

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Хрипушин Денис Александрович

**ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРЕЖАЮЩИХ ИНДИКАТОРОВ
НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАТОРОВ**

Специальность 2.3.1. Системный анализ,
управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
д.т.н., доц. А. В. Дылевский

Воронеж—2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Проблема прогнозирования параметров процессов	9
1.1. Современные методы прогнозирования параметров процессов	9
1.2. Проблема построения прогнозаторов	13
1.3. Постановка задачи	26
1.4. Выводы по главе 1	27
Глава 2. Построение автоматических прогнозаторов	28
2.1. Дробно-рациональная аппроксимация передаточных функций	28
2.1.1. Аппроксимация аналитических передаточных функций отрезком ряда Тейлора	28
2.1.2. Применение рядов Бурмана-Лагранжа для аппроксимации аналитических функций	32
2.2. Построение прогнозаторов	36
2.2.1. Построение реализуемых прогнозаторов	37
2.2.2. Исследование точности реализуемых прогнозаторов	41
2.2.3. Построение модальных прогнозаторов	46
2.2.4. Построение дифференцирующих наблюдателей	53
2.2.5. Исследование точности модальных прогнозаторов	60
2.3. Выводы по главе 2	64
Глава 3. Построение опережающих индикаторов	65
3.1. Опережающие индикаторы	65

3.2. Построение опережающих индикаторов с помощью реализуемого прогнозатора	74
3.3. Построение опережающих индикаторов с помощью модального прогнозатора	82
3.4. Пример прогнозирования для задачи траекторного сопровождения	91
3.5. Пример прогнозирования доходностей валютного курса	93
3.6. Пример прогнозирования хаотического сигнала	94
3.7. Выводы по главе 3	104
Заключение	105
Список обозначений	107
Список литературы	108

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Как известно, любые процессы или явления характеризуются некоторыми параметрами. В связи с этим во многих областях возникают задачи прогнозирования параметров. Например, прогнозирование цены на какой-либо финансовый инструмент, прогнозирование числа заболевших определенной болезнью, прогнозирование температуры воздуха или количества осадков и т.д. Следует отметить, что благодаря применению автоматических систем, задачи прогнозирования параметров могут быть эффективно решены без непосредственного участия человека. Актуальность темы диссертационного исследования определяется необходимостью автоматического прогнозирования параметров различных процессов и явлений.

Известно, что идеальный прогнозатор имеет трансцендентную передаточную функцию. Такие передаточные функции являются бесконечномерными. Это представляет собой основную проблему при анализе и синтезе систем управления. Наиболее простым и эффективным способом решения этой проблемы можно считать аппроксимацию бесконечномерной передаточной функции с помощью дробно-рациональной функции конечного порядка. Выбор в качестве аппроксимирующих моделей дробно-рациональных функций объясняется тем, что, во-первых, вопросы аппроксимации дробно-рациональными функциями в комплексной области являются достаточно хорошо изучены в математической литературе, во-вторых, применение дробно-рациональных аппроксимаций дает возможность решать задачи анализа и синтеза систем управления бесконечномерными объектами с помощью хорошо развитых методов теории автоматического управления сосредоточенными объектами.

Наибольшее распространение получили следующие методы аппроксимации идеального прогнозатора: форсирующими или инерционными звеньями на основе следствия второго замечательного предела [47], разложения экспоненциальной функции в ряд Тейлора и аппроксимации Паде. Недостатками рассмотренных подходов к решению задач прогнозирования являются: неустойчивость полученных аппроксимаций, как в случае со следствием из второго замечательного предела и аппроксимацией Паде; неосуществимость реализации идеального дифференцирующего звена [25], как в случае с разложением в ряд Тейлора. Метод аппроксимации Паде [7] отмечается более высокой скоростью сходимости к экспоненциальной функции и более высокой точностью в сравнении с

разложением в ряд Тейлора.

Степень разработанности темы диссертации. Необходимость в прогнозировании привела к созданию различных методов прогнозирования. Методы прогнозирования по степени формализации можно разделить на интуитивные и формализованные. К интуитивным методам относятся методы индивидуальных и коллективных экспертных оценок. Формализованные методы делятся на экстраполяционные, структурные, математические, ассоциативные методы, а также методы опережающей информации. Экстраполяционные и математические методы являются наиболее проработанными в научной литературе.

Традиционные методы прогнозирования временных рядов рассматривались в работах С. В. Арженоского, В. Н. Афанасьева, Г. М. Гамбарова, Т. А. Дуброва, Ю. П. Лукашина и основаны на статистических моделях и состоят в определении основных параметров временного ряда, влияющих на динамику ряда, и последующей экстраполяции по известным предыдущим и текущим значениям. Статистические модели применимы, в основном, для получения краткосрочных прогнозов. Выделяют следующие основные группы методов: сглаживание (сглаживание простой скользящей средней, взвешенной скользящей средней, экспоненциальное сглаживание и их разновидности); аналитическая оценка неслучайной составляющей (автокорреляция уровней, прогнозирование по линии тренда, прогнозирование периодической компоненты); авторегрессионные модели (AR, ARMA, ARIMA и др.); адаптивные модели (полиномиальные, многопараметрические); методы прогнозирования систем временных рядов (трендовая модель системы временных рядов, совместная гармоническая модель, модель векторной авторегрессии).

Цель и задачи исследования. Основной целью настоящей работы является построение опережающих индикаторов для достаточно широкого класса сигналов. Опережающие индикаторы должны автоматически вычислять прогноз произвольного, заранее неизвестного сигнала на заданное время упреждения. Построенные индикаторы должны быть физически реализуемыми и обладать устойчивостью. Кроме того, опережающие индикаторы должны допускать простую техническую реализацию.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи.

- 1) В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получить аппроксимацию идеального упредителя.
- 2) На основе аппроксимации идеального упредителя синтезировать автомати-

ческое устройство прогнозирования (прогнозатор).

- 3) Исследовать точность прогнозирования для заданных классов сигналов.
- 4) Разработать способ построения опережающих индикаторов с помощью синтезированных прогнозаторов.

Объект исследования. Объектом исследования является разработка методов и алгоритмов решения задач обработки информации и автоматического прогнозирования заданного класса сигналов.

Предмет исследования. Автоматические прогнозаторы, обеспечивающие прогноз некоторого класса сигналов при заданном времени упреждения.

Методология и методы исследования. В работе систематически используются понятия и методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости, линейной алгебры, математического анализа, теории автоматического управления, теории приближения функций действительного переменного.

Научная новизна. Среди полученных в диссертации результатов отметим следующие:

- 1) В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получены аппроксимации идеального упредителя;
- 2) Впервые разработаны способы построения автоматических прогнозаторов - реального и модального прогнозаторов;
- 3) Исследована точность построенных прогнозаторов и показано, что для заданного класса сигналов может быть достигнута любая, наперед заданная, точность прогнозирования за счет увеличения порядка прогнозатора;
- 4) На основе синтезированных реального и модального прогнозаторов разработаны способы построения опережающих индикаторов.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Содержание работы соответствует областям исследования специальности 2.3.1 Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации имеют теоретическое и практическое значение, так как разработанные методы построения прогнозаторов и опережающих индикаторов широкого

класса сигналов позволяют решать актуальные задачи прогнозирования параметров различных процессов, а также дают возможность синтезировать высококачественные автоматические системы.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

- 1) В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получены аппроксимации идеального упредителя.
- 2) Разработаны способы построения автоматических прогнозаторов.
- 3) Заданная точность прогнозирования для определенного класса входных сигналов может быть обеспечена за счет выбора порядка и параметров прогнозатора.
- 4) Модальный прогнозатор при определенных коэффициентах является дифференцирующим наблюдателем.
- 5) Разработаны способы построения опережающих индикаторов.

Степень достоверности результатов работы. Достоверность результатов следует из применения строгих математических методов и известных теоретических оценок погрешностей численных решений и на основании вычислительных экспериментов. Достоверность результатов подтверждается сравнением полученных решений с известными результатами других авторов.

Апробация работы. Основные материалы по всем разделам диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- 1) I международной научно-практической конференции «Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований» (г. Новосибирск, 2022 г.)
- 2) XVII международной научно-практической конференции «Экономическое прогнозирование: модели и методы» (г. Воронеж, 2022 г.)
- 3) II международной научно-практической конференции «Современные технологии: тенденции и перспективы развития» (г. Петрозаводск, 2021 г.)
- 4) X международной научно-практической конференции «Общество и экономическая мысль в XXI в.: пути развития и инновации» (г. Воронеж, 2022 г.)

5) XXIII Международная научно-практическая конференция «Информатика: проблемы, методы, технологии» (г. Воронеж, 2023 г.)

Публикации По теме диссертации опубликовано 11 работ [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 71, 72], в том числе в изданиях, рекомендованных ВАК – 3, и 1 – в изданиях, индексируемых в Scopus (Q2).

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в разработке и проведении теоретических и экспериментальных исследований, а также анализе полученных результатов. Результаты, представленные в диссертации, получены при непосредственном участии автора на этапах постановки задач и разработки экспериментальных и теоретических методов для их решения, обработки полученных данных. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась автором как самостоятельно, так и в соавторстве, причем вклад диссертанта был определяющим. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем.

Структура и содержание диссертации. Диссертация содержит: введение, три главы, заключение, список обозначений, список литературы. В конце каждой главы приведены выводы по главе. Диссертация изложена на 117 страницах основного текста, содержит 2 таблицы, 64 рисунка, список литературы из 119 наименований.

Кратко опишем содержание диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели, задачи, методы исследования и основные результаты диссертации. Кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе рассматривается проблема прогнозирования параметров различных процессов, приводятся историко-библиографические справки, ссылки на основные работы. Ставится исследовательская задача.

Во второй главе рассматриваются вопросы аппроксимации идеального упреждителя дробно-рациональными функциями. Приводятся методы построения реализуемых прогнозаторов.

Третья глава посвящена построению опережающих индикаторов с помощью автоматических прогнозаторов.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

ПРОБЛЕМА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССОВ

1.1. Современные методы прогнозирования параметров процессов

Как известно, любые процессы или явления характеризуются некоторыми параметрами. В связи с этим во многих областях возникают задачи прогнозирования параметров: прогнозирование цены на какой-либо финансовый инструмент, прогнозирование числа заболевших определенной болезнью, прогнозирование температуры воздуха или количества осадков и т.д. Необходимость в прогнозировании привела к созданию различных методов прогнозирования. Согласно [66] насчитывается свыше 100 методов прогнозирования. Существует большое количество классификационных схем методов прогнозирования. Одна из них, предлагаемая в [11, 66], представлена на рис. 1. Рассмотрим наиболее распространенные методы.

Методы прогнозирования по степени формализации можно разделить на интуитивные и формализованные [11, 66]. К интуитивным методам относятся методы индивидуальных и коллективных экспертных оценок. Как отмечается в [9], эти методы применяются тогда, когда объект прогнозирования либо слишком прост, либо настолько сложен, что аналитически учесть влияние многих факторов практически невозможно. Формализованные методы делятся на: экстраполяционные, системно-структурные, математические, ассоциативные методы, а также методы опережающей информации. Экстраполяционные и математические методы являются наиболее проработанными в научной литературе. Экстраполяционные методы основываются на анализе временных рядов и делятся на традиционные методы, методы на основе нечеткой логики и методы на основе нейронных сетей [57, 110].

Традиционные методы прогнозирования временных рядов [3, 4, 9, 14, 17, 22, 42, 43, 51, 52, 58, 75, 90, 85, 86, 108, 115] основаны на статистических моделях и состоят в определении основных параметров временного ряда, влияющих на динамику ряда, и последующей экстраполяции по известным предыдущим и текущим значениям. Статистические модели применимы, в основном, для получения краткосрочных прогнозов. Выделяют следующие основные группы методов:

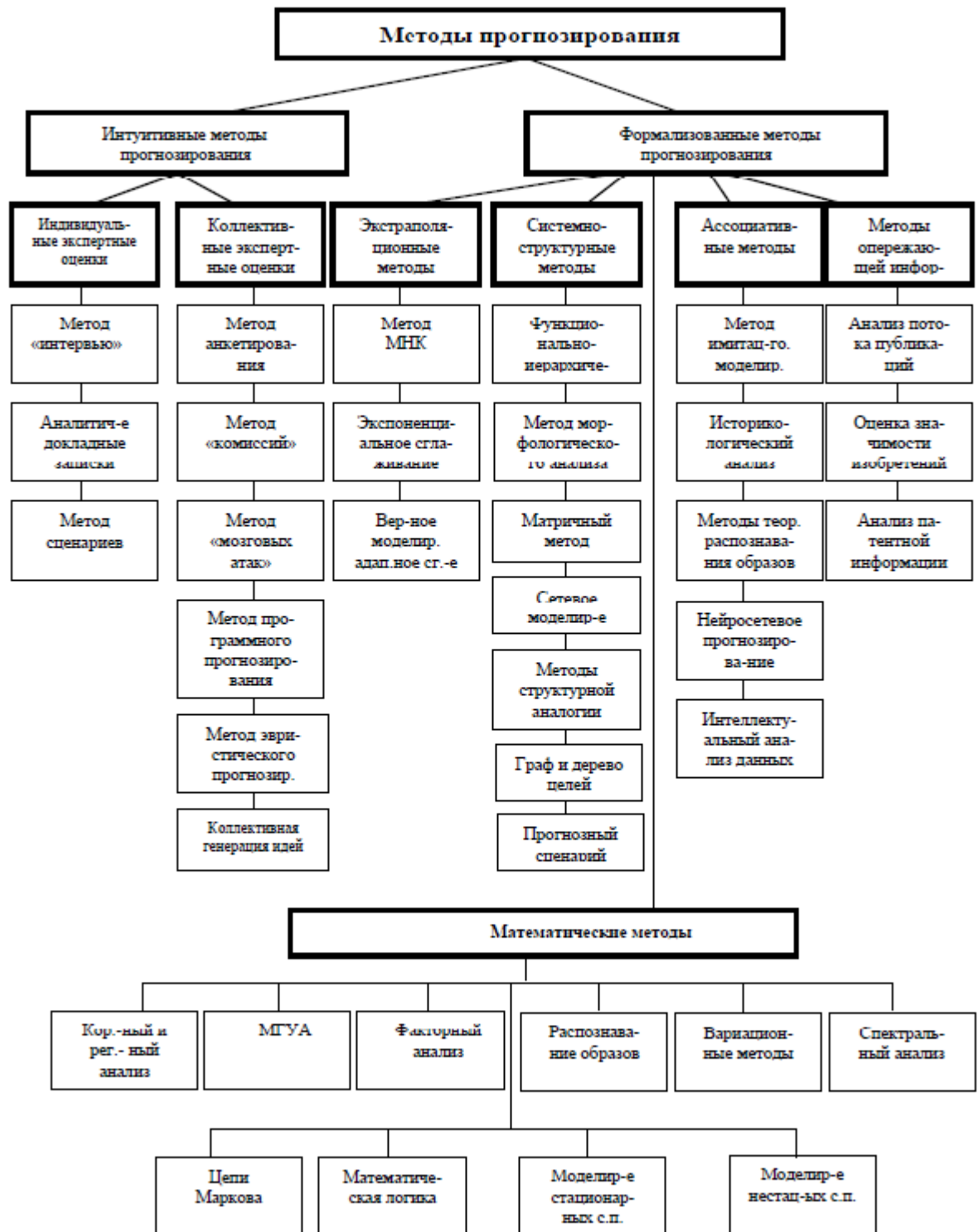


Рис. 1. Схема классификации методов прогнозирования

- сглаживание (сглаживание простой скользящей средней, взвешенной скользящей средней, экспоненциальное сглаживание и их разновидности) [9, 104];
- аналитическая оценка неслучайной составляющей [79, 86, 115] (автокорреляция уровней [46], прогнозирование по линии тренда [99, 116, 119], прогнозирование периодической компоненты [3]);
- авторегрессионные модели (AR, ARMA, ARIMA и др.) [69, 83, 110];
- адаптивные модели (полиномиальные, многопараметрические) [46, 51];
- методы прогнозирования систем временных рядов (трендовая модель системы временных рядов, совместная гармоническая модель, модель векторной авторегрессии) [46].

В настоящее время активно развиваются методы прогнозирования временных рядов, основанные на методах нечеткой логики [40, 100, 82, 109] и на машинном обучении [86, 89, 92, 96, 106, 107, 112, 115, 117]. При этом способы машинного обучения основаны большей частью на применении искусственных нейронных сетей [5, 34, 37, 38, 44, 59, 62, 74, 91, 93, 94, 95, 97, 98, 101, 102, 103, 107, 111, 113, 114, 118].

Как отмечалось выше, к формализованным методам прогноза относят и математические методы. В частности, один из подходов к решению задачи прогнозирования основан на построении математических моделей соответствующих явлений или процессов. Например, с помощью математических моделей физических процессов в атмосфере и океане были разработаны гидродинамические методы прогноза погоды [8, 56]. Однако такой подход требует описания сложных математических моделей, а также знания параметров, характеризующих рассматриваемое явление или процесс. Эти трудности существенно ограничивают применение описываемого подхода.

При нахождении прогноза некоторого сигнала $f(t)$ на время $\tau > 0$ существенное значение может иметь время вычисления прогноза Δt . Если $\Delta t > \tau$, то полученный прогноз не имеет смысла. Очевидно, что при прогнозировании надо стремиться к выполнению условия $\Delta t \ll \tau$. В этом случае будет запас времени для принятия решений. Например, построение автоматической торговой системы (торгового робота) для торговли на бирже финансовыми инструментами (акциями, фьючерсами, валютами и т.д.) по прогнозируемому значению цены инструмента требует оценки доходности и риска сделки, размера торговой позиции, оценки времени и уровня вхождения в сделку. Поэтому запас по

времени при получении прогноза может дать существенные преимущества, особенно при торговле на малых интервалах времени. Если же в силу каких-либо причин (сложности применяемой модели, большого объёма вычислений и т.д.) время Δt вычисления прогноза уменьшить нельзя, то следует либо увеличивать длительность прогноза $\tau > 0$, либо уменьшать точность прогноза (например, за счёт упрощения применяемой модели). Проиллюстрируем такой подход на примере прогноза погоды. В соответствии с классификацией методов прогнозирования погоды Всемирной метеорологической организации прогнозы делятся по заблаговременности периода на [16]:

- Прогноз текущей погоды (наукастинг) – описание текущей погоды и прогноз метеорологических параметров на срок от 0 до 2 часов (средняя точность выше 95%);
- Сверхкраткосрочные (СКПП) – прогноз метеорологических параметров на период до 12 часов (средняя точность 95-96%);
- Краткосрочные (КПП) – прогноз метеорологических параметров на период от 12 до 36 часов (3 сут.) 12-36 часов (средняя точность 85-95%);
- Среднесрочные (СПП) – прогноз метеорологических параметров на период от 36 часов до 10 суток (средняя точность 65-90%);
- Долгосрочные (ДПП) – прогноз от 10 суток до 3-х месяцев (средняя точность 60-65%);
- Сверхдолгосрочные (СДПП) – прогноз более чем 3 месяца (средняя точность около 50%).

Наукастинг и сверхкраткосрочные прогнозы погоды очень важны и обычно используются в аэропортах, морских портах, космодромах, так как внезапные порывы ветра, резкое ухудшение видимости из-за тумана или осадков могут привести к катастрофическим последствиям, большим финансовым потерям. В то же время частота составления таких прогнозов выше: среднесрочные рассчитываются по прогностическим моделям 2–4 раза в сутки, наукастинг — это непрерывный процесс, который требует больших технических ресурсов. При этом допустимое время на расчёт такого прогноза в несколько раз меньше: если оно превышает 20 минут, то прогноз не подходит для практического использования. Поэтому часто составляется прогноз не всех параметров, а только 1–2 (например, порывы ветра и туман, или порывы ветра и гроза).

В прикладных исследованиях нередко возникают ситуации, когда математическое моделирование, основанное на использовании точных законов, оказывается затруднительным, но в распоряжении исследователей появляется результат наблюдений параметров исследуемого процесса или явления. В этих случаях для решения задач прогнозирования могут быть использованы методы, основанные на анализе наблюдаемых параметров. Помимо вышеперечисленных подходов, применяются следующие методы прогнозирования [10, 36, 41, 64]:

- 1) Методы, основанные на линейной разделимости;
- 2) Методы, основанные на ядерных оценках;
- 3) Комбинаторно-логические методы и алгоритмы вычисления оценок;
- 4) Алгебраические методы;
- 5) Решающие или регрессионные деревья и леса;
- 6) Методы, основанные на опорных векторах.

Большое количество методов прогнозирования ставит перед специалистами задачу выбора методов, которые давали бы адекватные прогнозы для изучаемых процессов или систем [12, 66]. В связи с этим разрабатываются алгоритмы выбора методов для прогнозирования [23]. Следует отметить, что описанные выше методы прогнозирования допускают автоматизацию [39]. Автоматизация решения задачи прогнозирования осуществляется специальными вычислительными устройствами — экстраполяторами (прогнозаторами). Если на вход такого устройства подать некоторый сигнал, то на выходе получится упрежденное значение этого сигнала. При этом и входной, и выходной сигналы могут быть как непрерывными, так и дискретными [39]. В теории автоматического управления большое внимание уделяется задачам упреждения: для объектов с запаздыванием применяются упредители Смита и Ресвика [19, 81], предлагаются методы построения дифференцирующих и форсирующих элементов [50]. Однако построение автоматических прогнозаторов связано с рядом принципиальных трудностей, подробный анализ которых будет проведен в следующем разделе.

1.2. Проблема построения прогнозаторов

Для сигнала $f(t)$ прогнозом (упреждением) на время $\tau > 0$ является сигнал $f(t + \tau)$ (см. рис. 2).

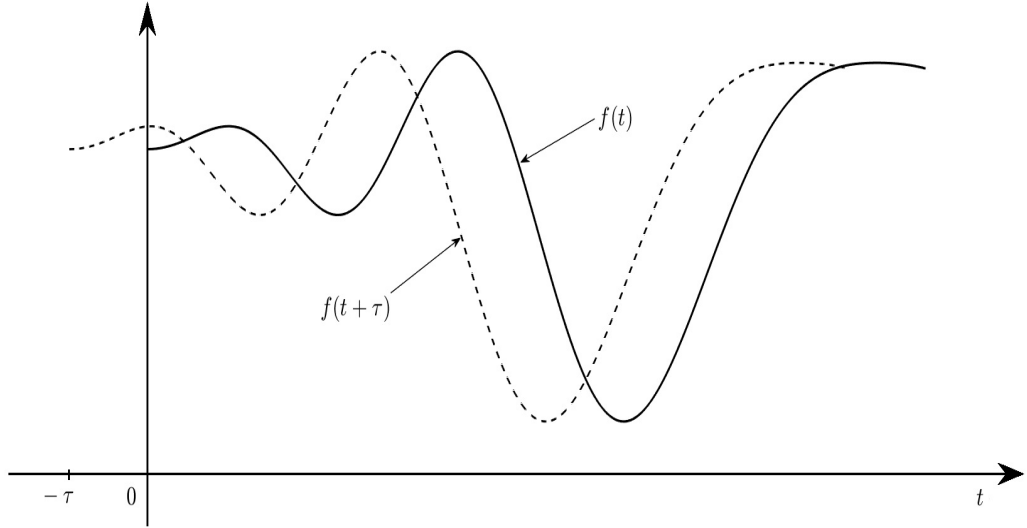


Рис. 2. Сигнал $f(t)$ и $f(t + \tau)$

Определение 1.1. Преобразованием Лапласа (изображением по Лапласу) функции $f(t)$ вещественной переменной t называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p = \sigma + i\omega$, $j = \sqrt{-1}$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, такая, что:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.1)$$

Правая часть этого выражения называется интегралом Лапласа. Функцию $f(t)$ называют оригиналом в преобразовании Лапласа, а функцию $F(p)$ называют изображением по Лапласу функции $f(t)$. В дальнейшем связь между оригиналом и изображением будем обозначать следующим образом: $f(t) \doteq F(p)$, причем изображение будем записывать с заглавной буквы.

Найдем изображение по Лапласу сигнала $f(t + \tau)$. Так как для $f(t + \tau)$ должны выполняться условия оригиналов [55], то потребуем, чтобы $f(t + \tau) = 0$ для $\forall t < 0$. Нетрудно проверить, что это условие равносильно условию $f(t) = 0$ для $\forall t < \tau$. Тогда, обозначая

$$G(p) \doteq f(t + \tau)$$

и применяя теорему запаздывания [49], получаем

$$f(t) = f(t + \tau - \tau) \doteq F(p) = G(p)e^{-\tau p}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$f(t + \tau) \doteq G(p) = e^{\tau p} F(p). \quad (1.2)$$

Соотношение (1.2) можно получить другим способом. Предполагая, что $f(t)$ является бесконечно дифференцируемой функцией в точке t , рассмотрим разложение в ряд Тейлора функции $f(t + \tau)$ в точке t :

$$f(t + \tau) = f(t) + \frac{\tau}{1!} \dot{f}(t) + \frac{\tau^2}{2!} \ddot{f}(t) + \dots + \frac{\tau^n}{n!} f^{(n)}(t) + \dots \quad (1.3)$$

Применяя к разложению (1.3) преобразование Лапласа и учитывая свойство дифференцирования оригинала [55] при нулевых значениях функции $f(t)$ и всех ее производных в точке $t = 0$, находим

$$f(t + \tau) \doteq F(p) + \frac{\tau}{1!} p F(p) + \frac{\tau^2}{2!} p^2 F(p) + \dots + \frac{\tau^n}{n!} p^n F(p) + \dots$$

Отсюда, учитывая разложение функции $e^{\tau p}$ в ряд Тейлора

$$e^{\tau p} = 1 + \frac{\tau}{1!} p + \frac{\tau^2}{2!} p^2 + \dots + \frac{\tau^n}{n!} p^n + \dots, \quad (1.4)$$

сразу получаем формулу (1.2).

Определение 1.2. Пусть $u(t)$ — входной сигнал системы, а $y(t)$ — выходной сигнал системы. Тогда передаточной функцией $W(s)$ такой системы называется следующее отношение при нулевых начальных значениях:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}, \quad (1.5)$$

где $p = \sigma + j\omega$ — оператор передаточной функции в преобразовании Лапласа, $j = \sqrt{-1}$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$; $U(p)$ и $Y(p)$ — преобразования Лапласа для сигналов $u(t)$ и $y(t)$ соответственно:

$$U(p) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt \doteq u(t), \quad Y(p) = \int_0^{+\infty} y(t) e^{-pt} dt \doteq y(t). \quad (1.6)$$

Как известно, передаточная функция линейного стационарного объекта дает полное описание данного объекта [25]. Все другие важные характеристики объекта получаются из передаточной функции. Из (1.2) следует, что устройство, осуществляющее прогноз (упреждением) на время $\tau > 0$, имеет передаточную функцию

$$\Psi(p) = e^{\tau p}, \quad \tau > 0, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

В дальнейшем устройство, осуществляющее прогноз (упреждение) произвольного сигнала на время $\tau > 0$ и имеющее передаточную функцию (1.7), будем

называть *идеальным прогнозатором (упредителем)* для упреждения на время τ .

Нетрудно заметить, что идеальный прогнозатор имеет трансцендентную передаточную функцию. Такие передаточные функции являются бесконечномерными, что представляет собой основную проблему при анализе и синтезе систем управления объектами с трансцендентными передаточными функциями. Наиболее простым и эффективным способом решения этой проблемы можно считать аппроксимацию бесконечномерной передаточной функции с помощью дробно-рациональной функции конечного порядка. Выбор в качестве аппроксимирующих моделей дробно-рациональных функций объясняется тем, что, во-первых, вопросы аппроксимации дробно-рациональными функциями в комплексной области являются достаточно хорошо изучены в математической литературе, во-вторых, применение дробно-рациональных аппроксимаций дает возможность решать задачи анализа и синтеза систем управления бесконечномерными объектами с помощью хорошо развитых методов теории автоматического управления сосредоточенными объектами.

Так как непосредственная реализация идеального прогнозатора неосуществима, то рассмотрим способы аппроксимации соответствующей передаточной функции (1.7). Воспользуемся следствием из второго замечательного предела [47]. Имеем

$$e^{\tau p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tau p}{N}\right)^N. \quad (1.8)$$

Обозначим

$$\Psi_{L,N}(p) = \left(1 + \frac{\tau p}{N}\right)^N. \quad (1.9)$$

На рис. 3–5 изображены соответственно АФЧХ, АЧХ и АФХ функций $e^{\tau p}$ и $\Psi_{L,N}(p)$ при $\tau = 1$ и $N = 2, N = 4$.

Основным недостатком аппроксимации (1.9) является необходимость реализации идеального форсирующего звена $W(p) = 1 + \frac{\tau}{N}p$, а значит необходимость реализации идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией $W(p) = p$, что, как известно, неосуществимо [25].

Воспользуемся теперь равенством (1.7) и тождеством

$$e^{\tau p} = \frac{1}{e^{-\tau p}}.$$

Получаем

$$e^{\tau p} = \frac{1}{\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\tau p}{N}\right)^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\tau p}{N}\right)^N}.$$

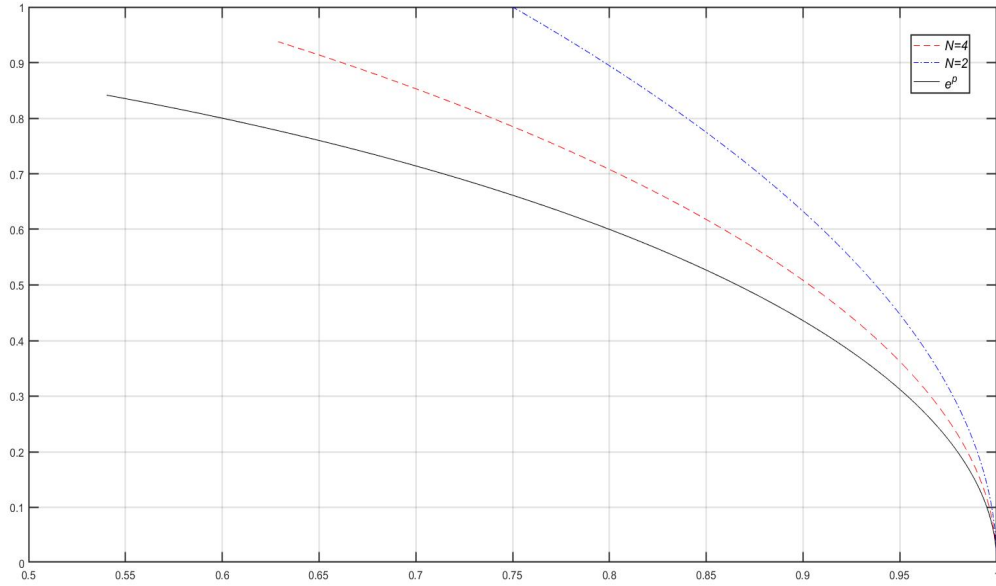


Рис. 3. АФЧХ функций e^p и $\Psi_{L,N}(p)$

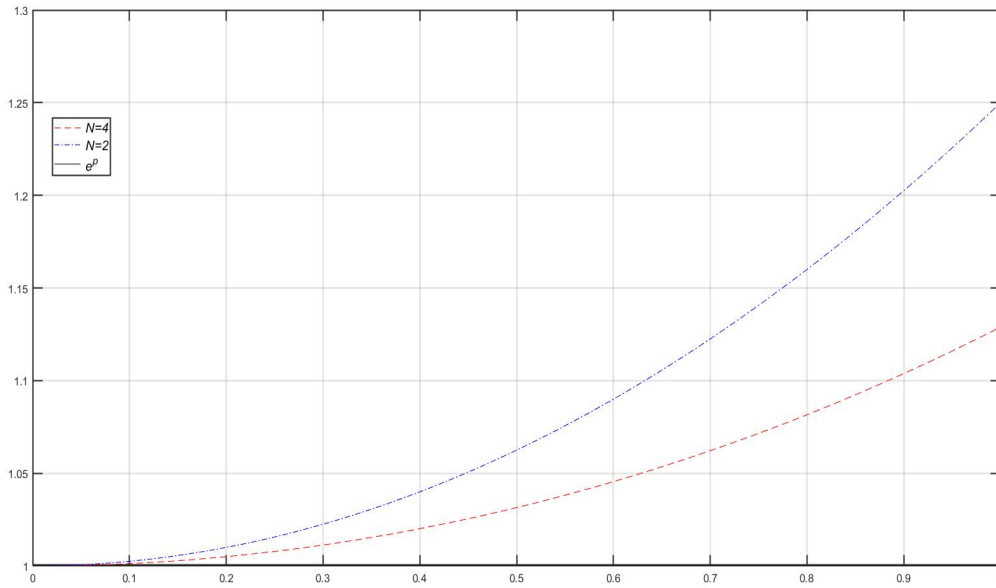


Рис. 4. АЧХ функций e^p и $\Psi_{L,N}(p)$

Введем следующее обозначение:

$$\Psi_{L^-,N}(p) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\tau p}{N}\right)^N}. \quad (1.10)$$

На рис. 6–8 изображены соответственно АФЧХ, АЧХ и АФХ функций $e^{\tau p}$ и $\Psi_{L^-,N}(p)$ при $\tau = 1$ и $N = 2, N = 4$. Для сравнения на рис. 9 изображены соответственно АФЧХ функций $e^{\tau p}$, $\Psi_{L,4}(p)$ и $\Psi_{L^-,4}(p)$ при $\tau = 1$.

