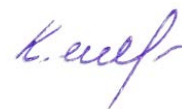


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)



На правах рукописи

Костенко
Екатерина Игоревна

Исследование разрешимости одного класса
интегро-дифференциальных уравнений с
памятью

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
доцент Звягин А.В.

Воронеж 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1 Вязкоупругая модель типа Фойгта	12
1.1 Модель с памятью на конечном временном промежутке	12
1.1.1 Аппроксимационная задача	15
1.1.2 Свойства операторов	16
1.1.3 Априорные оценки	28
1.1.4 Разрешимость аппроксимационной задачи	38
1.1.5 Предельный переход	39
1.2 Модель с бесконечной памятью	46
1.2.1 Аппроксимационная задача	47
1.2.2 Свойства операторов	50
1.2.3 Априорные оценки	54
1.2.4 Разрешимость вспомогательной задачи	59
1.2.5 Предельный переход	60
ГЛАВА 2 Математическая модель типа Фойгта с нелинейной вязкостью	72
2.1 Постановка задачи	72
2.2 Аппроксимационная задача	73
2.3 Свойства операторов	75
2.4 Априорные оценки	77
2.5 Предельный переход	79
ГЛАВА 3 Задача существования управления с обратной связью	81
3.1 Задача управления для вязкоупругой модели типа Фойгта с постоянной вязкостью	81
3.1.1 Аппроксимационная задача	83
3.1.2 Априорные оценки	85
3.1.3 Предельный переход	86
3.1.4 Существование оптимального управления с обратной связью .	87
3.2 Задача управления для вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью	88

3.2.1	Аппроксимационная задача	90
3.2.2	Априорные оценки	91
3.2.3	Предельный переход	92
3.2.4	Существование оптимального управления с обратной связью .	93
ГЛАВА 4 Термо–модель движения нелинейно–запаздывающей жидкости		94
4.1	Постановка задачи	94
4.2	Первый шаг. Разрешимость задачи с фиксированной температурой	96
4.3	Второй шаг. Разрешимость задачи с фиксированной скоростью . .	102
4.4	Третий шаг. Построение последовательных приближений	103
4.5	Четвертый шаг. Предельный переход	104
Список обозначений		107
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		109
Список использованных источников		109
Публикации автора по теме диссертации		113

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и ее разработанность в литературе. Диссертация посвящена исследованию разрешимости и оптимального управления для математических моделей, описывающих движение вязкоупругих жидкостей. Актуальность темы определяется широтой сфер человеческой деятельности, использующих гидродинамические задачи для описания различных процессов. Стоит отметить, что данная тематика берет свое начало в XVIII веке. Основоположником гидродинамической теории является Л. Эйлер, получивший систему уравнений, описывающую движение идеальной жидкости. Однако, учеными было замечено, что идеальных сред в природе практически не существует. Данное замечание привело к появлению системы уравнений Навье–Стокса, описывающей движение вязкой ньютоновской жидкости. Системы уравнений Эйлера и Навье–Стокса являются наиболее изученными с математической точки зрения и считаются моделями классической гидродинамики (см., например, [2], [14], [19], [30] и другие).

Однако, классическая гидродинамика не способна описать движение таких сред, как, например, полимеры, смолы, лаки, эфиры и даже кровь. Модели таких сложных жидкостей в литературе принято называть «неньютоновскими средами», а гидродинамику — неньютоновской. Такой гидродинамике посвящено огромное количество работ: в XIX веке её развивали такие известные ученые как Кельвин и Фойгт, в середине XX века — Дж. Г. Олдройд [34], а также М. Ренарди [35].

Как отмечалось ранее, в данной диссертации исследуются математические модели, относящиеся к неньютоновской гидродинамике, а именно, модели движения вязкоупругих сред с постоянной и нелинейной вязкостью. Такие модели более точно описывают физические свойства жидкости, ведь в них включены члены, отвечающие, например, за учет памяти, траектории движения частицы жидкости и времени ретардации.

Помимо вопросов корректности рассматриваемых моделей в диссертации изучаются проблемы существования управления для этих задач. Для систем Эйлера и Навье–Стокса эти вопросы поднимались в большом числе работ (см., например, [20], [22], [31]). Для задач неньютоновской гидродинамики

данный список мал. Диссертация продолжает и развивает данное направление для сложных вязкоупругих сред, а, именно, рассмотрены задачи управления с обратной связью для математических моделей типа Фойгта.

Таким образом, **цели и задачи диссертационной работы** — для ряда математических моделей неньютоновской гидродинамики изучить вопросы, связанные со слабой разрешимостью и существованием оптимального управления с обратной связью.

Научная новизна. Как отмечалось ранее, диссертация посвящена моделям неньютоновской гидродинамики. Модели такого типа очень сложны для изучения. В частности, в диссертации исследуются новые математические модели, описывающие движение вязкоупругих сред с бесконечной памятью, учет которой происходит вдоль поля скоростей. В тоже время диссертационные исследования опираются на результаты таких известных ученых как О.А. Ладыженская [12], П.Л. Лионс [14], Р. Темам [19], а также на работы Воронежских математиков: М.А. Красносельского [11], Б.Н. Садовского [17], В.Г. Звягина, В.П. Орлова (см., например, [39], [40], [41] и другие) и их учеников.

Перейдем к описанию изучаемых в диссертации моделей. Используя принцип Даламбера, течение несжимаемых жидкостей описывается системой уравнений (см. [5])

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \text{grad } p = \text{Div } \sigma + f, \quad (1)$$

$$\text{div } v = 0, \quad (2)$$

где $v = (v_1, \dots, v_n)$ — неизвестная вектор-функция скорости частицы жидкости, p — неизвестная функция давления в частице жидкости, f — известная вектор-функция плотности внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — (неизвестный) девиатор тензора напряжений. Здесь символ $\text{Div } \sigma$ используется в качестве обозначения дивергенции тензора σ , а, именно:

$$\text{Div } \sigma = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \right).$$

Стоит отметить, что свойства среды определяются реологическим соотношением, связывающим между собой σ и тензор скоростей деформации.

ции $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, координаты которого определяют следующим образом: $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Отметим, что система уравнений Эйлера возникает из системы (1)–(2) с реологическим соотношением $\sigma = 0$; система уравнений Навье–Стокса возникает из системы (1)–(2) с реологическим соотношением $\sigma = 2\mu\mathcal{E}$, здесь $\mu > 0$ — коэффициент вязкости среды. Эти системы обсуждались ранее.

Диссертация посвящена исследованию моделей вязкоупругих сред. Основная исследуемая в диссертации модель включает в себя соотношение типа дробного Фойгта:

$$\sigma = \mu\mathcal{E}(v) + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, x) ds$$

с константами $\mu > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\mu_1 \geq 0$ и $\lambda > 0$. Механическая модель для данного соотношения строится на основе параллельного соединения модели ньютона и элементов модели Скотта Блэрома с дробной производной Капуто (см. [18], [32]). Отметим, что частный случай данной математической модели рассматривался в диссертационной работе [6].

Заметим, что второй член в изучаемом соотношении отвечает за память среды. Такого типа математические модели исследовались в работах многих авторов. Однако, в этих работах память учитывалась при фиксированном положении x частицы среды (см., например, [9]). Обратим внимание, что такая постановка модели является не совсем корректной, так как при изменении времени в интеграле память учитывается при фиксированном положении частицы жидкости (при изменении времени память меняется, а положение частицы остается неизменным). Для корректной постановки при изменении времени память должна учитывать траекторию движения частицы (см. [37]–[42]). В данной ситуации мы получим реологическое соотношение следующего вида:

$$\sigma = \mu\mathcal{E}(v) + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds.$$

Здесь $z(s; t, x)$ — необходимая траектория частицы среды, порожденная полем скоростей v :

$$z(s; t, x) = x + \int_t^s v(\tau, z(\tau; t, x)) d\tau, \quad t, s \in [0, T], \quad x \in \Omega.$$

Однако, учет памяти по траектории z принес и свои сложности: z не определяется единственным способом полем скоростей v при $v \in L_2(0, T; V^1)$. Эта сложность была преодолена с помощью теории регулярных Лагранжевых потоков (РЛП) (см. [27]–[29]).

В диссертации дробная модель Фойгта также изучается с нелинейной вязкостью. В работе изучается вязкость вида $\mu(I_2(v))$, где $I_2(v)$ определяется через тензор скоростей деформации $\mathcal{E}(v)$ следующим образом:

$$I_2^2(v) = \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v).$$

Стоит отметить, что данный вариант функции нелинейной вязкости предложил профессор В.Г. Литвинов, им же были и установлены естественные ограничения на предложенную функцию, подробно описанные во 2 и 4 главах диссертации (см. [15], [33]).

Опишем содержание диссертации по главам с указанием методов и подходов, используемые при исследованиях.

Первая глава посвящена исследованию начально–краевой задачи, описывающей движение вязкоупругой жидкости типа Фойгта. В данной главе диссертации рассматриваются математические модели с памятью на конечном и бесконечном временных промежутках.

Первый параграф первой главы диссертации посвящен доказательству слабой разрешимости для вязкоупругой среды типа Фойгта с памятью на конечном временном промежутке. Слабая разрешимость устанавливается с помощью аппроксимационно–топологического метода для гидродинамических задач. Данный метод разрабатывался в Воронежской математической школе. Его основоположником является профессор В. Г. Звягин (см. [7], [40]). Опишем основные этапы данного метода:

1) рассматривается семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ вспомогательных (аппроксимационных) задач. Заметим, что корректность данного семейства изучается уже в новом (более «хорошем», чем исходное) функциональном пространстве. Основной целью данного этапа является доказательство разрешимости одной аппроксимационной задачи при $\xi = 1$ этого семейства. С данной целью интегральное равенство из определения слабого решения рассматривается в

операторном виде. Затем изучаются свойства введенных операторов. Доказываются априорные оценки решений вспомогательных задач. Заметим, что эти оценки получены в новом функциональном пространстве и зависят от параметра аппроксимации. На основе теории топологической степени устанавливается наличие неподвижной точки операторного уравнения, а, следовательно, слабого решения аппроксимационной задачи при $\xi = 1$;

2) основной целью второго этапа является предельный переход. Для достижения данной цели для решений вспомогательных задач устанавливаются оценки, не зависящие от параметра аппроксимации, в исходном функциональном пространстве.

Второй параграф первой главы диссертации посвящен исследованию слабой разрешимости начально–краевой задачи, описывающей движение вязкоупругой модели типа Фойгта с бесконечной памятью. В данной ситуации траектория движения частиц жидкости z также рассмотрена на бесконечном временном промежутке $(-\infty, T]$. В данном параграфе используется описанный выше метод, однако, тип аппроксимационных задач вводится иной, что приводит к необходимости получения новых оценок. Принципиальным отличием данного параграфа от предыдущего является полученная оценка решений, не зависящая от времени t , которая позволила установить разрешимость на бесконечном временном интервале.

Стоит отметить, что слабая разрешимость семейства вспомогательных (или аппроксимационных) задач основывается на использовании теории топологической степени для уплотняющих векторных полей (см. [11], [17]).

Вторая глава продолжает исследование неньютоновских моделей гидродинамики. Однако, теперь устанавливается слабая разрешимость вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью. В задаче вязкость μ нелинейно зависит от функции I_2 . Функция I_2 определяется через тензор скоростей деформации. При этом возникают естественные ограничения на функцию μ (см. [15]). Разрешимость изучаемой начально–краевой задачи также получена с помощью описанного выше метода.

Глава три посвящена изучению вопроса существования управления с обратной связью для описанных выше моделей вязкоупругих сред типа Фойгта с памятью. Сначала доказывается существование оптимального управления с

обратной связью для модели с памятью на конечном временном промежутке, затем для модели с нелинейной вязкостью. Для получения этих результатов также используется описанный выше аппроксимационно–топологический метод. Основным отличием данной главы от предыдущих двух является изучение операторных включений, а не операторных уравнений. Для разрешимости в данном случае используется теория топологической степени для многозначных векторных полей (см. монографию [3]).

Четвертая глава посвящена начально–краевой задаче, описывающей движение жидкости с коэффициентом вязкости μ , зависящим от температуры θ , и с нелинейным коэффициентом запаздывания μ_1 . Добавление температуры в вязкость жидкости приводит к появлению дополнительного уравнения, так называемого уравнения баланса энергии (см. [1]). Литература, посвященная подобным задачам, обширна (см., например, [23]–[26] и имеющуюся там библиографию). Отличие моделей, изученных в перечисленных выше работах от исследуемой в диссертации, заключается в наличии негладких коэффициентов в уравнении баланса энергии. В данной главе установлена слабая разрешимость описанной задачи в двумерном случае. Доказательство данного результатов проведено в несколько этапов:

1) зафиксируем температуру в изучаемой начально–краевой задаче и установим её разрешимость. В данном случае используется описанный выше метод, отличие которого от предыдущих глав заключается в использовании топологической степени Лере–Шаудера для векторных полей;

2) зафиксируем скорость в изучаемой начально–краевой задаче и установим её разрешимость. В данном случае используется метод применения дробных степеней положительного оператора;

3) опишем итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач;

4) докажем сходимость последовательных приближений к решению исходной начально–краевой задачи.

Положения, выносимые на защиту.

1) Теоремы существования слабых решений вязкоупругой модели типа Фойгта с памятью на конечном и бесконечном временных промежутках.

2) Теорема существования слабых решений вязкоупругой модели типа

Фойгта с нелинейным коэффициентом вязкости.

3) Теорема существования оптимального управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с памятью на конечном временном промежутке.

4) Теорема существования оптимального управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейным коэффициентом вязкости.

5) Теорема существования слабых решений начально–краевой задачи, описывающей движение жидкости с коэффициентом вязкости μ , зависящим от температуры θ , и с нелинейным коэффициентом запаздывания μ_1 .

Практическая и теоретическая значимость. В данной работе рассмотрены исключительно теоретические аспекты. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании задач гидродинамики и теории управления, а также разработке численных методов и их решения.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались *на международных конференциях*: «Воронежская весенняя математическая школа» (Воронеж, Россия 2021); «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2022» (Воронеж, Россия 2022); «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» (Воронеж, Россия 2022); «Вторая конференция Математических центров России» (Москва, Россия 2022); «Воронежская весенняя школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXV» (Воронеж, Россия 2024); «Воронежская зимняя школа С. Г. Крейна-2024» (посвященная памяти В. П. Маслова) (Воронеж, Россия 2024); *на семинарах* НИИ математики ВГУ (2021-2024); *на научных сессиях* ВГУ (2021-2024).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантами РФФИ № 22–11–00103 (исполнитель, 2022–2024), № 23–71–10026 (исполнитель, 2023–2026), гос.задание № FZGU–2023–0007 (исполнитель, 2023–2025).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [43]–[48]. Работы [43]–[48] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки

РФ. Из совместных работ [43], [44], [47], [48] в диссертацию вошли только результаты, полученные диссертантом лично. Работа [47] опубликована в журнале из квартиля $Q1$ по международной базе Web of Science.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы и библиографии, содержащей 48 наименований. Общий объем диссертации — 113 страниц.

ГЛАВА 1

Вязкоупругая модель типа Фойгта

1.1 Модель с памятью на конечном временном промежутке

В ограниченной области Ω , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 на временном промежутке $[0, T]$, $T > 0$ рассматривается следующая начально–краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu \Delta v - \\ - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \nabla p = f(t, x); \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (1.1.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega; \quad (1.1.3)$$

$$v(t, x) |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad v(0) = v_0, \quad x \in \Omega. \quad (1.1.4)$$

Здесь $Q = [0, T] \times \Omega$; все основные обозначения были введены выше, либо находятся в списке аббревиатур.

Для изучения начально–краевой задачи (1.1.1)–(1.1.4) введем необходимые функциональные пространства. Посмотрим шкалу пространств V^β , $\beta \in \mathbb{R}$ (см. [9], [21]), основанную на операторе $A = -P\Delta$, определенном на $D(A) = V^2$, где $P : L_2(\Omega) \rightarrow V^0$ — проектор Лере. Продолжим оператор $A = -P\Delta$ в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Обозначим $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора A . В данном случае собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0 . Множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j ,

обозначим через

$$E_\infty = \{v = \sum_{j=1}^N v_j e_j : v_j \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}\}.$$

Таким образом, мы готовы ввести пространство V^β , $\beta \in \mathbb{R}$, в качестве пополнения E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где } v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k. \quad (1.1.5)$$

Заметим, что на данном пространстве V^β , $\beta > -1/2$, норма (1.1.5) эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W_2^\beta(\Omega)}$ пространства $W_2^\beta(\Omega)$ (см. [21]). Также нормы в пространствах V^1 , V^2 и V^3 можно задать эквивалентным способом:

$$\begin{aligned} \|v\|_{V^1} &= \left(\int_{\Omega} \nabla v(x) : \nabla v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V^2} = \left(\int_{\Omega} \Delta v(x) \Delta v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v\|_{V^3} &= \left(\int_{\Omega} \nabla \Delta v(x) : \nabla \Delta v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Далее, через $V^{-\beta} = (V^\beta)^{-1}$, $\beta \in \mathbb{N}$, будем обозначать сопряженное пространство к V^β .

Таким образом, слабая разрешимость начально–краевой задачи (1.1.1)–(1.1.4) будет изучаться в функциональном пространстве

$$W_1 = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0, T; V^{-1})}$.

В силу того, что $v \in L_2(0, T; V^1)$ для разрешимости задачи Коши (1.1.3) нам необходимо привести факты теории регулярных Лагранжевых потоков (РЛП) (см. [27]–[29]).

Определение 1.1.1. Функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ называется регулярным Лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v , если она удовлетворяет следующим условиям:

1. функция $\gamma(t) = z(\tau; t, x)$ при п.в. x и любом $t \in [0, T]$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T];$$

2. соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$ справедливо для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$;

3. $z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x))$ выполнено при всех $t_i \in [0, T], i = \overline{1, 3}$ и п.в. $x \in \bar{\Omega}$.

Теорема 1.1.1. Пусть $C(D, L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D = [0, T] \times [0, T]$ со значениями в L — метрическом пространстве измеримых на Ω вектор-функций. Также пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega)), 1 \leq p \leq +\infty, \operatorname{div} v(t, x) = 0$ и $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D; L)$, порожденный v и удовлетворяющий следующим свойствам:

$$z(\tau; t, \bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x)), \quad \tau \in [0, T], x \in \Omega.$$

Теорема 1.1.2. Пусть $v, v^m \in L_1(0, T; W_1^p(\Omega)), m = 1, 2, \dots$, при некотором $p > 1, \operatorname{div} v(t, x) = 0, \operatorname{div}^m v^m(t, x) = 0, v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = v^m|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$, выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|v_x\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} &\leq C_1, \\ \|v_x^m\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} &\leq C_2, \end{aligned}$$

(v_x — матрица Якоби вектор-функции v) и v^m сходится к v в $L_1(Q_T)$ при $m \rightarrow +\infty$. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega$ при $t \in [0, T]$, где $z(\tau; t, x)$ и $z^m(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденные v и v^m , соответственно.

Возвращаясь к начально-краевой задаче (1.1.1)–(1.1.4), дадим определение слабого решения. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1}), v_0 \in V^0$.

Определение 1.1.2. Функция $v \in W_1$ называется слабым решением задачи (1.1.1)–(1.1.4), если она удовлетворяет начальному условию из (1.1.4) и для всех $\varphi \in V^1$, почти всех $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.1.3. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. Тогда начально–краевая задача (1.1.1)–(1.1.4), описывающая движение вязкоупругой среды типа Фойгта, имеет слабое решение $v \in W_1$.

Данная теорема доказывается на основе аппроксимационно–топологического метода, описанного выше.

1.1.1 Аппроксимационная задача

Рассмотрим семейство вспомогательных (аппроксимационных) задач ($0 \leq \xi \leq 1$) с малым параметром $\theta > 0$:

$$\theta \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu \Delta v - \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \text{Div} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = \xi f, \quad (1.1.7)$$

$$\text{div } v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega; \quad (1.1.8)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega; \quad (1.1.9)$$

$$v(0, x) = \xi v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad (1.1.10)$$

$$v(t, x) |_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta v(t, x) |_{\partial\Omega} = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (1.1.11)$$

Для введения определения слабого решения вспомогательного семейства задач рассмотрим функциональное пространство

$$W_2 = \{v \in C([0, T]; V^3), \quad v' \in L_2(0, T; V^3)\}$$

с нормой $\|v\|_{W_2} = \|v\|_{C(0, T; V^3)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^3)}$.

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^3$.

Определение 1.1.3. Функция $v \in W_2$ называется слабым решением начально–краевой задачи (1.1.7)–(1.1.11), если она удовлетворяет начальному условию (1.1.10) и для всех $\varphi \in V^1$, почти всех $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \xi \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + \\ + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) ds dx = \xi \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Для доказательства слабой разрешимости аппроксимационной задачи перейдем к операторной трактовке. Для этого введем следующие операторы:

$$\begin{aligned}
J : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\
A : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1; \\
A_1 : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle A_1 v, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\
B : V^1 \times [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega} &\rightarrow V^{-1}, \\
(B(v, z)(t), \varphi) &= \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right), \\
v \in V^1, \quad z \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (0, T); \\
K : L_4(\Omega) &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1.
\end{aligned}$$

Используя введенные выше операторы, получаем следующее уравнение:

$$Jv' - \theta A_1 v' + \mu Av + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) - \xi K(v) = \xi f. \quad (1.1.13)$$

Для доказательства слабой разрешимости будет удобнее использовать операторы, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned}
L : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A_1)v' + \mu Av, v|_{t=0}); \\
C : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0); \\
G : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0 \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, задача нахождения слабого решения вспомогательного семейства задач (1.1.7)–(1.1.11) эквивалентно нахождению решения операторного уравнения:

$$L(v) = \xi(C(v) - G(v) + (f, v_0)).$$

Для дальнейшего исследования слабой разрешимости аппроксимационной задачи необходимо рассмотреть свойства введенных выше операторов.

1.1.2 Свойства операторов

Докажем ряд лемм.

Лемма 1.1.1. 1) Оператор $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является непрерывным и для него справедливы следующие оценки:

$$\|Av\|_{V^{-1}} \leq \|v\|_{V^1}; \quad \|Av\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}.$$

2) Оператор $(J + \theta A_1) : L_p(0, T; V^3) \rightarrow L_p(0, T; V^{-1})$ является непрерывным, обратимым и для него справедливы следующие оценки:

$$\theta \|v\|_{L_p(0, T; V^3)} \leq \|(J + \theta A_1)v\|_{L_p(0, T; V^{-1})} \leq C_3(1 + \theta) \|v\|_{L_p(0, T; V^3)}.$$

Обратный оператор $(J + \theta A_1)^{-1} : L_p(0, T; V^{-1}) \rightarrow L_p(0, T; V^3)$ также является непрерывным и для него справедлива оценка

$$\|(J + \theta A_1)^{-1}w\|_{L_p(0, T; V^3)} \leq \frac{1}{\theta} \|w\|_{L_p(0, T; V^{-1})}. \quad (1.1.14)$$

3) Оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является обратимым, а его обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным оператором.

Доказательство. 1) Заметим выполнение следующей оценки

$$|\langle Av, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx \right| = |(v, \varphi)| \leq \|v\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1}.$$

Таким образом, оператор A является ограниченным. Поэтому, и в силу линейности, имеем, что оператор A является непрерывным. Далее при почти всех $t \in [0, T]$ имеем оценку:

$$\|Av\|_{V^{-1}} \leq \|v\|_{V^1}.$$

Возводя последнюю оценку в степень 2 и интегрируя по t , получим:

$$\int_0^T \|Av\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \int_0^T \|v\|_{V^1}^2 dt.$$

Следовательно Av принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$. Извлекая корень второй степени из оценки выше, получаем:

$$\|Av\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}$$

Оператор линеен и ограничен, а, следовательно, непрерывен.

2) В силу определения оператора A и наших пространств получаем, что оператор $A_1 : V^3 \rightarrow V^1$ — непрерывный и обратимый, и обратный оператор $A_1^{-1} : V^1 \rightarrow V^3$ также непрерывен. Далее докажем необходимую далее оценку. По определению оператора A_1 для любых $v \in V^3$ и $\varphi \in V^1$ имеем:

$$|\langle A_1 v, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx \right| \leq \|v\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1}.$$

Перейдем к доказательству необходимых оценок. Для начала покажем, что оператор $(J + \theta A_1) : V^3 \rightarrow V^{-1}$ непрерывен и обратим. Заметим:

$$\begin{aligned} |\langle (J + \theta A_1)v, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} v \varphi dx - \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega} v \varphi dx \right| + \theta \left| \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx \right| \leq \|v\|_{V^0} \|\varphi\|_{V^0} + \theta \|v\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1} \leq \\ &\leq C_4 C_5 \|v\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1} + \theta \|v\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1} \leq C_3 (1 + \theta) \|v\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1}. \end{aligned}$$

Оператор $(J + \theta A_1) : V^3 \rightarrow V^{-1}$ является фредгольмовым оператором индекса нуль, так как этот оператор можно представить в виде суммы вполне непрерывного оператора и непрерывно обратимого оператора.

