На правах рукописи

Костенко Екатерина Игоревна

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, доцент **Звягин Андрей Викторович**

Официальные оппоненты:

Закора Дмитрий Александрович, доктор физико–математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», кафедра математического анализа, профессор;

Муравник Андрей Борисович, доктор физико–математических наук, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», математический институт имени С.М. Никольского, факультет физико-математических и естественных наук, директор.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится «17» апреля 2025 года в 15:10 на заседании диссертационного совета 24.2.288.14 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., д. 1, ауд. 410п.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО "Воронежский государственный университет".

Автореферат разослан « » февраля 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Турбин Михаил Вячеславович

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Гидродинамика активно используется в различных сферах человеческой деятельности, это объясняется её многолетней историей. Наука, посвященная движению жидкостей, берет начало в XVIII веке. Основоположником гидродинамической теории является Л. Эйлер, получивший систему уравнений, описывающую движение идеальной жидкости. Однако, было замечено, что идеальных сред в природе практически не существует. Данное замечание привело к появлению системы уравнений Навье–Стокса, описывающей движение вязкой ньютоновской жидкости. Можно сказать, что описанные ранее системы уравнений принято относить к классической гидродинамике. Но в последние годы внимание математиков обращено на изучение математических моделей движения более сложных сред, например, полимеров, эмульсий и многих других. Такие среды получили название «неньютоновские жидкости», а гидродинамика — неньютоновская.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных неньютоновской гидродинамике. К их достоинствам следует отнести тот факт, что они более точно описывают свойства жидкостей, например, память сред, время запаздывания среды и многие другие. Отметим, что такими математическими моделями занималось большое число известных ученых таких как Дж.Г. Олдройд, О.А. Ладыженская, П.Л. Лионс, Р. Темам и др. Диссертация посвящена исследованию одного класса таких математических моделей, описывающих движение «неньютоновских жидкостей». Таким образом, можно заключить, что тема диссертации является актуальной.

Цели и задачи диссертационной работы. Изучить для ряда математических моделей неньютоновской гидродинамики вопросы, связанные со слабой разрешимостью и существованием оптимального управления с обратной связью.

Научная новизна. В диссертации получены новые результаты по разрешимости начально–краевых задач и включений, описывающих движение сложных вязкоупругих сред. Все результаты, полученные в работе, являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. В данной работе рассмотрены исключительно теоретические аспекты. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании задач гидродинамики и задач теории управления, а также разработке численных методов и их решения.

Методы исследования. Для исследования поставленных задач использовался аппроксимационно–топологический метод изучения задач гидродинамики (его изложение см. в монографии Zvyagin V.G. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics / V.G. Zvyagin, D.A. Vorotnikov. — De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications V. 12. Walter de Gruyter, 2008. — 230 p.).

Опишем основные этапы данного метода:

1) рассматривается семейство ($0 \leq \xi \leq 1$) вспомогательных (аппроксимационных) задач. Заметим, что корректность данного семейства изучается уже в новом (более «хорошем», чем исходное) функциональном пространстве. Основной целью данного этапа является доказательство разрешимости одной аппроксимационной задачи при $\xi = 1$ этого семейства. С данной целью интегральное равенство из определения слабого решения рассматривается в операторном виде. Затем изучаются свойства введенных операторов. Доказываются априорные оценки решений вспомогательных задач. Заметим, что эти оценки получены в новом функциональном пространстве и зависят от параметра аппроксимации. На основе теории топологической степени устанавливается наличие неподвижной точки операторного уравнения, а, следовательно, слабого решения аппроксимационной задачи при $\xi = 1$;

2) основной целью второго этапа является предельный переход. Для достижения данной цели для решений вспомогательных задач устанавлива-

ются оценки, не зависящие от параметра аппроксимации, в исходном функциональном пространстве.

В диссертации использовались теория топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей, теория топологической степени для уплотняющих векторных полей и теория степени для многозначных векторных полей.

Положения, выносимые на защиту.

1) Теоремы существования слабых решений вязкоупругой модели типа Фойгта с памятью на конечном и бесконечном временных промежутках.