Нетрудно заметить, что в данном случае получаем реализуемую аппрокси-

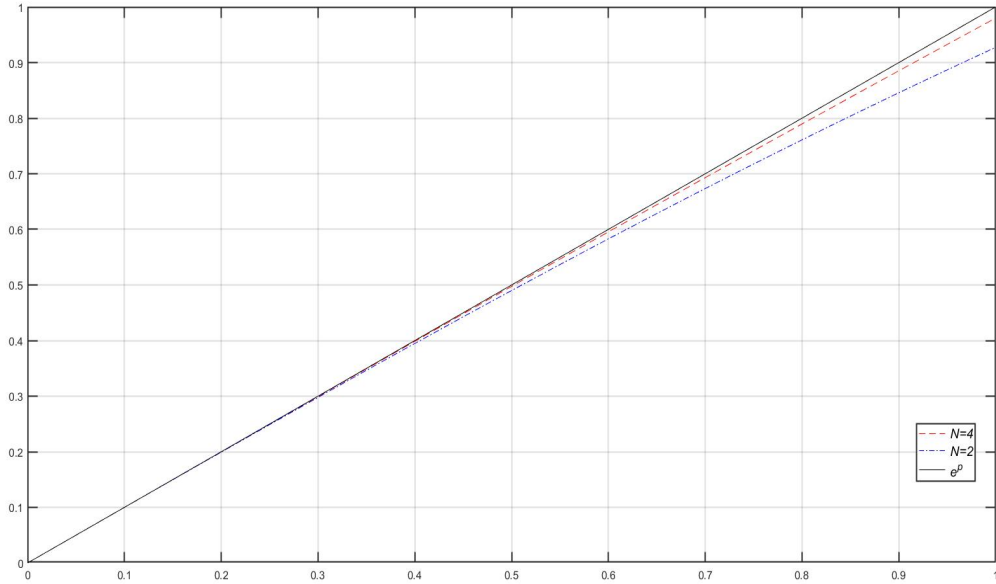


Рис. 5. АФХ функций e^p и $\Psi_{L,N}(p)$

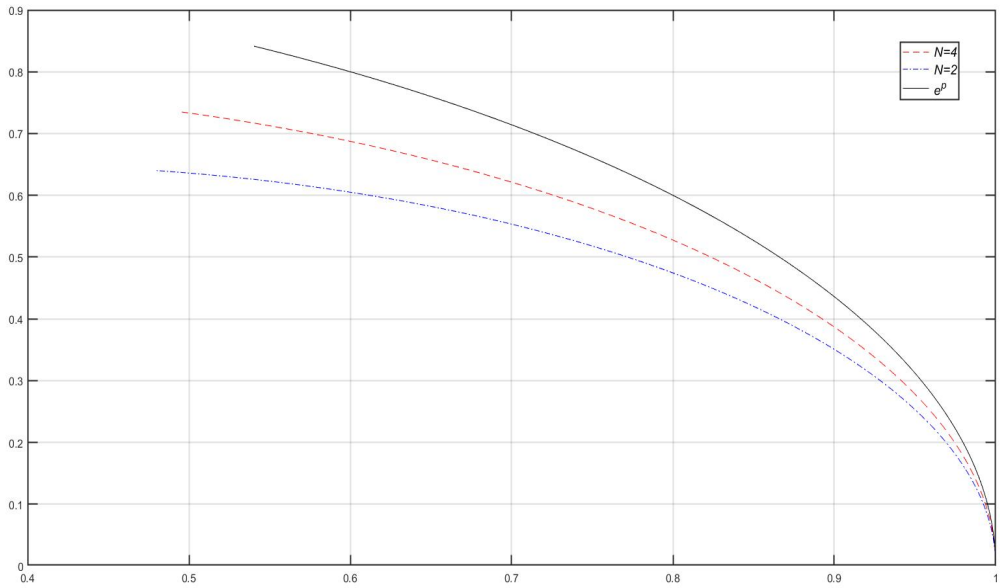


Рис. 6. АФЧХ функций $e^{\tau p}$ и $\Psi_{L^-,N}(p)$

мацию (1.10) для $e^{\tau p}$. Однако аппроксимирующая функция $\Psi_{L^-,N}(p)$ при каждом N имеет правый полюс $p = \frac{N}{\tau}$ порядка N и поэтому является неустойчивой.

Далее рассмотрим аппроксимацию экспоненты $e^{\tau p}$, основанную на разложении экспоненциальной функции в ряд Тейлора (1.4). Перепишем формулу (1.4) следующим образом:

$$e^{\tau p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} p^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{\tau^k}{k!} p^k$$

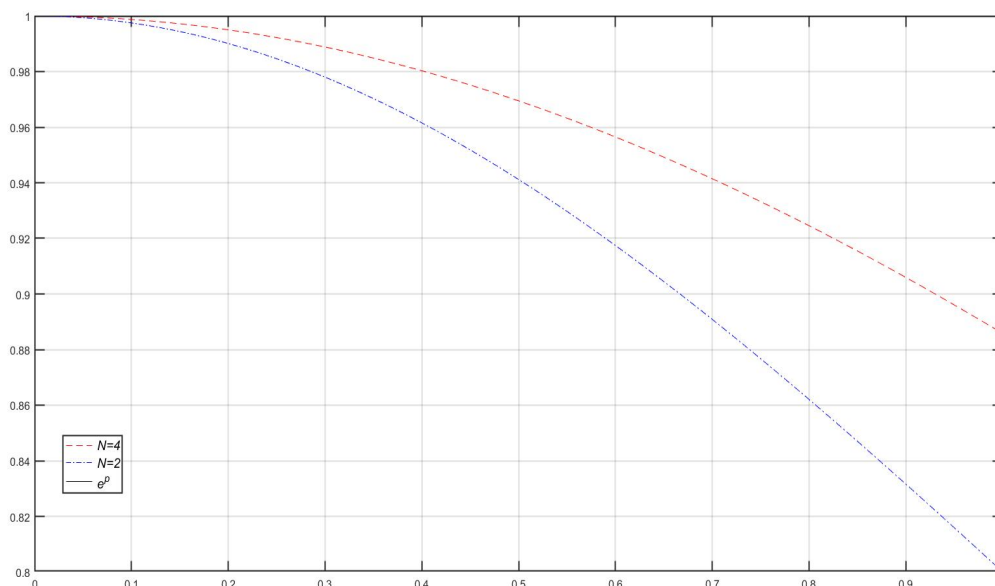


Рис. 7. АЧХ функций e^p и $\Psi_{L-,N}(p)$

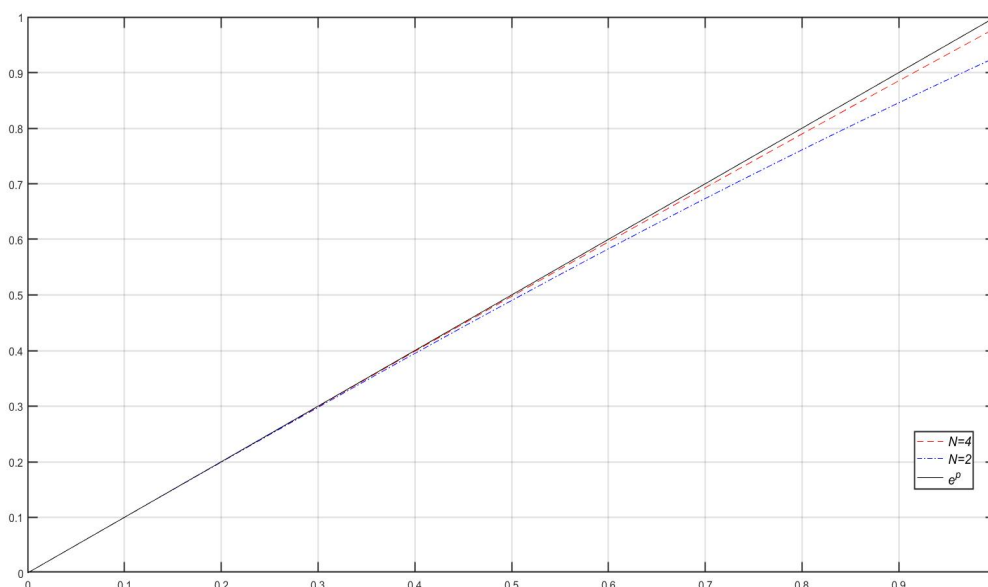


Рис. 8. АФХ функций e^p и $\Psi_{L-,N}(p)$

и обозначим

$$\Psi_{T,N}(p) = \sum_{k=0}^N \frac{\tau^k}{k!} p^k. \quad (1.11)$$

На рис. 10–12 изображены соответственно АФЧХ, АЧХ и АФХ функций $e^{\tau p}$ и $\Psi_{T,N}(p)$ при $\tau = 1$ и $N = 2, N = 4$. Для сравнения на рис. 13 изображены соответственно АФЧХ функций $e^{\tau p}$, $\Psi_{L,4}(p)$ и $\Psi_{T,4}(p)$ при $\tau = 1$.

Несмотря на более высокую точность аппроксимации функции $e^{\tau p}$ функцией $\Psi_{T,N}(p)$ по сравнению с аппроксимацией функцией $\Psi_{L,N}(p)$ (при одном и

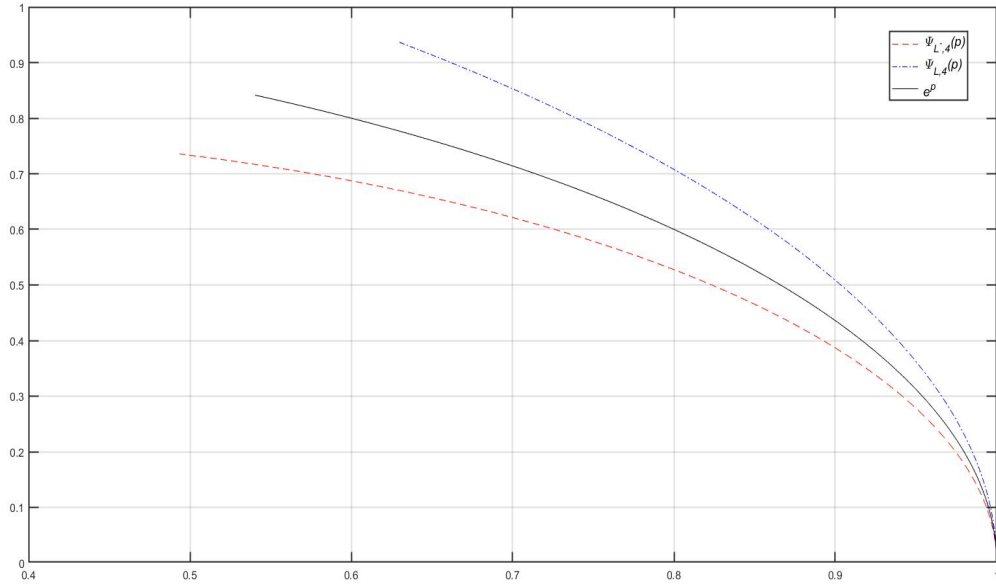


Рис. 9. АФЧХ функций e^p , $\Psi_{L,4}(p)$ и $\Psi_{L-,4}(p)$

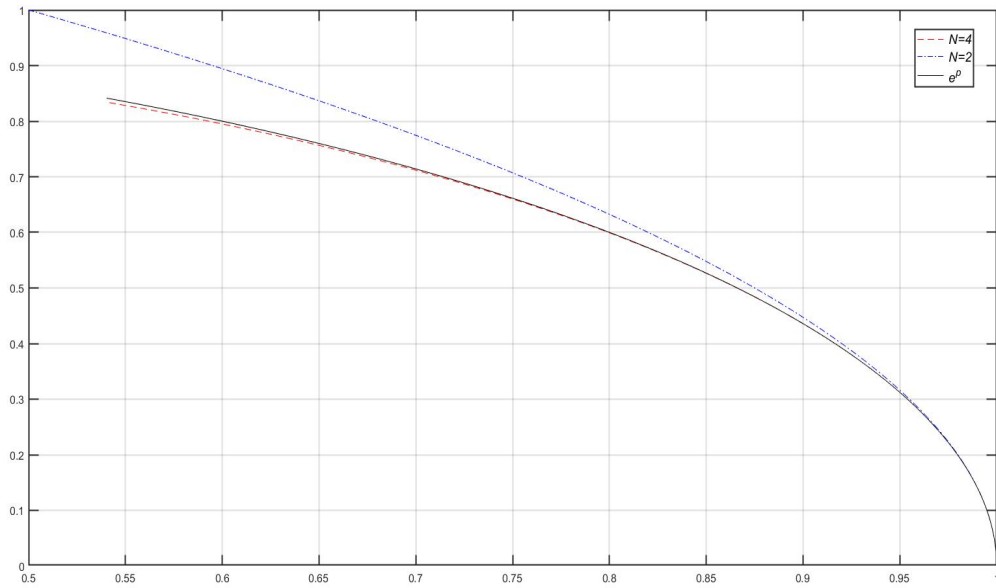


Рис. 10. АФЧХ функций e^p и $\Psi_{T,N}(p)$

том же N), такая аппроксимация приводит к необходимости реализации идеального дифференцирующего звена с передаточной функцией $W(p) = p$, что, как уже отмечалось выше, неосуществимо [25]. Кроме того, аппроксимирующая функция $\Psi_{T,N}(p)$ для $N \geq 5$ имеет правые нули [7]. В табл. 1 приведены нули функции $\Psi_{T,N}(p)$ для $N = \overline{1, 6}$.

Другой широко применяемый способ представления функции $e^{\tau p}$ основан на аппроксимациях Паде [7], получаемых, в свою очередь, из ряда Тейлора. Важным свойством аппроксимаций Паде является их лучшая сходимость по

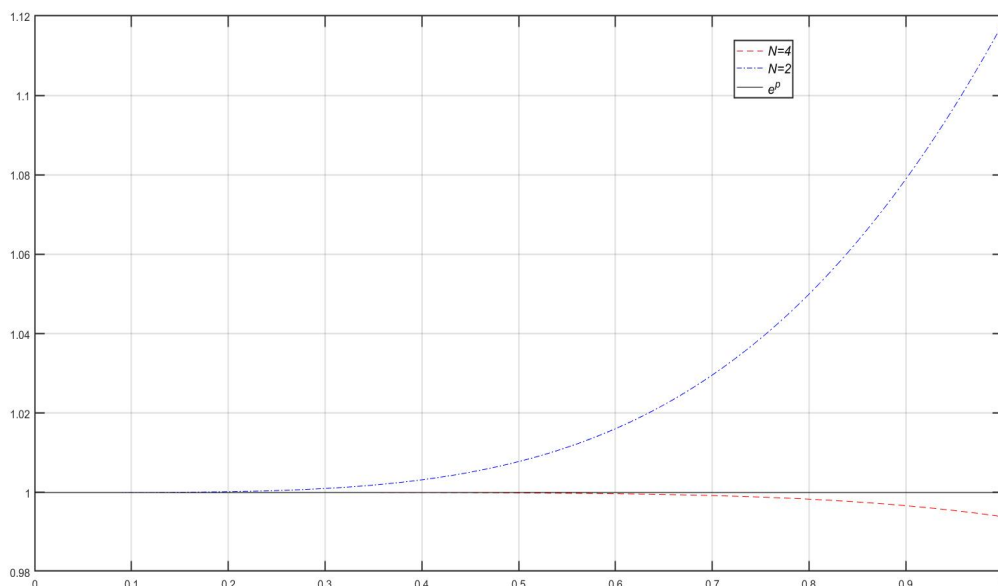


Рис. 11. АЧХ функций e^p и $\Psi_{T,N}(p)$

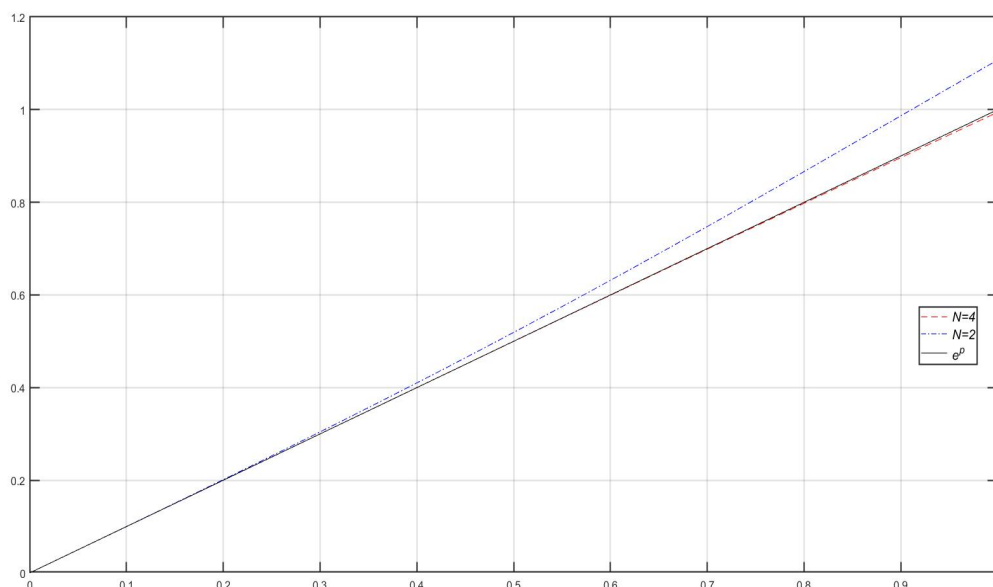


Рис. 12. АФХ функций e^p и $\Psi_{T,N}(p)$

сравнению с рядами Тейлора. Однако еще лучше они сходятся в тех областях, где соответствующие степенные ряды расходятся, но являются асимптотическими разложениями [7, 53]. Часто это дает практический подход к задачам аналитического продолжения и имеет большое значение для приложений. Преимущество разложения в сходящийся ряд Тейлора заключается в том, что увеличение точности может быть достигнуто за счет добавления новых членов. В случае дробно-рациональных аппроксимаций может получиться так, что N -е приближение полностью не связано с предыдущими приближениями. Таким об-

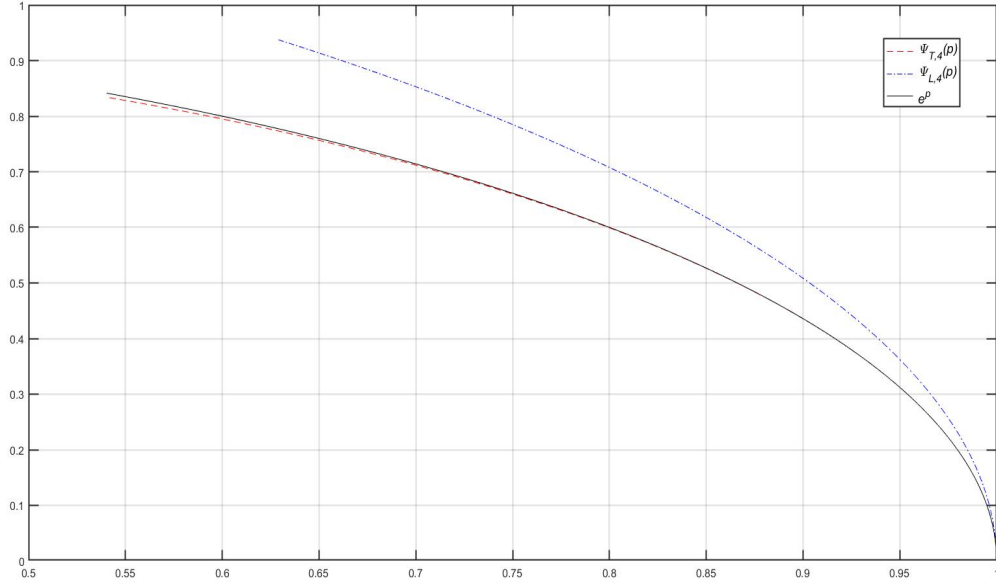


Рис. 13. АФЧХ функций e^p , $\Psi_{L,4}(p)$ и $\Psi_{T,4}(p)$

разом, для получения последующего приближения нужно вновь применять тот же самый метод, с помощью которого было получено предыдущее приближение. Упомянутое выше преимущество разложений в ряды Тейлора, по существу, сохраняется в некоторых дробно-рациональных аппроксимациях Паде [53], и этот факт вместе с тем, что данные аппроксимации Паде могут сходиться в областях, где ряд Тейлора расходится, усиливает прикладное значение аппроксимаций Паде.

Рассмотрим определение аппроксимации Паде, введенное Бейкером [7].

Определение 1.3. Если существуют алгебраические многочлены $A_{L,M}(p)$, $B_{L,M}(p)$ степени M и L соответственно такие, что

$$\frac{B_{L,M}(p)}{A_{L,M}(p)} = F(p) + O(p^{L+M+1}) \quad (1.12)$$

и

$$A_{L,M}(0) = 1, \quad (1.13)$$

то дробно-рациональная функция

$$F_{L,M}(p) = \frac{B_{L,M}(p)}{A_{L,M}(p)} \quad (1.14)$$

называется *аппроксимацией Паде* функции $F(p)$.

Рассмотрим аппроксимацию Паде экспоненциальной функции $e^{\tau p}$. Согласно [7, 24, 53] имеем

$$e^{\tau p} = e_{N,N}^{\tau p} + \Delta_N(p) = \frac{B_{N,N}(p)}{A_{N,N}(p)} + \Delta_N(p), \quad (1.15)$$

N	$\Psi_{T,N}(p)$	Нули $\Psi_{T,N}(p)$ (при $\tau = 1$)
1	$1 + \tau p$	$p_1 = -1$
2	$1 + \tau p + \frac{(\tau p)^2}{2}$	$p_{1,2} = -1 \pm j$
3	$1 + \tau p + \frac{(\tau p)^2}{2} + \frac{(\tau p)^3}{6}$	$p_1 = -1,5961$ $p_{2,3} = -0,7020 \pm 1,8073j$
4	$1 + \tau p + \frac{(\tau p)^2}{2} + \frac{(\tau p)^3}{6} + \frac{(\tau p)^4}{24}$	$p_{1,2} = -0,2706 \pm 2,5048j$ $p_{3,4} = -1,7294 \pm 0,8890j$
5	$1 + \tau p + \frac{(\tau p)^2}{2} + \frac{(\tau p)^3}{6} + \frac{(\tau p)^4}{24} + \frac{(\tau p)^5}{120}$	$p_1 = -2,1806$ $p_{2,3} = 0,2398 \pm 3,1283j$ $p_{4,5} = -1,6495 \pm 1,6939j$
6	$1 + \tau p + \frac{(\tau p)^2}{2} + \frac{(\tau p)^3}{6} + \frac{(\tau p)^4}{24} + \frac{(\tau p)^5}{120} + \frac{(\tau p)^6}{720}$	$p_{1,2} = 0,8036 \pm 3,6977j$ $p_{3,4} = -1,4418 \pm 2,4345j$ $p_{5,6} = -2,3618 \pm 0,8384j$

Табл. 1. Распределение нулей частичных сумм ряда Тейлора

где

$$B_N(p) = B_{N,N}(p) = \sum_{k=0}^N \frac{(2N-k)!}{k!(N-k)!} (\tau p)^k, \quad (1.16)$$

$$A_N(p) = A_{N,N}(p) = B_{N,N}(-p), \quad (1.17)$$

$$\Delta_N(p) = \frac{(-1)^N \pi}{2^{4N+1} (N!)^2} (\tau p)^{2N+1} e^{\tau p \left(1 + \frac{\tau p}{4(2N+1)}\right)} (1 + O(N^{-1})). \quad (1.18)$$

Здесь $\Delta_N(p)$ — ошибка аппроксимации.

Для нахождения аппроксимаций Паде (1.15) функции $e^{\tau p}$ можно использовать следующие рекуррентные формулы [53]:

$$\begin{aligned} B_0(p) &= 1, \quad B_1(p) = \tau p + 2, \\ B_{n+1}(p) &= 2(2n+1)B_n(p) + (\tau p)^2 B_{n-1}(p), \quad n \in \mathbb{N}, \\ A_0(p) &= 1, \quad A_1(p) = -\tau p + 2, \\ A_{n+1}(p) &= 2(2n+1)A_n(p) + (\tau p)^2 A_{n-1}(p), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Далее введем следующее обозначение:

$$\Psi_{P,N}(p) = e^{\tau p}_{N,N} = \frac{B_N(p)}{A_N(p)}, \quad (1.20)$$

где $B_N(p)$ и $A_N(p)$ определяются формулами (1.16) и (1.17) соответственно. В табл. 2 приведены аппроксимации Паде $\Psi_{P,N}(p)$ функции $e^{\tau p}$ при $N = \overline{1,4}$.

На рис. 14–16 изображены соответственно АФЧХ, АЧХ и АФХ функций $e^{\tau p}$ и $\Psi_{P,2}(p)$ при $\tau = 1$. Для сравнения на рис. 17 изображены соответственно АФЧХ функций $e^{\tau p}$, $\Psi_{P,2}(p)$ и $\Psi_{T,4}(p)$ при $\tau = 1$.

N	$\Psi_{P,N}(p)$
1	$\frac{2+\tau p}{2-\tau p}$
2	$\frac{12+6\tau p+(\tau p)^2}{12-6\tau p+(\tau p)^2}$
3	$\frac{120+60\tau p+12(\tau p)^2+(\tau p)^3}{120-60\tau p+12(\tau p)^2-(\tau p)^3}$
4	$\frac{1680+840\tau p+180(\tau p)^2+20(\tau p)^3+(\tau p)^4}{1680-840\tau p+180(\tau p)^2-20(\tau p)^3+(\tau p)^4}$

Табл. 2. Аппроксимации Паде функции $e^{\tau p}$

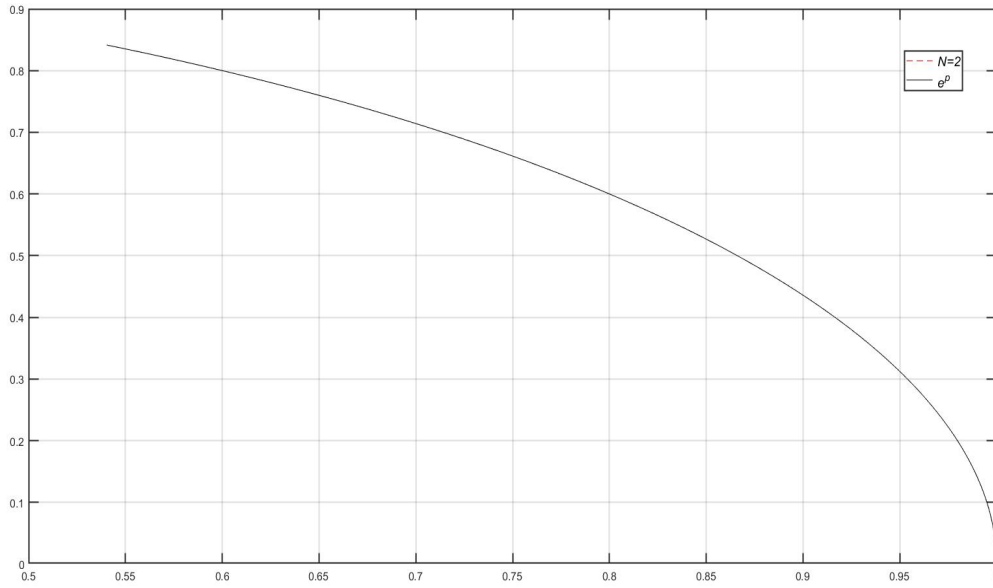


Рис. 14. АФЧХ функций e^p и $\Psi_{P,2}(p)$

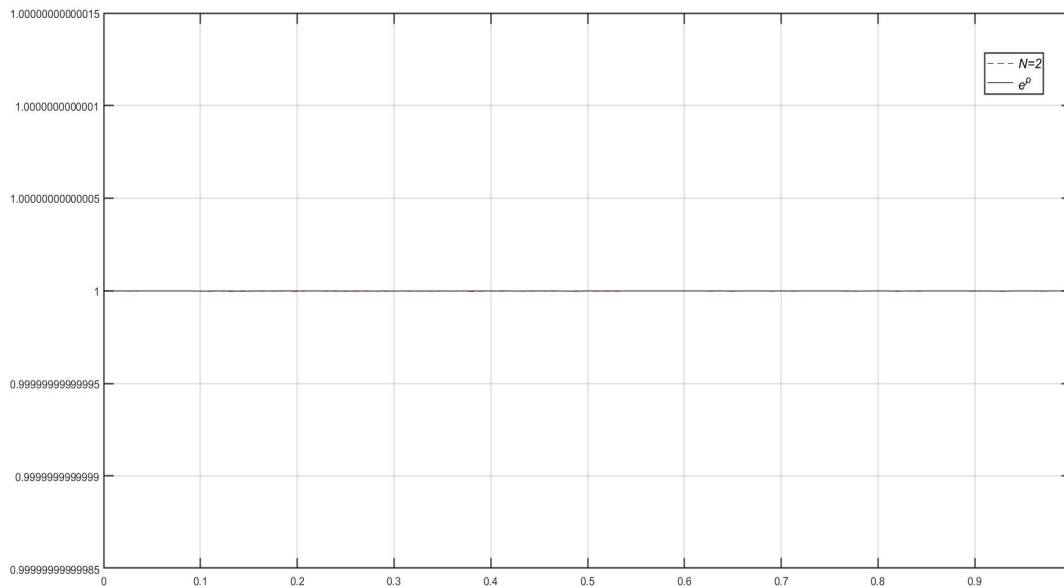


Рис. 15. АЧХ функций e^p и $\Psi_{P,2}(p)$

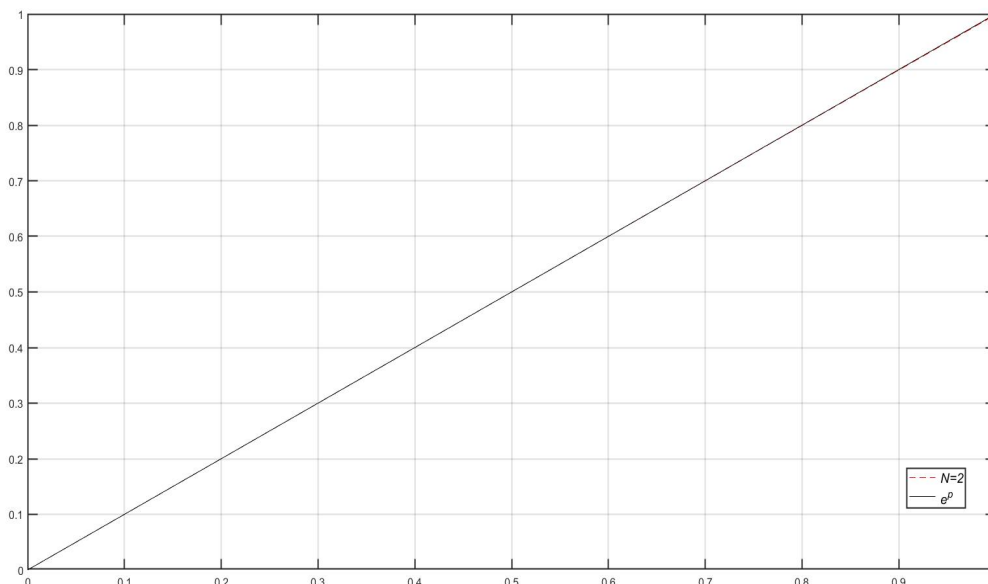


Рис. 16. АФХ функций e^p и $\Psi_{P,2}(p)$

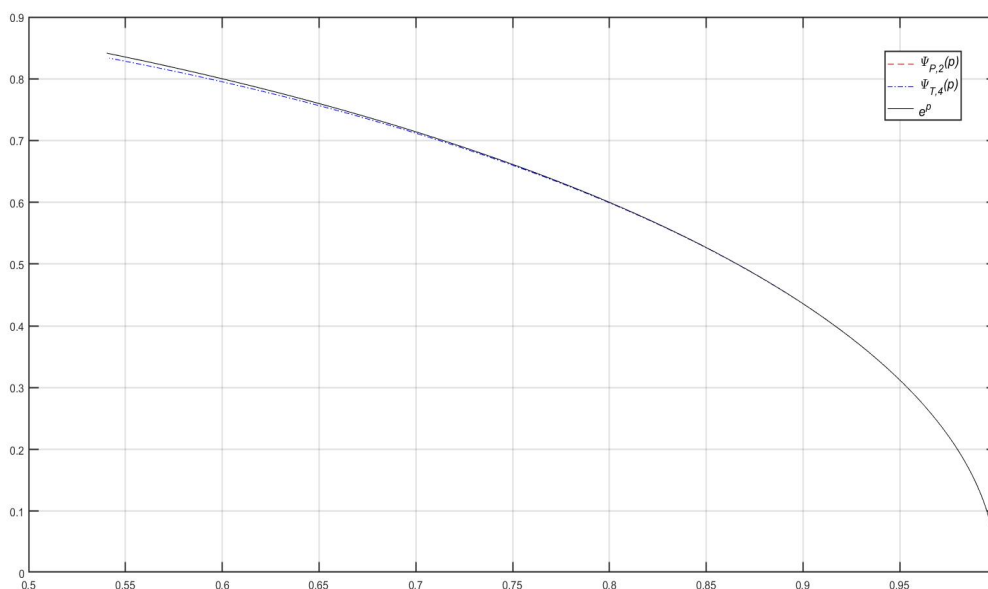


Рис. 17. АФЧХ функций e^p , $\Psi_{P,2}(p)$ и $\Psi_{T,4}(p)$

Нетрудно заметить, что скорость сходимости аппроксимации Паде $\Psi_{P,N}(p)$ к функции e^{tp} выше, чем скорость сходимости частичной суммы ряда Тейлора $\Psi_{T,N}(p)$. Этот результат был доказан в [7]: последовательность аппроксимаций Паде $F_{L,M}(p)$ стремится к $F(p)$ так, что при $p \rightarrow 0$

$$F(p) - F_{L,M}(p) = O(p^{L+M+1}). \quad (1.21)$$

Поэтому если функция $F(p)$ представима степенным рядом вида

$$F(p) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i, \quad (1.22)$$

то при $p \rightarrow 0$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i = F_{L,M}(p) + O(p^{L+M+1}). \quad (1.23)$$

Однако существенным недостатком аппроксимации Паде $\Psi_{P,N}(p)$ функции $e^{\tau p}$ является неустойчивость аппроксимаций Паде. Это непосредственно следует из формул (1.15) и (1.17).

1.3. Постановка задачи

В результате проведенного анализа проблемы синтеза прогнозаторов можно сформулировать следующую задачу, решению которой будет посвящена данная диссертационная работа. Рассмотрим задачу построения автоматического реализуемого устойчивого устройства прогнозирования (прогнозатора) на время упреждения $\tau > 0$ для сигналов из следующего класса. Пусть функция $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

- 1) является кусочно-непрерывной в $[0, \infty)$;
- 2) $f(t) = 0 \forall t < -\tau$;
- 3) растет в $[0, \infty)$ не быстрее экспоненты с линейным показателем, т. е.

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}, M > 0 : |f(t)| \leq M e^{\alpha_0 t} \quad \forall t > 0.$$

Таким образом, в диссертации рассматривается задача прогнозирования сигналов из класса сигналов, удовлетворяющих условиям 1)–3).

