

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»



На правах рукописи

Булатов
Юрий Николаевич

**В-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА—БЕССЕЛЯ—КИПРИЯНОВА**

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ляхов Л.Н.

Оглавление

Введение	5
Глава 1	Сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя с отрицательным параметром
	13
1.1	Решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром
	15
1.1.1	Сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя с отрицательным параметром
	15
1.1.2	Случай $q = q_1 = 0$
	16
1.1.3	Случай $q = q_2 = \gamma + 1$
	19
1.1.4	Связь с решениями классического уравнения Бесселя
	22
1.2	Оператор $B_{-\gamma}$ в произвольной весовой билинейной форме
	24
1.3	Ортогональность $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя
	28
1.4	Интеграл Ганкеля и $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя
	29
Глава 2	Обобщённый $\mathbb{T}$-псевдосдвиг
	31
2.1	Интеграл Пуассона для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя положительного порядка
	33
2.2	Теорема сложения для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя положительного порядка и оператор $\mathbb{T}$ -псевдосдвига
	33
2.3	Свойства обобщённого $\mathbb{T}$ -псевдосдвига
	34
2.4	Аналоги неравенства Петре для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига
	38
2.5	Обобщённый $\mathbb{T}$ -сдвиг
	41
2.5.1	Принадлежность $\mathbb{T}$ -сдвига классу обобщённых сдвигов Левитана
	42
2.5.2	Дополнительные свойства обобщённого $\mathbb{T}$ -сдвига
	44
2.6	$\mathbb{T}$ -Квазисдвиг и его свойства
	47
2.7	Применение оператора обобщённого $\mathbb{T}$ -псевдосдвига к решению задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприанова
	48

2.8	Формулы Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения	50
Глава 3	Фундаментальные решения оператора $B_{-\gamma}$ и $\Delta_{B_{-\gamma}}$-оператора Киприянова	54
3.1	Фундаментальные решения оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью (вырождением) в начале координат	54
3.1.1	Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в $L_2^{-\gamma}[0, \infty)$ с особенностью в начале координат	55
3.1.2	Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в $L_2^1[0, \infty)$ с особенностью в произвольной точке	59
3.1.3	Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в произвольной точке, порожденное $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом	60
3.2	Фундаментальные решения Δ_B -оператора Киприянова	62
3.3	Решения задач Дирихле с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова	64
3.3.1	К-Формулы Грина	65
3.3.2	Представление Грина n -четных функций	66
3.3.3	Сферическое среднее K -гармонической функции	67
3.3.4	Экстремальное свойство B -гармонических функций	68
3.3.5	Постановка и единственность решения внутренней и внешней задачи Дирихле	69
Глава 4	Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова, порожденные $\mathbb{J}$-преобразованием Бесселя	71
4.1	Весовые распределения И.А. Киприянова	71
4.2	$\mathbb{J}$ -Преобразования Бесселя функций на $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$	74
4.2.1	$\mathbb{J}$ -Преобразование Бесселя K -распределений в $\mathbb{R}_1^+$	76
4.2.2	$\mathbb{J}$ -Преобразование Бесселя обобщенной $\mathbb{T}$ -свёртки	79
4.2.3	Представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя	79
4.2.4	Представление $L(B_{-\gamma})$ -сопряженного оператора в рамках $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя	80
4.3	Пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с оператором $B_{-\gamma}$	81
4.4	Сингулярные $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова	82
4.4.1	Пространство символов $\Xi_{-\gamma}^m$	82

4.4.2	Порядок сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова с символом из Ξ_{ev}^m	84
4.4.3	Порядок оператора $T = A - \mathcal{A}$	88
4.4.4	Произведения и коммутаторы	92
4.4.5	Аналог неравенства Гординга для сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова	96
Глава 5	Нечетное и полное $\mathbb{J}$-преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова и сингулярные $\mathbb{J}$-псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова	98
5.1	$\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя в $\mathbb{R}_n^+$	100
5.1.1	Рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}$ -функции Бесселя	101
5.1.2	Нечетное и полное $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова	102
5.1.3	Представление $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ оператора в рамках полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.	104
5.1.4	$L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ -Сопряженный оператор в рамках полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.	105
5.1.5	Пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с $D_{B-\gamma}^\alpha$ оператором.	106
5.2	Сингулярные $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова	108
5.2.1	Основные теоремы сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова—Катрахова	109
	Список литературы	110

Введение

Актуальность темы диссертации. Теория сингулярных дифференциальных уравнений является одним из наиболее трудных разделов общей теории дифференциальных уравнений, этим и обусловлен интерес к ней. Одним из основоположников данной теории является И.А. Киприянов. Им исследованы весовые функциональные пространства на основе преобразований Фурье—Бесселя (Ганкеля), разработаны подходы и методы решения сингулярных краевых задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя (далее — с.д. оператором Бесселя) $B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ с положительным параметром $\gamma > 0$, см. монографию [28]. В работах С.П. Пулькина (см. например [54]) и его учеников изучены краевые задачи для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ при $p > 0$.

В 1980 году И.А. Киприяновым было предложено исследовать задачи с с.д. оператором Бесселя с отрицательным параметром $\gamma < 0$. Однако результаты по этой теме научных исследований не были опубликованы, так как возникшие трудности требовали введения принципиально нового математического аппарата по сравнению с известным в то время. Значительно позже, в 2010-х годах появились исследования профессора К.Б. Сабитова [56–58] и его учеников о задачах спектрального характера для В-гиперболических уравнений с оператором Бесселя с отрицательным параметром. При этом использовано разложение функций в ряды Фурье—Бесселя и Дини по собственным функциям оператора Бесселя отрицательного порядка. В диссертации в некоторых доказательствах применена методика и подходы этих исследований.

В 2020 г. опубликована совместная работа Л.Н. Ляхова и Е.Л. Саниной [49], где был введен сингулярный дифференциальный оператор Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}$ с отрицательными параметрами $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Было получено представление этого оператора на сфере (названо оператором Киприянова—Бельтрами). Этот результат лег в основу исследуемых в данной диссертации проблем. Представление оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ в виде оператора Бельтрами на сфере позволяет считать с.д. оператор Бесселя в качестве среднего между оператором Лапласа в $\mathbb{R}_n = \{x : (x_1, \dots, x_n)\}$ и оператором Лапласа в $\mathbb{R}_{n+1}$, см. [50]. Отсюда следует повышенный интерес к исследованию таких сингулярных дифференциальных уравнений, инициированных еще четверть века назад.

Одна из тем диссертации посвящена нахождению фундаментальных решений оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$. При этом возникшие «обобщенные свертки» порождены конструкцией, названной в диссертации «псевдосдвигом». Важно отметить, псевдосдвиг эрмитов, в соответствующей билинейной форме, и коммутирует с оператором $B_{-\gamma}$. Оператор псевдосдвига ранее появился в исследованиях В.А. Какичева [24], но им и его последователями изучались лишь свертки, порожденные такой интегральной конструкцией. В диссертации построены новые классы операторов $\mathbb{T}$ -сдвига и $\mathbb{T}$ -квазисдвига, решившие проблему определения фундаментальных решений $\Delta_{B_{-\gamma}}$ оператора.

Известно, что сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя $B_{-\gamma}u(x)+u(x)=0$ имеет два линейно независимых решения, обозначенных $\mathbb{J}_{\pm\mu}(x)$. В работе используется $\mathbb{J}$ -функция Бесселя положительного параметра $\mu=\frac{\gamma+1}{2}$. Оказалось, что через посредство псевдосдвига формулируется теорема сложения для $\mathbb{J}_{\mu}$ -функции Бесселя: $\mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_{\mu}(x) = \mathbb{J}_{\mu}(x) \mathbb{J}_{\mu}(y)$. На основе теоремы сложения в диссертации построен класс сингулярных псевдодифференциальных операторов, названный в работе *$\mathbb{J}$ -псевдодифференциальными операторами Киприянова*. Для данного класса псевдодифференциальных операторов доказаны теоремы о порядке, теорема о произведении и коммутаторе и аналог неравенства Гординга. Прежде всего в теории псевдодифференциальных операторов необходимо отметить работы Дж. Кона и Л.Ниренберга [77], и Л. Хёрмандера [76]. Результаты этих работ составляют основы теории псевдодифференциальных операторов, которую сегодня можно назвать классической. Существенные приложения и дальнейшее развитие этой теории даны в работах М.С. Аграновича, Л.Р. Волевича, В.В. Грушина, Дж. Дюстермаата, Ю.В. Егорова, Х. Куманого, Ф. Трева, О.А. Олейника, Е.В. Радкевича, М. Тейлора, М.А. Шубина и многих других авторов.

Простым примером применения псевдосдвига является полученный в диссертации аналог формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с одинаковыми отрицательными параметрами $-\gamma \in (-1, 0)$ с.д. операторов Бесселя по времени и пространственной переменной. Постановка задачи Коши для такого уравнения задается в предельной форме С.А. Терсенова [61]. Решение получено в виде соответствующей формулы Пуассона, которая формально повторяет формулу доказанную Б.М. Левитаном [34] с положительными параметрами операторов Бесселя.

Краевые задачи для эллиптических уравнений с с.д. операторами Бесселя положительных индексов γ исследовались в работах Я.И. Житомирского, Л.А. Иванова, В.В. Катрахова, М.И. Ключанцева, Л.Н. Ляхова, Ф.Г. Мухлисова, С.М. Ситника, И.П. Половинкина, Э.Л. Шишкиной и др. В диссертации, поскольку $-\gamma \in (-1, 0)$, то параметр оператора Бесселя всегда дробный.

Уравнения с дробной степенью оператора Бесселя моделируют случайное блуждание частицы. Такие модели рассмотрены Р. Гаррой и Е. Орсингером [75]. Дробно-дифференциальные уравнения, описывающие случайные блуждания в непрерывном времени рассмотрены В.Н. Колоколыцовым [32]. Это также подчеркивает актуальность темы этой диссертации.

Цели и задачи исследования: построить теорию сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих операторы Бесселя с отрицательным параметром. Для этого необходимо:

1. Построить решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с с.д. операторами Бесселя отрицательного параметра, с использованием введенных операторов $\mathbb{T}$ -псевдосдвига и $\mathbb{T}$ -сдвига.

2. Найти фундаментальное решение с.д. оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной точке полуоси $[0, \infty)$. Используя найденное фундаментальное решение с.д. оператора $B_{-\gamma}$ и $\mathbb{T}$ -сдвиг найти фундаментальное решение для оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с особенностью в произвольной точке из евклидова n -полупространства $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : x_i \geq 0\}$.

3. Привести формулы Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного В-ультрагиперболического уравнения.

4. Исследовать сингулярные $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы, созданные на базе $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Данные операторы включают линейные сингулярные обыкновенные дифференциальные операторы, состоящие из неотрицательных степеней оператора $B_{-\gamma}$.

Научная новизна и значимость полученных результатов. В рамках исследования были изучены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром. Этот случай специфичен тем, что для его анализа приходится использовать перенормированные бесселевы функции, отличающиеся от общеупотребительных степенным множителем. Представлен обоснованный переход на язык таких функций (билинейные формы, ортогональность, интегральное преобразование, аналог оператора сдвига, теорема сложения и др.). Был получен ряд новых результатов и установлена связь операторов типа Бесселя и новыми классами псевдодифференциальных операторов. Одной из основных задач было нахождение фундаментальных решений оператора Киприянова. В общем случае фундаментальное решение с особенностью в произвольной точке n -полупространства найдено через посредство интегрального оператора типа «сдвига». Все результаты, полученные в работе, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании решений и других классов дифференциальных уравнений.

Кроме того, возможно использование результатов диссертационного исследования при чтении курсов по выбору в университетах для магистрантов и аспирантов физико-математических специальностей.

Методология и методы исследования. В работе используются интегральные преобразования Фурье, Бесселя и Киприянова—Катрахова, а также методы теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений и методы, развитые в работах научной школы И.А. Киприянова при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту. Все результаты диссертационной работы являются новыми и получены лично автором. Из них выделим следующие:

1. Теорема сложения для $\mathbb{J}_\mu$ -функции Бесселя.
2. Фундаментальные решения с.д. оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной точке полуоси, а также фундаментальное решение оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с особенностью в произвольной точке из евклидова n -полупространства.
3. Экстремальное свойство K -гармонических функций и теоремы о единственности решения внутренней и внешней задач Дирихле с оператором $\Delta_{B_{-\gamma}}$.
4. Теоремы о порядке, теорема о произведении и коммутаторе для сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова и соответствующий аналог неравенства Гординга.
5. Теоремы о порядке и теорема о произведении для сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова—Катрахова.

Степень достоверности результатов полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах и конференциях, а также публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация результатов диссертации. Результаты исследования докладывались и обсуждались на *международном семинаре AMADE* (Минск, 2021, 2024 гг.); на *научно-исследовательском семинаре* факультета ВМК МГУ «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» под руководством проф. Ломова И.С.; на *международных научных конференциях*: «Современные проблемы математики и физики» (Стерлитамак, 2021 г.), «Дифференциальные уравнения и динамические системы» (Суздаль, 2022, 2024 гг.), «Воронежская весенняя математическая школа» (Воронеж, 2021—2024 гг.), «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 2022—2025 гг.), «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2022—2024 гг.), «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики

и физики» (Нальчик, 2021, 2023 гг.), «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Казань, 2024 г.), «Математика в созвездии наук» (Москва, 2024 г.); на областном профильном семинаре «Школа молодых ученых» (Липецк, 2021, 2023, 2024 гг.).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантом РНФ № 24–21–00387 (исполнитель, 2024–2025).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [4–19, 22, 39–46, 52, 53, 60, 66, 71–73, 78, 79]. профессору Л.Н. Ляхову принадлежит постановка соответствующих задач. Доказательства основных результатов по построению и исследованию решений получены лично диссертантом. Работы [16, 19, 22, 44, 53, 66, 71–73, 78, 79] опубликованы в журналах из перечня ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка цитируемой литературы, включающего 84 наименований. Общий объем диссертации 118 с.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дается обоснование актуальности выбранной темы, формулируется цель исследования, приводятся методы исследования, краткий обзор содержания диссертации и основные научные результаты.