Пусть $v \in V^3, Av \in V^1$. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle (J + \theta A_1)v, Av \rangle| &= - \left| \int_{\Omega} v \cdot \Delta v dx + \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx \right| + \theta \left| \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx \right| = \|v\|_{V^1}^2 \theta \|v\|_{V^3}^2 \geq \theta \|v\|_{V^3}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\langle (J + \theta A_1)v, Av \rangle| \geq \theta \|v\|_{V^3}^2.$$

С другой стороны,

$$|\langle (J + \theta A_1)v, Av \rangle| \leq \|(J + \theta A_1)v\|_{V^{-1}} \|Av\|_{V^1} = \|(J + \theta A_1)v\|_{V^{-1}} \|Av\|_{V^3}.$$

В итоге получаем левую часть оценки:

$$\theta \|v\|_{V^3} \leq \|(J + \theta A_1)v\|_{V^{-1}}.$$

Таким образом, ядро оператора $(J + \theta A_1) : V^3 \rightarrow V^{-1}$ состоит только из нуля. Следовательно, (в силу фредгольмовости индекса нуль) этот оператор обратим, а обратный оператор — непрерывен. В силу обратимости оператора

$(J + \theta A_1)$ для любого $w \in V^{-1}$ существует единственный элемент $v \in V^3$ такой, что $v = (J + \theta A_1)^{-1}w$ и имеет место неравенство:

$$\theta \|(J + \theta A_1)^{-1}w\|_{V^3} \leq \|w\|_{V^{-1}}.$$

Откуда следует оценка

$$\|(J + \theta A_1)^{-1}w\|_{V^3} \leq \frac{1}{\theta} \|w\|_{V^{-1}}.$$

Перейдём к доказательству необходимых оценок. Пусть $v \in L_p(0, T; V^3)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда из $\|(J + \theta A_1)v\|_{V^{-1}} \leq C_3(1 + \theta)\|v\|_{V^3}$ для почти всех $t \in (0, T)$ имеет место неравенство:

$$\|(J + \theta A_1)v(t)\|_{V^{-1}} \leq C_3(1 + \theta)\|v(t)\|_{V^3}.$$

Таким образом, $(J + \theta A_1)v \in L_p(0, T; V^{-1})$ и из линейности и ограниченности оператора следует его непрерывность.

Покажем, что множество значений оператора $(J + \theta A_1) : L_p(0, T; V^3) \rightarrow L_p(0, T; V^{-1})$ совпадает со всем $L_p(0, T; V^{-1})$. Для этого найдем решение $v \in L_p(0, T; V^3)$ уравнения $(J + \theta A_1)v = w$ для любого $w \in L_p(0, T; V^{-1})$. Так как оператор $(J + \theta A_1) : V^3 \rightarrow V^{-1}$ обратим, то при почти всех $t \in (0, T)$ уравнение $(J + \theta A_1)v = w$ имеет решение $v(t) = (J + \theta A_1)^{-1}w(t)$. В силу оценки $\theta\|v\|_{V^3} \leq \|(J + \theta A_1)v\|_{V^{-1}}$ при почти всех $t \in (0, T)$

$$\theta\|v(t)\|_{V^3} \leq \|(J + \theta A_1)v(t)\|_{V^{-1}} = \|w(t)\|_{V^{-1}}.$$

Из последней оценки получаем:

$$\theta\|v(t)\|_{L_p(0, T; V^3)} \leq \|(J + \theta A_1)v(t)\|_{L_p(0, T; V^{-1})} = \|w(t)\|_{L_p(0, T; V^{-1})}.$$

Таким образом, множество значений оператора $(J + \theta A_1) : L_p(0, T; V^3) \rightarrow L_p(0, T; V^{-1})$ совпадает со всем пространством $L_p(0, T; V^{-1})$. Из последнего полученного неравенства имеем:

$$Ker(J + \theta A_1) = 0.$$

Таким образом, оператор $(J + \theta A_1) : L_p(0, T; V^3) \rightarrow L_p(0, T; V^{-1})$ обратим. В силу теоремы Банаха об обратном операторе (см., например, [10]) получим,

что обратный оператор $(J + \theta A_1)^{-1} : V^{-1} \rightarrow V^3$ — непрерывен. Возведём оценку $\|(J + \theta A_1)^{-1}w\|_{V^3} \leq \frac{1}{\theta}\|w\|_{V^{-1}}$ в степень p и проинтегрируем её по t в пределах от 0 до T . После этого извлечём корень p -ой степени из обеих частей и получим требуемую пункта 2).

Перейдем к доказательству пункта 3). Для этого воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе.

Докажем ограниченность оператора L .

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3} &= \|(J + \theta A_1)v' + \mu Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v|_{t=0}\|_{V^3} \\ &\leq \|(J + \theta A_1)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|\mu Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \max_{t \in [0,T]} \|v\|_{V^3}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства имеем

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3} &= C_3(1 + \theta)\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \mu\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{C([0,T];V^3)} \leq \\ &\leq C_3(1 + \theta)\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \mu C_6\|v\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T];V^3)} \leq \\ &\leq (C_3(1 + \theta) + \mu C_6 + 1)(\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T];V^3)}) = \\ &= (C_3(1 + \theta) + \mu C_6 + 1)\|v\|_{W_2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью вложений $V^3 \subset V^1$ и $C([0, T]; V^3) \subset L_2(0, T; V^3)$.

Таким образом, мы получили непрерывность оператора L .

Покажем, что оператор L взаимно однозначен.

$$(J + \theta A_1)v' + \mu Av = f, \quad v|_{t=0} = v_0 \quad (1.1.15)$$

То есть покажем, что задача имеет единственное решение $v \in W_2$ для любых $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^3$.

Применяя $(J + \theta A_1)^{-1}$ к уравнению выше, получим, что задача (1.1.15) эквивалентна следующей задаче:

$$v' + \mu(J + \theta A_1)^{-1}v = (J + \theta A_1)^{-1}f, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (1.1.16)$$

Введем оператор $U : C([0, T]; V^3) \rightarrow C([0, T]; V^3)$:

$$(Uv)(t) = v_0 - \int_0^t \mu(J + \theta A_1)^{-1}Av(s) + (J + \theta A_1)^{-1}f(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_{V^3} &= \left\| \int_0^t \mu(J + \theta A_1)^{-1} Au(s) + (J + \theta A_1)^{-1} f(s) ds - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \mu(J + \theta A_1)^{-1} Av(s) + (J + \theta A_1)^{-1} f(s) ds \right\|_{V^3} \leq \\
&\leq \mu \int_0^t \|(J + \theta A_1)^{-1} A(u - v)(s)\|_{V^3} ds \leq \frac{\mu}{\theta} \int_0^t \|A(u - v)(s)\|_{V^{-1}} ds \leq \\
&\leq \frac{\mu}{\theta} \int_0^t \|u - v(s)\|_{V^1} ds.
\end{aligned}$$

Для $k > 0$ имеем (точное значение k будет указано позднее)

$$\begin{aligned}
\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_{V^3} &\leq \frac{C_7 \mu}{\theta} \int_0^t \|u - v(s)\|_{V^3} e^{-ks} e^{ks} ds \leq \\
&\leq \frac{C_7 \mu}{\theta} \|(u - v)\|_{k, C([0, t]; V^3)} ((e^{ks} - 1)k^{-1}),
\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_{k, C([0, t]; V^3)} = \int_0^t \|v\|_{V^3} e^{-ks} ds$. Умножая обе части неравенства на e^{-ks} , получим

$$e^{-ks} \|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_{V^3} \leq \frac{C_7 \mu}{\theta} \|(u - v)\|_{k, C([0, T]; V^3)} ((1 - e^{-kT})k^{-1}).$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не зависит от t , переходя к максимуму по t в левой части неравенства и выбирая k таким образом, чтобы $\frac{C_7 \mu}{\theta} \leq 1$, в силу того, что $(1 - e^{-kT}) < 1$, получим, что

$$\|(Uu) - (Uv)\|_{k, C([0, T]; V^3)} \leq \lambda \|(u - v)\|_{k, C([0, T]; V^3)},$$

где $0 < \lambda < 1$.

Согласно принципу сжимающих отображений, $U : C([0, T]; V^3) \rightarrow C([0, T]; V^3)$ имеет единственную неподвижную точку. Поэтому, задача (1.1.16) и, следовательно, (1.1.15) имеют единственное решение. Получаем, что оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является взаимно однозначным.

По теореме Банаха об обратном операторе, получаем, что оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ непрерывен. $\square$

Для доказательства следующей леммы введем норму $\|v\|_{k, L_2(0, T; V^{-1})} = (\int_0^T \|v\|_{V^{-1}}^2 e^{-kt} dt)^{\frac{1}{2}}$.

Лемма 1.1.2. Оператор $B : L_2(0, T; V^1) \times [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является непрерывным и ограниченным. Более того, для любого фиксированного $z \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ и для любых $u, v \in L_2(0, T; V^1)$ справедлива оценка:

$$\|B(v, z) - B(u, z)\|_{k, L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_8 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}} \|v - u\|_{k, L_2(0, T; V^1)}. \quad (1.1.17)$$

Доказательство. Докажем первую часть нашего утверждения. Рассмотрим

$$(B(v, z)(t), \varphi) = \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right)$$

Достаточно установить действие, непрерывность и ограниченность отображения $F : (v, z) \rightarrow \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds$ из пространства $L_2(0, T; V^1) \times [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ в пространство $L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Данное отображение представляет собой суперпозицию интегрального оператора и отображения $\Phi : (v, z) \rightarrow \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))$ из пространства $L_2(0, T; V^1) \times [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ в пространство $L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))$. Для любого фиксированного $z \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \|\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) - \mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x))\|_{L_2(\Omega)}^2 ds dt = \\ & = \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{E}^2(v - u)(s, z(s; t, x)) dx ds dt = \\ & = T \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{E}^2(v - u)(s, z) dz ds = T \int_0^T \|\mathcal{E}(v - u)(s, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds = \\ & = T \|v - u\|_{L_2(0, T; L_2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что замена переменной x на $z = z(s; t, x)$ при фиксированных s, t не изменяет норму, следовательно, Φ непрерывно по v , равномерно относительно z . Достаточно теперь установить непрерывность Φ по z при фиксированном значении v . Пусть z_l — произвольная последовательность из $[0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, $z_l \rightarrow z_0 \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ в норме пространства $C([0, T] \times [0, T], C(\bar{\Omega}))$, $\psi > 0$ — произвольное число. Так как $C(Q_T)$ плотно в $L_2(Q_T)$, то существует ξ — непрерывная $\frac{\psi}{3\sqrt{T}}$ — аппроксимация функции $\mathcal{E}(v)$, то есть $\|\mathcal{E}(v) - \xi\| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{T}}$.

Тогда

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{E}(v)(s, z_l(s; t, x)) - \mathcal{E}(v)(s, z_0(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} \leq \\
& \leq \|\mathcal{E}(v)(s, z_l(s; t, x)) - \xi(s, z_l(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} + \\
& + \|\xi(s, z_l(s; t, x)) - \xi(s, z_0(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} + \\
& + \|\mathcal{E}(v)(s, z_0(s; t, x)) - \xi(s, z_0(s; t, x))\|_{L_2([0, T] \times [0, T], L_2(\Omega))} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно, Φ непрерывно по z , следовательно F ограничено, следовательно, B непрерывно и ограничено.

Докажем необходимую оценку (1.1.17).

Пусть $\bar{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $\bar{u}(t) = e^{-kt}u(t)$. Для любого $\varphi \in L_2(0, T, V^1)$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \langle e^{-kt}B(v, z)(t) - e^{-kt}B(u, z)(t), \varphi(t) \rangle = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}_{ij}(\bar{v} - \bar{u})(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}_{ij}(\varphi)(t) dx dt.
\end{aligned}$$

Тогда с помощью неравенства Гёлдера:

$$\begin{aligned}
& \langle e^{-kt}B(v, z)(t) - e^{-kt}B(u, z)(t), \varphi(t) \rangle \leq \\
& \leq \int_0^T \int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\bar{v} - \bar{u})(s, z(s; t, x)) dx \right)^{1/2} \times \\
& \times \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\varphi)(t, x) dx \right)^{1/2} ds dt = \\
& = \int_0^T \int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\bar{v} - \bar{u})(s, z(s; t, x)) dx \right)^{1/2} \|\varphi\|_{V^1} ds dt \\
& \leq \int_0^T \int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \|\bar{v} - \bar{u}\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1} ds dt \leq \\
& \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t [(t-s)^{-\alpha} \|\bar{v} - \bar{u}\|_{V^1}]^2 ds \right)^{1/2} \|\varphi\|_{V^1} dt \leq \\
& \leq \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds \|\varphi\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^t (t-s)^{-2\alpha} \|\bar{v} - \bar{u}\|_{V^1}^2 ds dt \right)^{1/2} \\
& \leq \sqrt{C_9} T^{1/2-\alpha} \left(\int_0^T \|\bar{v} - \bar{u}\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds \|\varphi\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} = \\
& = \sqrt{C_9} T^{1/2-\alpha} \|\bar{v} - \bar{u}\|_{L_2(0, T; V^1)} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds \|\varphi\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу оценки

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds \right\|_{L_p(0,T)} &\leq C_{10} T^{1-\alpha} \|\varphi(s)\|_{L_p(0,T)}, \\ \varphi(s) &\in L_p(0,T), 1 \leq p < \infty. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл:

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds \|\varphi(t, \cdot)\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)} \int_0^T 1 - e^{-2t(1/\lambda+k)} \|\varphi(t, \cdot)\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)} \int_0^T \|\varphi(t, \cdot)\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)} \right)^{1/2} \|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили оценку:

$$\begin{aligned} &\langle e^{-kt} B(v, z)(t) - e^{-kt} B(u, z)(t), \varphi(t) \rangle \leq \\ &\leq C_{10} T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}} \|\bar{v} - \bar{u}\|_{L_2(0,T;V^1)} \|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)}. \end{aligned}$$

Откуда следует оценка (1.1.17). □

Введем дополнительные определения для знакомства с понятием L -уплотняющих операторов (см. [4], [38]).

Определение 1.1.4. Пусть F — банахово пространство, $\mathcal{M}$ — подмножество F . Мерой некомпактности называется неотрицательная действительная функция ψ , определенная на F и удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) $\psi(\overline{co} \mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M})$;
- 2) $\psi(\mathcal{M}_1) \leq \psi(\mathcal{M}_2)$ для любых двух множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ таких, что $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$.

Мера некомпактности Куратовского (точная нижняя граница $d > 0$, для которой множество $\mathcal{M}$ можно разбить на конечное число подмножества, диаметры которых меньше d) является примером меры некомпактности. Будем обозначать меру некомпактности Куратовского в пространстве $L_2(0, T; V^{-1})$ через γ_k .

Определение 1.1.5. Пусть X является ограниченным подмножеством банахова пространства F и $L : X \rightarrow F$. Отображение $g : X \rightarrow F$ называется L -уплотняющим, если $\psi(g(\mathcal{M})) < \psi(L(\mathcal{M}))$ для любого множества $\mathcal{M} \subseteq X$ такого, что $\psi(g(\mathcal{M})) \neq 0$.

Лемма 1.1.3. Оператор $B : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .

Доказательство. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $M \subset W_2 \subset L_2(0, T; V^1)$. Обозначим через $z(M)$ множество траекторий z , определенных полем скоростей $v \in M$. Тогда в силу теоремы 1.1.1 множество $z(M)$ относительно компактно. Более того, для любой фиксированной $v \in W_2$ множество $B(v, z(M))$ также относительно компактно. Кроме того, оператор $B(\cdot, z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C_8 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}$ в нормах $\|\cdot\|_{k, L_2(0, T, V^1)}$ и $\|\cdot\|_{k, L_2(0, T, V^{-1})}$. Оператор $B(v, z)$ (см. [41], Теорема 1.5.7) $C_8 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}$ ограничен относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ_k . Известно, что меры некомпактности Хаусдорфа и Куратовского удовлетворяют неравенствам $\chi_k(M) \leq \gamma_k(M) \leq 2\chi_k(M)$. Таким образом, мы имеем оценку (см. [4], Теорема 1.1.7):

$$\gamma_k(G(M)) \leq C_{11} T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}} \gamma_k(L(M)).$$

Выбирая k таким образом, чтобы $C_8 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}} < 1$, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 1.1.4. 1) Оператор $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$ является непрерывным и для него выполнена оценка:

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leq C_{12} \|v\|_{L_4(\Omega)}^2.$$

2) Оператор $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является непрерывным.

3) Оператор $K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является вполне непрерывным.

Доказательство. 1) Докажем непрерывность оператора $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$. Заметим, что для любых $v \in L_4(\Omega), \varphi \in V^1$ выполнена оценка:

$$|\langle K(v), \varphi \rangle| \leq C_{12} \max_{i,j} \|v_i v_j\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1} \leq C_{12} \|v\|_{L_4(\Omega)}^2 \|\varphi\|_{V^1},$$

откуда и следует, что

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leq C_{12}\|v\|_{L_4(\Omega)}^2$$

с некоторой константой C_{12} .

Значит для любых $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)$ получим:

$$\begin{aligned} |\langle K(v^m) - K(v^0), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^0 v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|K(v^m) - K(v^0)\|_{V^{-1}} \leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Преобразуем правую часть полученного выше неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} &= \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 + v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m (v_j^m - v_j^0)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|v_j^0 (v_i^m - v_i^0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i^m\|_{L_4(\Omega)} \|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|v_j^0\|_{L_4(\Omega)} \|v_i^m - v_i^0\|_{L_4(\Omega)} = \\ &= C_{13}(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)}) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}. \end{aligned}$$

Непрерывность оператора $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$ следует из сходимости $v^m \rightarrow v^0$ в $L_4(\Omega)$.

2) Покажем, что отображение $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывно. Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0, T; L_4(\Omega))$ сходится к некоторой $v^0 \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$. Тогда в силу неравенства

$$\begin{aligned} \|K(v^m) - K(v^0)\|_{V^{-1}} &= \\ &= C_{14}(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)}) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \end{aligned}$$

получаем, что при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|K(v^m)(t) - K(v^0)(t)\|_{V^{-1}} = \\ & = C_{14}(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)})\|v^m(t) - v^0(t)\|_{L_4(\Omega)}. \end{aligned}$$

Возведем это неравенство в степень 2 и проинтегрируем по t от 0 до T , используя неравенство Гелдера, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|K(v^m)(t) - K(v^0)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \\ & \leq C_{14}^2 \int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)})^2 \|v^m(t) - v^0(t)\|_{L_4(\Omega)}^2 dt \leq \\ & \leq C_{14}^2 \left(\int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)})^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^T \|v^m(t) - v^0(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Так как $\{v^m\} \subset L_4(0, T; L_4(\Omega))$ сходится к некоторому пределу $v^0 \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$, получаем, что оператор $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является непрерывным.

3) Сначала введем теорему о компактности вложения (см. [36]).

Теорема 1.1.4. *Рассмотрим банаховы пространства X, E, Y такие, что $X \subset E$ вполне непрерывно, $E \subset Y$ непрерывно. Рассмотрим пространство $F \subset L_p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ такое, что для любой функции $f \in F$ её обобщенная производная принадлежит $L_r(0, T; Y)$, $1 \leq r \leq \infty$. Также, пусть*

- 1) F ограничено в $L_p(0, T; X)$,
- 2) множество $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0, T; Y)$.

Тогда F относительно компактно в $L_p(0, T; E)$ при $p < \infty$ множество, F относительно компактно в $C([0, T], E)$ при $p = \infty$ и $r > 1$ множество.

При доказательстве третьего пункта воспользуемся этой теоремой. В данном случае

$$\begin{aligned} X &= V^1, E = L_4(\Omega), Y = L_2(\Omega), \\ Z &= \{v : v \in L_4(0, T; V^1); v' \in L_1(0, T; L_2(\Omega))\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $V^1 \subset L_4(\Omega)$ при $n \leq 3$ компактно по теореме вложения Соболева. Таким образом, имеем, что $Z \subset L_4(0, T; V^1)$ компактно. Далее, имеем непрерывные вложения $C([0, T], V^1) \subset L_4(0, T; V^1)$ и $L_4(0, T; V^1) \subset$

$L_1(0, T; L_2(\Omega))$. Из этого следует, что $W_2 \subset Z$ непрерывно. Таким образом, получаем суперпозицию:

$$W_2 \subset Z \subset L_4(0, T; V^1) \xrightarrow{K} L_2(0, T; V^{-1}).$$

Здесь первое вложение непрерывно, второе вложение — вполне непрерывно, а K является непрерывным отображением. Таким образом, мы доказали, что $K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является вполне непрерывным оператором. $\square$

Лемма 1.1.5. *Оператор $C : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является вполне непрерывным.*

Доказательство. Доказательство следует из третьего пункта леммы 1.1.4. $\square$

1.1.3 Априорные оценки

Лемма 1.1.6. *Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^3$. Тогда для любого решения $v \in W_2$ операторного уравнения (1.1.13) имеют место следующие оценки:*

$$\|v\|_{L_2(0, T; V^1)} \leq C_{15}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}); \quad (1.1.18)$$

$$\|v\|_{C([0, T]; V^0)} \leq C_{16}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}); \quad (1.1.19)$$

$$\theta\|v\|_{C([0, T]; V^2)}^2 \leq C_{17}(\|v_0\|_{V^0}^2 + \theta\|v_0\|_{V^2}^2 + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2), \quad (1.1.20)$$

где константы C_{15} , C_{16} , C_{17} не зависят от ξ .

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (1.1.13). Тогда для любой $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ выполняется равенство (1.1.12). Поскольку данное равенство справедливо для любых $\varphi \in V^1$, в качестве φ возьмем $\varphi = \bar{v}$, где $\bar{v}(t) = e^{-kt}v$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v' \bar{v} dx - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla(v) : \nabla(\bar{v}) dx + \\ & + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))) ds, \mathcal{E}(\bar{v}) - \\ & - \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v'(t) : \nabla \bar{v}(t) dx = \xi \langle f, \bar{v} \rangle. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $v = e^{kt}\bar{v}$ и отдельно преобразуем слагаемые в левой части:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v' \bar{v} dx &= \int_{\Omega} (e^{kt}\bar{v})' \bar{v} dx = e^{kt} \int_{\Omega} \bar{v}' \bar{v} dx + ke^{kt} \int_{\Omega} \bar{v} \bar{v} dx = \\ &= \frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial(\bar{v} \bar{v})}{\partial t} dx + ke^{kt} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 = \frac{e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 + ke^{kt} \|\bar{v}\|_{V^0}^2.\end{aligned}$$

Перейдем к следующему слагаемому:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} dx &= \frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j \bar{v}_j}{\partial x_i} dx = -\frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \bar{v}_j \bar{v}_j = \\ &= -\frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} v \sum_{j=1}^n \bar{v}_j \bar{v}_j = 0\end{aligned}$$

Рассмотрим следующий член:

$$\begin{aligned}-\theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \bar{v} dx &= -\theta \int_{\Omega} \nabla \Delta (e^{kt}\bar{v})' : \nabla \bar{v} dx = -\theta ke^{kt} \int_{\Omega} \nabla \Delta \bar{v} : \nabla \bar{v} dx - \\ &-\theta e^{kt} \int_{\Omega} \nabla \Delta \bar{v}' : \nabla \bar{v} dx = \theta ke^{kt} \int_{\Omega} \Delta \bar{v} \Delta \bar{v} dx + \frac{\theta e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \bar{v} \Delta \bar{v}) dx = \\ &= \theta ke^{kt} \|\bar{v}\|_{V^2}^2 + \frac{\theta e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{v}\|_{V^2}^2.\end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим последний член:

$$e^{kt} \mu \int_{\Omega} \nabla(\bar{v}) : \nabla(\bar{v}) dx = e^{kt} \mu \|\bar{v}\|_{V^1}^2.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}&\frac{e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 + ke^{kt} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 + \mu e^{kt} \|\bar{v}\|_{V^1}^2 + \theta ke^{kt} \|\bar{v}\|_{V^2}^2 + \frac{\theta e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{v}\|_{V^2}^2 = \\ &= -\frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{kt}\bar{v})(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\bar{v})) = e^{kt} \xi \langle f, \bar{v} \rangle.\end{aligned}$$

Пользуясь неравенства Коши $bc \leq \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$ для $\delta = 1/\mu_0$, оценим правую часть полученного равенства:

$$\xi e^{kt} \langle f, \bar{v} \rangle \leq e^{kt} \|f\|_{V^{-1}} \|\bar{v}\|_{V^1} \leq \frac{e^{kt}}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2 + \frac{\mu e^{kt}}{2} \|\bar{v}\|_{V^1}^2.$$

Умножая обе части равенства на e^{-kt} , для почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 + k \|\bar{v}\|_{V^0}^2 + \frac{\mu}{2} \|\bar{v}\|_{V^1}^2 + \frac{\theta}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{v}\|_{V^2}^2 + \theta k \|\bar{v}\|_{V^2}^2 \leq \\ & \leq -\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \left(e^{-kt} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt}\bar{v})(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\bar{v})) \right) \right| + \\ & \quad + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до τ , где $\tau \in [0, T]$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|\bar{v}\|_{V^2}^2 + k \int_0^\tau \|\bar{v}\|_{V^0}^2 dt + \frac{\mu}{2} \int_0^\tau \|\bar{v}\|_{V^1}^2 dt + \theta k \int_0^\tau \|\bar{v}\|_{V^2}^2 dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{1}{2\mu} \int_0^\tau \|f\|_{V^{-1}}^2 dt + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \left| \left(e^{-kt} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt}\bar{v})(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\bar{v})) \right) \right| dt. \end{aligned}$$

Используя оценку (1.1.17) для $u = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|\bar{v}\|_{V^2}^2 + k \int_0^\tau \|\bar{v}\|_{V^0}^2 dt + \frac{\mu}{2} \int_0^\tau \|\bar{v}\|_{V^1}^2 dt + \theta k \int_0^\tau \|\bar{v}\|_{V^2}^2 dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{\mu_1 C_8 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

Возьмем k настолько большим, что $\frac{\mu_1 C_8 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \leq \mu/4$. Оценим каждое слагаемое левой части:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \int_0^\tau \|\bar{v}\|_{V^1}^2 dt \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2, \\ & \frac{\theta}{2} \|\bar{v}\|_{V^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2, \\ & \frac{1}{2} \|\bar{v}\|_{V^0}^2 \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от τ , то в левой части возьмем максимум по $\tau \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2, \\ & \frac{\theta}{2} \|\bar{v}\|_{C([0,T];V^2)}^2 \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2, \\ & \frac{1}{2} \|\bar{v}\|_{C([0,T];V^0)}^2 \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\bar{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следуют требуемые оценки (1.1.18)–(1.1.20). $\square$

Лемма 1.1.7. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^3$. Тогда для любой $v \in W_2$ — решения операторное уравнение (1.1.13) выполнены оценки:

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(0, T; V^3)} &\leq C_{18}(1 + \frac{1}{\theta})(\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2) + \\ &+ C_{18}\sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + C_{18}\|v_0\|_{V^2}^2; \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{C([0, T]; V^3)} &\leq \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_{18}T^{\frac{1}{2}}}{\theta}(1 + \frac{1}{\theta})(\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2) \\ &+ \frac{C_{18}T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta}}\|v_0\|_{V^2} + \frac{C_{18}T^{\frac{1}{2}}}{\theta}\|v_0\|_{V^2}^2; \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0, T; V^{-1})} \leq C_{19}(\|v_0\|_{V^0}^2 + \theta\|v_0\|_{V^2}^2 + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + 1); \quad (1.1.23)$$

$$\theta\|v'\|_{L_{4/3}(0, T; V^3)} \leq C_{20}(\|v_0\|_{V^0}^2 + \theta\|v_0\|_{V^2}^2 + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + 1); \quad (1.1.24)$$

где константы C_{18} , C_{19} , C_{20} не зависят от θ , v , ξ .

