На правах рукописи

ХРИПУШИН ДЕНИС АЛЕКСАНДРОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРЕЖАЮЩИХ ИНДИКАТОРОВ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАТОРОВ

Специальность 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж—2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет».

Научный руководитель:	доктор технических наук, доцент **Дылевский Александр Вячеславович**
Официальные оппоненты:	**Кузичкин Олег Рудольфович**, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», кафедра информационных и робототехнических систем, профессор **Моисеев Сергей Игоревич**, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет», кафедра управления, доцент
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва

Защита состоится **04 июля 2024 г. в 17:00** на заседании диссертационного совета 24.2.288.05 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, дом 1, ауд. 428.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета и на сайте:
http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=3501

Автореферат разослан «_____» мая 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.288.05 Степкин Владислав Андреевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Как известно, любые процессы или явления характеризуются некоторыми параметрами. В связи с этим во многих областях возникают задачи прогнозирования параметров. Например, прогнозирование цены на какой-либо финансовый инструмент, прогнозирование числа заболевших определенной болезнью, прогнозирование температуры воздуха или количества осадков и т.д. Следует отметить, что благодаря применению автоматических систем, задачи прогнозирования параметров могут быть эффективно решены без непосредственного участия человека. Актуальность темы диссертационного исследования определяется необходимостью автоматического прогнозирования параметров различных процессов и явлений.

Известно, что идеальный прогнозатор имеет трансцендентную передаточную функцию. Такие передаточные функции являются бесконечномерными. Это представляет собой основную проблему при анализе и синтезе систем управления. Наиболее простым и эффективным способом решения этой проблемы можно считать аппроксимацию бесконечномерной передаточной функции с помощью дробно-рациональной функции конечного порядка. Выбор в качестве аппроксимирующих моделей дробно-рациональных функций объясняется тем, что, во-первых, вопросы аппроксимации дробно-рациональными функциями в комплексной области являются достаточно хорошо изучены в математической литературе, во-вторых, применение дробно-рациональных аппроксимаций дает возможность решать задачи анализа и синтеза систем управления бесконечномерными объектами с помощью хорошо развитых методов теории автоматического управления сосредоточенными объектами.

Наибольшее распространение получили следующие методы аппроксимации идеального прогнозатора: форсирующими или инерционными звеньями на основе следствия второго замечательного предела, разложения экспоненциальной функции в ряд Тейлора и аппроксимации Паде. Недостатками рассмотренных подходов к решению задач прогнозирования являются: неустойчивость полученных аппроксимаций, как в случае со следствием из второго замечательного предела и аппроксимацией Паде; неосуществимость реализации идеального дифференцирующего звена, как в случае с разложением в ряд Тейлора. Метод аппроксимации

Паде отмечается более высокой скоростью сходимости к экспоненциальной функции и более высокой точностью в сравнении с разложением в ряд Тейлора.

Степень разработанности темы диссертации. Необходимость в прогнозировании привела к созданию различных методов прогнозирования. Методы прогнозирования по степени формализации можно разделить на интуитивные и формализованные. К интуитивным методам относятся методы индивидуальных и коллективных экспертных оценок. Формализованные методы делятся на экстраполяционные, структурные, математические, ассоциативные методы, а также методы опережающей информации. Экстраполяционные и математические методы являются наиболее проработанными в научной литературе.

Традиционные методы прогнозирования временных рядов рассматривались в работах С. В. Арженоского, В. Н. Афанасьева, Г. М. Гамбарова, Т. А. Дуброва, Ю. П. Лукашина и основаны на статистических моделях и состоят в определении основных параметров временного ряда, влияющих на динамику ряда, и последующей экстраполяции по известным предыдущим и текущим значениям. Статистические модели применимы, в основном, для получения краткосрочных прогнозов. Выделяют следующие основные группы методов: сглаживание (сглаживание простой скользящей средней, взвешенной скользящей средней, экспоненциальное сглаживание и их разновидности); аналитическая оценка неслучайной составляющей (автокорреляция уровней, прогнозирование по линии тренда, прогнозирование периодической компоненты); авторегрессионные модели (AR, ARMA, ARIMA и др.); адаптивные модели (полиномиальные, многопараметрические); методы прогнозирования систем временных рядов (трендовая модель системы временных рядов, совместная гармоническая модель, модель векторной авторегрессии).