Следует отметить, что прогнозатор должен осуществлять автоматическое прогнозирование произвольного, заранее неизвестного сигнала $f(t)$ из заданного класса, т. е. прогнозатор должен автоматически находить значение $f(t+\tau)$ по значениям произвольного сигнала $f(t)$. Кроме того, разрабатываемый прогнозатор должен обеспечить вычислительную схему прогнозирования при допустимом времени вычисления прогноза. Кроме того, разрабатываемый в диссертации метод синтеза прогнозаторов должен быть применим как к непрерывным (аналоговым), так и к дискретным сигналам.

1.4. Выводы по главе 1

В настоящей главе рассмотрены современные методы прогнозирования параметров процессов. В частности, был отмечен метод автоматического прогнозирования широкого класса сигналов с помощью идеального упредителя, который имеет передаточную функцию в виде экспоненты. Приведено описание и основные свойства различных способов аппроксимации экспоненциальной функции, а именно на основе следствия второго замечательного предела, разложения экспоненциальной функции в ряд Тейлора и аппроксимации Паде. Недостатками рассмотренных подходов к решению задач прогнозирования являются: неустойчивость полученных аппроксимаций, как в случае с следствием из второго замечательного предела и аппроксимацией Паде; неосуществимость реализации идеального дифференцирующего звена, как в случае с разложением в ряд Тейлора. Метод аппроксимации Паде отмечается более высокой скоростью сходимости к экспоненциальной функции и более высокой точностью в сравнении с разложением в ряд Тейлора.

ПОСТРОЕНИЕ АВТОМАТИЧЕСКИХ ПРОГНОЗАТОРОВ

2.1. Дробно-рациональная аппроксимация передаточных функций

Очевидно, что различные методы аппроксимации имеют свои достоинства и недостатки. С точки зрения задач управления, эффективность того или иного способа приближения определяется тем, насколько полно и точно аппроксимирующая модель отражает свойства исходного бесконечномерного объекта управления. Определяющую роль при выборе класса аппроксимирующих функций играет область в комплексной плоскости, в которой осуществляется аппроксимация [61]. Так как в системе автоматического регулирования входные воздействия на бесконечномерный объект со стороны подсистемы с сосредоточенными параметрами можно считать функциями с ограниченным спектром, то выбор аппроксимирующей функции можно осуществлять на основе близости (в смысле определенных критериев) к точной передаточной функции объекта в некоторой области $|p| < \Omega$ комплексной переменной p , что соответствует полосе низких частот $0 \leq \omega < \Omega$. Ясно, что вся информация о поведении функции комплексного переменного во всей комплексной плоскости, и, следовательно, в области $|p| < \Omega$, заключена в ее особых точках. Поэтому передаточные функции аппроксимирующей модели $\hat{\Psi}(p)$ должны иметь те же особые точки (полюсы, алгебраические точки ветвления конечного порядка), что и передаточная функция исходного объекта $\Psi(p)$, и главные части $\hat{\Psi}(p)$ и $\Psi(p)$ в этих особых точках должны совпадать [61]. При такой аппроксимации ошибка воспроизведения сигнала будет тем меньше, чем уже его спектр [61]. Величину Ω следует выбирать такой, чтобы основная часть спектра типичных входных воздействий лежала в области $0 \leq \omega < \Omega$.

Далее рассмотрим наиболее эффективные способы конечномерной дробно-рациональной аппроксимации бесконечномерных передаточных функций объектов, реализующие описанный выше метод.

2.1.1. Аппроксимация аналитических передаточных функций отрезком ряда Тейлора

Рассмотрим вопрос о представлении аналитических функций с помощью степенных рядов, в частности, рядов Тейлора. Разложение функций комплекс-

ного переменного в ряды представляет не только теоретический, но и практический интерес. Например, с помощью рядов Тейлора могут быть получены аппроксимации Паде, обладающие важными для задач управления свойствами.

Пусть функция $\Psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является аналитической в некоторой области $G \subseteq \mathbb{C}$.

Определение 2.1. Рядом Тейлора функции $\Psi(p)$ с центром в точке $a \in G$ называется ряд

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!} (p-a)^n = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!} (p-a)^n + \Delta_N(p), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где остаточный член $\Delta_N(p)$ ряда Тейлора имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_N(p) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!} (p-a)^n = \\ &= \frac{(p-a)^{N+1}}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z) dz}{(z-p)(z-a)^{N+1}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

C — некоторый замкнутый контур, лежащий в G и содержащий точки p и a .

Лемма 2.1. Обозначим через R' радиус круга аналитичности функции $\Psi(p)$ и рассмотрим произвольное число R , $0 < R < R'$, и круг $|p-a| = kR$, где $0 < k < 1$ — произвольное число. Пусть C — окружность $|z-a| = R$. Тогда в любом круге $|p-a| < kR$ имеем оценку [49]

$$|\Delta_N(p)| \leq \frac{k^{N+1} M(R)}{1-k}, \quad (2.3)$$

где $M(R)$ — максимум модуля функции $\Psi(p)$ в круге $|p-a| \leq R$.

Определение 2.2. Отрезком ряда Тейлора длины $N+1$ или частичной суммой порядка N ряда Тейлора называется выражение

$$\Psi_N(p) = \sum_{n=0}^N \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!} (p-a)^n, \quad N \in \mathbb{Z}_0.$$

Таким образом, формула (2.1) может быть представлена в виде

$$\Psi(p) = \Psi_N(p) + \Delta_N(p), \quad N \in \mathbb{Z}_0.$$

Ответ на вопрос, при каких условиях функция $\Psi(p)$ представима своим рядом Тейлора (2.1), дает следующая теорема.

Теорема 2.1. Функция $\Psi(p)$ представима своим рядом Тейлора (2.1) в любом открытом круге $\Gamma: |p - a| < R$, $\Gamma \subseteq G$, с центром в точке a , в котором она аналитична. Во всякой замкнутой области $\gamma \subset \Gamma$, принадлежащей этому кругу, ряд Тейлора сходится равномерно.

В дальнейшем потребуется следующее утверждение, вытекающее из теоремы Абеля [49].

Теорема 2.2. Областью сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(p - a)^k$ является открытый круг с центром в точке a , $\Gamma: |p - a| < R$, который может также вырождаться в точку или заполнять всю плоскость, и еще, быть может, некоторые точки на границе круга Γ .

Определение 2.3. Радиус R круга сходимости Γ называется радиусом сходимости степенного ряда.

Утвердительный ответ на вопрос: будет ли сумма произвольного сходящегося степенного ряда аналитической функцией, дает следующая теорема [49].

Теорема 2.3. Сумма любого степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией.

Сформулируем еще теорему единственности разложения в ряд Тейлора [49].

Теорема 2.4. Любой степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Из теоремы 2.4 вытекают два важных следствия [49], которые будут использоваться в дальнейшем.

Следствие 2.1. Найденное любым способом разложение аналитической функции $\Psi(p)$ в степенной ряд является тейлоровским разложением этой функции.

Следствие 2.2. Радиус сходимости степенного ряда

$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p - a)^n \quad (2.4)$$

совпадает с расстоянием от центра a до ближайшей точки, в которой нарушается аналитичность суммы $\Psi(p)$ этого ряда.

Отметим, что для нахождения коэффициентов c_n степенного ряда (2.4) в силу следствия 2.1 и равенства (2.1) наряду с формулой

$$c_n = \frac{\Psi^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad (2.5)$$

можно воспользоваться следующим выражением [49]:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z) dz}{(z - a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_0. \quad (2.6)$$

Для дальнейших рассуждений сформулируем и докажем следующую лемму:
Лемма 2.2. Пусть задано произвольное $R > 0$. Тогда

$$\max_{\substack{p \in \mathbb{C} \\ |p| \leq R}} |e^{\tau p}| = e^{\tau R} \quad \forall \tau > 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $p = u + jv$, $j = \sqrt{-1}$. Тогда $\forall \tau \in \mathbb{R}$

$$|e^{\tau p}| = |e^{\tau(u+jv)}| = |e^{\tau u} e^{j\tau v}| = |e^{\tau u}| |e^{j\tau v}|.$$

Так как $\forall \tau, v \in \mathbb{R}$ в силу формулы Эйлера, определения модуля комплексного числа и основного тригонометрического тождества имеет место равенство

$$|e^{j\tau v}| = |\sin \tau v + j \cos \tau v| = \sqrt{\sin^2 \tau v + \cos^2 \tau v} = 1$$

и $\forall \tau, v \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $e^{\tau u} > 0$, то

$$|e^{\tau p}| = e^{\tau u}.$$

Для $\tau > 0$ функция $e^{\tau u}$ монотонно возрастает и поэтому в силу условия

$$|p| = \sqrt{u^2 + v^2} \leq R$$

достигает своего максимума при $u = R$. Таким образом, окончательно получаем (2.7). Лемма доказана.

Пример 2.1. Найдём тейлоровское разложение функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$, $\tau > 0$, с центром в точке $a = 0$. Функция $e^{\tau p}$ является аналитической в \mathbb{C} . В силу формулы (2.5) и очевидного соотношения

$$\left. \frac{d^n e^{\tau p}}{dp^n} \right|_{p=0} = \tau^n, \quad n \in \mathbb{Z}_0,$$

получаем

$$c_n = \frac{\tau^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Тогда ряд Тейлора для функции $e^{\tau p}$ имеет вид

$$e^{\tau p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} p^n \quad (2.8)$$

и в силу следствия 2.2 сходится для любого $p \in \mathbb{C}$. Оценка остаточного члена $\Delta_N(p)$ ряда Тейлора (2.8) для функции $e^{\tau p}$ определяется неравенством (2.3) и имеет вид

$$|\Delta_N(p)| \leq \frac{k^{N+1} M(R)}{1 - k}, \quad M(R) = \max_{p: |p| \leq R} |e^{\tau p}|.$$

Поэтому в силу леммы 2.2 остаточный член $|\Delta_N(p)|$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$|\Delta_N(p)| \leq \frac{e^{\tau R} k^{N+1}}{1-k}. \quad (2.9)$$

2.1.2. Применение рядов Бурмана-Лагранжа для аппроксимации аналитических функций

Рассмотрим разложение аналитической функции в ряд Бурмана-Лагранжа. Ряды Бурмана-Лагранжа — полезное для приложений обобщение рядов Тейлора [18, 20, 49, 70], и получаются при разложении одной аналитической функции $\Psi(p)$ по степеням другой аналитической функции $W(p)$. С этой целью введем следующие определения.

Определение 2.4. Нулем функции $W(p)$ называется любая точка $p = a$, в которой $W(p)$ принимает значение 0: $W(a) = 0$.

Определение 2.5. Порядок младшей отличной от нуля производной $W^{(n)}(a)$, $n \geq 1$, называется порядком нуля a , т. е.

$$W(a) = W'(a) = \dots = W^{(n-1)}(a) = 0, \quad W^{(n)}(a) \neq 0.$$

При $n = 1$ нуль a называется простым.

Определение 2.6. Точка a называется полюсом функции $W(p)$, если $W(p)$ является бесконечно большой при приближении к a , т. е. если существует предел $\lim_{p \rightarrow a} W(p) = \infty$.

Определение 2.7. Порядком m полюса a функции $W(p)$ будем называть порядок m нуля a функции $1/W(p)$. При $m = 1$ полюс a называется простым.

Рассмотрим однозначную функцию $W(p)$, аналитическую в окрестности точки a , за исключением, быть может, самой этой точки.

Определение 2.8. Точка a называется устранимой особой точкой (или правильной точкой) функции $W(p)$, если существует конечный предел $\lim_{p \rightarrow a} W(p)$. В этом случае говорят, что функция $W(p)$ — правильная в точке a .

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 2.5. Пусть функции $\Psi(p)$ и $W(p)$ правильны в некоторой точке a , причем $W(p)$ имеет в точке a нуль первого порядка. Замкнутый контур C , ограничивающий некоторую область D , выбирается так, чтобы D содержала точку a , обе функции были правильны в $\bar{D} = D \cup C$ и чтобы $W(p)$ принимала

свои значения лишь один раз. Тогда имеет место разложение функции $\Psi(p)$ в равномерно сходящийся ряд Бурмана-Лагранжа

$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n W^n(p) = \sum_{n=0}^N \alpha_n W^n(p) + \Delta_N(p), \quad (2.10)$$

где α_n — коэффициенты ряда Бурмана-Лагранжа, определяемые формулой

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow a} \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{\Psi(p)W'(p)(p-a)^{n+1}}{W^{n+1}(p)} \right], \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad (2.11)$$

$\Delta_N(p)$ — остаточный член ряда Бурмана-Лагранжа, определяемый формулой

$$\Delta_N(p) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n W^n(p) = \frac{W^{N+1}(p)}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z) dz}{W^{N+1}(z)(W(z) - W(p))}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Рассмотрим формулу для суммы членов геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q \neq 1, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Очевидно равенство

$$\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{N+1}}{1 - q}.$$

Тогда формулу (2.13) перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^N + \frac{q^{N+1}}{1 - q}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(z) - W(p)} &= \frac{1}{W(z) \left(1 - \frac{W(p)}{W(z)} \right)} = \\ &= \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{W(p)}{W(z)}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Полагая в формуле (2.14)

$$q = \frac{W(p)}{W(z)},$$

получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{W(p)}{W(z)}} &= 1 + \frac{W(p)}{W(z)} + \frac{W^2(p)}{W^2(z)} + \dots + \frac{W^N(p)}{W^N(z)} + \\ &+ \frac{W^{N+1}(p)}{W^{N+1}(z)} \\ &+ \frac{W^{N+1}(p)}{1 - \frac{W(p)}{W(z)}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В формуле (2.16) перепишем последнее слагаемое в виде

$$\frac{\frac{W^{N+1}(p)}{W^{N+1}(z)}}{1 - \frac{W(p)}{W(z)}} = \frac{W^{N+1}(p)}{W^N(z)(W(z) - W(p))}. \quad (2.17)$$

Принимая во внимание соотношения (2.16) и (2.17), формула (2.15) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(z) - W(p)} &= \frac{1}{W(z)} \left[1 + \frac{W(p)}{W(z)} + \frac{W^2(p)}{W^2(z)} + \dots + \frac{W^N(p)}{W^N(z)} + \right. \\ &\left. + \frac{W^{N+1}(p)}{W^N(z)(W(z) - W(p))} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (2.15) после очевидных преобразований принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(z) - W(p)} &= \frac{1}{W(z)} \left[1 + \frac{W(p)}{W(z)} + \frac{W^2(p)}{W^2(z)} + \dots \right. \\ &\left. \dots + \frac{W^N(p)}{W^N(z)} \right] + \frac{W^{N+1}(p)}{W^{N+1}(z)(W(z) - W(p))}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Умножим теперь обе части равенства (2.18) на $\frac{1}{2\pi j} \Psi(z)W'(z)$ и проинтегрируем получившееся равенство по z вдоль замкнутого контура C . Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z) dz}{W(z) - W(p)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z)}{W(z)} \left[1 + \frac{W(p)}{W(z)} + \frac{W^2(p)}{W^2(z)} + \dots + \frac{W^N(p)}{W^N(z)} \right] dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z)W^{N+1}(p) dz}{W^{N+1}(z)(W(z) - W(p))}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В левой части равенства (2.19) имеется интеграл

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z) dz}{W(z) - W(p)}. \quad (2.20)$$

В силу предположений о функциях $\Psi(p)$ и $W(p)$ подынтегральная функция в интеграле (2.20) имеет одну особую точку $z = p$, являющуюся полюсом первого порядка. Как известно [49], вычет функции в полюсе первого порядка определяется формулой

$$\operatorname{res}_{z=p} \frac{\Psi(z)W'(z)}{W(z) - W(p)} = \lim_{z \rightarrow p} (z - p) \frac{\Psi(z)W'(z)}{W(z) - W(p)}.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{res}_{z=p} \frac{\Psi(z)W'(z)}{W(z) - W(p)} = \lim_{z \rightarrow p} \frac{\Psi(z)W'(z)}{\frac{z - p}{z - p}} = \frac{\Psi(p)W'(p)}{W'(p)} = \Psi(p).$$

Поэтому, применяя к интегралу (2.20) теорему о вычетах, получаем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z) dz}{W(z) - W(p)} = \operatorname{res}_{z=p} \frac{\Psi(z)W'(z)}{W(z) - W(p)} = \Psi(p).$$

Полагая далее

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z)}{W^{n+1}(z)} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.21)$$

и вводя обозначение (2.12) из (2.19) при $N \rightarrow \infty$ получаем разложение функции $\Psi(p)$ в ряд Бурмана-Лагранжа (2.10).

Так как по условию теоремы функция $W(p)$ имеет простой нуль в точке a , то в формуле (2.21) подынтегральная функция

$$\frac{\Psi(z)W'(z)}{W^{n+1}(z)}$$

имеет полюс порядка $n+1$. Тогда, применяя к к интегралу (2.21) теорему о вычетах, получаем формулу (2.11) для коэффициентов α_n ряда Бурмана-Лагранжа.

Если точка p выбрана так близко к a , что

$$\left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| = |q| < 1, \quad (2.22)$$

то ряд (2.10) является равномерно сходящимся. В силу сделанных выше предположений условие (2.22) всегда может быть выполнено. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. При $n \geq 1$ формулу (2.11) можно представить следующим образом [20, 49, 76]:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi'(z)}{W^n(z)} dz = \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[\Psi'(p) \frac{(p-a)^n}{W^n(p)} \right]. \quad (2.23)$$

З а м е ч а н и е 2.2. Отметим, что если $W(a) \neq 0$, то функцию $\Psi(p)$ можно раскладывать в ряд по степеням функции $\tilde{W}(p) = W(p) - a$.

З а м е ч а н и е 2.3. Нетрудно видеть, что при $W(p) = p - a$ формула для остаточного члена ряда Бурмана-Лагранжа (2.12) совпадает с формулой для остаточного члена ряда Тейлора (2.2), выражения для коэффициентов (2.21) совпадают с (2.6), а разложение (2.10) представляет собой ряд Тейлора (2.1) для функции $\Psi(p)$. Таким образом, ряд Бурмана-Лагранжа является обобщением ряда Тейлора.

З а м е ч а н и е 2.4. В дальнейшем нам потребуется разложение функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням некоторой функции $W(p)$ при $a = 0$. Покажем, что функция $\Psi(p) = e^{\tau p}$ удовлетворяет всем условиям для разложения в ряд Бурмана-Лагранжа. Функция $e^{\tau p}$ является аналитической во всей комплексной плоскости при любом τ . Так как в рассматриваемом случае предел

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Psi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} e^{\tau p} = 1$$

существует и конечен, то условие правильности функции $\Psi(p)$ выполнено. Таким образом, функция $\Psi(p) = e^{\tau p}$ удовлетворяет всем условиям для разложения в ряд Бурмана-Лагранжа во всей комплексной плоскости.

2.2. Построение прогнозаторов

Рассмотрим задачу построения автоматического устройства прогнозирования (прогнозатора) на время упреждения $\tau > 0$ для любого сигнала f из заданного класса, т. е. прогнозатор должен находить значение $f(t + \tau)$ по известным значениям произвольного сигнала $f(t)$. Следует отметить, что прогнозатор должен осуществлять автоматическое прогнозирование произвольного, заранее неизвестного сигнала $f(t)$. Как было показано выше, для осуществления автоматического прогноза произвольного сигнала требуется реализовать передаточную функцию трансцендентного бесконечномерного объекта $e^{\tau p}$.

2.2.1. Построение реализуемых прогнозаторов

Рассмотрим далее разложение функции $e^{\tau p}$ в ряд Бурмана – Лагранжа (2.10) по степеням

$$W(p) = \frac{p}{\mu p + 1}, \quad \mu \geq 0. \quad (2.24)$$

Лемма 2.3. *Функция (2.24) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.5 при $a = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что в силу определения функция $W(p)$ является аналитической всюду на комплексной плоскости \mathbb{C} , кроме точки $p = -1/\mu$ ($\mu \neq 0$), в которой $W(p)$ имеет полюс первого порядка. При $\mu = 0$ функция $W(p)$ является аналитической всюду на комплексной плоскости \mathbb{C} .

Покажем теперь, что $W(p)$ является правильной в точке $p = 0$. Так как предел

$$\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = 0$$

существует и конечен, то условие правильности функции $W(p)$ выполнено. Кроме того, функция $W(p)$ имеет в точке $p = 0$ нуль первого порядка. В самом деле, учитывая определение (2.24), получаем

$$\begin{aligned} W(0) &= \frac{0}{\mu \cdot 0 + 1} = 0, \\ W'(p)|_{p=0} &= \left(\frac{p}{\mu p + 1} \right)' \Big|_{p=0} = \\ &= \frac{1 \cdot (\mu p + 1) - p \cdot \mu}{(\mu p + 1)^2} \Big|_{p=0} = \frac{1}{(\mu \cdot 0 + 1)^2} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим далее разложение функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням функции (2.24). С этой целью докажем следующую теорему.

Теорема 2.6. *Для функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ разложение в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням функции (2.24) существует и имеет вид*

$$e^{\tau p} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{p^n}{(\mu p + 1)^n}. \quad (2.25)$$

Формула для коэффициентов α_n определяется следующей формулой:

$$\alpha_n = \frac{\tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A_n^k \left(\frac{\mu}{\tau} \right)^k, \quad n \geq 1; \quad \alpha_0 = 1. \quad (2.26)$$

Доказательство. В силу теоремы 2.5, замечания 2.4 и леммы 2.3 ряд Бурмана-Лагранжа для функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ по степеням функции (2.24) существует.

Найдём теперь расчетную формулу для коэффициентов α_n , $n \geq 0$. При $n = 0$ имеем $\alpha_0 = \Psi(0) = 1$. Рассмотрим теперь случай $n \geq 1$. Из формулы (2.23), учитывая формулу (2.24), после элементарных преобразований нетрудно получить

$$\alpha_n = \frac{\tau}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} [e^{\tau p} (\mu p + 1)^n], \quad n \geq 1.$$

Отсюда, применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, находим

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\tau}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (e^{\tau p})^{(n-1-k)} ((\mu p + 1)^n)^{(k)} = \\ &= \frac{\tau}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \tau^{n-1-k} e^{\tau p} A_n^k \mu^k (\mu p + 1)^{n-k}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь C_{n-1}^k и A_n^k — число сочетаний и размещений соответственно,

$$C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}, \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Переходя в (2.27) к пределу при $p \rightarrow 0$, после очевидных преобразований, окончательно получаем формулу (2.26) для коэффициентов α_n . Теорема доказана.

Таким образом, при $\mu > 0$ в области $\operatorname{Re} p > -\frac{1}{\mu}$ получаем реализуемое разложение функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ по степеням аналитической функции $W(p) = \frac{p}{\mu p + 1}$. Нетрудно проверить, что при $\mu = 0$ коэффициенты рядов Тейлора и Бурмана-Лагранжа совпадают, т. е. μ можно рассматривать как параметр регуляризации, применяемый для решения некорректных задач [65].

Отметим, что на параметр μ можно накладывать дополнительные требования [20]. Например, μ может быть выбрано из условия точного равенства какой-либо частичной суммы и суммы всего ряда, или выбор μ может быть сделан с целью усиления сходимости ряда (2.10). В частности, в [20, 60, 78] предлагается принять

$$\mu = \frac{\Psi'(0)}{\alpha_0}. \quad (2.28)$$

Так как в рассматриваемом случае $\Psi'(p) = \tau e^{\tau p}$ и $\alpha_0 = 1$, то формула (2.28) определяет значение μ :

$$\mu = \tau. \quad (2.29)$$

Тогда формула (2.26) принимает вид

$$\alpha_n = \frac{\tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A_n^k, \quad n \geq 1; \quad \alpha_0 = 1. \quad (2.30)$$

С помощью ряда (2.25) найдем передаточную функцию автоматического прогнозатора. С этой целью представим разложение (2.25) в следующем виде:

$$e^{\tau p} = \sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{p^n}{(\mu p + 1)^n} + \Delta_N(p), \quad (2.31)$$

где $\Delta_N(p)$ — остаточный член ряда Бурмана-Лагранжа. Передаточную функцию прогнозатора рассмотрим в виде

$$\Psi_N(p) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{p^n}{(\mu p + 1)^n}. \quad (2.32)$$

На рис. 18–20 представлены результаты моделирования прогнозатора (2.32) при $\mu = 0,01$ и $N = 3$. Прогноз для сигнала $t \ln(t + 1)$ изображен на рис. 21.

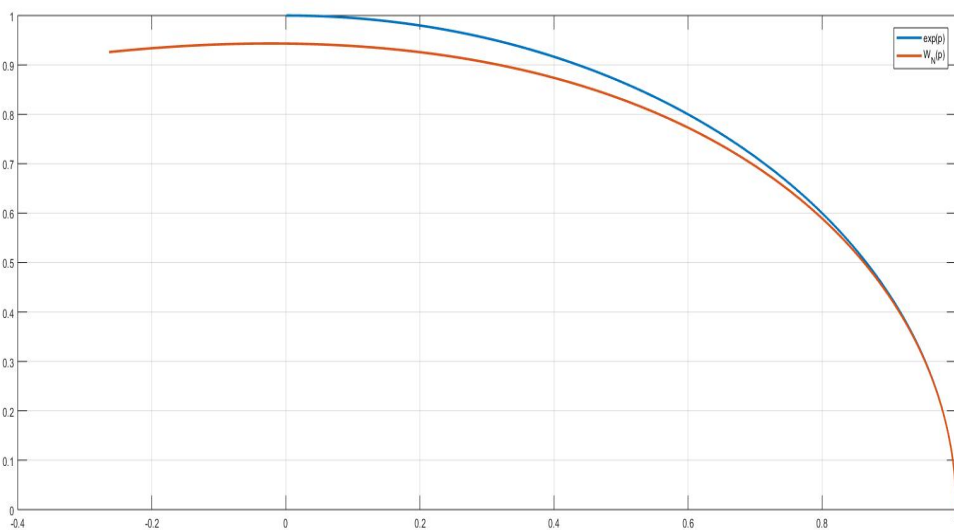


Рис. 18. АФЧХ функций e^p и $W_N(p)$

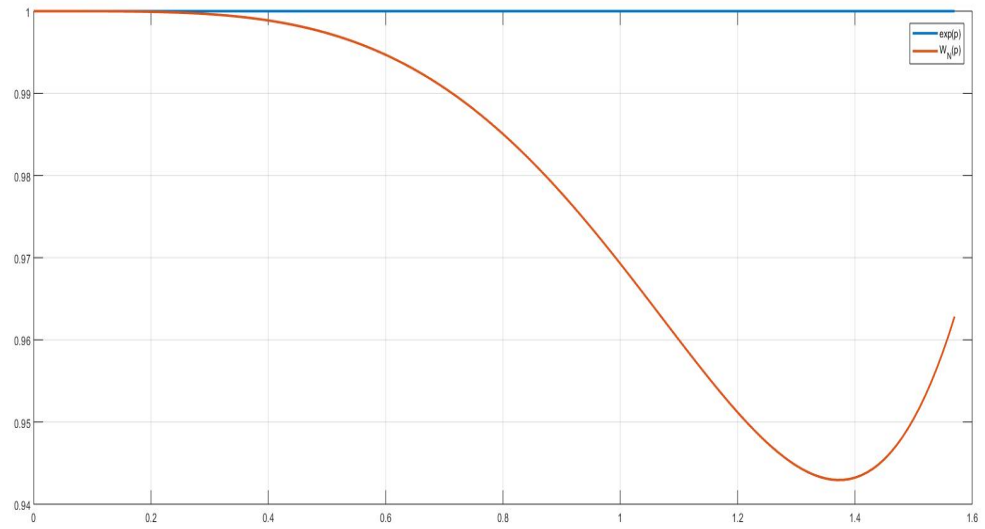


Рис. 19. АЧХ функций e^p и $W_N(p)$

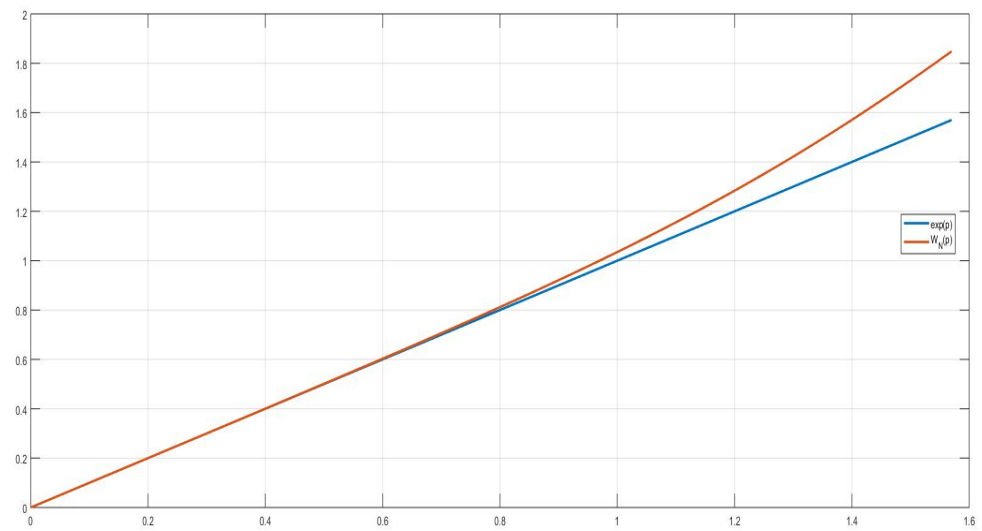


Рис. 20. АФХ функций e^p и $W_N(p)$

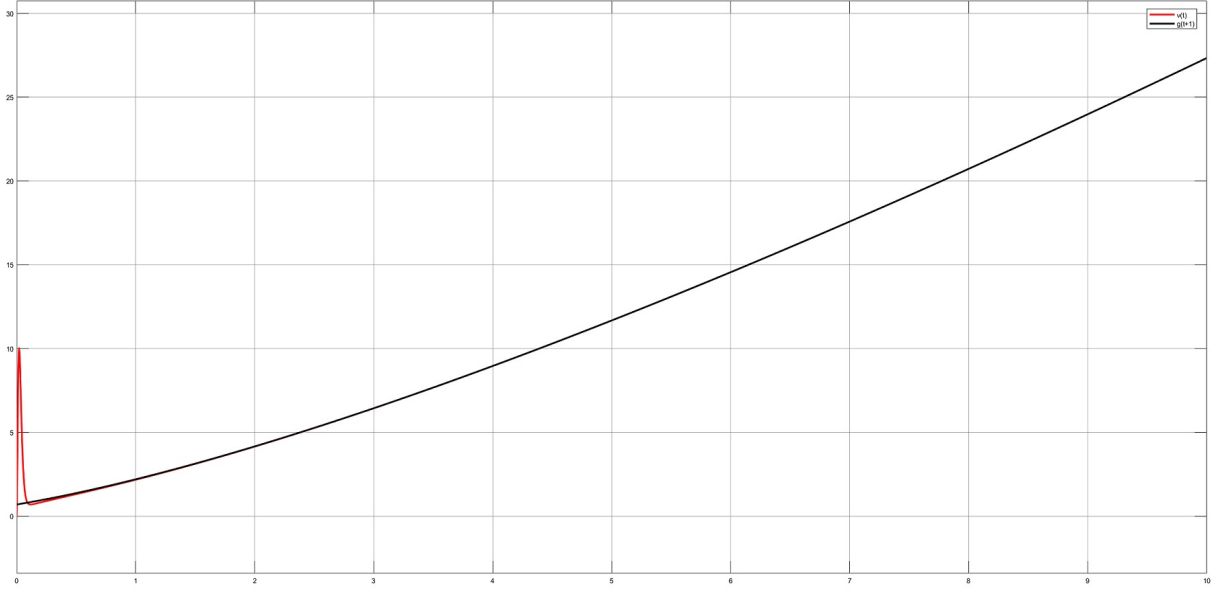


Рис. 21. Прогноз сигнала $t \ln(t + 1)$

2.2.2. Исследование точности реализуемых прогнозаторов

Исследуем теперь точность прогнозатора (2.32) и докажем следующую теорему.

Теорема 2.7. Пусть R — произвольное действительное число, удовлетворяющее условию $R > 0$, $R \neq \frac{1}{\mu}$. Тогда остаточный член $\Delta_N(p)$ ряда Бурмана-Лагранжа (2.31) удовлетворяет следующему неравенству:

$$|\Delta_N(j\omega)| \leq \frac{e^{\tau R}}{|\mu R - 1|} \frac{\nu^{N+1}}{1 - \nu} \quad \forall \omega \in [0, q\Omega], \quad (2.33)$$

где

$$\Omega = \frac{R}{\sqrt{2\mu R + 1}}; \quad (2.34)$$

q — произвольное действительное число, $0 < q < 1$; ν — константа, удовлетворяющая условию

$$\nu = \frac{q(\mu R + 1)}{\sqrt{\mu^2 q^2 R^2 + 2\mu R + 1}} < 1. \quad (2.35)$$

Доказательство. Функция $\Psi(p) = e^{\tau p}$, $p \in \mathbb{C}$, является аналитической во всей комплексной плоскости \mathbb{C} . Функция $W(p) = \frac{p}{\mu p + 1}$, $\mu > 0$, аналитическая в \mathbb{C} , кроме особой точки $p = -\frac{1}{\mu}$, которая, как нетрудно проверить, является простым полюсом функции $W(p)$.