В **главе 1** вводятся основные обозначения, определения и приведены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя $B_{-\gamma} u(x) + u(x) = 0$, $x > 0$ с оператором $B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}$ отрицательного порядка $-1 < -\gamma < 0$. В работе они представлены функциями:

$$\mathbb{J}_{\mu}(x) = \Gamma(1 + \mu) 2^{\mu} x^{\mu} J_{\mu}(x) = x^{2\mu} j_{\mu}(x),$$

$$\mathbb{J}_{-\mu}(x) = \Gamma(1 - \mu) 2^{-\mu} x^{\mu} J_{-\mu}(x) = x^{2\mu} j_{-\mu}(x),$$

где $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$, $J_{\pm\mu}$ — функции Бесселя первого рода, $j_{\pm\mu}$ — j -функции Бесселя. В §1.2 оператор $B_{-\gamma}$ рассмотрен в произвольной весовой билинейной форме

$$(u, v)_{\omega} = \int_0^{\infty} u(x) v(x) x^{\omega} dx,$$

в рамках которой он может быть не самосопряженным. Билинейная форма порождает весовое функциональное пространство $L_2^{\omega} = \{f : x^{\omega} f \in L_2(0, \infty)\}$. В качестве основного пространства функций рассматривается подпространство Шварца [67] $S_{ev} = S_{ev}[0, \infty)$, состоящее из функций быстро убывающих вместе со всеми производными, четных по Киприянову [28, с.21]. Соответствующее пространство функционалов обозначено $S'_{ev, \omega}$.

В §1.3 доказана ортогональность $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя, в §1.4 получено равенство Ганкеля на основе $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя и введены четное прямое и четное обратное $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя.

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[f](y) = \widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) f(y) y^{-\gamma} dy, \quad \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[f](\xi) = C_\mu \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Глава 2 посвящена изучению новых интегральных операторов, а именно $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг, $\mathbb{T}$ -сдвиг и $\mathbb{T}$ -квазисдвиг. В §2.1 приведена теорема сложения для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя положительного порядка

$$\mathbb{J}_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi) \mathbb{J}_{\frac{\gamma+1}{2}}(y\xi) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi), \quad x, y, \xi \in \mathbb{R}_1^+,$$

в которой роль обобщенного сдвига Пуассона выполняет $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi (xy)^{\gamma+1} \frac{f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha.$$

Приведены свойства оператора $\mathbb{T}$ -псевдосдвига и аналог неравенства Петре [82].

В §2.4 и §2.5 вводятся операторы обобщенного $\mathbb{T}$ -сдвига и $\mathbb{T}$ -квазисдвига, соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x^{*y} f(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{x^{\gamma+1} f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha, \\ \mathbb{T}_x^{**y} f(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{y^{\gamma+1} f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha, \end{aligned}$$

Доказывается принадлежность $\mathbb{T}$ -сдвига классу обобщенных сдвигов Левитана и приведены дополнительные свойства обобщённого $\mathbb{T}$ -сдвига.

В §2.6 решена задача Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприянова

$$B_{-\gamma,t} u(x,t) = B_{-\gamma,x} u(x,t).$$

Постановка задачи Коши: найти функцию $u(x,t) \in S_{ev}$, удовлетворяющую следующим начальным условиям в предельной форме С.А. Терсенова [61]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{\gamma+1}} u(x,t) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0.$$

В §2.7 приведены формулы Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения

$$(\Delta_{B_\beta})_y u(x, y) = (\Delta_{B_\gamma})_x u(x, y),$$

где $x \in \mathbb{R}_n^+$, $y \in \mathbb{R}_m^+$, координаты мультииндексов $\beta_i > -1$ и $\gamma_i > -1$.

Постановка задачи Коши: найти функцию $u \in C_{ev}^2(\overline{\mathbb{R}_n^+})$ такую, что

$$u(x, y) \Big|_{|y|=0} = f(|x|), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y_i} \Big|_{y_i=0} = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Глава 3 посвящена нахождению фундаментальных решений оператора $B_{-\gamma}$ и $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператора Киприянова. В §3.1 найдено фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной точке полуоси. В §3.2 найдены фундаментальные решения Δ_B -оператора. В §3.3 приводится единственность решения внутренней и внешней задачи Дирихле с сингулярным $\Delta_{B_{-\gamma}}$ оператором Киприянова.

В **главе 4** изучаются $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя функций на $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Доказывается инвариантность пространства S_{ev} относительно $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя, приведены равенства Парсеваля и Планшереля. Доказано, что $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя осуществляет непрерывный в обе стороны изоморфизм пространств S_{ev} . Дано представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя

В §4.3 вводятся пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с оператором $B_{-\gamma}$, задается топология в S_{ev} . В §4.4 задается пространство символов, вводятся сингулярные $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова

$$\begin{aligned} Au(x) &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \\ \mathcal{A}u(x) &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \end{aligned}$$

доказываются основные теоремы о порядке, теорема о произведении и аналог неравенства Гординга [74].

В **главе 5** в многомерном варианте представлены $\mathbb{J}_\mu$ -Функции Бесселя, заданы четное прямое и четное обратное $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя в $\mathbb{R}_n^+$ и приведена теорема сложения для ядер многомерного $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Приведено рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}_\mu$ -функции Бесселя

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i),$$

на основе которого вводится нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.

$$\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i .$$

Доказано, что нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова производной четной функции можно привести к четному $\mathbb{J}$ -преобразованию Бесселя. Поэтому было введено еще одно преобразование со смешанным ядром

$$\mathbf{J}_{\mu}(x\xi) = \prod_{i=1}^n [\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) + 2 \mu_i x_i \xi_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i \xi_i)] ,$$

т.е. полное $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова:

$$\mathbf{F}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \mathbf{J}_{\mu}(x\xi) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{ev}[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{od}[f_{od}](\xi).$$

В §5.2 задано пространство символов, дается определение сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова—Катрахова

$$\mathbf{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{J}_{\mu}(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi ,$$

$${}^t\mathbf{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{J}_{\mu}(x\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi ,$$

и приведены основные теоремы о порядке и теорема о произведении.

В заключение автор выражает благодарность профессору Л.Н. Ляхову за терпение, внимательное отношение, постановку задач и помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Глава 1

Сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя с отрицательным параметром

В общем случае сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя имеет вид

$$B_\gamma u + u = 0, \quad u = u(t), \quad t > 0, \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{d}{dt}. \quad (1.0.1)$$

Коэффициент γ может быть произвольным, но в рамках этой работы мы полагаем его действительным небольшим отрицательным числом. В работе [50] он назван *коэффициентом скрытой сферической симметрии*, что явно видно, если γ — не натуральное число. Исследование решений этого уравнения для положительных коэффициентов γ приведено в [35], некоторые сведения об этих функциях содержатся в справочнике [69] и в лекциях Ф. Трикоми [65].

Классическое уравнение Бесселя

$$t^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + t \frac{dv}{dt} + (t^2 - \nu^2)v = 0, \quad v = v(t), \quad (1.0.2)$$

содержит параметр ν , который может быть произвольным действительным или комплексным числом. В случае $\nu > -\frac{1}{2}$ решениями уравнения (1.0.2) являются функции Бесселя первого рода

$$J_{\pm\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m \pm \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m \pm \nu}, \quad (1.0.3)$$

которые представляют собой фундаментальный (линейно независимый) набор решений уравнения (1.0.2).

Сингулярное уравнение Бесселя (1.0.1) обычно изучается при условии $\gamma > 0$ (см. [28,35]). Его линейно независимые решения выражены через функции Бесселя первого рода J_ν следующими формулами:

$$j_\nu(t) = \frac{\Gamma(1+\nu) 2^\nu}{t^\nu} J_\nu(t), \quad j_{-\nu}(t) = \frac{\Gamma(1-\nu) 2^{-\nu}}{t^{-\nu}} J_{-\nu}(t), \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad (1.0.4)$$

в которых число ν (порядок j -функции Бесселя) связан с коэффициентом размерности оператора B_γ равенством

$$\nu = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad \gamma > 0 \quad \left(\implies \nu > -\frac{1}{2} \right),$$

и называются « j -малые функции Бесселя»¹. В этой работе используется первое название в сокращенном виде — « j -функция Бесселя». Из этого набора фундаментальных функций наиболее употребляемым является решение j_ν , что связано с нормировкой $j_\nu(0)=1$ и возможностью её представления интегралом Пуассона. Именно для функций j_ν , отвечающих одному и тому же порядку $\nu > -\frac{1}{2}$ доказана теорема сложения и на основе этих же функции построены взаимно обратные преобразования Фурье—Ганкеля (Бесселя). Эти свойства оказались востребованы в теории сингулярных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений (см. [28, 31]).

Об эволюции функций Бесселя. Работа Б.М. Левитана [35] о j -функциях Бесселя и соответствующая теория обобщенных сдвигов Вайнштейна—Дельсарта (формула Пуассона), в основу которой легла «теорема сложения» Б.М. Левитана имела мощное применение к исследованию сингулярных дифференциальных и интегральных уравнений. Отметим, что данная теория не сразу была принята. Например, Ф. Трикоми в лекциях [65, с. 76, формула 10] писал, что изучение таких функций полезно, но не обязательно, т.к. они просто связаны с функциями Бесселя первого рода: $j_\nu(t) = \text{const} \cdot t^{-\nu} J_\nu(t)$. Но теория сингулярных дифференциальных уравнений весьма обязана именно j -функциям Бесселя (преобразование Фурье—Бесселя, функциональные классы функций, сингулярные псевдодифференциальные операторы, теория операторов преобразования и многое другое). В диссертации рассматривается новый класс функций Бесселя, который тоже имеет связь с функциями Бесселя первого рода (см. далее формулы (1.1.12), (1.1.13)). Это приведет к отторжению предлагаемой в диссертации теории. Отметим, что многое «не так» по сравнению с приложениями j -функций Бесселя. Например, воспользовавшись связью операторов B_γ и $B_{-\gamma}$ (соотношение Дарбу—Вайнштейна, [26, с. 160]) можно

¹Так называл эту функцию Б.М. Левитан. Часто применяются названия: «функция Клиффорда» [59], «Е-функция» [65], « λ -функции Бесселя» [69].

получить связь фундаментальных решений этих операторов с особенностью в начале координат. Но не удастся определить фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной точке. В третьей главе показано, что фундаментальное решение определено через оператор «специального обобщенного сдвига», который вовсе сдвиг. В диссертации этот интегральный оператор назван *псевдосдвигом*.

1.1 Решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром

В данной работе строится аналогичная теория бесселевых функций для сингулярного оператора Бесселя с отрицательным параметром оператора Бесселя $-\gamma < 0$. При этом мы полагаем, что $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$ с дробной частью $\{\gamma\} \neq 0$. Наибольший интерес для этих исследований представляет случай, когда параметр удовлетворяет неравенству $0 > -\gamma > -1$, т.к. изучение целых отрицательных размерностей требует введения (как и в классических случаях) соответствующего класса функций Неймана, который не будет использован в последних пунктах этой работы. При этом в приложении теории этих функций к сингулярным уравнениям с оператором Киприянова не может изучаться случай отрицательных параметров меньше -1 (это следует из работы [49]).

1.1.1 Сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя с отрицательным параметром

В этой части исследований изучается сингулярное уравнение Бесселя с отрицательным значением параметра γ . То есть вместо (1.0.1) рассматривается уравнение

$$B_{-\gamma}u + u = 0, \quad u = u(t), \quad t > 0, \quad B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\gamma}{t} \frac{d}{dt}, \quad \gamma > 0. \quad (1.1.1)$$

Отметим, что решения этого уравнения по-видимому известны, но нами не найдены соответствующие источники. Учитывая важность этих функций, ниже приводятся построения соответствующих степенных рядов в сокращенном виде. Следуя классическим методам, будем искать решение уравнения (1.1.1) в виде степенного ряда

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+q}. \quad (1.1.2)$$

Здесь нам следует определить не только коэффициенты a_k , но и число q , которое предполагается действительным.

Введем дополнительное ограничение: параметр γ фиксирован и

$$-\gamma \in (-1, 0). \quad (1.1.3)$$

Имеем

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+q) t^{k+q-1}, \quad \frac{-\gamma}{t} u' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-\gamma) (k+q) t^{k+q-2},$$

$$u'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+q)(k+q-1) t^{k+q-2}.$$

Таким образом, подстановка функции (1.1.2) в уравнение (1.1.1) приведет к тождеству

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [-\gamma(k+q) + (k+q)(k+q-1)] t^{k+q-2} \equiv - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+q},$$

в котором, как нетрудно увидеть, коэффициенты при t^{q-2} и t^{q-1} слева этого тождества равны нулю, поскольку их нет справа, т.е.

$$a_0 [-\gamma q + q(q-1)] = 0, \quad (1.1.4)$$

$$a_1 [-\gamma(q+1) + q(q+1)] = 0. \quad (1.1.5)$$

Это дает уравнения относительно a_0 и q , причем действительный параметр a_0 можем выбрать произвольно, тем самым будет определен параметр q_k при $k = 1$. Для $k \geq 2$ получим рекуррентную формулу определения a_k через значения a_0 и a_1 :

$$a_k [-\gamma(k+q) + (k+q)(k+q-1)] = -a_{k-2}.$$

Коэффициент a_0 в представлении решения (1.1.2) произвольный, так как он исчезает при действии оператора Бесселя. Будем считать, что $a_0 \neq 0$ и тогда равенство (1.1.4) справедливо при $q_1 = 0$ или $q_2 = \gamma + 1$.

1.1.2 Случай $q = q_1 = 0$

В этом случае решение уравнения (1.1.1) должно принять вид

$$u_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Из (1.1.5) получим

$$a_1(-\gamma) = 0.$$

Так как число $-\gamma \in (-1, 0)$, то $a_1 = 0$. В результате из (1.1.5) имеем рекуррентную формулу для коэффициентов решения (1.1.2):

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{[-\gamma k + k(k-1)]} = -\frac{a_{k-2}}{k[k-\gamma-1]}.$$

Существование коэффициентов a_k вытекает из принятого нами условия (1.1.3).

Из того, что $a_1(-\gamma) = 0$ следует, что все коэффициенты с нечётным индексом k равны нулю:

$$a_3 = -\frac{a_1}{3(3-\gamma-1)} = 0, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5(5-\gamma-1)} = 0, \quad \dots$$

$$a_{2m-1} = -\frac{a_{2m-3}}{(2m-1)(2m-1-\gamma-1)} = 0, \quad \dots$$

Для чётных значений из (1.1.4) получим

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2-\gamma-1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4-\gamma-1)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2-\gamma-1)(4-\gamma-1)}, \dots$$

Методом математической индукции легко показать, что

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! \left(m - \frac{\gamma+1}{2}\right) \left(m-1 - \frac{\gamma+1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\right)}.$$

Применим «формулу приведения» для Гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1) \cdot (z+n-2) \cdot \dots \cdot z \cdot \Gamma(z),$$

тогда

$$\left(m - \frac{\gamma+1}{2}\right) \left(m-1 - \frac{\gamma+1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(m+1 - \frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\right)}.$$

В результате получим формулу для коэффициента ряда (1.1.2) с чётным индексом:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma\left(1 - \frac{\gamma+1}{2}\right)}{2^{2m} m! \Gamma\left(m+1 - \frac{\gamma+1}{2}\right)}.$$

Или, положив $\frac{\gamma+1}{2} = \mu$, имеем

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1-\mu)}{2^{2m} m! \Gamma(m+1-\mu)}.$$

Коэффициент a_0 примем равным 1 (коэффициент a_0 в наших рассуждениях был произвольным не равным нулю). Таким образом, первое из решений u_1 уравнения (1.1.1) определено степенным рядом, который обозначим

$$u_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}, \quad (1.1.6)$$

где индекс $-\mu$ называется порядком функции Бесселя и связан с индексом оператора Бесселя равенством $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Из принятого нами условия (1.1.3) вытекает, что число μ не может быть натуральным, что обеспечивает ограниченность каждого члена ряда (1.1.6).

