

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

## ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ

им. М.А. Лаврентьева

СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

(ИГиЛ СО РАН)

Академика Лаврентьева проспект, 15, Новосибирск, 630090  
Тел. / факс: (383) 333-16-12. E-mail: igil@hydro.nsc.ru  
ОКПО 03533978; ОГРН 1025403648600;  
ИНН/КПП 5408100064/540801001

28 ФЕВ 2025

№ 15320-16-25-224

На № \_\_\_\_\_

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор федерального  
государственного бюджетного  
учреждения науки Института  
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева  
Сибирского отделения Российской  
академии наук



Д.Ф.-М.Н.

Ерманюк Е.В.  
2025 г.

## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

**Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института  
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева**

**Сибирского отделения Российской академии наук**

**на диссертационную работу Костенко Екатерины Игоревны**

**«Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных  
уравнений с памятью», представленную на соискание ученой степени**

**кандидата физико-математических наук по специальности**

**1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Диссертационная работа Костенко Екатерины Игоревны посвящена исследованию начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при моделировании течений несжимаемых вязкоупругих жидкостей. А именно, изучаются математические модели, относящиеся к неньютоновской гидродинамике: модели движения вязкоупругих сред с памятью и с постоянной и нелинейной вязкостями. Такие модели более точно описывают физические свойства жидкости, ведь в них включены члены, отвечающие, например, за учет траектории движения частицы жидкости и времени ретардации. Автором получены теоремы существования слабых решений для рассматриваемых моделей, а также теоремы существования оптимального управления с обратной связью для этих задач.

Таким образом, цели и задачи диссертационной работы – для ряда математических моделей вязкоупругих сред с памятью изучить вопросы, связанные со слабой разрешимостью и существованием оптимального управления с обратной связью.

**Актуальность темы диссертации.** В последние годы внимание многих математиков привлекает построение и анализ математических моделей полимерных растворов и сплавов, эмульсий, суспензий и других жидких или полужидких сред, не описываемых моделями классической (ньютоновской) гидродинамики и получивших в связи с этим название неньютоновских жидкостей. Этот класс сред рассматривался во многих работах Дж. Максвелла, Дж.Г. Олдройта, М. Ренарди, О.А. Ладыженской, В.В. Пухначева, К. Труселла, G.P. Galdi, P.L. Lions, E.S. Titi, K.R. Rajagopal и других авторов. Данная диссертация посвящена исследованию начально-краевых задач для одного типа неньютоновских сред, а именно, моделей движения вязкоупругих сред. Вопрос о математической корректности начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих течения вязкоупругих несжимаемых жидкостей, является неизменно актуальным на протяжении многих десятилетий в связи с высокой практической востребованностью этих задач в естественных науках и технике. Кроме того, данный класс задач вызывает неизменный интерес математиков, поскольку их решение постоянно встречает существенные трудности в математическом плане, что стимулирует дальнейшее развитие математических методов.

Ввиду изложенного выше, актуальность темы диссертационной работы сомнений не вызывает.

**Структура и содержание диссертации.** Диссертация, объемом 113 страниц, состоит из введения, четырех глав, в которых в общей сложности 6 параграфов, списка обозначений и списка литературы, состоящего из 42 наименований использованных источников и 6 наименований публикаций автора по теме диссертации.

**Во введении** изложена история вопроса, поставлены цели и задачи, приведены обозначения, используемые в диссертации, а также рассмотрены научная новизна, практическая и теоретическая значимости, положения, выносимые на защиту, апробация результатов, краткое содержание работы.

**Первая глава** посвящена исследованию начально-краевой задачи, описывающей движение вязкоупругой жидкости типа Фойгта. Данная глава состоит из двух параграфов. Первый параграф посвящен доказательству слабой разрешимости для вязкоупругой среды типа Фойгта с памятью на конечном временном промежутке. Слабая разрешимость устанавливается с помощью аппроксимационно-топологического метода исследования задач гидродинамики. Основным результатом данного параграфа является теорема 1.1.3. Второй параграф посвящен исследованию слабой разрешимости начально-краевой задачи, описывающей движение вязкоупругой модели типа

Фойгта с бесконечной памятью. В данном параграфе также используется аппроксимационно-топологический метод, однако, тип аппроксимационной задачи вводится иной, что приводит к необходимости получения новых оценок. Стоит отметить, что слабая разрешимость семейства вспомогательных (или аппроксимационных) задач основывается на использовании теории топологической степени для уплотняющих векторных полей. Основным результатом данного параграфа является теорема 1.2.1.

**Во второй главе** продолжается исследование неньютоновских моделей гидродинамики. Однако, теперь устанавливается слабая разрешимость вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью. Разрешимость изучаемой начально-краевой задачи также получена с помощью аппроксимационно-топологического метода. Основным результатом данной главы представлен теоремой 2.1.1.

**Глава три** посвящена изучению вопроса существования оптимального управления с обратной связью для описанных выше моделей вязкоупругих сред типа Фойгта с памятью: модели с памятью на конечном временном промежутке; модели с нелинейной вязкостью. При изучении также используется аппроксимационно-топологический метод. Основным отличием данной главы от предыдущих двух является изучение операторных включений, а не операторных уравнений. Для доказательства существования управления в данном случае используется теория топологической степени для многозначных векторных полей. В данной главе основные результаты содержатся в теоремах 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2.

