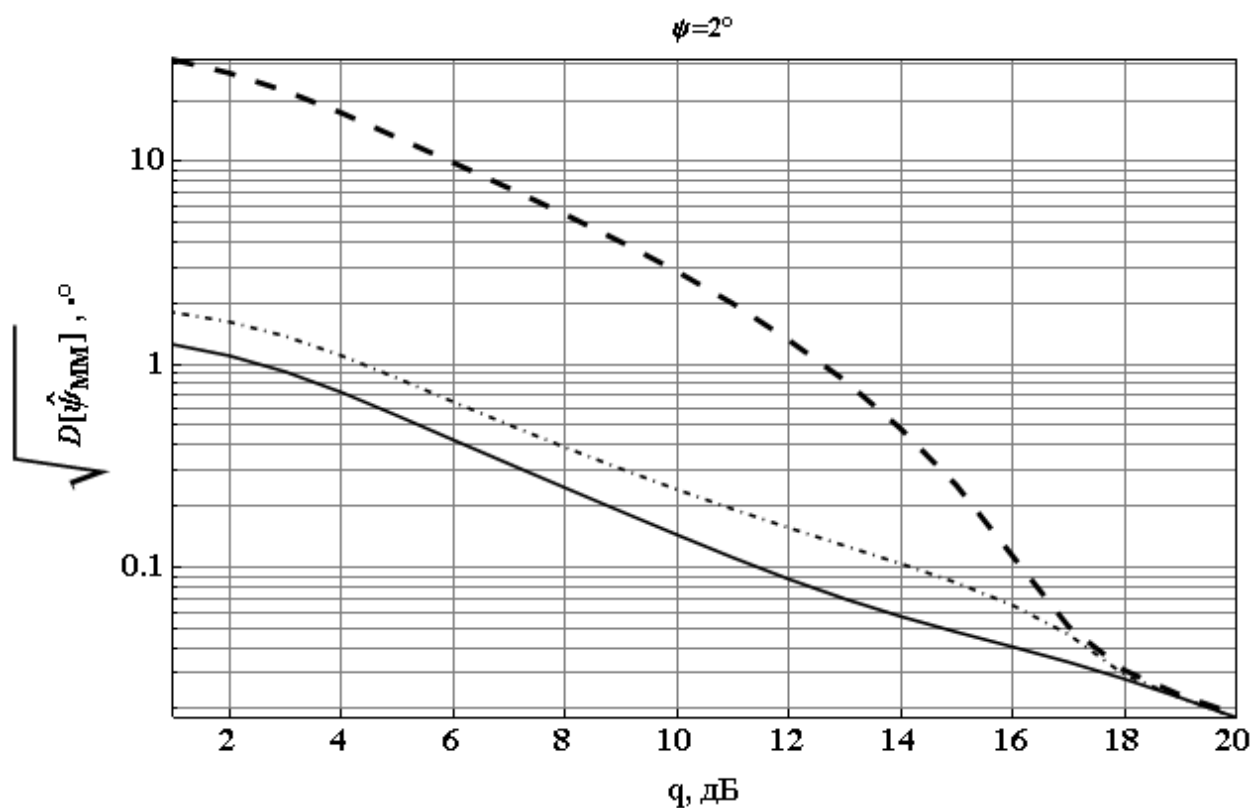


Рисунок В.8 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 2^\circ$ .

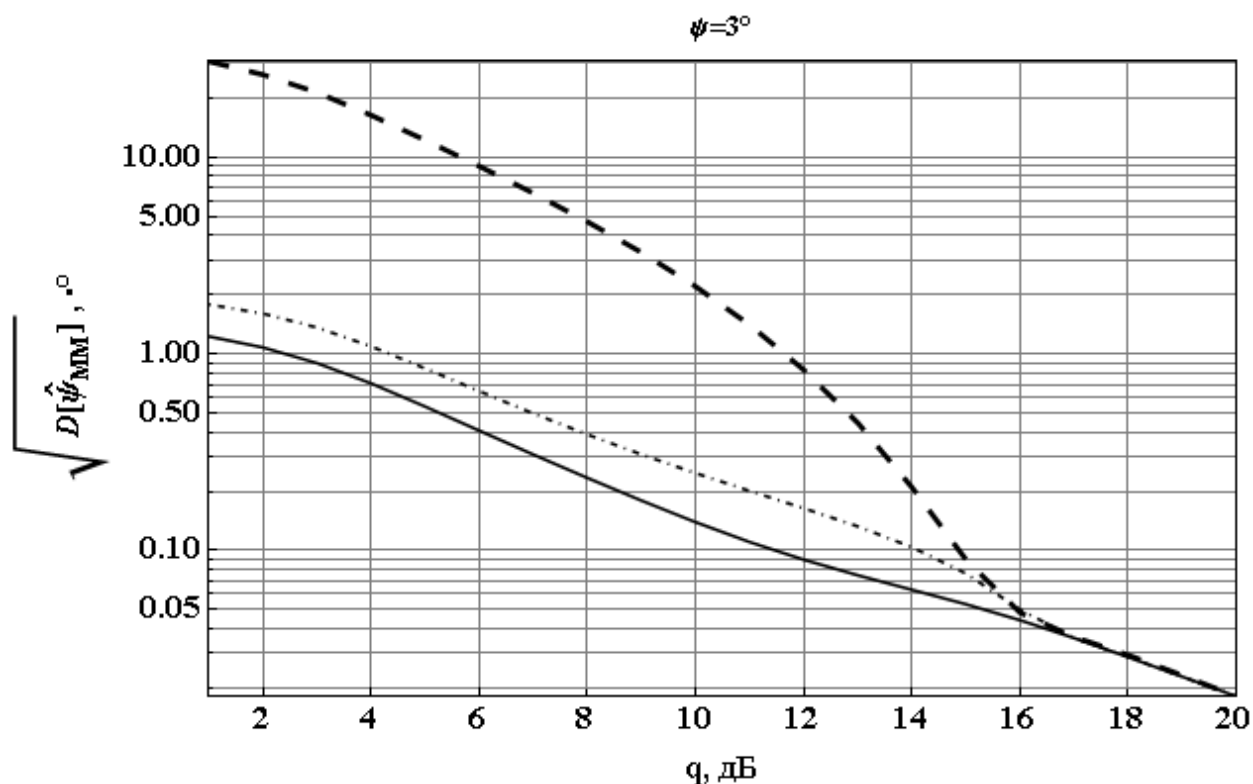


Рисунок В.9 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 3^\circ$ .

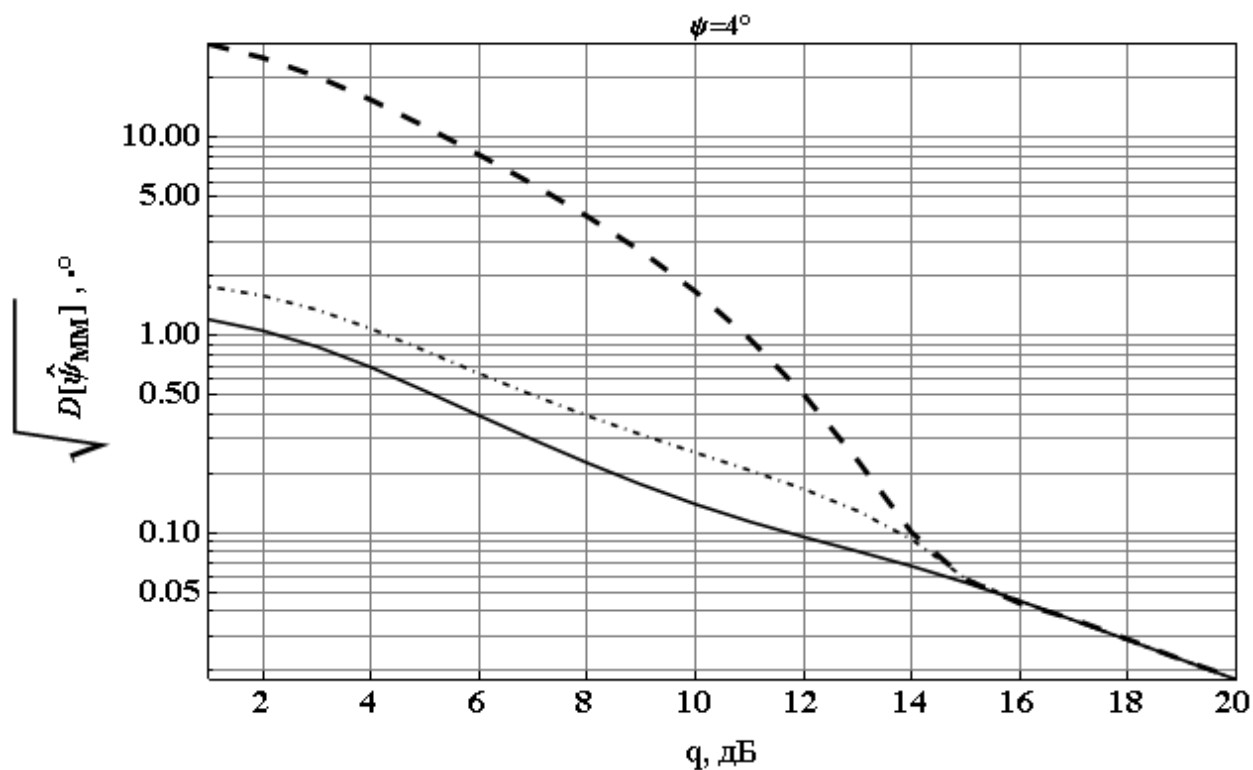


Рисунок В.10 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 4^\circ$ .

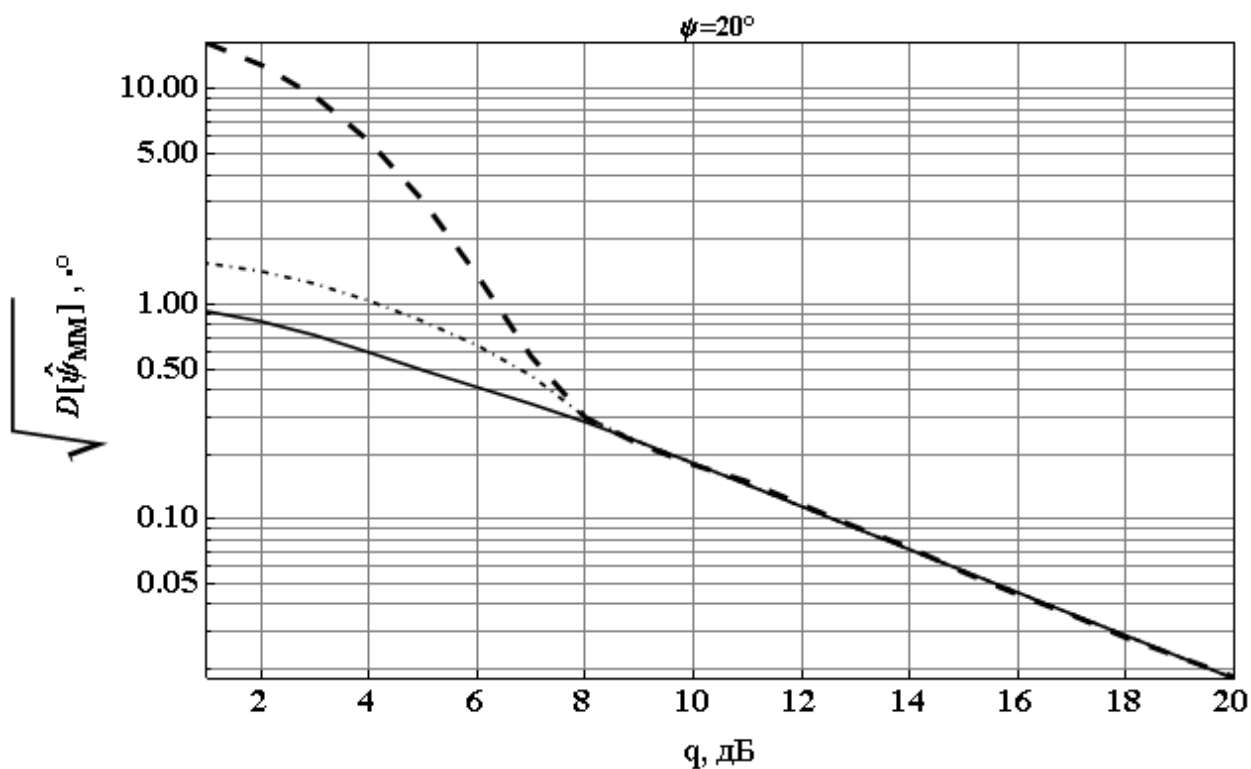


Рисунок В.11 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 20^\circ$ .

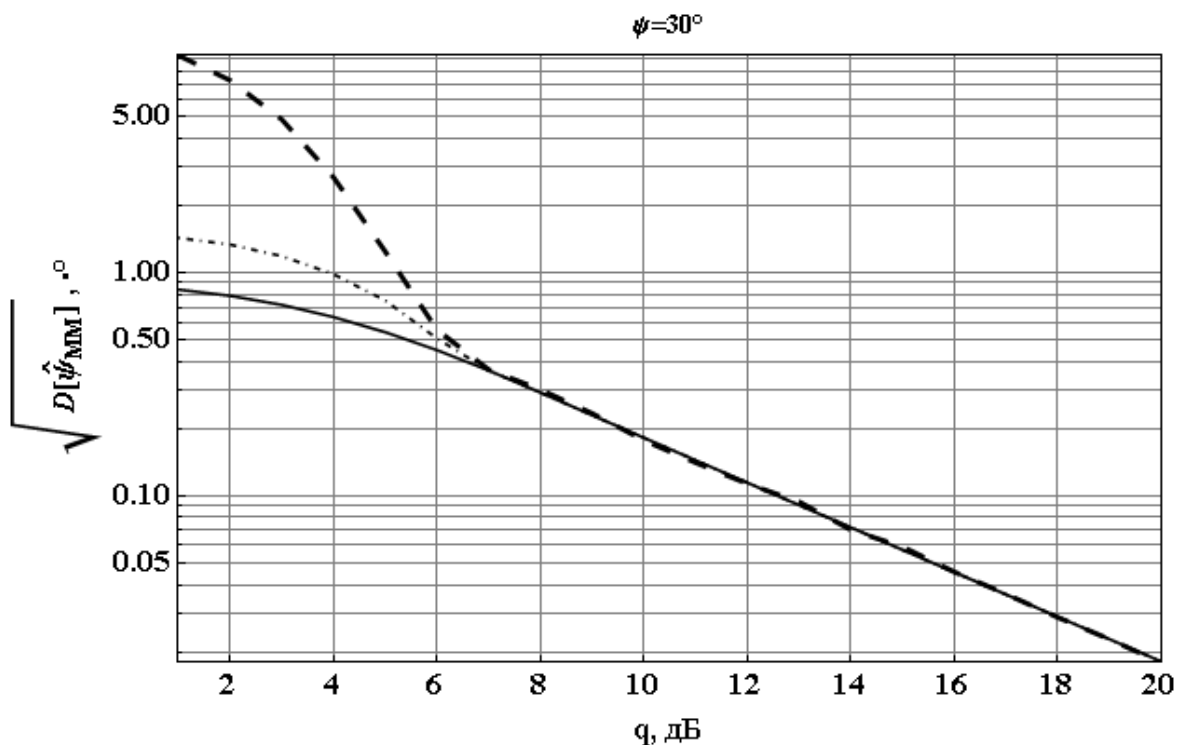


Рисунок В.12 Сравнение корня из рассеяния оценки по методу моментов (пунктирная линия), границы Рао-Крамера (сплошная линия) и границы Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная линия) при  $\psi = 30^\circ$ .