Для доказательства теоремы воспользуемся формулой (2.12). Пусть C — окружность $|z| = R$, $z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим теперь $p \in \mathbb{C}$, лежащие на мнимой оси

$p = j\omega$, когда $0 \leq \omega < R$. После очевидного преобразования из (2.12) получаем

$$\Delta_N(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\Psi(z)W'(z)}{\left(1 - \frac{W(p)}{W(z)}\right)W(z)} \frac{W^{N+1}(p)}{W^{N+1}(z)} dz. \quad (2.36)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| = \left| \frac{p(\mu z + 1)}{(\mu p + 1)z} \right| = \left| \frac{p}{\mu p + 1} \right| \left| \frac{\mu z + 1}{z} \right|. \quad (2.37)$$

Оценим (2.37) сверху. С этой целью рассмотрим множители, входящие в правую часть (2.37). Имеем

$$\left| \frac{\mu z + 1}{z} \right| = \frac{|\mu z + 1|}{|z|} = \frac{|\mu z + 1|}{R} \leq \frac{\mu|z| + 1}{R} = \frac{\mu R + 1}{R}. \quad (2.38)$$

Введем обозначение

$$\rho = \frac{\mu R + 1}{R} = \mu + \frac{1}{R}. \quad (2.39)$$

Тогда оценка (2.38) принимает вид

$$\left| \frac{\mu z + 1}{z} \right| \leq \rho. \quad (2.40)$$

Аналогично оцениваем

$$\left| \frac{p}{\mu p + 1} \right| = \left| \frac{j\omega}{\mu j\omega + 1} \right| = \frac{\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}}. \quad (2.41)$$

Таким образом, получаем оценку

$$\left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| \leq \frac{\rho\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}}. \quad (2.42)$$

Покажем далее, что имеет место неравенство

$$\left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| < 1. \quad (2.43)$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$\frac{\rho\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}} < 1. \quad (2.44)$$

Очевидно, последнее неравенство равносильно следующему:

$$(\rho^2 - \mu^2)\omega^2 - 1 < 0. \quad (2.45)$$

Так как имеет место формула (2.39) и $R > 0$, то $\rho > \mu$ и неравенство (2.45) принимает вид

$$\omega^2 - \frac{1}{\rho^2 - \mu^2} < 0 \quad (2.46)$$

или

$$\left(\omega + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}\right) \left(\omega - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}\right) < 0. \quad (2.47)$$

Таким образом,

$$\omega \in \left(-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}, \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}\right). \quad (2.48)$$

Учитывая условие $\omega \geq 0$, окончательно получаем

$$\omega \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}\right). \quad (2.49)$$

Отсюда сразу находим

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\mu + \frac{1}{R})^2 - \mu^2}} \quad (2.50)$$

После элементарных преобразований из (2.50) получаем (2.34). Так как $2\mu R > 0$, то

$$\Omega = \frac{R}{\sqrt{2\mu R + 1}} < R. \quad (2.51)$$

Обозначим

$$\chi(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}}. \quad (2.52)$$

Нетрудно проверить, что $\chi(\omega)$ монотонно возрастает для всех $\omega \geq 0$. Действительно,

$$\chi'(\omega) = \left(\frac{\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}}\right)' = \frac{1}{(\mu^2\omega^2 + 1)^{3/2}} > 0 \quad \forall \omega \geq 0. \quad (2.53)$$

Поэтому для $\omega \in [0, q\Omega]$, где q — произвольное действительное число, удовлетворяющее условию $0 < q < 1$, функция $\chi(\omega)$ достигает своего максимального значения при $\omega = q\Omega$:

$$\max_{\omega \in [0, q\Omega]} \chi(\omega) = \chi(q\Omega) = \frac{q\Omega}{\sqrt{\mu^2 q^2 \Omega^2 + 1}}. \quad (2.54)$$

Принимая во внимание формулу (2.34), получаем

$$\chi(q\Omega) = \frac{qR}{\sqrt{\mu^2 q^2 R^2 + 2\mu R + 1}}. \quad (2.55)$$

Тогда для (2.42) имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| &= \rho\chi(\omega) \leq \rho\chi(q\Omega) = \frac{\rho q R}{\sqrt{\mu^2 q^2 R^2 + 2\mu R + 1}} = \\ &= \frac{q(\mu R + 1)}{\sqrt{\mu^2 q^2 R^2 + 2\mu R + 1}} = \nu. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Покажем теперь, что $\nu < 1$. В самом деле, из (2.35) получаем условие

$$\nu = \frac{q(\mu R + 1)}{\sqrt{\mu^2 q^2 R^2 + 2\mu R + 1}} < 1. \quad (2.57)$$

Нетрудно видеть, что последнее неравенство эквивалентно

$$q^2(\mu R + 1)^2 < \mu^2 q^2 R^2 + 2\mu R + 1.$$

Отсюда, после элементарных преобразований получаем неравенство

$$q^2(2\mu R + 1) < 2\mu R + 1,$$

которое является очевидным в силу условия $q < 1$.

Рассмотрим далее $W'(z)$. Имеем

$$W'(z) = \left(\frac{z}{\mu z + 1} \right)' = \frac{1}{(\mu z + 1)^2}. \quad (2.58)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{W'(z)}{W(z)} \right| &= \left| \frac{\mu z + 1}{(\mu z + 1)^2 z} \right| = \frac{1}{|(\mu z + 1)z|} = \\ &= \frac{1}{|\mu z + 1||z|} = \frac{1}{|\mu z + 1|R}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Исследуем $|\mu z + 1|$. Нетрудно проверить следующие соотношения:

$$|\mu z + 1| = |\mu z - (-1)| \geq |\mu|z| - 1| = |\mu R - 1|$$

В результате из (2.59) получаем оценку

$$\left| \frac{W'(z)}{W(z)} \right| \leq \frac{1}{R|\mu R - 1|}, \quad \forall z: |z| = R; \mu R \neq 1. \quad (2.60)$$

Принимая во внимание формулу (2.35), оценим теперь следующий модуль:

$$\left| 1 - \frac{W(p)}{W(z)} \right| \geq \left| 1 - \left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| \right| \geq |1 - \nu| = 1 - \nu. \quad (2.61)$$

Так как имеет место равенство

$$\max_{z: |z| \leq R} |\Psi(z)| = \max_{z: |z| \leq R} |e^{\tau z}| = e^{\tau R} \quad (2.62)$$

и длина контура C , который представляет собой окружность $|z| = R$, равна $2\pi R$, то в силу формул (2.36), (2.35), (2.60), (2.61), (2.62) $\forall \omega \in [0, q\Omega]$ окончательно получаем оценку (2.33). Таким образом, теорема доказана.

Из (2.33) следует, что оценка $\Delta_N(j\omega)$ не зависит от ω . Поэтому на любом отрезке $\omega \in [0, q\Omega]$ ошибка аппроксимации $\Delta_N(j\omega)$ равномерно стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Следствие 2.3. Пусть задано произвольное $\Omega^* > 0$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\Delta_N(j\omega)| = 0 \quad \forall \omega \in [0, \Omega^*]. \quad (2.63)$$

Доказательство. В силу аналитичности функций $\Psi(p)$ и $W(p)$ радиус R может быть выбран сколь угодно большим. Выберем R из условия $q\Omega = \Omega^*$, т. е. учитывая формулу (2.34)

$$\Omega^* = \frac{qR}{\sqrt{2\mu R + 1}}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно R

$$q^2 R^2 - 2\mu(\Omega^*)^2 R - (\Omega^*)^2 = 0,$$

решая которое, находим

$$R = \frac{\Omega^*}{q^2} \left(\mu\Omega^* + \sqrt{(\mu\Omega^*)^2 + q^2} \right).$$

Из (2.33) следует, что оценка $\Delta_N(j\omega)$ не зависит от ω . Поэтому в силу условия $\nu < 1$ на любом отрезке $\omega \in [0, \Omega^*]$ ошибка аппроксимации $\Delta_N(j\omega)$ равномерно стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Следствие доказано.

Следует особо отметить, что $\Delta_N(j\omega)$ представляет собой АФЧХ ошибки аппроксимации функции с помощью прогнозатора (2.32). Так как в полосе частот $[0, \Omega^*]$ амплитудно-фазочастотные характеристики аппроксимирующей модели $\Psi_N(p)$ и исходной функции $e^{\tau p}$ мало отличаются, то для входных сигналов, спектр которых определяется полосой частот $[0, \Omega^*]$, согласно [68] будут мало отличаться и переходные процессы.

2.2.3. Построение модальных прогнозаторов

Рассмотрим далее разложение функции $e^{\tau p}$ в ряд Бурмана-Лагранжа (2.10) по степеням функции

$$W(p) = \frac{pL(p)}{D(p)}, \quad (2.64)$$

где в соответствии с [25] многочлены $D(p)$ и $L(p)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ определяются по следующим формулам:

$$D(p) = \sum_{i=0}^m d_i p^{m-i}, \quad L(p) = \sum_{i=s}^m d_i p^{m-i}, \quad m \geq s. \quad (2.65)$$

Здесь $D(p)$ — произвольный алгебраический многочлен Гурвица степени m над полем действительных чисел \mathbb{R} .

Замечание 2.5. Нетрудно заметить, что при $m = s = 1$ в силу формул (2.64) и (2.65) справедливо равенство

$$W(p) = \frac{d_1 p}{d_0 p + d_1} = \frac{p}{\frac{d_0}{d_1} p + 1} = \frac{p}{\mu p + 1}, \quad \mu = \frac{d_0}{d_1}. \quad (2.66)$$

Таким образом, передаточная функция (2.64) совпадает с рассмотренной ранее передаточной функцией (2.24).

Очевидно, что в силу определения функция $W(p)$ является аналитической всюду на комплексной плоскости \mathbb{C} , кроме конечного числа точек p_k (таких точек не более m), в которых $D(p_k) = 0$ и функция $W(p)$ имеет полюс соответствующего порядка.

Покажем теперь, что $W(p)$ является правильной в точке $p = 0$. Так как предел

$$\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = 0$$

существует и конечен, то условие правильности функции $W(p)$ выполнено. Кроме того, функция $W(p)$ имеет в точке $p = 0$ нуль первого порядка. В самом деле,

учитывая определение многочленов $D(p)$ и $L(p)$ (см. формулы (2.65)), получаем

$$\begin{aligned} W(0) &= \frac{0 \cdot L(0)}{D(0)} = \frac{0 \cdot d_m}{d_m} = 0, \\ W'(p)|_{p=0} &= \left(\frac{pL(p)}{D(p)} \right)' \Big|_{p=0} = \\ &= \frac{(L(p) + pL'(p))D(p) - pL(p)D'(p)}{D^2(p)} \Big|_{p=0} = \\ &= \frac{(d_m + 0 \cdot d_{m-1})d_m - 0 \cdot d_m \cdot d_{m-1}}{d_m^2} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Согласно формулам (2.10) имеем

$$\Psi(p) = e^{\tau p} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n W^n(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{pL(p)}{D(p)} \right)^n. \quad (2.67)$$

Так как при $p = 0$ разложение (2.67) принимает вид

$$e^{\tau \cdot 0} = 1 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{pL(p)}{D(p)} \right)^n \Big|_{p=0} = \alpha_0 + 0 = \alpha_0, \quad (2.68)$$

то очевидно, что

$$\alpha_0 = 1. \quad (2.69)$$

При $n \geq 1$ формулы для коэффициентов α_n ряда Бурмана-Лагранжа (2.67) могут быть найдены с помощью формулы (2.23). Так как

$$\Psi'(p) = (e^{\tau p})' = \tau e^{\tau p},$$

то после элементарных преобразований из (2.23) имеем

$$\alpha_n = \frac{\tau}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{d p^{n-1}} \left[\frac{D^n(p)}{L^n(p)} e^{\tau p} \right], \quad n \geq 1. \quad (2.70)$$

Применяя к формуле правило Лейбница дифференцирования произведения двух функций, получаем

$$\alpha_n = \frac{\tau}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (e^{\tau p})^{(n-1-k)} \left(\frac{D^n(p)}{L^n(p)} \right)^{(k)}, \quad n \geq 1.$$

Здесь C_{n-1}^k — биномиальный коэффициент. Нетрудно проверить, что

$$(e^{\tau p})^{(n-1-k)} = \tau^{n-1-k} e^{\tau p}.$$

Из формулы (2.70), учитывая последнее равенство и свойства пределов, найдем

$$\alpha_n = \frac{\tau}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^k}{\tau^k} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{D^n(p)}{L^n(p)} \right)^{(k)}, \quad n \geq 1.$$

Принимая во внимание вид многочленов $D(p)$ и $L(p)$, определяемых формулами (2.65), представим многочлен $D(p)$ в следующем виде:

$$D(p) = \sum_{i=0}^m d_i p^{m-i} = \sum_{i=0}^{s-1} d_i p^{m-i} + \sum_{i=s}^m d_i p^{m-i} = Q(p) + L(p),$$

где

$$Q(p) = \sum_{i=0}^{s-1} d_i p^{m-i} = p^{m-s+1} Q_0(p), \quad Q_0(p) = \sum_{i=0}^{s-1} d_i p^{s-1-i}. \quad (2.71)$$

Тогда

$$\frac{D^n(p)}{L^n(p)} = \left(\frac{Q(p)}{L(p)} + 1 \right)^n.$$

Отсюда, учитывая формулу бинома Ньютона и (2.71), после элементарных преобразований получаем

$$\frac{D^n(p)}{L^n(p)} = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{Q^i(p)}{L^i(p)} = 1 + \sum_{i=1}^n C_n^i p^{i(m-s+1)} \frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)}. \quad (2.72)$$

Выпишем далее формулу для k -й ($k = \overline{1, n-1}$) производной выражения (2.72). В силу линейности операции дифференцирования, а также правила Лейбница дифференцирования произведения двух функций, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{D^n(p)}{L^n(p)} \right)^{(k)} &= \frac{d^k}{d p^k} \sum_{i=1}^n C_n^i p^{i(m-s+1)} \frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)} = \\ &= \sum_{i=1}^n C_n^i \frac{d^k}{d p^k} \left[p^{i(m-s+1)} \frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n C_n^i \sum_{r=0}^k C_k^r \left(p^{i(m-s+1)} \right)^{(r)} \left[\frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)} \right]^{(k-r)}. \end{aligned}$$

Так как справедливо равенство

$$\left(p^{i(m-s+1)} \right)^{(r)} = \begin{cases} 0, & i(m-s+1) < r, \\ r!, & i(m-s+1) = r, \\ A_{i(m-s+1)}^r p^{i(m-s+1)-r}, & i(m-s+1) > r, \end{cases} \quad (2.73)$$

то окончательно получаем следующее выражение

$$\left(\frac{D^n(p)}{L^n(p)}\right)^{(k)} = \sum_{r=0}^k C_k^r \sum_{i=1}^n C_n^i A_{i(m-s+1)}^r p^{i(m-s+1)-r} \left[\frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)}\right]^{(k-r)}. \quad (2.74)$$

Рассмотрим теперь формулу (2.74) при $p \rightarrow 0$. Отметим, что в силу свойств пределов и определения многочленов $D(p)$ и $L(p)$, имеет место равенство

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{D^n(p)}{L^n(p)} = 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Пусть далее

$$q = m - 2s.$$

Тогда, переходя к пределу в (2.74) при $p \rightarrow 0$ и учитывая свойства пределов и соотношение (2.73), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{D^n(p)}{L^n(p)}\right)^{(k)} &= \\ &= \sum_{r=0}^k C_k^r \sum_{i=1}^n C_n^i A_{i(s+q+1)}^r \lim_{p \rightarrow 0} p^{i(s+q+1)-r} \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)}\right]^{(k-r)} = \\ &= \sum_{r=0}^k C_k^r r! \sum_{i=1}^n C_n^i \left[\frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)}\right]_{p=0}^{(k-r)}. \end{aligned}$$

При этом

$$C_k^r r! = A_k^r.$$

Таким образом, формула (2.70) принимает окончательный вид

$$\alpha_n = \frac{\tau}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^k}{\tau^k} \sum_{r=0}^k A_k^r \sum_{i=1}^n C_n^i \left[\frac{Q_0^i(p)}{L^i(p)}\right]_{p=0}^{(k-r)}. \quad (2.75)$$

Выпишем теперь передаточную функцию модального прогнозатора. С этой целью представим разложение (2.67) в следующем виде:

$$e^{\tau p} = \sum_{n=0}^N \alpha_n W^n(p) + \Delta_N(p) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \left(\frac{pL(p)}{D(p)}\right)^n + \Delta_N(p), \quad (2.76)$$

где многочлены $D(p)$ и $L(p)$ определяются формулами (2.65), α_n являются коэффициентами ряда Бурмана-Лагранжа и определяются формулами (2.69), (2.75), $\Delta_N(p)$ — остаточный член ряда Бурмана-Лагранжа в рассматриваемом случае, когда функция $W(p)$ задается формулой (2.64).

Таким образом, передаточная функция модального прогнозатора принимает окончательный вид

$$\Psi_N(p) = \sum_{n=0}^N \alpha_n W^n(p) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \left(\frac{pL(p)}{D(p)} \right)^n. \quad (2.77)$$

Следует отметить, что для практического вычисления прогноза, непосредственная реализация формулы (2.77) является нецелесообразной, т.к. каждое слагаемое содержит степень функции $W(p)$, вычисление которой требует существенных временных затрат. Схема, представленная на рис. 22, позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

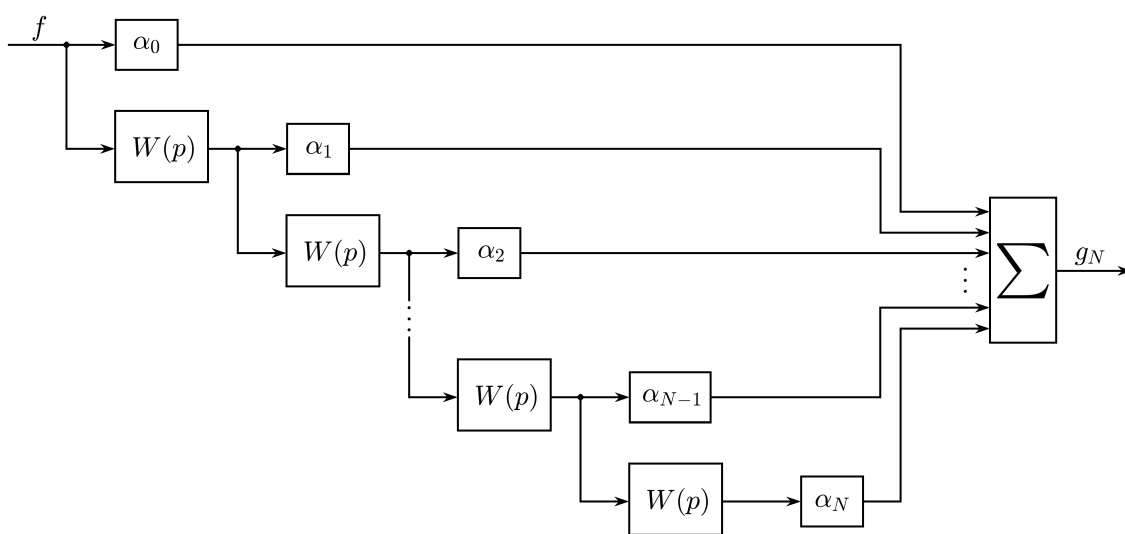


Рис. 22. Структурная схема прогнозаторов

На рис. 23 представлены соответственно графики АФЧХ для e^{Tp} и передаточной функции модального прогнозатора $\Psi_{M,N}(j\omega)$ при $\tau = 0,25$ с, $\mu_1 = 0,018$ с, $\mu_2 = 0,02$ с, $N = 3$. На рис. 24 изображены графики прогноза при $h = 0,001$ с для сигнала

$$f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t). \quad (2.78)$$

Аналогичные графики для $N = 5$ представлены на рис. 25–26.

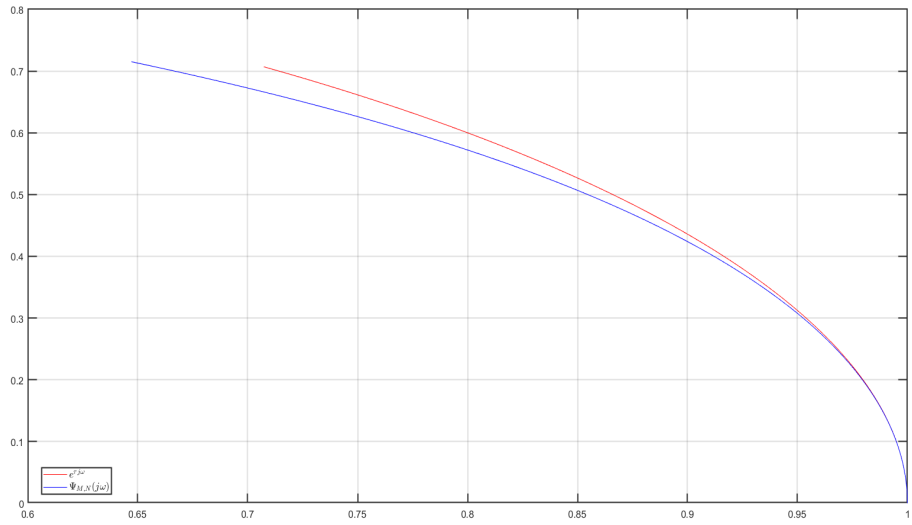


Рис. 23. АФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$ и $\Psi_{M,N}(j\omega)$

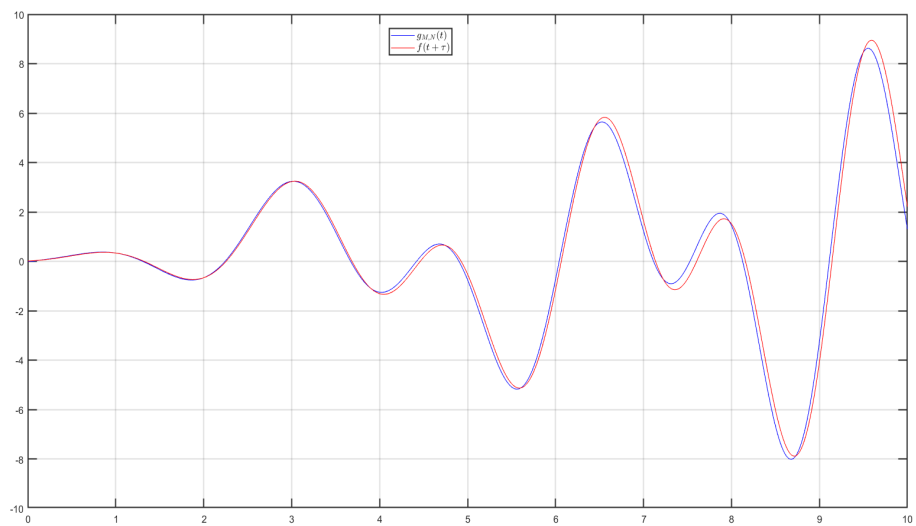


Рис. 24. Прогноз сигнала $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$

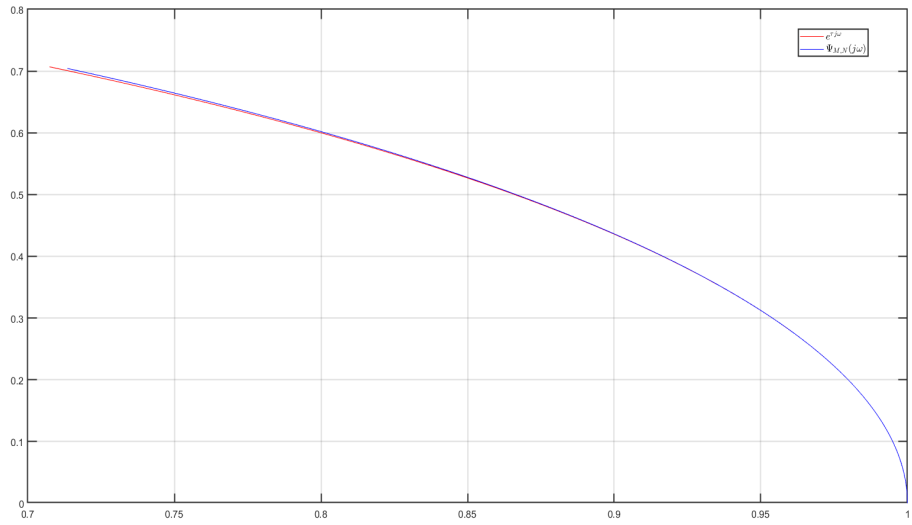


Рис. 25. АФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$ и $\Psi_{M,N}(j\omega)$

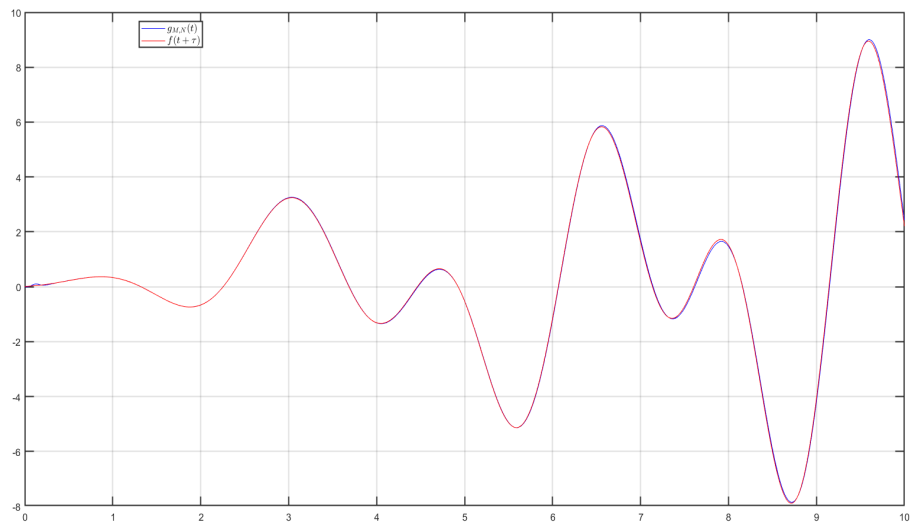


Рис. 26. Прогноз сигнала $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$

2.2.4. Построение дифференцирующих наблюдателей

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.79)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^m$; $y(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) = f(t)$; матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = (1, 0, \dots, 0). \quad (2.80)$$

Покажем, что пара матриц $\{A, C\}$ является полностью наблюдаемой [2]. С этой целью выпишем матрицу наблюдаемости, определяемую по следующей формуле [2]:

$$Q_H = [C^T; A^T C^T; (A^T)^2 C^T; \dots; (A^T)^{n-1} C^T]. \quad (2.81)$$

Учитывая вид матриц A и C , нетрудно получить, что

$$Q_H = E, \quad (2.82)$$

где E — единичная матрица порядка m . Из (2.82) сразу следует, что

$$\text{rank } Q_H = \text{rank } E = m. \quad (2.83)$$

Равенство (2.83) совпадает с условием полной наблюдаемости [2] пары матриц $\{A, C\}$.

Далее для системы (2.79) синтезируем наблюдатель [48]

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (2.84)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор оценки вектора состояний; $\hat{y}(t)$ — выход наблюдателя; $K \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ — матрица-столбец коэффициентов усиления наблюдателя. Подставляя в первое уравнение системы (2.84) уравнение выхода наблюдателя, после очевидных преобразований получаем

$$\dot{z}(t) = (A - KC)z(t) + Ky(t). \quad (2.85)$$

Принимая во внимание равенство $y(t) = f(t)$, перепишем уравнение наблюдателя (2.85) следующим образом:

$$\dot{z}(t) = (A - KC)z(t) + Kf(t). \quad (2.86)$$

Для полного решения задачи синтеза наблюдающего устройства (2.86) определим матрицу K коэффициентов усиления наблюдателя. В силу полной наблюдаемости пары матриц $\{A, C\}$ для произвольного алгебраического полинома $D(p)$ степени m существует единственная матрица K , удовлетворяющая условию [2]

$$D(p) = \det(Ep - A + KC). \quad (2.87)$$

В [2] показано, что матрица K может быть единственным образом найдена по формуле

$$K = R^{-1}L, \quad (2.88)$$

где

$$R = (MQ_{\text{н}})^{\text{T}}, \quad (2.89)$$

$Q_{\text{н}}$ — матрица наблюдаемости для пары $\{A, C\}$, матрица $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ имеет следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

В соотношении (2.88) матрица-столбец $L \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ определяется по формуле

$$L = \begin{pmatrix} d_m \\ d_{m-1} \\ \dots \\ d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

где d_i ($i = \overline{1, m}$) — коэффициенты желаемого многочлена $D(p)$, т. е.

$$D(p) = p^m + d_1 p^{m-1} + \dots + d_{m-1} p + d_m = \sum_{i=0}^m d_i p^{m-i}, \quad d_0 = 1. \quad (2.92)$$

Так как $Q_{\text{н}} = E$ и имеет место очевидное равенство $M = M^{\text{T}}$, согласно (2.89) получаем $R = M$. Тогда из формулы (2.88) следует равенство

$$MK = L. \quad (2.93)$$

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{m-1} \\ k_m \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

Учитывая вид матрицы M , определяемой формулой (2.90), непосредственным умножением находим

$$MK = \begin{pmatrix} k_m \\ k_{m-1} \\ \dots \\ k_2 \\ k_1 \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Из равенства (2.93), принимая во внимание формулы (2.95) и (2.91), сразу получаем соотношение для определения элементов матрицы-столбца K :

$$k_i = d_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.96)$$

Далее найдем передаточную функцию, связывающую входной сигнал $f(t)$ и $z_i(t)$. С этой целью представим матричное уравнение наблюдателя (2.86) в координатной форме. Учитывая вид матриц A , C и K , определяемых равенствами (2.80) и (2.94), после элементарных преобразований получаем

$$A - KC = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение наблюдателя (2.86) принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = -k_1 z_1(t) + z_2(t) + k_1 f(t), \\ \dot{z}_2(t) = -k_2 z_1(t) + z_3(t) + k_2 f(t), \\ \dots \\ \dot{z}_{m-1}(t) = -k_{m-1} z_1(t) + z_m(t) + k_{m-1} f(t), \\ \dot{z}_m(t) = -k_m z_1(t) + k_m f(t). \end{array} \right. \quad (2.97)$$

В соответствии со свойствами определителей вынесем из первого столбца определителя $\Delta_1(p)$ общий множитель $F(p)$. Получаем

$$\Delta_1(p) = F(p) \begin{vmatrix} k_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_2 & p & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m-1} & 0 & 0 & \dots & p & -1 \\ k_m & 0 & 0 & \dots & 0 & p \end{vmatrix} = F(p) \tilde{\Delta}_1(p). \quad (2.102)$$

Представим определитель $\tilde{\Delta}_1(p)$ в виде разности двух определителей

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(p) &= \begin{vmatrix} p + k_1 - p & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_2 & p & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m-1} & 0 & 0 & \dots & p & -1 \\ k_m & 0 & 0 & \dots & 0 & p \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} p + k_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_2 & p & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m-1} & 0 & 0 & \dots & p & -1 \\ k_m & 0 & 0 & \dots & 0 & p \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} p & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Нетрудно проверить, что первый определитель в правой части (2.103) совпадает с $\Delta(p)$, а второй определитель равен p^m . Тогда

$$\tilde{\Delta}_1(p) = \Delta(p) - p^m. \quad (2.104)$$

Таким образом, с помощью формул (2.102), (2.104), (2.101) по методу Крамера находим

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{\tilde{\Delta}_1(p)}{\Delta(p)} F(p) = \frac{\Delta(p) - p^m}{\Delta(p)} F(p) = \\ &= F(p) - \frac{p^m}{\Delta(p)} F(p) = F(p) - \frac{p^m}{D(p)} F(p). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Тогда из (2.109) получаем формулу

$$\begin{aligned} Z_i(p) &= p^{i-1}F(p) - \frac{p^m R_{i-1}(p)}{D(p)}F(p) = \\ &= \frac{p^{i-1}D(p) - p^m R_{i-1}(p)}{D(p)}F(p), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Рассмотрим формулу (2.111) подробнее. В силу (2.92) и (2.110) после очевидных преобразований находим

$$\begin{aligned} p^{i-1}D(p) - p^m R_{i-1}(p) &= p^{i-1} \sum_{j=0}^m d_j p^{m-j} - p^m \sum_{j=0}^{i-1} d_j p^{i-1-j} = \\ &= p^{i-1} \left(\sum_{j=0}^{i-1} d_j p^{m-j} + \sum_{j=i}^m d_j p^{m-j} \right) - p^m \sum_{j=0}^{i-1} d_j p^{i-1-j} = \\ &= p^{i-1} \sum_{j=i}^m d_j p^{m-j}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем формулу

$$Z_i(p) = W_i(p)F(p), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.112)$$

где

$$W_i(p) = \frac{Q_i(p)}{D(p)}, \quad Q_i(p) = p^{i-1} \sum_{j=i}^m d_j p^{m-j}. \quad (2.113)$$

З а м е ч а н и е 2.6. Нетрудно заметить, что передаточная функция $W_i(p)$, определяемая формулой (2.113), при $i = 2$ совпадает с передаточной функцией (2.64) при $s = 2$. В самом деле, подставляя $i = 2$ в (2.113), получаем

$$W_2(p) = \frac{Q_2(p)}{D(p)}, \quad Q_2(p) = p \sum_{j=2}^m d_j p^{m-j}. \quad (2.114)$$

С другой стороны, при $s = 2$ в формуле (2.64) имеем

$$L(p) = \sum_{i=2}^m d_i p^{m-i}.$$

Поэтому

$$Q_2(p) = pL(p)$$

и функция (2.114) совпадает с передаточной функцией (2.64). Отсюда вытекает важный результат: передаточная функция (2.64) при $s = 2$ является передаточной функцией наблюдателя состояний относительно второй координаты.

2.2.5. Исследование точности модальных прогнозаторов

Исследуем далее точность прогнозатора с передаточной функцией (2.77). Как и в п. 2.2.2, обозначим через $R > 0$ радиус круга аналитичности функции $\Psi(z) = e^{\tau z}$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть C — окружность $|z| = R$. Рассмотрим теперь $p \in \mathbb{C}$, лежащие на мнимой оси $p = j\omega$, когда $0 \leq \omega < R$.