Цель и задачи исследования. Основной целью настоящей работы является построение опережающих индикаторов для достаточно широкого класса сигналов. Опережающие индикаторы должны автоматически вычислять прогноз произвольного, заранее неизвестного сигнала на заданное время упреждения. Построенные индикаторы должны быть физически реализуемыми и обладать устойчивостью. Кроме того, опережающие индикаторы должны допускать простую техническую реализацию.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи:

1. В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получить аппроксимацию идеального упредителя;
2. На основе аппроксимации идеального упредителя синтезировать автоматическое устройство прогнозирования (прогнозатор);
3. Исследовать точность прогнозирования для заданных классов сигналов;
4. Разработать способ построения опережающих индикаторов с помощью синтезированных прогнозаторов.

Объект исследования. Объектом исследования является разработка методов и алгоритмов решения задач обработки информации и автоматического прогнозирования заданного класса сигналов.

Предмет исследования. Автоматические прогнозаторы, обеспечивающие прогноз некоторого класса сигналов при заданном времени упреждения.

Методология и методы исследования. В работе систематически используются понятия и методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости, линейной алгебры, математического анализа, теории автоматического управления, теории приближения функций действительного переменного.

Научная новизна. Среди полученных в диссертации результатов отметим следующие:

1. В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получены аппроксимации идеального упредителя;
2. Впервые разработаны способы построения автоматических прогнозаторов - реального и модального прогнозаторов;
3. Исследована точность построенных прогнозаторов и показано, что для заданного класса сигналов может быть достигнута любая, наперед заданная, точность прогнозирования за счет увеличения порядка прогнозатора;
4. На основе синтезированных реального и модального прогнозаторов разработаны способы построения опережающих индикаторов.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Содержание работы соответствует областям исследования специальности 2.3.1 Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации имеют теоретическое и практическое значение, так как разработанные методы построения прогнозаторов и опережающих индикаторов широкого класса сигналов позволяют решать актуальные задачи прогнозирования параметров различных процессов, а также дают возможность синтезировать высококачественные автоматические системы.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

1. В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получены аппроксимации идеального упредителя;
2. Разработаны способы построения автоматических прогнозаторов;
3. Заданная точность прогнозирования для определенного класса входных сигналов может быть обеспечена за счет выбора порядка и параметров прогнозатора;
4. Модальный прогнозатор при определенных коэффициентах является дифференцирующим наблюдателем;
5. Разработаны способы построения опережающих индикаторов.

Степень достоверности результатов работы. Достоверность результатов следует из применения строгих математических методов и известных теоретических оценок погрешностей численных решений и на основании вычислительных экспериментов. Достоверность результатов подтверждается сравнением полученных решений с известными результатами других авторов.

Апробация работы. Основные материалы по всем разделам диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: на L международной научно-практической конференции «Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований» (г. Новосибирск, 2022 г.); на XVII международной научно-практической конференции «Экономическое прогнозирование: модели и методы» (г. Воронеж, 2022 г.); на II международной научно-практической конференции «Современные технологии: тенденции и перспективы развития» (г. Петрозаводск, 2021 г.); на X международной научно-практической конференции «Общество и экономическая мысль в XXI в.: пути развития и инновации» (г. Воронеж, 2022 г.); на XXIII Международной научно-практической конференции «Информатика: проблемы, методы, технологии» (г. Воронеж, 2023 г.).

Публикации По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе в изданиях, рекомендованных ВАК — 3, и 1 — в изданиях, индексируемых в Scopus (Q2).

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в разработке и проведении теоретических и экспериментальных исследований, а также анализе полученных результатов. Результаты, представленные в диссертации, получены при непосредственном участии автора на этапах постановки задач и разработки экспериментальных и теоретических методов для их решения, обработки полученных данных. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась автором как самостоятельно, так и в соавторстве, причем вклад диссертанта был определяющим. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем.