### Приложение Г

#### Графические зависимости статистических и временных характеристик оценок максимального правдоподобия

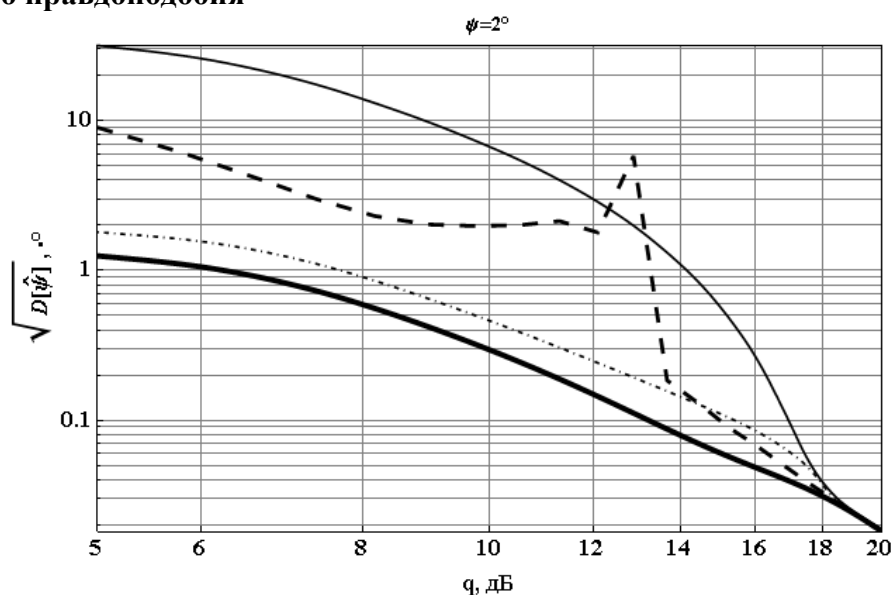


Рисунок Г.1 Корень из рассеяния оценки для  $\psi = 2^\circ$  при объёме выборки 1000 отсчётов для метода максимального правдоподобия (пунктирная кривая), метода моментов (сплошная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная жирная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

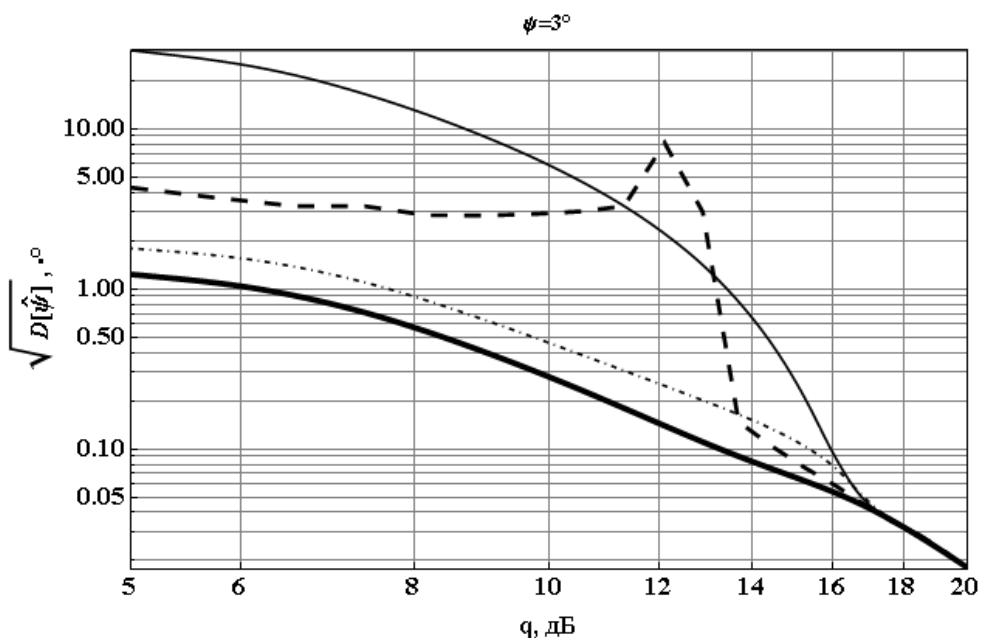


Рисунок Г.2 Корень из рассеяния оценки для  $\psi = 3^\circ$  при объёме выборки 1000 отсчётов для метода максимального правдоподобия (пунктирная кривая), метода моментов (сплошная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная жирная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

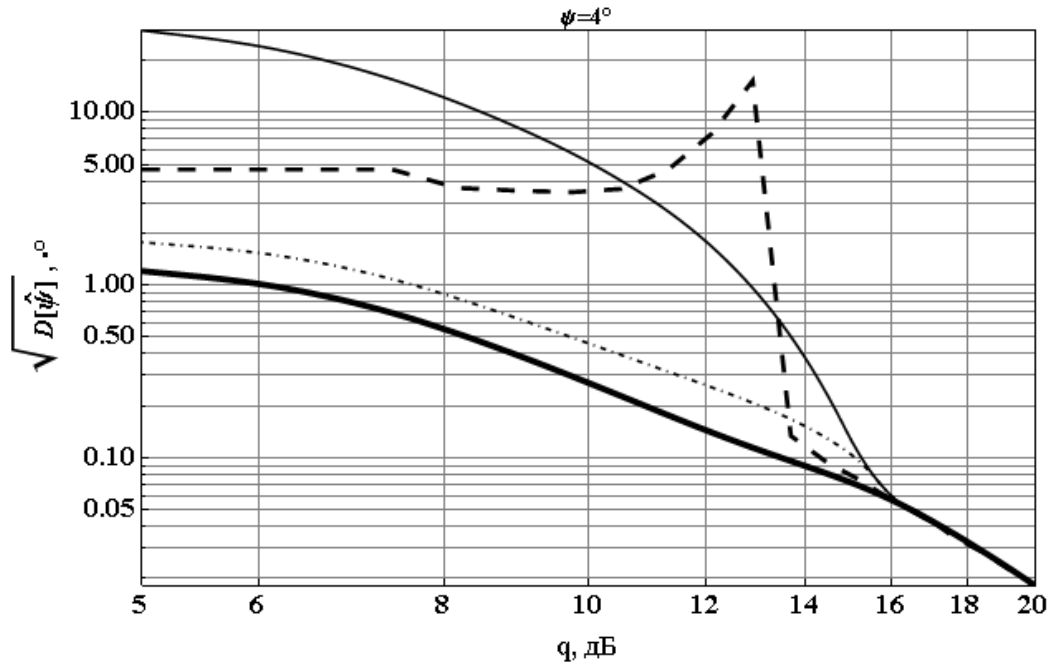


Рисунок Г.3 Корень из рассеяния оценки для  $\psi = 4^\circ$  при объеме выборки 1000 отсчетов для метода максимального правдоподобия (пунктирная кривая), метода моментов (сплошная кривая), граница Рао-Крамера (сплошная жирная кривая) и граница Чепмена-Роббинса (штрихпунктирная кривая)

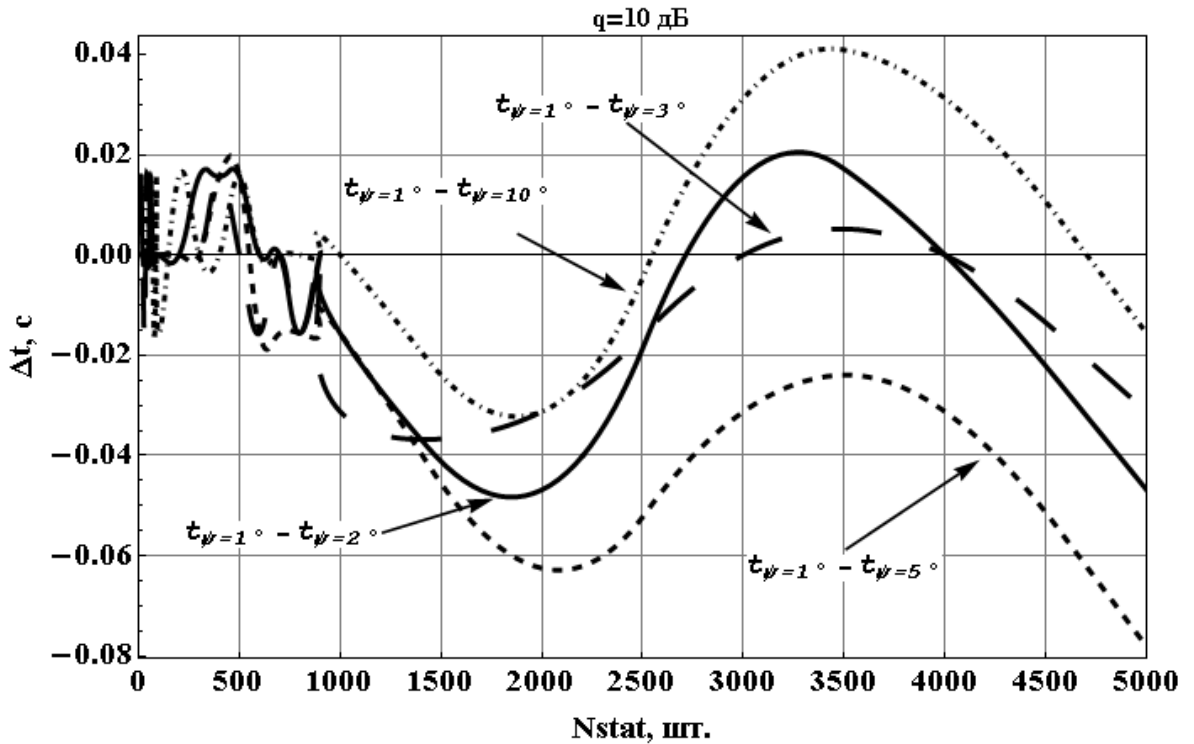


Рисунок Г.4 Зависимость разницы во времени нахождения максимально правдоподобной оценки от объема выборки для случая отношения сигнал/шум 10 дБ

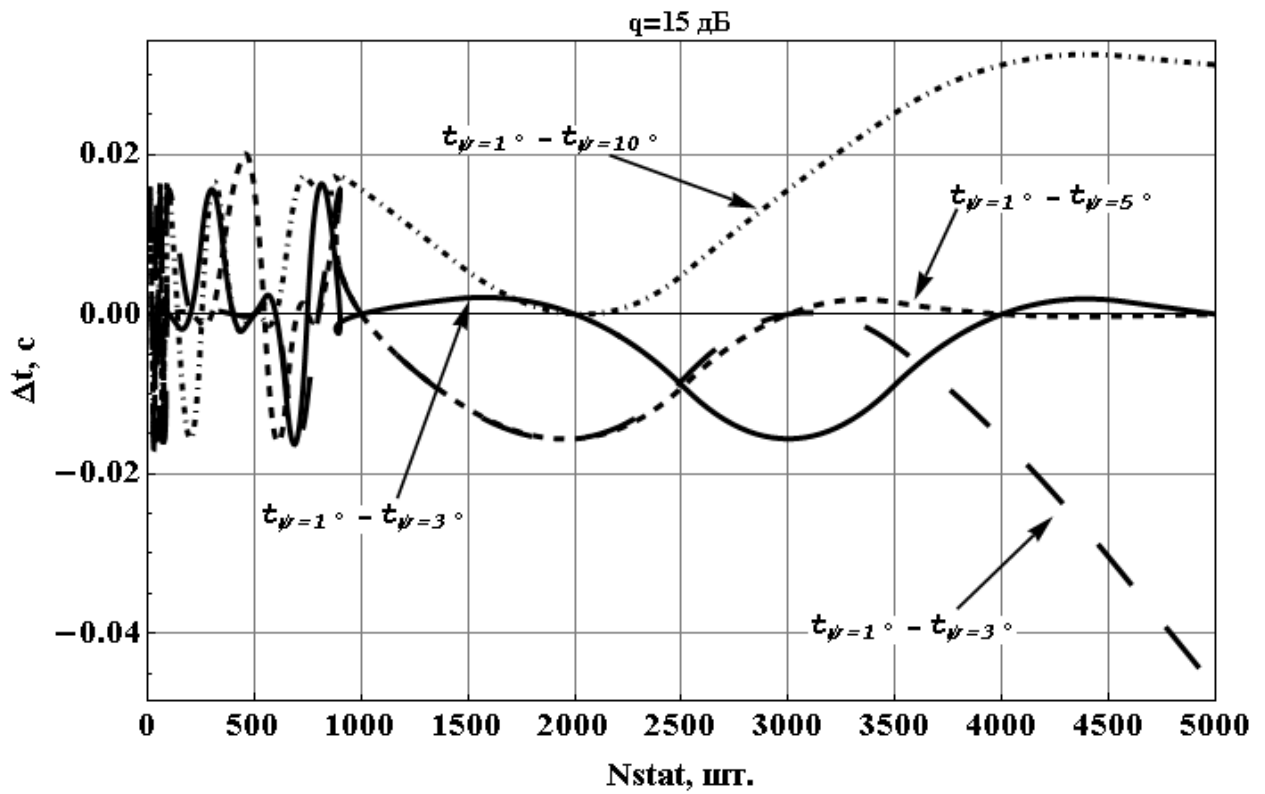


Рисунок Г.5 Зависимость разницы во времени нахождения максимально правдоподобной оценки от объёма выборки для случая отношения сигнал/шум 15 дБ

