

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Костенко Екатерины Игоревны
«Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных
уравнений с памятью», представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.2. – «Дифференциальные уравнения и математическая физика»
в диссертационный совет 24.2.288.14 на базе Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Воронежский государственный университет»

Актуальность темы исследования

Диссертационная работа Е.И. Костенко «Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений с памятью» посвящена изучению начально-краевых задач, описывающих движение одного класса неньютоновских сред. А именно, изучаются математические модели для вязкоупругих сред с памятью. Изучению математических проблем для моделей движения таких сред посвящали свои работы J.-L. Lions, G.P. Galdi, О.А. Ладыженская, В.В. Пухначев, А.П. Осколков, С.Н. Антонцев, П.Е. Соболевский и другие известные математики. Начально-краевые задачи, исследуемые в диссертации и подобные им, возникают в прикладных задачах при описании движений различных полимеров, эмульсий и других «неклассических» сред. Одним из основных аспектов изучения начально-краевых задач для уравнений гидродинамики является исследование их корректности, в частности, доказательство теорем существования и единственности решений, а также исследование их качественных свойств. Таким образом, развитие методов исследования начально-краевых задач неньютоновской гидродинамики, безусловно, представляет значительный научный интерес.

Структура и содержание работы

Диссертация изложена на 113 страницах и состоит из введения, четырёх глав, списка обозначений и списка литературы. Список литературы содержит 42 наименования использованных источников и 6 наименований публикаций автора по теме диссертации.

Во введении изложены цели и задачи диссертационного исследования, обоснована актуальность темы исследования. Приведено описание математических моделей, исследуемых в диссертации, история их возникновения и краткий обзор результатов. Сформулированы результаты, выносимые на защиту. Указана апробация результатов.

Первая глава диссертации посвящена основной изучаемой математической модели движения вязкоупругой среды с ограниченной (первый параграф) и бесконечной (второй параграф) памятью. В данной модели учитывается влияние эффектов памяти и время релаксации среды.

Вследствие этого в основном уравнении движения среды возникает интеграл по времени, учитывающий предысторию течения среды. Важной особенностью здесь является рассмотрение интегро-дифференциальной задачи с памятью вдоль траектории движения частицы среды, что существенно усовершенствует изучаемую математическую модель. В связи с этим, в изучаемой системе появляется дополнительное уравнение – задача Коши в интегральном виде, определяющая траекторию движения частицы среды по скорости. В силу того, что скорость частицы среды принадлежит соболевскому пространству, разрешимость задачи Коши определяется в понятиях регулярных Лагранжевых потоков.

Для изучаемых начально-краевых задач аппроксимационно-топологическим методом доказывается теорема существования слабых решений в ограниченной двумерной и трехмерной области. Суть данного метода заключается в следующем. На первом шаге вводится вспомогательное семейство регуляризованных аппроксимационных задач и эквивалентное им параметрическое семейство операторных уравнений. На втором шаге доказывается разрешимость аппроксимационной задачи (операторного уравнения) на основе теории топологической степени. Наконец, на третьем шаге осуществляется предельный переход к нулю параметра регуляризации. При этом существенным достижением диссертанта является применение на втором шаге теории топологической степени для уплотняющих векторных полей, развитой в воронежской математической школе (М.А. Красносельский, Б.Н. Садовский и др.). В аналитическом плане применение указанной теории степени основано на доказательстве свойства уплотняемости по мере некомпактности Куратовского оператора, соответствующего интегро-дифференциальному члену уравнения, и связанного с памятью среды.

Во второй главе диссертации изучается описанная выше математическая модель с бесконечной памятью в случае, когда вязкость среды задана нелинейной функцией. Исследование моделей с нелинейной вязкостью, с одной стороны, позволяет существенно расширить класс изучаемых сред, с другой стороны – существенно усложняет математические исследования таких начально-краевых задач. В диссертационной работе рассматривается вязкость, предложенная профессором В.Г. Литвиновым. Для изучаемой начально-краевой задачи доказывается теорема существования слабых решений в ограниченной двумерной и трехмерной области.

В третьей главе диссертации изучается задача оптимального управления с обратной связью для описанной выше математической модели. Рассмотрены две задачи управления. Одна – для модели с постоянной вязкостью и ограниченной памятью среды, а вторая – для модели с нелинейной вязкостью и бесконечной памятью среды. В данных задачах внешние силы рассматриваются в качестве управления и зависят от скорости движения жидкости. То есть внешние силы принадлежат образу некоторого многозначного отображения. Это позволяет более точно выбирать управление,

так как в данном случае управление выбирается не из изначально заданного конечного набора имеющихся управлений, а из всевозможных вариантов, для которых выполнены все необходимые условия существования управления. Данный подход оказался возможным благодаря лемме Филиппова, которая устанавливает эквивалентность управляемых систем и дифференциальных включений. Это позволило без труда переносить на управляемые системы полученные ранее утверждения, касающиеся дифференциальных включений. Более того, изученные свойства множеств решений дифференциальных включений могут быть использованы для решений задач оптимизации. Это позволило получить результаты для задачи управления с обратной связью для изучаемых моделей. А именно, для изучаемых моделей установлено существование управления с обратной связью, а также доказано существование оптимального управления с обратной связью, минимизирующее заданный функционал качества.