Воспользуемся формулой (2.36) и рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| &= \left| \frac{p(\mu_1 z + 1)(\mu_2 z + 1)}{(\mu_1 p + 1)(\mu_2 p + 1)z} \right| = \\ &= \left| \frac{p}{(\mu_1 p + 1)(\mu_2 p + 1)} \right| \left| \frac{(\mu_1 z + 1)(\mu_2 z + 1)}{z} \right|. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Оценим (2.115) сверху. Для этого рассмотрим множители, входящие в правую часть (2.115). Получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\mu_1 z + 1)(\mu_2 z + 1)}{z} \right| &= \frac{|\mu_1 z + 1| |\mu_2 z + 1|}{|z|} = \frac{|\mu_1 z + 1| |\mu_2 z + 1|}{R} \leq \\ &\leq \frac{(\mu_1 |z| + 1)(\mu_2 |z| + 1)}{R} = \frac{(\mu_1 R + 1)(\mu_2 R + 1)}{R}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Введем обозначение

$$\rho = \frac{(\mu_1 R + 1)(\mu_2 R + 1)}{R}. \quad (2.117)$$

В таком случае неравенство (2.116) принимает вид

$$\left| \frac{(\mu_1 z + 1)(\mu_2 z + 1)}{z} \right| \leq \rho. \quad (2.118)$$

Аналогично оцениваем

$$\begin{aligned} \left| \frac{p}{(\mu_1 p + 1)(\mu_2 p + 1)} \right| &= \left| \frac{j\omega}{(\mu_1 j\omega + 1)(\mu_2 j\omega + 1)} \right| = \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{(\mu_1^2 \omega^2 + 1)(\mu_2^2 \omega^2 + 1)}}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Таким образом, получаем оценку

$$\left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| \leq \frac{\rho \omega}{\sqrt{(\mu_1^2 \omega^2 + 1)(\mu_2^2 \omega^2 + 1)}}. \quad (2.120)$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| < 1. \quad (2.121)$$

Неравенство (2.121) будет выполнено, если справедливо неравенство

$$\frac{\rho\omega}{\sqrt{(\mu_1^2\omega^2 + 1)(\mu_2^2\omega^2 + 1)}} < 1. \quad (2.122)$$

Рассмотрим далее случай $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Тогда неравенство (2.122) принимает вид

$$\frac{\rho\omega}{\mu^2\omega^2 + 1} < 1. \quad (2.123)$$

которое равносильно следующему:

$$\mu^2\omega^2 - \rho\omega + 1 > 0. \quad (2.124)$$

Из формулы (2.117) следует, что

$$\rho = \frac{(\mu R + 1)^2}{R} = \frac{\mu^2 R^2 + 2\mu R + 1}{R} = 2\mu + \mu^2 R + \frac{1}{R}. \quad (2.125)$$

Так как $R > 0$ и $\mu > 0$, то

$$\rho > 2\mu \quad (2.126)$$

и неравенство (2.124) принимает вид

$$\left(\omega - \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{2\mu^2}\right) \left(\omega - \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{2\mu^2}\right) > 0. \quad (2.127)$$

Таким образом, учитывая условие $\omega \geq 0$, получаем

$$\omega \in \left[0, \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{2\mu^2}\right) \cup \left(\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{2\mu^2}, +\infty\right). \quad (2.128)$$

Покажем далее, что

$$\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{2\mu^2} > R. \quad (2.129)$$

Действительно, последнее неравенство может быть представлено в виде

$$\sqrt{\rho^2 - 4\mu^2} > 2\mu^2 R - \rho$$

или, после очевидных преобразований,

$$\mu^2 R^2 - R\rho + 1 < 0. \quad (2.130)$$

Принимая во внимание формулу (2.125), получаем

$$\begin{aligned} \mu^2 R^2 - R\rho + 1 &= \mu^2 R^2 - R \frac{(\mu R + 1)^2}{R} + 1 = \\ &= \mu^2 R^2 - (\mu R + 1)^2 + 1 = -2\mu R < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (2.130), а следовательно и (2.129), выполняется.

Положим

$$\Omega = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{2\mu^2}. \quad (2.131)$$

Покажем теперь, что

$$\Omega < R. \quad (2.132)$$

Принимая во внимание (2.131), перепишем последнее неравенство в виде

$$\sqrt{\rho^2 - 4\mu^2} > \rho - 2\mu^2 R \quad (2.133)$$

или, после элементарных преобразований,

$$\mu^2 R^2 - R\rho + 1 < 0. \quad (2.134)$$

Это неравенство совпадает с неравенством (2.130), которое, как было показано выше, выполняется. Таким образом, неравенство (2.132) справедливо.

Рассмотрим далее $\omega \in [0, q\Omega]$, где q — произвольное действительное число, удовлетворяющее условию $0 < q < 1$. Введем в рассмотрение функцию

$$\chi(\omega) = \frac{\omega}{\mu^2\omega^2 + 1}. \quad (2.135)$$

Нетрудно проверить, что $\chi(\omega)$ монотонно возрастает для всех $\omega \in [0, q\Omega]$. Действительно,

$$\chi'(\omega) = \left(\frac{\omega}{\mu^2\omega^2 + 1} \right)' = \frac{1 - \mu^2\omega^2}{(\mu^2\omega^2 + 1)^2}. \quad (2.136)$$

Покажем, что

$$\Omega < \frac{1}{\mu}.$$

В самом деле, учитывая формулу (2.131),

$$\frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}}{2\mu^2} < \frac{1}{\mu}.$$

Тогда

$$\rho - 2\mu < \sqrt{\rho^2 - 4\mu^2}.$$

Так как имеет место неравенство (2.126), то последнее неравенство выполняется. Поэтому $\chi'(\omega) > 0$ для $\omega \in [0, q\Omega]$ и функция $\chi(\omega)$ достигает своего максимального значения при $\omega = q\Omega$:

$$\max_{\omega \in [0, q\Omega]} \chi(\omega) = \chi(q\Omega) = \frac{q\Omega}{\sqrt{\mu^2 q^2 \Omega^2 + 1}}. \quad (2.137)$$

Тогда для (2.120) имеет место следующая оценка:

$$\left| \frac{W(p)}{W(z)} \right| = \rho\chi(\omega) \leq \rho\chi(q\Omega) = \nu. \quad (2.138)$$

Покажем теперь, что $\nu < 1$. В самом деле, из (2.138) получаем условие

$$\nu = \frac{\rho q \Omega}{\sqrt{\mu^2 q^2 \Omega^2 + 1}} < 1. \quad (2.139)$$

Нетрудно видеть, что последнее неравенство эквивалентно

$$\mu^2 q^2 \Omega^2 - \rho q \Omega + 1 > 0.$$

Так как $q\Omega < R$ и выполняется неравенство (2.130), то последнее неравенство также справедливо.

Рассмотрим далее $W'(z)$. Имеем

$$W'(z) = \left(\frac{z}{(\mu_1 z + 1)(\mu_2 z + 1)} \right)' = \frac{1 - \mu_1 \mu_2 z^2}{(\mu_1 z + 1)^2 (\mu_2 z + 1)^2}. \quad (2.140)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{W'(z)}{W(z)} \right| &= \left| \frac{1 - \mu_1 \mu_2 z^2}{(\mu_1 z + 1)^2 (\mu_2 z + 1)^2} \frac{(\mu_1 z + 1)(\mu_2 z + 1)}{z} \right| = \\ &= \frac{|1 - \mu_1 \mu_2 z^2|}{|(\mu_1 z + 1)(\mu_2 z + 1)z|} = \frac{|1 - \mu_1 \mu_2 z^2|}{|\mu_1 z + 1||\mu_2 z + 1||z|} = \\ &= \frac{|1 - \mu_1 \mu_2 z^2|}{|\mu_1 z + 1||\mu_2 z + 1|R}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Исследуем $|\mu_i z + 1|$, $i = 1, 2$. Нетрудно проверить следующие соотношения:

$$|\mu_i z + 1| = |\mu_i z - (-1)| \geq |\mu_i|z| - 1| = |\mu_i R - 1|.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$|1 - \mu_1 \mu_2 z^2| \leq 1 + \mu_1 \mu_2 |z|^2 = 1 + \mu_1 \mu_2 R^2.$$

В результате получаем оценку

$$\left| \frac{W'(z)}{W(z)} \right| \leq \frac{1 + \mu_1 \mu_2 R^2}{R|\mu_1 R - 1||\mu_2 R - 1|}, \quad \forall z: |z| = R; \mu_i R \neq 1. \quad (2.142)$$

В силу формул (2.36), (2.138), (2.142), (2.61), (2.62) окончательно получаем оценку

$$\begin{aligned} |\Delta_N(j\omega)| &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R e^{\tau R} \frac{1 + \mu_1 \mu_2 R^2}{R|\mu_1 R - 1||\mu_2 R - 1|} \frac{\nu^{N+1}}{1 - \nu} = \\ &= \frac{e^{\tau R} (1 + \mu_1 \mu_2 R^2)}{|\mu_1 R - 1||\mu_2 R - 1|} \frac{\nu^{N+1}}{1 - \nu}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Таким образом,

$$|\Delta_N(j\omega)| \leq \frac{e^{\tau R}(1 + \mu_1\mu_2 R^2)}{|\mu_1 R - 1| |\mu_2 R - 1|} \frac{\nu^{N+1}}{1 - \nu} \quad \forall \omega \in [0, q\Omega]. \quad (2.144)$$

Из (2.144) следует, что оценка $\Delta_N(j\omega)$ не зависит от ω . Поэтому на любом отрезке $\omega \in [0, q\Omega]$ ошибка аппроксимации $\Delta_N(j\omega)$ равномерно стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Следует особо отметить, что $\Delta_N(j\omega)$ представляет собой АФЧХ ошибки аппроксимации функции с помощью прогнозатора (2.77). Так как в полосе частот $[0, q\Omega]$ амплитудно-фазочастотные характеристики аппроксимирующей модели $\Psi_N(p)$ и исходной функции $e^{\tau p}$ мало отличаются, то для входных сигналов, спектр которых определяется полосой частот $[0, q\Omega]$, согласно [68] будут мало отличаться и переходные процессы.

2.3. Выводы по главе 2

В данной главе рассмотрены основные способы дробно-рациональной аппроксимации передаточных функций объектов, среди которых выделены аппроксимации с помощью рядов Тейлора и рядов Бурмана-Лагранжа. Для экспоненциальной функции найдены коэффициенты ряда Бурмана-Лагранжа, получены оценки остаточных членов рядов Тейлора и Бурмана-Лагранжа. С помощью ряда Бурмана-Лагранжа получена аппроксимация экспоненциальной функции по реализуемым устойчивым дробно-рациональным передаточным функциям. На основе аппроксимаций экспоненциальной функции отрезком ряда Бурмана-Лагранжа решена задача построения автоматических устройств прогнозирования: предложен способ синтеза реализуемого и модального прогнозаторов. Основываясь на оценке остаточного члена ряда Бурмана-Лагранжа, было показано, что для сигналов с заданной полосой частот может быть достигнута любая наперед заданная точность прогнозирования за счет увеличения количества членов ряда Бурмана-Лагранжа. При этом для модального прогнозатора сохраняется фильтрующее свойство. Показано, что в частном случае, модальный прогнозатор совпадает с дифференцирующим наблюдателем, который в свою очередь является фильтром Калмана. Это позволяет выбирать параметры модального прогнозатора при наличии случайных помех наблюдения.

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРЕЖАЮЩИХ ИНДИКАТОРОВ

3.1. Опережающие индикаторы

Фондовый рынок также, как и в целом экономика любой страны, не статичен. На нем происходят периоды роста и спада, которые в совокупности составляют экономические циклы. Такие колебания оказывают влияние и на глобальные тренды различных финансовых инструментов. Однако продолжительность периодов роста или падения неодинакова, поэтому для того, чтобы определить текущую стадию цикла или намечающуюся тенденцию ее смены, необходимо уметь использовать различные экономические индикаторы.

Принимая решения об инвестировании в тот или иной актив, следует проводить анализ не только конкретной компании, но и ситуацию экономики в целом, так как известно, что на разных фазах экономического цикла компании разных отраслей могут демонстрировать разную устойчивость и эффективность. Поэтому важно оценивать динамику и тренды макроэкономических показателей. Такие показатели характеризуют общее состояние экономики и ее тенденции. Они могут быть опубликованы как в отчетах правительств, так и рассчитываться независимыми организациями в определенные даты. Порой публикации значений индикаторов по степени своего влияния на фондовый рынок сопоставимы с влиянием выхода финансовых отчетов компаний на котировки их акций. Только в случае с индикаторами их влияние имеет более масштабное значение. Из таких ярких примеров – публикация данных по инфляции США за январь 2022г (рекордный темп роста за последние 40 лет), которая запустила механизм распродаж на американском рынке. Недостатком таких статистических данных является их публикация с некоторой временной задержкой, т.е. они отражают изменения, которые уже произошли. Поэтому, большое значение имеют те индикаторы, которые могут показать возможные будущие изменения в экономике. Такие индикаторы принято называть опережающими.

В данной работе рассмотрим, какие индикаторы считаются опережающими, а также более подробно разберем несколько самых популярных опережающих индикаторов с описанием их практической значимости для инвестора.

Существующие экономические индикаторы принято разделять на три типа:

— Опережающие.

— Запаздывающие.

— Совпадающие.

Опережающие индикаторы — это такие показатели, которые обычно меняются раньше всей экономики в целом. То есть они служат сигналами о будущих изменениях в экономике, например, смене фазы экономического цикла и используются для прогнозирования экономической активности. Это особенно важно при выходе экономики из рецессии или ее приближении к кризисной фазе.

Запаздывающие индикаторы отражают уже произошедшие экономические изменения. Они основаны на прошлых ценовых колебаниях и дают представление об исторических данных конкретного рынка, экономики или актива. Данные индикаторы могут использоваться для подтверждения закономерностей и достоверности ранее сделанных прогнозов. К числу запаздывающих относят данные по объемам продаж, индекс инфляции и др.

Совпадающие индикаторы показывают текущее положение экономики и изменяются одновременно с экономическими трендами (ВВП, число занятых и др).

Следует отметить большую условность назначения индикаторов по двум последним группам. Среди приведенных примеров разные аналитики по-разному определяют тип того или иного индикатора. Что касается опережающих индикаторов, то здесь все более однозначно. И далее в работе рассмотрим несколько примеров, наиболее широко используемых, опережающих индикаторов.

Опережающие индикаторы в экономике:

— Индекс деловой активности (PMI).

— Доходность краткосрочных и долгосрочных облигаций.

— Транспортный индекс.

— TED-спред.

— Соотношение цен рискованных (мусорных) облигаций к государственным облигациям (JNK/IEF).

Индекс деловой активности (PMI) - один из самых важных опережающих индикаторов для оценки состояния и прогнозирования экономики. Обычно PMI

публикуется раньше других индексов, таких как ВВП, промышленное производство, занятость и т.д. С помощью анализа индекса можно прогнозировать развитие тенденций в экономике в целом.

Индекс деловой активности рассчитывается на основе ежемесячных опросов менеджеров по закупкам различных компаний, как в производственной сфере, так и в сфере услуг. Индекс помогает определить, ухудшаются или улучшаются рыночные условия с точки зрения менеджеров по закупкам, или же они вовсе остаются прежними. PMI используется для анализа текущих и будущих условий ведения бизнеса.

Индекс PMI рассчитывают две организации: Институт управления снабжением (ISM, Institute for Supply Management) и Глобальный поставщик данных - IHS Markit.

Значение PMI выше 50% указывает на рост активности в секторе по сравнению с предыдущим месяцем, а значение ниже 50% - на сокращение и спад экономики. Значение показателя, равное 50%, говорит о том, что количество менеджеров, сообщающих об улучшении ситуации, равно количеству тех, кто заявляет, что бизнес ухудшился. О темпах изменения также судят по разнице со средней точкой : чем оно больше, тем сильнее изменения в деловой активности.

На февраль 2021 г. значение индекса PMI США было больше пороговой отметки 50, что свидетельствует о хорошем состоянии производственного сектора и о его полном восстановлении до докризисных уровней. Значение индекса PMI по РФ остается на уровне выше значения 50, что говорит о хорошем состоянии производственного сектора экономики РФ.

Доходность краткосрочных и долгосрочных облигаций. Соотношение доходностей облигаций с разными сроками погашения помогает отслеживать текущие настроения в экономике и понимать ориентиры дальнейшего развития событий. Сравнить доходность кратко- и долгосрочных облигаций можно, построив так называемую кривую доходности. Важно также, что к рассмотрению принимается именно бескупонная доходность. Чаще всего для построения кривой бескупонной доходности берут государственные облигации с различными сроками погашения. Но такой анализ можно проводить и для других облигаций с одинаковым кредитным качеством любых эмитентов. Актуальные значения бескупонной доходности ОФЗ с разными сроками публикуются на сайте ЦБ РФ каждый рабочий день. Рынок облигаций намного больше по своим объемам, чем рынок акций. Именно мнение его участников в большей степени коррелирует с реальным положением дел в экономике. Если инвесторы ждут роста инфляции

и ставок, то скорее всего, они не будут готовы давать государству в долг на текущих условиях на длительный срок. Соответственно цены длинных облигаций падают, а доходность, напротив, растет. И наоборот.

По форме (наклону) кривой доходности можно сделать вывод о текущем состоянии и возможным будущим глобальным изменениям в экономике. Например, 1 февраля 2021 года кривая доходности ОФЗ имела вид, приведенный ниже на графике. Данный тип кривой, так называемый нормальный, когда доходность ОФЗ с более длительным сроком обращения выше, чем доходность краткосрочных ценных бумаг. Такие кривые указывают на экономический рост и свидетельствуют о благоприятном развитии экономики. На февраль 2021 г. кривая доходности выглядела следующим образом: она стала инверсной, т.е. короткие облигации имеют более высокую доходность по сравнению с долгосрочными. Такой график может отражать опасения инвесторов, связанные с ожиданием снижения экономической активности или предположением, что экономика уже столкнулась с серьезными проблемами. Поэтому инвесторы покупают облигации с более долгим сроком погашения, чтобы зафиксировать текущую доходность в ожидании более низких доходностей предстоящих выпусков.

Транспортный индекс. Транспортный сектор — одна из важнейших отраслей экономики, обеспечивающая перевозку людей и грузов. Развитие транспортной инфраструктуры способствует росту торгового оборота. Кроме того, динамика спроса на транспортные услуги является опережающим индикатором развития экономики, так как характеризуют уровень деловой активности. Глобальный транспортный индекс (Индекс грузовых перевозок, TSI) рассчитывается Бюро транспортной статистики США ежемесячно как отношение объемов перевозок текущего и предыдущего месяцев. Актуальные значения публикуются на официальном сайте Бюро. Динамика значения транспортного индекса информирует об увеличении или уменьшении объема транспортных услуг по сравнению с предыдущим месяцем. При экономическом росте увеличиваются объемы производства и спроса на товары и услуги. Чтобы производить больше товаров и доставлять их потребителям, предприятиям требуются дополнительные услуги по перевозке грузов (как готовой продукции, так и сырья и различных комплектующих). Таким образом, индекс отражает реакцию поставщиков транспортных услуг на потребности экономики в перевозке грузов и изменяется раньше, чем показатели самой экономики (объем промышленного производства, объемы продаж, ВВП и др.).

На рисунке ниже приведен график транспортного индекса. Как видно на

графике, в 2019-2020 гг. произошло значительное падение индекса на фоне кризиса из-за пандемии COVID-19, который привел к потере миллионов рабочих мест, снижению объемов торговли, а также к падению цен на нефть и сырьевые товары. За 2020 год индекс услуг грузовых перевозок упал на 4,6%, а в 2021 году он вырос на 2,6%, поскольку экономика начала восстанавливаться. Таким образом, индекс выступает в качестве опережающего индикатора общих экономических показателей. Растущий тренд говорит о том, что растет объем грузовых перевозок, розничные торговцы увеличивают запасы, а производители заказывают сырье и средства производства в ожидании улучшения экономических условий.

TED-спред. TED-спред рассчитывается как разница между ставками межбанковского кредитования и доходностями казначейских облигаций США. Сравнение этих ставок дает представление о наличии возможных рисков в банковской системе. В периоды экономического кризиса происходит рост TED-спреда, т.к. возрастает риск дефолта, и банки неохотно осуществляют кредитование друг друга, ставки кредитов растут. Таким образом, высокий TED-спред указывает на растущий риск дефолта банков и экономической нестабильности. Снижение TED-спреда говорит об уменьшении риска дефолта и улучшении экономической ситуации.

На приведенном ниже графике можно увидеть изменения TED-спреда за 20-летний период, с января 2001 г. При работе с данным индикатором можно следующим образом трактовать его значения: TED-спред = 0 считается нейтральным значением показателя. TED-спред $< 0,50$ указывает на то, что рынки считают финансовый риск небольшим. Спред TED колеблется с течением времени, но обычно остается в диапазоне 10 и 50 б.п. (0,1% и 0,5%). TED-спред $> 1,0$ указывает на высокую неопределенность и, по крайней мере, на некоторый риск в глобальной финансово-банковской системе. Во время финансового кризиса 2007–2009 годов спред достигал 4,5 б.п. Также индикатор резко увеличивался во время кризиса 2020 года. Значения индикатора на февраль 2021 составляет 0,11, что свидетельствует о благоприятной ситуации на межбанковском рынке. За последние несколько лет разница между краткосрочными ставками минимальная.

Соотношение цен рискованных (мусорных) облигаций к государственным облигациям (JNK/IEF). Этот индикатор характеризует отношение инвесторов к рискам. Считается как отношение индекса рискованных облигаций (JNK) к индексу государственных облигаций (IEF). В периоды роста фондового рынка значе-

ние показателя растет, что говорит о том, что больше капитала перетекает из безрисковых активов в рисковые. Под рисковыми подразумеваются высокодоходные или мусорные облигации – долговые бумаги компаний с крайне низким уровнем финансовой устойчивости и полным отсутствием запаса финансовой прочности («Высокодоходные облигации»). Как видно на приведенном ниже графике, значительное падение индикатора наблюдалось в 2020 году, что говорит о недоверии рисковым облигациям и перетекании денег в безрисковые активы. В настоящее время значения индикатора достигли своих докризисных значений. Это говорит о том, что в экономике не наблюдается высокого уровня риска дефолтов компаний с высокой кредитной нагрузкой. То есть складывающаяся на рынке ситуация благоприятна для большинства компаний.

Таким образом, опережающие индикаторы предоставляют информацию о начале трендов в экономике, которые еще явно себя не проявили и могут использоваться для прогнозирования потенциальных рецессий экономики или ее выхода из кризиса. Каждый индикатор по-своему полезен. Внимание к таким показателям и понимание формирующихся на рынке тенденций может помочь в принятии более обоснованных инвестиционных решений и своевременном проведении ребалансировки инвестиционного портфеля. Однако нельзя основываться лишь на одном показателе или индикаторе, следует проводить полноценный комплексный анализ макросреды. Грамотный анализ индикаторов помогает определить текущую фазу экономического цикла, сигналы его смены и наиболее перспективные активы. Кроме того, необходимо проводить фундаментальную оценку конкретных компаний.

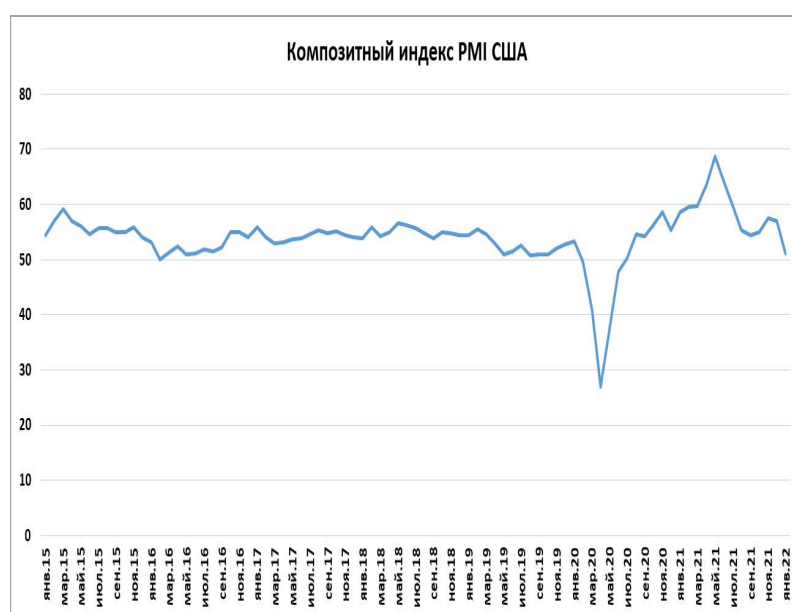


Рис. 27. Композитный индекс PMI США

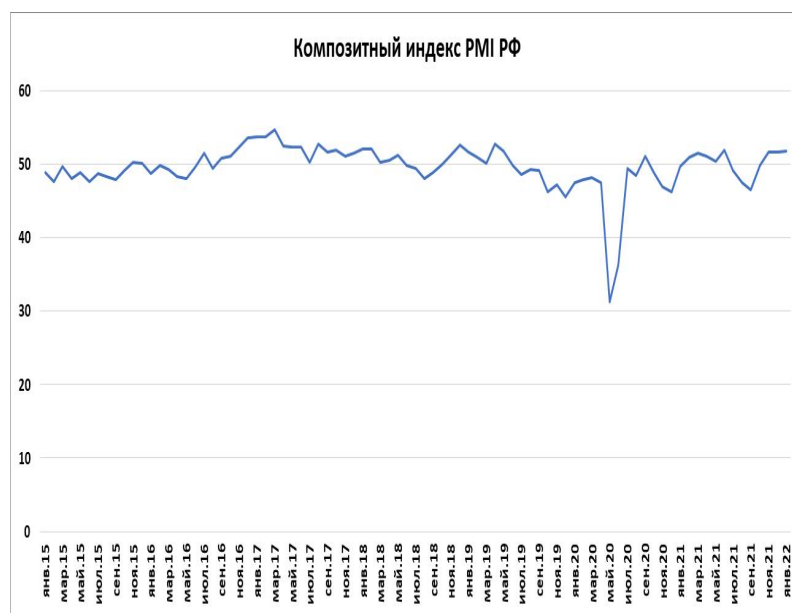


Рис. 28. Композитный индекс PMI РФ

01.02.2021

Кривая бескупонной доходности

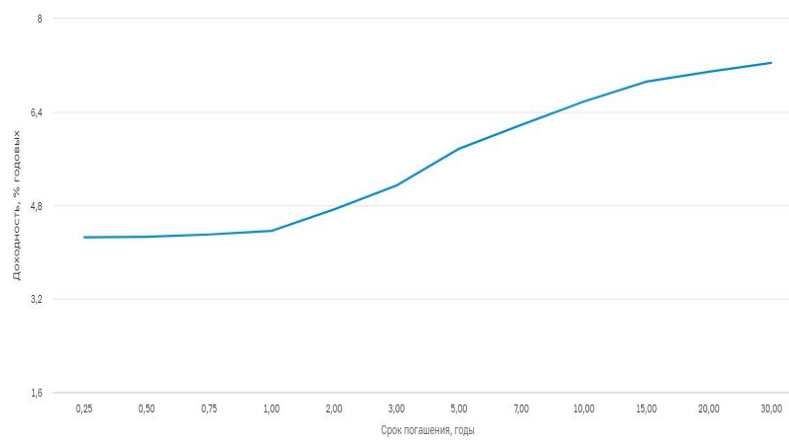


Рис. 29. Кривая бескупонной доходности

21.02.2022

Кривая бескупонной доходности

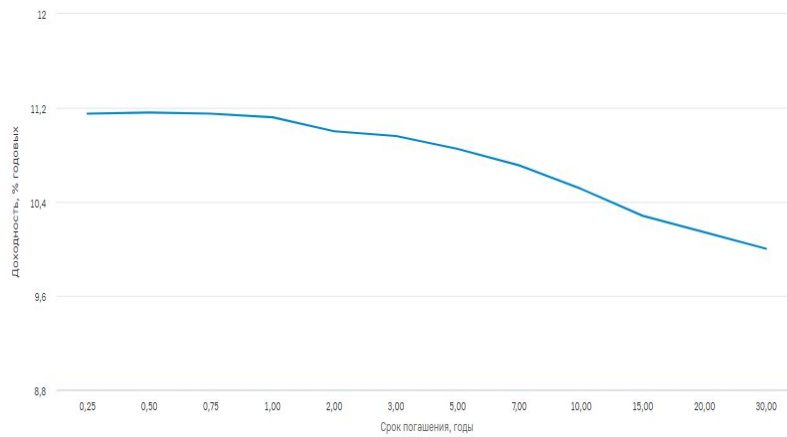


Рис. 30. Кривая бескупонной доходности



Рис. 31. Транспортный индекс

TED Spread 2001-2021

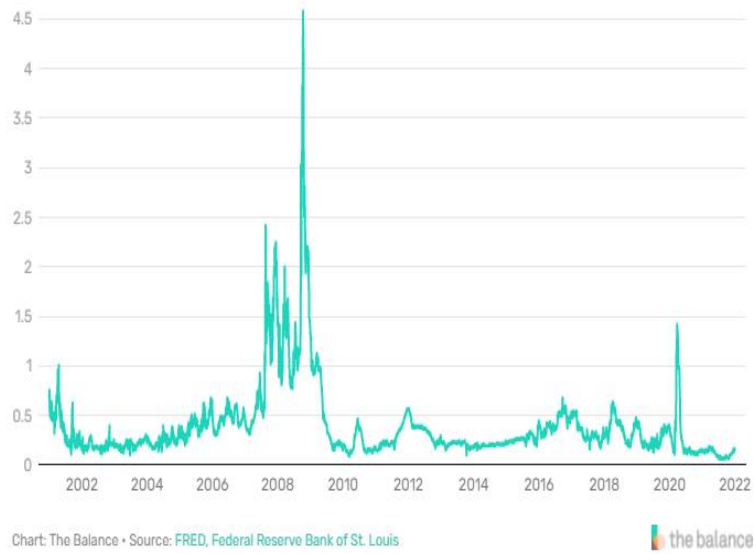


Рис. 32. TED-спред



Рис. 33. Соотношение цен JNK/IEF

3.2. Построение опережающих индикаторов с помощью реализуемого прогнозатора

Как было показано выше, для произвольного $\tau > 0$ при помощи устройства с передаточной функцией (2.32) может быть получена оценка прогноза $f(t + \tau)$ по известному сигналу $f(t)$. В формуле (2.32) коэффициенты α_n представляют собой коэффициенты ряда Бурмана–Лагранжа и определяются по формулам (2.26).

Обозначим через $F(p)$ изображения по Лапласу сигнала $f(t)$. Тогда изображение $\Psi_N(p)F(p)$ будет представлять собой изображение оценки прогноза $f(t + \tau)$. Положим

$$G_N(p) = \Psi_N(p)F(p) \doteq g_N(t) \quad (3.1)$$

и рассмотрим задачу нахождения оригинала $g_N(t)$ по изображению $G_N(p)$. Здесь $g_N(t)$ — оценка прогноза $f(t + \tau)$, полученная с помощью прогнозатора (2.32) (при заданных параметрах N, μ, τ).

Нетрудно заметить, что $g_N(t)$ в силу формулы (3.1) и свойства умножения изображений [80] представляет собой свёртку импульсной функции $\psi_N(t)$ прогнозатора и входного сигнала $f(t)$, т. е.

$$g_N(t) = (\psi_N * f)(t) = \int_0^t f(t - z)\psi_N(z) dz, \quad (3.2)$$

где $\psi_N(t) \doteq \Psi_N(p)$. Поэтому задачу вычисления оценки прогноза $g_N(t)$ можно свести к задаче определения импульсной функции $\psi_N(t)$ и последующей задаче вычисления свёртки (3.2).

Итак, определим импульсную функцию $\psi_N(t)$. Для этого найдем оригинал изображения $W^n(p)$, $n \geq 1$. В силу (2.24) имеем

$$\begin{aligned} W^n(p) &= \frac{p^n}{(\mu p + 1)^n} = \frac{p^n}{\mu^n (p + \frac{1}{\mu})^n} = \frac{1}{\mu^n} \frac{(p + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu})^n}{(p + \frac{1}{\mu})^n} = \\ &= \frac{1}{\mu^n} \left(1 - \frac{\frac{1}{\mu}}{p + \frac{1}{\mu}} \right)^n. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Тогда последняя формула может быть записана следующим образом:

$$W^n(p) = \lambda^n \left(1 - \frac{\lambda}{p + \lambda} \right)^n. \quad (3.3)$$

Применяя формулу бинома Ньютона, получаем

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{p + \lambda}\right)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} \left(-\frac{\lambda}{p + \lambda}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-\lambda)^k \frac{1}{(p + \lambda)^k}. \end{aligned}$$

Распишем последнюю сумму следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k (-\lambda)^k \frac{1}{(p + \lambda)^k} &= C_n^0 (-\lambda)^0 \frac{1}{(p + \lambda)^0} + \\ + \sum_{k=1}^n C_n^k (-\lambda)^k \frac{1}{(p + \lambda)^k} &= 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k (-\lambda)^k \frac{1}{(p + \lambda)^k}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно известной формуле [80]

$$t^k \doteq \frac{k!}{p^{k+1}} \quad k \in \mathbb{N},$$

и свойству смещения [80] имеем

$$e^{-\lambda t} t^k \doteq \frac{k!}{(p + \lambda)^{k+1}} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая формулу (3.4) и свойство линейности изображения по Лапласу, нетрудно получить следующее операторное равенство:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{p + \lambda}\right)^n &\doteq \delta(t) + \sum_{k=1}^n C_n^k (-\lambda)^k \frac{e^{-\lambda t} t^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \delta(t) - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь было использовано известное операторное равенство [80]

$$\delta(t) \doteq 1.$$

Учитывая, что $\lambda = \frac{1}{\mu}$, из формул (3.3) и (3.5) получаем

$$W^n(p) \doteq \frac{1}{\mu^n} \left[\delta(t) - \frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{k=1}^n \frac{C_n^k}{(k-1)!} \left(-\frac{t}{\mu}\right)^{k-1} \right]. \quad (3.6)$$

В силу (2.26) и (3.6) импульсная функция $\psi_N(t)$ прогнозатора (2.32) определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned}\psi_N(t) &= \delta(t) + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\mu^n} \left[\delta(t) - \frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{k=1}^n \frac{C_n^k}{(k-1)!} \left(-\frac{t}{\mu}\right)^{k-1} \right] = \\ &= \delta(t) \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\mu^n} \right] - \frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\mu^n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} C_n^k}{(k-1)!} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{k-1}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Положим

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\mu^n}, \quad n = \overline{1, N}; \quad b_{n,k} = \frac{(-1)^{k-1} C_n^k}{(k-1)!}, \quad k, n = \overline{1, N}.$$

Тогда формула (3.7) принимает окончательный вид

$$\psi_N(t) = \delta(t) \left[1 + \sum_{n=1}^N a_n \right] - \frac{e^{-t/\mu}}{\mu} \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=1}^n b_{n,k} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{k-1}.\quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.2), получаем

$$\begin{aligned}g_N(t) &= \left[1 + \sum_{n=1}^N a_n \right] \int_0^t f(t-z) \delta(z) dz - \\ &- \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=1}^n b_{n,k} \int_0^t \left(\frac{z}{\mu}\right)^{k-1} e^{-z/\mu} f(t-z) dz.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Принимая во внимание фильтрующее свойство δ -функции [15]

$$\int_0^t f(t-z) \delta(z) dz = f(t)$$

из (3.9) находим выражение для оценки прогноза

$$\begin{aligned}g_N(t) &= \left[1 + \sum_{n=1}^N a_n \right] f(t) - \\ &- \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=1}^n b_{n,k} \int_0^t \left(\frac{z}{\mu}\right)^{k-1} e^{-z/\mu} f(t-z) dz.\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла в последней формуле введём новую переменную $s = \frac{z}{\mu}$. Тогда $z = \mu s$, $dz = \mu ds$ и интеграл принимает вид

$$\int_0^t \left(\frac{z}{\mu}\right)^{k-1} e^{-z/\mu} f(t-z) dz = \mu \int_0^{t/\mu} s^{k-1} e^{-s} f(t-\mu s) ds = \mu I_k(\mu, t). \quad (3.10)$$

Таким образом, оценка прогноза $g_N(t)$ имеет следующий вид:

$$g_N(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^N a_n\right] f(t) - \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=1}^n b_{n,k} I_k(\mu, t). \quad (3.11)$$

Так как при каждом n требуется вычислять интегралы $I_k(\mu, t)$, $k = \overline{1, n}$, то для уменьшения вычислительных операций следует предварительно вычислить интегралы $I_k(\mu, t)$, $k = \overline{1, N}$, а затем подставлять найденные значения в (3.11). Нетрудно проверить, что при таком подходе потребуется вычисление N интегралов вместо вычисления $\frac{N(N+1)}{2}$ интегралов при непосредственной реализацией формулы (3.11).