2) Теорема существования слабых решений вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейным коэффициентом вязкости.

3) Теорема существования оптимального управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с памятью на конечном временном промежутке.

4) Теорема существования оптимального управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейным коэффициентом вязкости.

5) Теорема существования слабых решений начально–краевой задачи, описывающей движение жидкости с коэффициентом вязкости μ, зависящим от температуры θ, и с нелинейным коэффициентом запаздывания μ_1.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались *на международных конференциях:* «Воронежская весенняя математическая школа» (Воронеж, Россия 2021); «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2022» (Воронеж, Россия 2022); «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» (Воронеж, Россия 2022); «Вторая конференция Математических центров России» (Москва, Россия 2022); «Воронежская зимняя школа С. Г. Крейна–2024» (посвященная памяти В. П. Маслова) (Воронеж, Россия 2024); «Воронежская весенняя школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXV» (Воронеж, Россия 2024); *на семинарах* НИИ математики ВГУ (2021-2024); *на научных сессиях* ВГУ (2021–2024).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–6]. Работы [1–6] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1–4] в диссертацию вошли только результаты, полученные диссертантом лично. Работа [1] опубликована в журнале из квартиля $Q1$ по международной базе Web of Science.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы и библиографии, содержащей 48 наименований. Общий объем диссертации — 113 страниц.

Содержание диссертации

В первой главе диссертации исследуется слабая разрешимость математической модели движения вязкоупругой жидкости типа Фойгта на конечном и бесконечном временных промежутках.

В первом параграфе рассматривается следующая начально–краевая задача на $Q = [0,T] \times \Omega$, где $T > 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей класса C^2:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu \triangle v -$$

$$- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathrm{Div} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds +$$

$$+ \nabla p = f(t,x); \tag{1.1.1}$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in Q; \tag{1.1.2}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \qquad t, \tau \in [0,T], \qquad x \in \bar{\Omega}; \tag{1.1.3}$$

$$v(t,x) \mid_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \qquad v(0) = v_0,\ x \in \Omega. \tag{1.1.4}$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), ..., v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ искомые скорость и давление рассматриваемой среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с компонентами $\mathcal{E}(v)_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, $\mu > 0, \mu_1 \geq 0$,

$0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ — константы, f — плотность внешних сил и $z(\tau; t, x)$ — траектории движения частиц среды. Символ Div обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов–столбцов матрицы.

Введем шкалу пространств V^β, $\beta \in \mathbb{R}$. Для этого рассмотрим проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$ и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A. По теореме Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через $E_\infty = \{v = \sum_{j=1}^N v_j e_j : v_j \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}\}$ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j. Определим пространство V^β, $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = (\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\beta |v_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{где } v = \sum_{k=1}^\infty v_k e_k.$$

Через $V^{-\beta} = (V^\beta)^{-1}$, $\beta \in \mathbb{N}$, будем обозначать сопряженное пространство к V^β.

Определение 1.1.1 *Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$. Функция $v \in W = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$ называется слабым решением задачи (1.1.1)–(1.1.4), если она удовлетворяет начальному условию $v(0) = v_0$ и для всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ тождеству*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\Omega \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx =$$

$$= \langle f, \varphi \rangle.$$

Определение 1.1.2 *Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v, называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, удо-*

влетворяющая следующим условиям: 1) при п.в. x и любом $t \in [0,T]$ функция $\gamma(t) = z(\tau;t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \qquad t,\tau \in [0,T];$$

2) для любых $t,\tau \in [0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau;t,B)) = m(B)$; 3) при всех $t_i \in [0,T], i = \overline{1,3}$, и п.в. $x \in \bar{\Omega}$ $z(t_3;t_1,x) = z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x))$.

Первым основным результатом первой главы является теорема:

Теорема 1.1.1 *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. Тогда начально–краевая задача (1.1.1)–(1.1.4), описывающая движение вязкоупругой среды типа Фойгта, имеет слабое решение $v \in W$.*

Во втором параграфе первой главы диссертации исследуется слабая разрешимость задачи для вязкоупругой модели типа Фойгта с бесконечной памятью.