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (1.1.13). Тогда она удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$Jv' + \theta A_2 v' + \mu A v + \xi \frac{\mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v, z) - \xi K(v) = \xi f.$$

Из уравнения выше получаем

$$\|(J + \theta A_1)v'\|_{L_2(0, T; V^{-1})} = \|\xi f - \mu A v - \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v, z) - \xi K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})}.$$

Оценим правую часть, используя оценку (1.1.17) для $u = 0$.

$$\begin{aligned} \|\xi f - \mu A v - \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v, z) + \xi K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} &\leq \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + \\ &+ \frac{\mu_1 C_8 T^{\frac{1}{2} - \alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{2 + 2k\lambda}}}{\Gamma(1 - \alpha)} \|v\|_{L_2(0, T; V^1)} + \mu \|v\|_{L_2(0, T; V^1)} + \|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})}. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Отдельно оценим величину $\|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})}$. Используя оценку оператора K (см. лемму 1.1.4), а также непрерывность вложения $V^2 \subset L_4(\Omega)$, имеем:

$$\begin{aligned} \|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} &= \left(\int_0^T \|K(v)\|_{V^{-1}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{12} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_{21} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V^2}^4 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{21} T^{\frac{1}{2}} \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^2}^2 = C_{21} T^{\frac{1}{2}} \|v\|_{C([0, T]; V^2)}^2. \end{aligned}$$

Перепишем (1.1.25) в виде:

$$\begin{aligned} & \left\| \xi f - \mu A v - \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) + \xi K(v) \right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ & \leq C_{22}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C_{21} T^{\frac{1}{2}} \|v\|_{C([0,T];V^2)}^2). \end{aligned}$$

Используя априорные оценки (1.1.18) и (1.1.20), получаем

$$\begin{aligned} \|(J + \theta A_1)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} & \leq C_{18}(1 + \frac{1}{\theta})(\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2) + \\ & + C_{18}\sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + C_{18}\|v_0\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

Для получения нижней оценки воспользуемся оценкой (1.1.14):

$$\begin{aligned} \theta\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} & \leq \|(J + \theta A_1)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ & \leq C_{18}(1 + \frac{1}{\theta})(\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2) + C_{18}\sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + C_{18}\|v_0\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (1.1.21) доказано.

Перейдем к доказательству оценки (1.1.22). Представим функцию $v \in W_2$ следующим образом:

$$v = v_0 - \int_0^t v'(s) ds.$$

Тогда

$$\|v\|_{V^1} \leq \|v_0 - \int_0^t v'(s) ds\|_{V^1} \leq \|v_0\|_{V^3} + \sqrt{T}\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Поскольку правая часть полученного неравенства не зависит от t , перейдем к максимуму по $\tau \in [0, T]$ в левой части. Тогда, учитывая оценку (1.1.21), получаем

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^3} & \leq \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_{18} T^{\frac{1}{2}}}{\theta} (1 + \frac{1}{\theta})(\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2) + \\ & + \frac{C_{18} T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta}} \|v_0\|_{V^2} + \frac{C_{18} T^{\frac{1}{2}}}{\theta} \|v_0\|_{V^2}^2. \end{aligned}$$

В результате получили оценку (1.1.22).

Теперь мы докажем оценку (1.1.23). Как и раньше, $v \in W_2$ является ре-

шением операторного уравнения (1.1.13). Тогда

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &\leq \|\xi f - \mu Av - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v, z) - \theta A_1 v' + K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \\ &\leq \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v, z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \\ &\quad + \theta\|A_1 v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

Отдельно рассмотрим слагаемые в правой части последнего неравенства. Сначала оценим $\|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$. Учитывая неравенство при $n = 3$

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}, \quad u \in V^1,$$

и оценку оператора K , получаем (для случая $n = 2$ доказательство аналогично):

$$\begin{aligned} \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &= \left(\int_0^T \|K(v)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq C_{12}\left(\int_0^T \|v\|_{L_4(\Omega)}^{\frac{8}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq 2C_{12}\left(\int_0^T \|v\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2}{3}}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq C_{23}\left(\int_0^T \|v\|_{V^0}^{\frac{2}{3}}\|v\|_{V^1}^2 dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq C_{23}\|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|v\|_{V^1}^2 dt\right)^{\frac{3}{4}} = C_{23}\|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Оценим следующее слагаемое, используя неравенство Гелдера

$$\begin{aligned} \|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &= \left(\int_0^T \|Av\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq \left(\int_0^T \|v\|_{V^1}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq T^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T \|v\|_{V^1}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{4}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя неравенство Гёльдера и оценку (1.1.17) для $u = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \|B(v, z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &= \left(\int_0^T \|B(v, z)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq T^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T \|B(v, z)\|_{V^{-1}}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= T^{\frac{1}{4}}\|B(v, z)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq T^{\frac{1}{4}}T^{\frac{1}{2}-\alpha}C_6\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим последний член правой части

$$\begin{aligned} \theta\|A_1 v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &= \theta\left(\int_0^T \|A_1 v'\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq \theta\left(\int_0^T \|v'\|_{V^3}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \leq \theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)}. \end{aligned}$$

Оценим правую часть, используя левую часть оценки (1.1.14) для $p = 4/3$.

$$\begin{aligned} \theta \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} &\leq \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} - \mu \|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \\ &+ \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \|B(v, z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \theta \|A_1 v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &\leq \theta \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leq \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \\ &+ \mu \|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \|B(v, z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \end{aligned}$$

Итак, из (1.1.26), оценок полученных выше, а также априорных оценок (1.1.18) и (1.1.19), получаем

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} &\leq 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu \|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \\ &+ \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \|B(v, z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) \leq \\ &\leq C_{24} \left(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}} \right) \leq \\ &\leq C_{25} \left((\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta} \|v_0\|_{V^2}) + \right. \\ &\quad \left. + (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta} \|v_0\|_{V^2})^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta} \|v_0\|_{V^2})^{\frac{3}{2}} \right) \leq \\ &\leq C_{25} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta} \|v_0\|_{V^2})^2 \leq \\ &\leq 4C_{25} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1 + \|v_0\|_{V^0}^2 + \sqrt{\theta} \|v_0\|_{V^2}^2). \end{aligned}$$

Тогда получаем неравенство (1.1.23), где $C_{19} = 4C_{25}$.

Наконец, снова применяя оценки для наших операторов для правой части (1.1.26), а также априорные оценки (1.1.18) и (1.1.19), получаем

$$\begin{aligned} \theta \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} &\leq \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu \|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \\ &+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \|B(v, z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leq \\ &\leq C_{26} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}) \leq \\ &\leq C_{27} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta} \|v_0\|_{V^2}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{1}{2}} \times \right. \\
& \left. \times (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{3}{2}} \right) \leq \\
& \leq C_{27}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^2 \leq \\
& \leq 4C_{27}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1 + \|v_0\|_{V^0}^2 + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2}^2).
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (1.1.24) установлено, здесь $C_{20} = 4C_{27}$. $\square$

Лемма 1.1.8. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^3$. Тогда для любой функции $v \in W_2$ — решения (1.1.13) выполнена оценка:

$$\|v\|_{W_2} \leq C_{28}.$$

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение уравнения (1.1.13) для некоторого $\xi \in [0, 1]$. Следовательно, функция v удовлетворяет равенству

$$(\theta A_1 + J)v'(t) + \mu Av(t) + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v(t), z) - \xi K(v)(t) = \xi f(t)$$

и начальному условию $v(0) = \xi v_0$.

Применим первую компоненту равенства выше при почти всех $t \in (0, T)$ к $v(t)$:

$$\begin{aligned}
& \langle (\theta A_1 + J)v'(t), v(t) \rangle + \langle \mu Av(t), v(t) \rangle + \langle \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v(t), z), v(t) \rangle - \\
& - \xi \langle K(v)(t), v(t) \rangle = \xi \langle f(t), v(t) \rangle.
\end{aligned}$$

В силу соленоидальности v имеем

$$\begin{aligned}
\langle K(v)(t), v(t) \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial v_j v_j}{\partial x_i} dx = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n v_j v_j = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} v \sum_{j=1}^n v_j v_j = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом получаем, что

$$\begin{aligned}
& \langle (\theta A_1 + J)v'(t), v(t) \rangle + \langle \mu Av(t), v(t) \rangle + \langle \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v(t), z), v(t) \rangle \leq \\
& \leq \xi \langle f(t), v(t) \rangle.
\end{aligned}$$

Интегрирование этого неравенства по t от 0 до τ дает

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \langle Jv'(t), v(t) \rangle dt + \int_0^\tau \langle (\theta A_1)v'(t), v(t) \rangle dt + \int_0^\tau \langle \mu Av(t), v(t) \rangle dt + \\ & + \int_0^\tau \langle \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v(t), z), v(t) \rangle dt = \int_0^\tau \xi \langle f(t), v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Из определения оператора $(\theta A_1 + J)$ и интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \langle \theta A_1 v'(t), v(t) \rangle dt = \frac{\theta}{2} \|v(\tau)\|_{V^2}^2 - \frac{\xi^2 \theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2. \\ & \int_0^\tau \langle Jv'(t), v(t) \rangle dt = \int_0^\tau \int_\Omega v'(t)v(t) dx dt = \frac{1}{2} \|v(\tau)\|_{V^0}^2 - \frac{\xi^2}{2} \|v_0\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2} \|v(\tau)\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2} \|v(\tau)\|_{V^0}^2 = \frac{\xi^2 \theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{\xi^2}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 - \int_0^\tau \langle \mu Av(t), v(t) \rangle dt - \\ & - \int_0^\tau \langle \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v(t), z), v(t) \rangle dt + \int_0^\tau \xi \langle f(t), v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Оценивая правую часть сверху и пользуясь тем, что $\xi \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2} \|v(\tau)\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2} \|v(\tau)\|_{V^0}^2 \leq \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \mu \left| \int_0^\tau \langle Av(t), v(t) \rangle dt \right| + \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \int_0^\tau \langle B(v(t), z), v(t) \rangle dt \right| + \left| \int_0^\tau \langle f(t), v(t) \rangle dt \right|. \end{aligned}$$

Поскольку $\|v(\tau)\|_{V^0}^2 \geq 0$, то оценивая здесь левую часть снизу, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\theta}{2} \|v(\tau)\|_{V^2}^2 \leq \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + \mu \left| \int_0^\tau \langle Av(t), v(t) \rangle dt \right| + \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \int_0^\tau \langle B(v(t), z), v(t) \rangle dt \right| + \left| \int_0^\tau \langle f(t), v(t) \rangle dt \right|. \end{aligned}$$

Оценим слагаемых в правой части неравенства

$$\begin{aligned} & \mu \left| \int_0^\tau \langle Av(t), v(t) \rangle dt \right| \leq \mu \|v(t)\|_{V^1}^2 dt; \\ & \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \int_0^\tau \langle B(v(t), z), v(t) \rangle dt \right| \leq \\ & \leq \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \left(\int_\Omega \mathcal{E}^2(v)(s, z(s; t, x)) dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{V^1} ds dt \leq \\ & \leq \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} C_8 \lambda T^{\frac{3}{2}} \|v\|_{V^1}^2; \\ & \left| \int_0^\tau \langle f, \bar{v} \rangle dt \right| \leq \int_0^\tau \|f\|_{V^{-1}} \|v\|_{V^1} dt \leq T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 \|v\|_{C([0, T], V^1)}. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{2} \|v(\tau)\|_{V^2}^2 &\leq \frac{\theta}{2} \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2 + T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 \|v\|_{C([0,T],V^1)} + \\ &+ (\mu + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} C_8 \lambda T^{\frac{3}{2}}) \int_0^\tau \|v\|_{V^1}^2 dt, \end{aligned}$$

что то же самое, что и

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_{V^2}^2 &\leq \|v_0\|_{V^2}^2 + \frac{1}{\theta} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{2T^{\frac{1}{2}}}{\theta} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 \|v\|_{C([0,T],V^1)} + \\ &+ (2\mu + \frac{2\mu_1 C_8 \lambda T^{\frac{3}{2}}}{\theta \Gamma(1-\alpha)}) \int_0^\tau \|v\|_{V^1}^2 dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь неравенством Гронуолла–Белмана, получим

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_V^2 &\leq e^{(2\mu + \frac{2\mu_1 C_8 \lambda T^{\frac{3}{2}}}{\theta \Gamma(1-\alpha)} + 1)\tau} \times \\ &\times (\|v_0\|_V^2 + \frac{1}{\theta} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{2T^{\frac{1}{2}}}{\theta} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 \|v\|_{C([0,T],V^1)}) \leq \\ &\leq e^{(2T\mu + \frac{2\mu_1 C_8 \lambda T^{\frac{5}{2}}}{\theta \Gamma(1-\alpha)} + T)} \times \\ &\times (\|v_0\|_V^2 + \frac{1}{\theta} \|v_0\|_{V^0}^2 + \frac{2T^{\frac{1}{2}}}{\theta} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 \|v\|_{C([0,T],V^1)}). \end{aligned}$$

Отсюда легко следует оценка на $\|v\|_{C([0,T],V^1)}$.

Для получения оценки на $\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)}$ заметим, что если $v \in W_2$ удовлетворяет уравнению (1.1.13), то справедливо равенство

$$(\theta A_1 + J)v'(t) + \mu A v(t) + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v(t), z) - \xi K(v)(t) = \xi f(t).$$

Используя оператор $(\theta A_2 + J)^{-1}$, получаем

$$v' = (\theta A_1 + J)^{-1} (-\mu A v - \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) + \xi K(v) + \xi f).$$

Отсюда, воспользовавшись рассуждениями выше,

$$\begin{aligned} &\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} = \\ &= \|(\theta A_1 + J)^{-1} (-\mu A v - \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) + \xi K(v) + \xi f)\|_{L_2(0,T;V^1)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta} \|(-\mu A v - \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) + \xi K(v) + \xi f)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta} (\mu \|A v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \|B(v, z)\|_{L_2(0,T;V^1)} + \\ &+ \xi \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \xi \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}). \end{aligned}$$

В силу полученных ранее оценок на рассмотренные выше операторы и того, что $\xi \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(0,T;V)} &\leq \frac{1}{\theta}(\mu\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{\mu_1 C_8 \lambda T^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(1-\alpha)}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \\ &+ C_{12}\|v\|_{C([0,T],V^1)}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}). \end{aligned}$$

В силу непрерывного вложения $C([0, T], V^1) \subset L_2(0, T; V^1)$ имеем

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} \leq M.$$

В итоге получаем требуемую оценку. $\square$

Исследование слабой разрешимости аппроксимационной задачи завершается следующей теоремой.

1.1.4 Разрешимость аппроксимационной задачи

Теорема 1.1.5. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^3$. Тогда существует по крайней мере одно слабое решение $v \in W_2$ аппроксимационной задачи (1.1.7)–(1.1.11) для $\xi = 1$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы воспользуемся теорией топологической степени уплотняющих векторных полей. Рассмотрим операторное уравнение:

$$L(v) - \xi C(v) + \xi G(v) = \xi(f, v_0). \quad (1.1.27)$$

По лемме 1.1.8 следует, что все решения уравнения (1.1.27) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусе $R = C_{28} + 1$. Согласно утверждению 3) леммы 1.1.1 оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ обратим. Тогда ни одно решения

$$v = \xi L^{-1}(C(v) - G(v) + (f, v_0))$$

не принадлежит границе шара B_R .

В силу пункта 3) леммы 1.1.1 оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным. Согласно леммам 1.1.3 и 1.1.5 отображение $(C(v) - G(v) + (f, v_0)) : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является L -уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $L^{-1}(C(v) -$

$G(v) + (f, v_0)) : W_2 \rightarrow W_2$ также является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .

Таким образом, векторное поле $v - \xi L^{-1}(C(v) - G(v) + (f, v_0))$ невырождено на границе шара B_R , это означает, что для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi L^{-1}(C - G + f), B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получаем, что

$$\deg(I - \xi L^{-1}(C - G + f), B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ уравнения (1.1.13), и, следовательно, задачи (1.1.7)–(1.1.11). $\square$

1.1.5 Предельный переход

Рассмотрим аппроксимационную задачу (1.1.7)–(1.1.11) при $\xi = 1$. Заметим, что для любого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0 , так как V^3 плотно в V^0 . Если $v_0^* \equiv 0$, тогда $v_0^m \equiv 0$, $\theta_m = 1/m$. Если $\|v_0^*\|_{V^0} \neq 0$, тогда $\|v_0^m\|_{V^2} \neq 0$. Положим $\theta_m = 1/(m\|v_0^m\|_{V^2}^2)$. Получаем, что $\{\theta_m\}$ сходится к нулю при $m \rightarrow \infty$ и $\theta_m\|v_0^m\|_{V^2}^2 \leq 1$.

В силу теоремы 1.1.5 существует решение аппроксимационной задачи (1.1.7)–(1.1.11) при $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} \langle (v^m)', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi dx - \theta_m \int_{\Omega} \nabla \Delta(v^m)' : \nabla \varphi dx \\ + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

В силу оценок (1.1.18), (1.1.19), (1.1.23) и (1.1.24) имеем:

$$\|v^m\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 \leq C_{29}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1), \quad (1.1.29)$$

$$\|v^m\|_{C([0,T];V^0)}^2 \leq C_{30}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1), \quad (1.1.30)$$

$$\|(v^m)'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leq C_{31}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1), \quad (1.1.31)$$

$$\theta\|(v^m)'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leq C_{32}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1), \quad (1.1.32)$$

где константы $C_{29} - C_{32}$ не зависят от θ . Таким образом, имеем сходимости

$$\begin{aligned} v^m &\rightarrow v^* \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V^1) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \\ v^m &\rightarrow v^* \quad \text{*}-\text{слабо в } L_\infty(0, T; V^0) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \\ (v^m)' &\rightarrow (v^*)' \quad \text{слабо в } L_{4/3}(0, T; V^{-1}) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где предельная функция v^* принадлежит пространству W_1 .

Теперь рассмотрим задачу Коши (1.1.3) для предельной функции v^* . В силу теоремы 1.1.1 $z^*(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденный v^* .

Лемма 1.1.9. *Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится по (τ, x) по мере Лебега на $[0, T] \times \Omega$ к $z(\tau; t, x)$ для $t \in [0, T]$.*

Доказательство этой леммы следует из леммы 1.1.7 и теоремы 1.1.2.

I часть. Сначала рассмотрим гладкую функцию φ из V^1 .

Перейдем к пределу в каждом слагаемом (1.1.28). Заметим

$$\mu \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi \, dx \rightarrow \mu \int_{\Omega} \nabla v^* : \nabla \varphi \, dx$$

для любой $\varphi \in V^1$.

В силу слабой сходимости $(v^m)' \rightarrow (v^*)'$ в $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow \infty$ для любой $\varphi \in V^1$, имеем

$$\langle (v^m)', \varphi \rangle \rightarrow \langle (v^*)', \varphi \rangle.$$

Далее, используя оценку (1.1.32), без ограничения общности и, при необходимости, переходя к подпоследовательности, существует функция $u \in L_{4/3}(0, T; V^3)$ такая, что

$$\theta_m (v^m)' \rightarrow u \quad \text{слабо в } L_{4/3}(0, T; V^3) \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\theta_m \langle \nabla \Delta (v^m)', \nabla \varphi \rangle \rightarrow \langle \nabla \Delta u, \nabla \varphi \rangle, \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Однако, последовательность $\theta_m (v^m)'$ сходится к нулю в смысле распределений на $[0, T]$ в V^3 . Действительно, для любой гладкой скалярной функции ψ и $\varphi \in V^3$ с компактным носителем получаем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \theta_m \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \Delta (v^m)' : \nabla \varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m \left| \int_0^T \int_{\Omega} \Delta (v^m)' \Delta \varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(v^m)' : \nabla \Delta \varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(v^m)' : \nabla \Delta \varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} \left(\int_0^T \nabla(v^m)' \psi(t) \, dt \right) : \nabla \Delta \varphi \, dx \right| = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} \left(\int_0^T \nabla v^m \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \, dt \right) : \nabla \Delta \varphi \, dx \right| = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \Delta \varphi \, dx \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \, dt \right|.
\end{aligned}$$

Поскольку v^m слабо сходится к v^* в $L_2(0, T; V^1)$ и, следовательно, сходится к v^* в смысле распределений, то

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \Delta \varphi \, dx \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \, dt \right| = \\
&= \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v^* : \nabla \Delta \varphi \, dx \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \, dt \right| \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\theta_m \langle \nabla \Delta(v^m)', \nabla \varphi \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Теперь покажем, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) - \\
&- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \\
&= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^*)(s, z^m(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi) dx ds + \\
& \quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \times \right. \\
& \times \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^*)(s, z^m(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi) dx ds = Z_1^m + Z_2^m.
\end{aligned}$$

1) Для начала покажем, что $Z_1^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Обозначим интеграл по Ω в Z_1^m как I :

$$I = \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) - \mathcal{E}(v^*)(s, z^m(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi) dx.$$

Произведем замену переменной $x = z^m(t; s, y)$ в I ($y = z^m(s; t, x)$ — обратная замена):

$$I = \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v^*)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy.$$

Перепишем Z_1^m и продолжим дальнейшее рассмотрение:

$$\begin{aligned}
Z_1^m &= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \times \right. \\
& \times \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v^*)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy ds = \\
& = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \times \right. \\
& \times \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v^*)(s, y)] : [\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) \mathcal{E}(\varphi)(z^*(t; s, y))] dy ds + \\
& \quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \times \right. \\
& \times \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v^*)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^*(t; s, y)) dy ds = Z_{11}^m + Z_{12}^m.
\end{aligned}$$

a) Получаем, что $Z_{12}^m \rightarrow 0$ для $m \rightarrow \infty$ из-за слабой сходимости v^m к v^* в пространстве $L_2(0, T; V^1)$.

b) Применяя неравенства Гельдера и Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}
|Z_{11}^m|^2 &\leq C_{33} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v^m(s, \cdot) - v^*(s, \cdot)\|_{V^1} \times \right. \\
& \times \|\varphi_x(z^m(t; s, \cdot)) - \varphi_x(z^*(t; s, \cdot))\|_{V^0} ds \Big)^2 \leq \\
&\leq C_{34} \|v^m(s, \cdot) - v^*(s, \cdot)\|_{L_2(0, T; V^1)} \int_0^T \|\varphi_x(z^m(t; s, \cdot)) - \varphi_x(z^*(t; s, \cdot))\|_{V^0} ds.
\end{aligned} \tag{1.1.33}$$

Обозначим второй множитель в последнем неравенстве (1.1.33) через $\Phi_m(s)$:

$$\Phi_m(s) = \int_0^T \|\varphi_x(z^m(t; s, \cdot)) - \varphi_x(z^*(t; s, \cdot))\|_{V^0} ds.$$

Покажем сходимость $\Phi_m(s) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для всех $s \in [0, T]$. Заметим, что

$$\Phi_m(s) = \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z^*(t; s, y))|^2 dy ds.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно мало. Непрерывность φ_x в $\bar{\Omega}$ означает, что существует $\delta(\varepsilon)$ такая, что если $|x'' - x'| \leq \delta(\varepsilon)$, то

$$|\varphi_x(x'') - \varphi_x(x')| \leq \varepsilon. \quad (1.1.34)$$

Так как последовательность $z^m(t; s, y)$ сходится к $z^*(t; s, y)$ по мере Лебега в (t, y) , то для $\delta(\varepsilon)$ существует число $N = N(\delta(\varepsilon))$ такое, что $m \geq N$ удовлетворяет следующему неравенству

$$m(\{(t, y) : |z^m(t; s, y) - z^*(t; s, y)| \geq \delta(\varepsilon)\}) \leq \varepsilon. \quad (1.1.35)$$

Заметим, что

$$Q(> \delta(\varepsilon)) = \{(t, y) \in Q_T : |z^m(t; s, y) - z^*(t; s, y)| > \delta(\varepsilon)\};$$

$$Q(\leq \delta(\varepsilon)) = \{(t, y) \in Q_T : |z^m(t; s, y) - z^*(t; s, y)| \leq \delta(\varepsilon)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_m(s) &\leq C_{35} \left(\int_{Q(>\delta(\varepsilon))} |\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z^*(t; s, y))|^2 dy ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q(\leq\delta(\varepsilon))} |\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z^*(t; s, y))|^2 dy ds \right) = \\ &= C_{36}(\Phi_m^1(s) + \Phi_m^2(s)). \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

Для $\Phi_m^2(s)$ в силу (1.1.35) имеем $|z^m(t; s, y) - z^*(t; s, y)| \leq \delta(\varepsilon)$. Поэтому

$$\Phi_m^2(s) \leq \int_{Q(\leq\delta(\varepsilon))} \varepsilon^2 dy ds = C_{37}\varepsilon^2. \quad (1.1.37)$$

Для $\Phi_m^1(s)$ в силу (1.1.36) имеем $m(Q(> \delta(\varepsilon))) \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\Phi_m^1(s) \leq C_{38} \|\varphi_x\|_{C(\Omega)} \int_{Q(> \delta(\varepsilon))} dy ds = C_{39} \varepsilon \|\varphi_x\|_{C(\Omega)}. \quad (1.1.38)$$

Таким образом, из (1.1.36), (1.1.37) и (1.1.38) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $m \geq N(\delta(\varepsilon))$ неравенство

$$\Phi_m(s) \leq C_{49} \varepsilon.$$

имеет место. Следовательно, сходимость $\Phi_m(s) \rightarrow 0$ получена при $m \rightarrow \infty$ для всех $s \in [0, T]$. Рассмотрим правую часть неравенства (1.1.34). В силу ограниченности первого слагаемого (поскольку $v^m \in L_2(0, T; V^1)$) и сходимости к 0 при $m \rightarrow \infty$ второго сомножителя получаем, что $Z_{11}^m \rightarrow 0$ в $m \rightarrow \infty$.