Рассмотрим теперь задачу получения рекуррентной формулы для вычисления интеграла $I_k(\mu, t)$. Пусть

$$J_k(\mu, t) = \mu I_k(\mu, t). \quad (3.12)$$

В силу коммутативности свертки двух функций [49] представим интеграл $J_k(\mu, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_k(\mu, t) &= \int_0^t \left(\frac{t-z}{\mu}\right)^{k-1} e^{-(t-z)/\mu} f(z) dz = \\ &= \frac{1}{\mu^{k-1}} \int_0^t (t-z)^{k-1} e^{-(t-z)/\mu} f(z) dz. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Рассмотрим далее приращение времени $t + \Delta t$ и вычислим значение интеграла $J_k(\mu, t + \Delta t)$. Из формулы (3.13) сразу получаем

$$J_k(\mu, t + \Delta t) = \frac{1}{\mu^{k-1}} \int_0^{t+\Delta t} (t + \Delta t - z)^{k-1} e^{-(t+\Delta t-z)/\mu} f(z) dz. \quad (3.14)$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла [47], представим интеграл в виде суммы интегралов

$$J_k(\mu, t + \Delta t) = \frac{1}{\mu^{k-1}} \int_0^t (t + \Delta t - z)^{k-1} e^{-(t+\Delta t-z)/\mu} f(z) dz + \quad (3.15)$$

$$+ Q_k(\mu; t, t + \Delta t),$$

где

$$Q_k(\mu; t, t + \Delta t) = \frac{1}{\mu^{k-1}} \int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - z)^{k-1} e^{-(t+\Delta t-z)/\mu} f(z) dz. \quad (3.16)$$

Учитывая формулу бинома Ньютона

$$(t - z + \Delta t)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (\Delta t)^{k-1-i} (t - z)^i, \quad (3.17)$$

после элементарных преобразований получаем

$$\int_0^t (t + \Delta t - z)^{k-1} e^{-(t+\Delta t-z)/\mu} f(z) dz = \quad (3.18)$$

$$= e^{-\Delta t/\mu} \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (\Delta t)^{k-1-i} \mu^i J_{i+1}(\mu, t).$$

С учетом последнего выражения из формулы (3.15) находим следующее рекуррентное соотношение:

$$J_k(\mu, t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\mu} \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \left(\frac{\Delta t}{\mu}\right)^{k-1-i} J_{i+1}(\mu, t) + \quad (3.19)$$

$$+ Q_k(\mu; t, t + \Delta t).$$

С помощью формулы (3.11) получим далее расчетные формулы для вычисления прогноза. Как уже отмечалось выше, задача вычисления прогноза свелась к задаче интегрирования взвешенного входного сигнала. Так как для прогноза доступны только значения входного сигнала $f(t)$, а сам входной сигнал неизвестен, то следует рассматривать задачу приближенного вычисления интеграла с помощью численных методов. Методы численного интегрирования основаны на замене интегрируемой функции такой аппроксимирующей функцией, интеграл от которой вычислялся бы достаточно просто. В качестве аппроксимирующих функций обычно используют интерполяционные полиномы

(например, Лагранжа) или сплайны. Получаемые в этом случае приближенные формулы называются квадратурными (или просто квадратурой) [63]:

$$\int_a^b \varphi(t) dt \approx \sum_{i=1}^M \rho_i \varphi(t_i) = P_M. \quad (3.20)$$

При этом точки t_i называются узлами квадратурной формулы, ρ_i — весами. Отметим, что узлы и веса квадратурной формулы не зависят от $\varphi(t)$.

При применении квадратурных формул важными свойствами являются точность и устойчивость. На практике значения функции вычисляются (или измеряются) с некоторыми ошибками. В результате, вместо значения $\varphi(t_i)$ получаем $\hat{\varphi}(t_i) = \varphi(t_i) + \delta_i$, где δ_i — ошибка измерения. Тогда в формуле (3.20) вместо значения P_M получаем $P_M + \sum_{i=1}^M \rho_i \delta_i$. При выборе квадратурной формулы, устойчивой по отношению к ошибкам измерения подынтегральной функции, следует опираться на следующее утверждение [63]:

Утверждение. Если при любом $M \geq 1$ все веса ρ_i квадратурной формулы неотрицательны, то она устойчива.

Таким образом, предпочтительны квадратуры с неотрицательными весами. Если среди весовых коэффициентов есть отрицательные, то это приводит к увеличению ошибок [63].

К устойчивым относится, например, квадратурная формула трапеций [63]

$$P_M = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{M-1} (\varphi(t_i) + \varphi(t_{i+1})), \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} a &= t_0 < t_1 < \dots < t_M = b, \\ t_{i+1} &= t_i + h, \quad i = \overline{0, M-1}; \quad h = \frac{b-a}{M}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Рассмотрим далее практически важный случай, когда входной сигнал $f(t)$ задается своими отсчетами $f_l = f(t_l)$ через равные промежутки времени $\Delta t = h = t_{l+1} - t_l$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда $t_l = lh$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Такое требование к сигналу накладывает ограничение на выбор квадратурных формул. В частности, квадратурная формула Симпсона [63] неприменима из-за необходимости вычислять значения сигнала в точках $\frac{t_i + t_{i+1}}{2}$. В то же время формула трапеций (3.21) и формула Ньютона [21] могут быть использованы в данном случае.

Итак, воспользуемся квадратурной формулой трапеций (3.21) при $M = 1$ и $h = \Delta t$. Будем считать, что Δt выбрано достаточно малым. Тогда с помощью

формулы (3.21) после элементарных преобразований из (3.16) получаем

$$Q_k(\mu; lh, (l+1)h) = \begin{cases} \frac{h}{2}(f_{l+1} + e^{-h/\mu}f_l), & k = 1; \\ \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\mu}\right)^{k-1} e^{-h/\mu}f_l, & k > 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

Найдем теперь $J_k(\mu, (l+1)h) = J_{k,l+1}$ в формуле. Из (3.19) и (3.23) вытекает

$$\begin{aligned} J_{1,l+1} &= e^{-h/\mu}J_{1,l} + \frac{h}{2}(f_{l+1} + e^{-h/\mu}f_l), \\ J_{k,l+1} &= e^{-h/\mu} \left[\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i \left(\frac{h}{\mu}\right)^{k-1-i} J_{i+1,l} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\mu}\right)^{k-1} f_l \right], \quad k > 1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Кроме того, из формулы (3.13) сразу следует, что

$$J_{k,0} = 0. \quad (3.25)$$

Таким образом, расчетная формула для вычисления прогноза, учитывая формулы (3.11) и (3.12) принимает окончательный вид

$$g_N(\mu, \tau, (l+1)h) = \left(1 + \sum_{n=1}^N a_n\right) f_{l+1} - \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=1}^n b_{n,k} I_{k,l+1}. \quad (3.26)$$

На рис. 34 и 35 представлены графики прогноза при $\tau = 0,25$ с, $\mu = 0,05$ с, $N = 3$, $h = 0,0001$ с для сигналов $f(t) = t \cos t \sin(\sin(\ln(1+t)t))$ и $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$ соответственно. Для сравнения на рис. 34 и 35 изображены графики $f(t + \tau)$. Учитывая известное тригонометрическое равенство

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad (3.27)$$

с помощью графиков, представленных на рис. 36, можно видеть, что точность прогноза (см. рис. 34 и 35) уменьшается с увеличением частоты входного сигнала. Однако, можно показать, что для заданной частоты ω_0 за счет соответствующего выбора параметров μ и N прогнозатора (2.32) можно обеспечить заданную точность прогноза для всех сигналов, частота которых не превышает ω_0 .

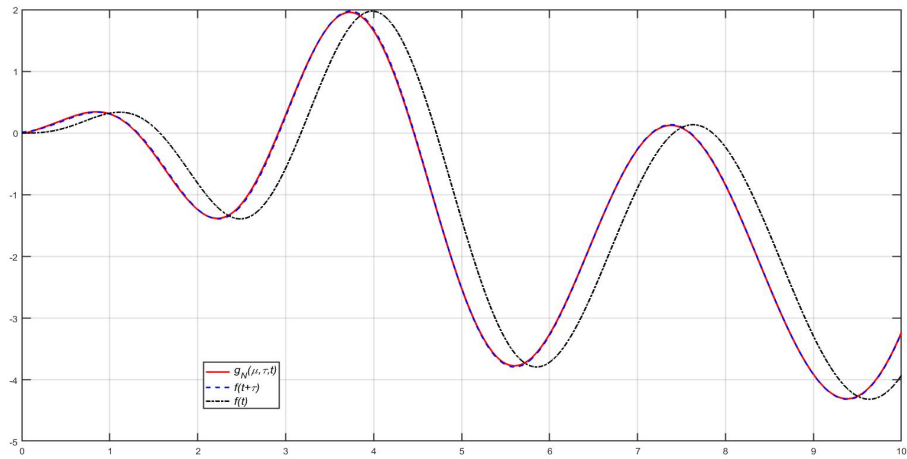


Рис. 34. Прогноз сигнала $f(t) = t \cos t \sin(\sin(\ln(1+t)t))$

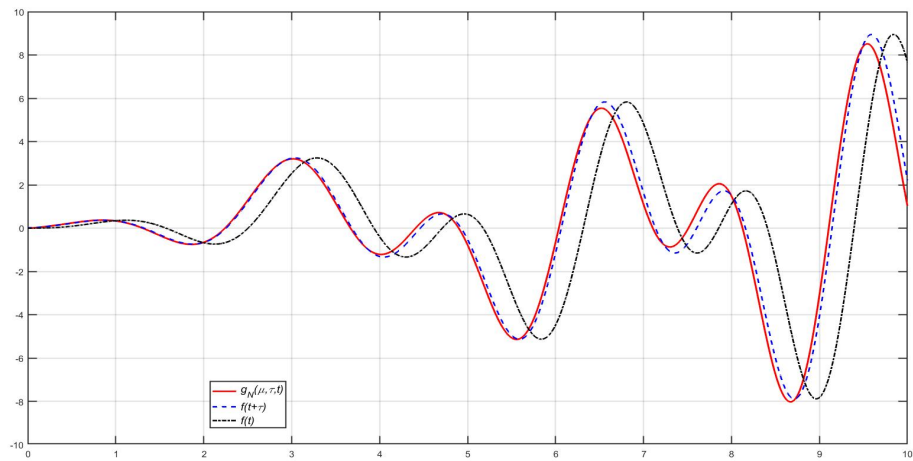


Рис. 35. Прогноз сигнала $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$

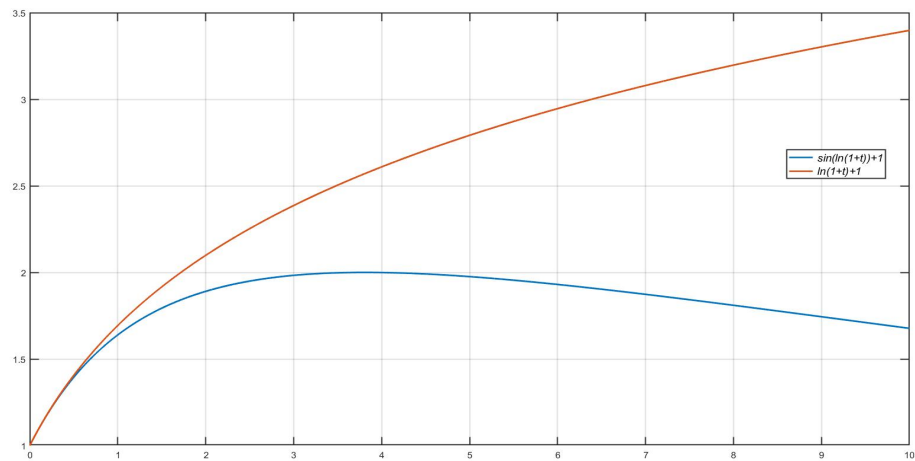


Рис. 36. Зависимость частоты исследуемых сигналов от времени

3.3. Построение опережающих индикаторов с помощью модального прогнозатора

Рассмотрим теперь прогнозатор, передаточная функция которого определяется формулой (2.77).

Как и ранее, обозначим через $F(p)$ изображения по Лапласу сигнала $f(t)$. Тогда изображение $\Psi_N(p)F(p)$ будет представлять собой изображение оценки прогноза $f(t + \tau)$. Положим

$$G_N(p) = \Psi_N(p)F(p) \doteq g_N(t) \quad (3.28)$$

и рассмотрим задачу нахождения оригинала $g_N(t)$ по изображению $G_N(p)$. Здесь $g_N(t)$ — оценка прогноза $f(t + \tau)$, полученная с помощью прогнозатора (2.77).

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} \Phi_0(p) &= F(p), \\ \Phi_1(p) &= W(p)F(p) = W(p)\Phi_0(p), \\ \Phi_2(p) &= W^2(p)F(p) = W(p)(W(p)\Phi_0(p)) = W(p)\Phi_1(p), \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_N(p) &= W^N(p)F(p) = \\ &= W(p)(W^{N-1}(p)\Phi_0(p)) = W(p)\Phi_{N-1}(p). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тогда $G_N(p)$ примет вид

$$G_N(p) = \Psi_N(p)F(p) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \Phi_n(p). \quad (3.30)$$

Запишем формулы (3.29) в виде рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} \Phi_0(p) = F(p), \\ \Phi_n(p) = W(p)\Phi_{n-1}(p), \quad n = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (3.31)$$

В силу формулы (3.29) и свойства умножения изображений [80] в пространстве оригиналов получаем свертку

$$\varphi_n(t) = (w * \varphi_{n-1})(t) = \int_0^t w(t-z)\varphi_{n-1}(z) dz. \quad (3.32)$$

Здесь $\varphi_n(t) \doteq \Phi_n(p)$, $w(t) \doteq W(p)$.

Далее рассмотрим практически важный случай, когда многочлен $D(p)$ имеет простые действительные отрицательные корни, т.е.

$$D(p) = \prod_{i=1}^m (p + \lambda_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i > 0. \quad (3.33)$$

Для этого случая найдем оригинал $w(t)$ функции $W(p)$. Воспользуемся формулой разложения [49]. Имеем

$$W(p) = \frac{pL(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{p + \lambda_i}, \quad (3.34)$$

где коэффициенты c_i находятся по формуле

$$\begin{aligned} c_i &= \lim_{p \rightarrow -\lambda_i} \frac{pL(p)(p + \lambda_i)}{D(p)} = \lim_{p \rightarrow -\lambda_i} \frac{pL(p)}{\frac{D(p)}{p + \lambda_i}} = \\ &= \frac{(-\lambda_i)L(-\lambda_i)}{\lim_{p \rightarrow -\lambda_i} \frac{D(p)}{p + \lambda_i}} = \frac{(-\lambda_i)L(-\lambda_i)}{D'(-\lambda_i)}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Принимая во внимание операторное равенство

$$\frac{1}{p + \lambda_i} \doteq e^{-\lambda_i t} \quad (3.36)$$

и свойство линейности преобразования Лапласа, из (3.34) получаем

$$w(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t}. \quad (3.37)$$

Подставляя найденное $w(t)$ в формулу (3.32), после очевидных преобразований находим

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \int_0^t \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i(t-z)} \varphi_{n-1}(z) dz = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i z} \varphi_{n-1}(z) dz. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Обозначим

$$I_{n-1,i}(t) = \int_0^t e^{\lambda_i z} \varphi_{n-1}(z) dz, \quad n = \overline{1, N}. \quad (3.39)$$

Тогда

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} I_{n-1,i}(t) \quad n = \overline{1, N}. \quad (3.40)$$

При этом

$$\varphi_0(t) = f(t). \quad (3.41)$$

Таким образом, получаем выражение для прогноза

$$g_N(t) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \varphi_n(t), \quad (3.42)$$

где φ_n ($n = \overline{1, N}$) определяется формулами (3.40), (3.41).

Зададим приращение времени $t + \Delta t$ и рассмотрим задачу получения рекуррентной формулы для вычисления интеграла $I_{n-1,i}(t + \Delta t)$. Из формулы (3.39), используя свойство аддитивности определенного интеграла [47], получаем

$$\begin{aligned} I_{n-1,i}(t + \Delta t) &= \int_0^{t+\Delta t} e^{\lambda_i z} \varphi_{n-1}(z) dz = \\ &= \int_0^t e^{\lambda_i z} \varphi_{n-1}(z) dz + \int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda_i z} \varphi_{n-1}(z) dz = \\ &= I_{n-1,i}(t) + Q_{n-1,i}(t, t + \Delta t), \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь

$$Q_{n-1,i}(t, t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} e^{\lambda_i z} \varphi_{n-1}(z) dz. \quad (3.44)$$

Выражение (3.43) задает рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_{n-1,i}(t + \Delta t)$.

С помощью формулы (3.42) получим далее расчетные формулы для вычисления прогноза, когда входной сигнал $f(t)$ задается своими отсчетами $f_l = f(t_l)$ через равные промежутки времени $\Delta t = h = t_{l+1} - t_l$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда $t_l = lh$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Согласно (3.43) получаем

$$I_{n-1,i,l+1} = I_{n-1,i,l} + Q_{n-1,i}(lh, (l+1)h). \quad (3.45)$$

Для вычисления $Q_{n-1,i}(lh, (l+1)h)$ воспользуемся квадратурной формулой трапеций (3.21) при $M = 1$ и $h = \Delta t$. Будем считать, что Δt выбрано достаточно

малым. Тогда с помощью формулы (3.21) после элементарных преобразований из (3.44) находим

$$\begin{aligned} Q_{n-1,i}(lh, (l+1)h) &= \frac{h}{2} (e^{\lambda_i(l+1)h} \varphi_{n-1,l+1} + e^{\lambda_i l h} \varphi_{n-1,l}) = \\ &= \frac{h}{2} e^{\lambda_i l h} (e^{\lambda_i h} \varphi_{n-1,l+1} + \varphi_{n-1,l}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Таким образом, расчетная формула для вычисления прогноза, учитывая формулы (3.11) и (3.12) принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} g_N((l+1)h) &= \sum_{n=0}^N \alpha_n \varphi_{n,l+1}, \\ \varphi_{n,l+1} &= \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i(l+1)h} I_{n-1,i,l+1}, \\ \varphi_{0,l+1} &= f_{l+1}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Значения $I_{n-1,i,l+1}$ вычисляются по формуле (3.45).

Пример 1

Рассмотрим применение модального прогнозатора для прогнозирования сигналов вида

$$f(t) = \frac{at}{1 - b \sin t} \quad (3.48)$$

при заданных параметрах a , $0 < b < 1$. Очевидно, что при $b = 1$ сигнал $f(t)$ не попадает в класс прогнозируемых сигналов. Однако при $b < 1$ сигнал (3.48) удовлетворяет условиям 1–3 постановки задачи.

На рис. 37 представлены результаты прогнозирования сигнала (3.48) при $a = 0,2$, $b = 0,8$ и следующих параметрах прогнозатора: $\tau = 0,25$; $\mu_1 = 0,01$; $\mu_2 = 0,02$; $h = 0,001$; $N = 2$.

На следующем рисунке 38 представлены результаты прогноза (3.48) при $a = 0,2$, $b = 0,9$. На рис. 39 представлены спектральные плотности соответствующих сигналов.

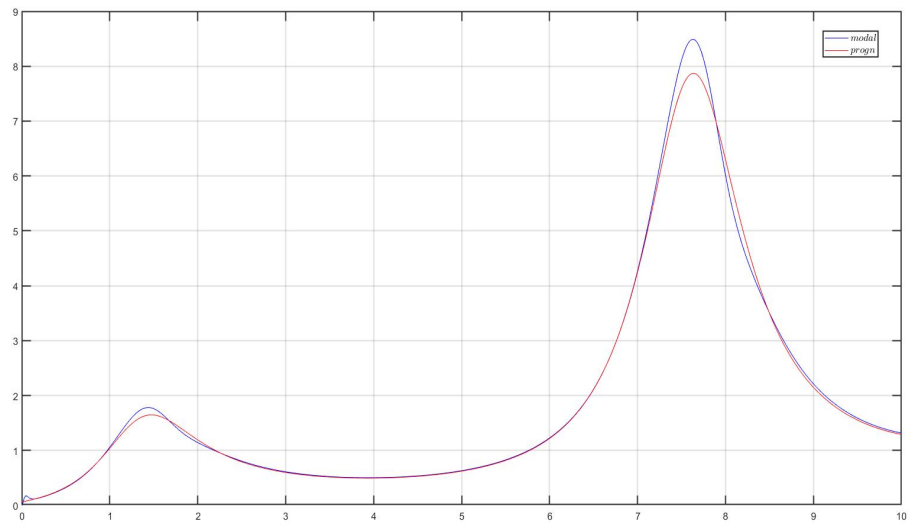


Рис. 37. Прогноз сигнала (3.48) при $a = 0,2$, $b = 0,8$

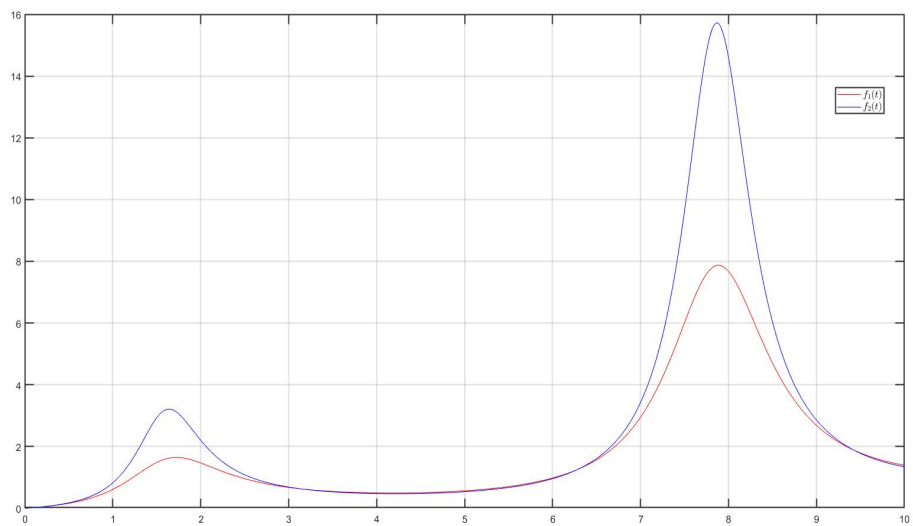


Рис. 38. Прогноз сигнала (3.48) при $a = 0,2$, $b = 0,9$

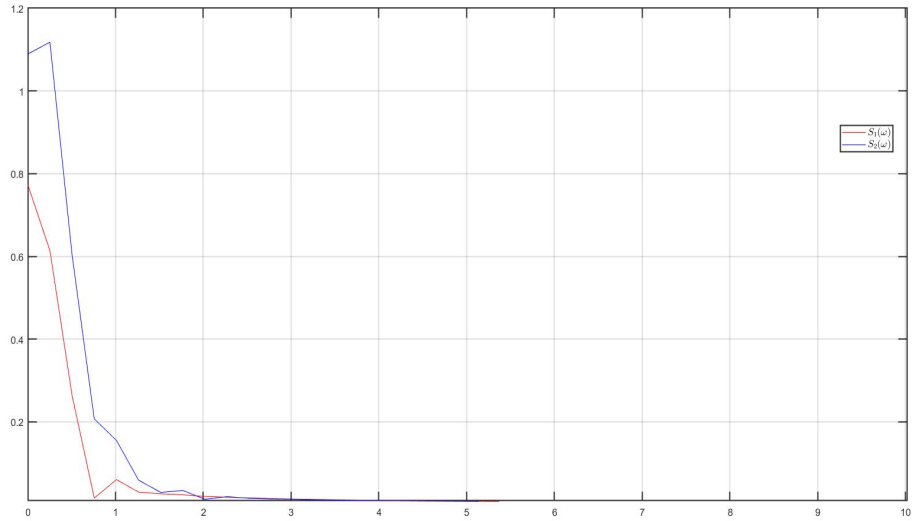


Рис. 39. Спектральная плотность

Пример 2

Для сравнения реализуемого и модального прогнозаторов на рис. 40 представлены соответственно графики АФЧХ для $e^{\tau P}$, передаточной функции реализуемого прогнозатора $\Psi_{R,N}(j\omega)$ и передаточной функции модального прогнозатора $\Psi_{M,N}(j\omega)$ при $\tau = 0,25$ с, $\mu = 0,02$ с, $\mu_1 = 0,018$ с, $\mu_2 = 0,02$ с, $N = 3$. На рис. 41 изображены графики прогноза при $h = 0,001$ с для сигнала (2.78). На рис. 42 изображены графики прогноза сигнала (2.78) в присутствии высокочастотной помехи $\xi(t) = 0,01 \sin(300t)$. Аналогичные графики для $N = 5$ представлены на рис. 43–45.

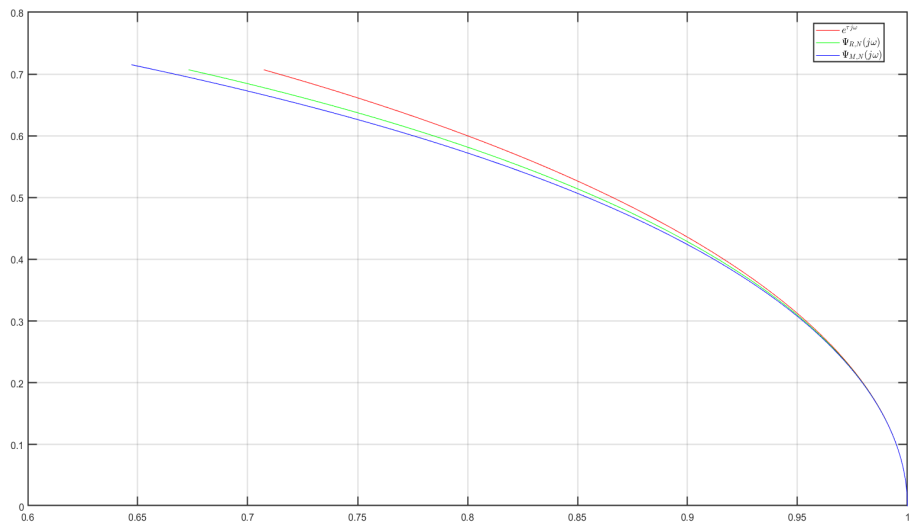


Рис. 40. АФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_{R,N}(j\omega)$ и $\Psi_{M,N}(j\omega)$

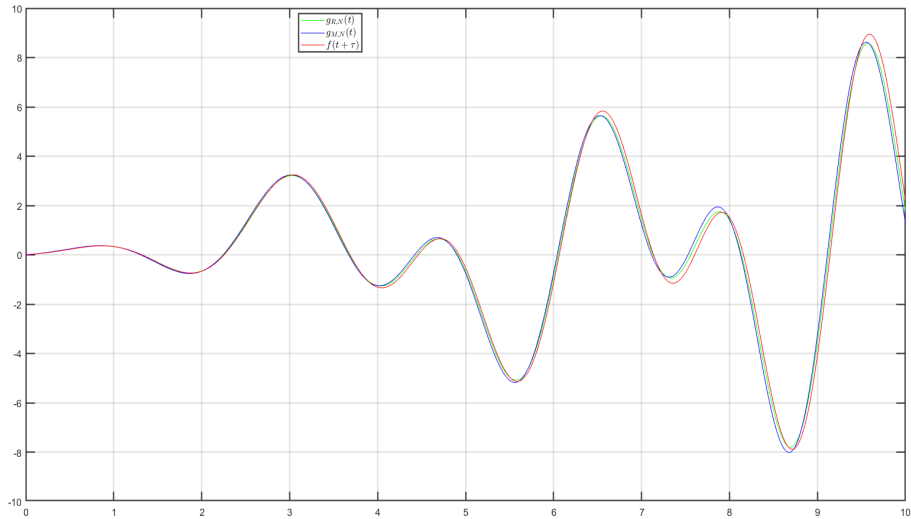


Рис. 41. Прогноз сигнала $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$

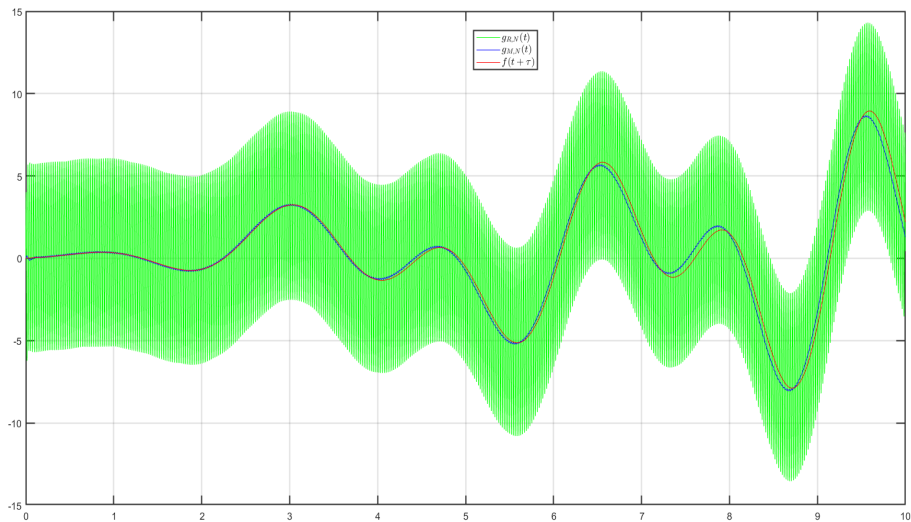


Рис. 42. Прогноз сигнала с помехой $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$

Следует отметить, что влияние помех определяется видом передаточной функции $W(p)$. Эта функция является аппроксимацией идеального дифференциатора с передаточной функцией $W_d(p) = p$. На рис. 46 представлены АЧХ идеального дифференциатора $|W_d(j\omega)| = \omega$, реализуемого дифференциатора $|W_R(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\mu^2\omega^2 + 1}}$ и модального дифференциатора $|W_M(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(\mu_1^2\omega^2 + 1)(\mu_2^2\omega^2 + 1)}}$

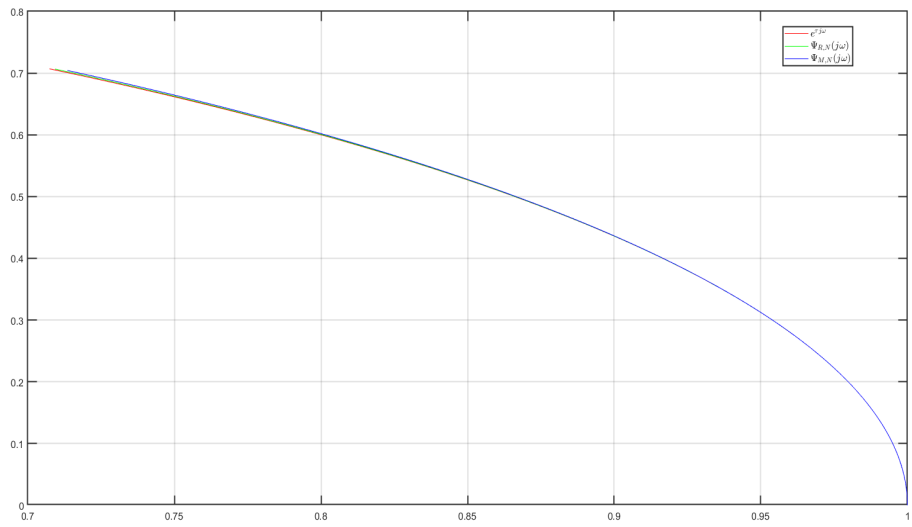


Рис. 43. АФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_{R,N}(j\omega)$ и $\Psi_{M,N}(j\omega)$

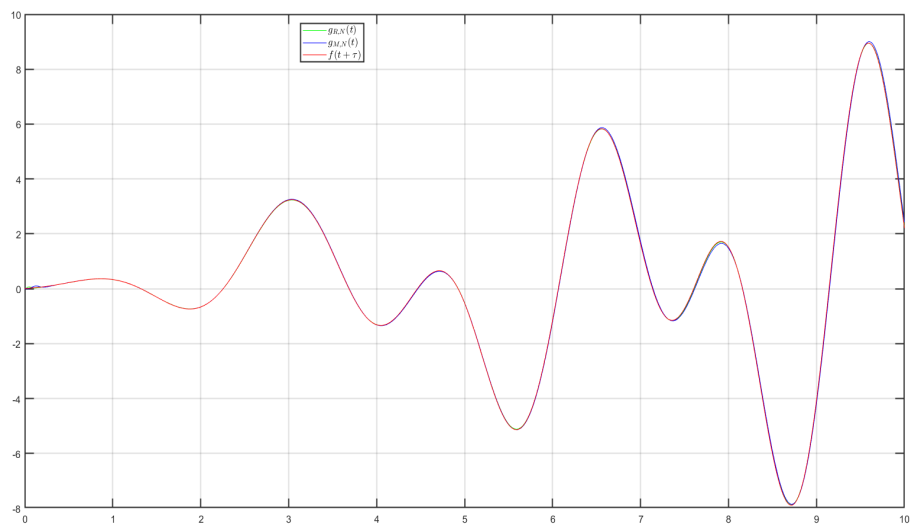


Рис. 44. Прогноз сигнала $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$

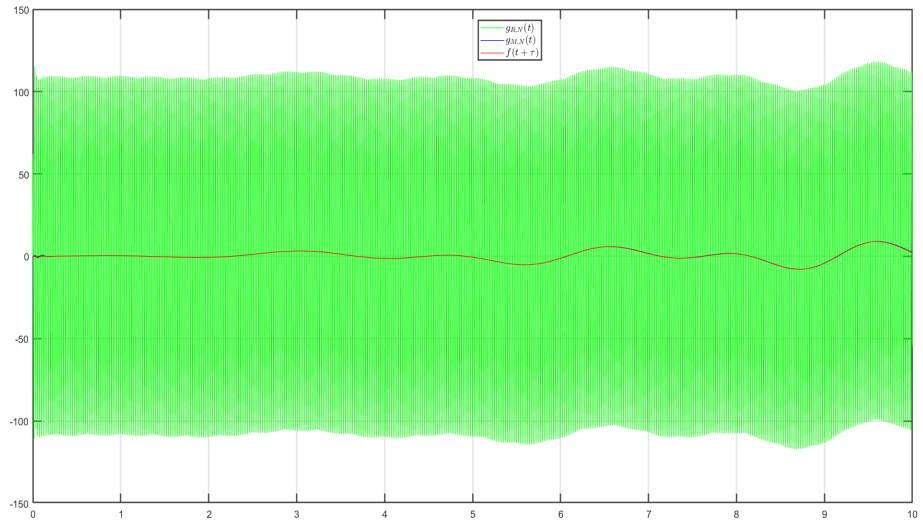


Рис. 45. Прогноз с помехой сигнала $f(t) = t \cos t \sin(\ln(1+t)t)$

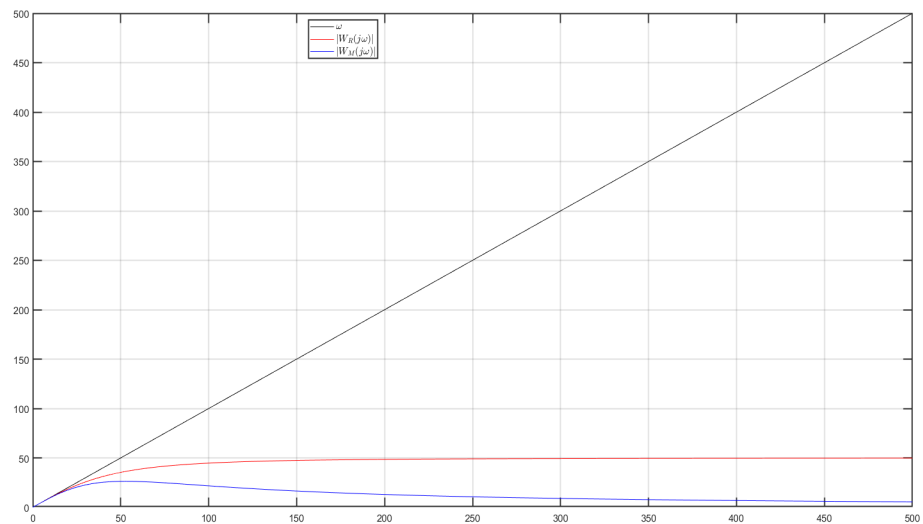


Рис. 46. АЧХ дифференциаторов

3.4. Пример прогнозирования для задачи траекторного сопровождения

Рассмотрим теперь задачу траекторного сопровождения [13], [45]. Пусть движение летательного аппарата описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G\varphi(t), \\ y(t) = Cx(t) + \psi(t), \end{cases} \quad (3.49)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор состояний, компонентами которого являются траекторные параметры, подлежащие оцениванию: x_1 — дальность до летательного аппарата, x_2, x_3 — скорость изменения дальности и скорость изменения скорости относительного перемещения соответственно; $y(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) = f(t) = x_1(t)$ — наблюдаемая переменная; $\varphi(t)$ — вектор формирующих шумов, который полагается белым гауссовым; $\psi(t)$ — вектор шумов наблюдений, который полагается белым гауссовым, причем известно, что $M\{\varphi(t)\psi(t)\} = 0$. Q и R будут представлять интенсивности двух членов (с характеристиками белого шума) $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно: $\varphi(t) \sim N(0, Q)$, $\psi(t) \sim N(0, R)$. Здесь $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — известная матрица динамических коэффициентов, определяемая по принятой модели траекторного перемещения воздушных судов, $G \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ — матрица формирующих шумов, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ — матрица наблюдений, структура которой зависит от возможного числа каналов измерений компонент вектора состояния. Матрицы A , G и C имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2\alpha\sigma} \end{pmatrix}; \quad C = (1, 0, 0); \quad (3.50)$$

Здесь α — величина, характеризующая ширину спектра флуктуации ускорения.

