О т з ы в

официального оппонента на диссертационную работу
Костенко Екатерины Игоревны
«Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений с памятью»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертационная работа Е.И. Костенко «Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений с памятью» посвящена исследованию корректности и оптимального управления с обратной связью для математических моделей, описывающих движение вязкоупругих сред с памятью. Интерес к таким моделям и важность их исследования обусловлены успешным применением полученных результатов для решения многочисленных прикладных задач. Изучению математических проблем моделей движения жидких сред посвящены работы большого числа известных математиков: Ж. Лере, О.А. Ладыженской, R. Temam, J.-L. Lions, G.P. Galdi, E.S. Titi, J. Malek и т.д. Хорошо известны исследования классической модели движения вязкой несжимаемой жидкости, а именно, системы уравнений Навье—Стокса. Однако оказывается, что многие жидкости не удовлетворяют реологическому соотношению для системы уравнений Навье—Стокса. Такие жидкости получили название неньютоновских. Изучение математической корректности начально-краевых задач для неньютоновских жидкостей является актуальным и активно развивающимся направлением современной математики. Данному направлению посвящена диссертационная работа Е.И. Костенко. Таким образом, актуальность темы диссертации не вызывает никаких сомнений.

Диссертационная работа состоит из 113 страниц, в которые входят введение, четыре главы, список обозначений и список литературы. Список литературы состоит из 48 источников.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования. Определяются цели и задачи исследования. Приводятся основные научные результаты, полученные в диссертации.

Первая глава посвящена исследованию слабой разрешимости начально-краевой задачи, описывающей движение вязкоупругой жидкости, в которой учитывается память движения жидкости. Для этого в классическую систему Навье—Стокса добавляется интегральное слагаемое вида

$$\frac{\mathrm{Const}}{\Gamma(1-\alpha)}\mathrm{Div}\int\limits_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)[s,z(s;t,x)]ds,$$

которое как раз и отвечает за память движения среды. Таким образом, получается интегродифференциальная система уравнений, разрешимость которой и изучается: в первом параграфе — случай с памятью, ограниченной на времен*о*м интервале $[0, T]$, во втором параграфе — случай с бесконечной памятью на времен*о*м интервале $(-\infty, T]$. Разумеется, интегральные слагаемые указанного вида рассматривались и ранее (начиная, как минимум, с Фойгта), однако исследование Костенко обладает следующей принципиальной новизной: за счет функции $z(s; t, x)$ учитывается траектория движения частицы среды (ранее считалось, что положение частицы остается неизменным, что было значительным упрощением математической модели), в ядро вводится множитель $(t-s)^{-\alpha}$ и впервые рассматривается ситуация, когда жидкость «помнит» *все* свои состояния (у предшественников речь шла только о состояниях за конечный промежуток времени).

Для каждой из этих двух начально-краевых задач устанавливается слабая разрешимость.

Во второй главе рассматриваемая задача качественно обобщается следующим образом: коэффициент вязкости перестает быть линейным. Для этого конвективный член классического уравнения Навье—Стокса заменяется на $\mathrm{Div}[2\mu(I_2(v))\mathcal{E}(v)]$, где μ — нелинейная функция, а I_2 определяется через тензор скоростей деформации (так называемый литвиновский тип вязкости). Для этой задачи также устанавливается слабая разрешимость, причем в обоих случаях — при конечном и бесконечном времен*ы*х интервалах в интегральном слагаемом уравнения.

В третьей главе для указанной математической модели, описывающей движение вязкоупругой жидкости с памятью (как для постоянной вязкости и ограниченной памяти, так и для нелинейной вязкости и бесконечной памяти), решается задача оптимального управления. В этой главе рассматриваются уже не дифференциальные уравнения, а дифференциальные включения, то есть правая часть является многозначным отображением, нелинейным образом зависящим от поля скоростей. Предполагается, что оно полунепрерывно сверху, компактно, ограничено и слабо замкнуто, а любое его значение непусто, компактно и выпукло. При указанных условиях диссертанту удается показать разрешимость указанной задачи для полученных дифференциальных включений, а также содержательным образом ввести ограниченный снизу и слабо непрерывный функционал качества и доказать существование оптимального решения, минимизирующего этот функционал.