Таким образом, мы доказали, что $Z_1^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

2) Теперь покажем, что $Z_2^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Рассмотрим гладкую и конечную на $[0, T] \times \Omega$ функцию $\tilde{v}(t, x)$ такую, что $\|v^* - \tilde{v}\|_{L_2(0, T; V^1)} \leq \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Теперь оценим Z_2^m через интегралы

$$\begin{aligned} |Z_2^m| &\leq C_{41} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} \|v^*(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z^m(s; t, x))\|_{V^1} ds + \right. \\ &\quad + \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} \|\tilde{v}(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z^*(s; t, x))\|_{V^1} ds + \\ &\quad + \left. \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} \|\tilde{v}(s, z^*(s; t, x)) - v^*(s, z^*(s; t, x))\|_{V^1} ds \right) = \\ &= C_{42} (Z_{21}^m + Z_{22}^m + Z_{23}^m). \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных в нормах под интегралами Z_{21}^m и Z_{23}^m :

$$\begin{aligned} \|v^*(s, z_m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z^m(s; t, x))\|_{V^1} &= \|v^*(s, y) - \tilde{v}(s, y)\|_{V^1}; \\ \|\tilde{v}(s, z^*(s; t, x)) - v^*(s, z^*(s; t, x))\|_{V^1} &= \|\tilde{v}(s, y) - v^*(s, y)\|_{V^1}. \end{aligned}$$

Получаем

$$Z_{21}^m + Z_{23}^m = C_{43} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v^*(s, \cdot) - \tilde{v}(s, \cdot)\|_{V^1} ds \right) \leq C_{43} \varepsilon.$$

Таким же образом оценим Z_{22}^m

$$Z_{22}^m \leq C_{44} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \left(\int_{\Omega} |\tilde{v}_x(s, z^m(s; t, \cdot)) - \tilde{v}_x(s, z^*(s; t, \cdot))|^2 dx \right)^{1/2} ds \right).$$

По лемме 1.1.9 $z^m(s; t, x)$ сходится к $z(s; t, x)$ и функция $\tilde{v}_x(t, x)$ ограниченная и гладкая, поэтому по теореме Лебега получаем сходимость $Z_2^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, была доказана сходимость (1.1.34).

В результате было показано, что функция v^* для гладкой функции φ из V^1 удовлетворяет равенству:

$$\begin{aligned} & \langle (v^*)', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v^* : \nabla \varphi dx + \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

Поскольку последовательность $\{v^m\}$ имеет априорные оценки (1.1.29)–(1.1.32), тогда в силу свойств слабой сходимости для v^* непосредственно получаем следующую оценку:

$$\|v^*\|_{L_{\infty}(0,T;V^0)} + \|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v^*\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leq C_{45}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Отсюда следует, что $v^* \in W_1$. Таким образом, мы доказали предельный переход для гладкой функции φ из V^1 .

II часть. Перейдем к случаю, когда φ — произвольная пробная функция из V^1 . Запишем (1.1.39) в виде:

$$[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] = 0, \quad (1.1.40)$$

где

$$\begin{aligned} [G_1, \varphi] &= \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ &+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right); \\ [G_2, \varphi] &= \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Лемма 1.1.10. Пусть функция φ гладкая. Тогда

$$|[G_1, \varphi]| \leq C_{46} \|\varphi\|_{V^1}, \quad |[G_2, \varphi]| \leq C_{47} \|\varphi\|_{V^1}. \quad (1.1.41)$$

Поскольку множество гладких функций плотно в V^1 , для $\varphi \in V^1$ существует последовательность гладких функций $\varphi^l \in V^1$ такая, что $\|\varphi^l - \varphi\|_{V^1} \rightarrow 0$

для $l \rightarrow \infty$. Учитывая (1.1.40), получаем

$$\begin{aligned} [G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] &= [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l] + [G_1, \varphi^l] - [G_2, \varphi^l] \\ &= [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l]. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и оценок (1.1.41) получаем

$$|[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi]| \leq C_{48} |\varphi - \varphi^l|.$$

Учитывая последнее неравенство и переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ в равенстве (1.1.39) для $\varphi = \varphi^l$, получаем равенство (1.1.39) для произвольного $\varphi \in V^1$, что завершает доказательство существования по крайней мере одного слабого решения начально-краевой задачи (1.1.1)–(1.1.4).

1.2 Модель с бесконечной памятью

Пусть $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T > 0$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В данной области рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu \Delta v - \\ - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \nabla p = f(t, x); \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (1.2.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (1.2.3)$$

$$v(t, x) \big|_{(t,x) \in (-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (1.2.4)$$

Введем функциональные пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой модели:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{v : v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_2(-\infty, T; V^{-1})\}; \\ W_2 &= \{v : v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3, loc}(-\infty, T; V^{-1})\}. \end{aligned}$$

Здесь $L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})$ — пространство, состоящее из функций v , определенных почти всюду на $(-\infty, T]$ и принимающих значения в V^{-1} , сужение которых на любой отрезок $[r, T] \in (-\infty, T]$ принадлежит $L_{4/3}(r, T; V^{-1})$.

Стоит отметить, что при $n = 2$ в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_{2,loc}(\Omega)$ функции, различающиеся на множестве нулевой меры, идентифицируются, то есть считаются одним и тем же элементом пространства (см. [16]).

Пусть $W = W_1$ для $n = 2$ и $W = W_2$ для $n = 3$.

Дав все необходимые сведения, перейдем к определению слабого решения рассматриваемой краевой задачи. Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$.

Определение 1.2.1. Функция $v \in W$ называется слабым решением задачи (1.2.1)–(1.2.4), если она удовлетворяет для любой $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (-\infty, T]$ тождеству

$$\begin{aligned} & \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 1.2.1. Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда краевая задача (1.2.1)–(1.2.4), описывающая движение вязкоупругой жидкости типа Фойгта, имеет слабое решение $v \in W$.

Доказательство данной теоремы основывается на описанном выше аппроксимационно-топологическом методе.

1.2.1 Аппроксимационная задача

Рассмотрим семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ регуляризованных начально-краевых задач, зависящих от $m = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^m}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v_i^m v^m}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})} - \mu \Delta v^m - \\ & - \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \text{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) ds + \end{aligned}$$

$$+\nabla p^m = \xi f^m; \quad (1.2.6)$$

$$\operatorname{div} v^m(t, x) = 0, \quad t \in [-m, T], x \in \Omega; \quad (1.2.7)$$

$$z^m(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \tilde{v}^m(s, z^m(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [-m, T], x \in \Omega; \quad (1.2.8)$$

$$v^m(t, x) \big|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad v^m(-m, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.2.9)$$

здесь f^m является сужением f на $[-m, T] \times \Omega$.

Регуляризация поля скоростей в (1.2.8) вызвана появлением трудностей при исследовании задачи Коши (1.2.8) для $v^m \in W$. В этом случае поле скоростей, вообще говоря, не определяет единственным способом траекторию движения частицы жидкости. Одним из возможных способов решения этой сложности является регуляризация $\tilde{v}^m = S_{1/\varepsilon} v^m$ поля скоростей v^m , используя оператор регуляризации $S_{1/\varepsilon} : V^0 \rightarrow C^1(\bar{\Omega})$. Нам будет удобнее воспользоваться оператором следующего вида $S_{1/\varepsilon}$ (см. [40]). Опишем его структуру и рассмотрим его свойства.

Пусть ρ будет функцией класса C^∞ с компактным носителем в шаре радиуса 1 с центром в начале координат, такой что $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = \int_{B_1(0)} \rho(x) dx = 1$. Обозначим через ρ_δ функцию $\frac{2^n}{\delta^n} \rho(\frac{2x}{\delta})$. При $\delta \rightarrow 0$ функции ρ_δ сходятся в смысле распределений к функции Дирака и $\rho_\delta * v \rightarrow v$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$ для любой функции $v \in L_q(\mathbb{R}^n)$, где $*$ — свертка функций. В данной работе мы используем $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$. А именно, оператор $S_{1/\varepsilon} : V^0 \rightarrow V^0$ непрерывен. Также отметим, что $S_{1/\varepsilon}$ не зависит от t . Легко видеть, что отображение $S_{1/\varepsilon} : V^0 \rightarrow C^1(\bar{\Omega})$ корректно определено и непрерывно (см. [40], Section 7.7).

Рассмотрим необходимые свойства оператора регуляризации.

Лемма 1.2.1. *Для оператора регуляризации $S_{1/\varepsilon}$ справедливы следующие свойства:*

1. *Выполнены неравенства*

$$\|S_{1/\varepsilon}\|_{V^0 \rightarrow V^0} \leq C_1, \quad \|S_{1/\varepsilon}\|_{V^0 \rightarrow C^1(\bar{\Omega})} \leq C_1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.2.10)$$

2. *Выполнено неравенство*

$$\|S_{1/\varepsilon} v^m - v^m\|_{L_2(-\infty, T; L_2(\Omega))} \rightarrow 0, \quad (1.2.11)$$

при $m \rightarrow +\infty$ для любой $v^m \in V^0$.

Доказательство. Доказательство данной леммы следует из рассуждений Section 7.7 монографии [40]. $\square$

Рассмотрим функциональное пространство, в котором разрешима задача (1.2.6)–(1.2.9).

$$W(m) = \{v^m : v^m \in L_2(-m, T; V^1), v^{m'} \in L_2(-m, T; V^{-1})\}.$$

Дадим определение слабого решения семейства вспомогательных задач. Пусть $f^m \in L_2(-m, T; V^{-1})$.

Определение 1.2.2. Функция $v^m \in W(m)$ называется слабым решением начально-краевой задачи (1.2.6)–(1.2.9), если она удовлетворяет начальному условию $v^m(-m, \cdot) = 0$ и для любых $\varphi \in V^1$, и почти всех $t \in [-m, T]$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle (v^m)', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla(v^m) : \nabla(\varphi) dx + \\ + \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) ds dx = \xi \langle f^m, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Для дальнейшего исследования разрешимости введем операторы с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} J : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv^m, \varphi \rangle = \langle v^m, \varphi \rangle \quad v^m \in V^1, \quad \varphi \in V^1; \\ A : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av^m, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v^m : \nabla \varphi dx, \quad v^m \in V^1, \quad \varphi \in V^1; \\ B : V^1 &\times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow V^{-1}, \\ (B(v^m, z^m)(t), \varphi) &= \langle \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx \rangle, \\ v^m &\in V^1, z^m \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}, \varphi \in V^1; \\ K_{\varepsilon} : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K_{\varepsilon}(v^m), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v^m \in V^1, \varphi \in V^1. \end{aligned}$$

Получаем операторное уравнение:

$$J(v^m)' + \mu Av^m + \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v^m, z^m) - \xi K(v^m) = \xi f^m. \quad (1.2.13)$$

Также понадобятся следующие операторы:

$$\begin{aligned} L : W(m) &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1, \quad L(v^m) = (Jv^{m'} + \mu Av^m, v^m|_{t=-m}); \\ \mathcal{K}_\varepsilon : W(m) &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1, \quad \mathcal{K}_\varepsilon(v^m) = (K_\varepsilon(v^m), 0); \\ G : W(m) &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1, \quad G(v^m) = \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v^m, z^m), 0\right). \end{aligned}$$

Заметим, что задача нахождения слабого решения вспомогательного семейства задач эквивалентна задаче нахождения решения операторного уравнения

$$L(v^m) = \xi(\mathcal{K}_\varepsilon(v^m) - G(v^m) + (f^m, 0)).$$

Для дальнейшего исследования слабой разрешимости семейства вспомогательных задач рассмотрим и докажем свойства операторов.

1.2.2 Свойства операторов

Докажем ряд лемм.

Лемма 1.2.2. 1) Для $v^m \in L_2(-m, T; V^1)$ функция Av^m принадлежит $L_2(-m, T; V^{-1})$, оператор $A : L_2(-m, T; V^1) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является непрерывным и справедливы следующие оценки

$$\|Av^m\|_{V^{-1}} \leq \|v^m\|_{V^1}; \quad \|Av^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq \|v^m\|_{L_2(-m, T; V^1)}.$$

2) Для любой $v^m \in V^1$ оператор $(\mu A + J) : V^1 \rightarrow V^{-1}$ линеен, непрерывен и обратим, и для него справедлива оценка

$$\mu\|v^m\|_{V^1} \leq \|(\mu A + J)v^m\|_{V^{-1}} \leq C_2\|v^m\|_{V^1}.$$

Обратный оператор $(\mu A + J)^{-1} : V^{-1} \rightarrow V$ непрерывен и справедлива следующая оценка

$$\|(\mu A + J)^{-1}f^m\|_{V^1} \leq \frac{1}{\mu}\|f^m\|_{V^{-1}}.$$

3) Для любой $v^m \in L_p(-m, T; V^1)$, $1 \leq p < \infty$ функция $(\mu A + J)v^m \in L_p(-m, T; V^{-1})$ и оператор $(\mu A + J) : L_p(-m, T; V^1) \rightarrow L_p(-m, T; V^{-1})$ является непрерывным и обратимым и справедливы следующие оценки

$$\mu\|v^m\|_{L_p(-m, T; V^1)} \leq \|(\mu A + J)v^m\|_{L_p(-m, T; V^{-1})} \leq C_3\|v^m\|_{L_p(-m, T; V^1)}.$$

Обратный оператор $(\mu A + J)^{-1} : L_p(-m, T; V^{-1}) \rightarrow L_p(-m, ; V^1)$ непрерывен и для любого $\omega \in L_p(-m, T; V^1)$ имеет место оценка

$$\|(\mu A + J)^{-1}\omega\|_{L_p(-m, T; V^1)} \leq \frac{1}{\mu} \|\omega\|_{L_p(-m, T; V^{-1})}. \quad (1.2.14)$$

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемме 1.1.1. $\square$

Лемма 1.2.3. Для любых $v^m \in L_2(-m, T; V^1)$, $z^m \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$ $B(v^m, z^m) \in L_2(-m, T; V^{-1})$ и отображение $B : L_2(-m, T; V^1) \times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ непрерывно и ограничено. Более того, для любого фиксированного $z^m \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$, для любых $u, v^m \in L_2(-m, T; V^1)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|B(v^m, z^m) - B(u, z^m)\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} &\leq C_4 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{2+2k\lambda}} \times \\ &\times \|v^m - u\|_{k, L_2(-m, T; V^1)}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Доказательство. Первая часть леммы доказывается в лемме 1.1.2.

Докажем требуемую оценку (1.2.15). Пусть $\bar{v}^m(t) = e^{-kt}v^m(t)$, $\bar{u}(t) = e^{-kt}u(t)$. Для любой $\varphi \in L_2(-m, T, V^1)$ имеем

$$\begin{aligned} &\langle e^{-kt}B(v^m, z^m)(t) - e^{-kt}B(u, z^m)(t), \varphi(t) \rangle = \\ &= \int_{-m}^T \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}_{ij}(\bar{v}^m - \bar{u})(s, z^m(s; t, x)) ds \mathcal{E}_{ij}(\varphi)(t) dx dt. \end{aligned}$$

Тогда используя неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned} &\langle e^{-kt}B(v^m, z^m)(t) - e^{-kt}B(u, z^m)(t), \varphi(t) \rangle \leq \\ &\leq \int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\bar{v}^m - \bar{u})(s, z^m(s; t, x)) dx \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega} \mathcal{E}^2(\varphi)(t, x) dx \right)^{1/2} ds dt \leq \\ &\leq \int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} (t-s)^{-\alpha} \|\bar{v}^m - \bar{u}\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1} ds dt \leq \\ &\int_{-m}^T \left(\int_{-m}^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds \right)^{1/2} \left(\int_{-m}^t [(t-s)^{-\alpha} \|\bar{v} - \bar{u}\|_{V^1}]^2 ds \right)^{1/2} \|\varphi\|_{V^1} dt \leq \\ &\leq \left(\int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds \|\varphi\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-m}^T \int_{-m}^t (t-s)^{-2\alpha} \|\bar{v} - \bar{u}\|_{V^1}^2 ds dt \right)^{1/2} \\ &\leq C_4 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \|\bar{v}^m - \bar{u}\|_{L_2(-m, T; V^1)} \left(\int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)} ds dt \|\varphi\|_{V^1} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется в силу оценки

$$\left\| \int_{-m}^t (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds \right\|_{L_p(-m,T)} \leq C_4 T^{1-\alpha} \|\varphi(s)\|_{L_p(-m,T)},$$

$$\varphi(s) \in L_p(-m,T), 1 \leq p < \infty.$$

Оценим последний интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-m}^T \int_{-m}^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} ds dt &= \frac{\lambda}{2+2k\lambda} \int_{-m}^T e^{-(t-s)(1/\lambda+k)} \Big|_{-m}^t dt = \\ &= \frac{\lambda}{2+2k\lambda} \int_{-m}^T 1 - e^{-(t+m)(1/\lambda+k)} dt \leq \frac{\lambda}{2+2k\lambda} \int_{-m}^T dt = \frac{\lambda(T+m)}{2+2k\lambda}. \end{aligned}$$

в итоге имеем оценку

$$\begin{aligned} &\langle e^{-kt} B(v^m, z^m)(t) - e^{-kt} B(u, z^m)(t), \varphi(t) \rangle \\ &\leq C_4 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{2+2k\lambda}} \|\bar{v}^m - \bar{u}\|_{L_2(-m,T;V^1)} \|\varphi\|_{L_2(-m,T;V^1)}. \end{aligned}$$

Откуда следует оценка (1.2.15). $\square$

Лемма 1.2.4. *Отображение $G : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .*

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемме 1.1.3. $\square$

Лемма 1.2.5. *1) Оператор $K_\varepsilon : L_2(-m, T; V^1) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является непрерывным и для него справедлива оценка:*

$$\|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} \leq \frac{C_5}{\varepsilon}, \quad v^m \in L_2(-m, T; V^1),$$

с некоторой константой C_5 не зависящей от v^m .

2) Оператор $K_\varepsilon(v^m) : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является вполне непрерывным и для него справедлива оценка:

$$\|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_1(-m,T;V^{-1})} \leq C_6 \|v^m\|_{L_2(-m,T;V^1)}^2, \quad v^m \in L_2(-m, T; V^1), \quad (1.2.16)$$

с некоторой константой C_6 независимой от ε .

Доказательство. 1) Рассмотрим

$$\langle K_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v^m \in V^1, \varphi \in V^1.$$

Для оператора K_ε имеет место очевидная оценка

$$\|K_\varepsilon(v^m)\|_{V^{-1}} \leq \frac{n(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}.$$

Следовательно, для $v^m \in L_2(-m, T; V^1)$ имеем

$$\|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq \frac{n(\text{mes } \Omega(T+m))^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon},$$

следовательно, $K_\varepsilon \in L_2(-m, T; V^{-1})$ и оценка $\|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq \frac{C_5}{\varepsilon}$ справедлива.

Для доказательства непрерывности достаточно доказать непрерывность отображения $\psi_{ij} : (L_2(Q_T))^n \rightarrow L_2(Q_T)$, $\psi_{ij}(v^m) = \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Свойство непрерывности этого отображения следует из теоремы М. А. Красносельского о непрерывности оператора суперпозиции ([11], с. 39) и оценки $|\psi_{ij}(v^m)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ для любой $v^m \in \mathbb{R}$:

Теорема 1.2.2. Пусть непрерывная функция $\psi(s, u)$, $s \in [-m, T]$, $\text{mes } [-m, T] < \infty$, $-\infty < u < \infty$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi(s, u)| \leq \sum_{i=1}^n T_i(s) |u|^{\beta_i} + b |u|^{\beta_0},$$

где $T_i(s) \in L_{\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2 \beta_i}}$, $0 \leq p_2 \beta_i < p_1$, $\beta_0 = \frac{p_1}{p_2}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда оператор f действует из пространства L_{p_1} в пространство L_{p_2} , причем он непрерывен и ограничен.

2) Пространство $V^1 \subset (L_2(\Omega))^n$ вполне непрерывно по теореме вложения Соболева. Таким образом, $W(m) \subset (L_2(Q_T))^n$ также вполне непрерывно. Поэтому, $\psi_{ij} : W(m) \subset (L_2(Q_T))^n \rightarrow L_2(Q_T)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ вполне непрерывный оператор, как композиция вполне непрерывного оператора вложения и непрерывного оператора суперпозиции.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для $v^m \in V^1$ выполнена оценка

$$\|K_\varepsilon(v^m)\|_{V^{-1}} \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_i^m v_j^m)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_7 \|v^m\|_{V^1}^2.$$

Отсюда для $v^m \in L_2(-m, T; V^1)$ получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_1(-m, T; V^{-1})} &\leq \int_{-m}^T \|K_\varepsilon(v^m)\|_{V^{-1}} dt \\ &\leq C_6 \int_{-m}^T \|v^m(t)\|_{V^1}^2 dt = C_6 \|v^m\|_{L_2(-m, T; V^1)}^2. \end{aligned}$$

□

Лемма 1.2.6. *Оператор $L : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1$ обратимый и его обратный оператор $L^{-1} : L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1 \rightarrow W(m)$ является непрерывным.*

Доказательство. Доказательство данной леммы следует из леммы 1.1.1. □

Исследование слабой разрешимости продолжается доказательством априорных оценок.

1.2.3 Априорные оценки

Докажем априорные оценки для решений семейства вспомогательных задач.

Лемма 1.2.7. *Пусть $f^m \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда для любого решения $v^m \in W(m)$ операторного уравнения (1.2.13) имеют место оценки*

$$\|v^m\|_{L_2(-m, T; V^1)} \leq C_8 \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}; \quad (1.2.17)$$

$$\|v^m\|_{C([-m, T]; V^0)} \leq C_9 \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}, \quad (1.2.18)$$

здесь C_8, C_9 не зависят от ε и m .

Доказательство. Пусть $v^m \in W(m)$ является решением операторного уравнения (1.2.13). Тогда для любой $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (-m, T)$ имеет место равенство (1.2.12). Поскольку оно справедливо для всех $\varphi \in V^1$, возьмем $\varphi = \overline{v^m}$, где $\overline{v^m}(t) = e^{-kt} v^m$. Тогда,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} v^m \overline{v^m} dx - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{v_i^m v_j^m}{1 + \frac{|v_j^m|^2}{m}}, \frac{\partial \overline{v_j^m}}{\partial x_i} \right) dx + \mu \int_{\Omega} \nabla(v^m) : \nabla(\overline{v^m}) dx + \\ &+ \frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m})) = \xi \langle f^m, \overline{v^m} \rangle. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $v^m = e^{kt}\overline{v^m}$ и отдельно преобразуйте члены в левой части:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^{m'} \overline{v^m} dx &= \int_{\Omega} (e^{kt}\overline{v^m})' \overline{v^m} dx = e^{kt} \int_{\Omega} \overline{v^m}' \overline{v^m} dx + k e^{kt} \int_{\Omega} \overline{v^m} \overline{v^m} dx = \\ &= \frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial(\overline{v^m} \overline{v^m})}{\partial t} dx + k e^{kt} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 = \frac{e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 + k e^{kt} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i^m v_j^m}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \overline{v_j^m}}{\partial x_i} dx &= e^{kt} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\overline{v_i^m}}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \frac{\partial \overline{v_j^m}}{\partial x_i} \overline{v_j^m} dx = \\ &= -\frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\overline{v_j^m}^2}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} \overline{v_i^m} dx = -\frac{e^{kt}}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \overline{v_i^m}}{\partial x_i} \frac{\overline{v_j^m}^2}{(1 + \frac{|v_j^m|^2}{\varepsilon})} dx = 0. \end{aligned}$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое

$$e^{kt} \mu \int_{\Omega} \nabla(\overline{v^m}) : \nabla(\overline{v^m}) dx = e^{kt} \mu \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} &\frac{e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 + k e^{kt} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 + e^{kt} \mu \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2 = \\ &= -\frac{\xi \mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(\overline{v^m})(s, z^m(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m})) + \xi e^{kt} \langle f^m, \overline{v^m} \rangle. \end{aligned}$$

Оценим правую часть полученного равенства. Используя неравенством Коши $bc \leq \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$ для $\delta = 1/\mu$, получаем

$$\xi e^{kt} \langle f, \overline{v^m} \rangle \leq e^{kt} \|f\|_{V^{-1}} \|\overline{v^m}\|_{V^1} \leq \frac{e^{kt}}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2 + \frac{\mu e^{kt}}{2} \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2.$$

Умножив обе части равенства на e^{-kt} , для почти всех $t \in (-m, T)$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 + k \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 + \frac{\mu}{2} \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2 \leq \\ &\leq -\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \left(e^{-kt} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt}\overline{v^m})(s, z^m(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m})) \right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от $-m$ до τ , где $\tau \in [-m, T]$. Тогда,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 + k \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 dt + \frac{\mu}{2} \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2 dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_{V^0}^2 + \frac{1}{2\mu} \int_{-m}^{\tau} \|f\|_{V^{-1}}^2 dt + \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-m}^{\tau} |(e^{-kt} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt} \overline{v^m})(s, z^m(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\overline{v^m})))| dt. \end{aligned}$$

Используя оценку (1.2.15) для $u = 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 + k \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 dt + \frac{\mu}{2} \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2 dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_{V^0}^2 + \frac{\mu_1 C_4 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V^1)}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2. \end{aligned}$$

Возьмем k достаточно большим, чтобы $\frac{\mu_1 C_4 T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \leq \mu/4$. Оценим каждое слагаемое левой части

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \int_{-m}^{\tau} \|\overline{v^m}\|_{V^1}^2 dt & \leq \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_{V^0}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V^1)}^2, \\ \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_{V^0}^2 & \leq \frac{1}{2} \|v^m(-m)\|_{V^0}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V^1)}^2. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от τ , то в левой части берём максимум по $\tau \in [-m, T]$, а также воспользуемся тем, что $v^m(-m) = 0$ равенство (1.2.9)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V^1)}^2 & \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V^1)}^2, \\ \frac{1}{2} \|\overline{v^m}\|_{C([-m, T]; V^0)}^2 & \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + \frac{\mu}{4} \|\overline{v^m}\|_{L_2(-m, T; V^1)}^2. \end{aligned}$$

Из этого следует требуемые оценки (1.2.17)–(1.2.18) с константами $C_8 = \sqrt{\frac{2}{\mu}}$ и $C_9 = \sqrt{\frac{1}{2\mu^2}}$. $\square$

Лемма 1.2.8. Пусть $f^m \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда для любого решения $v^m \in W(m)$ операторного уравнения (1.2.13) справедливы оценки:

$$\|v^{m'}\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_{10} \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2; \quad (1.2.19)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} \leq C_{11} (\|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + 1), \quad (1.2.20)$$

где константы C_{10} , C_{11} не зависят от v^m и m .