Нетрудно убедиться, что ряд (1.1.6) сходится равномерно, исследуем на сходимость по признаку Даламбера. Записываем общий член ряда (1.1.6) и следующий, идущий после него

$$u_m(t) = \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m},$$

$$u_{m+1}(t) = \frac{(-1)^{m+1} \Gamma(1-\mu)}{(m+1)! \Gamma(m+2-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+2}.$$

Следовательно, полагая $|t| < R$, получим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{m+1}}{u_m} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! \Gamma(m+1-\mu)}{(m+1)! \Gamma(m+2-\mu)} \left(\frac{|t|}{2}\right)^2 \leq$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|R|^2}{4(m+1)(m+1-\mu)} = 0.$$

Поскольку число R — произвольное, то ряд сходится для всех $t \in \mathbb{R}_1$ абсолютно и равномерно.

Полученный степенной ряд имеет точку, в которой ряд из производных тоже сходится ($t = 0$). В силу теоремы о дифференцируемости функциональных рядов, исследуемый ряд (1.1.6) допускает почленное дифференцирование.

Проверим непосредственно, что решение (1.1.6) удовлетворяет уравнению (1.1.1). Имеем

$$u_1'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \frac{2m t^{2m-1}}{2^{2m}},$$

$$u_1''(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \frac{2m(2m-1) t^{2m-2}}{2^{2m}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
B_{-\gamma}u_1(x) &= u_1''(t) + \frac{-\gamma}{t}u_1'(t) = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \frac{2m(2m-1)t^{2m-2}}{2^{2m}} + \frac{(-\gamma)(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \frac{2mt^{2m-2}}{2^{2m}} \right] = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \frac{2mt^{2m-2}}{2^{2m}} \right] (2m-1-\gamma).
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\gamma = 2\mu - 1$, запишем предыдущее выражение в виде

$$B_{-\gamma}u_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \frac{2mt^{2m-2}}{2^{2m}} \right] (2m-2\mu).$$

Произведём замену индекса суммирования $m = k+1$, тогда

$$\begin{aligned}
B_{-\gamma}u_1(x) &= \sum_{k+1=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1} \Gamma(1-\mu) 2(k+1)}{(k+1)! \Gamma(k+2-\mu)} \frac{t^{2k}}{2^{2k+2}} \right] (2k+2-2\mu) = \\
&= \sum_{k+1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(1-\mu) (k+1)}{(k+1)! (k+1-\mu) \Gamma(k+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} (k+1-\mu) = \\
&= \sum_{k+1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(1-\mu) (k+1)}{(k+1)! \Gamma(k+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned}$$

Слагаемое, отвечающее индексу суммирования $k = -1$, исчезнет, в результате

$$B_{-\gamma}u_1(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(1-\mu)}{k! \Gamma(k+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = -u_1(t).$$

Т.е. функция (1.1.6) является одним из возможных решений уравнения (1.1.1).

1.1.3 Случай $q = q_2 = \gamma + 1$

Предполагаем, что второе решение уравнения (1.1.1), как и первое, имеет вид степенного ряда:

$$u_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\gamma+1}. \quad (1.1.7)$$

Ясно, что функции u_1 и u_2 линейно независимы. Предполагаем возможность почленного дифференцирования ряда (1.1.7), что будет проверено после получения коэффициентов. Тогда

$$u_2' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\gamma+1) t^{k+\gamma}, \quad u_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\gamma)(k+\gamma+1) t^{k+\gamma-1}.$$

Следовательно

$$B_{-\gamma}u = \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{\gamma}{t} \frac{du}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [-\gamma(k + \gamma + 1) + (k + \gamma)(k + \gamma + 1)] t^{k+\gamma-1}.$$

Для того, чтобы ряд (1.1.2) являлся решением уравнения (1.1.1), должно выполняться тождественное равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [-\gamma(k + \gamma + 1) + (k + \gamma)(k + \gamma + 1)] t^{k+\gamma-1} \equiv - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\gamma+1}. \quad (1.1.8)$$

Тождество предполагает равенство коэффициентов при одинаковых степенях t . Поэтому слева исчезнут слагаемые отвечающие $k = 0$ и $k = 1$, т.е.

$$a_0 [-\gamma(\gamma + 1) + \gamma(\gamma + 1)] = 0,$$

$$a_1 [-\gamma(\gamma + 2) + (\gamma + 1)(\gamma + 2)] = 0.$$

Последнее равносильно равенству $a_1(\gamma + 2) = 0$. С учётом (1.1.3) отсюда вытекает $a_1 = 0$.

При $k \geq 2$, из тождества (1.1.8) получим рекуррентную формулу для определения a_k через значения a_0 и a_1 :

$$a_k [-\gamma(k + \gamma + 1) + (k + \gamma + 1)(k + \gamma)] = -a_{k-2}, \quad \Rightarrow \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k + \gamma + 1)}.$$

Поскольку $a_1 = 0$ следует, что все коэффициенты с нечётным индексом $k = 2m - 1$, $m \in \mathbb{N}$ равны нулю:

$$a_3 = -\frac{a_1}{3(3 + \gamma + 1)} = 0, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5(5 + \gamma + 1)} = 0, \quad \dots$$

$$a_{2m-1} = -\frac{a_{2m-3}}{(2m-1)(2m-1 + \gamma + 1)} = 0, \quad \dots$$

Для чётных значений $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2 + \gamma + 1)}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4(4 + \gamma + 1)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2 + \gamma + 1)(4 + \gamma + 1)}, \quad \dots$$

По индукции получаем формулу:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma\left(1 + \frac{\gamma+1}{2}\right)}{2^{2m} m! \Gamma\left(m + 1 + \frac{\gamma+1}{2}\right)}.$$

Как и ранее, полагаем $a_0 = 1$ и $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$, тогда из (1.1.7) получим

$$u_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1 + \mu)}{2^{2m} m! \Gamma(m + 1 + \mu)} t^{2m+2\mu}.$$

Таким образом, второе решение уравнения (1.1.1) представлено рядом:

$$u_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{t^{2(m+\mu)}}{2^{2m}}, \quad (1.1.9)$$

где индекс μ (порядок функции Бесселя) связан с индексом оператора Бесселя $B_{-\gamma}$ формулой $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$.

Теперь проверим, что найденная функция u_2 удовлетворяет уравнению (1.1.1). Учтем, что абсолютная и равномерная сходимость степенного ряда позволяет его дифференцировать почленно. Имеем

$$\begin{aligned} u_2'(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{2(m+\mu) t^{2(m+\mu)-1}}{2^{2m}}, \\ u_2''(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{2(m+\mu)[2(m+\mu)-1] t^{2(m+\mu)-2}}{2^{2m}}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} B_{-\gamma} u_2(t) &= u_2''(t) + \frac{-\gamma}{t} u_2'(t) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{2(m+\mu)(2(m+\mu)-1) t^{2(m+\mu)-2}}{2^{2m}} + \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} -\gamma \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{2(m+\mu) t^{2(m+\mu)-2}}{2^{2m}} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{2(m+\mu) t^{2(m+\mu)-2}}{2^{2m}} \right] (2(m+\mu) - 1 - \gamma). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\gamma = 2\mu - 1$, получим

$$B_{-\gamma} u_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{(m-1)! \Gamma(m+\mu)} \frac{t^{2(m+\mu-1)}}{2^{2(m-1)}}.$$

Теперь заменим индекс суммирования $k = m - 1$, тогда

$$B_{-\gamma} u_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(1+\mu)}{k! \Gamma(k+\mu+1)} \frac{t^{2(k+\mu)}}{2^{2k}} = -u_2(t).$$

Таким образом обе функции u_1 и u_2 являются решениями уравнения (1.1.1).

1.1.4 Связь с решениями классического уравнения Бесселя

Для решений сингулярного уравнения Бесселя с отрицательным параметром $-\gamma : 0 < \gamma < 1$ введем обозначения $\mathbb{J}_{\mp\mu}$, т.е. $u_1 = \mathbb{J}_{-\mu}$, $u_2 = \mathbb{J}_{+\mu}$. Сравнивая эти функции с функциями Бесселя первого рода, легко находятся следующие формулы связи:

$$\mathbb{J}_{-\mu}(t) = u_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} = \Gamma(1-\mu) 2^{-\mu} t^{\mu} J_{-\mu}(t),$$

$$\mathbb{J}_{\mu}(t) = u_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{t^{2(m+\mu)}}{2^{2m}} = \Gamma(1+\mu) 2^{\mu} t^{\mu} J_{\mu}(t).$$

Константа $\Gamma(1-\mu)$ для первой из этих функций играют роль нормировочного коэффициента:

$$\mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1.$$

Для второй функции (т.е. для $\mathbb{J}_{\mu}(t)$, $1/2 < \mu < 1$) это не так, т.к.

$$\mathbb{J}_{\mu}(0) = 0 \quad \text{или} \quad \mathbb{J}_{\mu}(x) = O(x^{2\mu}), \quad x \rightarrow 0, \quad -\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2\mu} \mathbb{J}_{\mu}(x) = 1.$$

ввиду того, что $\mu = \frac{\gamma+1}{2} > 0$, а если выполнено условие (1.1.3), то индекс μ принадлежит в нашей теории довольно узкому множеству: $\frac{1}{2} < \mu < 1$. Тем не менее функция $\mathbb{J}_{\mu}$ определена для всех положительных μ (в отличии от $\mathbb{J}_{-\mu}$), а введенная нами константа $\Gamma(\mu+1)$ играет важную роль при построении операторов *обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига* и, что особенно важно, для *обобщенного $\mathbb{T}$ -сдвига*.

Для решений уравнения (1.1.1) с отрицательным параметром $-\gamma$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1.1. Пусть отрицательный параметр оператора Бесселя задан в виде $-\gamma = -2\mu + 1$. Тогда решение v классического уравнения Бесселя (1.0.2) и решение u сингулярного уравнения Бесселя (1.1.1) в области $t > 0$ связаны равенством $u(t) = t^{2\mu} v(t)$, $\frac{1}{2} < \mu < 1$.

Замечание 1.1.1. В учебном пособии [70] утверждение леммы 1.1.1 доказано подстановкой $u(t)$ в уравнение (1.0.2). Впрочем эту связь можно установить сравнением этих функций, т.к. практически очевидно, что $\mathbb{J}_{\mu}(t) = t^{2\mu} j_{\mu}(t)$, где $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Учитывая принципиальное значение приведенной связи для доказательства этой леммы применим соотношение Дарбу—Вайнштейна

$$B_{-\gamma} \mathbb{J}_{\mu}(x) = x^{2\mu} B_{\gamma} x^{-2\mu} \mathbb{J}_{\mu}(x). \quad (1.1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-\gamma = -2\mu + 1 \Rightarrow 2\mu = \gamma + 1 \Rightarrow \mu = \frac{\gamma+1}{2}$.
Необходимо найти функцию $\mathbb{J}_\mu$, чтобы

$$B_{-\gamma} \mathbb{J}_\mu(x\xi) + \xi^2 \mathbb{J}_\mu(x\xi) = 0. \quad (1.1.11)$$

Применив соотношение (1.1.10), получим

$$x^{2\mu} B_\gamma x^{-2\mu} \mathbb{J}_\mu(x) + \xi^2 \mathbb{J}_\mu(x) = 0,$$

т.к. $B_\gamma j_\nu(x\xi) + \xi^2 j_\nu(x\xi) = 0$, то необходимо положить $\mathbb{J}_\mu(x\xi) = x^{2\mu} j_\mu(x)$, следовательно, для выполнения (1.1.11) должно быть

$$B_{-\gamma}(x^{2\mu} j_\mu(x)) + \xi^2 \mathbb{J}_\mu(x) = 0 \iff B_{-\gamma}(x^{2\mu} j_\mu(x)) + \xi^2 x^{2\mu} j_\mu(x) = 0.$$

Откуда получаем $\mathbb{J}_\mu(x) = x^{2\mu} j_\mu(x)$, что и требовалось доказать.

Из леммы 1.1.1, с очевидностью вытекает.

Теорема 1.1.1. Пусть выполнено условие (1.1.3). Тогда сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя

$$B_{-\gamma}u(t) + u(t) = 0, \quad t > 0, \quad B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\gamma}{t} \frac{d}{dt}$$

имеет следующий набор линейно независимых решений:

$$\mathbb{J}_{-\mu}(t) = \Gamma(1 - \mu) 2^{-\mu} t^\mu J_{-\mu}(t) = t^{2\mu} j_{-\mu}(t), \quad (1.1.12)$$

$$\mathbb{J}_\mu(t) = \Gamma(1 + \mu) 2^\mu t^\mu J_\mu(t) = t^{2\mu} j_\mu(t), \quad (1.1.13)$$

где J_μ и $J_{-\mu}$ соответственно функции Бесселя первого рода, j_μ и $j_{-\mu}$ — j -функции Бесселя.

Замечание 1.1.2. Как уже отмечалось формулы (1.1.12) и (1.1.13) получаются простым сравнением $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя с функциями Бесселя первого рода и с j -функциями Бесселя соответственно. Но введенные в диссертации $\mathbb{J}_\mu$ -функции Бесселя удовлетворяют уравнению Бесселя в узком промежутке возможных значений $0 < \gamma < 1$ ($\implies 1/2 < \mu < 1$), что требует более внимательного и более подробного изучения свойств этих функций.

Ещё отметим, что коэффициент $\Gamma(1 + \mu) 2^\mu$ нормирует j -функцию Бесселя в том смысле, что $j_\mu(0) = 1$. В формуле (1.1.13), этот коэффициент не обязателен, т.к. $\mathbb{J}_\mu(0) = 0$.

Замечание 1.1.3. Теорема сложения Левитана для j -функций Бесселя $j_{-\mu}$ не имеет места и не может быть применена к функциям $\mathbb{J}_{-\mu}$ (см. [35], §7, с.