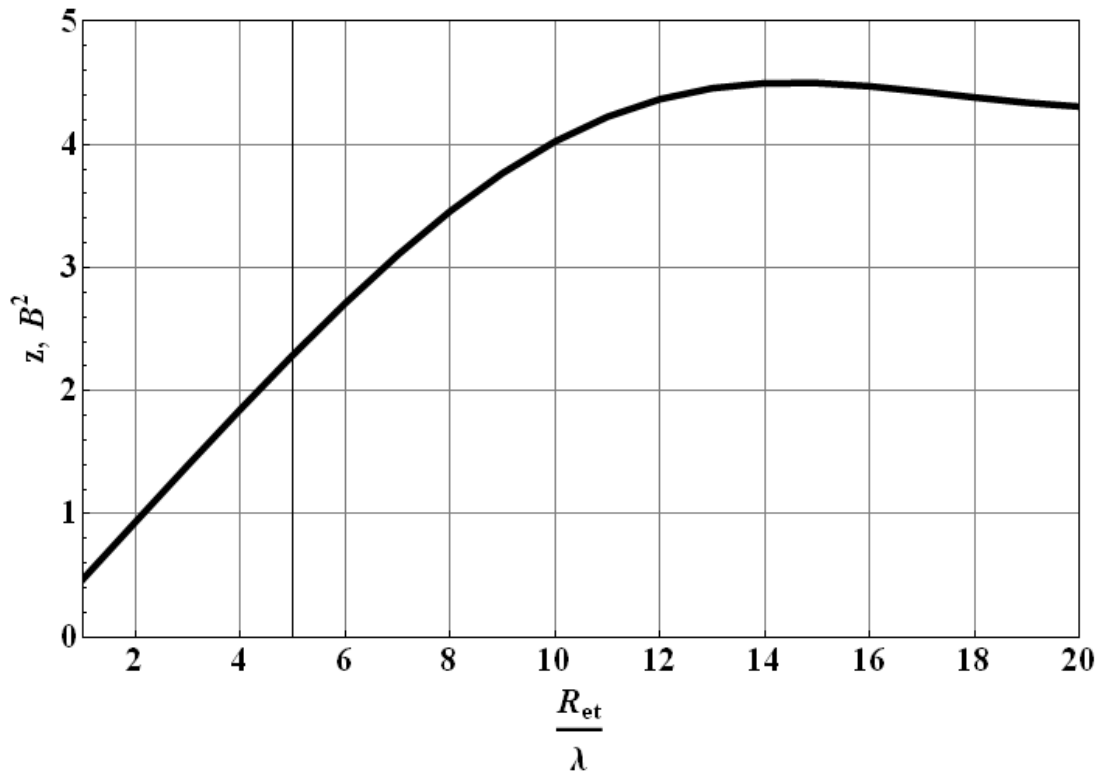


Рисунок Г.6 Кривая отображения величин радиусов эталонных объектов (бесконечные идеально проводящие ленты), нормированных на длину волны, в величины модуля корреляционного интеграла

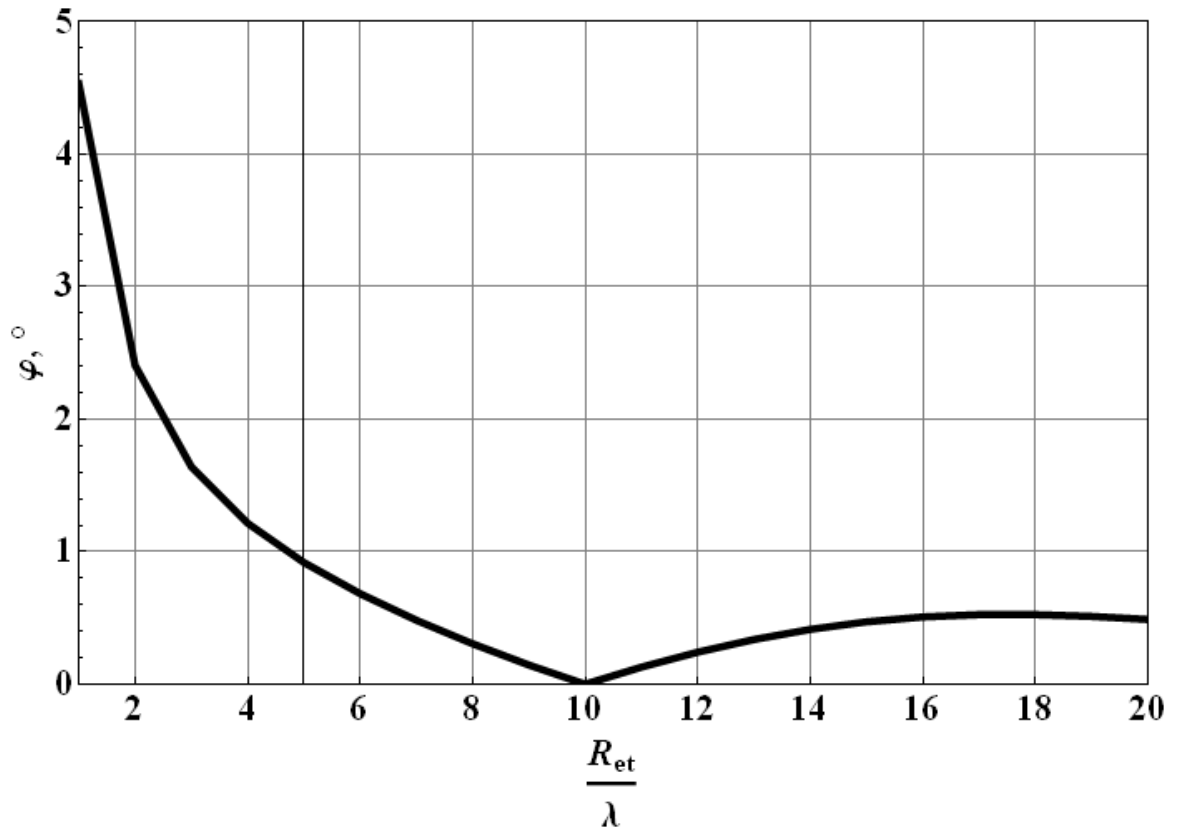


Рисунок Г.7 Кривая отображения величин радиусов эталонных объектов (бесконечные идеально проводящие ленты), нормированных на длину волны, в величины интегральной разности фаз

## Приложение Д

### Результаты проверки гипотезы о нормальности распределения оценок

В приложении для различных ОСШ приведены снимки диалоговых окон работы программы, на которых отображены:

- 1) гистограмма  $\hat{\psi}_{MM}$ ;
- 2) результат аппроксимации выборки  $\hat{\psi}_{MM}$  гауссовой функцией плотности вероятности;
- 3) диалоговое окно отчёта проверки гипотезы о нормальности распределения с указанием:
  - 3.1) значения статистики Колмогорова-Смирнова (“Statistics”);
  - 3.2) р-значение (“P-Value”);

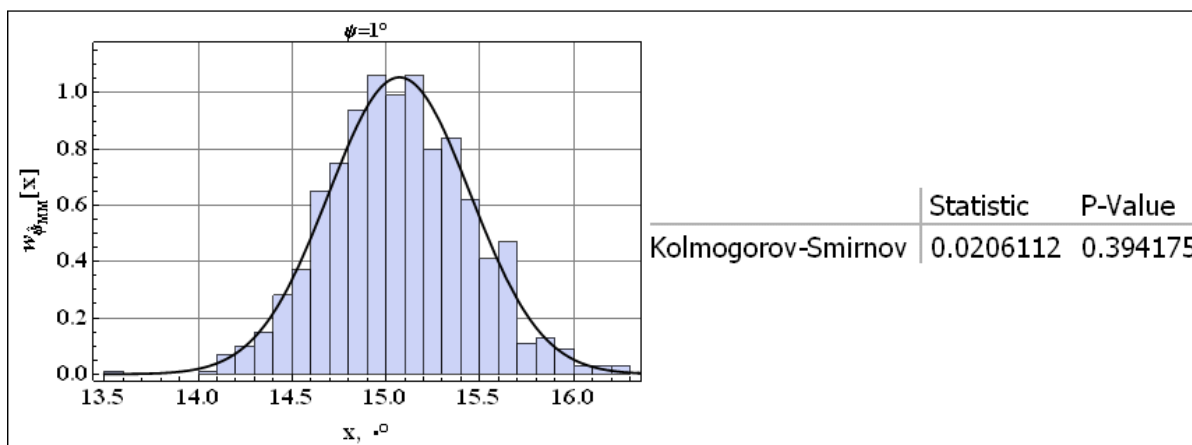


Рисунок Д.1 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 1^\circ$  и ОСШ 5 дБ

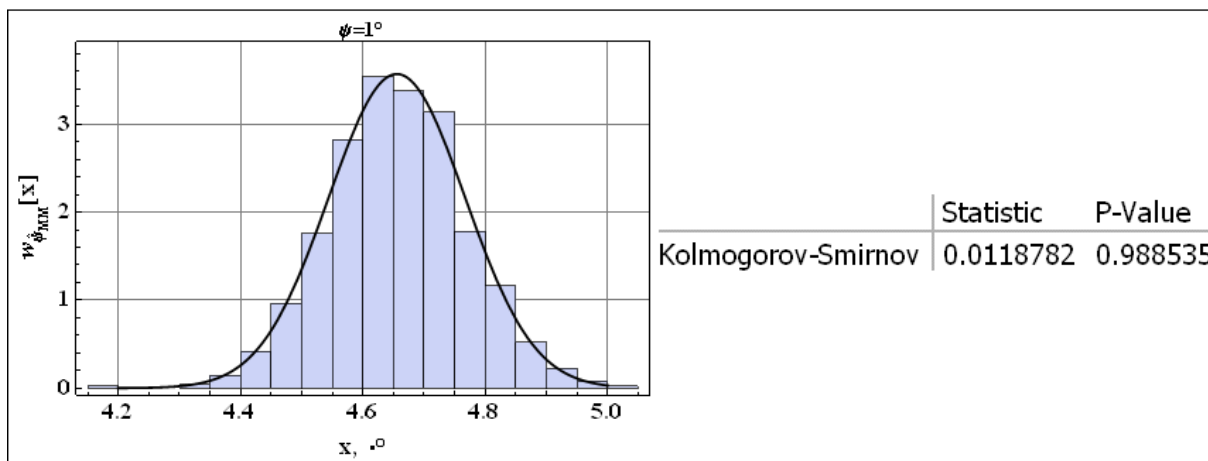


Рисунок Д.2 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 1^\circ$  и ОСШ 10 дБ



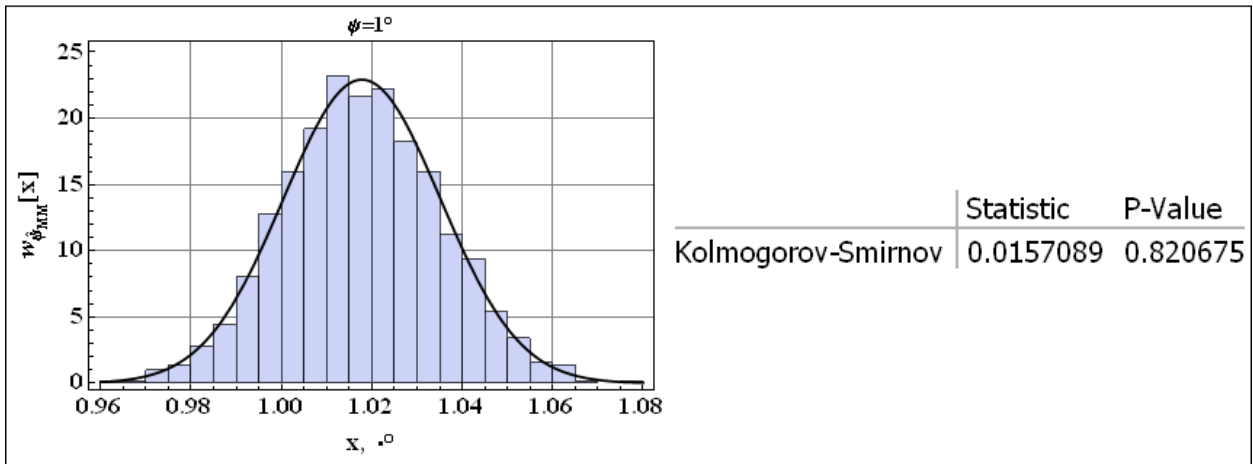


Рисунок Д.3 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 1^\circ$  и ОСШ 20 дБ

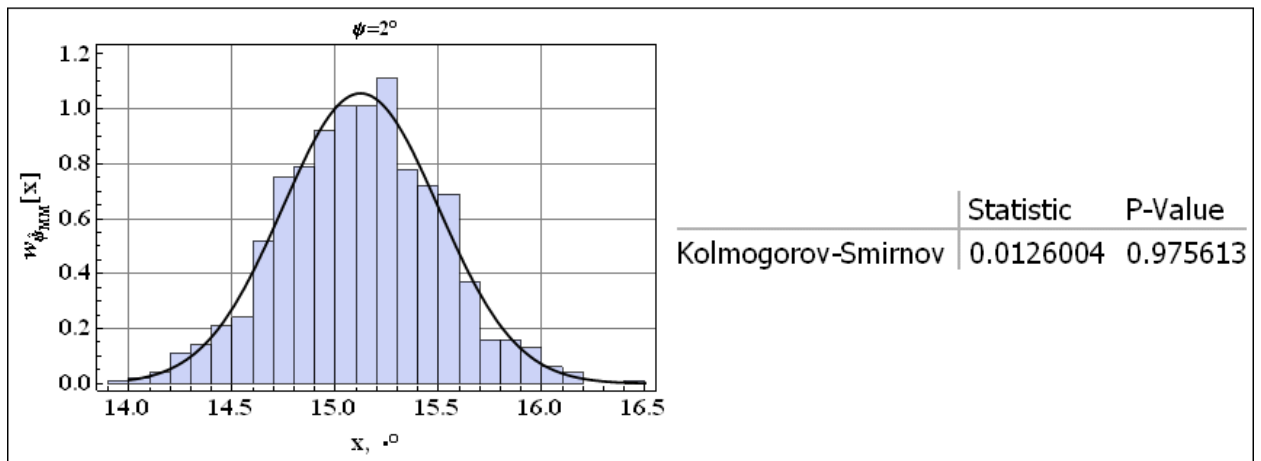


Рисунок Д.4 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 2^\circ$  и ОСШ 5 дБ

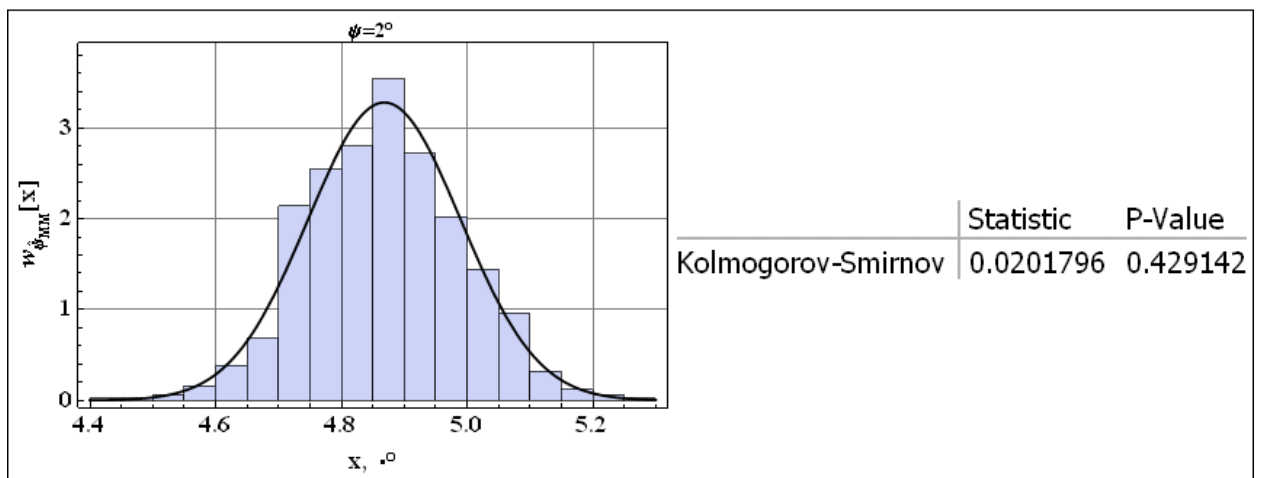


Рисунок Д.5 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 2^\circ$  и ОСШ 10 дБ