Доказательство. Пусть $v^m \in W(m)$ является решением (1.2.13). Тогда оно удовлетворяет следующему равенству

$$Jv^{m'} + \mu Av^m + \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) - \xi K_\varepsilon(v^m) = \xi f^m.$$

Преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \|Jv^{m'}\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} &= \|\xi f^m - \mu Av^m - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + \\ &+ \xi K_\varepsilon(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}. \end{aligned}$$

Оценим правую часть при $u = 0$. В силу оценок (1.2.14), (1.2.15) и (1.2.16), получаем

$$\begin{aligned} \|\xi f^m - \mu Av^m - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + \xi K(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} &\leq \|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \\ &+ \frac{\mu_1 C_4 T^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|v^m\|_{L_2(-m, T; V^1)} + \mu\|v^m\|_{L_2(-m, T; V^1)} + C_6\|v^m\|_{L_2(-m, T; V^1)}. \end{aligned}$$

Перепишем выражение выше в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|\xi f^m - \mu Av^m - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + \xi K(v^m)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} &\leq \\ &\leq C_{12}(\|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} + \|v^m\|_{L_2(-m, T; V^1)}). \end{aligned}$$

Из априорных оценок (1.2.17) и (1.2.18) следует, что

$$\|Jv^{m'}\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_{12}\|f^m\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2.$$

Таким образом, неравенство (1.2.19) доказано.

Теперь мы докажем (1.2.20). Как и раньше, $v^m \in W(m)$ — решение операторного уравнения (1.2.13). Тогда,

$$\begin{aligned} \|v^{m'}\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} &\leq \|f^m - \mu Av^m - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v^m, z^m) + K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} \\ &\leq \|f^m\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} + \mu\|Av^m\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} + \|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} + \\ &+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v^m, z^m)\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})}\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})}. \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим слагаемое в правой части последнего неравенства. Используя неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned} \|Av^m\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} &= \left(\int_{-m}^T \|Av^m\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{V^1}^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq T^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{V^1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{4}} \|v^m\|_{L_2(-m,T;V^1)}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя неравенство Гёльдера и оценку (1.2.15) при $u = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \|B(v^m, z^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} &= \left(\int_{-m}^T \|B(v^m, z^m)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq T^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-m}^T \|B(v^m, z^m)\|_{V^{-1}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{4}} \|B(v^m, z^m)\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} \leq \\ &\leq T^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}-\alpha} C_4 \|v^m\|_{L_2(-m,T;V^1)}. \end{aligned}$$

Установим оценку на $\|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})}$. Учитывая известное неравенство при $n = 3$

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}, \quad u \in V^1,$$

и оценку (1.2.16), получим (для случая $n = 2$ доказательство аналогично):

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon(v^m)\|_{L_{4/3}(-m,T;V^{-1})} &= \left(\int_{-m}^T \|K_\varepsilon(v^m)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq C_6 \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{V^1}^{\frac{8}{3}} dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq 2C_6 \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla v^m\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq C_{13} \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{V^0}^{\frac{2}{3}} \|v^m\|_{V^1}^2 dt \right)^{\frac{3}{4}} \leq \\ &\leq C_{13} \|v^m\|_{C([-m,T];V^0)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-m}^T \|v^m\|_{V^1}^2 dt \right)^{\frac{3}{4}} = C_{13} \|v^m\|_{C([-m,T];V^0)}^{\frac{1}{2}} \|v^m\|_{L_2(-m,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Оценим правую часть. Для этого воспользуемся левой частью оценки (1.2.14) для $p = 4/3$.

$$\begin{aligned} \|v^{m'}\|_{L_{4/3}(-m,T;V^1)} &\leq C_{13} (\|f^m\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} + \|v^m\|_{L_2(-m,T;V^1)} + \\ &+ \|v\|_{C([-m,T];V^0)}^{\frac{1}{2}} \|v^m\|_{L_2(-m,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}) \leq C_{14} (\|f^m\|_{L_2(-m,T;V^{-1})} + 1)^2 \leq \\ &\leq 4C_{14} (\|f\|_{L_2(-m,T;V^{-1})}^2 + 1). \end{aligned}$$

Что доказывает (1.2.20), где $C_{11} = 4C_{14}$. □

Лемма 1.2.9. Пусть $f^m \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда для любого решения $v^m \in W(m)$ операторного уравнения (1.2.13) с начальным условием $v^m(-m, \cdot) = 0$ имеет место оценка $\|v\|_{W(m)} \leq C_{15}$, где C_{15} не зависит от m , но зависит от ε .

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично как в лемме 1.1.8. $\square$

1.2.4 Разрешимость вспомогательной задачи

Теорема 1.2.3. Возьмем $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда задача (1.2.6)–(1.2.9) имеет по крайней мере одно слабое решение $v^m \in W(m)$ при $\xi = 1$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на теории топологической степени уплотняющих векторных полей. Рассмотрим операторное уравнение

$$L(v^m) - \xi \mathcal{K}_\varepsilon(v^m) + \xi G(v^m) = \xi(f^m, 0). \quad (1.2.21)$$

Из леммы 1.2.9 следует, что решения уравнения (1.2.21) лежат в шаре $B_R \subset W(m)$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{15} + 1$. Согласно утверждению 2) леммы 1.2.6 оператор $L : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ обратим. Тогда ни одно решение

$$v^m = \xi L^{-1}(\mathcal{K}_\varepsilon(v^m) - G(v^m) + (f^m, 0))$$

не принадлежит границе шара B_R .

По лемме 1.2.6 оператор $L^{-1} : L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1 \rightarrow W(m)$ непрерывен. Согласно леммам 1.2.4 и 1.2.5, отображение $(\mathcal{K}_\varepsilon(v^m) - G(v^m) + (f^m, 0)) : W(m) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $L^{-1}(\mathcal{K}_\varepsilon(v^m) - G(v^m) + (f^m, 0)) : W(m) \rightarrow W(m)$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .

Таким образом, векторное поле $v^m - \xi(L)^{-1}(\mathcal{K}_\varepsilon(v^m) - G(v^m) + (f^m, 0))$ является невырожденным на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi((L)^{-1}(\mathcal{K}_\varepsilon - G + f^m), B_R, 0)$.

По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени, получаем, что

$$\deg(I - \xi L^{-1}(\mathcal{K}_\varepsilon - G + f^m), B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие степени отображения от нуля обеспечивает существование хотя бы одно решение $v^m \in W(m)$ уравнения (1.2.13), и следовательно, аппроксимационной задачи (1.2.6)–(1.2.9). Что и требовалось доказать. $\square$

1.2.5 Предельный переход

Далее получим решение задачи (1.2.1)–(1.2.4), делая предельный переход для продолжения полученных решений v^m задачи (1.2.6)–(1.2.9) при $m \rightarrow +\infty$. Для этого нам необходимо получить равномерные по m оценки v^m на полуоси. Сформулируем и докажем следующий факт.

Лемма 1.2.10. Пусть $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда выполнена следующая оценка для функции v^m

$$\sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^0} + \|v^m(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \leq C_{16} \|f^m\|_{L_2(-\infty, T; V^0)} \quad (1.2.22)$$

с константой C_{16} не зависящей от m .

Доказательство. Из (1.2.6) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^0}^2 + \mu \|v^m(t, \cdot)\|_{V^1}^2 \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{-m}^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s; t, x) ds, \mathcal{E}(v^m)(t, \cdot) \right) = \langle f^m(t, \cdot), v^m(t, \cdot) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $v^m = 0$ при $t \geq -m$.

Интегрируя по t на $(-\infty, T]$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \left(\int_{-m}^{\tau} e^{\frac{\tau-s}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; \tau, x)) ds, \mathcal{E}(v^m)(\tau, x) \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^0}^2 + \mu \int_{-\infty}^t \|v^m(t, \cdot)\|_{V^1}^2 ds = \int_{-\infty}^t \langle f^m(t, x), v^m(t, x) \rangle ds. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши, в правой части имеем для произвольного $\mu > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^t \langle f^m, v^m \rangle ds \right| \leq \int_{-\infty}^t \|f^m\|_{V^{-1}} \|v^m\|_{V^1} ds \leq \\ & \leq \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^t \|f^m\|_{V^{-1}}^2 ds + \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^t \|v^m\|_{V^1}^2 ds. \end{aligned}$$

Обозначим третье слагаемое через

$$K_1(t) = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \left(\int_{-m}^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s; t, x) ds, \mathcal{E}(v^m)(t, \cdot) \right) d\tau.$$

Преобразуем $K_1(t)$. Делая замену переменных $x = z^m(\tau; T, y)$, для подынтегральной функции I в $K_1(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; \tau, x)) ds, \mathcal{E}(v^m)(\tau, x)) dx = \\ &= \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; \tau, x)) ds : \mathcal{E}(v^m)(\tau, x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; T, y)) ds : \mathcal{E}(v^m)(\tau, z^m(\tau; T, y)) dy = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left\| \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; T, y)) ds \right\|_{V^0}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \left\| \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; T, y)) ds \right\|_{V^0}^2 - \\ &\quad - \alpha \left\| \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; T, y)) ds \right\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что Якобиан замены переменной $x = z^m(\tau; T, y)$ равен единице из-за соленоидальности v^m .

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \frac{\mu_1}{2\Gamma(1-\alpha)} \left\| \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; T, y)) ds \right\|_{V^0}^2 \\ &\quad + \frac{\mu_1}{\lambda\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \left\| \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; T, y)) ds \right\|_{V^0}^2 d\tau \\ &\quad - \frac{\alpha\mu_1}{\lambda\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \left\| \int_{-\infty}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-s)}{\lambda}} (\tau-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; T, y)) ds \right\|_{V^0}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая неотрицательность $K_1(t)$, неравенство Корна и оценку для правой части при достаточно малых μ , получаем требуемую оценку (1.2.22). $\square$

Оценка (1.2.22) означает, что последовательность v^m ограничена в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Это позволяет утверждать, что существует функция $v \in L_2(-\infty, T; V^1)$ такая, что v^m (с точностью до подпоследовательности) слабо сходится к v в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Кроме того, оценка (1.2.22) влечет за собой сходимость v^m к v (с точностью до подпоследовательности) п.в. на $[-k, T] \times \Omega$ для любого $k > 0$.

Лемма 1.2.11. Пусть $k > m$, $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда для функции v^m оценка

$$\left\| \frac{dv^m}{dt} \right\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} \leq C_{17}(k)(1 + \|f\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} + \|f\|_{L_1(-k, T; V^{-1})}^2)$$

справедлива с независимой от m , но зависящей от k константой $C_{17}(k)$.

Доказательство. Пусть $u(t, x) = v^m(t, x)$ будет непрерывной по t функцией со значениями в V^{-1} . Рассмотрим её на $[-k, T]$ как слабое решение следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{u_i u}{(1 + \frac{|u|^2}{\varepsilon})} - \mu \Delta u - \\ & - \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1 - \alpha)} \operatorname{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(u)(s, z^m(s; t, x)) ds + \nabla p^m = \xi f^m; \\ & \operatorname{div} u(t, x) = 0, \quad t \in [-k, T], x \in \Omega; \\ & z^m(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \tilde{u}^m(s, z^m(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [-k, T], x \in \Omega; \\ & u(t, x) |_{(t, x) \in [-k, T] \times \partial \Omega} = 0, \quad u(-k, x) = v^m(-k, x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Используя те же размышления и расчеты, что и при нахождении априорных оценок, легко получить следующую оценку:

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} \leq C(k)(1 + \|f\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} + \|f\|_{L_1(-k, T; V^{-1})}^2)$$

с зависящей от k константой $C(k)$. Утверждение леммы следует из оценки выше, равенства $u(t, x) = v^m(t, x)$ и оценки (1.2.22). $\square$

Далее будет рассмотрен ряд лемм.

Лемма 1.2.12. Последовательность $\tilde{v}^m$ сходится в $L_2(-\infty, T; V^1)$ к v .

Доказательство. Легко видеть, что $\tilde{v}^m - v = I_1(m) + I_2(m)$, где $I_1(m) = S_{1/\varepsilon}(v^m - v)$, $I_2(m) = S_{1/\varepsilon}v - v$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}^m - v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} & \leq \|\rho_{1/\varepsilon} * v^m - \rho_{1/\varepsilon} * v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} + \\ & + \|\rho_{1/\varepsilon} * v - v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для первого члена имеет место оценка:

$$\|\rho_{1/\varepsilon} * v^m - \rho_{1/\varepsilon} * v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \leq C_1 \|v^m - v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)},$$

C_1 не зависит от $1/\varepsilon$.

Здесь использовалась оценка (1.2.10) леммы 1.2.1. Второй же член стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ в силу оценки (1.2.11) леммы 1.2.1. $\square$

Рассмотрим задачу Коши (1.2.8) для предельной функции v . Поскольку $v \in W$, то v удовлетворяет условиям Теоремы 1.1.1 на любом конечном интервале $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$. Тогда из теоремы 1.1.1 следует существование РЛП $z(\tau; t, x)$, $-\infty < \tau, t \leq T, x \in \bar{\Omega}$, порожденного v .

Лемма 1.2.13. *Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится к $z(\tau; t, x)$ по мере $[-k, T] \times \Omega$ для $t \in [-k, T]$ и для любого $k \geq 0$.*

Доказательство. Используя вторую оценку (1.2.10) и оценки теоремы 1.1.2, имеем следующее неравенство:

$$\|v_x^m\|_{L_1(\Omega)} \leq C_{18} \|v_x^m\|_{V^0} \leq C_{18} \|S_{1/\varepsilon} v^m(t, \cdot)\|_{V^1} \leq C_{18} \|v(t, \cdot)\|_{V^1}.$$

Следовательно, из оценки (1.2.22) следует равномерная по m оценка нормы $\|v^m\|_{L_2(-\infty, T; V^1)}$ и, более того, норм $\|v_x^m\|_{L_1(-k, T; L_1(\Omega))}$, $\|v^m\|_{L_1(-k, T; L_1(\Omega))}$. Используя теперь теорему 1.1.2, получаем утверждение леммы 1.2.13. $\square$

Лемма 1.2.13 подразумевает, что последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится (с точностью до подпоследовательности) к $z(\tau; t, x)$ почти всюду на $Q(k, T) = [-k, T] \times \Omega$ как функция переменных $(\tau, x) \in Q(k, T)$ для любого $-k \in (-\infty, T)$ для $t \in [-k, T]$.

Лемма 1.2.14. *Предельная функция $v^m(t, x)$ удовлетворяет следующему тождеству*

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^T (v^m(t, x), \varphi) \psi'(t) dt - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^T \left(\frac{v_i^m(t, x) v^m(t, x)}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt + \\ & + \mu \int_{-\infty}^T (\nabla v^m(t, x), \nabla \varphi(x)) \psi(t) dt + \\ & + \frac{\mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{-\infty}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(x)) ds \right) \psi(t) dt \\ & = \int_{-\infty}^T \langle f^m(t, x), \varphi(x) \rangle \psi(t) dt \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

для любой $\varphi \in V^1$ и $\psi \in C_0^\infty(-\infty, T)$.

Доказательство. Пусть сначала $\varphi \in V^1$ является гладкой. Пусть $\text{supp } \psi \subset [k, T]$, где $k > 0$. Введем обозначения для слагаемых в левой части (1.2.23):

$$J_1^m = \int_{-\infty}^T (v^m(t, x), \varphi) \psi'(t) dt; \quad J_2^m = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^T \left(\frac{v_i^m(t, x) v^m(t, x)}{(1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon})}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \psi(t) dt;$$

$$J_3^m = \mu \int_{-\infty}^T (\nabla v^m(t, x), \nabla \varphi(x)) \psi(t) dt;$$

$$J_4^m = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(x)) ds \right) \times \\ \times \psi(t) dt.$$

Соответствующие слагаемые в левой части обозначим J_i , $i = \overline{1, 4}$.

Из слабой сходимости v^m к v в $L_2(-\infty, T; V^1)$ следует что J_i^m сходятся к J_i , $i = 1, 3$. Легко видеть, что последовательность f^m сходится к f в $L_2(-\infty, T; V^0)$, сильно в $L_2(Q)^n$, п.в. на $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, а последовательность $\frac{dv^m}{dt}$ ограничена по норме пространства $L_1(-k, T; V^{-1})$ и сходится к $\frac{dv}{dt}$ в смысле распределений на $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$. Последовательность $\frac{v_i^m(t, x) v^m(t, x)}{1 + \frac{|v^m|^2}{\varepsilon}}$ слабо сходится к $v_i(t, x) v(t, x)$ в $L_2([t_1, t_2] \times \Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ на конечном интервале $[t_1, t_2]$. Поскольку интегрирование в J_2^m и J_2 проводится на конечном интервал $\text{supp } \psi \subset [k, T]$, то J_2^m сходится к J_2 при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь J_4^m . Очевидно,

$$J_4^m = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) : \mathcal{E}(\varphi)(x)) dx ds \right) \\ \times \psi(t) dt.$$

Покажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} J_4^m = J_4$, где

$$J_4 = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) : \mathcal{E}(\varphi)(x)) dx ds \right) \\ \times \psi(t) dt.$$

Покажем, что J_4^m сходится к J_4 . Легко видеть, что $J_4^m - J_4 = Z_1^m + Z_2^m$, где

$$\begin{aligned} Z_1^m &= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}(v)(s, z^m(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi)(x) dx ds \right) \psi(t) dt, \\ Z_2^m &= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v)(s, z^m(s; t, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))] : \mathcal{E}(\varphi)(x) dx ds \right) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} Z_1^m = 0$.

Обозначим интеграл по Ω в Z_1 через

$$I = \int_{\Omega} [(\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s; t, x)) - \mathcal{E}(v)(s, z^m(s; t, x))) : \mathcal{E}(\varphi)(x)] dx.$$

В приведенном выше интеграле I сделаем замену переменной $x = z^m(t; s, y)$. Тогда $I = \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy$. Воспользовавшись этим соотношением и изменив порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} Z_1^m &= \int_{-k}^T \left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-k} \left(\int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt + \\ &\quad + \int_{-k}^T \left(\int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt = Z_{11}^m + Z_{12}^m. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} Z_{12}^m &= \int_{-k}^T \left(\int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \right. \\ &\quad \left. : [\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y))] dy ds \right) \psi(t) dt + \\ &\quad + \int_{-k}^T \left(\int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \right. \\ &\quad \left. : \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y)) dy ds \right) \psi(t) dt = Z_{121}^m + Z_{122}^m. \end{aligned}$$

Из слабой сходимости v^m к v в $L_2(-\infty, T; V^1)$ получаем, что $Z_{122}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Используя ограниченность функций ψ и $e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}$ и применив неравенства Коши–Буняковского и Гёльдера, получаем, что

$$\begin{aligned}
|Z_{121}^m|^2 &\leq M \left(\int_{-k}^T \int_s^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha} \times \right. \\
&\quad \times \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_{V^1} \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_{V^0} \psi(t) dt ds \Big)^2 \leq \\
&\leq M \left(\int_{-k}^T \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_{V^1} \int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_{V^0} dt ds \right)^2 \\
&\leq M \int_{-k}^T \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_{V^1}^2 ds \times \\
&\quad \times \int_{-k}^T \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_{V^0} dt \right)^2 ds \leq \\
&\leq M \|v^m(s, y) - v(s, y)\|_{L_2(-k, T; V^1)}^2 \int_{-k}^T \times \\
&\quad \times \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_{V^0} dt \right)^2 ds. \tag{1.2.24}
\end{aligned}$$

Покажем, что $Z_{121}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Обозначим последний множитель в (1.2.24) как

$$\Psi(s) = \int_{-k}^T \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_{V^0} dt \right)^2 ds.$$

Перепишем его в виде

$$\Psi(s) = \int_{-k}^T g_m(s) ds, \quad g_m(s) = \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_{V^0} dt \right)^2.$$

Установим сходимость $g_m(s) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ для всех $s \in [-k, T]$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
g_m(s) &= \left(\int_s^T \|\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))\|_{V^0} dt \right)^2 = \\
&= \int_{-k}^T \left(\int_s^T \int_{\Omega} |\varphi_x(z^m(t; s, y)) - \varphi_x(z(t; s, y))| dy dt \right)^2 ds. \tag{1.2.25}
\end{aligned}$$

Пусть $\theta > 0$. Поскольку функция φ_x непрерывна на $\overline{\Omega}$ существует $\delta_1(\theta) > 0$, что если $|x'' - x'| \leq \delta_1(\theta)$, тогда

$$|\varphi_x(x'') - \varphi_x(x')| \leq \theta. \quad (1.2.26)$$

Поскольку последовательность $z^m(t; s, y)$ сходится к $z(t; s, y)$ по мере (t, y) на $[s, T] \times \Omega$ для $s \in [-k, T]$, тогда для $\delta_1(\theta)$ можно указать $N = N(\delta_1(\theta))$ такой, что для $m \geq N$ выполнено неравенство

$$m(\{(t, y) : |z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| \geq \delta_1(\theta)\}) \leq \theta. \quad (1.2.27)$$

Пусть

$$\begin{aligned} Q(> \delta_1(\theta)) &= \{(t, y) \in Q : |z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| > \delta_1(\theta)\}; \\ Q(\leq \delta_1(\theta)) &= \{(t, y) \in Q : |z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| \leq \delta_1(\theta)\}. \end{aligned}$$

Тогда, из (1.2.25) следует, что

$$\begin{aligned} g_m(s) &\leq M_1 \left(\int_{Q(>\delta_1(\theta))} |\varphi_x(z(t; s, y)) - \varphi_x(z^m(t; s, y))|^2 dy dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q(\leq \delta_1(\theta))} |\varphi_x(z(t; s, y)) - \varphi_x(z^m(t; s, y))|^2 dy dt \right) = C_{19}(G_1 + G_2). \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Из G_2 , в силу (1.2.26), имеем $|z(t; s, y) - z^m(t; s, y)| \leq \delta_1(\theta)$, и, следовательно,

$$G_2 \leq \int_{Q(\leq \delta_1(\theta))} \theta^2 dy dt \leq C_{20} \theta^2. \quad (1.2.29)$$

Поскольку $m(Q(> \delta_1(\theta))) \leq \theta$, в силу (1.2.27), получаем

$$G_1 \leq 2 \|\varphi_x\|_{C(\Omega)} \int_{Q(>\delta_1(\theta))} dy dt \leq 2 \|\varphi_x\|_{C(\Omega)} \theta. \quad (1.2.30)$$

Оценки (1.2.28)–(1.2.30) подразумевают для $m \geq N(\delta_1(\theta))$ неравенство $g_m(s) \leq C_{21}^{1/2}$.

Сходимость $g_m(s) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ для всех $s \in [-k, T]$ установлена. Кроме того, $g_m(s)$ ограничена из-за гладкости $\varphi_x(s)$. Следовательно, $\Psi_m \rightarrow 0$.