Структура и содержание диссертации. Диссертация содержит: введение, три главы, заключение, список обозначений, список литературы. В конце каждой главы приведены выводы по главе. Диссертация изложена на 117 страницах основного текста, содержит 2 таблицы, 64 рисунка, список литературы из 119 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Как известно, любые процессы или явления характеризуются некоторыми параметрами. В связи с этим во многих областях возникают задачи прогнозирования параметров: прогнозирование цены на какой-либо финансовый инструмент, прогнозирование числа заболевших определенной болезнью, прогнозирование температуры воздуха или количества осадков и т.д. Необходимость в прогнозировании привела к созданию различных методов прогнозирования.

При нахождении прогноза некоторого сигнала $f(t)$ на время $\tau > 0$ существенное значение может иметь время вычисления прогноза Δt. Если $\Delta t > \tau$, то полученный прогноз не имеет смысла. Очевидно, что при прогнозировании надо стремиться к выполнению условия $\Delta t \ll \tau$. В этом случае будет запас времени для принятия решений. Например, построение автоматической торговой системы (торгового робота) для торговли на бирже финансовыми инструментами (акциями, фьючерсами, валютами и т.д.) по прогнозируемому значению цены инструмента требует оценки доходности и риска сделки, размера торговой позиции, оценки времени и уровня вхождения в сделку. Поэтому запас по времени при получении прогноза может дать существенные преимущества, особенно при торговле на малых интервалах времени.

Большое количество методов прогнозирования ставит перед специалистами задачу выбора методов, которые давали бы адекватные прогнозы для изучаемых процессов или систем. В связи с этим разрабатываются алгоритмы выбора методов для прогнозирования. Следует отметить, что описанные выше методы прогнозирования допускают автоматизацию. Автоматизация решения задачи прогнозирования осуществляется специальными вычислительными устройствами — экстраполяторами (прогнозаторами). Если на вход такого устройства подать некоторый сигнал, то на выходе получится упрежденное значение этого сигнала. При этом и входной, и выходной сигналы могут быть как непрерывными, так и дискретными.

Для сигнала $f(t)$ прогнозом (упреждением) на время $\tau > 0$ является сигнал $f(t+\tau)$ (см. рис. 1). Тогда в пространстве изображений по Лапласу

$$f(t+\tau) \risingdotseq G(p) = e^{\tau p} F(p). \tag{1}$$

Поэтому в дальнейшем устройство, осуществляющее прогноз (упреждение) произвольного сигнала на время $\tau > 0$ и имеющее передаточную функцию

$$\Psi(p) = e^{\tau p}, \quad \tau > 0,\ p \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

будем называть *идеальным прогнозатором (упредителем)* для упреждения на время τ.

В результате проведенного анализа проблемы синтеза прогнозаторов можно сформулировать следующую задачу, решению которой посвящена данная диссертационная работа. Рассмотрим задачу построения автоматического реализуемого устойчивого устройства прогнозирования (прогнозатора) на время упреждения $\tau > 0$ для сигналов из следующего класса. Пусть функция $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1. является кусочно-непрерывной в $[0,\infty)$;

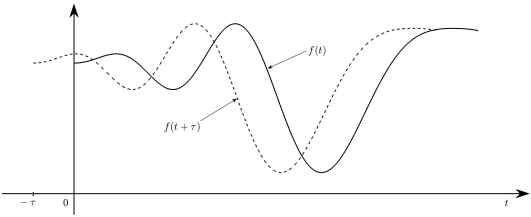

Рис. 1. Сигнал $f(t)$ и $f(t+\tau)$

2. $f(t) = 0 \ \forall t < -\tau$;
3. растет в $[0, \infty)$ не быстрее экспоненты с линейным показателем, т. е.

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}, M > 0 : |f(t)| \leqslant M e^{\alpha_0 t} \quad \forall t > 0.$$

Таким образом, в диссертации рассматривается задача прогнозирования сигналов из класса сигналов, удовлетворяющих условиям 1)–3).

Следует отметить, что прогнозатор должен осуществлять автоматическое прогнозирование произвольного, заранее неизвестного сигнала $f(t)$. Кроме того, разрабатываемый прогнозатор должен обеспечить вычислительную схему прогнозирования при допустимом времени вычисления прогноза, а также должен быть применим как к непрерывным (аналоговым), так и к дискретным сигналам.