Пусть $Q = (-\infty,T] \times \Omega$, где $T > 0$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$ с границей класса C^2. Рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu\Delta v -$$

$$-\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathrm{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))ds +$$

$$+\nabla p = f(t,x); \tag{1.2.1}$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in Q; \tag{1.2.2}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s,z(s;t,x))ds, \qquad t,\tau \in (-\infty,T], \qquad x \in \bar{\Omega}; \tag{1.2.3}$$

$$v(t,x) \mid_{(t,x)\in(-\infty,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{1.2.4}$$

Разрешимость данной начально–краевой задачи будет доказана в пространстве W, которое определяется следующим образом: для $n = 2$ пространство $W = W_1$, а для $n = 3$ пространство $W = W_2$, где

$$W_1 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_2(-\infty, T; V^{-1})\};$$
$$W_2 = \{v : v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}.$$

Здесь $L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})$ — пространство, состоящее из функций v, определенных почти всюду на $(-\infty, T]$ и принимающих значения в V^{-1}, сужение которых на любой отрезок $[r, T] \in (-\infty, T]$ принадлежит $L_{4/3}(r, T; V^{-1})$.

Определение 1.3.2 *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Функция $v \in W$ называется слабым решением (1.2.1)–(1.2.4), если она удовлетворяет для любых $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (-\infty, T]$ тождеству*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx +$$
$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\Omega \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \, \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Вторым основным результатом первой главы является теорема:

Теорема 1.2.1 *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда краевая задача (1.2.1)–(1.2.4), описывающая движение вязкоупругой жидкости типа Фойгта, имеет слабое решение $v \in W$.*

Во второй главе диссертации исследуется существование слабых решений математической модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью. В области $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$ и $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\,[2\mu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] -$$
$$- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathrm{Div} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds +$$
$$+ \nabla p = f(t, x); \qquad (2.1.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in Q; \tag{2.1.2}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \qquad t,\tau \in (-\infty, T], \qquad x \in \bar{\Omega}; \tag{2.1.3}$$

$$v(t,x)\mid_{(t,x)\in(-\infty,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.1.4}$$

Здесь функция I_2 определяется через тензор скоростей деформации следующим образом: $I_2^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}^2(v)$, $\mu_1 \geq 0$ — константа. Функция μ обозначает вязкость среды и удовлетворяет следующим естественным ограничениям:

$$(\mu_1) \quad 0 < C_1 \leq \mu(s) \leq C_2 < \infty; \qquad (\mu_2) \quad -s\mu'(s) \leq \mu(s), \text{ для } \mu'(s) \leq 0;$$

$$(\mu_3) \quad |s\mu'(s)| \leq C_3 < \infty.$$

Определение 2.1.1 *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Функция $v \in W = \{v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}$ называется слабым решением краевой задачи (2.1.1)–(2.1.4), если она удовлетворяет при всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (-\infty, T]$ тождеству*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\Omega \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))ds\, \mathcal{E}(\varphi)dx +$$

$$+2\int_\Omega \mu(I_2(v))\mathcal{E}(v)\mathcal{E}(\varphi)dx = \langle f, \varphi\rangle. \tag{2.1.5}$$

Основным результатом второй главы является теорема:

Теорема 2.1.1 *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда задача (2.1.1)–(2.1.4) имеет слабое решение $v \in W$.*

В третьей главе исследуется существование оптимального управления с обратной связью для описанных выше моделей.

Первый параграф посвящен задаче существования оптимального управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с постоянной вязкостью (1.1.1)–(1.1.4). Для описания задачи управления рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W \multimap L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющее следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху (то есть, для каждого $v \in W$ и открытого множества $V \subset L_2(0,T;V^{-1})$ такого, что $\Psi(v) \subset V$ существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$) и компактно (то есть, образ Ψ относительно компактен в $L_2(0,T;V^{-1})$);

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $C_4 > 0$ такая, что $\|\Psi\,(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} := \sup\{\|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} : u \in \Psi\,(v)\} \leq C_4$ для всех $v \in W$;

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W, v_l \rightharpoonup v_0\,, u_l \in \Psi\,(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $u_0 \in \Psi\,(v_0)$.