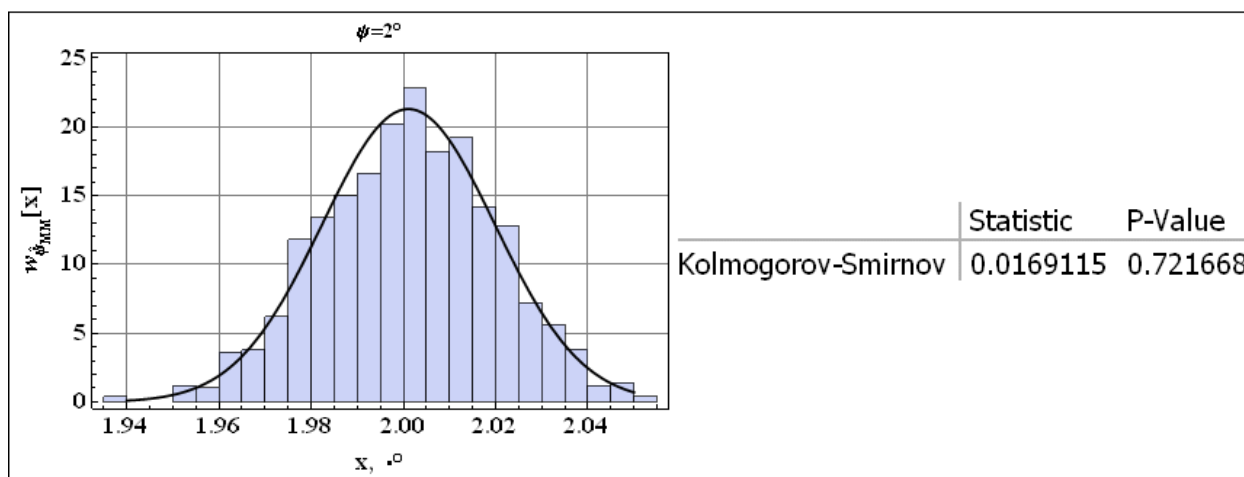


Рисунок Д.6 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 2^\circ$  и ОСШ 20 дБ

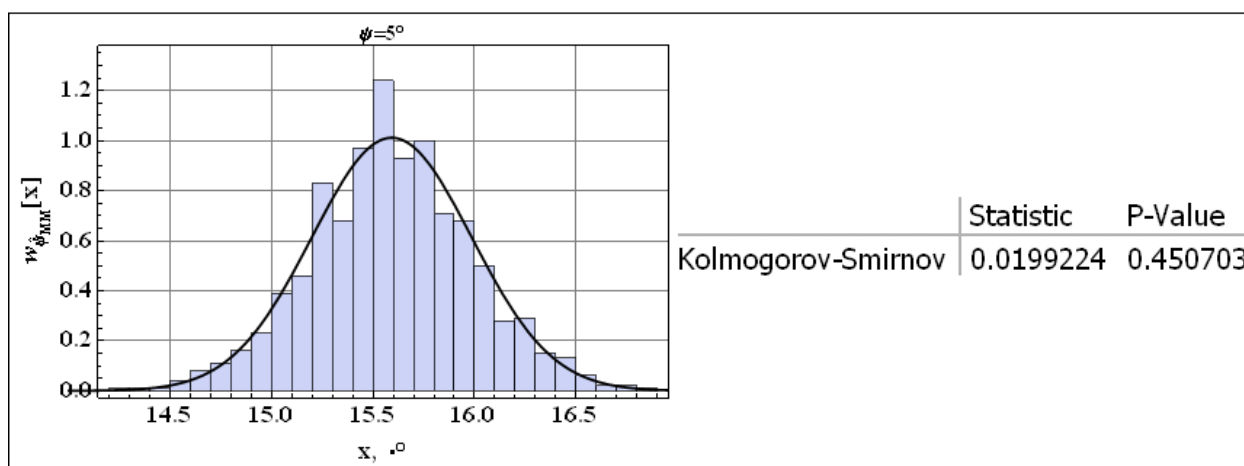


Рисунок Д.7 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 5^\circ$  и ОСШ 5 дБ

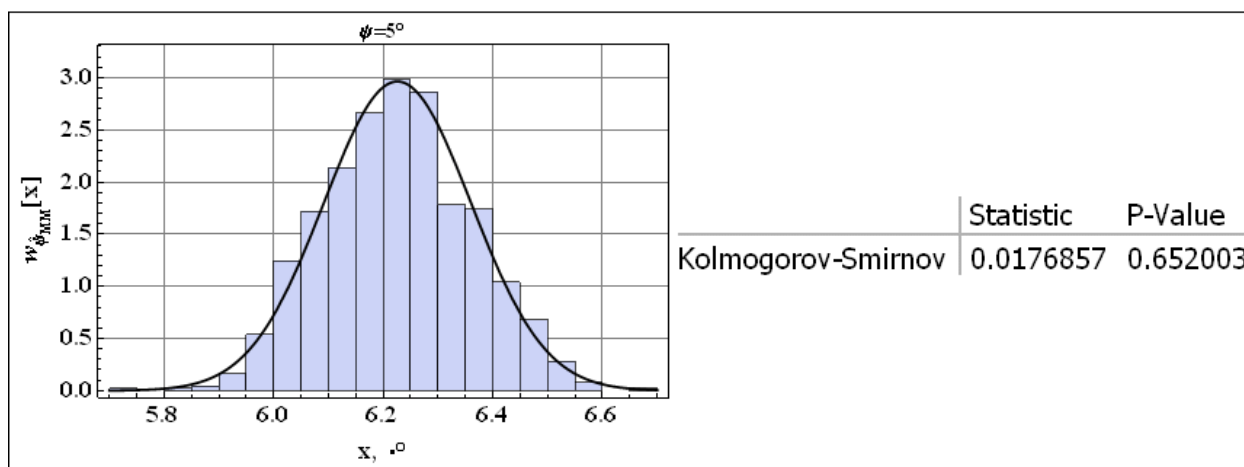


Рисунок Д.8 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз  $\psi = 5^\circ$  и ОСШ 10 дБ

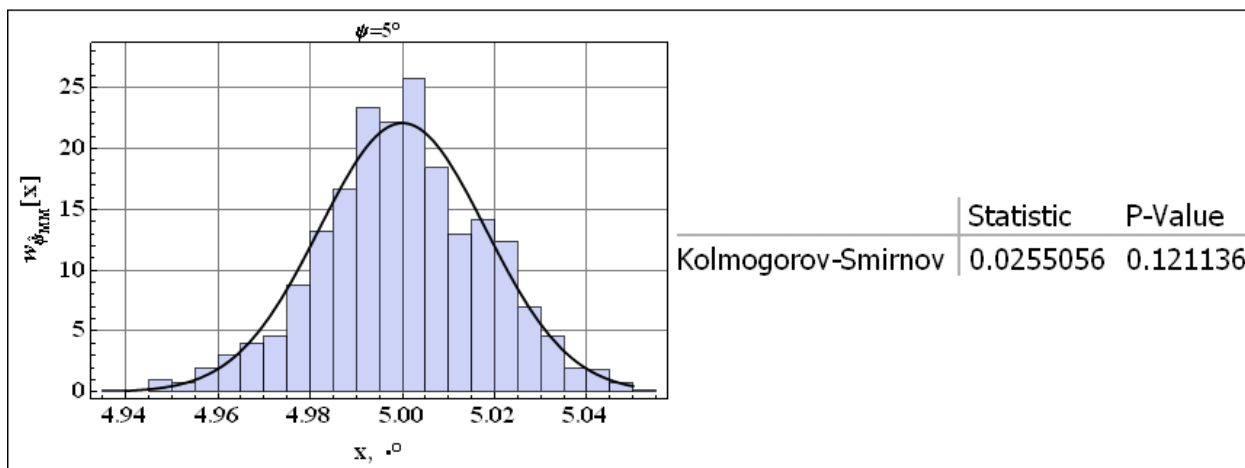


Рисунок Д.9 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз

$\psi = 5^\circ$  и ОСШ 20 дБ

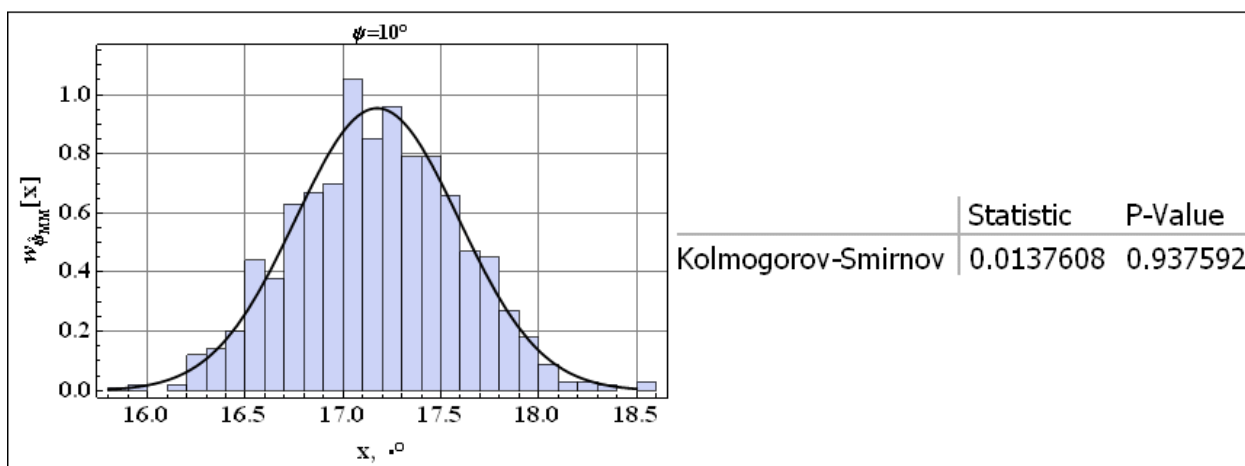


Рисунок Д.10 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз

$\psi = 10^\circ$  и ОСШ 5 дБ

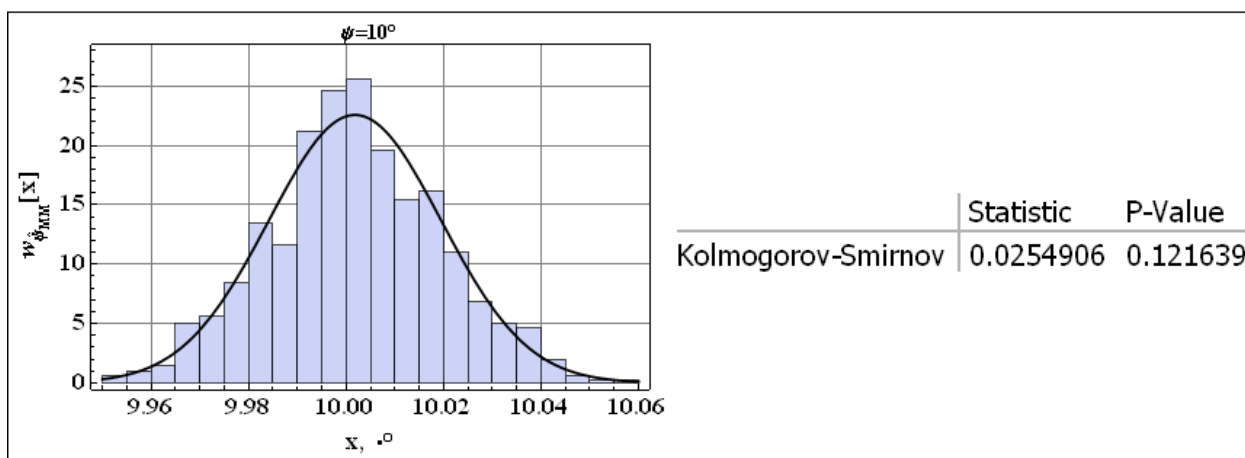


Рисунок Д.11 Снимок диалогового окна программы для случая значения истинной разности фаз

$\psi = 10^\circ$  и ОСШ 20 дБ

Приложение Е

Результаты статистического моделирования для определения шага сетки эталонов

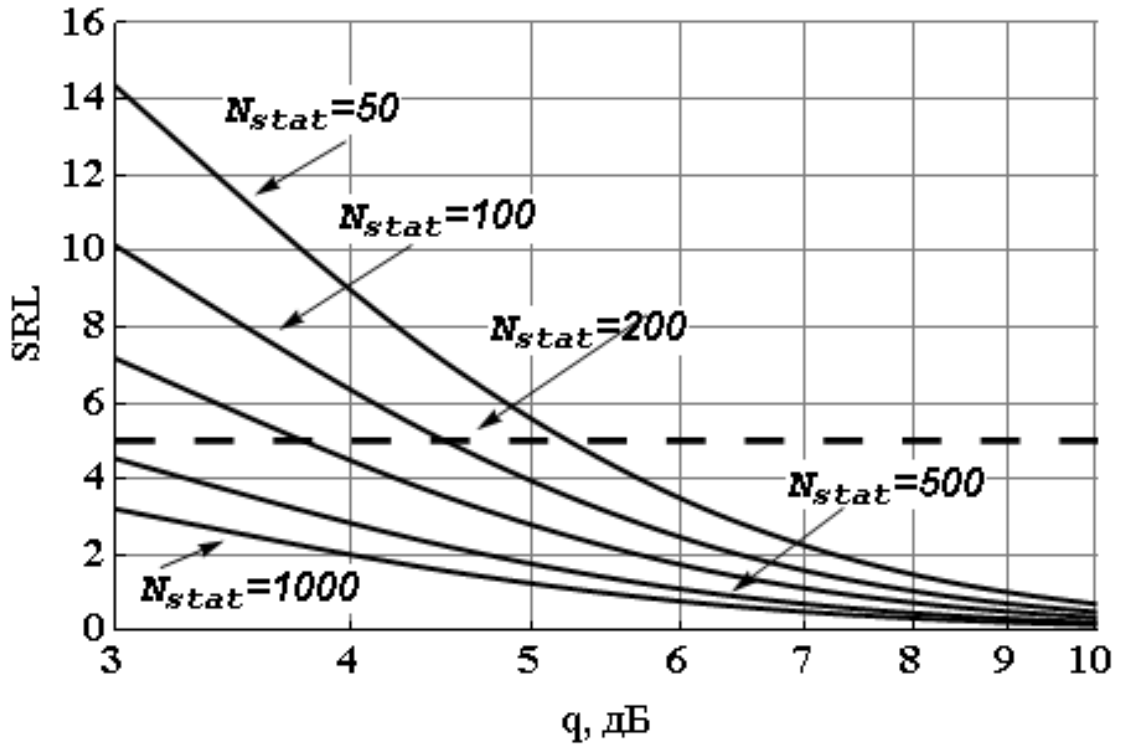


Рисунок Е.1 Зависимость статистического предела разрешения от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки, значения  $\psi = 5^\circ$  и известном  $\eta = 1$