Рассмотрим разложение аналитической функции $\Psi(p)$ в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням другой аналитической функции $W(p)$. В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $\Psi(p)$ и $W(p)$ правильны в некоторой точке a, причем $W(p)$ имеет в точке a нуль первого порядка. Замкнутый контур C, ограничивающий некоторую область D, выбирается так, чтобы D содержала точку a, обе функции были правильны в $\bar{D} = D \cup C$ и чтобы $W(p)$ принимала свои значения лишь один раз. Тогда имеет место разложение функции $\Psi(p)$ в равномерно сходящийся ряд Бурмана-Лагранжа*

$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n W^n(p) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n W^n(p) + \Delta_N(p), \tag{3}$$

где α_n — коэффициенты ряда Бурмана-Лагранжа, определяемые формулой

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \lim_{p \to a} \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{\Psi(p) W'(p) (p-a)^{n+1}}{W^{n+1}(p)} \right], n \in \mathbb{Z}_0, \tag{4}$$

$\Delta_N(p)$ — остаточный член ряда Бурмана-Лагранжа, определяемый формулой

$$\Delta_N(p) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n W^n(p) = \frac{W^{N+1}(p)}{2\pi j} \int\limits_C \frac{\Psi(z) W'(z)\, dz}{W^{N+1}(z) \big(W(z) - W(p) \big)} \,. \tag{5}$$

Замечание 1. При $n \geqslant 1$ формулу (4) можно представить следующим образом :

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_C \frac{\Psi'(z)}{W^n(z)}\, dz = \frac{1}{n!} \lim_{p \to a} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \Big[\Psi'(p) \frac{(p-a)^n}{W^n(p)} \Big] \,. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу построения автоматического устройства прогнозирования (прогнозатора) на время упреждения $\tau > 0$ для сигнала из заданного класса, т. е. прогнозатор должен находить значение $f(t+\tau)$ по известным значениям произвольного сигнала $f(t)$. Следует отметить, что прогнозатор должен осуществлять автоматическое прогнозирование произвольного, заранее неизвестного сигнала $f(t)$. Как было показано выше, для осуществления автоматического прогноза произвольного сигнала требуется реализовать передаточную функцию трансцендентного бесконечномерного объекта $e^{\tau p}$.

Рассмотрим далее разложение функции $e^{\tau p}$ в ряд Бурмана-Лагранжа (3) по степеням

$$W(p) = p/(\mu p + 1)\,,\ \mu \geqslant 0. \tag{7}$$

Лемма 1. *Функция* (7) *удовлетворяет всем условиям теоремы 1 при* $a = 0$.

Рассмотрим далее разложение функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням функции (7). С этой целью докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ разложение в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням функции (7) существует и имеет вид*

$$e^{\tau p} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{p^n}{(\mu p + 1)^n}\,. \tag{8}$$

Формула для коэффициентов α_n определяется следующей формулой:

$$\alpha_n = \frac{\tau^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A_n^k \left(\frac{\mu}{\tau}\right)^k, \quad n \geqslant 1; \qquad \alpha_0 = 1. \tag{9}$$

Исследуем далее точность реализуемого прогнозатора и докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть R — произвольное действительное число, удовлетворяющее условию $R > 0$, $R \neq \dfrac{1}{\mu}$. Тогда остаточный член $\Delta_N(p)$ ряда Бурмана-Лагранжа удовлетворяет следующему неравенству:*

$$|\Delta_N(j\omega)| \leqslant \frac{e^{\tau R}}{|\mu R - 1|} \frac{\nu^{N+1}}{1-\nu} \quad \forall \omega \in [0, q\Omega]\,, \tag{10}$$

где

$$\Omega = R/\sqrt{2\mu R + 1}\,; \tag{11}$$

q — произвольное действительное число, $0 < q < 1$; ν — константа, удовлетворяющая условию

$$\nu = \frac{q(\mu R + 1)}{\sqrt{\mu^2 q^2 R^2 + 2\mu R + 1}} < 1\,. \tag{12}$$

Следствие 1. *Пусть задано произвольное $\Omega^* > 0$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} |\Delta_N(j\omega)| = 0 \quad \forall \omega \in [0, \Omega^*]\,. \tag{13}$$