Под обратной связью понимается условие

$$f \in \Psi(v), \tag{3.1.1}$$

где v – решение исследуемой задачи.

Определение 3.1.1 *Пара функций* $(v,f) \in W \times L_2(0,T;V^{-1})$ *называется слабым решением задачи управления с обратной связью (1.1.1)–(1.1.4), (3.1.1), если она удовлетворяет если она удовлетворяет a) начальному условию* $v(0) = v_0$*, b) условию обратной связи (3.1.1), c) при любой* $\varphi \in V^1$ *и п.в.* $t \in (0,T)$ *тождеству*

Первым основным результатом главы является теорема:

Теорема 3.1.1 *Пусть* $v_0 \in V^0$*, многозначное отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* $(\Psi 1) - (\Psi 4)$*. Тогда задача управления с обратной связью (1.1.1)–(1.1.4), (3.1.1) имеет слабое решение.*

Обозначим через $\Sigma \subset W \times L_2(0,T;V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1.1.1)–(1.1.4), (3.1.1). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) Существует число C_5 такое, что $\Phi(v,f) \geqslant C_5$ для всех $(v,f) \in \Sigma$.

(Ф2) Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W и $f_m \to f_*$ в $L_2(0,T;V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Вторым основным результатом главы является теорема:

Теорема 3.1.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1.1, пусть также функционал качества* Φ *удовлетворяет условиям* $(\Phi1)-(\Phi2)$. *Тогда задача оптимального управления с обратной связью (1.1.1)–(1.1.4), (3.1.1) имеет слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что* $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.

Второй параграф третьей главы посвящен задаче управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью (2.1.1)–(2.1.4). Для нашей задачи также рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W \multimap L_2(-\infty, T; V^{-1})$, удовлетворяющее условиям $(\Psi1) - (\Psi4)$, описанным выше, где W — функциональное пространство из второй главы. Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \tag{3.2.1}$$

Определение 3.2.1 *Пара функций* $(v, f) \in W \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$ *называется слабым решением задачи управления с обратной связью (2.1.1)–(2.1.4), (3.2.1), если она удовлетворяет a) условию обратной связи (3.2.1), b) при любой* $\varphi \in V^1$ *и п.в.* $t \in (-\infty, T)$ *тождеству (2.1.5).*

Третьим основным результатом главы является теорема:

Теорема 3.2.1 *Пусть многозначное отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* $(\Psi1)-(\Psi4)$. *Тогда задача управления с обратной связью (2.1.1)–(2.1.4), (3.1.2) имеет слабое решение.*

Обозначим через $\Sigma \subset W \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (2.1.1)–(2.1.4), (3.2.1). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим аналогичным условиям $(\Phi1) - (\Phi2)$, описанным выше.

Четвертым основным результатом главы является теорема:

Теорема 3.2.2 *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1 и функционал* Φ *удовлетворяет условиям* $(\Phi1) - (\Phi2)$. *Тогда задача оптимально-*

го управления с обратной связью (2.1.1)–(2.1.4), (3.2.1) имеет решение (v_*, f_*), *удовлетворяющее* $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.

В четвертой главе диссертации исследуется существование слабого решения математической модели, описывающей движение жидкости с коэффициентом вязкости μ, зависящим от температуры θ, и с нелинейным коэффициентом запаздывания μ_1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$ рассматривается начально–краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\, \Big[\mu(\theta)\mathcal{E}(v) - \mu_1(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x)ds\Big] + \nabla p = f; \quad (4.1.1)$$

$$\mathrm{div}\, v(t, x) = 0, \qquad v(t, x)\mid_{t=0} = v_0, \qquad v(t, x)\mid_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta =$$

$$= \Big[\mu(\theta)\mathcal{E}(v) + \mu_1(I_2(v)) \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, x)ds\Big] : \mathcal{E}(v) + g; \quad (4.1.3)$$

$$\theta\mid_{t=0} = \theta_0, \qquad \theta\mid_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (4.1.4)$$

Здесь $\theta(t, x)$ — функция температуры, g — источник внешнего тепла, $\mu_1 > 0$ — время ретардации (запаздывания), $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\mu > 0$ — вязкость жидкости.