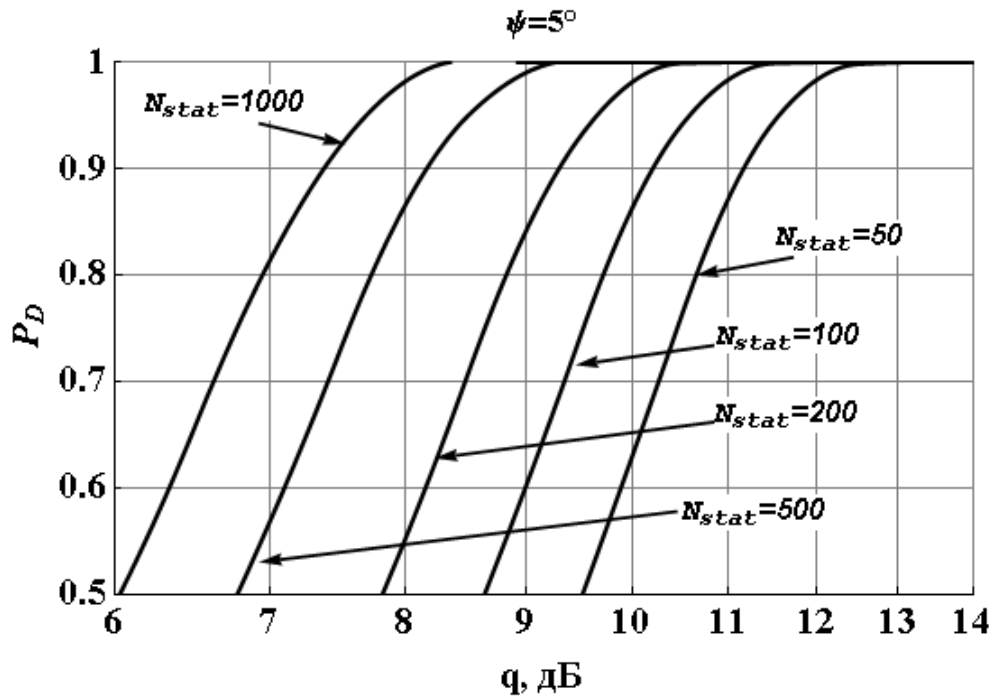


Рисунок Е.2 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = 5^\circ$

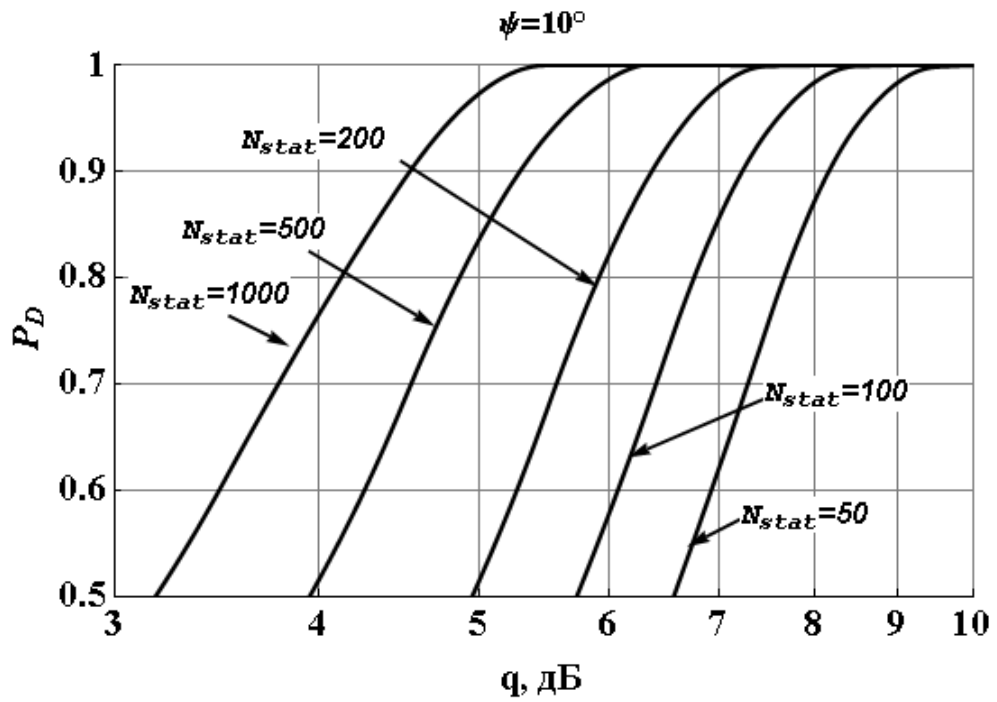


Рисунок Е.3 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум при различном объеме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = 10^\circ$

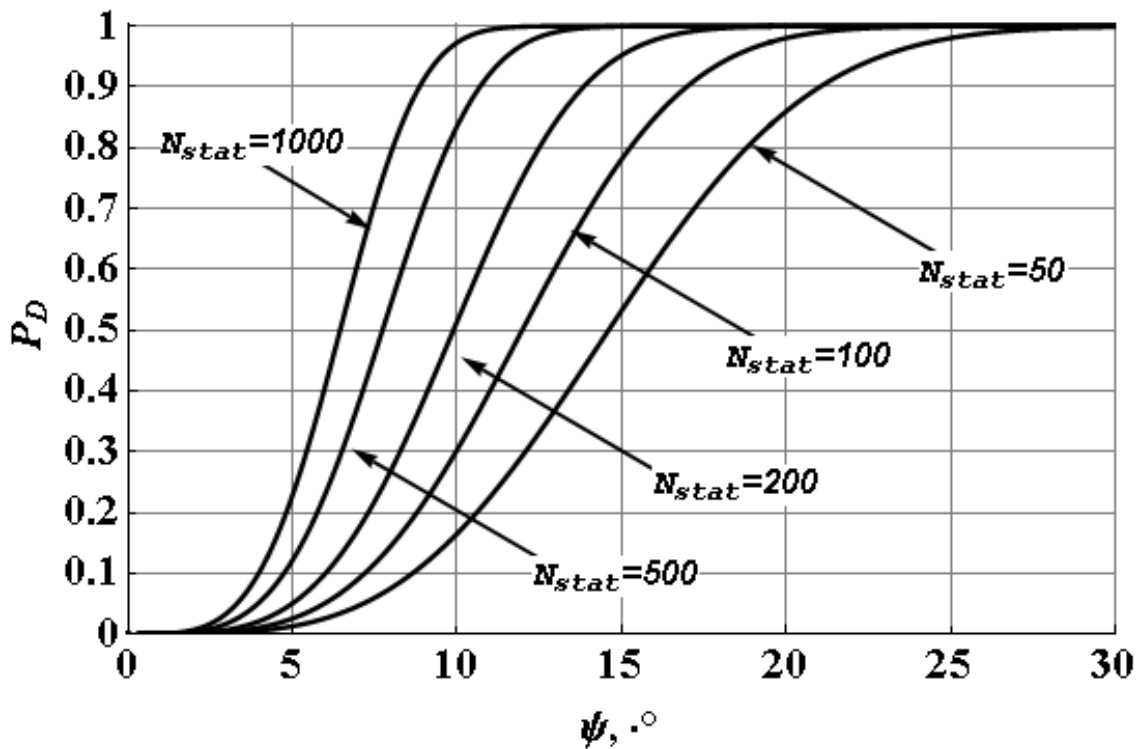


Рисунок Е.4 Зависимость вероятности правильной классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум равного 5 дБ при различном объеме выборки

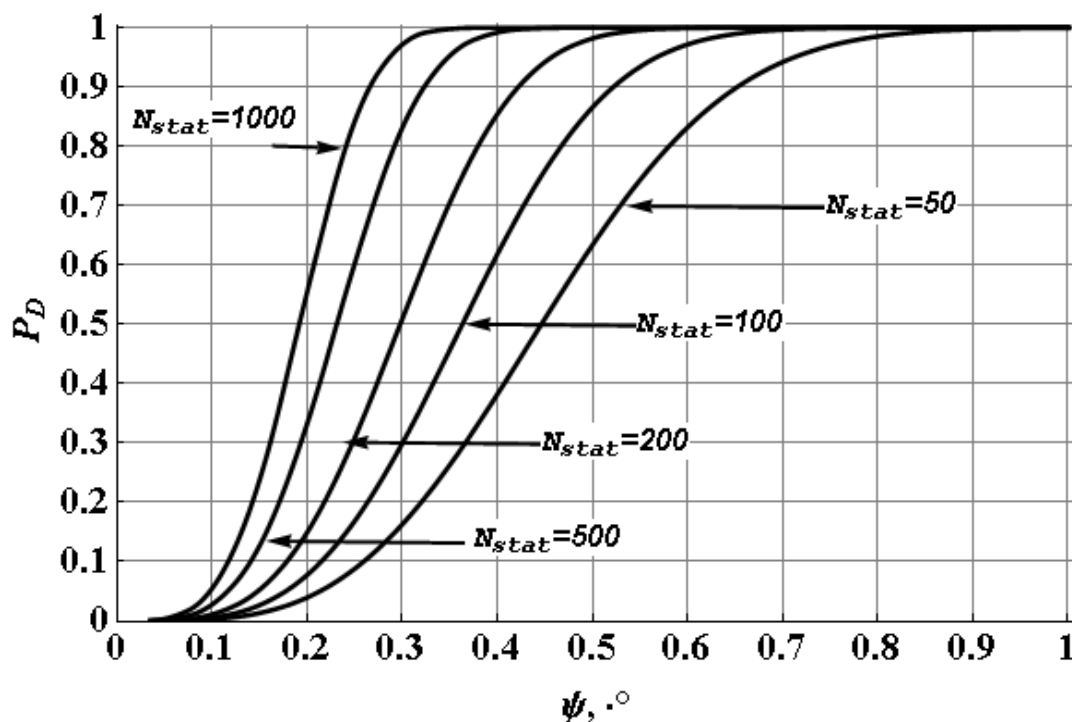


Рисунок Е.5 Зависимость вероятности правильной классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум равного 20 дБ при различном объёме выборки

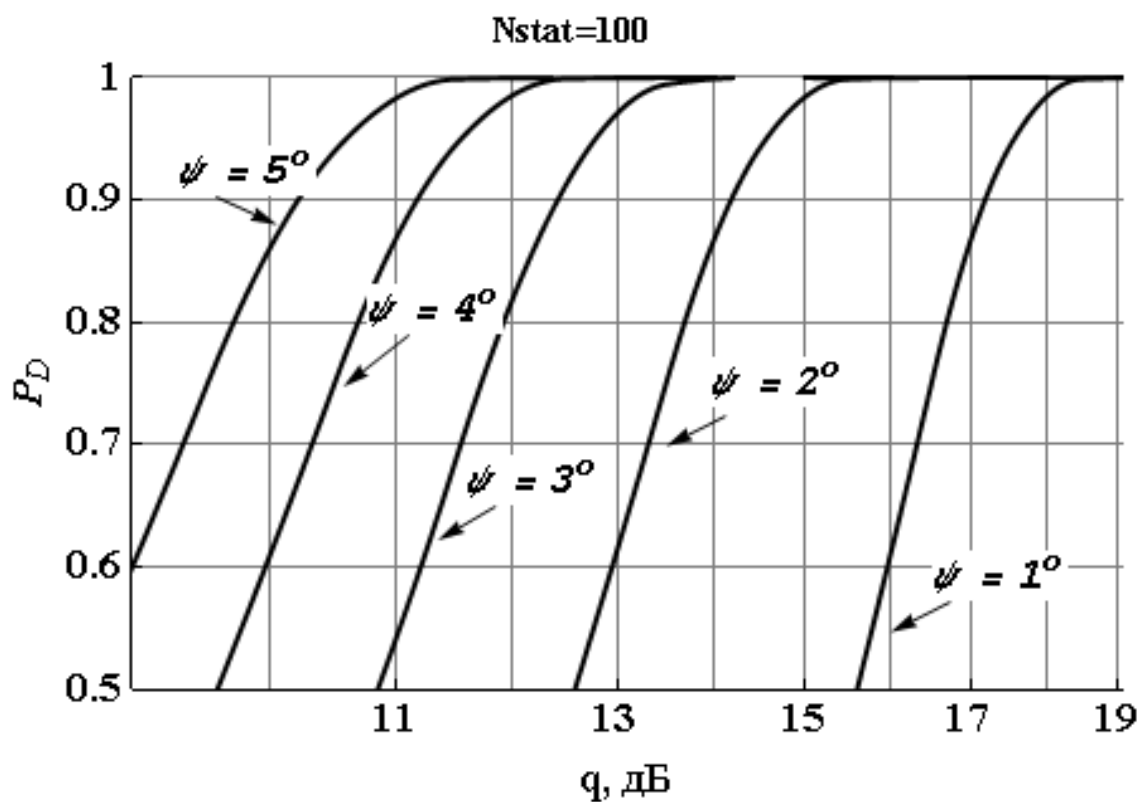


Рисунок Е.6 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 100 отсчётов

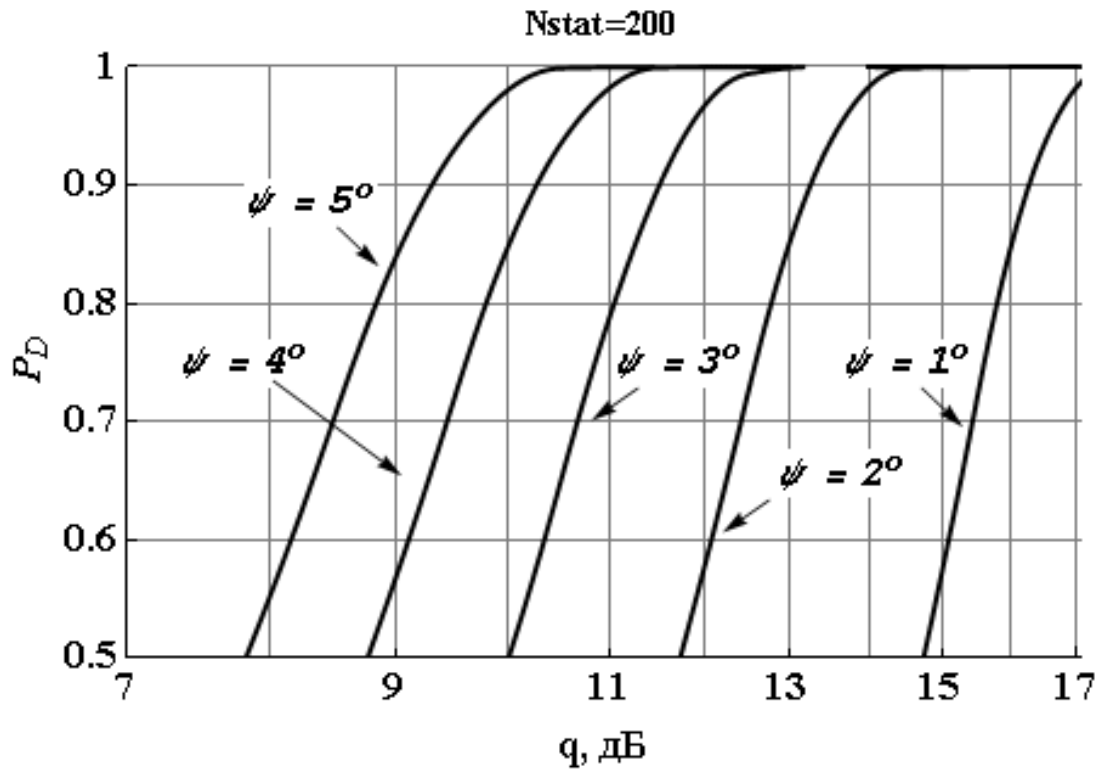


Рисунок Е.7 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объеме выборки в 200 отсчётов