Следует особо отметить, что $\Delta_N(j\omega)$ представляет собой АФЧХ ошибки аппроксимации функции с помощью прогнозатора. Так как в полосе частот $[0, \Omega^*]$ амплитудно-фазочастотные характеристики аппроксимирующей модели $\Psi_N(p)$ и исходной функции $e^{\tau p}$ мало отличаются, то для входных сигналов, спектр которых определяется полосой частот $[0, \Omega^*]$, будут мало отличаться и переходные процессы.

Рассмотрим далее разложение функции $e^{\tau p}$ в ряд Бурмана-Лагранжа (3) по степеням функции

$$W(p) = pL(p)/D(p)\,, \tag{14}$$

где многочлены $D(p)$ и $L(p)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ определяются по следующим формулам:

$$D(p) = \sum_{i=0}^{m} d_i p^{m-i}\,, \quad L(p) = \sum_{i=s}^{m} d_i p^{m-i},\ m \geqslant s. \tag{15}$$

Здесь $D(p)$ — произвольный алгебраический многочлен Гурвица степени m над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Замечание 2. Нетрудно заметить, что при $m = s = 1$ в силу формул (14) и (15) справедливо равенство

$$W(p) = \frac{d_1 p}{d_0 p + d_1} = \frac{p}{\frac{d_0}{d_1} p + 1} = \frac{p}{\mu p + 1}\,, \quad \mu = \frac{d_0}{d_1}\,. \tag{16}$$

Таким образом, передаточная функция (14) совпадает с рассмотренной ранее передаточной функцией (7).

Очевидно, что в силу определения функция $W(p)$ является аналитической всюду на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме конечного числа точек p_k (таких точек не более m), в которых $D(p_k) = 0$ и функция $W(p)$ имеет полюс соответствующего порядка.

Выпишем теперь передаточную функцию модального прогнозатора. С этой целью представим разложение в следующем виде:

$$e^{\tau p} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n W^n(p) + \Delta_N(p) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left(\frac{pL(p)}{D(p)}\right)^n + \Delta_N(p), \tag{17}$$

где многочлены $D(p)$ и $L(p)$ определяются формулами (15), α_n являются коэффициентами ряда Бурмана-Лагранжа и определяются формулами, $\Delta_N(p)$ — остаточный член ряда Бурмана-Лагранжа в рассматриваемом случае, когда функция $W(p)$ задается формулой (14).

Таким образом, передаточная функция модального прогнозатора принимает окончательный вид

$$\Psi_N(p) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n W^n(p) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \left(\frac{pL(p)}{D(p)} \right)^n . \tag{18}$$

Следует отметить, что для практического вычисления прогноза непосредственная реализация формулы (18) является нецелесообразной, т.к. каждое слагаемое содержит степень функции $W(p)$, вычисление которой требует существенных временных затрат. Схема, представленная на рис. 2, позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

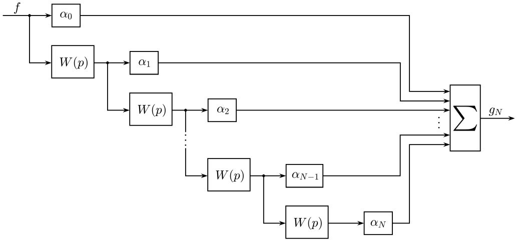

Рис. 2. Структурная схема прогнозаторов

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{19}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^m$; $y(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) = f(t)$; матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{1\times m}$.

Далее для системы (19) синтезируем наблюдатель

$$\dot{z}(t) = (A - KC)z(t) + Kf(t). \tag{20}$$

Для полного решения задачи синтеза наблюдающего устройства (20) определим матрицу K коэффициентов усиления наблюдателя.