124; §11, с. 137, где порядок j -функции Бесселя строго больше $-\frac{1}{2}$). Поэтому мы вынуждены работать с другим линейно независимым решением сингулярного уравнения Бесселя, т.е. с функцией $\mathbb{J}_\mu$, $\mu > 0$. $\mathbb{J}_\mu$ -Функции Бесселя (1.1.13) имеют особый статус, поскольку, с одной стороны, удовлетворяют сингулярному уравнению Бесселя с отрицательным параметром $-\gamma$ ($\gamma > 0$), а с другой, определены непосредственно через j -функции Бесселя первого рода с положительным параметром $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Дальнейшие построения будут связаны только с $\mathbb{J}$ -функцией Бесселя (1.1.13) положительного индекса.

1.2 Оператор $B_{-\gamma}$ в произвольной весовой билинейной форме

Отметим, что области определения оператора Бесселя $B_{-\gamma}$ принадлежат четные бесконечно дифференцируемые функции, для производной которых справедлива оценка $x^{-\gamma}u'(x) = O(x)$, $x \rightarrow 0$.

Пусть ω — действительное число и

$$(u_1, u_2)_\omega = \int_0^\infty u(x) v(x) x^\omega dx \quad (1.2.1)$$

соответствующая этому числу весовая билинейная форма. И пусть

$$x^\omega u_i = O(x), \quad x \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.2.2)$$

На основе билинейной формы (1.2.1) введем весовое пространство Лебега

$$L_2^\omega(0, \infty) = \{f : x^\omega f \in L_2[0, \infty), \quad \omega > -1\}.$$

Ограниченность действия оператора Бесселя обеспечена применением его к четным функциям, в связи с чем введем следующие определения.

Определение 1.2.1. Функцию заданную на полуоси $Ox = [0, \infty)$ будем называть четной по Киприянову по аргументу x , если возможно её четное продолжение на всю ось x с сохранением класса своей принадлежности.

Определение 1.2.2. Класс функций $C^\ell(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n^+$, удовлетворяющий условию четности по Киприянову по каждой переменной x_i , для которой $\gamma_i \neq 0$, будем обозначать $C_{ev}^\ell(\Omega)$.

Определение 1.2.3. Основным пространством функций будем называть подпространство $S_{ev} = S_{ev}(\overline{\mathbb{R}_n^+})$ пространства Л. Шварца [67], состоящее из функций быстро убывающих вместе со всеми производными и четных по Киприянову по каждой координате аргумента.

В рамках весовой билинейной формы (1.2.1) сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{-\gamma}$ может быть не самосопряженным. Введем обозначение

$$M_{\omega} = \{\varphi : \varphi \in S_{ev}, \varphi(x) = O(x), x \rightarrow +0\}.$$

Теорема 1.2.1. Пусть $\gamma > -1$ и $\omega > -1$. Тогда формула

$$(B_{-\gamma} u, v)_{\omega} = \left(u, \left[B_{\gamma+2\omega} + \frac{(\gamma + \omega)(\omega - 1)}{x^2} \right] v \right)_{\omega}$$

справедлива для всех функции $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащих основному пространству функций M_{ω} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать дивергентную формулу сингулярного оператора Бесселя $B_{-\gamma} = x^{\gamma} \frac{d}{dx} x^{-\gamma} \frac{d}{dx}$. Имеем

$$(B_{-\gamma} u, v)_{\omega} = \int_0^{\infty} B_{-\gamma} u(x) v(x) x^{\omega} dx = \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} x^{-\gamma} \frac{du(x)}{dx} v(x) x^{\omega+\gamma} dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} (B_{-\gamma} u, v)_{\omega} &= \\ &= x^{-\gamma} u'(x) v(x) x^{\omega+\gamma} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x^{-\gamma} u'(x) (v'(x) x^{\omega+\gamma} + v(x)(\omega + \gamma)x^{\omega+\gamma-1}) dx = \\ &= u'(x) v(x) x^{\omega} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u'(x) (v'(x) x^{\omega} + v(x) (\omega + \gamma) x^{\omega-1}) dx. \end{aligned}$$

Обратим внимание на внеинтегральный член этого выражения. Принадлежность функций u и v пространству основных функций S_{ev} дает равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) v(x) x^{\omega} = 0 \quad (1.2.3)$$

В правой окрестности начала координат справедлива оценка

$$u'(x) = O(x), \text{ при } x \rightarrow +0. \quad (1.2.4)$$

Действительно, по условию $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая, чётная по Киприянову функция в окрестности начала координат, поэтому может быть продолжена как четная функция на отрицательную полуось и (не меняя обозначений для продолженной функции) можем записать

$$\lim_{x \rightarrow 0} (u'(x) - u'(-x))/2x = 2xu''(0), \implies u'(x) - u'(-x) = 2xu''(\xi),$$

где ξ — средняя точка интервала $(-x, x)$. Отсюда, учитывая, что $u''(\xi)$ непрерывная и, следовательно, ограниченная функция, получим

$$|u'(x)| \leq C |x|,$$

Тем самым доказана оценка (1.2.4).

Из (1.2.3) и (1.2.4) вытекает

$$u'(x) v(x) x^\omega \Big|_0^\infty = 0, \quad (1.2.5)$$

следовательно

$$(B_{-\gamma} u, v)_\omega = - \int_0^\infty u'(x) (v'(x) x^\omega + v(x) (\omega + \gamma) x^{\omega-1}) dx = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = - \int_0^\infty u'(x) v'(x) x^\omega dx, \quad J_2 = -(\omega + \gamma) \int_0^\infty u'(x) v(x) x^{\omega-1} dx.$$

Каждое из этих выражений рассмотрим отдельно. Интегрируя по частям в J_1 , имеем

$$J_1 = - u(x) v'(x) x^\omega \Big|_0^\infty + \int_0^\infty u(x) (v''(x) x^\omega + v'(x) \omega x^{\omega-1}) dx.$$

Здесь внеинтегральный член исчезает по тем же причинам, как в (1.2.5). В результате

$$J_1 = \int_0^\infty u(x) x^\omega \left(v''(x) + \frac{\omega}{x} v'(x) \right) dx = \int_0^\infty u(x) B_\omega v(x) x^\omega dx.$$

Теперь рассмотрим выражение J_2 . Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} J_2 = & -u(x) v(x) (\omega + \gamma) x^{\omega-1} \Big|_0^\infty + \\ & + (\omega + \gamma) \int_0^\infty u(x) (v'(x) x^{\omega-1} + v(x) (\omega - 1) x^{\omega-2}) dx. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Из принадлежности u и v пространству основных функций M_ω , получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) v(x) (\omega + \gamma) x^{\omega-1} = 0.$$

Здесь мы воспользуемся дополнительным условием (1.2.2) принадлежности u и v пространству основных функций M_ω :

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ v(x) \end{array} \right\} x^\omega = O(x), \quad x \rightarrow 0,$$

поскольку только тогда

$$u(x) v(x) (\omega + \gamma) x^{\omega-1} \Big|_0^\infty = 0,$$

и равенство (1.2.6) примет вид

$$J_2 = (\omega + \gamma) \int_0^\infty u(x) x^\omega \left(\frac{v'(x)}{x} + \frac{v(x)}{x^2} (\omega - 1) \right) dx.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} (B_{-\gamma} u, v)_\omega &= J_1 + J_2 = \\ &= \int_0^\infty u(x) \left(v''(x) + \frac{(2\omega + \gamma)}{x} v'(x) + \frac{(\omega + \gamma)(\omega - 1)}{x^2} v(x) \right) x^\omega dx. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$(B_{-\gamma} u, v)_\omega = \int_0^\infty B_{-\gamma} u(x) v(x) x^\omega dx = \left(u, \left[B_{\gamma+2\omega} + \frac{(\gamma + \omega)(\omega - 1)}{x^2} \right] v \right)_\omega.$$

Доказательство закончено.

Следствие 1.2.1. *Оператор*

$$\left[B_{\gamma+2\omega} + \frac{(\gamma + \omega)(\omega - 1)}{x^2} \right]$$

эрмитово сопряжён к оператору $B_{-\gamma}$ в L_2^ω . При $\omega = -\gamma$ оператор $B_{-\gamma}$ является эрмитовым (самосопряжённый по Лагранжу) в $L_2^{-\gamma} = \{f : x^{-\gamma} f \in L_2[0, \infty)\}$ для всех функций u и v из области определения оператора $B_{-\gamma}$. При $\omega = 1$ оператор эрмитово сопряженный к $B_{-\gamma}$ есть оператор Бесселя с положительным параметром $\gamma + 2$.

1.3 Ортогональность $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя

Положим в (1.2.1) $\omega = -\gamma$. Далее целью работы являются исследования решений уравнений (1.1.1) в следующей весовой билинейной форме

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_0^\infty u(x) v(x) x^{-\gamma} dx, \quad (1.3.1)$$

в рамках которой сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{-\gamma}$ оказывается эрмитовым (см. следствие 1.2.1).

Отметим также, что если функция $u(x)$ – решение уравнения (1.1.1), то функция $u(\lambda x)$ – решение уравнения $B_{\pm\gamma}u(\lambda x) + \lambda^2 u(\lambda x) = 0$.

Теорема 1.3.1. Пусть $\frac{1}{2} < \mu < 1$. Имеет место равенство

$$\int_0^1 \mathbb{J}_\mu(\lambda_k t) \mathbb{J}_\mu(\lambda_m t) t^{-\gamma} dt = \begin{cases} 0 & , k \neq m, \\ (\lambda_k \lambda_m)^\mu (2^\mu \Gamma(1 + \mu))^2 M \neq 0 & , k = m. \end{cases}, \quad (1.3.2)$$

где

- a) $M = \frac{1}{2} J_\mu'^2(\lambda_k)$, если λ_k есть корень уравнения $J_\mu(\lambda) = 0$;
- b) $M = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu^2}{\lambda_k^2}\right) J_\mu^2(\lambda_k)$, если λ_k есть корень уравнения $J_\mu'(\lambda) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (1.1.13), имеем

$$\mathbb{J}_\mu(\lambda_k t) = \Gamma(1 + \mu) 2^\mu (\lambda_k t)^\mu J_\mu(\lambda_k t), \quad \mu = \frac{\gamma + 1}{2}.$$

Тогда получим следующее представление левой части равенства (1.3.2).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbb{J}_\mu(\lambda_k t) \mathbb{J}_\mu(\lambda_m t) t^{-\gamma} dt &= \\ &= (2^\mu \Gamma(1 + \mu))^2 (\lambda_k \lambda_m)^\mu \int_0^1 t^{\frac{\gamma+1}{2}} J_\mu(\lambda_k t) t^{\frac{\gamma+1}{2}} J_\mu(\lambda_m t) t^{-\gamma} dt = \\ &= (2^\mu \Gamma(1 + \mu))^2 (\lambda_k \lambda_m)^\mu \int_0^1 J_\mu(\lambda_k t) J_\mu(\lambda_m t) t dt. \end{aligned}$$

Далее равенство (1.3.2) следует из ортогональности функций Бесселя первого рода J_μ положительных порядков μ ([63, с.271] формулы (12.6), (13.3) и (13.5); для $\mu > -1$, см. [20, с. 634]).

Доказательство закончено.

1.4 Интеграл Ганкеля и $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя

Интегралом Ганкеля называется следующее выражение:

$$f(x) = \int_0^\infty J_\mu(x\xi) \xi d\xi \int_0^\infty J_\mu(y\xi) f(y) y dy ,$$

где J_ν — функции Бесселя первого рода, $\nu > -1/2$. Оно справедливо для функций $f \in L_2(0, \infty)$. Б.М. Левитан на основе интеграла Ганкеля ввёл преобразование Фурье—Ганкеля, ядром которого уже служили j -функции Бесселя (1.0.4). В этой работе мы пользуемся его методами и подходами для введения нового интегрального преобразования, приспособленного для исследования уравнений с оператором Бесселя с отрицательным параметром. В дальнейшем оно названо $\mathbb{J}$ -преобразованием Бесселя.

В следующей теореме получено равенство Ганкеля на основе $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя.

Теорема 1.4.1. Пусть $\gamma = 2\mu - 1$ и $\frac{1}{2} < \mu < 1$. Если

$$f \in L_2^{-\mu}(0, \infty) = \{f : x^{-\mu}f(x) \in L_2(0, \infty)\},$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma^2(1+\mu) 2^{2\mu}} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \xi^{-2\mu+1} d\xi \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) y^{-2\mu+1} f(y) dy , \quad (1.4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся интегралом Ганкеля для функций $f : xf(x) \in L_2(0, \infty)$:

$$f(x) = \int_0^\infty J_\mu(x\xi) \xi d\xi \int_0^\infty J_\mu(y\xi) f(y) y dy .$$

Пусть $x^{-\mu}f(x) \in L_2(0, \infty)$, $\mu = \frac{\gamma+1}{2} > 0$. Тогда

$$f(x) x^{-\mu} = \int_0^\infty J_\mu(x\xi) \xi d\xi \int_0^\infty J_\mu(y\xi) f(y) y^{-\mu} y dy .$$

Пользуясь формулой (1.1.13), имеем

$$f(x) x^{-\mu} = C_\mu \int_0^\infty \frac{\mathbb{J}_\mu(x\xi)}{(x\xi)^\mu} \xi d\xi \int_0^\infty \frac{\mathbb{J}_\mu(y\xi)}{(y\xi)^\mu} f(y) y^{-\mu} y dy ,$$

где $C_\mu = \left(\frac{2^{-\mu}}{\Gamma(1+\mu)} \right)^2$. Далее

$$\begin{aligned} f(x) x^{-\mu} &= C_\mu x^{-\mu} \int_0^\infty \frac{\mathbb{J}_\mu(x\xi)}{\xi^\mu} \xi d\xi \int_0^\infty \frac{\mathbb{J}_\mu(y\xi)}{y^\mu \xi^\mu} f(y) y^{-\mu+1} dy = \\ &= C_\mu x^{-\mu} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \xi^{-2\mu+1} d\xi \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) y^{-2\mu+1} f(y) dy. \end{aligned}$$

Следовательно имеем следующий интеграл Фурье—Ганкеля:

если $x^{-\mu} f(x) \in L_2(0, \infty)$, то

$$f(x) = C_\mu \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \xi^{-2\mu+1} d\xi \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) f(y) y^{-2\mu+1} dy.$$

Учитывая введённые ранее обозначения $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$, $0 < \gamma < 1$, введём два взаимно обратных преобразования

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{J}_{\frac{\gamma+1}{2}}(y\xi) f(y) y^{-\gamma} dy, \quad \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\widehat{f}](x) = C_\mu \int_0^\infty \mathbb{J}_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi,$$

откуда следует формула (1.4.1).

Доказательство закончено.