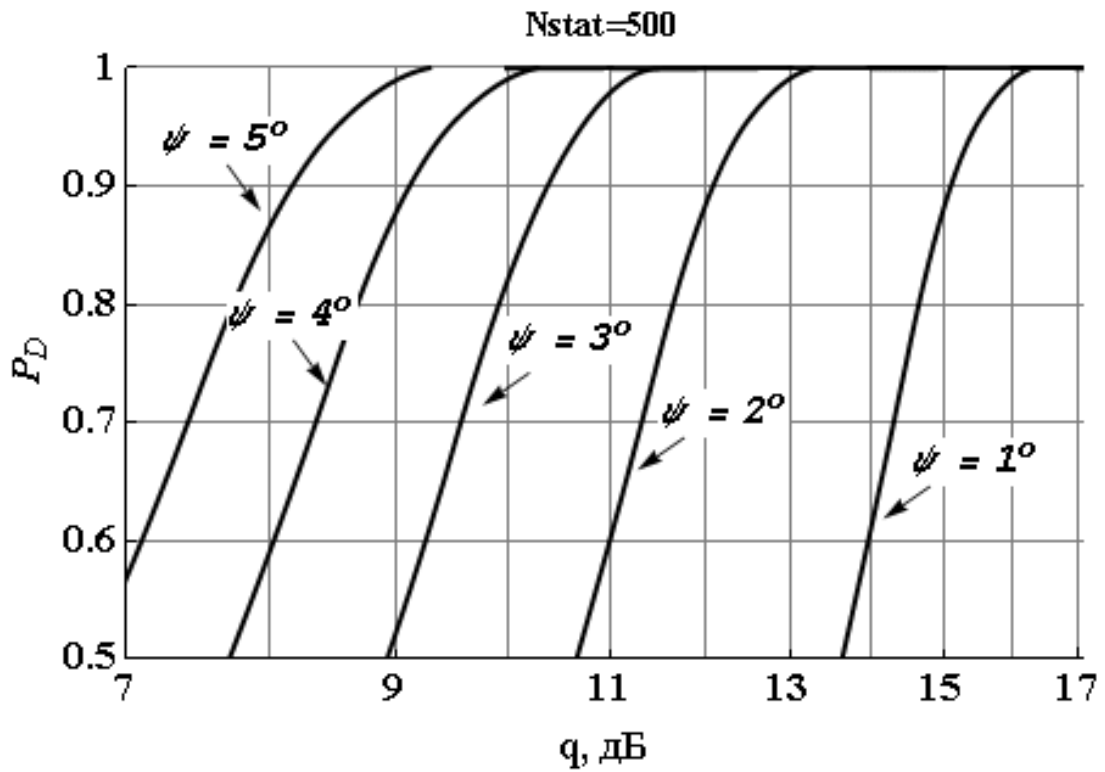


Рисунок Е.8 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объеме выборки в 500 отсчётов

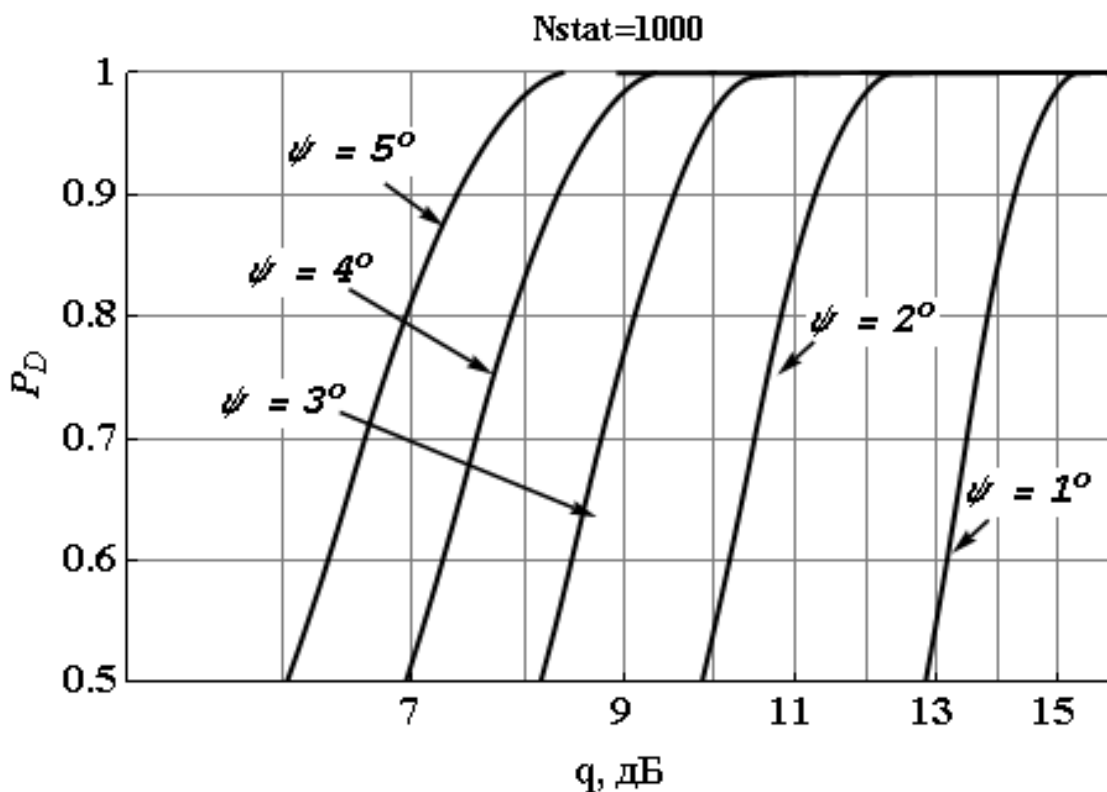


Рисунок Е.9 Зависимость вероятности правильной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 1000 отсчётов

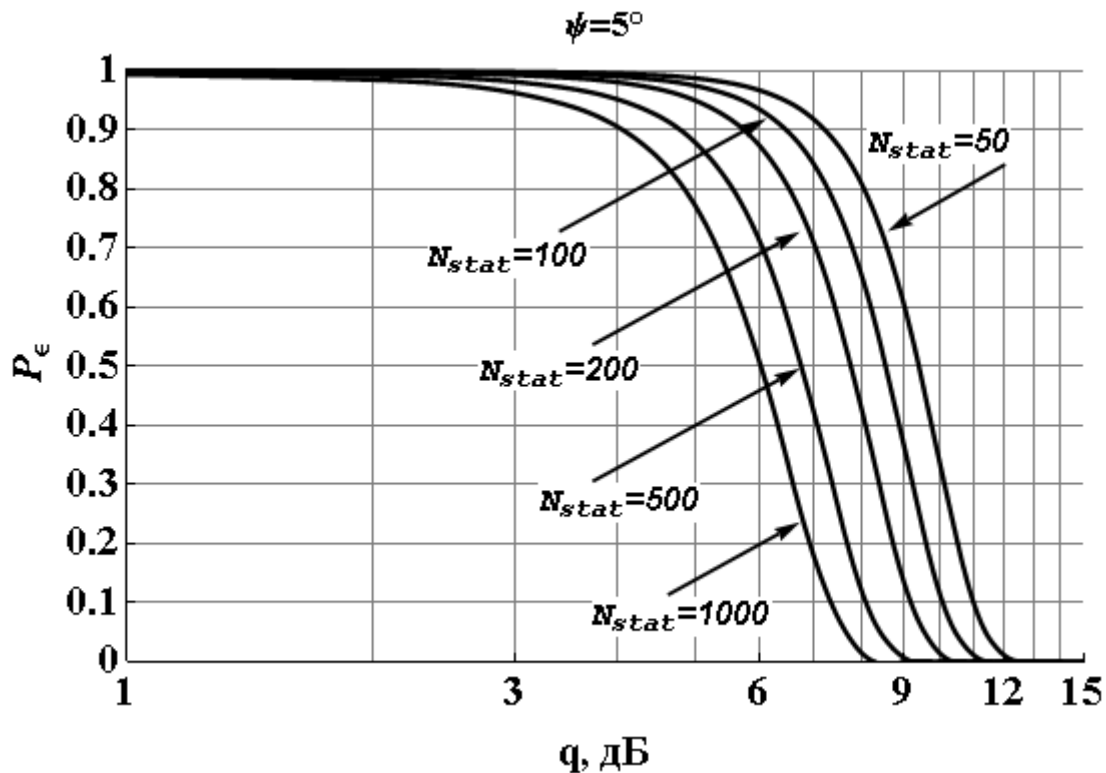


Рисунок Е.10 Зависимость вероятности полной ошибки классификации от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = 5^\circ$



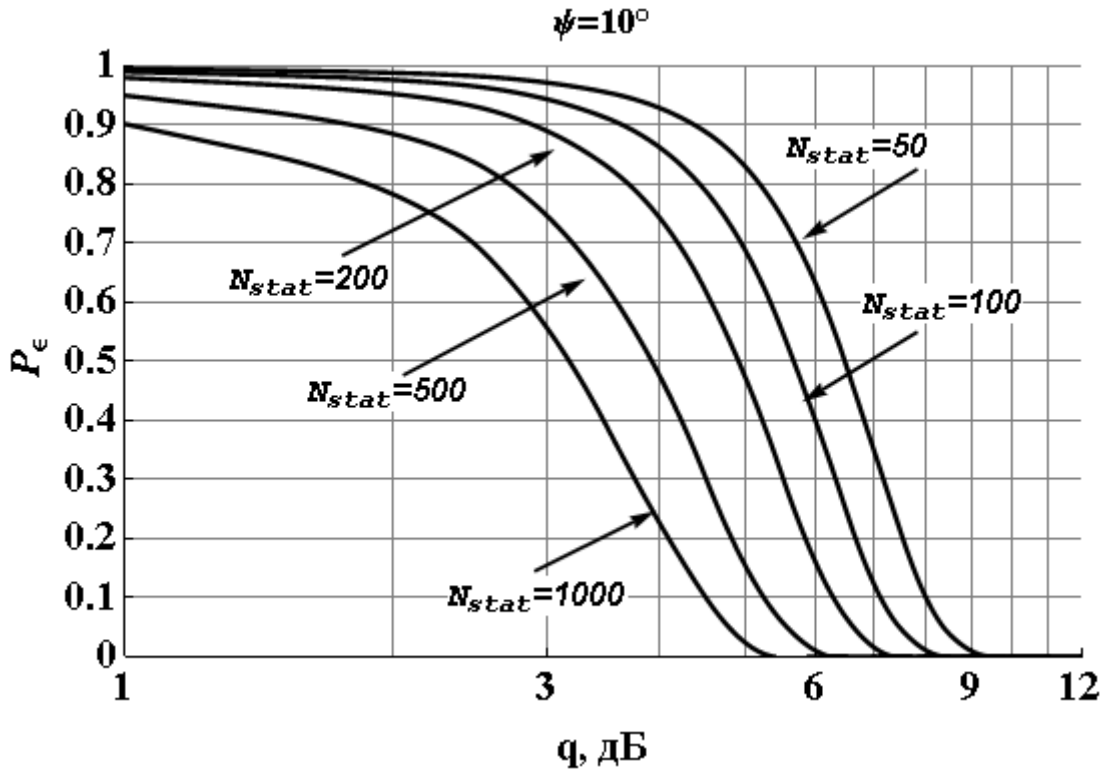


Рисунок Е.11 Зависимость вероятности полной ошибки классификации от отношения сигнал/шум при различном объёме выборки и истинном значении интегральной разности фаз  $\psi = 10^\circ$

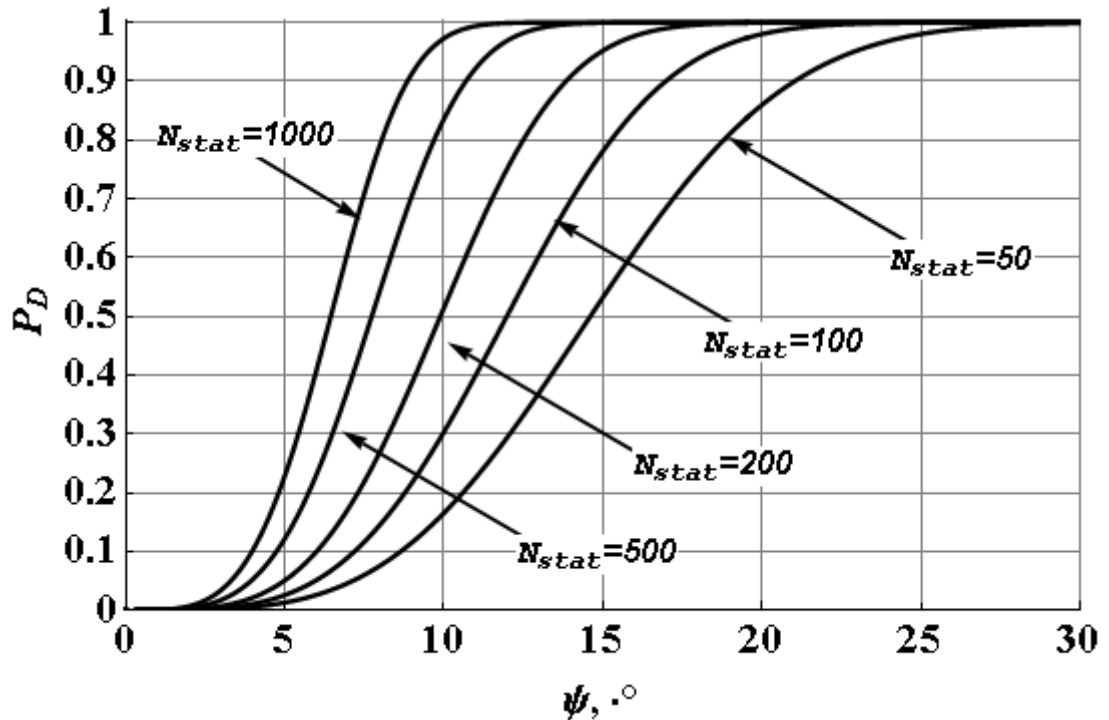


Рисунок Е.12 Зависимость вероятности полной ошибки классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум равного 5 дБ при различном объёме выборки