В диссерации доказано, что передаточная функция, которая связывает входной сигнал $f(t)$ и координату $z_i(t)$, имеет вид

$$Z_i(p) = W_i(p)F(p), \qquad i = \overline{1,m}, \tag{21}$$

где

$$W_i(p) = \frac{Q_i(p)}{D(p)}\,, \quad Q_i(p) = p^{i-1}\sum_{j=i}^{m} d_j p^{m-j}\,. \tag{22}$$

В диссертационной работе было показано, что передаточная функция $W_i(p)$, определяемая формулой (22), при $i = 2$ совпадает с передаточной функцией (14) при $s = 2$, т.е. передаточная функция (14) при $s = 2$ является передаточной функцией наблюдателя состояний относительно второй координаты.

Исследуем точность прогнозатора с передаточной функцией (14). В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Обозначим через $R > 0$ радиус круга аналитичности функции $\Psi(z) = e^{\tau z}$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть C – окружность $|z| = R$. Рассмотрим теперь $p \in \mathbb{C}$, лежащие на мнимой оси $p = j\omega$, когда $0 \leqslant \omega < R$. Тогда*

$$|\Delta_N(j\omega)| \leqslant \frac{e^{\tau R}(1+\mu_1\mu_2 R^2)}{|\mu_1 R - 1||\mu_2 R - 1|}\frac{\nu^{N+1}}{1-\nu} \quad \forall\omega \in [0, q\Omega]\,. \tag{23}$$

Из (23) следует, что оценка $\Delta_N(j\omega)$ не зависит от ω. Поэтому на любом отрезке $\omega \in [0, q\Omega]$ ошибка аппроксимации $\Delta_N(j\omega)$ равномерно стремится к нулю при $N \to \infty$. Следует особо отметить, что $\Delta_N(j\omega)$ представляет собой АФЧХ ошибки аппроксимации функции с помощью прогнозатора (18). Так как в полосе частот $[0, q\Omega]$ амплитудно-фазочастотные характеристики аппроксимирующей модели $\Psi_N(p)$ и исходной функции $e^{\tau p}$ мало отличаются, то для входных сигналов, спектр которых определяется полосой частот $[0, q\Omega]$, будут мало отличаться и переходные процессы.

Третья глава посвящена построению опрежающих индикаторов на основе разработанных прогнозаторов. Рассмотрим построение опережающих индикаторов с помощью реализуемого прогнозатора. Как было показано выше, для произвольного $\tau > 0$ при помощи устройства с передаточной функцией реализуемого прогнозатора может быть получена оценка прогноза $f(t+\tau)$ по известному сигналу $f(t)$.

Обозначим через $F(p)$ изображения по Лапласу сигнала $f(t)$. Тогда изображение $\Psi_N(p)F(p)$ будет представлять собой изображение оценки прогноза $f(t+\tau)$. Положим

$$G_N(p) = \Psi_N(p)F(p) \risingdotseq g_N(t) \tag{24}$$

и рассмотрим далее задачу нахождения оригинала $g_N(t)$ по изображению $G_N(p)$. Здесь $g_N(t)$ — оценка прогноза $f(t+\tau)$, полученная с помощью прогнозатора (7) (при заданных параметрах N, μ, τ). Показано, что оценка прогноза $g_N(t)$ имеет следующий вид:

$$g_N(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{N} a_n\right] f(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=1}^{n} b_{n,k} I_k(\mu, t)\,. \tag{25}$$

Так как при каждом n требуется вычислять интегралы $I_k(\mu,t)$, $k=\overline{1,n}$, то для уменьшения вычислительных операций следует предварительно вычислить интегралы $I_k(\mu,t)$, $k=\overline{1,N}$, а затем подставлять найденные значения в (25). Нетрудно проверить, что при таком подходе потребуется вычисление N интегралов вместо вычисления $\dfrac{N(N+1)}{2}$ интегралов при непосредственной реализации формулы (25).

Рассмотрим теперь задачу получения рекуррентной формулы для вычисления интеграла $I_k(\mu,t)$, когда входной сигнал $f(t)$ задается своими отсчетами $f_l = f(t_l)$ через равные промежутки времени $\Delta t = h = t_{l+1} - t_l$. Пусть $t_0 = 0$. Тогда $t_l = lh$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Такое требование к сигналу накладывает ограничение на выбор квадратурных формул. В частности, квадратурная формула Симпсона неприменима из-за необходимости вычислять значения сигнала в точках $\dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}$. В то же время формула трапеций и формула Ньютона могут быть использованы в данном случае.