Первый член справа в (1.2.24) ограничен по m ввиду равномерной ограниченности $\|v^m\|_{L_2(-k, T; V^1)}$ и второй стремится к нулю ($\Psi_m \rightarrow 0$). Таким образом, из (1.2.24) и (1.2.25) следует, что $Z_{121}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Сходимость $Z_{122}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ следует из слабой сходимости $v^m \rightarrow v$ в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Из $Z_{121}^m \rightarrow 0$ и $Z_{122}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$ вытекает сходимость $Z_{12}^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим Z_{11}^m . Легко видеть, что для произвольного $-\infty < R < -k$

$$\begin{aligned} Z_{11}^m &= \int_{-\infty}^R \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \\ &\quad : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy \psi(t) dt ds \\ &+ \int_R^T \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \\ &\quad : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy \psi(t) dt ds = Z_{111}^m + Z_{112}^m. \end{aligned}$$

Рассмотрим Z_{111} . Для Z_{111}^m из-за ограниченности φ_x и ψ , получаем

$$\begin{aligned} Z_{111} &= \int_{-\infty}^R \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \\ &\quad : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy \psi(t) dt ds = \\ &= \int_{-\infty}^R \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) + \\ &\quad + \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y)) dy \psi(t) dt ds = \\ &= \int_{-\infty}^R \int_{-k}^T e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} [(\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)) : \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y)) + \\ &\quad + ((\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y))) : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy \psi(t) dt ds = \\ &= \int_{-k}^T e^{\frac{-t}{\lambda}} \psi(t) dt \int_{-\infty}^R e^{\frac{s}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} ds \int_{\Omega} [(\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)) : \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y)) \\ &\quad + ((\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y))) : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy = \\ &= \int_{-k}^T e^{\frac{-t}{\lambda}} \psi(t) dt G_3 \int_{\Omega} [(\mathcal{E}(v^m)(s, y) - \mathcal{E}(v)(s, y)) : \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y)) + \\ &\quad + ((\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z(t; s, y))) : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t; s, y)) dy \rightarrow 0. \quad (1.2.31) \end{aligned}$$

Вычислим G_3 отдельно: $G_3 = \int_{-\infty}^R e^{\frac{s}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} ds$.

Сделаем замену переменных $u = (t-s)^{\alpha+1}$; $du = -(\alpha+1)(t-s)^{\alpha} ds$; $s = -\infty, u = +\infty$; $s = R, u = (t-R)^{\alpha+1}$. Получим

$$G_3 = -\frac{e^{\frac{t}{\lambda}}}{\alpha+1} \int_{(t-R)^{\alpha+1}}^{+\infty} e^{-\frac{u}{\lambda}} du.$$

Сделаем следующую замену переменных: $w = \lambda^{-\alpha-1}u$; $dw = \lambda^{\alpha+1}du$; $u = +\infty, w = +\infty$; $u = (t - R)^{\alpha+1}, w = \lambda^{-\alpha-1}(t - R)^{\alpha+1}$. Получим

$$G_3 = e^{\frac{t}{\lambda}} \lambda^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1, w^{\frac{1}{\alpha+1}}).$$

В силу ограниченности первого члена в (1.2.31), слабой сходимости v^m к v , сходимости z^m к z получаем, что $|Z_{111}^m|$ стремится к нулю. Стремление $|Z_{112}^m|$ к нулю при $m \rightarrow +\infty$ устанавливается аналогично случаю $|Z_{12}^m|$.

Таким образом, было установлено, что при $m \rightarrow +\infty$

$$|Z_1^m| \rightarrow 0. \quad (1.2.32)$$

Покажем, что при $m \rightarrow +\infty$

$$|Z_2^m| \rightarrow 0. \quad (1.2.33)$$

Оценим $|Z_2^m|$. Аппроксимируем $v(t, x)$ гладкой конечной функцией $\tilde{v}$ на $(-\infty, T] \times \Omega$ так, что

$$\|v - \tilde{v}\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \leq \theta_2$$

и $\tilde{v} \equiv 0$ при $t < k_1$, где $k_1 < T$, $\theta_2 > 0$ является произвольным малым числом.

Тогда $|Z_2^m| \leq M(Z_{21}^m + Z_{22}^m + Z_{23}^m)$, где

$$\begin{aligned} Z_{21}^m &= \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z^m(s; t, x))\|_{V^1} ds dt; \\ Z_{22}^m &= \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|\tilde{v}(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z(s; t, x))\|_{V^1} ds dt; \\ Z_{23}^m &= \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|\tilde{v}(s, z(s; t, x)) - v(s, z(s; t, x))\|_{V^1} ds dt. \end{aligned}$$

Делаем замену переменной $x = z^m(t; s, y)$, $y = z^m(s; t, x)$ в интеграле Z_{21}^m , получим

$$\|v(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}(s, z^m(s; t, x))\|_{V^1} = \|v(s, y) - \tilde{v}(s, y)\|_{V^1}. \quad (1.2.34)$$

Аналогично для Z_{23}^m , используя замену $y = z(s; t, x)$, получаем

$$\|\tilde{v}(s, z(s; t, x)) - v(s, z(s; t, x))\|_{V^1} = \|\tilde{v}(s, y) - v(s, y)\|_{V^1}. \quad (1.2.35)$$

Из неравенств (1.2.34) и (1.2.35) следует, что

$$Z_{21}^m + Z_{23}^m \leq C_{22} \int_{-k}^T \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v(s, y) - \tilde{v}(s, y)\|_{V^1} ds dt \leq C_{22} \theta_2$$

Далее, поскольку $\tilde{v}$ конечна, следует, что

$$Z_{22}^m \leq C_{23} \int_{-k}^T \left(\int_{k_1}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int_{\Omega} \|\tilde{v}_x(s, z^m(s; t, x)) - \tilde{v}_x(s, z(s; t, x))\|_{V^1} dx ds \right) dt.$$

Поскольку $z^m(s; t, x)$ сходится почти всюду к $z(s; t, x)$ равномерно по t , и функция $\tilde{v}_x(t, x)$ гладкая и ограниченная, тогда по теореме Лебега при $m \rightarrow +\infty$ получаем (1.2.33). Из (1.2.34) и (1.2.9) следует, что $J_4^m \rightarrow J_4$. Таким образом, в каждом члене (1.2.23) мы можем перейти к пределу, что дает тождество (1.2.23) для любого гладкого φ .

Установим тождество (1.2.23) для любого $\varphi \in V^1$ и $\psi \in C_0^\infty(-\infty, T)$. Мы напишем (1.2.23) для гладкого φ как

$$[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] = 0, \quad (1.2.36)$$

где

$$\begin{aligned} [G_1, \varphi] &= \int_{-\infty}^T (v, \varphi) \psi'(t) dt - \int_{-\infty}^T \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \psi(t) dt + \mu \int_{-\infty}^T (\nabla v : \nabla \varphi) \psi(t) dt \\ &\quad + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^T \left(\int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) \psi(t) dt; \\ [G_2, \varphi] &= \int_{-\infty}^T (f, \varphi) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Лемма 1.2.15. Пусть функция φ гладкая. Тогда

$$|[G_1, \varphi]| \leq C_{24} \|\varphi\|_{V^1}, \quad |[G_2, \varphi]| \leq C_{25} \|\varphi\|_{V^1}. \quad (1.2.37)$$

Поскольку множество гладких функций плотно в V^1 , для $\varphi \in V^1$ существует последовательность гладких функций $\varphi^l \in V^1$ такая, что $\|\varphi^l - \varphi\|_{V^1} \rightarrow 0$ для $l \rightarrow \infty$. Из (1.2.36) получаем

$$\begin{aligned} [G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] &= [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l] + [G_1, \varphi^l] - [G_2, \varphi^l] \\ &= [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l]. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и оценок (1.2.37) получаем $||[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi]| \leq C_{25} \|\varphi - \varphi^l\|_{V^1}$. Учитывая последнее неравенство и переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ для $\varphi = \varphi^l$, получаем равенство (1.2.23) для произвольного $\varphi \in V^1$. $\square$

Таким образом, мы доказали существование хотя бы одного слабого решения задачи (1.2.1)–(1.2.4), описывающей движение вязкоупругой жидкости.

ГЛАВА 2

Математическая модель типа Фойгта с нелинейной вязкостью

2.1 Постановка задачи

В ограниченной области $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$ и $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается следующая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \text{Div} [2\mu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - \\ - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \text{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \nabla p = f(t, x); \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\text{div } v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (2.1.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (2.1.3)$$

$$v(t, x) \big|_{(t,x) \in (-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (2.1.4)$$

Здесь функция I_2 определяется следующим образом: $I_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v)$.

Функция μ удовлетворяет следующим естественным ограничениям:

1. $0 < C_1 \leq \mu(s) \leq C_2 < \infty$;
2. $-s\mu'(s) \leq \mu(s)$, для $\mu'(s) \leq 0$;
3. $|s\mu'(s)| \leq C_3 < \infty$.

Введем функциональное пространство

$$W_1 = \{v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(-\infty, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})}$, которое необходимо для определения слабого решения.

Дадим определение слабого решения задачи (2.1.1)–(2.1.4). Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$.

Определение 2.1.1. Функция $v \in W_1$ называется слабым решением краевой задачи (2.1.1)–(2.1.4), если она удовлетворяет при всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (-\infty, T]$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + 2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \\ = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 2.1.1. Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда задача (2.1.1)–(2.1.4) имеет слабое решение $v \in W_1$.

Для доказательства данной теоремы используется описанный выше аппроксимационно-топологический метод.

2.2 Аппроксимационная задача

Рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач ($0 \leq \xi \leq 1$) с малым параметром $\theta > 0$, где $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \xi \operatorname{Div} [2\mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v)] - \\ - \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds - \\ - \theta \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} + \nabla p = \xi f; \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [-m, T], \quad x \in \Omega; \quad (2.2.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^{\tau} v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [-m, T], \quad x \in \Omega; \quad (2.2.3)$$

$$v(-m, x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2.2.4)$$

$$v(t, x) \big|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad \Delta v(t, x) \big|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (2.2.5)$$

Разрешимость данного семейства будет доказана в пространстве $W_2 = \{v \in L_2(-m, T; V^3), v' \in L_2(-m, T; V^3)\}$.

Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$.

Определение 2.2.1. Функция $v \in W_2$ называется слабым решением (2.2.1)–(2.2.5), если она удовлетворяет начальному условию $v(-m, \cdot) = 0$ и для любой $\varphi \in V^1$, и почти всех $t \in (-m, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + 2\xi \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \\ = \xi \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Перейдем к операторной трактовке задачи (2.2.1)–(2.2.5). Для этого введем следующие операторы:

$$\begin{aligned} J : V^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\ A : V^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle &= - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\ B : V^1 \times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} &\rightarrow V^{-1}, \\ (B(v, z), \varphi) &= \left(\int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right), \\ v \in V^1, \quad z \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (-m, T); \\ K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1; \\ D : V^1 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle D(v), \varphi \rangle &= 2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1. \end{aligned}$$

С помощью введенных выше операторов получаем следующее уравнение

$$Jv' - \theta Av' + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) - \xi K(v) + \xi D(v) = \xi f. \quad (2.2.7)$$

Решение операторного уравнения (2.2.7) должно удовлетворять начальному условию $v(-m, \cdot) = 0$.

Также введем следующие операторы, используя равенства:

$$\begin{aligned} L : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) &= ((J + \theta A)v', v|_{t=-m}); \\ C : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) &= (K(v), 0); \\ G : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) &= \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0 \right); \\ F : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad F(v) &= (D(v), 0). \end{aligned}$$

Таким образом, задача нахождения слабого решения вспомогательного семейства задач (2.2.1)–(2.2.5) эквивалентна нахождению решения операторного уравнения:

$$L(v) = \xi(C(v) - G(v) - F(v) + (f, v_0)).$$

Для дальнейшего доказательства разрешимости аппроксимационной задачи рассмотрим и докажем свойства операторов.

2.3 Свойства операторов

Перейдем к доказательству ряда лемм.

Лемма 2.3.1. 1) Оператор $A : V^3 \rightarrow V^1$ является линейным, непрерывным, обратимым, и для него имеет место оценка:

$$\|Av\|_{V^{-1}} \leq \|v\|_{V^3}.$$

Обратный оператор $A^{-1} : V^{-1} \rightarrow V^3$ является непрерывным.

2) Оператор $(J + \theta A) : L_p(-m, T; V^3) \rightarrow L_p(-m, T; V^{-1})$ является непрерывным и обратимым и для него справедливы оценки

$$\theta \|v\|_{L_p(-m, T; V^3)} \leq \|(J + \theta A)v\|_{L_p(-m, T; V^{-1})} \leq C_4(1 + \theta) \|v\|_{L_p(-m, T; V^3)}.$$

Обратный оператор $(J + \theta A)^{-1} : L_p(-m, T; V^{-1}) \rightarrow L_p(-m, T; V^3)$ является непрерывным и для него справедлива оценка:

$$\|(J + \theta A)^{-1}w\|_{L_p(-m, T; V^3)} \leq \frac{1}{\theta} \|w\|_{L_p(-m, T; V^{-1})}.$$

3) Оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3$ является обратимым и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным.

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.1.1. □

Лемма 2.3.2. Оператор $K : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является вполне непрерывным и для него справедлива оценка:

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leq C_5 \|v\|_{L_4(\Omega)}^2.$$

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемме 1.1.4. $\square$

Перейдем к следующим свойствам.

Лемма 2.3.3. *Отображение $D : L_2(-m, T; V^1) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ непрерывно и для него справедлива оценка*

$$\|D(v) - D(u)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_6 \|v - u\|_{L_2(-m, T; V^1)}. \quad (2.3.1)$$

Доказательство. Докажем непрерывность оператора D . Используя теорему Лагранжа, берем $y = v - u$, для функции $f(\delta) = \mu(I_2(u + \delta y))\mathcal{E}(u + \delta y) : \mathcal{E}(\varphi)$ на интервале $[0, 1]$ (данный интервал используется лишь для удобства вычисления) получим:

$$\begin{aligned} \langle D(v) - D(u), \varphi \rangle &= 2 \int_{\Omega} [\mu(I_2(v))\mathcal{E}(v) - \mu(I_2(u))\mathcal{E}(u)] : \mathcal{E}(\varphi) dx = \\ &= 2 \int_{\Omega} \frac{d}{d\delta_0} [\mu(I_2(u + \delta_0 y))\mathcal{E}(u + \delta_0 y)] : \mathcal{E}(\varphi) dx = \\ &= 2 \int_{\Omega} [\mu(I_2(u + \delta_0 y))\mathcal{E}(y) + \frac{d}{d\delta_0} \mu(I_2(u + \delta_0 y))\mathcal{E}(u + \delta_0 y)] : \mathcal{E}(\varphi) dx = \\ &= 2 \int_{\Omega} [\mu(I_2(u + \delta_0 y))\mathcal{E}(y) : \mathcal{E}(\varphi) + \mathcal{E}(u + \delta_0 y) : \mathcal{E}(\varphi) \times \\ &\quad \times \frac{d\mu(I_2(u + \delta_0 y))}{dI_2(u + \delta_0 y)} \frac{\mathcal{E}(u + \delta_0 y) : \mathcal{E}(y)}{(\mathcal{E}(u + \delta_0 y) : \mathcal{E}(u + \delta_0 y))^{\frac{1}{2}}}] dx = \\ &= 2 \int_{\Omega} [\mu(I_2(u + \delta_0 y))\mathcal{E}(y) : \mathcal{E}(\varphi) + \frac{1}{I_2(u + \delta_0 y)} \frac{d\mu(I_2(u + \delta_0 y))}{dI_2(u + \delta_0 y)} \times \\ &\quad \times (\mathcal{E}(u + \delta_0 y) : \mathcal{E}(y))(\mathcal{E}(u + \delta_0 y) : \mathcal{E}(\varphi))] dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\langle D(v) - D(u), \varphi \rangle| &\leq 2 \left| \int_{\Omega} \mu(I_2(u + \delta_0 y))\mathcal{E}(y) : \mathcal{E}(\varphi) dx \right| + \\ &+ 2 \left| \int_{\Omega} I_2(u + \delta_0 y) \frac{d\mu(I_2(u + \delta_0 y))}{dI_2(u + \delta_0 y)} I_2(y) I_2(\varphi) dx \right| \leq \\ &\leq 2C_7 \left(\int_{\Omega} I_2^2(y) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} I_2^2(\varphi) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2C_8 \left(\int_{\Omega} I_2^2(y) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} I_2^2(\varphi) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_9 \|y\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|D(v) - D(u)\|_{V^{-1}} \leq C_6 \|v - u\|_{V^1}$. Таким образом, оператор $D : V^1 \rightarrow V^{-1}$ непрерывен. Для получения требуемой оценки возведем последнее

неравенство в степень 2 и проинтегрируем по t от $-m$ до T , получим

$$\int_{-m}^T \|D(v) - D(u)\|_{V^{-1}}^2 dx \leq C_6 \int_{-m}^T \|v - u\|_{V^1}^2.$$

Из последнего неравенства получаем требуемую оценку (2.3.1). $\square$

Лемма 2.3.4. *Отображение $B : L_2(-m, T; V^1) \times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является непрерывным и ограниченным, и для него выполняется оценка:*

$$\begin{aligned} \|B(v, z) - B(u, z)\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} &\leq C_{10} T^{\frac{1}{2}-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{2+2k\lambda}} \times \\ &\times \|v - u\|_{k, L_2(-m, T; V^1)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.2.3. $\square$

Лемма 2.3.5. *Оператор $G : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^1$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .*

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемме 1.1.3. $\square$

2.4 Априорные оценки

Изучив свойства операторов, перейдем к доказательству априорных оценок.

Лемма 2.4.1. *Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Решение операторного уравнения (2.2.7) удовлетворяет следующим оценкам:*

$$\|v\|_{L_2(-m, T; V^1)} \leq C_{11} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}; \quad (2.4.1)$$

$$\|v\|_{C([-m, T]; V^0)} \leq C_{12} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}; \quad (2.4.2)$$

$$\theta \|v'\|_{L_2(-m, T; V^3)} \leq C_{13} \|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2; \quad (2.4.3)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} \leq C_{14} (\|f\|_{L_2(-m, T; V^{-1})}^2 + 1); \quad (2.4.4)$$

где константы C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{14} не зависят от v , ξ и m .

Доказательство. Доказательство данной леммы осуществляется аналогично как в леммах 1.2.7 и 1.2.8. Стоит обратить внимание на оценивание члена с нелинейной вязкостью, а, именно,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\bar{v}) dx &= e^{kt} 2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(v) dx \leq \\ &\leq 2e^{kt} C_6 C_{15} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(v) dx \leq C_{16} \|v\|_{V^1}^2, \end{aligned}$$

данное неравенство выполнено для любого $\varphi \in V^1$, мы взяли $\varphi = \bar{v}$, где $\bar{v}(t) = e^{-kt}v$. Также, при доказательстве оценок 2.4.3–2.4.4 использовалась оценка оператора (2.3.1). $\square$

Лемма 2.4.2. Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Если $v \in W_2$ является решением (2.2.7) для некоторой $\xi \in [0, 1]$, тогда следующая оценка имеет место:

$$\|v\|_{W_2} \leq C_{17}.$$

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемме 1.1.8. Однако, стоит обратить внимание на член с нелинейной вязкостью, а, именно, при доказательстве данной оценки использовалось следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \langle D(v)(t), v(t) \rangle dt \right| &= \left| \int_0^\tau \int_{\Omega} \mu(I_2(v(t))) \mathcal{E}(v(t)) \mathcal{E}(v(t)) dx dt \right| \leq \\ &\leq C_6 \int_0^\tau \|v\|_{V^1}^2 dt. \end{aligned}$$

$\square$

Сформулируем и докажем теорему о существовании хотя бы одного слабого решения вспомогательной задачи.

Теорема 2.4.1. Пусть $f \in L_2(-m, T; V^{-1})$. Тогда существует по крайней мере одно слабое решение $v \in W_2$ задачи (2.2.1)–(2.2.5) для $\xi = 1$.

Доказательство. Данная теорема доказывается аналогично теоремам 1.1.5 и 1.2.3. $\square$

2.5 Пределный переход

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (2.1.1)–(2.1.4). Для этого осуществим предельный переход в (2.2.1)–(2.2.5) для $\xi = 1$. Слабая разрешимость задачи (2.1.1)–(2.1.4) устанавливается аналогично разделу 1.2.5 первой главы. Мы получаем аналогичные оценки

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^0} + \sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^2} + \|v^m(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \leq \\ \leq C_{18} \|f^m\|_{L_2(-\infty, T; V^0)}; \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$$\left\| \frac{dv^m}{dt} \right\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} \leq C_{19}(k) (1 + \|f^m\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} + \|f^m\|_{L_1(-k, T; V^{-1})}^2) \quad (2.5.2)$$

с константами C_{18}, C_{19} не зависящими от m . Однако, при доказательстве оценки (2.5.1) стоит обратить внимание на оценку члена с вязкостью:

$$|2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v^m)) \mathcal{E}(v^m) \mathcal{E}(v^m) dx| \leq C_6 \|v\|_{V^1}^2,$$

а также, из раздела 1.1.5 первой главы известно, что

$$\theta_m \langle \nabla \Delta(v^m)', \nabla \varphi \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

Здесь v^m — последовательность, сходящаяся к искомой функции скорости v^* . Существование этой последовательности следует из того, что пространство V^3 плотно в V^0 .

Оценки (2.5.1)–(2.5.2) подразумевают, что последовательность v^m ограничена в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Это позволяет утверждать, что существует функция $v^* \in L_2(-\infty, T; V^1)$ такая, что v^m (с точностью до подпоследовательности) слабо сходится к v^* в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Кроме того, v^m сходится к v^* (с точностью до подпоследовательности) почти всюду на $[-k, T] \times \Omega$ для любого $k > 0$. Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится (с точностью до подпоследовательности) к $z^*(\tau; t, x)$ почти всюду на $[-k, T] \times \Omega$ как функция переменных $(\tau, x) \in [-k, T] \times \Omega$ для любой $k \in (-\infty, T)$ для $t \in [-k, T]$. Последовательность f^m сходится к f в $L_2(-\infty, T; V^0)$, сильно в $L_2(Q)^n$, почти всюду на $Q = (-\infty, T] \times \Omega$ и последовательность $\frac{dv^m}{dt}$ ограничена по норме пространства $L_1(-k, T; V^{-1})$ и сходится к $\frac{dv}{dt}$ в смысле распределений на $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$.

Из полученных выше оценок, сходимостей и рассуждений раздела 1.2.5 первой главы вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых интегрального равенства (2.1.5), следовательно, получаем, что найденная функция v^* является слабым решением задачи (2.1.1)–(2.1.4).

ГЛАВА 3

Задача существования управления с обратной связью

3.1 Задача управления для вязкоупругой модели типа Фойгта с постоянной вязкостью

В ограниченной области $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu \Delta v - \\ - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \nabla p = f(t, x); \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (3.1.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (3.1.3)$$

$$v(t, x)|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad v(0) = v_0, \quad x \in \Omega. \quad (3.1.4)$$

По доказанному выше разрешимость данной начально-краевой задачи изучалось в пространстве

$$W_1 = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0, T; V^{-1})}$.

Перейдем к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Введем многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap L_2(0, T; V^{-1})$. Для дальнейшего изучения многозначное отображение Ψ должно удовлетворять следующим условиям:

- (Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;
- (Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху (то есть, для каждого $v \in W_1$ и открытого множества $E \subset L_2(0, T; V^{-1})$ такого, что $\Psi(v) \subset E$ существует окрестность $Y(v)$ такая, что $\Psi(Y(v)) \subset E$) и компактно (то есть, образ Ψ относительно компактен в $L_2(0, T; V^{-1})$);

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} := \sup \left\{ \|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} : u \in \Psi(v) \right\} \leq C \text{ для всех } v \in W_1;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1, v_l \rightharpoonup v_0, u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \rightarrow u_0$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Для начально–краевой задачи (3.1.1)–(3.1.4) рассмотрим задачу управления с обратной связью. Условия обратной связи представимо в виде:

$$f \in \Psi(v). \quad (3.1.5)$$

Постановка задачи: изучается задача управления с обратной связью (3.1.1)–(3.1.4), (3.1.5). Под решением данной задачи управления понимается слабая постановка решения данной задачи, а, именно, пусть $v_0 \in V^0$, дадим определение решения задачи управления с обратной связью.

Определение 3.1.1. Пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ называется слабым решением задачи управления с обратной связью (3.1.1)–(3.1.4), (3.1.5), если она удовлетворяет а) начальному условию $v(0) = v_0$, б) условию обратной связи (3.1.5), в) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \varepsilon(\varphi) dx = \\ = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Первым результатом первого параграфа данной главы является следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Пусть $v_0 \in V^0$, многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1) – (Ψ4). Тогда задача управления с обратной связью (3.1.1)–(3.1.4), (3.1.5) имеет слабое решение.

Доказательство данной теоремы основано на аппроксимационно–топологическом методе, описанном выше, с использованием теории топологической степени многозначных векторных полей.

Введем множество $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$, состоящей из решений задачи управления с обратной связью (3.1.1)–(3.1.4), (3.1.5). Заметим, что данное множество не пусто в силу предыдущей теоремы. Введем $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный функционал качества. Необходимо, чтобы функционал качества Φ удовлетворял следующим условиям:

(Ф1) $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$, $\gamma \in \mathbb{R}$;

(Ф2) Φ слабо непрерывно в следующем смысле:

если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то

$$\Phi(v_*, f_*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, f_m).$$

Рассмотрим пример такого функционала качества, удовлетворяющего условиям (Ф1) — (Ф2). Пусть задано некоторое поле скоростей u_* (данная скорость может быть получена либо из численных вычислений, либо быть заданной техническими условиями производства). В данном случае вводится функционал качества следующего вида:

$$\Phi(v, f) = \int_0^T \|v(t) - u_*(t)\|_{V^1}^2 dt + \int_0^T \|f(t)\|_{V^{-1}}^2 dt.$$

В данном случае мы изучаем отклонение имеющейся скорости от требуемой скорости. Минимум данного функционала качества даст нам минимальное отклонение скорости от заданной при минимальном управлении. Таким образом, мы перешли к задаче оптимального управления с обратной связью.