Определение 1.4.1. *Прямым и обратным $\mathbb{J}$ -преобразованиями Бесселя соответственно будем называть следующие выражения:*

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[f](y) = \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) f(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi, \quad \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[f](\xi) = \frac{2^{-2\mu}}{\Gamma^2(1+\mu)} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \widehat{f}(x) \xi^{-\gamma} dx.$$

На функциях $L_2^{-\gamma}(0, \infty)$ эти преобразования обратимы:

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\widehat{f}](\xi) = f(\xi), \tag{1.4.2}$$

что вытекает из формулы Фурье—Ганкеля (1.4.1).

Глава 2

Обобщённый Т-псевдосдвиг

Понятие «обобщенный сдвиг» введено А. Ванштейном и Ж. Дельсартом в середине прошлого века. Б.М. Левитаном дано несколько определений класса обобщенных сдвигов, которые включают сдвиги Вайнштейна и Дельсарта. Ниже приведено определение *обобщенного сдвига* из книги [35].

Обозначим через Ω некоторое топологическое пространство и через s, r, t точки этого пространства. Пусть $f(t)$, $t \in \Omega$ — комплекснозначная функция, непрерывная в топологии, заданной на Ω . В дальнейшем совокупность всех функций, непрерывных на Ω , мы будем обозначать через $C = C(\Omega)$.

Допустим теперь, что на функциях $f(t) \in C$ определено семейство операторов T^s , зависящих от $s \in \Omega$ как от параметра. Таким образом, каждой функции $f(t) \in C$ ставится в соответствие функция $F(s, t)$ от двух точек пространства Ω . В дальнейшем будем пользоваться обозначением $F(s, t) = T_t^s f(t)$.

Иногда нам придется рассматривать s как основную переменную, а t как параметр. Мы будем изучать операторы удовлетворяющие следующим четырем условиям:

1⁰. *Линейность.* Для любых двух функций $f(t)$ и $g(t) \in C$ и произвольных постоянных комплексных чисел a и b выполняется равенство

$$T^s[af(t) + bg(t)] = aT^s f(t) + bT^s g(t).$$

2⁰. В пространстве Ω существует точка (элемент) s_0 , которая обладает тем свойством, что для любой функции $f(t)$

$$T^{s_0} f(t) = f(t).$$

3⁰. Для произвольной функции $f(t) \in C$ и произвольных точек $s, r, t \in \Omega$ выполняется равенство

$$T_s^r T^s f(t) = T_t^s T^r f(t).$$

4⁰. Для произвольной функции $f(t) \in C$ функция $F(s, t) = T^s f(t)$ непрерывна по совокупности точек (s, t) .

Определение. Семейство операторов T^s , удовлетворяющих условиям 1⁰ – 4⁰, мы будем называть операторами обобщенного сдвига. Если, кроме условий 1⁰ – 4⁰, выполняется еще одно условие 5⁰. Для любых точек $s, r \in \Omega$ и любой функции $f(t) \in C$ выполняется равенство $T_t^s T^r f(t) = T_t^r T^s f(t)$, то мы будем говорить, что операторы обобщенного сдвига коммутативны.

Далее дано определение, которое вытекает из доказательства теоремы сложения, приведенной ниже.

Определение 2.0.1. $\mathbb{T}$ -Псевдосдвигом в евклидовом полупространстве $\mathbb{R}_1^+$ будем называть следующую конструкцию

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi (xy)^{\gamma+1} \frac{f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha. \quad (2.0.1)$$

Сразу отметим, что конструкция (2.0.1), вообще говоря, не является сдвигом, т.к. не выполняется основное свойство 2° сдвига.

Действительно. Свойство 2° указывает на существование точки s_0 не меняющий функции, т.е. такой, что $T^{s_0} f(t) = f(t)$. Естественным «нулевым элементом» обобщенного сдвига обычно служит нулевой шаг $s_0 = 0$. Но, вопреки этому свойству, нулевой шаг $\mathbb{T}$ -псевдосдвига приводит к очевидному равенству

$$\forall f \in C[0, \infty) \implies \mathbb{T}^0 f(x) = 0,$$

Кроме того, отметим еще одну особенность $\mathbb{T}$ -псевдосдвига, весьма неудобную для приложений: если $f(x) = \text{const} = C \quad \forall x \in [0, a), \quad a > 0$, то $\mathbb{T}^y f(x) \neq C \quad \forall y \in [0, a), \quad a > 0$.

Стоит отметить, что хоть и оператор $\mathbb{T}_x^y$ не является сдвигом в классическом смысле, но в некотором смысле выполняет его роль. В связи с этим оператор $\mathbb{T}_x^y$ назван в [53] $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом.

Необходимо отметить, что особенность в конструкции $\mathbb{T}$ -псевдосдвига: точка $x=y, \alpha=0$ в определении (2.0.1) выглядит как особая. На самом деле эта особенность регулярная, в том смысле, что для любой ограниченной функции $|f(x)| < M, \quad x \in [0, a], \quad y < a/2, \quad a < \infty$ справедливо неравенство

$$\left| \mathbb{T}_x^y f(x) \right|_{x=y} \leq M \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi \left(\frac{y \sin \alpha}{\sqrt{2(1-\cos \alpha)}} \right)^{\gamma+1} d\alpha = M_1 < \infty. \quad (2.0.2)$$

Далее, следуя подходам и методам Б.М. Левитана, разработанными в работе [35], будут доказаны основные свойства обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига. Для этого понадобятся некоторые обобщения теории функций Бесселя. Речь идет о следующих двух известных утверждениях.

I. Интеграл Пуассона для j -функций Бесселя. Известна следующая формула Пуассона представления J_ν -функций Бесселя [2, с.91]:

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{it \cos \alpha} (\sin \alpha)^{2\nu} d\alpha, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

откуда для j_ν -функций Бесселя, при $\nu > -\frac{1}{2}$, имеем

$$j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \frac{J_\nu(t)}{t^\nu} = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{it \cos \alpha} (\sin \alpha)^{2\nu} d\alpha. \quad (2.0.3)$$

Связь порядка ν j -функции Бесселя с параметром γ оператора Бесселя осуществляется равенством $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$. В результате получим следующий интеграл Пуассона для j -функций Бесселя:

$$j_\nu(t) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^\pi e^{it \cos \alpha} (\sin \alpha)^{\gamma-1} d\alpha, \quad \gamma > 0.$$

II. Теорема сложения Б.М. Левитана для j -функций Бесселя.
В [35] для j_ν -функций Бесселя получена следующая теорема сложения :

$$j_\nu(t\xi) j_\nu(t\tau) = T_\xi^\tau j_\nu(t\xi), \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

где T_ξ^τ обобщенный сдвиг Пуассона:

$$T^\tau \varphi(\xi) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^\pi \varphi(\sqrt{\xi^2 + \tau^2 - 2\xi\tau \cos \alpha}) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha, \quad \gamma > 0. \quad (2.0.4)$$

2.1 Интеграл Пуассона для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя положительного порядка

$\mathbb{J}$ -Функция Бесселя положительного порядка $\mu \in (1/2, 1)$ (т.е. $> -1/2$) имеет представление (2.0.3). Порядок μ этой функции связан с отрицательным параметром оператора $B_{-\gamma}$ равенством $-\gamma = -2\mu + 1$. Следовательно интеграл Пуассона для решения сингулярного уравнения Бесселя (1.1.13), отвечающего положительному порядку μ ($\mu < 1/2$), имеет следующий вид:

$$\mathbb{J}_\mu(t) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} t^{\gamma+1} \int_0^\pi e^{it \cos \alpha} (\sin \alpha)^{\gamma+1} d\alpha, \quad \gamma > 0.$$

2.2 Теорема сложения для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя положительного порядка и оператор $\mathbb{T}$ -псевдосдвига

Для $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя имеет место теорема сложения, в которой роль обобщенного сдвига Пуассона (2.0.4) выполняет $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг (2.0.1).

Теорема 2.2.1. Пусть порядок оператора Бесселя $B_{-\gamma}$ удовлетворяет условию $0 > -\gamma > -1$ и $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Тогда справедлива формула

$$\mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi), \quad x, y, \xi \in \mathbb{R}_1^+,$$

где оператор $\mathbb{T}$ -псевдосдвига определен формулой (2.0.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (1.1.13) имеем

$$\mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) = (x\xi)^{2\mu} j_\mu(x\xi) (y\xi)^{2\mu} j_\mu(y\xi) = (x\xi)^{2\mu} (y\xi)^{2\mu} T_x^y j_\mu(x\xi).$$

Поскольку $\gamma = 2\mu - 1$, то обобщенный сдвиг Пуассона определен следующим образом:

$$T_x^y j_\mu(x\xi) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \int_0^\pi j_\mu\left(\xi \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right) \sin^{2\mu} \alpha \, d\alpha.$$

Тогда

$$\mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) = \frac{(x\xi)^{2\mu} (y\xi)^{2\mu} \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \int_0^\pi j_\mu\left(\xi \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right) \sin^{2\mu} \alpha \, d\alpha.$$

Вновь пользуемся формулой (1.1.13). В результате

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) &= \frac{(x\xi)^{2\mu} (y\xi)^{2\mu} \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \times \\ &\times \int_0^\pi \frac{j_\mu\left(\xi \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right) \left(\xi \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}}{\left(\xi \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{(xy\xi)^{2\mu} \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{\mathbb{J}_\mu\left(\xi \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha \, d\alpha = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

2.3 Свойства обобщённого $\mathbb{T}$ -псевдосдвига

Отметим, что оператор $\mathbb{T}$ -псевдосдвига не меняет гладкости функции, т.к. особенность знаменателя регулярная. Отчасти это показано равенством (2.0.2). Далее, для удобства, в обозначении $\mathbb{T}$ -псевдосдвига будет указан только верхний индекс (шаг сдвига), если переменная нижнего индекса очевидна.

Свойство 1. Оператор $\mathbb{T}$ -псевдосдвига является эрмитовым (самосопряженным по Лагранжу) в весовой билинейной форме $(\cdot, \cdot)_{-\gamma}$.

Если f и g функции суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, $\gamma \in (0, 1)$, то

$$(\mathbb{T}^y f, g)_{-\gamma} = (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma}. \quad (2.3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma} &= \int_0^\infty f(x) \mathbb{T}^y g(x) x^{-\gamma} dx = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\infty f(x) \int_0^\pi (xy)^{\gamma+1} \frac{g\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha x^{-\gamma} dx. \end{aligned}$$

Введем обозначение $C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}$ и учитывая, что $-\gamma = 1 - 2\mu$, получим

$$\begin{aligned} (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma} &= C_\gamma \int_0^\infty \int_0^\pi f(x) (xy)^{2\mu} \frac{g\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha x^{1-2\mu} dx = \\ &= C_\gamma \int_0^\infty \int_0^\pi f(x) y^{2\mu} \frac{g\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \frac{(x \sin \alpha)^{2\mu}}{x^{2\mu}} d\alpha x dx. \end{aligned}$$

Здесь $x > 0$, поэтому может играть роль радиуса для вектора с декартовыми координатами (z_1, z_2) . Введем антиполярные координаты z_1, z_2 связанные с интегрированием по полукругу по формулам

$$0 < \alpha < \pi, \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = x \cos \alpha \\ z_2 = x \sin \alpha \end{array} \right\}, \quad x dx d\alpha = dz_1 dz_2 = dz.$$

Тогда

$$(f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma} = C_\gamma \int_{\mathbb{R}_2^+} y^{2\mu} f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) \frac{g\left(\sqrt{(y-z_1)^2 + z_2^2}\right)}{\left(\sqrt{(y-z_1)^2 + z_2^2}\right)^{2\mu}} \frac{z_2^{2\mu}}{\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right)^{2\mu}} dz.$$

Теперь сдвиг $y - z_1 = \xi$ приведет к равенству

$$(f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma} = C_\gamma y^{2\mu} \int_{\mathbb{R}_2^+} \frac{f\left(\sqrt{(y-\xi)^2 + z_2^2}\right)}{\left(\sqrt{(y-\xi)^2 + z_2^2}\right)^{2\mu}} \frac{g\left(\sqrt{\xi^2 + z_2^2}\right)}{\left(\sqrt{\xi^2 + z_2^2}\right)^{2\mu}} z_2^{2\mu} d\xi dz_2.$$

Применением полярных координат

$$\xi = x \cos \alpha, \quad z_2 = x \sin \alpha, \quad d\xi dz_2 = d\alpha x dx$$

вернемся к старым обозначениям:

$$\begin{aligned} (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma} &= C_\gamma \int_0^\infty y^{2\mu} \int_0^\pi \frac{f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \frac{g(x)}{x^{2\mu}} (x \sin \alpha)^{2\mu} \alpha d\alpha x dx = \\ &= \int_0^\infty \left[C_\gamma (xy)^{2\mu} \int_0^\pi \frac{f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha \right] g(x) x^{-\gamma} dx = (\mathbb{T}^y f, g)_{-\gamma}. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой обобщенный $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг (2.0.1). Отсюда вытекает равенство (2.3.1).

Доказательство закончено.

Свойство 2. Коммутируемость $\mathbb{T}$ -псевдосдвига с оператором $B_{-\gamma}$. Пусть f четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, $0 < \gamma < 1$ и $f \in L_2^{-\gamma}(0, \infty)$ ($x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0, \infty)$). Тогда

$$B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma, x} f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы обращения $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя (1.4.1) имеем

$$B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) = B_{-\gamma, x} \frac{1}{(\Gamma(1+\mu) 2^\mu)^2} \int_0^\infty \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Используем ранее введенное обозначение $C_\mu = \left(\frac{2^{-\mu}}{\Gamma(1+\mu)}\right)^2$. По теореме сложения 2.2.1 получим

$$B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) = C_\mu B_{-\gamma, x} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Из формулы (1.1.13) имеем

$$\begin{aligned} B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) &= C_\mu \int_0^\infty (-\xi^2) \mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi = \\ &= C_\mu \int_0^\infty (-\xi^2) \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi. \end{aligned}$$

Здесь множитель $(-\xi^2)$ можно внести под знак $\mathbb{T}$ -псевдосдвига. В результате

$$\begin{aligned} (B_{-\gamma})_x \mathbb{T}_x^y f(x) &= C_\mu \int_0^\infty \mathbb{T}_x^y ((-\xi^2) \mathbb{J}_\mu(x\xi)) \hat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi = \\ &= C_\mu \int_0^\infty \mathbb{T}_x^y (B_{-\gamma} \mathbb{J}_\mu(x\xi)) \hat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi = C_\mu \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma} \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \hat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma} f(x). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Свойство 3. Перестановочность операторов $\mathbb{T}$ -псевдосдвига.

Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$ -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения псевдосдвига и теоремы 2.2.1 следует

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z \mathbb{J}(\lambda x) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}(\lambda z) \mathbb{J}(\lambda x) = \mathbb{J}(\lambda z) \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}(\lambda x). \quad (2.3.2)$$

Теперь мы воспользуемся уже доказанным равенством (2.3.2), где поменяв местами y и z запишем

$$\mathbb{J}(\lambda z) \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}(\lambda x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}(\lambda x).$$

Т.е. мы имеем формальное равенство

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z \mathbb{J}(\lambda x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}(\lambda x).$$

Для произвольной функции f , представленной рядом по $\mathbb{J}$ -функциям Бесселя, учитывая регулярность $\mathbb{T}$ -псевдосдвига и возможность интегрировать ряд почленно, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x) &= \mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z \sum_{k=0}^\infty f_k \mathbb{J}(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^\infty f_k \mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z \mathbb{J}(\lambda_k x) = \\ &= \sum_{k=1}^\infty f_k \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}(\lambda_k x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \sum_{k=1}^\infty f_k \mathbb{J}(\lambda_k x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Свойство 4. Ассоциативность операторов $\mathbb{T}$ -псевдосдвига.

Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$ -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x), \quad \mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

Доказательство этого свойства аналогично доказательству свойства 3 и мы его не приводим.

2.4 Аналоги неравенства Петре для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига

При изучении псевдодифференциальных операторов важную роль играет неравенство Петре [82]

$$\left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^k \leq 2^{|k|} \left(1 + |\xi - \eta|^2 \right)^{|k|}, \quad k \in \mathbb{R}_n, \quad (2.4.1)$$

и интегральное неравенство

$$\int_0^\infty \left(1 + |\xi - \eta|^2 \right)^{-p} \left(1 + |\eta - \tau|^2 \right)^{-q} d\eta \leq C \left(1 + |\xi - \tau|^2 \right)^{-p}, \quad (2.4.2)$$

где p и q произвольные достаточно большие числа.

Соответствующим аналогом неравенства (2.4.2) является неравенство, полученное профессором Л.Н. Ляховым [37, лемма 1] для обобщенного сдвига Пуассона:

Пусть $\xi = (\xi', \xi_{n+1})$, $\eta = (\eta', \eta_{n+1})$, $\tau = (\tau', \tau_{n+1})$ принадлежат пространству $\mathbb{R}_{n+1}^+$ и пусть $q = 3p$ произвольное большое число. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} T_{\eta_{n+1}}^{\xi_{n+1}} \left(1 + |\xi' - \eta'|^2 + \eta_{n+1}^2 \right)^{-p} T_{\tau_{n+1}}^{\eta_{n+1}} \left(1 + |\eta' - \tau'|^2 + \tau_{n+1}^2 \right)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta &\leq \\ &\leq C T_{\tau_{n+1}}^{\xi_{n+1}} \left(1 + |\xi' - \tau'|^2 + \tau_{n+1}^2 \right)^{-p} \end{aligned}$$

Необходимость в аналогичных неравенствах возникает при исследовании сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов. Доказательству аналогичного неравенства для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига посвящены две следующие теоремы.

Теорема 2.4.1. Пусть ξ, η, τ точки пространства $\mathbb{R}_1^+$ и пусть p и q произвольные достаточно большие числа. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} \mathbb{T}_\eta^\xi \left(1 + \eta^2 \right)^{-p} \mathbb{T}_\tau^\eta \left(1 + \tau^2 \right)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta \leq \frac{C_\gamma}{2^{|k|}} \mathbb{T}_\tau^\xi \left(1 + \tau^2 \right)^{-p}. \quad (2.4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим левую часть неравенства (2.4.3) через J , имеем

$$J = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\eta^\xi \left(1 + \eta^2 \right)^{-p} \mathbb{T}_\tau^\eta \left(1 + \tau^2 \right)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta.$$

Применяя свойства самосопряжённости, переместительности и ассоциативности оператора $\mathbb{T}$ -псевдосдвига, имеем

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\eta^\tau \mathbb{T}_\eta^\xi (1 + \eta^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta = \\
&= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\eta^\xi \mathbb{T}_\eta^\tau (1 + \eta^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta = \\
&= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\tau^\xi \mathbb{T}_\eta^\tau (1 + \eta^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta .
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$|\eta - \tau|^2 \leq \eta^2 + \tau^2 - 2\eta\tau \cos \alpha , \quad (2.4.4)$$

заменяем оператор $\mathbb{T}_\eta^\tau$ в последнем выражении обычным сдвигом, тогда

$$J \leq C_\gamma \mathbb{T}_\tau^\xi \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_0^\pi \left(\frac{\eta \tau \sin \alpha}{\sqrt{\eta^2 + \tau^2 - 2\eta\tau \cos \alpha}} \right)^{\gamma+1} (1 + |\eta - \tau|^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta d\alpha ,$$

где

$$C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} .$$

Заметим, что выражение $\sqrt{\eta^2 + \tau^2 - 2\eta\tau \cos \alpha}$ минимальное значение принимает при $\alpha = 0$ и $\eta = \tau$. Положим $\eta = \tau$, тогда

$$\begin{aligned}
J &\leq C_\gamma \mathbb{T}_\tau^\xi \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_0^\pi \left(\frac{\tau \sin \alpha}{\sqrt{\tau^2(1 - \cos \alpha)}} \right)^{\gamma+1} (1 + |\eta - \tau|^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta d\eta d\alpha = \\
&= C_\gamma \mathbb{T}_\tau^\xi \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_0^\pi \left(\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^{\gamma+1} (1 + |\eta - \tau|^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta d\eta d\alpha = \\
&= C_\gamma \mathbb{T}_\tau^\xi \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_0^\pi (1 + |\eta - \tau|^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta d\eta \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{\gamma+1} d\alpha .
\end{aligned}$$

Теперь перейдём к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, в результате

$$J \leq C_\gamma \mathbb{T}_\tau^\xi \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\eta - \tau|^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta d\eta .$$

Из неравенства Петре (2.4.1), имеем

$$J \leq \frac{C_\gamma}{2^{|k|}} \mathbb{T}_\tau^\xi \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(\frac{1 + \tau^2}{1 + \eta^2} \right)^{-p} (1 + \eta^2)^{-q} \eta d\eta .$$

Следовательно

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{C_\gamma}{2^{|k|}} \mathbb{T}_\tau^\xi (1 + \tau^2)^{-p} \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + \eta^2)^p (1 + \eta^2)^{-q} (1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} d\eta = \\ &= \frac{C_\gamma}{2^{|k|}} \mathbb{T}_\tau^\xi (1 + \tau^2)^{-p} \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + \eta^2)^{p-q+\frac{1}{2}} d\eta . \end{aligned}$$

Поскольку p и q произвольные числа и $p - q > -n - \frac{3}{2}$, то

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\eta^\xi (1 + \eta^2)^{-p} \mathbb{T}_\tau^\eta (1 + \tau^2)^{-q} \eta^{-\gamma} d\eta \leq \frac{C_\gamma}{2^{|k|}} \mathbb{T}_\tau^\xi (1 + \tau^2)^{-p}$$

Доказательство закончено.

Теорема 2.4.2. Пусть $\xi, \eta, \in \mathbb{R}_n^+$. Тогда для любых p и k

$$\left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^k \mathbb{T}^\eta (1 + \xi^2)^{-p} \leq C_\gamma 2^{|k|} \mathbb{T}^\eta (1 + \xi^2)^{|k|-p} \quad (2.4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим левую часть выражения (2.4.5) через Q . Тогда согласно неравенству Петре (2.4.1), имеем

$$\begin{aligned} Q &\leq 2^{|k|} \left(1 + |\xi - \eta|^2 \right)^{|k|} \mathbb{T}^\eta (1 + \xi^2)^{-p} = \\ &= 2^{|k|} \left(1 + |\xi - \eta|^2 \right)^{|k|} C_\gamma \int_0^\pi (\xi \eta)^{2\mu} \frac{\left(\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos \alpha} \right)^{-p}}{\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos \alpha} \right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha = \end{aligned}$$

Согласно неравенству (2.4.4), получим

$$\begin{aligned} Q &\leq 2^{|k|} C_\gamma \left(\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos \alpha} \right)^{|k|} \int_0^\pi (\xi \eta)^{2\mu} \times \\ &\times \frac{\left(\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos \alpha} \right)^{-p}}{\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos \alpha} \right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha . \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q \leq C_\gamma 2^{|k|} \int_0^\pi (\xi \eta)^{2\mu} \frac{\left(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta \cos \alpha}\right)^{|k|-p}}{\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2-2\xi\eta \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha$$

$$\leq C_\gamma 2^{|k|} \mathbb{T}^\eta (1+\xi^2)^{|k|-p}.$$

Доказательство закончено.

Из неравенства (2.4.5) аналогично получаем неравенство

$$\left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{|k|} \mathbb{T}^\eta (1 + \xi^2)^{-p} \leq C_\gamma 2^{|k|} \mathbb{T}^\eta (1 + \xi^2)^{|k|-p} \quad (2.4.6)$$

2.5 Обобщённый $\mathbb{T}$ -сдвиг

В работе изучается конструкция, которая возникает из определения псевдосдвига (2.0.1), следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x^y f(x) &= y^{-(\gamma+1)} \mathbb{T}_x^y f(x) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi x^{\gamma+1} \frac{f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Вначале отметим, принципиальные особенности этого оператора, по сравнению с введенным ранее $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом (2.0.1).

Отличие первое — конструкция $\mathbb{T}$ -сдвига (2.5.1) не симметрична относительно аргумента функции $f = f(x)$ и шага сдвига y . Это приводит к соответствующим трудностям, поскольку в левитановском определении обобщенного сдвига нет различия между аргументом функции и шагом сдвига, а теперь это отличие существенно, поскольку в определении (2.5.1) первый множитель — это соответствующая степень шага. В этой связи возникает правило — нижний индекс в выражении $\mathbb{T}_x^y$ -сдвига всегда будет аргумент функции, а верхний — аргументом шага.

Отличие второе — теорема сложения имеет вид

$$\mathbb{J}_\mu(x\xi) \mathbb{J}_\mu(y\xi) = y^{2\mu} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi), \quad x, y, \xi \in \mathbb{R}_1^+.$$

Это отличие, разумеется, вызвано первым отличием и приводит к естественным трудностям при использовании теоремы сложения в приложениях (приходится все рассуждения сводить к теореме сложения 2.2.1).

Еще отметим особенность возникающую от связи с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$.

Отличие третье — $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг превращается в $\mathbb{T}$ -сдвиг, но в линейной форме с весом $x^1 = x$:

$$(\mathbb{T}_y^x u, v)_{-\gamma} = (\mathbb{T}_x^y u, v)_1.$$

Но при том оператор $B_{-\gamma}$ не эрмитов в весовой билинейной форме слева от этого равенства, т.к. сопряженный ему оператор — это оператор Бесселя с положительным параметром $\gamma + 2$ (см. следствие 1.2.1).

2.5.1 Принадлежность $\mathbb{T}$ -сдвига классу обобщенных сдвигов Левитана

Мы проверим выполнение свойств $1^\circ - 4^\circ$ из начала главы 2. При этом учтем, что цитированное выше определение «обобщенного сдвига Левитана» T_t^s сформулировано для непрерывных функций и точки t и s равнозначны, т.е. каждая из них может считаться аргументом функции. В определении (2.5.1) это уже не так, что требует некоторых изменений.

Свойство 1^* . Выполнение свойства 1° (линейность) для $\mathbb{T}$ -сдвига очевидно, поскольку оператор (2.5.1) — интегральный.

Свойство 2^* . Проверим условие 2° (существование нулевого элемента). Пусть шаг в конструкции $\mathbb{T}$ -сдвига (2.5.1) равен 0, т.е. $y = 0$. Тогда для любой интегрируемой функции, имеет место равенство

$$\mathbb{T}_y^* f(x) \Big|_{y=0} = f(x) \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} \int_0^\pi \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x^y f(x) \Big|_{y \rightarrow 0} &= \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} \int_0^\pi x^{\gamma+1} \frac{f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha \Big|_{y \rightarrow 0} = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} \int_0^\pi f(x) \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Из формулы В-функции Эйлера

$$B(p, q) = \int_0^\pi \sin^{2p-1} \alpha \cos^{2q-1} \alpha d\alpha = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p, q > 0),$$

вытекает

$$\int_0^\pi \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}.$$

Тогда

$$\mathbb{T}_y^* f(x) \Big|_{y=0} = \mathbb{T}_0^* f(x) = f(x).$$

Таким образом, точка $y = 0$ существует и представляется нулевым шагом.

Доказательство закончено.

Свойство 3*. Ассоциативность операторов $\mathbb{T}$ -сдвига. Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$ -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\mathbb{T}$ -сдвига и теоремы 2.2.1, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x) &= y^{-2\mu} \mathbb{T}_y^z z^{-2\mu} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x) = y^{-2\mu} z^{-2\mu} \mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x) = \\ &= y^{-2\mu} z^{-2\mu} \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Свойство 4* (непрерывность обобщенного $\mathbb{T}$ -сдвига). Пусть $f \in C(\overline{\mathbb{R}_1^+})$ и $y = \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathbb{T}_x^{\Delta x} f(x) = f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению обобщенного $\mathbb{T}$ -сдвига, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x^{\Delta x} f(x) \Big|_{\Delta x \rightarrow 0} &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \times \\ &\times \int_0^\pi x^{\gamma+1} \frac{f\left(\sqrt{(x^2 + \Delta x^2 - 2x\Delta x \cos \alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2 + (\Delta x)^2 - 2x\Delta x \cos \alpha)}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha \Big|_{\Delta x \rightarrow 0} = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi f(x) \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha = f(x). \end{aligned}$$

Здесь, как и раньше, мы применили формулу В-функции Эйлера.

Таким образом выполнены все свойства Б.М. Левитана определения обобщенного сдвига, следовательно введенный в диссертации оператор $\mathbb{T}$ -сдвига принадлежит левитановскому классу обобщенных сдвигов.

2.5.2 Дополнительные свойства обобщённого $\mathbb{T}$ -сдвига

Свойство 5*. Перестановочность $\mathbb{T}$ -сдвига. Если $f \in C[0, a)$ и представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$ -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формально свойство перестановочности непосредственно следует из определения $\mathbb{T}$ -сдвига и уже доказанного аналогичного свойства для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (см. свойство 3). Действительно

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z \mathbb{J}_\mu(\lambda x) &= y^{-2\mu} \mathbb{T}_x^y z^{-2\mu} \mathbb{T}_x^z \mathbb{J}_\mu(\lambda x) = y^{-2\mu} z^{-2\mu} \mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z \mathbb{J}_\mu(\lambda x) = \\ &= y^{-2\mu} z^{-2\mu} \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x) = z^{-2\mu} \mathbb{T}_x^z y^{-2\mu} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(\lambda x). \end{aligned}$$

Утверждение этого свойства применительно к классу непрерывных функций вытекает также, как и для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига.