Рассмотрим теперь задачу получения рекуррентной формулы для вычисления интеграла $I_k(\mu,t)$. Пусть

$$J_k(\mu,t) = \mu I_k(\mu,t). \tag{26}$$

Применяя свойство коммутативности свертки двух функций, свойство аддитивности определенного интеграла, учитывая формулу бинома Ньютона и формулы (25) и (26), расчетная формула для вычисления прогноза принимает окончательный вид

$$g_N(\mu,\tau,(l+1)h) = \Big(1+\sum_{n=1}^{N} a_n\Big) f_{l+1} - \frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=1}^{n} b_{n,k} I_{k,l+1}\,. \tag{27}$$

Рассмотрим далее прогнозатор, передаточная функция которого определяется формулой (14). Как и ранее, обозначим через $F(p)$ изображение по Лапласу сигнала $f(t)$. Тогда изображение $\Psi_N(p)F(p)$ будет представлять собой изображение оценки прогноза $f(t+\tau)$. Положим

$$G_N(p) = \Psi_N(p)F(p) \risingdotseq g_N(t) \tag{28}$$

и рассмотрим далее задачу нахождения оригинала $g_N(t)$ по изображению $G_N(p)$. Здесь $g_N(t)$ — оценка прогноза $f(t+\tau)$, полученная с помощью прогнозатора (14).

Введем в рассмотрение реккурентное соотношение

$$\Phi_0(p) = F(p), \quad \Phi_n(p) = W(p)\Phi_{n-1}(p), \quad n=\overline{1,N} \tag{29}$$

и рассмотрим практически важный случай, когда многочлен $D(p)$ имеет простые действительные отрицательные корни, т.е.

$$D(p) = \prod_{i=1}^{m}(p+\lambda_i), \quad \lambda_i\in\mathbb{R}, \lambda_i>0. \tag{30}$$

Зададим приращение времени $t+\Delta t$ и рассмотрим задачу получения рекуррентной формулы для вычисления интеграла $I_{n-1,i}(t+\Delta t)$. Выражение

$$I_{n-1,i,l+1} = I_{n-1,i,l} + Q_{n-1,i}(lh,(l+1)h), \tag{31}$$

где

$$Q_{n-1,i}(lh,(l+1)h) = \frac{h}{2}e^{\lambda_i lh}\big(e^{\lambda_i h}\varphi_{n-1,l+1} + \varphi_{n-1,l}\big) \tag{32}$$

задает рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_{n-1,i}(t+\Delta t)$, когда входной сигнал $f(t)$ задается своими отсчетами $f_l = f(t_l)$ через равные промежутки времени $\Delta t = h = t_{l+1}-t_l$. Пусть $t_0=0$. Тогда $t_l = lh$, $l=0,1,2,\ldots$.

Для вычисления $Q_{n-1,i}(lh,(l+1)h)$ воспользуемся квадратурной формулой трапеций при $M = 1$ и $h = \Delta t$. Будем считать, что Δt выбрано достаточно малым.

Тогда после преобразований, расчетная формула для вычисления прогноза, учитывая формулы (25) и (31), принимает окончательный вид

$$\begin{gathered} g_N((l+1)h) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \varphi_{n,l+1}\,, \\ \varphi_{0,l+1} = f_{l+1},\ \varphi_{n,l+1} = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-\lambda_i (l+1)h} I_{n-1,i,l+1},\ n \geqslant 1. \end{gathered} \tag{33}$$

Значения $I_{n-1,i,l+1}$ вычисляются по формуле (31).

В 3 Главе были рассмотрены содержательные примеры по прогнозированию сигнала с особенностями, по траекторному сопровождению, модели Лоренца, а также задача прогнозирования доходностей валютного курса. Данные примеры проиллюстрировали достаточно хорошее качество прогнозирования, разработанными в диссертационной работе прогнозаторами.