Вторым основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.1.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.1, пусть также функционал качества Φ удовлетворяет условиям (Ф1) — (Ф2). Тогда задача оптимального управления с обратной связью (3.1.1)–(3.1.4), (3.1.5) имеет слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

3.1.1 Аппроксимационная задача

Введем следующее семейство вспомогательных задач ($0 \leq \xi \leq 1$) с малым параметром $\theta > 0$. Решение данного семейства будет принадлежать функциональному пространству $W_2 = \{v \in C([0, T]; V^3), v' \in L_2(0, T; V^3)\}$. Пусть $v_0 \in V^3$.

Задача 3.1.1. Найти пару функций $(v, f) \in W_2 \times L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющую а) начальному условию $v(0, \cdot) = \xi v_0$, б) условию обратной связи (3.1.5), в) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \xi \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + \\ + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) ds dx = \xi \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Наша цель: доказать существование решения аппроксимационной задачи при $\xi = 1$ из семейства вспомогательных задач, затем показать сходимость последовательности её решений к решению задачи (3.1.1)–(3.1.4), (3.1.5) при стремлении параметра аппроксимации θ к нулю. Для этого перейдем к операторной трактовке задачи 3.1.1. Введём операторы:

$$\begin{aligned} J : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\ A : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1; \\ A_2 : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\ B : V^1 \times [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega} &\rightarrow V^{-1}, \\ (B(v, z)(t), \varphi) &= \left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right), \\ v \in V^1, \quad z \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (0, T); \\ K : L_4(\Omega) &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1. \end{aligned}$$

Заметим, в силу произвольности $\varphi \in V^1$ в равенстве (3.1.7), задача 3.1.1 существования слабого решения аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in W_2$ следующего операторного включения:

$$Jv' - \theta A_2 v' + \mu Av + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) - \xi K(v) = \xi f \in \Psi(v), \quad (3.1.8)$$

удовлетворяющего начальному условию $v(0, \cdot) = \xi v_0$.

Для краткости введем дополнительные операторы:

$$\begin{aligned} L : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A_2)v' + \mu A v, v|_{t=0}); \\ C : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0); \\ G : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0\right). \end{aligned}$$

Теперь задача 3.1.1 эквивалентна задаче нахождения решения, удовлетворяющего условию обратной связи (3.1.5) и операторному уравнению

$$L(v) = \xi(C(v) - G(v) + (f, v_0)).$$

3.1.2 Априорные оценки

Лемма 3.1.1. *Решения семейства включений (3.1.8) для некоторого $\xi \in [0, 1]$ удовлетворяют следующей оценке:*

$$\|v\|_{W_2} \leq C_1,$$

где константа C_1 зависит от θ .

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемма 1.1.6 и 1.1.7. Стоит отметить, что данное неравенство в данном случае имеет место, в силу ограниченности функции f . $\square$

На основе полученной выше оценки докажем теорему о существовании решений задачи 3.1.1 при $\xi = 1$.

Теорема 3.1.3. *Операторное включение (3.1.8) при $\xi = 1$ имеет решение $v \in W_2$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см. [3], [8]).

Для краткости рассмотрим оператор $\mathcal{Y} : W_2 \multimap L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$, определенный равенством $\mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0)$. Тогда нам необходимо найти решение $(v, f) \in W_2 \times L_2(0, T; V^{-1})$ следующего операторного включения:

$$v \in \xi \mathcal{M}, \quad \text{где } \mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v)). \quad (3.1.9)$$

Из леммы 3.1.1 следует, что все решения уравнения (3.1.9) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C_1 + 1$. Согласно утверждению

леммы 1.1.1 оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi \mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R .

В силу леммы 1.1.1 оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным. Согласно 3) части леммы 1.1.1 и лемме 1.1.3 отображение $(\mathcal{Y} + C(v) - G(v)) : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_2 \rightarrow W_2$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .

Таким образом, векторное поле $v - \xi \mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi \mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ включения (3.1.8) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи 3.1.1 при $\xi = 1$. $\square$

3.1.3 Предельный переход

Докажем разрешимость исходной задачи управления на основе предельного перехода во вспомогательной задаче 3.1.1 при $\xi = 1$.

Доказательство данного раздела происходит аналогично разделу 1.3 главы 1, но с некоторыми замечаниями.

Из оценки леммы 3.1.1 получаем, что $v^m \rightarrow v^*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$ при $m \rightarrow \infty$, $v^m \rightarrow v^*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; V^0)$ при $m \rightarrow \infty$, $(v^m)' \rightarrow (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow \infty$. Так как вложение $V^1 \subset L_4(\Omega)$ является вполне непрерывным, а вложение $L_4(\Omega) \subset V^{-1}$ — непрерывно, то по теореме 1.1.4 следует вложение

$$F = \{L_2(0, T; V^1), v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\} \subset L_2(0, T; L_4(\Omega)),$$

что позволяет заключить, что $v^m \rightarrow v^*$ сильно в $L_2(0, T; L_4(\Omega))$.

Принимая во внимание априорные оценки и условия $(\Psi 1) - (\Psi 4)$, без ограничения общности можем предположить, что существует $f^* \in L_2(0, T; V^{-1})$

такое, что $f^m \rightarrow f^* \in \Psi(v^*)$ при $m \rightarrow \infty$.

Рассмотрим задачу Коши (3.1.3) для предельной функции v^* . Так как $v^* \in W_1$, следовательно v^* удовлетворяет условиям теоремы 1.1.1. Поэтому в $[0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$ существует РЛП $z^*(\tau; t, x)$, порожденный v^* . Обозначим через $z^m(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденный v^m .

Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится по мере Лебега на $[0, T] \times \Omega$ по (τ, x) к $z^*(\tau; t, x)$ для $t \in [0, T]$.

Полученные сходимости и алгоритм доказательства предельного перехода, описанного в главе 1, завершают доказательство существования слабых решений задачи управления с обратной связью (3.1.1)–(3.1.4), (3.1.5).

3.1.4 Существование оптимального управления с обратной связью

Из доказанной выше теоремы 3.1.1 получаем, что множество решений Σ не пусто. Поэтому, существует такая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

В силу описанных выше исследований, сохраняются следующие сходимости: $v_l \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; V^0)$; $v_l \rightarrow v_*$ сильно в $L_2(0, T; L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$; $z_l(\tau; t, x) \rightarrow z_*(\tau; t, x)$ по мере Лебега относительно $(\tau, x) \in [0, T] \times \Omega$; $f_l \rightarrow f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(0, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow +\infty$.

Проводя аналогичные рассуждения, описанные в главе 1, мы можем совершить предельный переход во включении:

$$Jv'_l + \mu Av_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) = f_l \in \Psi(v_l).$$

Таким образом, имеем следующее включение:

$$Jv'_* + \mu Av_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1 - \alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*),$$

где $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Так как функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v_*, f_*) \leq \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f),$$

которое доказывает, что (v_*, f_*) — требуемое решение. Теорема 3.1.2 доказана.

3.2 Задача управления для вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью

В рассматриваемом параграфе изучается задача оптимального управления с обратной связью для одной модели, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости с памятью. Опишем изучаемую модель. В области $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается следующая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} [2\mu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - \\ - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \\ + \nabla p = f(t, x); \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (3.2.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (3.2.3)$$

$$v(t, x) |_{(t,x) \in (-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (3.2.4)$$

Разрешимость задачи существования управления с обратной связью для одной вязкоупругой модели типа Фойгта нелинейно-вязкой жидкости доказывается в следующем функциональном пространстве:

$$W_1 = \{v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3, loc}(-\infty, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(-\infty, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3, loc}(-\infty, T; V^{-1})}$.

Перейдем к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \rightrightarrows L_2(-\infty, T; V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Необходимо, чтобы рассмотренное многозначное отображение Ψ удовлетворяло условиям $(\Psi 1) - (\Psi 4)$, введенное в параграфе 3.1 данной главы.

Аналогично предыдущему параграфу под условием обратной связи мы понимаем следующее:

$$f \in \Psi(v). \quad (3.2.5)$$

Таким образом, мы рассматриваем задачу управления с обратной связью (3.2.1)–(3.2.4) и (3.2.5).

Определение 3.2.1. Пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$ называется слабым решением задачи управления с обратной связью (3.2.1)–(3.2.4) и (3.2.5), если она удовлетворяет а) условию обратной связи (3.2.5), б) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (-\infty, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + 2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Первым результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.2.1. Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi 1) - (\Psi 4)$. Тогда задача управления с обратной связью (3.2.1)–(3.2.4) и (3.2.5) имеет слабое решение.

Аналогично предыдущему параграфу введем множество $\Sigma \subset W_1 \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$ всех слабых решений задачи (3.2.1)–(3.2.4) и (3.2.5) и рассмотрим произвольный функционал $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям $(\Phi 1) - (\Phi 2)$, введенного в параграфе 3.1.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.2.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1 и функционал Φ удовлетворяет условиям $(\Phi 1) - (\Phi 2)$. Тогда задача оптимального управления с обратной связью (3.2.1)–(3.2.4) и (3.2.5) имеет решение (v_*, f_*) , удовлетворяющее равенству $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Как и ранее доказательство теорем 3.2.1 и 3.2.2 будет разделено на нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики установим существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Далее, покажем, что во множестве решений найдется хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3.2.1 Аппроксимационная задача

Рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач ($0 \leq \xi \leq 1$) с малым параметром $\theta > 0$, где $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \xi \operatorname{Div} [2\mu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - \theta \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} - \\ & - \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = \xi f; \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [-m, T]; \quad (3.2.8)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [-m, T], \quad x \in \Omega; \quad (3.2.9)$$

$$v(t, x) \big|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad v(-m, x) = 0, \quad \Delta v(t, x) \big|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (3.2.10)$$

Разрешимость данного семейства вспомогательных задач будет доказана в следующем функциональном пространстве $W_2 = \{v \in L_2(-m, T; V^3), v' \in L_2(-m, T; V^3)\}$ с нормой $\|v\|_{W_2} = \|v\|_{L_2(-m, T; V^3)} + \|v'\|_{L_2(-m, T; V^3)}$.

Определение 3.2.2. Пара функций $(v, f) \in W_2 \times L_2(-m, T; V^{-1})$ называется слабым решением задачи (3.2.7)–(3.2.10), (3.2.5), если она удовлетворяет а) начальному условию $v(-m, \cdot) = 0$, б) условию обратной связи (3.2.5), с) при любой $\varphi \in V^1$ и н.в. $t \in (-m, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} & \langle v', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + 2\xi \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ & + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \\ & = \xi \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Для дальнейшего исследования слабой разрешимости необходимо перейти к операторной трактовке. Введем операторы:

$$\begin{aligned} J : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\ A : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\ B : V^1 &\times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow V^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B(v, z)(t), \varphi) &= \left(\int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right), \\
v &\in V^1, \quad z \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (-m, T); \\
K : L_4(\Omega) &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1; \\
D : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle D(v), \varphi \rangle = 2 \int_{\Omega} \mu(I_2(v)) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) dx, \quad v \in V^1, \\
L : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A)v', v|_{t=-m}); \\
C : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0); \\
G : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0 \right); \\
F : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad F(v) = (D(v), 0).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили задачу нахождения решения, удовлетворяющего условию обратной связи (3.2.5) и следующего операторного равенства

$$L(v) = \xi(C(v) - G(v) - F(v) + (f, 0)). \quad (3.2.12)$$

Для дальнейшего исследования слабой разрешимости аппроксимационной задачи докажем априорные оценки.

3.2.2 Априорные оценки

Аналогично доказанным выше леммам 2.4.1 и 2.4.2 получим следующую априорную оценку.

Лемма 3.2.1. *Если $v \in W_2$ — решение (3.2.12) для некоторого $\xi \in [0, 1]$, то для него имеет место оценка $\|v\|_{W_2} \leq C_1$.*

Проводя аналогичные рассуждения как в теореме 3.1.3 и, используя теорию топологической степени для многозначных векторных полей, получаем следующий результат.

Теорема 3.2.3. *Операторное включение (3.2.12) при $\xi = 1$ имеет решение $v \in W_2$.*

3.2.3 Предельный переход

Перейдем к доказательству разрешимости исходной краевой задачи. Повторяя рассуждения параграфа 2.5 второй главы, получим следующие аналогичные оценки при $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$:

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^0} + \sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^2} + \|v^m(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \leq \\ \leq C_2; \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\left\| \frac{dv^m}{dt} \right\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} \leq C_3(k) \quad (3.2.14)$$

с константами C_2, C_3 не зависящими от m . Здесь v^m — последовательность, сходящаяся к исходной функции скорости. Существование данной последовательности вытекает из того факта, что пространство V^3 плотно в V^0 .

Оценка (3.2.13) означает, что последовательность v^m ограничена в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Это позволяет утверждать, что существует функция $v^* \in L_2(-\infty, T; V^1)$ такая, что v^m (с точностью до подпоследовательности) слабо сходится к v^* в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Кроме того, оценка (3.2.13) влечет за собой сходимость v^m к v^* (с точностью до подпоследовательности) п.в. на $[-k, T] \times \Omega$ для любого $k > 0$.

Оценка (3.2.14) подразумевает, что последовательность $\frac{dv^m}{dt}$ ограничена по норме пространства $L_1(-k, T; V^{-1})$ и сходится к $\frac{dv}{dt}$ в смысле распределений на $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$.

Рассмотрим задачу Коши (3.2.3) для предельной функции v^* . Так как $v^* \in W_1$, следовательно, v^* удовлетворяет условиям теоремы 1.1.2. Поэтому на любом конечном интервале $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$. Тогда из теоремы 1.1.1 следует существование РЛП $z^*(\tau; t, x)$, $-\infty < \tau, t \leq T, x \in \bar{\Omega}$, порожденного v^* . Обозначим через $z^m(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденный v^m .

Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится (с точностью до подпоследовательности) к $z^*(\tau; t, x)$ п.в. на $Q(k, T) = [-k, T] \times \Omega$ как функция переменных $(\tau, x) \in Q(k, T)$ для любого $-k \in (-\infty, T)$ для $t \in [-k, T]$.

Легко видеть, что последовательность f^m сходится к f в $L_2(-\infty, T; V^0)$, сильно в $L_2(Q)^n$, п.в. на $Q = (-\infty, T] \times \Omega$.

Так как вложение $V^1 \subset L_4(\Omega)$ является вполне непрерывным, а вложение

$L_4(\Omega) \subset V^{-1}$ — непрерывно, то по теореме 1.1.4 следует вложение

$$F = \{L_2(-\infty, T; V^1), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\} \subset L_2(-\infty, T; L_4(\Omega)).$$

Учитывая полученные ранее оценки, можно заключить, что

$$v^m \rightarrow v^* \quad \text{сильно в} \quad L_2(-\infty, T; L_4(\Omega)).$$

Полученные сходимости позволяют перейти к пределу в каждом слагаемом интегрального равенства вспомогательной задачи для $\xi = 1$. Это подразумевает, что предельная функция v^* удовлетворяет тождеству (3.2.6). Таким образом, мы доказали существование хотя бы одного слабого решения задачи (3.2.1)–(3.2.4), (3.2.5), описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости.

3.2.4 Существование оптимального управления с обратной связью

В силу доказанной выше теоремы 3.2.1 мы получили, что множество решений Σ не пусто. Таким образом, существует такая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

В силу полученных выше оценок, имеем следующие сходимости: $v_l \rightarrow v_*$ сильно в $L_2(-\infty, T; L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(-\infty, T; V^1)$; $z_l(\tau; t, x) \rightarrow z_*(\tau; t, x)$ по норме Лебега относительно $(\tau, x) \in [0, T] \times \Omega$; $f_l \rightarrow f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(-\infty, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow +\infty$.

Таким образом, переходя к пределу во включении

$$Jv'_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) + D(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

мы получим $(v_*, f_*) \in \Sigma$, удовлетворяющую включению:

$$Jv'_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) + D(v_*) = f_* \in \Psi(v_*).$$

Так как функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v_*, f_*) \leq \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f),$$

что доказывает, что (v_*, f_*) — требуемое решение. Теорема 3.2.2 доказана.

ГЛАВА 4

Термо–модель движения нелинейно–запаздывающей жидкости

4.1 Постановка задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и на временном промежутке $[0, T] \times \Omega$, где $T > 0$ рассматривается начально–краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \text{Div} \left[\mu(\theta) \mathcal{E}(v) - \mu_1(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds \right] + \\ + \nabla p = f; \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\text{div } v(t, x) = 0, \quad v(t, x) |_{t=0} = v_0, \quad v(t, x) |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0; \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = \\ = \left[\mu(\theta) \mathcal{E}(v) + \mu_1(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds \right] : \mathcal{E}(v) + g; \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\theta |_{t=0} = \theta_0, \quad \theta |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4.1.4)$$

Здесь основные обозначения, описанные выше, сохраняются. Среди новых переменных: $\theta(t, x)$ — неизвестная функция температуры, g — заданный источник внешнего тепла, $\mu > 0$ — вязкость жидкости, $\mu_1 > 0$ — время ретардации (запаздывания), $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности.

В диссертации коэффициент запаздывания μ_1 рассматривается в виде нелинейной функции. Поэтому накладываются естественные ограничения: $\mu_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ должна быть определенной при $s \geq 0$ непрерывно дифференцируемой скалярной функцией, для которой выполнены неравенства

$$\begin{aligned} (a) \quad 0 < C_1 \leq \mu_1(s) \leq C_2 < \infty; \quad (b) \quad -s\mu_1'(s) \leq \mu_1(s) \text{ при } \mu_1'(s) \leq 0; \\ (c) \quad |s\mu_1'(s)| \leq C_3 < \infty. \end{aligned}$$

Введём функциональные пространства, в которых будет установлена раз-

решимость.

$$W_1 = \{v : v \in C([0, T], V^1), v' \in L_2(0, T; V^1)\},$$

$$W_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)), 1 < p < +\infty\},$$

с нормами соответственно $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{C([0, T], V^1)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^1)}$, $\|\theta\|_{W_2} = \|\theta\|_{L_p(0, T; W_p^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))}$.

Определение 4.1.1. Пара функций $(v, \theta) \in W_1 \times W_2$ называется слабым решением начально–краевой задачи (4.1.1)–(4.1.4), если она удовлетворяет начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$ и при всех $\varphi \in V^1$ и $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, и почти всех $t \in [0, T]$ тождествам

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \mu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \int_{\Omega} \mu_1(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds : \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta', \phi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i \theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx + \chi \int_{\Omega} \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) dx = \int_{\Omega} (\mu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)) : \phi dx + \\ + (\mu_1(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds : \mathcal{E}(v), \phi) + \langle g, \phi \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Основными результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 4.1.1. Пусть вязкость жидкости $\mu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 < \mu(\theta) < C_5$, время запаздывания μ_1 удовлетворяет условиям (а) – (с), $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V^0$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ начально–краевая задача (4.1.1)–(4.1.4) имеет слабое решение.

Доказательство данного результата проводится в несколько шагов. На первом шаге рассматривается начально–краевая задача (4.1.1)–(4.1.2) с фиксированной температурой $\theta \in W_2$ и изучается её разрешимость. Далее рассматривается начально–краевая задача (4.1.3)–(4.1.4) с фиксированной скоростью $v \in W_1$. Затем приводится итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач. На заключительном четвертом шаге доказывается сходимость последовательных приближений к решению исходной задачи (4.1.1)–(4.1.4).

4.2 Первый шаг. Разрешимость задачи с фиксированной температурой

На основе определения 4.1.1 заметим, что слабым решением начально-краевой задачи (4.1.1)–(4.1.2) с фиксированной температурой $\theta \in W_2$ называется функция $v \in W_1$, удовлетворяющая (4.1.5) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Для изучаемой начально-краевой задачи сформулируем и докажем теорему о слабой разрешимости.

Теорема 4.2.1. Пусть функция вязкости $\mu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 < \mu(\theta) < C_5$, время запаздывания μ_1 удовлетворяет условиям (a) – (c), $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^0$, $\theta \in W_2$. Тогда начально-краевая задача (4.1.1)–(4.1.2) имеет слабое решение $v \in W_1$, для которого справедлива оценка

$$\|v\|_{W_1} \leq R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^0}). \quad (4.2.1)$$

Перейдем к операторной трактовке интегрального равенства (4.1.5) рассматриваемой задачи.

$$\begin{aligned} J : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx; \\ D_1 : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle D_1(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \int_0^t \kappa(I_2(v)) \mathcal{E}(v)(s, x) ds \mathcal{E}(\varphi) dx, \\ &v \in V^1, \varphi \in V^1; \\ D_2 : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle D_2 v, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \mu(\theta) \mathcal{E}(v) : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1; \\ K : L_4(\Omega) &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1; \\ L : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, \quad L(v) = (Jv' + D_2 v, v|_{t=0}); \\ F : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, \quad F(v) = (D_1(v), 0); \\ C : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, \quad C(v) = (K(v), 0). \end{aligned}$$

Таким образом, получим следующее операторное уравнение:

$$L(v) = C(v) - F(v) + (f, v_0). \quad (4.2.2)$$

Для введенных выше операторов справедливы свойства.

Лемма 4.2.1. *Оператор $K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является вполне непрерывным и для него имеет место оценка:*

$$\|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_4 \|v\|_{C([0, T]; V^1)}^2.$$

Доказательство. Вполне непрерывность отображения $K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ доказывается аналогично как в лемме 1.1.4 пункт 3).

Докажем необходимую оценку. Пусть $v \in W_1$. Тогда из оценки леммы 1.1.4 пункт 1) при почти всех $t \in [0, T]$ имеем:

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-1}} \leq C_5 \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^2.$$

В силу непрерывного вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)$ имеем:

$$\|v(t)\|_{L_4(\Omega)} \leq C_6 \|v(t)\|_{V^1}.$$

Откуда имеем оценку:

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-1}} \leq C_5 C_6 \|v(t)\|_{V^1}^2.$$

Возводя полученное неравенство в степень 2 и интегрируя его по t от 0 до T , получим требуемую оценку:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|K(v)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt &\leq C_5^2 C_6^2 \int_0^T \|v(t)\|_{V^1}^4 dt \leq \\ &\leq C_5^2 C_6^2 \left(\max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^1} \right)^4 \int_0^T dt = C_7 \|v\|_{C([0, T], V^1)}^4, \end{aligned}$$

где $C_4 = C_5^2 C_6^2 T$. □

Лемма 4.2.2. *Оператор $D_1 : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является непрерывным и для него справедлива оценка*

$$\|D_1(v) - D_1(u)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_7 \|v - u\|_{L_2(0, T; V^1)}.$$

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемме 2.3.3. □

Лемма 4.2.3. *Оператор $D_2 : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является непрерывным и для него справедлива оценка:*

$$\|D_2 v\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_8 \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}.$$

Доказательство. По определению оператора D_2 для $v, \varphi \in V^1$ имеем

$$|\langle D_2 v, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \mu(\theta) \mathcal{E}(v) : \nabla \varphi dx \right| \leq C_9 \|v\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1}.$$

Если $v \in L_2(0, T; V^1)$, то, в силу полученной выше при почти всех $t \in (0, T)$ имеем оценку $\|D_2 v(t)\|_{V^{-1}} \leq C_9 \|v(t)\|_{V^1}$.

Возведем последнее неравенство в степень 2 и проинтегрируем по t от 0 до T , получим

$$\int_0^T \|D_2 v(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq C_9^2 \int_0^T \|v(t)\|_{V^1}^2 dt.$$

Из последней оценки следует требуемая оценка сверху

$$\|D_2 v\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_8 \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}.$$

Поскольку оператор D_2 линеен и ограничен, он непрерывен как оператор из $L_2(0, T; V^1)$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 4.2.4. *Для оператор L и C имеют место следующие свойства:*

- 1) оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1 \rightarrow W_1$ непрерывен;
- 2) оператор $C : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1$ вполне непрерывен;
- 3) оператор $F : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1$ непрерывен.

Доказательство. 1) Доказательство данного пункта полностью аналогично доказательству пункта 2) леммы 1.1.1. Заметим, что различие состоит в использовании оператора D_2 . Но по лемме 4.2.3 оператор D_2 является ограниченным и непрерывным, данные свойства дают возможность использования рассуждений пункта 2) леммы 1.1.1.

2) Вполне непрерывность оператора

$$C : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, \quad C(v) = (K(v), 0)$$

следует из вполне непрерывности оператора $K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$, что и требовалось доказать.