На коэффициент запаздывания рассматриваемой жидкости наложены естественные ограничения: функция $\mu_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : \mu_1(s)$ должна быть определенная при $s \geq 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

$$(a) \quad 0 < C_6 \leq \mu_1(s) \leq C_7 < \infty; \qquad (b) \quad -s\mu_1'(s) \leq \mu_1(s) \text{ при } \mu_1'(s) \leq 0;$$
$$(c) \quad |s\mu_1'(s)| \leq C_8 < \infty.$$

Определение 4.1.1 *Пара функций* (v, θ), *где* $v \in W_1 = \{v : v \in C([0, T], V^1), v' \in L_2(0, T; V^1)\}, \theta \in W_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))\}$ *называется слабым решением начально–краевой задачи*

(4.1.1)–(4.1.4), если она удовлетворяет начальным условиям $v\mid_{t=0}=v_0$ *и* $\theta\mid_{t=0}=\theta_0$ *и при всех* $\varphi\in V^1$ *и* $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ *и почти всех* $t\in[0,T]$ *тождествам*

$$\langle v',\varphi\rangle-\int_\Omega\sum_{i=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\int_\Omega\mu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(\varphi)dx+$$

$$+\int_\Omega\mu_1(I_2(v))\int_0^t\mathcal{E}(v)(s,x)ds:\mathcal{E}(\varphi)\,dx=\langle f,\varphi\rangle,$$

$$\langle\theta',\phi\rangle-\int_\Omega\sum_{i=1}^n v_i\theta_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}dx+\chi\int_\Omega\mathcal{E}(\theta):\mathcal{E}(\phi)dx=\int_\Omega(\mu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)):\phi dx$$

$$+(\mu_1(I_2(v))\int_0^t\mathcal{E}(v)(s,x)ds:\mathcal{E}(v),\phi)+\langle g,\phi\rangle.$$

Основным результатом четвертой главы является следующая теорема:

Теорема 4.1.1 *Пусть вязкость жидкости* $\mu(\theta)\in C^2(-\infty,+\infty)$ *и* $0<C_4<\mu(\theta)<C_5$*, время запаздывания* μ_1 *удовлетворяет условиям* $(a)-(c)$, $f\in L_2(0,T;V^{-1})$, $g\in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0\in V^0$, $\theta_0\in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда при* $1<p<4/3$ *начально–краевая задача (4.1.1)–(4.1.4) имеет слабое решение.*

Список публикаций по теме диссертации

[1] Zvyagin A. Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model / A. Zvyagin, E. Kostenko // Mathematics. — 2023. — V. 11. — Article number 4472.

[2] Звягин А. В. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А. В. Звягин, Е. И. Костенко // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, Н. 12. — С. 1710–1714. *Переводная версия:* Zvyagin A. V. On the existence of feedback control for one fractional Voigt model / A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko // Differential Equations. — 2023. — V. 59, N. 12. — P. 1778–1783.

[3] Zvyagin V. G. Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory / V. G. Zvyagin, E. I. Kostenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — V. 44, I. 3. — P. 969–988.

[4] Звягин А. В. Задача существования управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А. В. Звягин, Е. И. Костенко // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2023. — Т. 69, Н. 4. — С. 621–642.

Переводная версия: Zvyagin A. V. The existence problem of feedback control for one fractional Voigt model / A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2024. — V. 285, N. 6. — P. 795–815.

[5] Костенко Е. И. Слабая разрешимость одной модели движения нелинейно–запаздывающей жидкости в тепловом потоке / Е. И. Костенко // Известия вузов. Математика. — 2024. — Н. 5. — С. 91–96.

Переводная версия: Kostenko E. I. Weak solvability of one model of a nonlinearly retarded fluid in a termal field / E. I. Kostenko // Russian mathematics. — 2024. — V. 68, N. 5. — P. 77–81.

[6] Kostenko E. I. Investigation of the weak solvability of one fractional model nonlinear viscosity fluid / E. I. Kostenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — V. 45, I. 4. — P. 1421–1441.