**Четвертая глава** посвящена изучению начально-краевой задачи для термо-модели, описывающей движение нелинейно-запаздывающей жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры. Появление температуры приводит к добавлению дополнительного уравнения баланса энергии – параболического уравнения с негладкими коэффициентами и правой частью из  $L_1(Q_T)$ , что существенно осложняет математические исследования. В данной главе установлена слабая разрешимость описанной задачи в двумерном случае. Для доказательства использовалась теория топологической степени Лере-Шаудера и итерационный процесс. Основным результатом данной главы является теорема 4.1.1.

**Достоверность и новизна положений, сформулированных в диссертации. Степень обоснованности положений и выводов.** Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1) Доказаны теоремы существования слабых решений для вязкоупругой модели типа Фойгта с памятью на конечном и бесконечном временных промежутках.

2) Доказана теорема существования слабых решений для вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью.

3) Доказана теорема существования оптимального управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с постоянной вязкостью и памятью на конечном временном промежутке.

4) Доказана теорема существования оптимального управления с обратной связью для вязкоупругой модели типа Фойгта с нелинейной вязкостью и бесконечной памятью.

5) Доказана теорема существования слабых решений начально-краевой задачи для математической модели движения нелинейно-запаздывающей жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры.

Полученные автором диссертации результаты имеют несомненную новизну и значимость для развития качественной теории нелинейных уравнений с частными производными и связанных с этой теорией положений в механике вязкоупругих сред. Предложенные в диссертационной работе методы и подходы могут быть применены к исследованию широкого круга задач для нелинейных дифференциальных уравнений. Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена строгими математическими доказательствами. Используемые в диссертации методы основаны на хорошо известных положениях функционального анализа и теории классических и обобщенных решений уравнений с частными производными. Основное содержание диссертационной работы, ее главные научные результаты в полной мере опубликованы в 6 научных статьях в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и индексируемых базами данных Web of Science и Scopus, докладывались на международных конференциях, обсуждались на научных семинарах.

Следует подчеркнуть, что полученные в диссертации результаты представлены последовательно и изложены логично.

#### **Теоретическая и практическая значимость результатов диссертации.**

Полученные автором диссертации результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными составного типа, а также в исследованиях прикладных задач механики сплошных сред.

Вместе с тем работа не лишена некоторых **замечаний и пожеланий**:

1. В диссертации для доказательства слабой разрешимости вспомогательной задачи используются факты теории топологической степени (стр. 38, 59, 102). Было бы правильным либо сделать ссылку на литературный источник, либо привести требуемые понятия.

2. При выводе априорных оценок автор повсеместно и правильно указывает появившиеся константы в данных оценках, однако если быть аккуратным, то

следовало бы уточнить, каким именно образом данные константы зависят от параметров исходной задачи (от области течения  $\Omega$ , меры  $\Omega$ ,  $C^2$ -нормы и т.д., количество которых достаточно велико).

3. В тексте диссертации имеется небольшое число опечаток, которые не влияют на изложение основных результатов диссертации (например, стр. 6 «модели ньютона», стр. 7 «с указанием методов и подходов, используемые», стр. 29 «Пользуясь неравенства Коши» и др.).

4. В диссертации не рассматривается вопрос о единственности решений исследуемых задач, имеющий большое теоретическое и практическое значение.

5. На стр. 12 работы вводится шкала пространств  $V^{\beta}$ , основанная на операторе  $A$ , который следом вводится. Далее в диссертации в параграфах, посвященных аппроксимационным задачам, также используется оператор  $A$ , и он вводится заново в других обозначениях. Необходимо указать единство этого оператора по всей диссертации.

6. В каких-то главах диссертационной работы используется обозначение области  $Q_T$ , в каких-то –  $Q$ . Следовало бы сохранить одно из обозначений во всей диссертации.

Приведенные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы. В целом диссертация написана ясным научным языком, хорошо структурирована и оформлена. Автореферат соответствует установленным требованиям и полностью отражает основное содержание диссертации.

На основании вышесказанного можно сделать следующие **выводы**. Диссертация Костенко Екатерины Игоревны «Исследование разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений с памятью» выполнена на высоком научном уровне и является завершенной научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований получены новые теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Результаты работы являются новыми, актуальными и представляют несомненный интерес для специалистов.

Изложение результатов логичное и последовательное, текст хорошо структурирован и разбит на главы и параграфы, удобен для восприятия. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях начально-краевых задач для вязкоупругих сред, проводимых в Московском государственном университете

имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Российском университете дружбы народов, Воронежском государственном университете, в Новосибирском государственном университете, в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, в институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН и других научных организациях.

Диссертационная работа соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней» (пункты 9-14), утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842 от 24.09.2013 г., а ее автор Костенко Екатерина Игоревна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Отзыв подготовлен главным научным сотрудником Лаборатории краевых задач механики сплошных сред, доктором физико-математических наук по специальности – 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, членом-корреспондентом РАН Плотниковым Павлом Игоревичем. Отзыв обсужден и одобрен на заседании лаборатории краевых задач механики сплошных сред Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, протокол № 1 от 25.02.2025 г.

Председательствующий на заседании  
Главный научный сотрудник  
Лаборатории краевых задач  
механики сплошных сред  
доктор физико-математических наук  
член-корреспондент РАН

П.И. Плотников

Подпись Плотникова П.И. ЗАВЕРЯЮ  
Изначальн. ОТДЕЛА КАДРОВ  
БАТИНА М.К.  
26 02 2025 г.



Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Почтовый адрес: 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 15.  
630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 15.  
Тел.: +7(383)333-16-12, e-mail: plotnikov@hydro.nsc.ru