3) Непрерывность оператора

$$F : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, \quad F(v) = (D_1(v), 0)$$

следует из непрерывности оператора D_1 , что и требовалось доказать. $\square$

Дополнительно рассмотрим вспомогательное семейство операторных уравнений:

$$L(v) = \eta(C(v) - F(v) + (f, v_0)), \quad \eta \in [0, 1]. \quad (4.2.3)$$

Теорема 4.2.2. *Если $v \in W_1$ — решение операторного уравнения (4.2.3), то для него имеет место следующая априорная оценка:*

$$\|v\|_{W_1} \leq C_{10}, \quad C_{10} = C_{10}(T, \|f\|_{L_2(0,T,V^{-1})}, \|v_0\|_{V^0}). \quad (4.2.4)$$

Доказательство. Пусть $v \in W_1$ — решение уравнения (4.2.3):

$$Jv'(t) + \eta D_1(v)(t) + D_2v(t) - \eta K(v)(t) = \eta f(t). \quad (4.2.5)$$

Применим первую компоненту (4.2.5) при почти всех $t \in (0, T)$ к $v(t)$:

$$\begin{aligned} \langle Jv'(t), v(t) \rangle + \eta \langle D_1(v)(t), v(t) \rangle + \langle D_2v(t), v(t) \rangle - \\ - \eta \langle K(v)(t), v(t) \rangle = \eta \langle f(t), v(t) \rangle. \end{aligned}$$

В силу соленоидальности v , имеем

$$\begin{aligned} \langle K(v)(t), v(t) \rangle &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial v_j v_j}{\partial x_i} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n v_j v_j = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} v \sum_{j=1}^n v_j v_j = 0. \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что

$$\begin{aligned} \langle Jv'(t), v(t) \rangle + \eta \langle D_1(v)(t), v(t) \rangle + \langle D_2v(t), v(t) \rangle &\leq \eta \|f\|_{V^{-1}} \|v\|_{V^1} \leq \\ &\leq \eta(2^{-1} \|f\|_{V^{-1}}^2 + 2^{-1} \|v\|_{V^1}^2). \end{aligned}$$

Интегрирование этого неравенства по t от 0 до τ дает

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \langle Jv'(t), v(t) \rangle dt + \eta \int_0^\tau \langle D_1(v)(t), v(t) \rangle dt + \int_0^\tau \langle D_2v(t), v(t) \rangle dt &\leq \\ &\leq \eta \int_0^\tau 2^{-1} \|f\|_{V^{-1}}^2 dt + \eta \int_0^\tau 2^{-1} \|v\|_{V^1}^2 dt. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Из определения оператора J имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \langle Jv'(t), v(t) \rangle dt &= 2 \int_0^\tau \int_{\Omega} v'(t) v(t) dx dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} v(t) v(t) dx \right) dt = \\ &= \int_0^\tau \frac{d}{dt} (\|v\|_{V^0}^2) dt = \|v(\tau)\|_{V^0}^2 - \|v_0\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Тогда (4.2.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_{V^0}^2 &\leq \|v_0\|_{V^0}^2 - 2\eta \int_0^\tau \langle D_1(v)(t), v(t) \rangle dt - 2 \int_0^\tau \langle D_2 v(t), v(t) \rangle dt + \\ &+ \eta \int_0^\tau \|f\|_{V^{-1}}^2 dt + \eta \int_0^\tau \|v\|_{V^1}^2 dt. \end{aligned}$$

Оценивая правую часть сверху и пользуясь тем, что $\eta \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_{V^0}^2 &\leq \|v_0\|_{V^0}^2 + 2 \left| \int_0^\tau \langle D_1(v)(t), v(t) \rangle dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau \langle D_2 v(t), v(t) \rangle dt \right| + \\ &+ \int_0^\tau \|f\|_{V^{-1}}^2 dt + \int_0^\tau \|v\|_{V^0}^2 dt. \end{aligned}$$

Оценим первые три слагаемых в правой части неравенства

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \langle D_1(v)(t), v(t) \rangle dt \right| &= \left| \int_0^\tau \int_\Omega \mu_1(I_2(v(t))) \mathcal{E}(v(t)) \mathcal{E}(v(t)) dx dt \right| \leq \\ &\leq C_7 \int_0^\tau \|v\|_{V^1}^2 dt; \\ \left| \int_0^\tau \langle D_2 v(t), v(t) \rangle dt \right| &= \left| \int_0^\tau \int_\Omega \mu(\theta) \mathcal{E}(v(t)) : \nabla v(t) dx dt \right| \leq C_8 \int_0^\tau \|v\|_{V^1}^2 dt; \\ \int_0^\tau \|f\|_{V^{-1}}^2 dt &\leq \int_0^T \|f\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\|v(\tau)\|_{V^0}^2 \leq \|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + (2C_7 + 2C_8 + 1) \int_0^\tau \|v\|_{V^1}^2 dt.$$

Воспользовавшись теперь неравенством Гронуолла–Белмана, получим

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_{V^0}^2 &\leq e^{(2C_7+2C_8+1)} (\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2) \leq \\ &\leq e^{(2TC_7+2TC_8+T)} (\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\|v\|_{C([0,T],V^1)}^2 \leq e^{(2C_7+2C_8+1)T} (\|v_0\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2).$$

Теперь получим оценку на $\|v'\|_{L_2(0,T;V)}$.

Применим оператора J^{-1} к равенству (4.2.5), имеем

$$v' = J^{-1}(-\eta D_1(v) - D_2 v + \eta K(v) + \eta f).$$

Отсюда получаем,

$$\begin{aligned}\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} &= \|J^{-1}(-\eta D_1(v) - D_2v + \eta K(v) + \eta f)\|_{L_2(0,T;V^1)} \leq \\ &\leq \eta \|D_1(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|D_2v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ &+ \eta \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \eta \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.\end{aligned}$$

В силу полученных выше оценок на операторы и неравенства $\eta \leq 1$, получим

$$\begin{aligned}\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} &\leq C_7 \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C_8 \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C_4 \|v\|_{C([0,T],V^1)}^2 + \\ &+ \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.\end{aligned}$$

Пользуясь непрерывностью вложения $C([0, T], V^1) \subset L_2(0, T; V^1)$, имеем

$$\begin{aligned}\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} &\leq (C_7\sqrt{T} + C_8\sqrt{T}) \|v\|_{C([0,T],V^1)} + C_4 \|v\|_{C([0,T],V^1)}^2 + \\ &+ \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказали необходимую оценку

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} \leq C_{11}, \quad C_{11} = C_{11}(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^0}).$$

□

Установим слабую разрешимость операторного уравнения (4.2.3).

Теорема 4.2.3. *Для любых $f \in L_2(0, T, V^{-1})$ и $v_0 \in V^0$ операторное уравнение (4.2.3) имеет решение $v \in W_1$.*

Доказательство. Обозначим $R = C_{10} + 1$. Рассмотрим шар $B_R \subset W_1$ с центром в нуле. Оценка (4.2.4) гарантирует, что все решения семейства уравнений (4.2.3) лежат в этом шаре.

Отображение $(C(\cdot) - F(\cdot) + (f, v_0)) : W_1 \rightarrow L_2(0, T, V^{-1}) \times V^1$ является вполне непрерывным, в силу пунктов 2) и 3) леммы 4.5.1. Оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1 \rightarrow W_1$ является непрерывным согласно пункту 1) леммы 4.5.1. Следовательно, оператор $L^{-1}(C(v) - F(v) + (f, v_0)) : W_1 \rightarrow W_1$ является вполне непрерывным.

Таким образом, векторное поле $v - \eta L^{-1}(C(v) - F(v) + (f, v_0))$ вполне непрерывно и невырождено на границе шара B_R , а значит для этого векторного поля определена степень Лере–Шаудера $\deg(I - \eta L^{-1}(C(v) - F(v) +$

$(f, v_0)), B_R, 0)$ (см. [13]). По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg(I - L^{-1}(C(v) - F(v) + (f, v_0)), B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_1$ уравнения (4.2.2). $\square$

Существование решения операторного уравнения (4.2.2) гарантирует существование слабого решения начально–краевой задачи (4.1.1)–(4.1.2), что и требовалось доказать.

4.3 Второй шаг. Разрешимость задачи с фиксированной скоростью

Рассмотрим следующую начально–краевую задачу при фиксированных $\hat{\theta} \in W_2$ и $v \in W_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta = \\ = [\mu(\hat{\theta})\mathcal{E}(v) + \mu_1(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x) ds] : \mathcal{E}(v) + g; \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega, \quad \theta|_{[0,T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4.3.2)$$

На основе определения 4.1.1 заметим, что слабым решением начально–краевой задачи (4.3.1)–(4.3.2) с фиксированной скоростью $v \in W_1$ называется функция $\theta \in W_2$, удовлетворяющая (4.1.6) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Теорема 4.3.1. Пусть функция вязкости $\mu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < C_4 < \mu(\theta) < C_5$, время запаздывания μ_1 удовлетворяет условиям (a) – (c), $g \in L_1(0, T; H_p^{-2(1-\frac{1}{p})}(\Omega))$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\hat{\theta} \in W_2$, $v \in W_1$. Тогда при $1 < p < 4/3$ существует слабое решение начально–краевой задачи (4.3.1)–(4.3.2), для которого справедлива оценка

$$\|\theta\|_{W_2} \leq R_2, \quad R_2 = R_2(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-\frac{1}{p})}(\Omega))} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)} + \|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{L_2(0,T;V^0)}^2). \quad (4.3.3)$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы вытекает из полученных результатов статьи [39]. $\square$

4.4 Третий шаг. Построение последовательных приближений

Построим последовательность решений (v^{n+1}, θ^{n+1}) , $n = 0, 1, 2, \dots$. Положим v^0, θ^0 начальными значениями v_0, θ_0 для v и θ из (4.1.2) и (4.1.4). Предположим, что (v^n, θ^n) известны. Найдем скорость v^{n+1} — решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - \text{Div} [\mu(\theta^n) \mathcal{E}(v^{n+1})] - \\ & - \text{Div} [\mu_1(I_2(v^{n+1})) \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s, x) ds] + \nabla p = f; \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$\text{div } v^{n+1}(t, x) = 0 \text{ в } Q_T, \quad (4.4.2)$$

$$v^{n+1}(t, x) |_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega, \quad v^{n+1}(t, x) |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4.4.3)$$

Зная v^{n+1} , найдем θ^{n+1} — решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \Delta \theta^{n+1} = \\ & = [\mu(\theta^n) \mathcal{E}(v^{n+1}) + \mu_1(I_2(v^{n+1})) \int_0^t \mathcal{E}(v^{n+1})(s, x) ds] : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g; \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\theta^{n+1} |_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega, \quad \theta^{n+1} |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (4.4.5)$$

Отметим, что слабым решением задачи (4.4.1)–(4.4.3) называется функция $v^{n+1} \in W_1$, удовлетворяющая соотношению (4.1.5) и начальному условию $v^{n+1}(t, x) |_{t=0} = v_0$, а слабым решением задачи (4.4.4)–(4.4.5) называется функция $\theta^{n+1} \in W_2$, удовлетворяющая соотношению (4.1.6) и начальному условию $\theta^{n+1} |_{t=0} = \theta_0$.

Существование слабого решения начально-краевой задачи (4.4.1)–(4.4.3) следует из теоремы 4.2.2. Полученное решение v^{n+1} удовлетворяет условиям теоремы 4.3.1. Таким образом, имеем, что задача (4.4.4)–(4.4.5) также имеет слабое решение.

4.5 Четвертый шаг. Предельный переход

На основе полученного итерационного процесса исследуем сходимость последовательности решений (v^n, θ^n) , $n = 1, 2, \dots$, где v^n — решение начально-краевой задачи (4.4.1)–(4.4.3), а θ^n — решение начально-краевой задачи (4.4.4)–(4.4.5).

Лемма 4.5.1. *Пусть p удовлетворяет условиям теоремы 4.2.1. Тогда последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы основано на теореме Симона 1.1.4. В данном случае $X = W_p^1(\Omega)$, $E = L_p(\Omega)$, $Y = W_p^{-1}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$. Последовательность θ^n ограничена в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, а $\frac{\partial \theta^n}{\partial t}$ ограничена в $L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$, в силу оценки (4.3.3). Таким образом, последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$. $\square$

Рассмотрим теперь v^n . Последовательность v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T, V^1)$, а $\frac{\partial v^n}{\partial t}$ слабо сходится в $L_2(0, T, V^{-1})$, в силу оценки (4.2.1).

Используя рассуждения прошлых параграфов, из слабых сходимостей v^n к v в $L_2(0, T, V^1)$, $\frac{\partial v^n}{\partial t}$ к $\frac{\partial v}{\partial t}$ в $L_2(0, T, V^{-1})$ получаем:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial v^n}{\partial t} \varphi dx dt \rightharpoonup \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx dt.$$

Используя, установленные выше сходимости, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^n v_j^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx dt &\rightharpoonup \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx dt; \\ \langle \mu_1(I_2(v^n)) \mathcal{E}(v^n) \mathcal{E}(\varphi) \rangle &\rightharpoonup \langle \mu_1(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) \rangle; \\ \langle \mathcal{E}(v^n), \nu(\theta^n) \nabla \varphi \rangle &\rightharpoonup \langle \mathcal{E}(v), \nu(\theta^n) \nabla \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в интегральном тождестве, дифференцируя его по t , получим, что v удовлетворяет равенству (4.1.5), а, следовательно, является решением (4.4.1)–(4.4.3).

Далее для совершения предельного перехода в уравнении (4.4.4), нам необходимо существование дополнительной сходимости.

Лемма 4.5.2. *Последовательность v^n сильно сходится к v в $L_2(0, T, V^1)$.*

Доказательство. Рассмотрим в (4.4.1) вместо φ функцию v^n :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial v^n}{\partial t} v^n dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^n v_j^n \frac{\partial v^n}{\partial x_i} dx + \\ & + \int_{\Omega} [\mu(\theta^n) \mathcal{E}(v^n)] \mathcal{E}(v^n) dx + \int_{\Omega} [\mu_1(I_2(v^n)) \mathcal{E}(v^n)] : \nabla v^n dx = \int_{\Omega} f v^n dx. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^{n'} v^n dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial(v^n v^n)}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^n\|_{V^0}^2; \\ & \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^n v_j^n \frac{\partial v_j^n}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^n \frac{\partial v_j^n v_j^n}{\partial x_i} dx = \\ & = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n v_j^n v_j^n = - \int_{\Omega} \operatorname{div} v^n \sum_{j=1}^n v_j^n v_j^n = 0; \\ & \int_{\Omega} [\mu(\theta) \mathcal{E}(v^n)] : \nabla v^n dx = \int_{\Omega} [\mu(\theta) \mathcal{E}(v^n)] : \nabla v^n dx + \int_{\Omega} [\mu(\theta) \mathcal{E}(v^n)] : (\nabla v^n)^T dx = \\ & = \int_{\Omega} [\mu(\theta) \mathcal{E}(v^n)] : \mathcal{E}(v^n) dx = 2 \|\mu(\theta)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(v^n)\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое:

$$\int_{\Omega} \mu_1(I_2(v^n)) \mathcal{E}(v^n) \mathcal{E}(v^n) dx \leq C_7 \int_{\Omega} \mathcal{E}(v^n) \mathcal{E}(v^n) dx \leq C_{12} \|v\|_{V^1}^2.$$

В итоге получаем

$$\frac{d}{dt} \|v^n\|_{V^0}^2 + \|\mu(\theta)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(v^n)\|_{V^0}^2 + C_{12} \|v^n\|_{V^1}^2 = 2 \langle f, v^n \rangle.$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$\begin{aligned} & \|v^n\|_{V^0}^2 + \|\mu(\theta)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(v^n)\|_{L_2(0,T;V^0)}^2 + C_{12} \|v^n\|_{L_2(0,T;V^1)}^2 = \\ & = \int_0^T \langle f, v^n \rangle dt + \|v_0^n\|_{V^0}^2. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Рассмотрим пространство $\mathfrak{N} = V^0 \times V^1 \times L_2(0, T; V^1) \times L_2(0, T; V^0)$ с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{N}} = (\|u_1\|_{V^0} + \|u_2\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|u_3\|_{L_2(0,T;V^0)})^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$ — произвольный элемент из $\mathfrak{N}$. Теперь изучим последовательность

$$u^n = (v^n(T), \mu(\theta)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(v^n(t)), C_{12} v^n(t)).$$

Имея слабые сходимости

$$\begin{aligned} v^n &\rightharpoonup v \text{ слабо в } L_2(0, T; V^1), \\ v^{n'} &\rightharpoonup v^{*'} \text{ слабо в } L_2(0, T; V^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

получаем, что каждое $u_i^n, i = \overline{1, 3}$ слабо сходится к $u_i, i = \overline{1, 3}$. Таким образом, получаем слабую сходимости u^n к предельному элементу

$$u = (v(T), \mu_1 v(T), 4\mu(\theta)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(v(t)), 2C_{12}v(t)).$$

В тоже время, из (4.5.1) и слабой сходимости v^n к v следует, что

$$\|u^n\|_{\mathfrak{N}}^2 \rightarrow \int_0^T \langle f, v \rangle dt + \|v_0\|_{V^0}^2,$$

а для v , так же как и для v^n , справедливо тождество

$$\|v^n\|_{V^0}^2 + \|\mu(\theta)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(v^n)\|_{L_2(0, T; V^0)}^2 + C_{12} \|v^n\|_{L_2(0, T; V^1)}^2 = \int_0^T \langle f, v^n \rangle dt + \|v_0^n\|_{V^0}^2.$$

Следовательно, $\|u^n\|_{\mathfrak{N}} \rightarrow \|u\|_{\mathfrak{N}}$.

Имеем u^n слабо сходится к u , а $\|u^n\|_{\mathfrak{N}}$ сходится к $\|u\|_{\mathfrak{N}}$. Следовательно, u^n сходится сильно к u в $\mathfrak{N}$. Таким образом, из сильной сходимости u^n в $\mathfrak{N}$ следует сильная сходимости u_i^n . В частности, имеем: $v^n \rightarrow v$ сильно в $L_2(0, T, V^1)$, что и требовалось доказать. $\square$

Из сильной сходимости $v^n \rightarrow v$ в $L_2(0, T, V^1)$, сходимости θ^n в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$ и слабой сходимости θ^n к θ в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$ вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых (4.1.6). Следовательно, получили, что искомые v и θ являются решением (4.1.1)–(4.1.4).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

$L_p(\Omega)$ — множество всех измеримых функций $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^m(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций, принадлежащих $L_p(\Omega)$ вместе со всеми своими обобщенными производными порядка не выше чем m .

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω .

$L_p(0, T; X)$ — пространство всех измеримых по Бохнеру функций $v : [0, T] \rightarrow X$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(0, T; X)} = \begin{cases} \int_0^T \|v(t)\|_X^p dt, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^s(0, T; X)$ — пространство Соболева, состоящее из функций $v : [0, T] \rightarrow X$, принадлежащих $L_p(0, T; X)$ со всеми своими обобщенными производными порядка s включительно.

$H_p^s(\Omega)$ — пространство Бесселя.

$\mathcal{V}$ — $\{v : v \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $C_0^\infty(\Omega)$.

V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$.

V^1 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ с нормой $\|v\|_{V^1} = \left(\int_{\Omega} \nabla v(x) : \nabla v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

V^2 — $W_2^2(\Omega) \cap V^1$ с нормой $\|v\|_{V^2} = \left(\int_{\Omega} \Delta v(x) \Delta v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

$A : B$ — $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — символ, обозначающий покомпонентное умножение матриц.

- X^{-1} — пространство, сопряженное к пространству X .
 $\langle f, v \rangle$ — значение функционала $f \in X^{-1}$ на элементе $v \in X$.
 $\text{Div } A = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \right)$ — дивергенция тензора A .
 $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ — вектор-функция скорости движения частицы среды.
 $p = p(t, x)$ — функция давления.
 $\theta = \theta(t, x)$ — функция температуры среды.
 $f = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ — плотность внешних сил.
 $g = g(t, x)$ — источник внешнего тепла.
 $\sigma = (\sigma_{ij})_{i, j=\overline{1, n}}$ — девиатор тензора напряжений.
 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v)), \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скоростей деформации.
 $\mu > 0$ — вязкость среды.
 $\mu_1 > 0$ — время ретардации (запаздывания) среды.
 $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности.
 $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt$.
 C_i — константы, в каждом разделе индексация начинается заново.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список использованных источников

1. Антонцев С. Н. Краевые задачи механики / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов. — Новосибирск : Наука, Сиб. отделение, 1983 — 320 с.
2. Арнольд В. И. Топологические методы в гидродинамике / В. И. Арнольд, Б. А. Хесин. — М.: МЦНМО, 2007. — 392 с.
3. Борисович Ю. Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис и др. — М.: Стереотип, 2016. — 224 с.
4. Ахмеров Р. Р. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др. — Новосибирск : Наука, 1986 — 256 с.
5. Гольдштейн Р. В. Механика сплошных сред. Часть I / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов. — Наука : Физматлит, 2000. — 256 с.
6. Звягин А. В. Разрешимость и качественное поведение решений начально–краевых задач и включений для вязкоупругих сред : дис. на соискание ученой степени д-ра физ.-ма. наук : 01.01.02 / Звягин Андрей Викторович. — Воронеж, 2022. — 231 с.
7. Звягин В. Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики / В. Г. Звягин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 46. — С. 92–119.
8. Звягин В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — М.: КРАСАНД, 2012. — 416 с.
9. Звягин В. Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 12. — С. 1633–1645.
10. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
11. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных: интегральных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Гостехиздат, 1956. — 392 с.

12. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1970. — 288 с.
13. Лерэ Ж. Топология и функциональные уравнения (Применение некоторых топологических методов к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными) / Ж. Лерэ, Ю. Шаудер // Успехи математических наук. — 1946. — Т. 1. — С. 71–95.
14. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
15. Литвинов В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. — М.: Наука, 1982 — 376 с.
16. Михайлов В. П. Лекционные курсы НОЦ / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). / В. П. Михайлов, А. К. Гущин. — Вып. 7: Дополнительные главы курса "Уравнения математической физики". — М.: МИАН, 2007. — 146 с.
17. Садовский Б. Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы / Б. Н. Садовский // Успехи математических наук. — 1972. — Т. 27, № 1. — С. 81–146.
18. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987 — 688 с.
19. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
20. Фурсиков А. В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешаной краевой задачи для трехмерных систем Навье–Стокса и Эйлера / А. В. Фурсиков // Математический сборник. — 1981. — Т. 115, № 2. — С. 281–307.
21. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с.
22. Фурсиков А. В. О некоторых задачах управления и о результатах, касающихся однозначной разрешимости смешаной краевой задачи для трехмерных систем Навье–Стокса и Эйлера / А. В. Фурсиков // Доклады Академии наук. — 1980. — Т. 252, № 5. — С. 1066–1070.

23. Blanchard D. Existence of solution for a nonlinear system in thermoviscoelasticity / D. Blanchard, O. Guibe // *Advances in Difference Equations*. — 2000. — V. 5. — P. 1221–1252.

24. Blanchard D. Renormalized solution for nonlinear parabolic problems with L_1 data, existence and uniqueness / D. Blanchard, F. Murat // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics*. — 1997. — V. 127. — P. 1137–1152.

25. Blanchard D. Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems / D. Blanchard, F. Murat, H. Redwane // *Journal of Differential Equations*. — 2001. — V. 177. — P. 331–374.

26. Blanchard D. Renormalized solutions for a class of nonlinear parabolic evolution problems / D. Blanchard, H. Redwane // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. — 1998. — V. 77. — P. 117–151.

27. Crippa G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields / G. Crippa // *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*. — 2008. — V. 1, № 2. — P. 333–348.

28. DiPerna R. J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R. J. DiPerna, P. L. Lions // *Inventiones mathematicae*. — 1989. — V. 98, № 1. — P. 511–547.

29. DiPerna R. J. On the cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability / R. J. DiPerna, P. L. Lions // *Annals of Mathematics*. — 1989. — V. 130. — P. 321–366.

30. Ebin D. G. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid / D. G. Ebin, J. Marsden // *Annals of Mathematics*. — 1970. — V. 92. — P. 102–163.

31. Gunzburger M. D. Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary Navier–Stokes equations with distributed and Neumann control / M. D. Gunzburger, L. S. Hou, Th. P. Svobodny // *Mathematics of Computation*. — 1991. — V. 57, № 195. — P. 123–151.

32. Kilbas A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Elsevier. North–Holland Mathematics Studies, 2006 — 523 p.

33. Litvinov W. G. Model for laminar and turbulent flows of viscous and nonlinear viscous non-Newtonian fluids / W. G. Litvinov // Journal of Mathematical Physics. — 2011. — V. 52. — P. 053102.
34. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state / J. G. Oldroyd // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1950. — V. 200, № 1063. — P. 523–541.
35. Renardy M. Mathematical analysis of viscoelastic flows / M. Renardy // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1989. — V. 21, № 1. — P. 21–36.
36. Simon J. Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ / J. Simon // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1987. — V. 146. — P. 65–96.
37. Zvyagin A. Weak solvability and convergence of solutions for the fractional Voigt- α model of a viscoelastic medium / A. Zvyagin // Russian Mathematical Surveys. — 2019. — V. 274. — P. 549–551.
38. Zvyagin V. G. Homotopy classification of a class of continuous mapping / V. G. Zvyagin, V. T. Dmitrienko // Mathematical Notes. — 1982. — V. 31. — P. 404–410.
39. Zvyagin V. G. Solvability of a parabolic problem with non-smooth data / V. G. Zvyagin, V. P. Orlov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2017. — V. 3453, № 1. — P. 589–606.
40. Zvyagin V. G. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. — De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications V. 12. Walter de Gruyter, 2008. — 230 p.
41. Zvyagin V. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity / V. Zvyagin, V. Orlov // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2018. — V. 38. — P. 6327–6350.
42. Zvyagin V. Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory / V. Zvyagin, V. Orlov // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. — 2021. — V. 23, № 9.

Публикации автора по теме диссертации

43. Звягин А. В. Задача существования управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А. В. Звягин, Е. И. Костенко // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2023. — Т. 69, № 4. — С. 621–642.

Переводная версия: Zvyagin A. V. The existence problem of feedback control for one fractional Voigt model / A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2024. — V. 285, № 6. — P. 795–815.

44. Звягин А. В. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А. В. Звягин, Е. И. Костенко // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1710–1714.

Переводная версия: Zvyagin A. V. On the existence of feedback control for one fractional Voigt model / A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko // Differential Equations. — 2023. — V. 59, № 12. — P. 1778–1783.

45. Костенко Е. И. Слабая разрешимость одной модели движения нелинейно-запаздывающей жидкости в тепловом потоке / Е. И. Костенко // Известия вузов. Математика. — 2024. — № 5. — С. 91–96.

Переводная версия: Kostenko E. I. Weak solvability of one model of a nonlinearly retarded fluid in a thermal field / E. I. Kostenko // Russian mathematics. — 2024. — V. 68, № 5. — P. 77–81.

46. Kostenko E. I. Investigation of the weak solvability of one fractional model nonlinear viscosity fluid / E. I. Kostenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — V. 45, I. 4. — P. 1421–1441.

47. Zvyagin A. Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model / A. Zvyagin, E. Kostenko // Mathematics. — 2023. — V. 11. — Article number 4472.

48. Zvyagin V. G. Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory / V. G. Zvyagin, E. I. Kostenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — V. 44, I. 3. — P. 969–988.