Доказательство закончено.

Свойство 6*. Ограниченность $\mathbb{T}$ -сдвига. Пусть $\overline{\Omega^+} \subseteq \overline{\mathbb{R}_1^+}$ и $f \in C(\overline{\Omega^+})$.

$$\text{Если } \sup_{x \in \overline{\Omega^+}} |f(x)| = M, \quad \text{то } \sup_{x \in \overline{\Omega^+}} |\mathbb{T}^y f(x)| = M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для выполнения условия 6* продолжим функцию f нулем в область $\Omega_1^+ = \mathbb{R}_1^+ \setminus \overline{\Omega^+}$. Имеем

$$\mathbb{T}^y f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} \int_0^\pi \frac{x^{\gamma+1} f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha.$$

Здесь $x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha \geq 0$ при всех α . При $x = y$ выполнено равенство (2.5.2), следовательно

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{T}^y f(x) \right| &\leq \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} \int_0^\pi \frac{x^{\gamma+1} M}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{\gamma+1}} \Big|_{x=y} |\sin \alpha|^{\gamma+1} d\alpha = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} \int_0^\pi \frac{M}{|2(1 - \cos \alpha)|^{\frac{\gamma+1}{2}}} |\sin \alpha|^{\gamma+1} d\alpha \leq \\ &\leq M \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma+2}{2})} 2 \int_0^{\pi/2} |\cos \alpha|^{\gamma+1} d\alpha = M. \end{aligned}$$

Здесь учли, что согласно определению В-функции Эйлера,

$$2 \int_0^{\pi/2} (\cos \alpha)^{\gamma+1} d\alpha = B\left(\frac{\gamma+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}.$$

Доказательство закончено.

Свойство 7*. Оператор (2.5.1) эрмитов в весовой билинейной форме (1.3.1).
Если f и g функции суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то

$$\left(\mathbb{T}_x^y f, g\right)_{-\gamma} = \left(f, \mathbb{T}_x^y g\right)_{-\gamma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $-\gamma = 1 - 2\mu$, имеем

$$\begin{aligned} \left(f, \mathbb{T}_x^y g\right)_{-\gamma} &= y^{-2\mu} \int_0^\infty \int_0^\pi f(x) (xy)^{2\mu} \frac{g\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \times \\ &\times \sin^{2\mu} \alpha d\alpha x^{1-2\mu} dx = y^{-2\mu} (\mathbb{T}_x^y f, g)_{-\gamma} = \left(\mathbb{T}_x^y f, g\right)_{-\gamma}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством эрмитовости оператора $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (равенство (2.3.1)).

Доказательство закончено.

Свойство 8*. Коммутируемость $\mathbb{T}$ -сдвига с оператором $B_{-\gamma}$.

Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая четная функция и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0, \infty)$, $\gamma \in (0, 1)$. Тогда

$$B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma, x} f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига равенство

$$B_{-\gamma, y} \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma, x} f(x)$$

вытекает из теоремы сложения 2.2.1. Отсюда получаем

$$B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) = y^{-2\mu} B_{-\gamma, x} \mathbb{T}_x^y f(x) = y^{-2\mu} \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma, y} f(y) = \mathbb{T}_x^y B_{-\gamma} f(x).$$

Доказательство закончено.

Свойство 9*. Ограниченность в весовом классе Лебега—Киприянова.

Оператор обобщенного сдвига ограничено действует в пространстве $L_p^{-\gamma}$, $1 \leq p < \infty$, т.е.

$$\|\mathbb{T}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}} \leq \|f\|_{L_p^{-\gamma}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В выражении $\Phi(y) = \|\mathbb{T}^y f\|_{L_p^{-\gamma}}^*$ норма взята интегрированием по аргументу функции. Учитывая, что $-\gamma = 1 - 2\mu$, имеем

$$\|\mathbb{T}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}}^* = \left[\int_{\mathbb{R}_1^+} \left| C_\gamma \int_0^\pi x^{2\mu} \frac{f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha \right|^p x^{-\gamma} dx \right]^{1/p},$$

где $C_\gamma = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\gamma+2}{2})}$.

Применим обобщенное неравенство Минковского:

$$\|\mathbb{T}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}}^* \leq C_\gamma \int_0^\pi \sin^{2\mu} \alpha d\alpha \left[\int_{\mathbb{R}_1^+} \left| x^{2\mu} \frac{f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \right|^p x^{-\gamma} dx \right]^{1/p}.$$

Учтем рост подынтегрального выражения при $x=y$ и $\alpha \rightarrow 0$. При $x=y$ получим

$$\left. \frac{x^{2\mu}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)^{2\mu}} \right|_{x=y} = \frac{1}{(2(1 - \cos \alpha))^\mu}. \quad (2.5.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbb{T}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}}^* &\leq C_\gamma \int_0^\pi \sin^{2\mu} \alpha d\alpha \left[\int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \frac{f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right)}{(2(1 - \cos \alpha))^\mu} \right|^p x^{-\gamma} dx \right]^{1/p} \leq \\ &\leq C_\gamma \int_0^\pi |\cos^{2\mu}(\alpha/2)| d\alpha \left[\int_{\mathbb{R}_1^+} \left| f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right) \right|^p x^{-\gamma} dx \right]^{1/p} \leq \\ &\leq C_\gamma \int_0^\pi d\alpha \left[\int_{\mathbb{R}_1^+} \left| f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}\right) \right|^p x^{1-2\mu} dx \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Введем антиполярные координаты

$$\left\{ \begin{array}{l} x \cos \alpha = z_1 \\ x \sin \alpha = z_2 \end{array} \right\}, \quad x dx d\alpha = dz_1 dz_2 = dz.$$

В результате получим

$$\|\mathbb{T}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}}^* \leq C_\gamma \left[\int_{\mathbb{R}_2^+} \left| f\left(\sqrt{(y - z_1)^2 + z_2^2}\right) \right|^p \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right)^{-2\mu} dz \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq C_\gamma \left[\int_{\mathbb{R}_2^+} \left| f \left(\sqrt{(y - z_1)^2 + z_2^2} \right) \right|^p \left(\sqrt{z_2^2} \right)^{-2\mu} dz \right]^{1/p}.$$

Теперь сдвиг $y - z_1 = \xi$ приведет к неравенству

$$\| \mathbb{T}^y f(x) \|_{L_p^{-\gamma}} \leq C_\gamma \left[\int_{\mathbb{R}_2^+ = \{z: z_2 > 0\}} \left| f \left(\sqrt{\xi^2 + z_2^2} \right) \right|^p z_2^{-2\mu} d\xi dz \right]^{1/p}.$$

Применим полярное преобразование координат

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x \cos \alpha \\ z_2 = x \sin \alpha \end{array} \right\}, \quad d\xi dz = d\alpha x dx.$$

Учитывая равенство $-2\mu = -\gamma - 1$, вернемся к старым обозначениям:

$$\| \mathbb{T}^y f(x) \|_{L_p^{-\gamma}} \leq C_\gamma \int_0^\pi \sin^{1-\gamma} \alpha d\alpha \left[\int_{\mathbb{R}_n^+} |f(x)|^p x^{-\gamma} dx \right]^{1/p} = \|f\|_{L_p^{-\gamma}}.$$

Доказательство закончено.

Неравенство, аналогичное свойству 9* для обобщенного сдвига Пуассона (2.0.4) доказано в работе [30].

Замечание 2.5.1. Также отметим, что для $p = \infty$ выполнение условия 9* возможно лишь при ограниченности носителя функции f .

2.6 Т-Квазисдвиг и его свойства

Т-Квазисдвиг определен следующим выражением

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x^{**} f(x) &= x^{-(\gamma+1)} \mathbb{T}_x^y f(x) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi y^{\gamma+1} \frac{f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy \cos \alpha)}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Установим некоторые свойства Т-квазисдвига. Вначале заметим очевидное — Т-псевдосдвиг в весовой линейной форме $(u, u)_{-\gamma}$ есть Т-квазисдвиг в весовой линейной форме $(u, u)_1$, т.е.

$$(\mathbb{T}_x^y u, v)_{-\gamma} \equiv \left(\mathbb{T}_x^y u, v \right)_1.$$

$$\underline{\text{Свойство 1}^{**}}. \quad \left(\mathbb{T}^{**} f(t), g(t) \right)_1 = \left(f(t), \mathbb{T}^y g(t) \right)_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства 1 оператора $\mathbb{T}$ -псевдосдвига, имеем

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{T}^{**} f(x), g(x) \right)_1 &= \left(x^{-\gamma-1} \mathbb{T}^y f(x), g(x) \right)_1 = \left(\mathbb{T}^y f(x), g(x) \right)_{-\gamma} = \\ &= \left(f(x), \mathbb{T}^y g(x) \right)_{-\gamma} = \left(f(x), \mathbb{T}^{**} g(x) \right)_1. \end{aligned}$$

Здесь третье равенство вытекает из свойства 1 оператора $\mathbb{T}$ -псевдосдвига. Остальные равенства с очевидностью следуют из определений $\mathbb{T}$ -псевдосдвига, $\mathbb{T}$ -квазисдвига и весовых билинейных форм.

Свойство 2**. Коммутируемость с оператором $B_{-\gamma}$. Если $u(x)$ — суммируемая с весом $x^{-\gamma}$ дважды непрерывно дифференцируемая четная по Киприянову функция, то

$$\mathbb{T}^{**} B_{-\gamma, x} u(x) = B_{-\gamma, y} \mathbb{T}^{**} u(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{**} B_{-\gamma, x} u(x) &= x^{-\gamma-1} \mathbb{T}^y B_{-\gamma, x} u(x) = x^{-\gamma-1} B_{-\gamma, x} \mathbb{T}^y u(x) = \\ &= x^{-\gamma-1} B_{-\gamma, y} \mathbb{T}^y u(x) = B_{-\gamma, y} x^{-\gamma-1} \mathbb{T}^x u(y) = B_{-\gamma, y} \mathbb{T}^{**} u(x). \end{aligned}$$

Здесь первое равенство есть следствие определений операторов (2.6.1) и (2.0.1), второе — следствие коммутируемости операторов $B_{-\gamma}$ и $\mathbb{T}$ -псевдосдвига, третье — следствие симметрии $\mathbb{T}$ -псевдосдвига относительно аргумента функции и шага сдвига, четвертое и пятое равенства очевидны.

Доказательство закончено.

Замечание 2.6.1. Отметим, принципиальную особенность свойства 2** — сдвиг $\mathbb{T}_x^{**}$ не коммутирует ни с одним из операторов $B_{-\gamma, y}$, $B_{-\gamma, x}$.

Свойство 3**. Если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$ -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_x^{**} \mathbb{T}_x^{**} f(x) = \mathbb{T}_x^{**} \mathbb{T}_x^{**} f(x), \quad \mathbb{T}_y^{**} \mathbb{T}_x^{**} f(x) = \mathbb{T}_x^{**} \mathbb{T}_x^{**} f(x).$$

Доказательства следуют из определения оператора $\mathbb{T}$ -квазисдвига и уже доказанного аналогичного свойства для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига.

2.7 Применение оператора обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига к решению задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприянова

Мы рассмотрим уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприянова с операторами Бесселя с отрицательным параметром (этим оно отличается от уравне-

ния ЭПД). История исследований уравнений ЭПД очень богата. Мы же здесь приведем только недавнюю работу [68], в которой для задачи Коши с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$, $\gamma > 0$ по времени сказано, что эта задача имеет не единственное решение. Напротив, в данной работе само решение представлено ясной формулой, которая по аналогии с формулой Пуассона из [35] есть применение оператора $\mathbb{T}$ -псевдосдвига к начальному условию. Полученное условие будем называть *формулой Пуассона для уравнения ЭПДК*. Однако единственность этого решения требует удовлетворения условию Коши в предельной форме и не может быть задана непосредственно в точке $t = 0$. Мы воспользовались идеей С.А. Терсенова, которую он ввел для решений дифференциальных уравнений с вырождением на границе [61]. Такое решение, как мы увидим в доказательстве приведенной в этой части работы теоремы, единственно.

Лемма 2.7.1. *Если $u(x)$ суммируемая с весом $x^{-\gamma}$ дважды непрерывно дифференцируемая четная по Киприянову функция, то*

$$B_{-\gamma, x} \mathbb{T}^t u(x) = B_{-\gamma, t} \mathbb{T}^t u(x).$$

Отметим также, что переменные x и t равносильны (в смысле симметрии $\mathbb{T}_x^t f(x) = \mathbb{T}_t^x f(t)$).

Пусть $-1 < -\gamma < 0$. Рассмотрим следующее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприянова

$$B_{-\gamma, t} u(x, t) = B_{-\gamma, x} u(x, t). \quad (2.7.1)$$

Поставим следующую задачу Коши: найти функцию $u(x, t) \in S_{ev}$, удовлетворяющую следующим начальным условиям в предельной форме С.А. Терсенова [61] (см. также учебник [62], с. 630)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{\gamma+1}} u(x, t) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2.7.2)$$

здесь второе условие, как и в [35], и в [62], с.6 связано с четностью по Киприянову функции $f(x, t)$, заданной на $\mathbb{R}_2^+$.

Теорема 2.7.1. *Пусть $f(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая четная по Киприянову функция. Тогда решение задачи Коши (2.7.1), (2.7.2) определено следующей формулой Пуассона*

$$u(x, t) = \mathbb{T}^t f(x) = \frac{\Gamma(\mu + 1) (xt)^{2\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{f(\sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \alpha})}{(\sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \alpha})^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha. \quad (2.7.3)$$

Решение, определяемое формулой (2.7.3), единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.7.1 вытекает, что функция $u(x, t) = \mathbb{T}^t f(x)$ — решение ЭПДК-уравнения (2.7.1). Проверим выполнение начального условия (2.7.2). Учитывая, что $\gamma + 1 = 2\mu$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{\gamma+1}} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{\gamma+1}} \mathbb{T}_x^t u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{T}_x^{t*} f(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{x^{2\mu} f(\sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \alpha})}{(\sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \alpha})^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha = \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi f(x) \sin^{2\mu} \alpha d\alpha = f(x) \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2\mu} \alpha d\alpha = f(x). \end{aligned}$$

Здесь в последнем равенстве мы воспользовались формулой вычисления В-функций Эйлера:

$$\int_0^\pi \sin^{2\mu} \alpha d\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\frac{2\mu+1}{2}-1} \alpha \cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1} \alpha d\alpha = B\left(\frac{2\mu+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

и учли, что

$$\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\mu + \frac{1}{2})} = \frac{1}{B(\frac{2\mu+1}{2}, \frac{1}{2})}.$$

Доказательство закончено.