В четвёртой главе диссертации изучается термо-модель, описывающая движение вязкоупругой среды с памятью. В рассмотренной задаче вязкость среды рассматривается зависящей от температуры. Появление температуры сопряжено с появлением дополнительного уравнения, описывающего баланс энергии, а также дополнительного начального условия и граничного условия для температуры. Появление уравнения баланса энергии вызывает основные трудности при математическом исследовании. Эти трудности преодолеваются, в частности, применением метода замороженных коэффициентов.

Новизна полученных результатов

В диссертации Е.И. Костенко получены новые результаты для начально-краевых задач, описывающих движение одного класса вязкоупругих моделей типа Фойгта – теоремы существования слабых решений и оптимального управления с обратной связью.

Достоверность результатов исследования

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью использованных методов и подробными математическими доказательствами.

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в шести статьях, входящих в перечень научных изданий ВАК и приравненных к ним. Точнее, все шесть работ опубликованы в журналах, входящих в международные базы цитирования Web of Science или Scopus. Результаты работы многократно докладывались на международных и всероссийских научных конференциях.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация Е.И. Костенко носит теоретический характер, однако её результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании задач

гидродинамики и задач теории управления, а также при разработке численных методов их решения.

Замечания

1. В тексте встречаются пунктуационные, грамматические ошибки и незначительные опечатки:
 - страница 5 (строки 2 сверху и 4 снизу), страница 8 (строка 5), страница 17 (строка 1 снизу), страница 21 (строка 8 снизу), страница 44 (строка 5 сверху), страница 67 (строка 11 снизу), страница 78 (строки 3, 13 сверху) и т.д. – лишние запятые;
 - страница 16 (строка 7 снизу), страница 27 (строки 8, 9 снизу), страница 29 (строка 3 снизу), страница 31 (строка 3 сверху), страница 36 (строка 6 снизу), страница 38 (строки 7, 9 снизу), страница 55 (строка 1 сверху) и т.д. – неверные окончания слов;
 - в формулах 1.1.6, 1.1.12, 2.2.6, формуле над 2.2.7 и в формуле 3.1.6 потеряна операция ":"; в теореме 1.1.2. лишний индекс у дивергенции; опечатки в формулах на странице 18 (строки 6, 10, 11 снизу); опечатки в формулах на странице 20 (строки 1, 3 снизу); опечатки в формулах на странице 105 (строка 5 сверху) и странице 106 (строка 6 сверху).
2. На странице 12 вводится оператор Стокса и шкала гильбертовых пространств, связанная с ним. На странице 16 с помощью билинейной формы вводится этот же оператор. Хорошо бы отметить, что это тот же оператор.
3. На странице 21 приведена неверная формула для нормы в пространстве непрерывных функций и это усложняет понимание вычислений. В тексте местами неверно указывается принадлежность z некоторым множествам, хотя z – векторное поле (РЛП).
4. В диссертации совершенно не затронут вопрос о единственности решений исследуемых задач. В двумерном случае, скорее всего, этот вопрос может быть решен. Однако этот вопрос может быть предметом дальнейших исследований.

Заключительная оценка работы

Указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования и не меняют общей положительной оценки работы. Диссертация в целом написана грамотно и оформлена в соответствии с требованиями. Совокупность полученных в ней результатов можно квалифицировать как научное достижение, имеющее принципиальное значение для развития теории дифференциальных уравнения с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Костенко Екатерины Игоревны «Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных

уравнений с памятью» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук является законченной научно-квалификационной работой и соответствует требованиям пп. 9 – 11 «Положения о присуждении учёных степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842 (в редакции Постановлений Правительства РФ от 21.04.2016 № 335, от 01.10.2018 № 1168), предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, а её автор, Костенко Екатерина Игоревна, заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой математического анализа Физико-технического
института ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»
ЗАКОРА Дмитрий Александрович

 19 марта 2025 г.

Контактные данные:

тел.: +7(3652) 60-80-70, e-mail: dmitry.zakora@cfuv.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Адрес места работы:

295007, Республика Крым, г. Симферополь,
проспект Академика Вернадского, 4, главный корпус «А»,
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»
Физико-технический институт
Тел.: +7(3652) 60-80-70; e-mail: phystech@cfuv.ru

Подпись сотрудника Физико-технического института

ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»

Д.А. Закры удостоверяю:

Проректор по научной деятельности «КФУ им. В.И. Вернадского»

д.т.н., профессор Н.В. Любомирский



19 марта 2025 г.