Рассмотрим далее основные уравнения калмановской фильтрации:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)), \\ 0 &= AP + PA^T + Q - K RK^T, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где коэффициент Калмана получается по формуле

$$K = PH^T R^{-1}. \quad (3.52)$$

Здесь $\hat{x}(t)$ — оптимальная оценка вектора состояния; K — матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана; P — квадратная симметричная матрица

дисперсий ошибок фильтрации: $P = M\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)$, $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Калман показал, что точность оценивания компонент вектора состояний $x(t)$, которые являются оцениваемыми траекторными параметрами перемещения воздушного судна, зависят от качества априорной информации о динамике их изменения (матрицы A и Q) и статистических характеристик шумов измерений (матрица R). Неточное знание динамики в виде матрицы A приведет к ошибкам при вычислении матрицы дисперсии P . Неточные знания матриц интенсивностей Q и R , также влияют на значения компонент матрицы P . Кроме того, матрица интенсивностей R шумов наблюдения непосредственно входит в коэффициент усиления фильтра Калмана, влияя на его величину, а следовательно, на результат формирования оценки $\hat{x}(t)$.

Отметим, что предсказание дальности на время упреждения τ с помощью фильтра Калмана задается формулой

$$\tilde{y}(t) = \hat{x}_1(t) + \frac{\hat{x}_2(t)\tau}{1!} + \frac{\hat{x}_3(t)\tau^2}{2!} \quad (3.53)$$

Рассмотрим применение Калмана для оценки прогноза дальности при варьировании ошибки измерения в канале дальности в пределах от 50 до 750 м, среднеквадратической ошибки формирующих шумов в диапазоне $0,015 \dots 1/c^2$, полосы формирующих шумов в диапазоне $1/60 \dots 1$, когда $\sigma = 0,01/c^2$, $\alpha = 1/60^{-1}$. На рис. 47 приведены графики прогноза дальности с помощью фильтра Калмана (при нулевых начальных значениях) и модального прогнозатора при $\tau = 0.25$; $\mu_1 = 0.4$; $\mu_2 = 0.3$; $N = 2$. Среднеквадратические ошибки для фильтра Калмана и модального прогнозатора равны 13278 и 11546 соответственно.

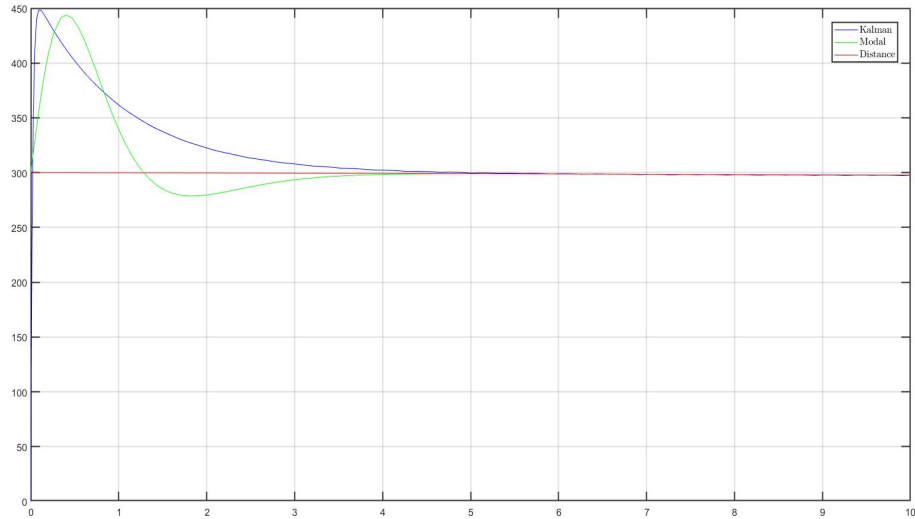


Рис. 47. Прогноз дальности

3.5. Пример прогнозирования доходностей валютного курса

Рассмотрим далее применение модального прогнозатора для прогнозирования логарифмических доходностей валютных котировок. В качестве исходных данных возьмем отношение курса Евро к Доллару США с интервалом изменения цены 30 минут. Использование доходностей вместо цен объясняется несколькими причинами. Определим обозначения - доходность r_i в момент времени i , где p_i - цена финансового инструмента в момент времени i , при этом $j = (i - 1)$. Тогда арифметическая доходность определяется следующей формулой:

$$r_i = \frac{(p_i - p_j)}{p_j}.$$

Преимуществом использования доходностей вместо цен является нормализация - измерение всех переменных в сопоставимой метрике, что позволяет оценить аналитические взаимосвязи между двумя или более переменными, несмотря на то, что они исходят из ценовых рядов с неравными значениями. Переход к доходностям применяется во многих методах многомерного статистического анализа.

Применение логарифмических доходностей обусловлено тем, что при использовании дискретного шага в 30 мин возникает задача сглаживания значений при больших временных масштабах. Модальный прогнозатор рассмотрим при следующих параметрах: $\tau = 1$; $\mu_1 = 0,4$; $\mu_2 = 0,1$; $N = 2$. Результаты прогноза представлены на рис. 48. Логарифмическая доходность считается по

следующей формуле:

$$lr = \ln \frac{f(t_i)}{f(t_{i-1})}.$$

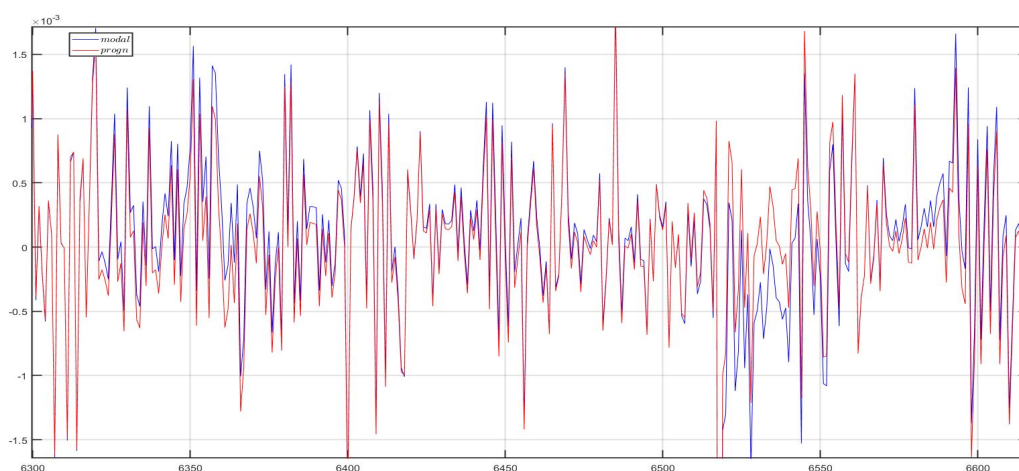


Рис. 48. Прогноз логарифмических доходностей валютного курса

3.6. Пример прогнозирования хаотического сигнала

В последние годы нелинейная динамика вызывает большой интерес у широкого круга специалистов, работающих в самых разнообразных областях информационных технологий [77]. В частности, в настоящее время в радиотехнике активно развивается одно из направлений исследований — это передача информационных сигналов с использованием хаотических колебаний [1].

Реальным физическим примером динамической системы с хаотическим поведением является модель Лоренца [1, 77]. Лоренц [105] изучал тепловую конвекцию в горизонтальном слое жидкости, находящемся в поле сил тяжести и нагреваемом снизу, и предложил простую математическую модель тепловой конвекции в виде системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Лоренц обнаружил, что в такой простой модели могут возникнуть совершенно хаотические движения. Следует отметить, что модель Лоренца используется также и в других физических моделях: конвекция в замкнутой петле, вращение водяного колеса, модель одномодового лазера, диссипативный гармонический осциллятор с инерционной нелинейностью.

Уравнения Лоренца имеют следующий вид [105]:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (3.54)$$

Здесь переменная $x(t)$ представляет собой интенсивность движения и пропорциональна угловой скорости вращения конвективных валов. Переменные $y(t)$ и $z(t)$ характеризуют распределение температуры по кольцу, причем $y(t)$ дает разность температур между восходящими и нисходящими потоками на уровне центров валов, а $z(t)$ — отклонение вертикального профиля температуры от линейного, существующего в отсутствие конвекции, когда теплота передается от нижней пластины к верхней с помощью механизма теплопроводности. Коэффициент b — геометрический множитель, который связан с отношением числа валов к расстоянию между пластинами $a/b = 4/(1 + a^2)$. Параметр p — безразмерное отношение коэффициента вязкости к теплопроводности (число Прандтля). Параметр r — безразмерный градиент температуры, пропорционален разности температур между пластинами и связан с числом Рэлея.

На рис. 49, 50, 51 изображены графики соответственно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ при коэффициентах $p = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ и начальных значениях $x(0) = -5$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

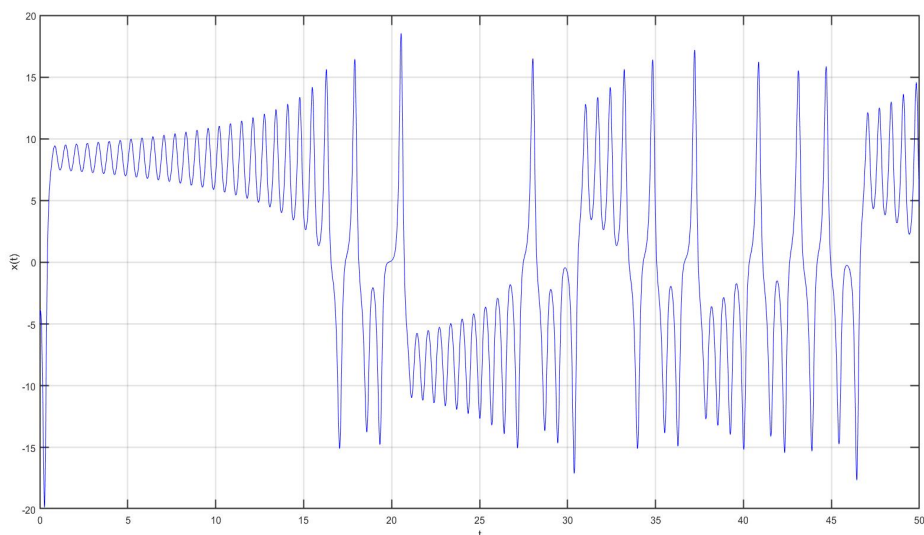


Рис. 49. График координаты $x(t)$

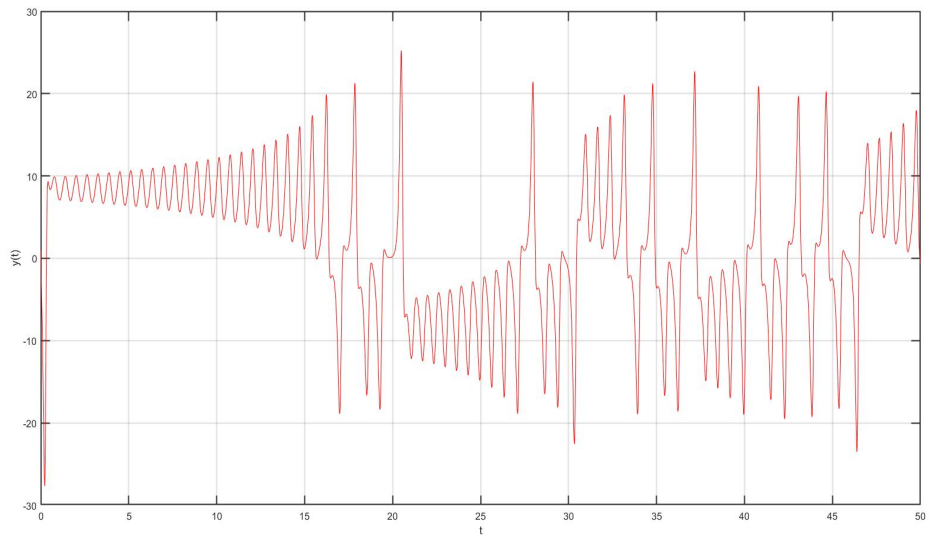


Рис. 50. График координаты $y(t)$

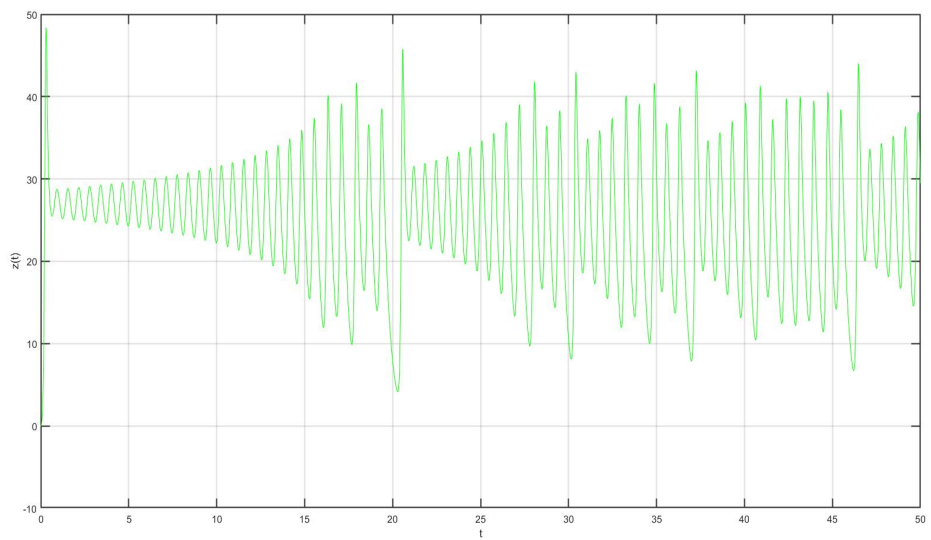


Рис. 51. График координаты $z(t)$

Рассмотрим теперь задачу прогнозирования координаты $x(t)$ с помощью модального прогнозатора при $\mu_1 = 0,01$, $\mu_2 = 0,1$. На рис. 52, 53, 54 изображены графики прогноза при $N = 3$ и $\tau = 0,01$, $\tau = 0,05$ и $\tau = 0,1$ соответственно. На рис. 55, 56, 57 представлены графики прогноза для $N = 5$ и $\tau = 0,01$, $\tau = 0,05$ и $\tau = 0,1$ соответственно.

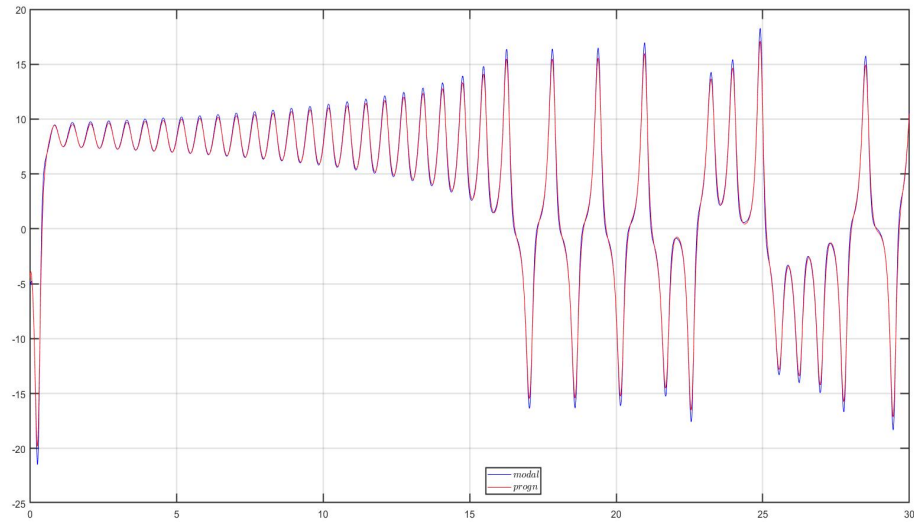


Рис. 52. Прогноз координаты $x(t)$ при $\tau = 0,01$ и $N = 3$

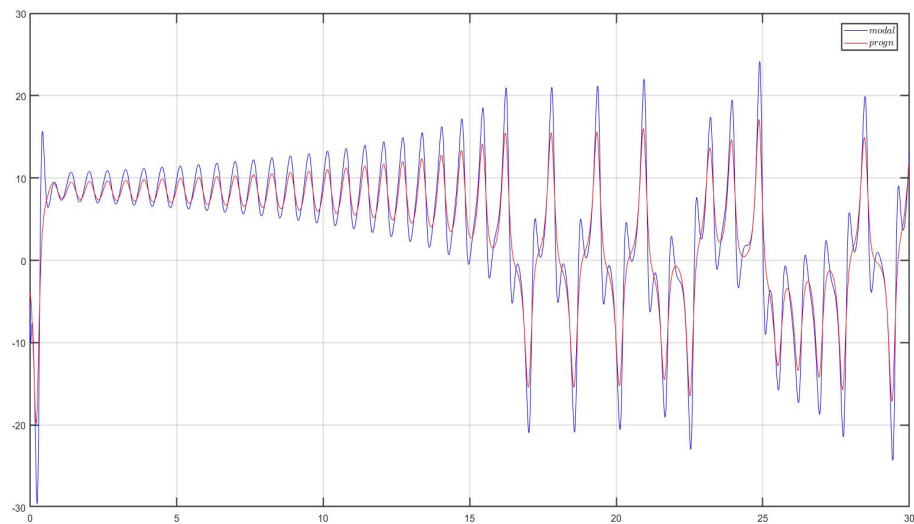


Рис. 53. Прогноз координаты $x(t)$ при $\tau = 0,05$ и $N = 3$

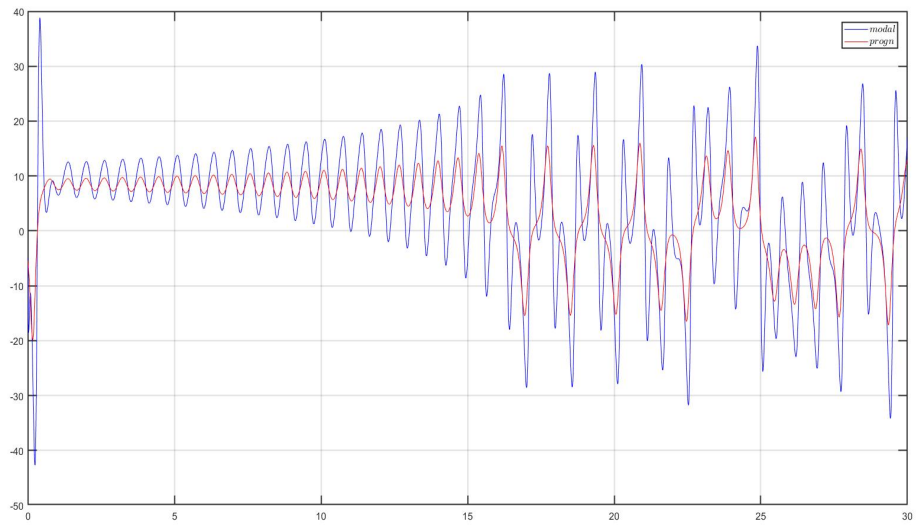


Рис. 54. Прогноз координаты $x(t)$ при $\tau = 0,1$ и $N = 3$

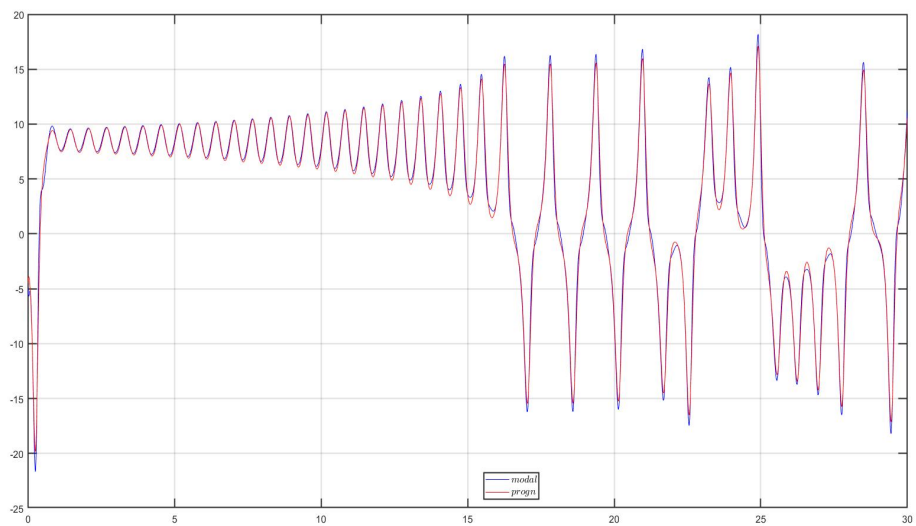


Рис. 55. Прогноз координаты $x(t)$ при $\tau = 0,01$ и $N = 5$

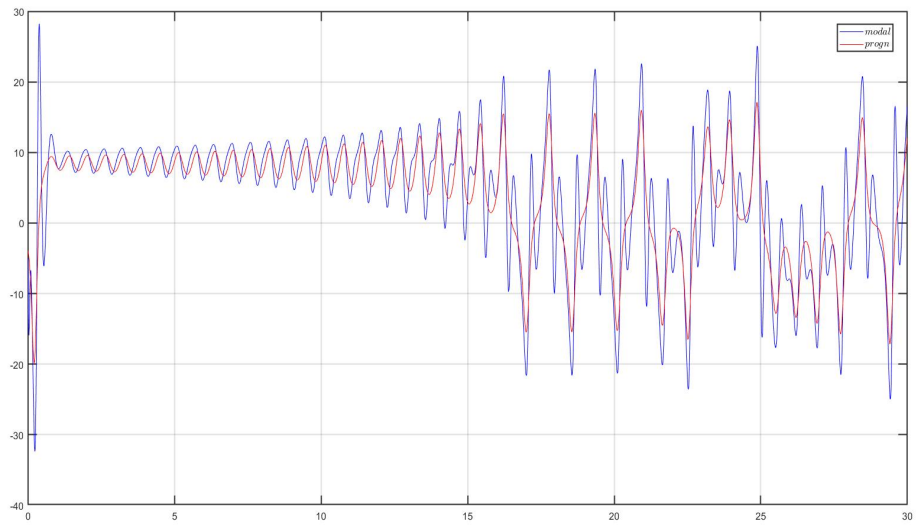


Рис. 56. Прогноз координаты $x(t)$ при $\tau = 0,05$ и $N = 5$

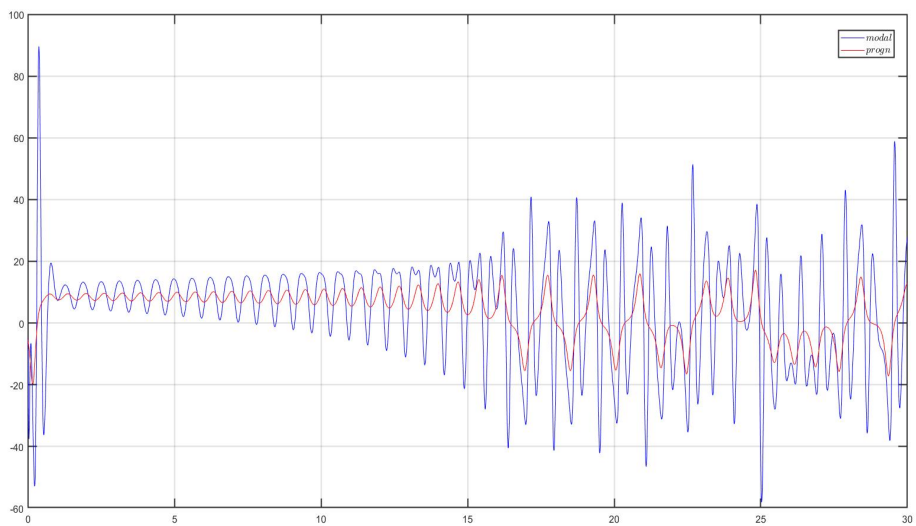


Рис. 57. Прогноз координаты $x(t)$ при $\tau = 0,1$ и $N = 5$

Нетрудно заметить, что для $\tau = 0,1$ при увеличении N точность прогноза координаты $x(t)$ модели Лоренца уменьшается. Этот результат объясняется большой ошибкой аппроксимации модальным прогнозатором $\Psi_N(p)$ идеального прогнозатора $e^{\tau p}$ вне заданной полосы частот $0 \leq \omega \leq \omega^*$. Действительно, на рис. 58–60 представлены АЧХ, ФЧХ и АФЧХ соответственно модального прогнозатора $\Psi_N(p)$ (при $N = 3$ и $N = 5$) и идеального прогнозатора $e^{\tau p}$ в полосе частот $0 \leq \omega \leq \pi$. Очевидно, что модальный прогнозатор с передаточной функцией $\Psi_5(p)$ обеспечивает большую точность, чем модальный прогнозатор с передаточной функцией $\Psi_3(p)$. Однако в полосе частот $\pi < \omega \leq 20\pi$ модальный прогнозатор с передаточной функцией $\Psi_5(p)$ имеет большую ошибку аппроксимации, чем модальный прогнозатор с передаточной функцией $\Psi_3(p)$ (см. рис. 61–63). Поэтому прогноз сигнала, спектр которого содержит частоты из интервала $\pi < \omega \leq 20\pi$, с помощью модального прогнозатора $\Psi_5(p)$ будет иметь большую ошибку, чем $\Psi_3(p)$. Спектр $x(t)$ представлен на рис. 64.