Заключение. В ходе выполнения диссертационного исследования были получены следующие основные результаты:

1. В классе устойчивых правильных дробно-рациональных функций получены аппроксимации идеального упредителя — разложения экспоненциальной функции в ряд Бурмана-Лагранжа по степеням правильных функций, не имеющих полюсов в правой полуплоскости;
2. На основе аппроксимаций экспоненциальной функции отрезком ряда Бурмана-Лагранжа впервые решена задача построения автоматических устройств прогнозирования — предложен способ синтеза реализуемого и модального прогнозаторов;
3. Основываясь на оценке остаточного члена ряда Бурмана-Лагранжа, было показано, что для сигналов с заданной полосой частот может быть достигнута любая наперед заданная точность прогнозирования за счет увеличения количества членов ряда Бурмана-Лагранжа, то есть за счет увеличения числа членов прогнозатора;
4. Показано, что в частном случае, модальный прогнозатор совпадает с дифференцирующим наблюдателем, который в свою очередь является фильтром Калмана;

5. Разработаны способы построения опережающих индикаторов с помощью реализуемого и модального прогнозаторов. Для каждого из способов получены расчетные формулы для вычисления оценки прогноза.

В ходе выполнения диссертационной работы все поставленные исследовательские задачи были выполнены.

Перспективы дальнейшего развития связаны с задачами автоматического прогнозирования случайных процессов, построением механических торговых систем, основанных на синтезированных прогнозаторах.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, индексируемых Scopus

1. Khripushin D. A. Equity Risk and Return across Hidden Market Regimes / D. A. Endovitsky, V. V. Korotkikh, D. A. Khripushin // Risks. — Switzerland: 2021. — № 9. — С. 1–21.

Публикации в журналах из Перечня ВАК РФ

2. Хрипушин Д. А. Применение индикатора RSX на волатильных рынках / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Современная экономика: проблемы и решения. — Воронеж: 2020. — Т. 5, № 5. — С. 35–45.
3. Хрипушин Д. А. Об оценке прогноза сигнала / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — Воронеж: 2023. — № 2. — С. 52–61.
4. Хрипушин Д. А. Построение опережающих индикаторов с помощью дифференциаторов / Д. А. Хрипушин //Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — Воронеж: 2022. — № 4. — С. 5–11.
5. Хрипушин Д. А. Синтез автоматических модальных прогнозаторов / Д. А. Хрипушин, А. В. Дылевский // Перспективы науки. — Тамбов: 2023. — № 11. — С. 88–92.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

6. Хрипушин Д. А. Автоматическое прогнозирование детерминированных сигналов / А. В. Дылевский, Д. А. Хрипушин // Научный результат. Информационные технологии. — Белгород: 2021. — Т. 6, № 4. — С. 20–26.

Материалы конференций

7. Дылевский А. В., Хрипушин Д. А. Построение и прогноз автоматических детерминированных сигналов // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований: L международ. науч.-прак. конф., г. Новосибирск, 25 апреля 2022 г. — Новосибирск, 2022. — №4 (42). — С. 16–27.
8. Дылевский А. В., Хрипушин Д. А. Об одном способе автоматического прогнозирования некоторого класса детерминированных сигналов // Общество и экономическая мысль в XXI в.: пути развития и инновации: X международ. науч.-прак. конф., г. Воронеж, 21 апреля 2022 г. — Воронеж, 2022. — С. 345–354.
9. Дылевский А. В., Хрипушин Д. А. Об одном способе автоматического прогнозирования экономических процессов // Экономическое прогнозирование: модели и методы: XVII международ. науч.-прак. конф., г. Воронеж, 22-23 декабря 2021 г. — Воронеж, 2022. — С. 20–24.
10. Дылевский А. В., Хрипушин Д. А. Автоматическое прогнозирование детерминированных сигналов на основе дифференциатора // Современные технологии: тенденции и перспективы развития: II международ. науч.-прак. конф., г. Петрозаводск, 18 ноября 2021 г. — Петрозаводск, 2021. — С. 243–253.
11. Дылевский А. В., Хрипушин Д. А. Применение прогнозатора для расчета оценки прогноза заданного сигнала // Информатика: проблемы, методы, технологии: XXIII международ. науч.-прак. конф., г. Воронеж, 15-17 февраля 2023 г. — Воронеж, 2023. — С. 59–67.