Примечательно, что применяемый в диссертации подход позволяет рассмотреть *различные* функционалы (каждый из которых может использоваться, как функционал качества) и определить, можно их минимизировать или нет.

В четвертой (заключительной) главе диссертации исследование распространяется на тот случай, когда вязкость жидкости зависит от температуры.

Следует отметить, что при выполнении вышеуказанных исследований Костенко Е. И. пришлось преодолеть очень существенные технические трудности и использовать самые современные методы теории топологической степени (в том числе — для уплотняющих векторных полей, для многозначных векторных полей и для отображений типа Лере–Шаудера) и теории регулярных лагранжевых потоков, аппроксимационно–топологический метод (включая, в частности, аппроксимацию посредством сглаживания конвективного члена), метод малого параметра и другие современные методы функционального анализа и теории обобщенных решений уравнений с частными производными. Такая работа требует тщательного основания всех предельных переходов и оценок решений на каждом шаге итерационного процесса, и диссертанту полностью удалось справиться с этим — все доказательства строго обоснованы.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в шести статьях в рецензируемых журналах, включенных в Перечень ВАК Минобрнауки РФ, а также входящих в международные базы данных WoS и Scopus. Две работы опубликованы автором единолично. Одна работа опубликована в журнале, входящем в первый квартиль по международной базе данных WoS. Кроме того, результаты Е.И. Костенко докладывались и обсуждались на международных научных конференциях, а также поддерживались различными научными фондами.

По тексту диссертации имеются следующие замечания.

1. Когда утверждается, что какой-либо оператор является L-уплотняющим, читателю нужно понимать, о каком именно операторе L идет речь. Поэтому формулировку леммы 1.1.3 следовало бы дополнить, так как соответствующий оператор L упоминается последний раз восемью страницами ранее — в лемме 1.1.1. Аналогичным недостатком страдают лемма 1.2.4 и лемма 2.3.5.

2. Условие (Ψ1) на странице 81 допускает неоднозначное толкование — например, его можно понять так, что среди значений отображения Ψ есть непустые множества, есть компактные множества и есть выпуклые множества. Правильная формулировка — любое значение этого отображения непусто, компактно и выпукло. Кроме того, стоило бы привести примеры многозначных отображений, удовлетворяющих этому условию.

3. Буквенные обозначения условий и свойств (такие, как (Ψ1)–(Ψ4) на стр. 81-82 или (Φ1)-(Φ2) на стр. 83) крайне неудачны. Их гораздо труднее искать в тексте, чем аналогичные объекты, обозначенные с помощью номеров (даже составных).

4. В тексте диссертации имеется небольшое число опечаток, которые существенно не влияют на изложение результатов диссертации.

Приведенные замечания носят технический и редакционный характер и не оказывают существенного влияния на главные результаты диссертации.

Все результаты диссертации являются новыми. Достоверность теоретических выводов вытекает из строгих, логических и математически обоснованных доказательств. Тема диссертации актуальна и соответствует специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Заключение. Диссертация Е.И. Костенко «Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений с памятью» представляет собой самостоятельно выполненную научно-квалификационную работу, которая удовлетворяет критериям, предъявленным к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (пп. 9-14 Положения ВАК). Совокупность полученных в ней результатов можно квалифицировать как научное достижение, имеющее принципиальное значение для развития теории дифференциальных уравнений с частными производными. Считаю, что Екатерина Игоревна Костенко заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

Директор Математического института С.М. Никольского факультета Физико-математических и естественных наук ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», доктор физико-математических наук (специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), Муравник Андрей Борисович

Адрес: ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

тел. +7-495-955-09-68

e-mail: muravnik_ab@pfur.ru

Согласен на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.

А.Б. Муравник

13.03.2025

Подпись Муравника А. Б. заверяю

Ученый секретарь Ученого совета РУДН

Курылев Константин Петрович