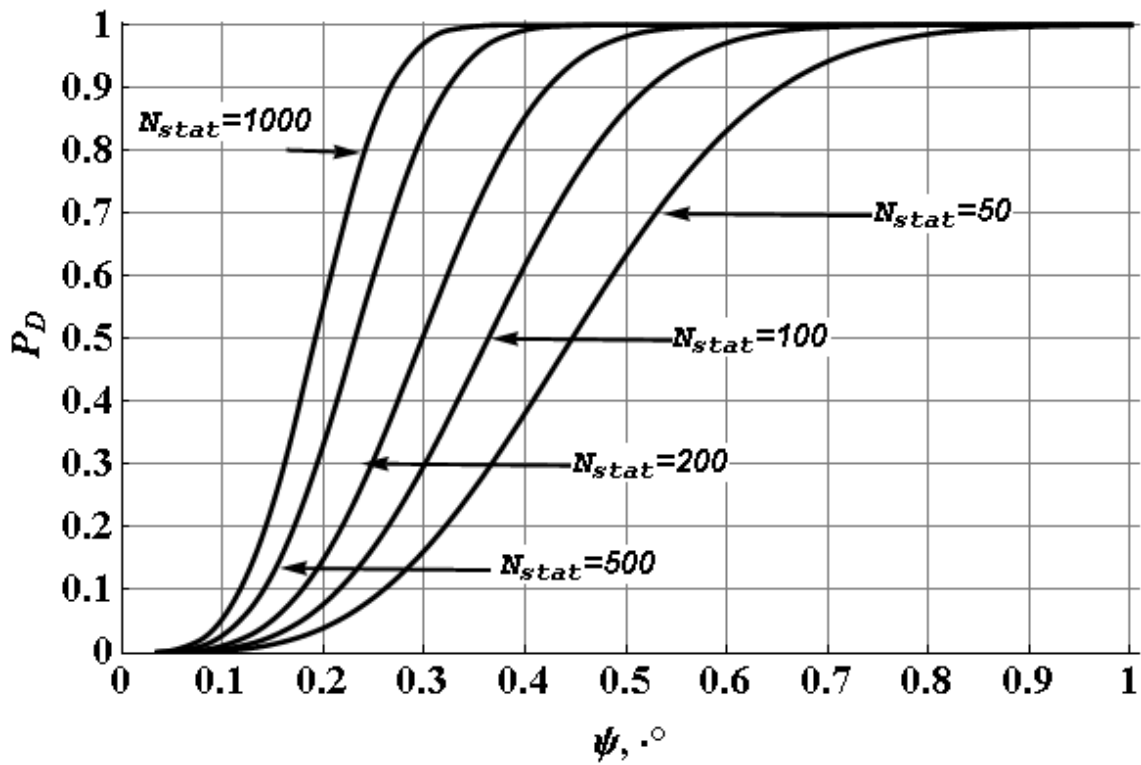


Рисунок Е.13 Зависимость вероятности полной ошибки классификации от истинного значения интегральной разности фаз для случая отношения сигнал/шум равного 20 дБ при различном объёме выборки

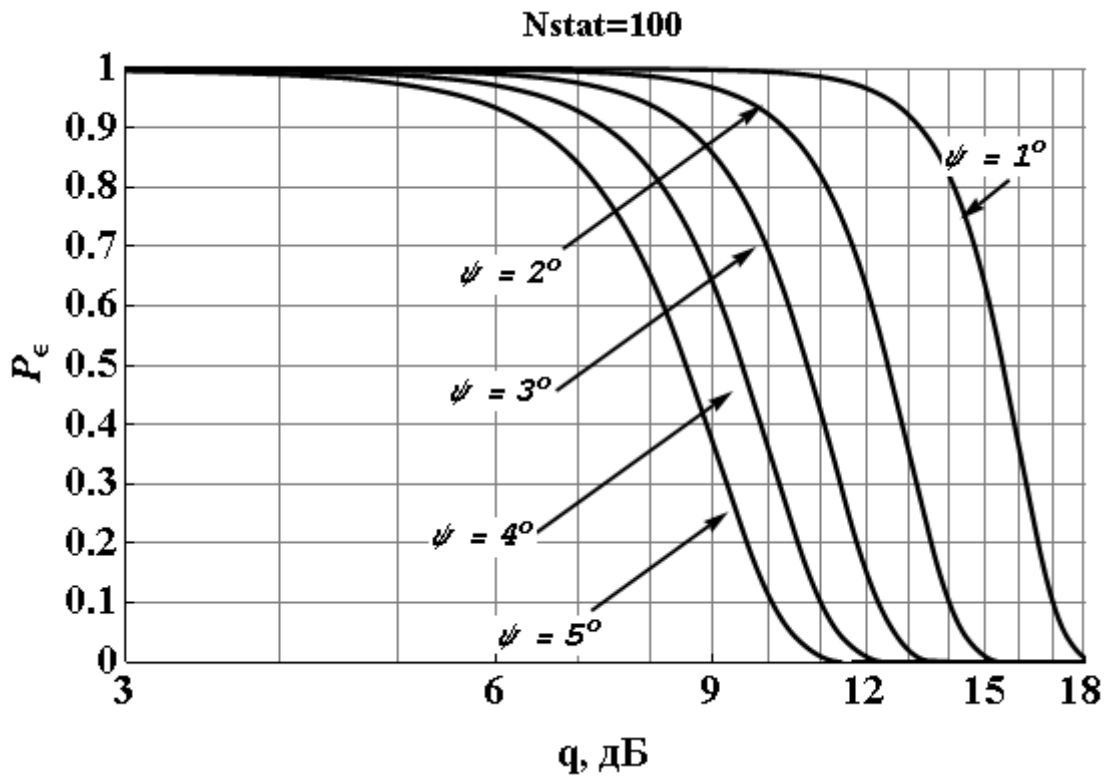


Рисунок Е.14 Зависимость полной вероятности ошибочной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 100 отсчётов

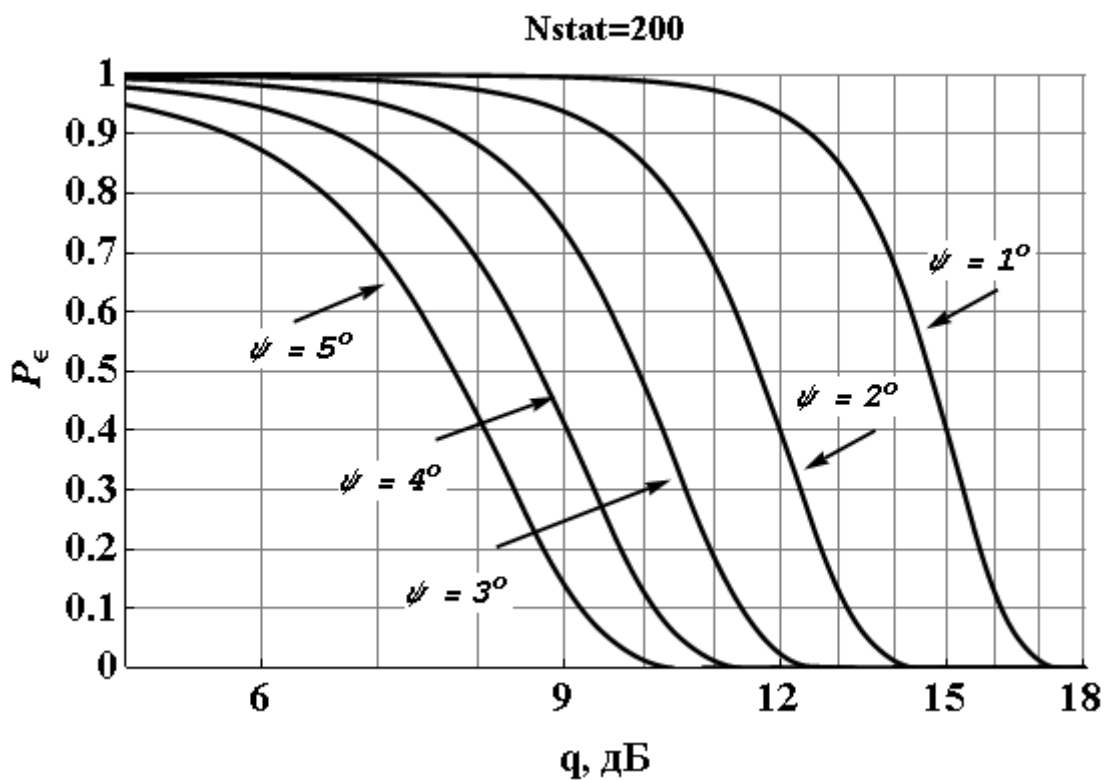


Рисунок Е.15 Зависимость полной вероятности ошибочной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 200 отсчётов

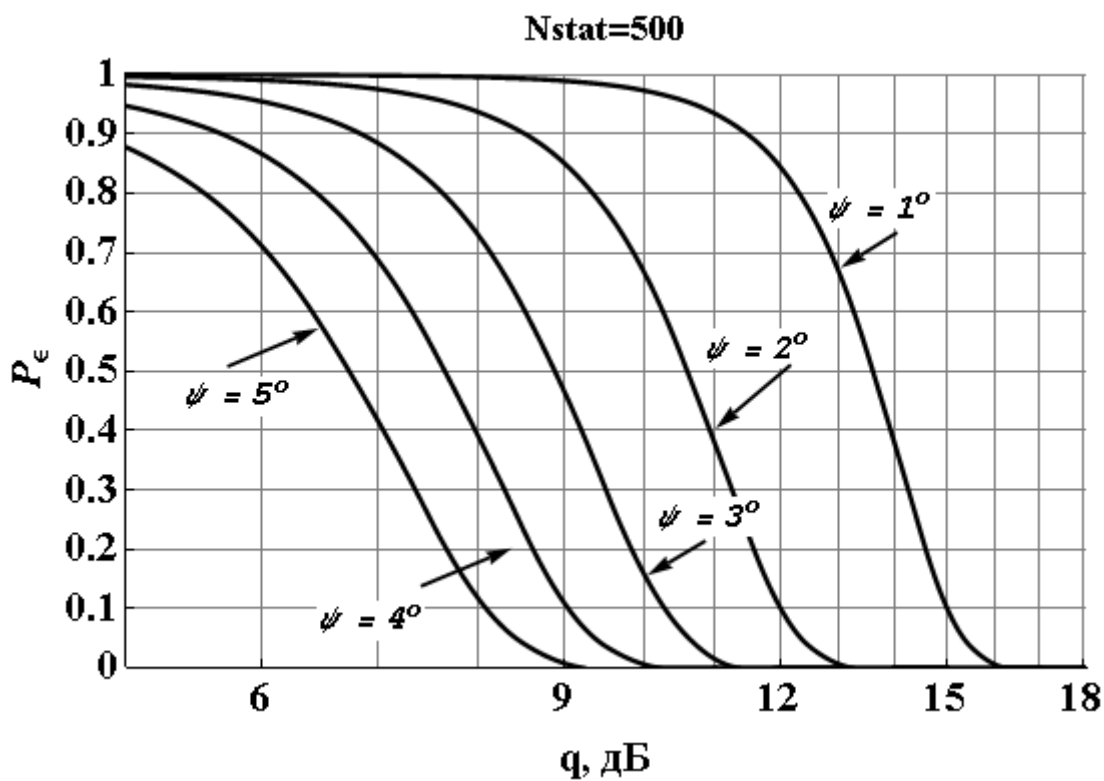


Рисунок Е.16 Зависимость полной вероятности ошибочной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 500 отсчётов

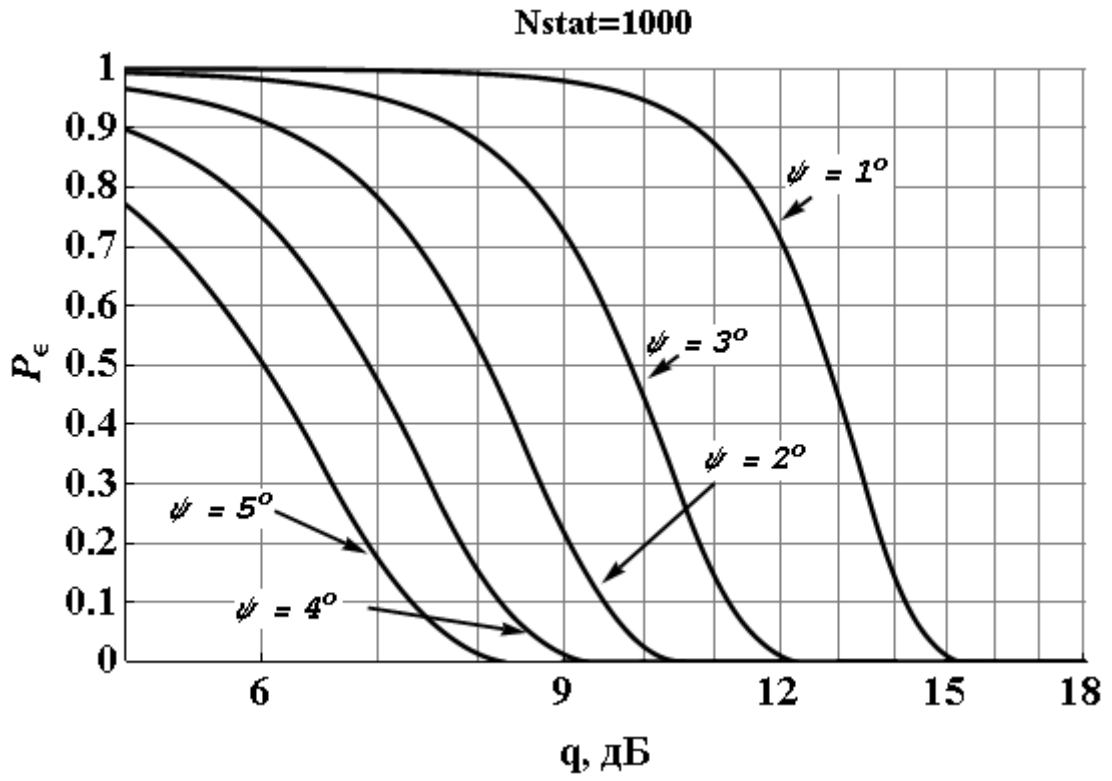


Рисунок Е.17 Зависимость полной вероятности ошибочной классификации от отношения сигнал/шум для различной истинной интегральной разности фаз при объёме выборки в 1000 отсчётов