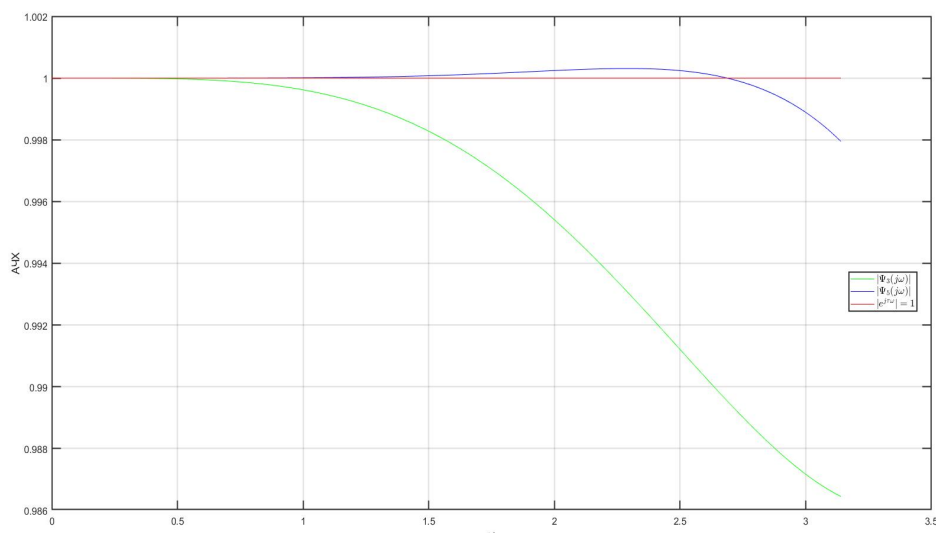


Рис. 58. АЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_3(j\omega)$, $\Psi_5(j\omega)$

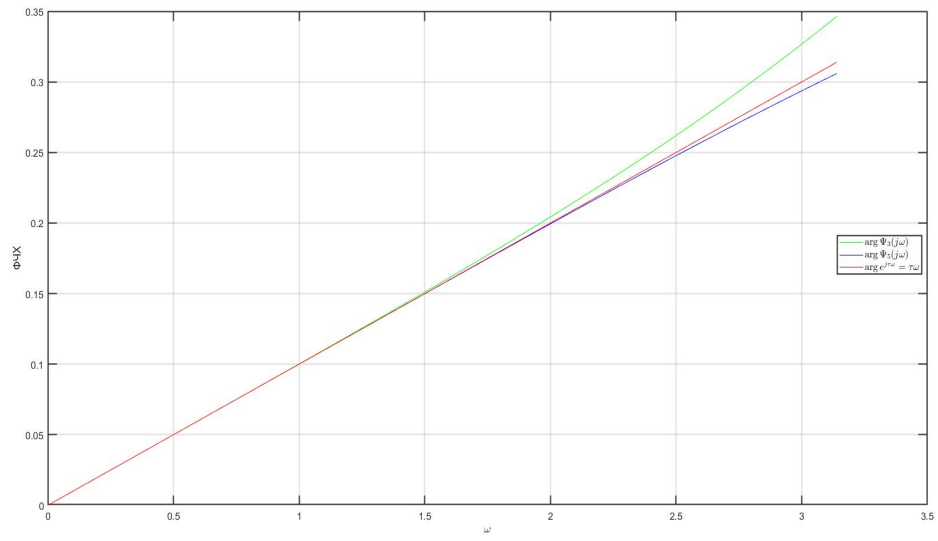


Рис. 59. ФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_3(j\omega)$, $\Psi_5(j\omega)$

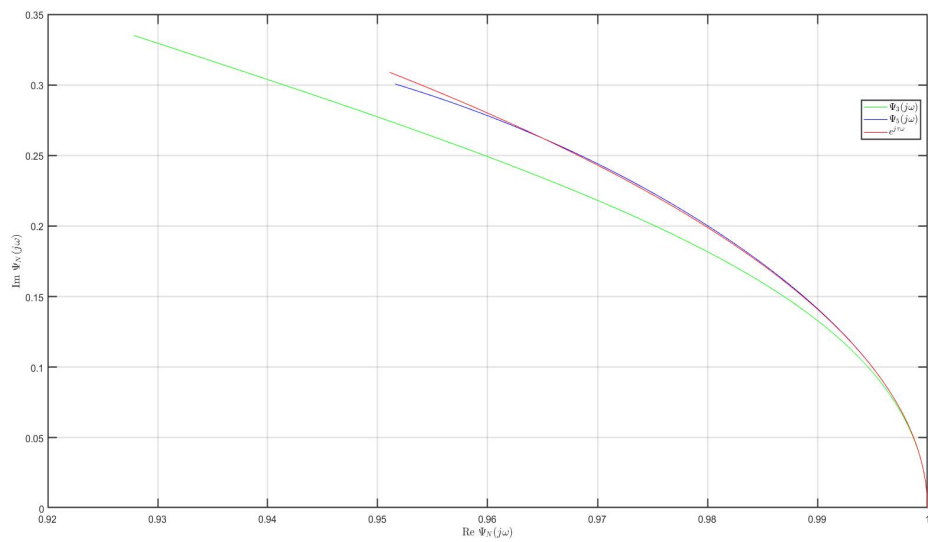


Рис. 60. АФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_3(j\omega)$, $\Psi_5(j\omega)$

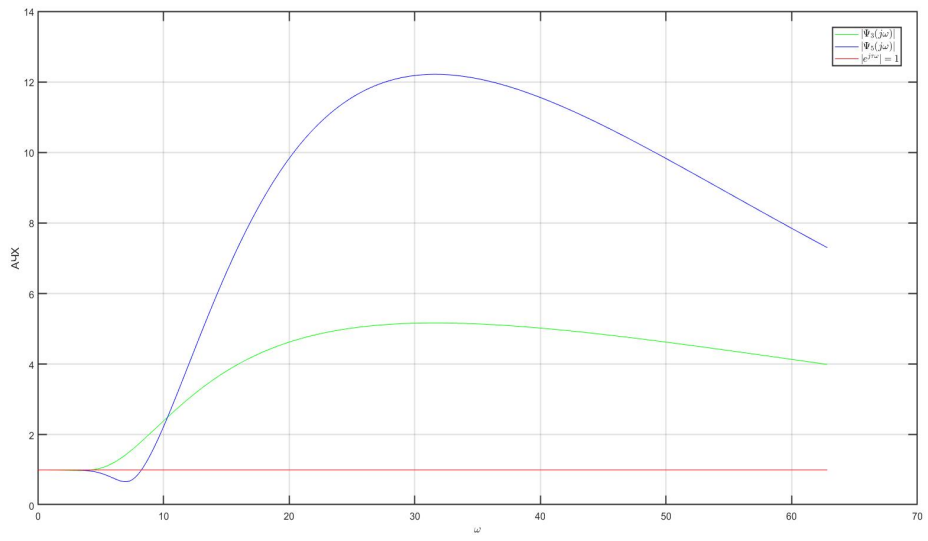


Рис. 61. АЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_3(j\omega)$, $\Psi_5(j\omega)$

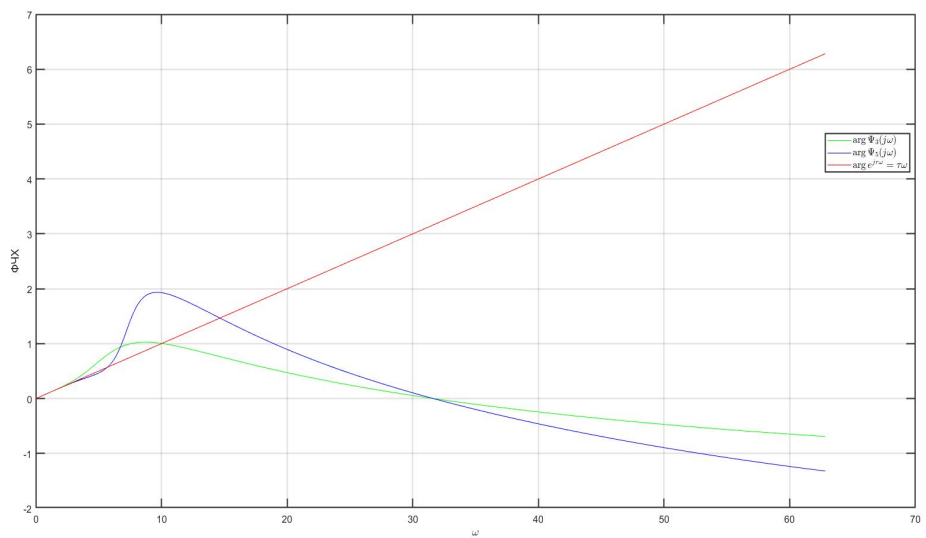


Рис. 62. ФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_3(j\omega)$, $\Psi_5(j\omega)$

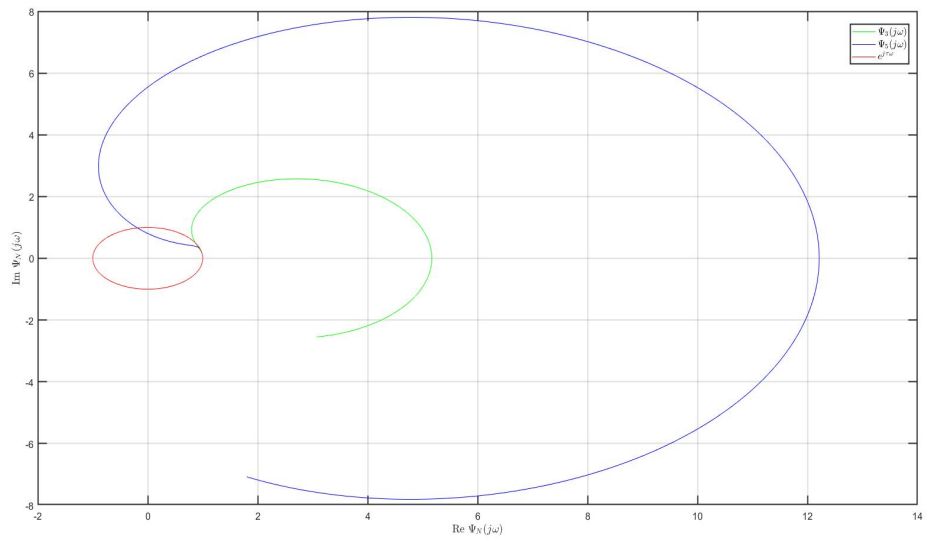


Рис. 63. АФЧХ функций $e^{\tau j\omega}$, $\Psi_3(j\omega)$, $\Psi_5(j\omega)$

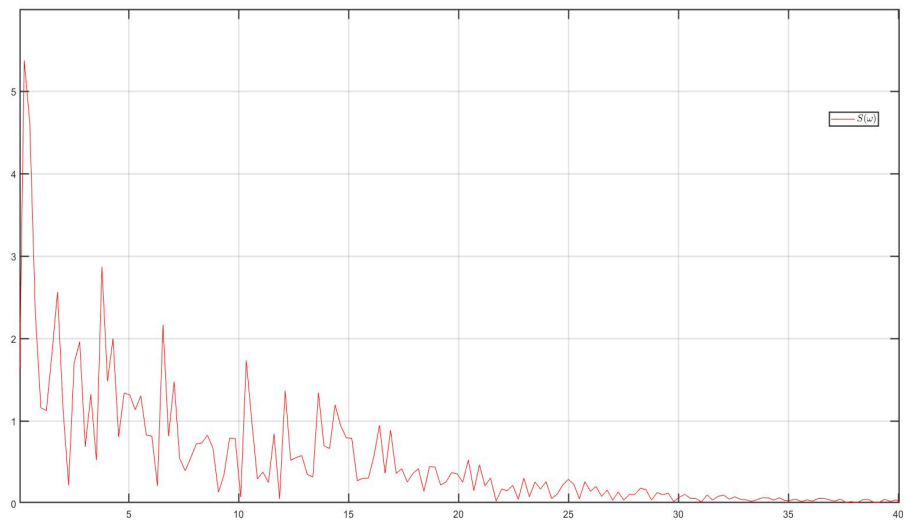


Рис. 64. Спектр $x(t)$

3.7. Выводы по главе 3

В данной главе рассмотрены способы построения опережающих индикаторов с помощью реализуемого и модального прогнозаторов. Для каждого из способов получены расчетные формулы для вычисления оценки прогноза. Задачу вычисления оценки прогноза можно свести к задаче определения импульсной функции и последующей задаче вычисления свертки. Для решения поставленной задачи были найдены импульсные функции. Предложенные расчетные схемы позволяют уменьшить количество арифметических операций для вычисления прогноза: для реализуемого прогнозатора требуется вычисление N интегралов вместо вычисления $\frac{N(N+1)}{2}$ интегралов при непосредственной реализации формулы оценки прогноза. В данной главе была использована формула трапеций, использование которой позволяет получить дискретную передаточную функцию прогнозатора, так как переход от непрерывной передаточной функции к дискретной обычно осуществляется с помощью преобразования Тастина, соответствующего формуле трапеции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе рассмотрены современные методы прогнозирования параметров процессов. В частности, был отмечен метод автоматического прогнозирования широкого класса сигналов с помощью идеального упредителя, который имеет передаточную функцию в виде экспоненты. Приведено описание и основные свойства различных способов аппроксимации экспоненциальной функции, а именно на основе следствия второго замечательного предела, разложение экспоненциальной функции в ряд Тейлора и аппроксимация Паде. Недостатками рассмотренных подходов к решению задач прогнозирования являются: неустойчивость полученных аппроксимаций, как в случае со следствием из второго замечательного предела и аппроксимацией Паде; неосуществимость реализации идеального дифференцирующего звена, как в случае с разложением в ряд Тейлора. Подход с разложением в ряд Тейлора характеризуется более высокой точностью по сравнению со вторым замечательным пределом. Метод аппроксимации Паде отмечается более высокой скоростью сходимости к экспоненциальной функции и более высокой точностью в сравнении с разложением в ряд Тейлора.

В ходе выполнения диссертационного исследования были получены следующие основные результаты.

- 1) В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получены аппроксимации идеального упредителя - разложения экспоненциальной функции в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням правильных функций, не имеющих полюсов в правой полуплоскости.
- 2) На основе аппроксимаций экспоненциальной функции отрезком ряда Бурмана-Лагранжа решена задача построения автоматических устройств прогнозирования - предложен способ синтеза реализуемого и модального прогнозаторов.
- 3) Основываясь на оценке остаточного члена ряда Бурмана-Лагранжа, было показано, что для сигналов с заданной полосой частот может быть достигнута любая наперед заданная точность прогнозирования за счет увеличения количества членов ряда Бурмана-Лагранжа, то есть за счет увеличения числа членов прогнозатора. При этом для модального прогнозатора сохраняется фильтрующее свойство.

- 4) Показано, что в частном случае, модальный прогнозатор совпадает с дифференцирующим наблюдателем, который в свою очередь является фильтром Калмана. Это позволяет выбирать параметры модального прогнозатора при наличии случайных помех наблюдения.
- 5) Разработаны способы построения опережающих индикаторов с помощью реализуемого и модального прогнозаторов. Для каждого из способов получены расчетные формулы для вычисления оценки прогноза. Задачу вычисления оценки прогноза можно свести к задаче определения импульсной функции и последующей задаче вычисления свертки. Для решения поставленной задачи были найдены импульсные функции прогнозаторов. Предложенные расчетные схемы позволяют уменьшить количество арифметических операций для вычисления прогноза: для реализуемого прогнозатора требуется вычисление N интегралов вместо вычисления $\frac{N(N+1)}{2}$ интегралов при непосредственной реализации формулы оценки прогноза. В данной главе была использована формула трапеций. Использование этой формулы позволяет получить дискретную передаточную функцию прогнозатора, так как переход от непрерывной передаточной функции к дискретной обычно осуществляется с помощью преобразования Тастина, соответствующего формуле трапеции.

В ходе выполнения диссертационной работы все поставленные исследовательские задачи были выполнены.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

\mathbb{R} — множество действительных (вещественных) чисел

\mathbb{C} — множество комплексных чисел

\mathbb{N} — множество натуральных чисел

\mathbb{Z}_0 — множество целых неотрицательных чисел

\mathbb{R}^n — арифметическое n -мерное действительное пространство

$a \in A$ — элемент a из множества A

$B \subseteq A$ — подмножество B множества A

$f: X \rightarrow Y$ — функция, отображающая множество X в множество Y

$(f * g)(t) = f(t) * g(t)$ — свертка функций $f(t)$ и $g(t)$

$y(t) \doteq Y(p)$ — преобразование Лапласа

$C^n(X)$ — пространство функций, n раз непрерывно дифференцируемых на множестве X

$\operatorname{Re} z$ — действительная часть комплексного числа z

$\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z

$|\cdot|$ — модуль (абсолютная величина) числа

$\deg P$ — степень алгебраического многочлена P

C_n^m — число сочетаний из n элементов по m

A_n^m — число размещений из n элементов по m

E — единичная матрица

A^T — матрица, транспонированная к матрице A

A^{-1} — матрица, обратная к матрице A

$\det A$ — определитель матрицы A

$\operatorname{rank} A$ — ранг матрицы A

\forall — квантор всеобщности

\exists — квантор существования

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аливер В. Ю.* Хаотические режимы в непрерывных динамических системах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2006. — №1. — С. 65–84.
2. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 424 с.
3. *Арженовский С. В.* Статистические методы прогнозирования / С. В. Арженовский, И. Н. Молчанов. — Ростов-н/Д. : Рост. гос. экон. унив. — 2001. — 74 с.
4. *Афанасьев В. Н.* Анализ временных рядов и прогнозирование / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев. — М. : Финансы и статистика, 2001. — 228 с.
5. *Ахатов А. Р.* Разработка модели прогнозирования временных рядов нестационарных дискретных систем на основе нейронной сети / А. Р. Ахатов, Ф. М. Назаров // Проблемы информатики. — 2018. — №3 (40). — С. 34–50.
6. *Бабич Т. Н.* Прогнозирование и планирование в условиях рынка: учебное пособие / Т. Н. Бабич, И. А. Козьева, Ю. В. Вертакова, Э. Н. Кузьбожев // Москва : Инфра-М. — 2018. — 336 с.
7. *Бейкер Дж.* Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. — М. : Мир, 1986. — 502 с.
8. *Белов Я. Н.* Численные методы прогноза погоды / Я. Н. Белов, Е. П. Борисенков, Б. Д. Панин. — Л. : Гидрометеиздат, 1989. — 376 с.
9. *Бестужев-Лада И. В.* Рабочая книга по прогнозированию / И. В. Бестужев-Лада. // М.: Мысль. — 1982. — 426 с.
10. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. / Дж. Бокс, Г. М. Дженкинс. — М. : Мир, 1974, кн. 1. — 406 с.
11. *Бурдо А. И.* К вопросу систематизации методов и алгоритмов прогнозирования / А. И. Бурдо, Э. Е. Тихонов // Материалы межрегиональной конфе-

- ренции “Студенческая наука – экономике научно-технического прогресса”. Ставрополь: СевКав ГТУ, 2001. — С. 33–34.
12. *Владимирова Л. П.* Прогнозирование и планирование в условиях рынка / Л. П. Владимирова. — М.: Издательский дом «Дашков и К». — 2000. — 308 с.
 13. *Ву Чи Тхань* Траекторное сопровождение воздушных объектов в условиях неопределенности информации о параметрах их движения / В. Ч. Тхань. — Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. — 2013. — 24 с.
 14. *Гамбаров Г. М.* Статистическое моделирование и прогнозирование / Г. М. Гамбаров, Н. М. Журавель, Ю. Г. Королев и др.; под. ред. А. Г. Гранберга — М.: Финансы и статистика, 1990. — 383 с.
 15. *Гельфанд И. М.* Обобщённые функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 470 с.
 16. *Гире А. А.* Методы долгосрочных прогнозов погоды / А. А. Гире, К. В. Кондратович. — Л. : Гидрометеиздат, 2013. — 343 с.
 17. *Грешилов А. А.* Математические методы построения прогнозов / А. А. Грешилов, В. А. Стакун, А. А. Стакун. — М. : Радио и связь, 1997. — 112 с.
 18. *Гурвиц А.* Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. — М. : Наука, 1968. — 648 с.
 19. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий. — М. : Машиностроение, 1974. — 328 с.
 20. *Девятов Б. Н.* Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления / Б. Н. Девятов. — Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1964. — 324 с.
 21. *Демидович Б. П.* Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1966. — 664 с.
 22. *Дуброва Т. А.* Статистические методы прогнозирования / Т. А. Дуброва. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 206 с.
 23. *Дубенко Ю. В.* Нейросетевой алгоритм выбора методов для прогнозирования временных рядов / Ю. В. Дубенко, Е. Е. Дышкант // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ. — 2019. — №1.— С. 51–60.
 24. *Дылевский А. В.* Конечномерный модальный регулятор для объектов с запаздыванием / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев // Вестник Воронеж. гос.

- ун-та. Серия: Физика, математика. — 2005. — № 1. — С. 158–162.
25. *Дылевский А. В.* Синтез конечномерных регуляторов для бесконечномерных объектов: учебное пособие / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — 299 с.
 26. *Дылевский А. В.* Применение индикатора RSX на волатильных рынках / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Современная экономика: проблемы и решения. — 2020. — Т. 5, №5. — С. 35–45.
 27. *Дылевский А. В.* Автоматическое прогнозирование детерминированных сигналов / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Научный результат. Информационные технологии. — 2021. — Т. 6, №4. — С. 20–26.
 28. *Дылевский А. В.* Об одном способе автоматического прогнозирования экономических процессов / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Экономическое прогнозирование: модели и методы — 2021. — С. 20–23.
 29. *Дылевский А. В.* Автоматическое прогнозирование детерминированных сигналов на основе дифференциатора / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Современные технологии: тенденции и перспективы развития. — 2021. — С. 243–252.
 30. *Дылевский А. В.* Построение и прогноз автоматических детерминированных сигналов / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований. — 2022. — №4(42). — С. 16–26.
 31. *Дылевский А. В.* Об одном способе автоматического прогнозирования некоторого класса детерминированных сигналов / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Общество и экономическая мысль в XXI в.: пути развития и инновации. — 2022. — С. 345–353.
 32. *Дылевский А. В.* Об оценке прогноза сигнала / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Математические методы системного анализа, управления и моделирования. — 2023. — Т. 6, №2. — С. 20–26.
 33. *Дылевский А. В.* Применение прогнозатора для расчета оценки прогноза заданного сигнала / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Информатика: проблемы, методы, технологии. — 2023. — С. 59–67.
 34. *Емалетдинова Л. Ю.* Метод построения прогнозной нейросетевой модели временного ряда / Л. Ю. Емалетдинова, З. И. Мухаметзянов, Д. В. Катаева, А. Н. Кабирова // Компьютерные исследования и моделирование. —

2020. — Т. 12. — №4. — С. 737–756.
35. *Ендовицкий Д. А.* Equity Risk and Return across Hidden Market Regimes / Д. А. Ендовицкий, В. В. Коротких, Д. А. Хрипушин // *Risks*. — 2021. — Т. 6, №11. — С. 1–21.
 36. *Ефимов В. М.* Анализ и прогноз временных рядов методом главных компонент / В. М. Ефимов, Ю. К. Галактионов, Н. Ф. Шушпанова. — Новосибирск : Наука, 1988. — 71 с.
 37. *Зарова Е. В.* Нейронные сети как средство моделирования и прогнозирования инфляционных процессов / Е. В. Зарова, И. К. Заров // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. — 2005. — №34. — С. 182–186.
 38. *Захаров А. А.* Интеллектуальный модуль анализа данных в информационных системах с помощью искусственных нейронных сетей / А. А. Захаров, Е. А. Оленников, Т. И. Паюсова // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. — 2015. — Т. 1. — №4. — С. 102–111.
 39. *Ивахненко А. Г.* Кибернетические предсказывающие устройства / А. Г. Ивахненко, В. Г. Лапа. — К.: «Наукова думка». — 1965. — 216 с.
 40. *Исмагилов И. И.* Нечеткие прогнозы: классификация и метод их разработки на основе процедуры групповой экспертизы / И. И. Исмагилов, Р. В. Бичурин // *Фундаментальные исследования*. — 2014. — № 11-6. — С. 1240–1247.
 41. *Калман Р.* Новые результаты в теории линейной фильтрации и упреждения / Р. Калман, Р. Бьюси // *Труды американского общества инженеров-механиков. Серия Д*. — 1961. — № 1. — С. 123–141.
 42. *Керимов А. К.* Анализ и прогнозирование временных рядов / А. К. Керимов. — М. : Изд-во РУДН, 2005. — 138 с.
 43. *Кильдишев Г. С.* Анализ временных рядов и прогнозирование / Г. С. Кильдишев, А. А. Френкель. — М. : Статистика, 1973. — 104 с.
 44. *Киселев А. В.* Нейросетевые модели с виртуальными потоками для классификации и прогнозирования функционального состояния сложных систем / А. В. Киселев, Т. В. Петрова, С. В. Дегтярев, А. Ф. Рыбочкин, С. А. Филист, О. В. Шаталова, В. Н. Мишустин // *Известия Юго-Западного государственного университета*. — 2018. — № 4 (79). — С. 123–134.
 45. *Коновалов А. А.* Основы траекторной обработки радиолокационной информации / А. А. Коновалов СПб : Изд-во СПбГЭТУ ЛЭТИ. — 2014. — 182

- с.
46. *Кувайскова Ю. Е.* Статистические методы прогнозирования: учебное пособие / Ю. Е. Кувайскова, В. Н. Клячкин // Ульяновск : УлГТУ. — 2019. — 197 с.
 47. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Наука, 1989. — 736 с.
 48. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства / Н. Т. Кузовков. — М. : Машиностроение, 1976. — 184 с.
 49. *Лаврентьев М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
 50. *Лозгачев Г. И.* Автоматические дифференциаторы: построение и применение в задачах управления / Г. И. Лозгачев, А. В. Дылевский. — Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2000. — 144 с.
 51. *Лукашин Ю. П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 416 с.
 52. *Льюис К. Д.* Методы прогнозирования экономических показателей / К. Д. Льюис. — М. : Финансы и статистика, 1986. — 113 с.
 53. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. — М. : Мир, 1980. — 608 с.
 54. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. — М. : Государственное издательство технико-технической литературы, 1957. — 336 с.
 55. *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление / В. С. Мартыненко. — Киев : Вища школа, 1973. — 267 с.
 56. *Марчук Г. И.* Численные методы в прогнозе погоды / Г. И. Марчук. — Л. : Гидрометеиздат, 1967. — 355 с.
 57. *Милосердов Д. И.* Модели, методы и архитектуры программных систем нейросетевого прогнозирования трудноформализуемых событий с непрерывным обучением / Д. И. Милосердов. // Диссертация на соискание ученой степени канд. техн. наук. — Санкт-Петербург: СПб ФИЦ РАН, 2022. — 145 с.
 58. *Орлов А. И.* Прикладная статистика / А. И. Орлов. — М. : Экзамен, 2006. — 672 с.
 59. *Осипов В. Ю.* Нейросетевое прогнозирование событий для интеллектуальных роботов / В. Ю. Осипов // Мехатроника, автоматизация, управление.

- 2015. — Т. 16. — №12. — С. 836–840.
60. *Рапопорт Э. Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами / Э. Я. Рапопорт. — М. : Высш. шк., 2003. — 299 с.
61. *Рассудов Л. Н., Мядзель В. Н.* Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов. — Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1987. — 144 с.
62. *Савин С. И.* Использование нейронных сетей для прогнозирования нормальных реакций шагающего робота. / С. И. Савин, Л. Ю. Ворочаева // Известия Юго-Западного государственного университета. — 2019. — Т. 23(4). — С. 8–18.
63. *Самарский А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989. — 432 с.
64. *Селиверстова А. В.* Сравнительный анализ моделей и методов прогнозирования / А. В. Селиверстова // Современные научные исследования и инновации. — 2016. — № 11 (67). — С. 241–248.
65. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректно поставленных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1974. — 223 с.
66. *Тихонов Э. Е.* Методы прогнозирования в условиях рынка / Э. Е. Тихонов. — Невинномысск, 2006. — 221 с.
67. Теория автоматического управления. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / [под ред. А. А. Воронова]. — М. : Высш. шк., 1986. — 367 с.
68. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования: в 4 т. / под ред. В. В. Солодовникова. — М. : Машиностроение, 1967. — Т. 1. — 768 с.; Т. 2. — 680 с.
69. *Трегуб А. В.* Методика построения модели ARIMA для прогнозирования динамики временных рядов / А. В. Трегуб, И. В. Трегуб // Лесной вестник. — 2011. — № 5 (81). — С. 179–183.
70. *Уиттекер Э. Т.* Курс современного анализа. Ч.1 : Основные операции анализа / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. — М. : Физматлит, 1963. — 343 с.
71. *Хрипушин Д. А.* Построение опережающих индикаторов с помощью дифференциаторов / Д. А. Хрипушин // Математические методы системного анализа, управления и моделирования. — 2022. — № 4. — С. 5–11.
72. *Хрипушин Д. А.* Синтез автоматических модальных прогнозаторов

- / Д. А. Хрипушин, А. В. Дылевский // Перспективы науки. — 2023. — Т. 6, №11. — С. 88–92.
73. *Цыпкин Я. З.* Основы теории автоматических систем / Я. З. Цыпкин. — М. : Наука, 1977. — 560 с.
 74. *Чепенко Т. Е.* Методы прогнозирования временных рядов на основе искусственных нейронных сетей с элементами временной задержки / Т. Е. Чепенко // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. — 2011. — № 57. — С. 41–48
 75. *Четыркин Е. М.* Статистические методы прогнозирования / Е. М. Четыркин. — М. : Статистика, 1977. — 200 с.
 76. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1969. — 577 с.
 77. *Шашихин В. Н.* Хаос и нелинейная динамика. Регулярная и хаотическая динамика: учеб. пособие / В. Н. Шашихин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. — 210 с.
 78. *Шевяков А. А.* Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов / А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева. — М. : Машиностроение, 1968. — 312 с.
 79. *Шильман С. В.* Адаптивное прогнозирование временных рядов при наличии систематической составляющей / С. В. Шильман // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 2. — С. 64–67.
 80. *Эйдерман В. Я.* Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления / В. Я. Эйдерман. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 256 с.
 81. *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздыванием / Р. Т. Янушевский. — М. : Наука, 1978. — 416 с.
 82. *Ярушкина Н. Г.* Интеллектуальный анализ временных рядов / Н. Г. Ярушкина, Т. В. Афанасьева, И. Г. Перфильева. — Ульяновск: УлГТУ. — 2010. — 320 с.
 83. *Amini M. H.* ARIMA-based decoupled time series forecasting of electric vehicle charging demand for stochastic power system operation / M. H. Amini, A. Kargarian, O. Karabasoglu // Electric Power Systems Research. — 2016. — Vol. 140. — Pp. 378–390.
 84. *Åström K. J.* A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time / K. J. Åström, C. C. Hang, B. C. Lim // IEEE Trans.

- Automat. Contr. — 1994. — Vol. 39, № 2. — P. 343–345.
85. *Bok B.* Macroeconomic Nowcasting and Forecasting with Big Data. / B. Bok, D. Caratelli, D. Giannone, A. Sbordone, A. Tambalotti // Annual Review of Economics. — 2018. — Vol. 10. — Pp. 615–643.
 86. *Brockwell P.* Introduction to Time Series and Forecasting / P. Brockwell, R. Davis. — Springer International Publishing, 2016. — 425 p.
 87. *Brown R. G.* Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series / R. G. Brown. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1962. — 492 p.
 88. *Brown R. G.* The fundamental theorem of exponential smoothing / R. G. Brown, R. F. Meyer // Operations Research. — 1961. — Vol. 9. — No. 5. — Pp. 673–687.
 89. *Chang W.-Y.* A Literature Review of Wind Forecasting Methods / W.-Y. Chang // Journal of Power and Energy Engineering. — 2014. — Vol. 2. — Pp. 161–168.
 90. *Chatfield C.* Time series forecasting / C. Chatfield. — London : Chapman and Hall, 2000. — 267 p.
 91. *Egrioglu E.* Median-Pi artificial neural network for forecasting / E. Egrioglu, U. Yolcu, E. Bas, A. Z. Dalar // Neural Computing and Applications. — 2019. — Vol. 31. — Pp. 307–316.
 92. *Fajardo-Toro C.H.* Adaptive and Hybrid Forecasting Models — A Review / C.H. Fajardo-Toro, J. Mula, R. Poler // Engineering Digital Transformation. Lecture Notes in Management and Industrial Engineering. — 2019. — Pp. 315–322.
 93. *Faloutsos C.* Forecasting Big Time Series: Theory and Practice / C. Faloutsos, V. Flunkert, J. Gasthaus, T. Januschowski, Y. Wang // Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining (KDD'19). In Association for Computing Machinery. — 2019. — Pp. 3209–3210.
 94. *Fernandez-Navarro M.* Time series forecasting by recurrent product unit neural networks / M. Fernandez-Navarro, M. A. de la Cruz, P. A. Gutierrez, A. Castano, C. Hervas-Martinez // Neural Computing and Applications. — 2018. — Vol. 29. — Pp. 779–791.
 95. *Gheyas I. A.* A Neural Network Approach to Time Series Forecasting / I. A. Gheyas, L. S. Smith // Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol II, WCE 2009, July 1–3, 2009, London, U.K — Pp. 1292–1296.
 96. *Gonzalez R.* Slippage prediction for off-road mobile robots via machine learning regression and proprioceptive sensing / R. Gonzalez, M. Fiacchini, K. Iagnemma // Robotics and Autonomous Systems. — 2018. — Vol. 105. — Pp. 85–93.

97. *Hornik K.* Multilayer feedforward networks are universal approximators / K. Hornik, M. Stindcombe, H. White // *Neural Networks*. — 1989. — No. 2. — Pp. 359–366.
98. *Hu H.* Predicting the direction of stock markets using optimized neural networks with Google Trends / H. Hu, L. Tang, S. Zhang, H. Wang // *Neurocomputing*. — 2018. — Vol. 285. — Pp. 188–195.
99. *Hyndman R. J.* Forecasting: principles and practice / R. J. Hyndman, G. Athanasopoulos. — Melbourne : OTexts, — 2018. — 442 p.
100. *Jiang P.* A hybrid forecasting system based on fuzzy time series and multi-objective optimization for wind speed forecasting / P. Jiang , H. Yang, J. Heng // *Applied Energy*. — 2019. — Vol. 235. — Pp. 786–801.
101. *Jinu L.* A neural network method for nonlinear time series analysis / Jinu L. // *Journal of Time Series Econometrics*. — 2019. — Vol. 11 (1). — Pp. 1–18.
102. *Koprinska I.* Convolutional Neural Networks for Energy Time Series Forecasting / I. Koprinska, D. Wu, Z. Wang // *International Joint Conference on Neural Networks, IJCNN*. — 2018. — Pp. 1–8.
103. *Kumar D. N.* River flow forecasting using recurrent neural networks / D. N. Kumar, K. S. Raju, T. Sathish // *Water Resources Management*. — 2004. — Vol. 18. — №2. — Pp. 143–161.
104. *Livera A. M.* Forecasting Time Series With Complex Seasonal Patterns Using Exponential Smoothing / A. M. Livera, R. J. Hyndman, R. D. Snyder // *Journal of the American Statistical Association*. — 2011. — Vol. 106:496. — Pp. 1513–1527.
105. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // *Journal of Atmospheric Sciences*. — 1963. — V. 20, №1. — Pp. 130–141.
106. *Mahmoud A.* A survey on deep learning for time-series forecasting / A. Mahmoud, M. Ammar // *Machine Learning and Big Data Analytics Paradigms: Analysis, Applications and Challenges*. — 2021. — Pp. 365–392.
107. *Malik S.* Heuristic and Statistical Prediction Algorithms Survey for Smart Environments / S. Malik, I. Ullah, D. Kim, K. Lee // *Journal of Information Processing Systems*. — 2020. — Vol. 16. — №5. — Pp. 1196–1213.
108. *Nagy A.* Survey on traffic prediction in smart cities. / A. Nagy, V. Simon // *Pervasive and Mobile Computing*. — 2018. — Vol. 50. — Pp. 148–163.
109. *Nguyen L.* Forecasting seasonal time series based on fuzzy techniques / L. Nguyen, V. Novak // *Fuzzy Sets and Systems*. — 2019. — Vol. 361. — P. 114–

110. *Palit A. K.* Computational Intelligence in Time Series Forecasting. Theory and Engineering Applications / A. K. Palit, D. Popovic // Springer-Verlag London. — 2005. — 372 p.
111. *Rahimian E.* Bankruptcy prediction by neural network / E. Rahimian, S. Singh, T. Thammachote, R. Virmani // Neural Networks in Finance and Investing / edited by R. Trippi, E. Turban. Probus Publishing. — 1993. — Pp. 159–176.
112. *Sezer O. B.* Financial time series forecasting with deep learning: A systematic literature review: 2005–2019 / O. B. Sezer, M. U. Gudelek, A. M. Ozbayoglu // Applied Soft Computing. — 2020. — Vol. 90. — Pp. 106–181.
113. *Singhal D.* Electricity price forecasting using artificial neural networks / D. Singhal, K. S. Swarup // International Journal of Electrical Power and Energy Systems. — 2011. — Vol. 33. — №3. — Pp. 550–555.
114. *Tealab A.* Time series forecasting using artificial neural networks methodologies: A systematic review / A. Tealab // Future Computing and Informatics Journal. — 2018. — Vol. 3. — Pp. 334–340.
115. *Timmermann A.* Forecasting methods in finance / A. Timmermann // Annual Review of Financial Economics. — 2018. — Vol. 10.— No. 1. — Pp. 449–479.
116. *Webby R.* Judgemental and statistical time series forecasting: a review of the literature / R. Webby, M. O'Connor // International Journal of Forecasting. — 1996. — Vol. 12, Issue 1. — Pp. 91–118.
117. *Wu Y.* A hybrid deep learning based traffic flow prediction method and its understanding / Y. Wu, H. Tan, L. Qin, B. Ran, Z. Jiang // Transportation Research Part C. Emerging Technologies. — 2018. — Vol. 90. — Pp. 166–180.
118. *Yang B.* Traffic flow prediction using LSTM with feature enhancement / B. Yang, S. Sun, J. Li, X. Lin, Y. Tian // Neurocomputing. — 2019. — Vol. 332. — Pp. 320–327.
119. *Yarushev S.* Review of studies on time series forecasting based on hybrid methods, neural networks and multiple regression / S. Yarusev, A. Averkin // Программные продукты и системы. — 2016. — Т. 31. — С. 75–82.