## Приложение Ж

### Экспериментальная апробация рассматриваемого эталонно-фазового метода

#### Описание экспериментальной установки

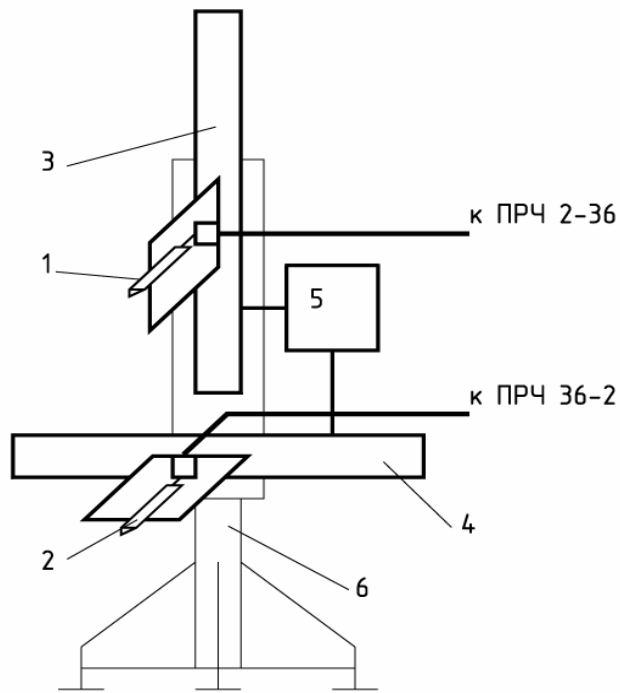
Для экспериментальной апробации предлагаемого метода системой голографического радиовидения была зарегистрирована радиоголограмма фольгированного кругового цилиндра диаметром 0,4 м и высотой 1,1 м, находящегося на расстоянии  $z=21,1$  м от системы. Система голографического радиовидения (рисунки Ж.1, Ж.2) разработана коллективом авторов Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова и представляет собой приёмопередатчик, излучающий и когерентно по квадратурной схеме принимающий квазимонохроматические сигналы, частота которых изменяется во времени дискретно в полосе перестройки 800 МГц (средняя длина волны  $\lambda=8$  мм, количество значений частоты может изменяться, в данном эксперименте 101), синтезируемая апертура  $A=0,5$  м.

Объект выбран типичный для тестирования радиоголографических методов — металлизированный (для демонстрации возможности оценки одного радиуса, при этом электродинамические параметры считаются известными) цилиндр (рис Ж.3). Так как в эталонных методах в базу эталонов заносится каждый из ракурсов и к ним последовательно применяется один и тот же метод обработки, то объект сделан неподвижным.

Основные параметры экспериментальной установки сведены в таблицу Ж.1

Таблица Ж.1

Объект	Фольгированный круговой цилиндр
Размер объекта	Радиус 0,4 м ( $23,5\lambda$ ), высота 1,1 м
Расстояние до объекта	21,2 м
Сигнал	Квазимонохроматический с дискретной перестройкой частоты в полосе 800 МГц
Средняя длина волны	0,008 м
Количество частот	101
Аппаратная азимутальная разрешающая способность	$50\lambda$



1 – излучающая антенна; 2 – приемная антенна; 3 – устройство сканирования излучающей антенны; 4 – устройство сканирования приемной антенны; 5 – блок управления устройствами сканирования излучающей и приемной антенн;  
6 – несущая конструкция антенной системы

Рисунок Ж.1 Экспериментальная СГРВ



Рисунок Ж.2 Фотография экспериментальной СГРВ



Рисунок Ж.3 Фотография проведения эксперимента

### Экспериментальная апробация минимально-фазового метода

При проведении апробации минимально-фазового метода на описанной выше экспериментальной установке для подтверждения возможности использования модели шумовой обстановки, рассматриваемой в главе 1, в первую очередь были зарегистрированы гистограммы распределения амплитуды и фазы шума в приёмном тракте экспериментальной СГРВ, изображённые на рисунках Ж.4 и Ж.5.

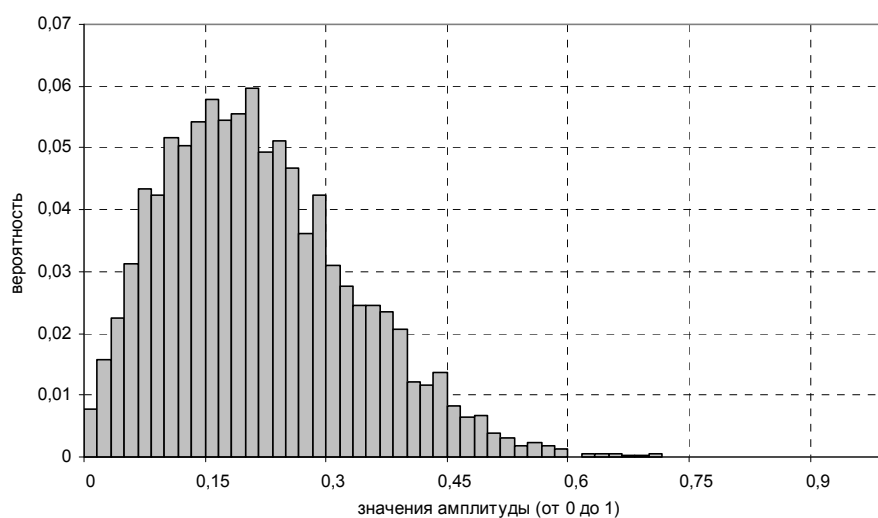


Рисунок Ж.4 Гистограмма распределения амплитуды шума в приёмном тракте экспериментальной СГРВ

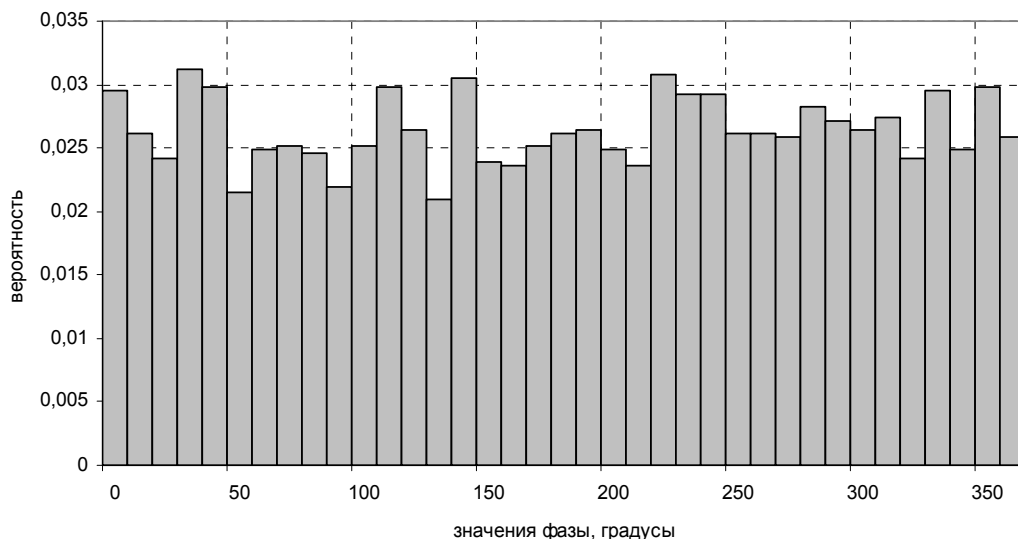


Рисунок Ж.5 Гистограмма распределения фазы шума в приёмном тракте экспериментальной СГРВ

На основе полученных результатов была проверена гипотеза о нормальности распределения синфазной и квадратурной шумовых компонент (Рэлеевском распределении огибающей и равномерности распределения фазы).

В качестве эталонных объектов были выбраны идеально проводящие круговые цилиндры. Дальность до объекта и его местоположение считались заданными.

Исходя из отношения сигнал/шум в зарегистрированной радиоголограмме был выбран большой объём статистической выборки – 5000 отсчётов на один ракурс.

Для обеспечения работы системы в режиме реального времени для оценки интегральной разности фаз между зарегистрированной радиоголограммой и набором эталонов, был выбран метод моментов (так как объём выборки слишком велик для использования метода максимального правдоподобия).

Оценка количества операций и времени работы метода приведена в таблице Ж.2. Количество точек на приёмной апертуре – 21. Количество эталонов – 50 в диапазоне от  $5\lambda$  до  $55\lambda$ .

Таблица Ж.2

Оценка количества операций	$O(N \log_2 N)$ , $N = N_\phi N_{et} N_{stat}$ , где $N_\phi$ – количество точек на приёмной апертуре, $N_{et}$ – количество эталонов, $N_{stat}$ – объём статистической выборки.
Оценка скорости работы	0,5 с (ПК Pentium III с тактовой частотой 1,2 ГГц)



Минимальное значений, принятое за искомую оценку радиуса, составило  $\hat{R}_{ob} = 16\lambda$ .

В ходе апробации требовалось получить двумерное изображение и оценить размеры объекта.

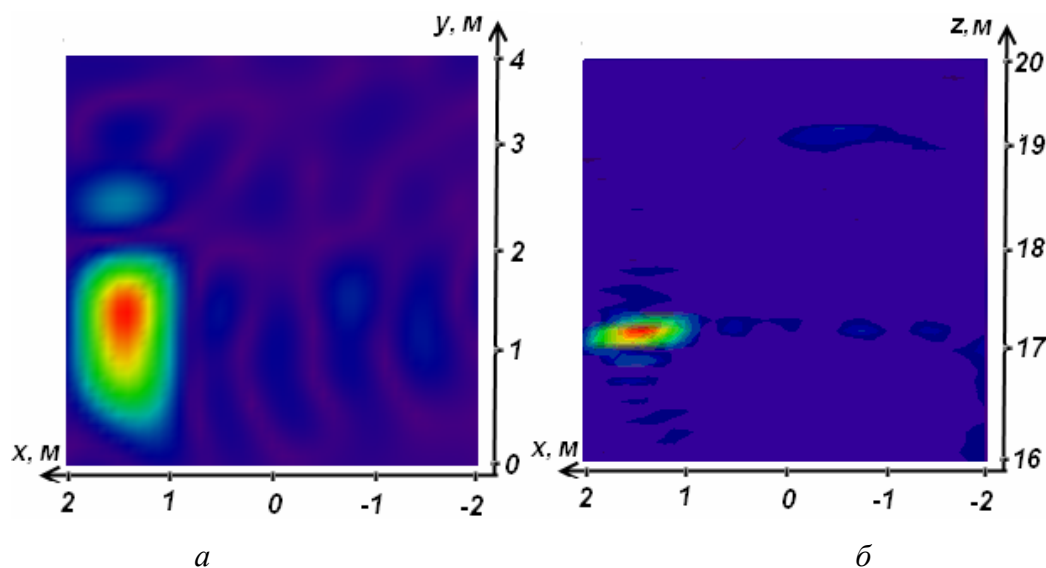


Рисунок Ж.6 Радиоизображение цилиндра:

а – в плоскости XY; б – в плоскости XZ (вид сверху)

На первом этапе производилось восстановление изображения по радиоголограмме (рисунок Ж.6 а)). Аппаратная азимутальная разрешающая способность  $\delta = \frac{\lambda z}{A}$  составила  $42,2\lambda$ , изображение имеет низкое качество. Последующее восстановление трехмерного изображения (результаты здесь не приводятся) позволило предположить, что форма объекта — круговой цилиндр.

На втором этапе методами спектрального анализа была произведена оценка дальности до объекта (рис. Ж.6 б))  $\hat{z} = 21$  м, а методами цифровой обработки изображения (ЦОИ) — определение местоположения объекта по оси x,  $\hat{x} = 1,85$  м.

На третьем этапе по восстановленному амплитудному изображению методами ЦОИ производилась оценка радиуса цилиндра. Она составила  $35\lambda$ .

Дальнейшая обработка проводилась эталонным фазовым методом. Исходя из значения предварительной оценки, на четвёртом этапе была построена классификационная сетка радиусов, необходимая для работы эталонного фазового метода.

Затем эталонным фазовым методом с использованием оценок  $\hat{z}$ ,  $\hat{x}$  была произведена уточняющая оценка радиуса цилиндра. Для этого были оценены модули аргументов скалярных произведений зарегистрированной радиоголограммы и предварительно полученных путём моделирования эталонных полей от эталонных цилиндров. Минимальное из значений было

принято за искомую оценку радиуса —  $\hat{R}_{ob} = 16\lambda$ . При истинном значении  $23,5\lambda$  ошибка оценки составила  $7,5\lambda$ , что соответствует превышению аппаратной азимутальной разрешающей способности в 6,7 раз.

В конце обработки на рисунке Ж.7 нанесены границы цилиндра — сплошная — по истинному радиусу, пунктирная — по оцененному.

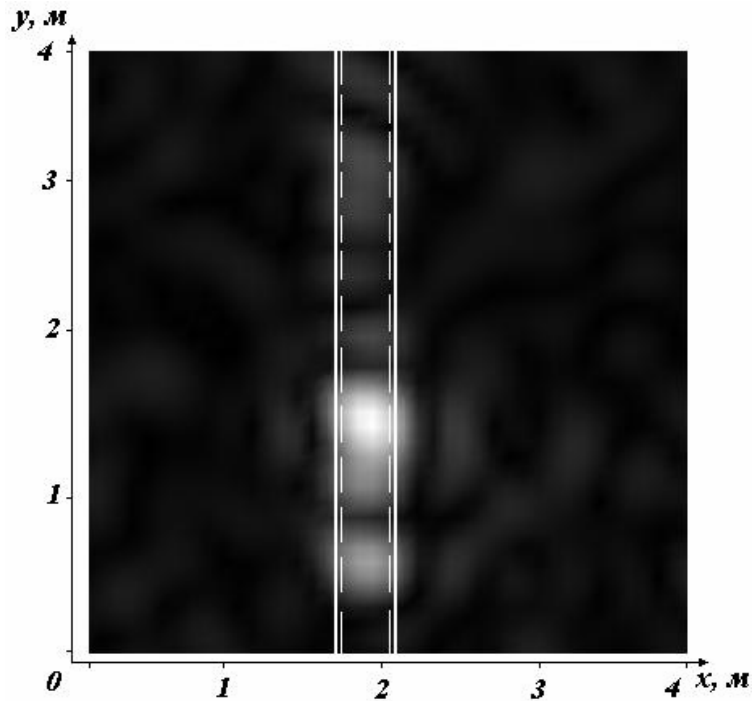


Рисунок Ж.7. Радиоизображение цилиндра

Таким образом, в ходе эксперимента получены грубое и уточнённое двумерные изображения цилиндра, грубая и более точная оценки размеров цилиндра (более точная — лучше аппаратной разрешающей способности).