2.8 Формулы Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения

Введем обозначения: $\mathbb{R}_n = \{x : (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : (x_1 > 0, \dots, x_n > 0)\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)\}$, $i = \overline{1, n}$,

$$\Delta_{B_\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_i > -1. \quad (2.8.1)$$

Следуя работе [49], оператор Δ_{B_γ} при $\gamma_i > 0$ называем *сингулярным дифференциальным оператором Лапласа—Бесселя*; при $\gamma_i > -1$ — *сингулярным дифференциальным оператором Лапласа—Бесселя—Киприянова*; при $0 > \gamma_i > -1$ — *сингулярным дифференциальным оператором Киприянова*. Число $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, называется коэффициентом скрытой сферической симметрии, а число $n + |\gamma|$ — размерностью оператора Δ_B .

В [49] для всех значений параметра $\gamma_i > -1$ получена формула Киприянова—Бельтрами, из которой для любой четной по каждой координате аргумента,

дважды непрерывно дифференцируемой функции $u=u(x)$, $x \in \mathbb{R}_n$ следует равенство

$$\Delta_{B_\gamma} u(|x|) = (B_\mu)_r u(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \mu = n + |\gamma| - 1. \quad (2.8.2)$$

Пусть $x \in \mathbb{R}_n^+$, $y \in \mathbb{R}_m^+$. Рассмотрим сингулярное ультрагиперболическое уравнение

$$(\Delta_{B_\beta})_y u(x, y) = (\Delta_{B_\gamma})_x u(x, y),$$

где координаты мультииндексов $\beta_i > -1$ и $\gamma_i > -1$. Размерностью операторов в левой и правой части этого уравнения являются числа $m + |\beta| > 0$ и $n + |\gamma| > 0$. Применив сферическое преобразование координат $x = |x|\theta$ и $y = |y|\hat{\theta}$, и учитывая (2.8.2), получим уравнение

$$B_\nu u(t, r) = B_\mu(t, r), \quad t = |y|, \quad r = |x|, \quad \nu = m + |\beta| - 1, \quad \mu = n + |\gamma| - 1. \quad (2.8.3)$$

Если окажется, что $\nu > 0$, $\mu > 0$ и при этом $\nu = \mu$, то уравнение (2.8.3) — хорошо известное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, для которого решение задачи Коши

$$u(t, r)|_{t=0} = f(r)$$

определено следующей формулой Пуассона в [35]

$$u(t, r) = T^t f(r), \quad (2.8.4)$$

где T_r^t — оператор (2.0.4). В этом случае решение сингулярного ультрагиперболического уравнения получено в [47] на основе выполнения условия теоремы Асгейрссона, где не предполагалось выполнение какого-либо начального условия Коши. Но в случае $\nu \in (0, 1)$ и $\mu \in (0, 1)$ формула (2.8.4) не верна.

Сингулярное ультрагиперболическое уравнение, когда числа ν и μ — правильные отрицательные дроби, а операторы Δ_{B_β} и Δ_{B_γ} — операторы Киприянова, ранее никогда не исследовалось. При выполнении условия Киприянова $\nu = \mu$ оказалось необходимо заменить в (2.8.4) не только оператор «обобщенного сдвига», но и вид начального условия (см. формулу (2.7.2)), чтобы получить решение волнового уравнения (2.8.3).

Далее решение задачи Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения будет найдено в наиболее общей ситуации, когда координаты мультииндексов β и γ больше -1 .

Постановка задачи Коши: найти функцию $u \in C_{ev}^2(\overline{\mathbb{R}_n^+})$ такую, что

$$(\Delta_{B_\beta})_y u(x, y) = (\Delta_{B_\gamma})_x u(x, y), \quad (2.8.5)$$

$$u(x, y) \Big|_{|y|=0} = f(|x|), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y_i} \Big|_{y_i=0} = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.8.6)$$

И пусть выполнено условие Киприянова [47] о размерности Δ_B операторов слева и справа уравнения (2.8.5):

$$n + |\gamma| - 1 = m + |\beta| - 1 = s. \quad (2.8.7)$$

Замечание 2.8.1. Второе условие Коши в (2.8.6) вызвано четностью по Киприянову по каждой координате аргумента y и обычно отсутствует при формулировке задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

Теорема 2.8.1. Предположим, что координаты мультииндексов β и γ удовлетворяют условиям $\beta_i > -1$, $\gamma_i > -1$. Решение задачи Коши (2.8.5) с условиями (2.8.6) и (2.8.7) существует и представлено следующими формулами.

1. Пусть $s > 0$ ($n + |\gamma| = m + |\beta| > 1$), тогда решение задачи Коши (2.8.5) определено первой формулой Пуассона:

$$u(x, y) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \alpha}\right) \sin^{2s} \alpha \, d\alpha.$$

2. Для $s = 0$ ($n + |\gamma| = m + |\beta| = 1$) решение задачи (2.8.5) имеет вид формулы Даламбера:

$$u(x, y) = \frac{f(|x| + |y|) + f(|x| - |y|)}{2}.$$

3. Если $0 > s > -1$ ($0 < n + |\gamma| = m + |\beta| < 1$), то решение задачи Коши (2.8.5) определено второй формулой Пуассона:

$$u(x, y) = \mathbb{T}^y f(x) = \frac{\Gamma(s+1)(xy)^{2s}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{f\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \alpha}\right)^{2s}} \sin^{2s} \alpha \, d\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что условия на координаты мультииндексов γ и β приводят к условию $s > -1$. Поэтому сферические преобразования $x = r\theta$, $y = t\hat{\theta}$, $|\theta| = 1$, $|\hat{\theta}| = 1$ приведут задачу (2.8.5) к следующей задаче Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприянова (здесь и далее мы следуем замечанию 2.8.1)

$$(B_s)_t u(r, t) = (B_\gamma)_r u(r, t), \quad u(r, t) \Big|_{t=0} = f(r). \quad (2.8.8)$$

Согласно условию теоремы все показатели $s > -1$ разбиваются на три группы: $s > 0$, $s = 0$, $-1 < s < 0$.

1. Если $s > 0$ ($n + |\gamma| = m + |\beta| > 1$), то решение задачи (2.8.8) определено применением к начальному условию обобщенного сдвига Пуассона. Тогда решение задачи Коши (2.8.5) определено в виде *первой формулы Пуассона*:

$$u(x, y) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \alpha}\right) \sin^{2s} \alpha d\alpha.$$

2. Для $s = 0$ ($n + |\gamma| = m + |\beta| = 1$) получена формула (см. п. 2.1.1)

$$\lim_{s \rightarrow +0} \left(\frac{2\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{r^2 + t^2 - 2rt \cos \alpha}\right) \sin^{2s} \alpha d\alpha \right) = \frac{f(r+t) + f(r-t)}{2}.$$

Но, кроме того, при $s = 0$ уравнение (2.8.8) — это радиальное волновое уравнение с соответствующим условием Коши

$$u(r, t)_{tt} = u(r, t)_{rr}, \quad u(r, t) \Big|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (2.8.9)$$

Напомним, что здесь второе начальное условие Коши порождено четностью по Киприянову по каждой координате аргумента y предполагаемого решения задачи (2.8.5) и присутствует в этой задаче для сравнения с классической формулой Даламбера. Решение задачи (2.8.9)

$$u(r, t) = \frac{f(r+t) + f(r-t)}{2}$$

называется формулой Даламбера. Следовательно, решение первоначальной задачи (2.8.5) примет следующий вид:

$$u(x, y) = \frac{f(|x| + |y|) + f(|x| - |y|)}{2}.$$

3. В случае, если $0 > s > -1$ ($0 < n + |\gamma| = m + |\beta| < 1$), то решение задачи (2.8.8) определено в теореме 2.7.1 применением к начальному условию обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига, при этом начальное условие мы должны принять в предельной форме С.А. Терсенова:

$$(B_s)_y u(x, y) = (\Delta_{B_\gamma})_x u(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^{\gamma+1}} u(x, y) = f(x).$$

Тогда решение задачи Коши (2.8.5) определено в виде:

$$u(x, y) = \mathbb{T}^y f(x) = \frac{\Gamma(s+1) (xy)^{2s}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{f\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \alpha}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \alpha}\right)^{2s}} \sin^{2s} \alpha d\alpha,$$

где число s из условия (2.8.7) принадлежит интервалу $(-1, 0)$.

Доказательство закончено.

Глава 3

Фундаментальные решения оператора $B_{-\gamma}$ и $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператора Киприянова

Впервые фундаментальные решения уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя были получены в работах Вайнштейна. Например, в [84, с.494] фундаментальное решение для уравнения $u_{yy} + \frac{k}{y}u_y + u_{xx} = 0$ дается через произведение функций Бесселя первого рода при $k > 0$. Другой подход к нахождению фундаментального решения подобного оператора получен И.А. Киприяновым (см. монографию [28]). Фундаментальное решение оператора Бесселя с положительным параметром (в виде частного случая сингулярного обыкновенного уравнения порядка $2m$) получено Л.Н. Ляховым в [38].

Принципиальное отличие фундаментальных решений операторов $B_{-\gamma}$ и B_{γ} заключается в том, что второе (т.е. при $\gamma > 0$) может быть представлено с особенностью в произвольной точке посредством обобщенного сдвига Пуассона (2.0.4) (см. в [35] формулу Пуассона решения задачи Коши уравнения ЭПД), который не определен при $\gamma = 0$ и не существует при $\gamma < 0$. Последнее приводит к тому, что обобщенный сдвиг новой природы («псевдосдвиг») должен применяться к соответствующим решениям оператора Бесселя с отрицательным параметром $-\gamma$.

3.1 Фундаментальные решения оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью (вырождением) в начале координат

Пространство основных функций выбирается стандартно: $\varphi \in S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Условие четности позволяет считать основные функции заданными в полупро-

пространстве $\overline{\mathbb{R}_1^+}$. Функционал Дирака-Киприянова определим равенством

$$(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in S_{ev}.$$

Согласно теореме 1.2.1 имеем два равенства

$$(B_{-\gamma}u, v)_{-\gamma} = (u, B_{-\gamma}v)_{-\gamma} \quad \text{и} \quad (B_{-\gamma}u, v)_1 = (u, B_{\gamma+2}v)_1.$$

Поэтому возможны два подхода к определению фундаментального решения сингулярного дифференциального оператора $B_{-\gamma}$ в функциональных пространствах $L_2^{-\gamma}$ и в L_2^1 соответственно. Соответствующие пространства обобщенных функций строятся на основе весовой билинейной формы (1.2.1) и (при соответствующем выборе числа ω) обозначаются $S'_{ev, -\gamma}$ и $S'_{ev, 1}$.

3.1.1 Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в $L_2^{-\gamma}[0, \infty)$ с особенностью в начале координат

Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ определяется как обобщенная функция $\mathcal{E}_{-\gamma} \in S'_{ev, -\gamma}$, удовлетворяющая равенству $B_{-\gamma}\mathcal{E}_{-\gamma} = \delta_{-\gamma}$ или, что тоже самое,

$$(\mathcal{E}_{-\gamma}, B_{-\gamma}\varphi)_{-\gamma} = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in S_{ev}[0, \infty).$$

Следующая теорема представляет собой одно из возможных обобщений результатов работы [38, теорема 1] на операторы Бесселя отрицательного параметра. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)_x = \left\{ \begin{array}{ll} B_{-\gamma}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha = 2k \\ \frac{d}{dx} B_{-\gamma}^{\alpha/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{array} \right|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Линейный сингулярный обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами обозначим через

$$L(D_{B_{-\gamma}}) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D_{B_{-\gamma}}^\alpha, \quad \alpha_{2m} = 1.$$

Теорема 3.1.1. Пусть $2m$ — натуральное число, $Z(t)$ — регулярный функционал из $S'_{ev, -\gamma}$ и пусть $\forall k=1, 2, \dots, 2m-2$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} D_{B_{-\gamma}}^k Z(t) = 0, \tag{3.1.1}$$

и при $k=2m-1$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} \frac{d}{dt} B_{-\gamma}^m Z(t) = 1, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{3.1.2}$$

Если в области $t > 0$ функция $Z = Z(t)$ удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению

$$L(D_{B_{-\gamma}} Z(t) = 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (3.1.3)$$

то в смысле обобщенных функций S'_{ev} функция Z есть фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в пространстве $L_2^{-\gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для наиболее востребованном в этих исследованиях случая $m = 1$.

Пусть $\varphi \in S_{ev}$. Интегрируя по частям, имеем

$$(Z, B_{-\gamma} \varphi)_{-\gamma} = Z(t) \left(t^{-\gamma} \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{dZ(t)}{dt} \left(t^{-\gamma} \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) dt.$$

Поскольку функция φ быстро убывает вместе со всеми производными, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) \left(t^{-\gamma} \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) = 0.$$

По условию функция φ четная и бесконечно дифференцируемая в окрестности начала координат, поэтому $\varphi'(t) = O(t)$, $t \rightarrow 0$. Учитывая, что $\gamma \in (0, 1)$, имеем

$$Z(t) t^{-\gamma} \varphi'(t) = O(t^{1-\gamma}), \quad t \rightarrow 0.$$

Следовательно, $Z(t) \left(t^{-\gamma} \frac{d}{dt} \varphi(t) \right) \Big|_0^{\infty} = 0$. Вновь применяя интегрирование по частям, получим

$$(Z, B_{-\gamma} \varphi)_{-\gamma} = -t^{-\gamma} \frac{dZ(t)}{dt} \varphi(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t^{\gamma} \frac{d}{dt} \left(t^{-\gamma} \frac{dZ(t)}{dt} \right) \varphi(t) t^{-\gamma} dt.$$

Из условия (3.1.1) первое слагаемое справа равно $\varphi(0)$, а второе, согласно (3.1.3), равно нулю.

Доказательство закончено.

Следствие 3.1.1. Фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ $0 < \gamma < 1$ является функция

$$\mathcal{E}_{-\gamma}(t) = \frac{1}{\gamma + 1} t^{\gamma+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, непосредственно проверяется справедливость:

$$B_{-\gamma} A t^{\gamma+1} = A \left(\frac{d^2 t^{\gamma+1}}{dt^2} - \frac{\gamma}{t} \frac{dt^{\gamma+1}}{dt} \right) = A \left(\gamma(\gamma + 1) t^{\gamma-1} - \frac{\gamma}{t} (\gamma + 1) t^{\gamma} \right) = 0,$$

а так же из условия (3.1.1) имеем, что нормирующая константа $A = \frac{1}{\gamma+1}$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} \frac{d}{dt} A t^{\gamma+1} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} \frac{1}{\gamma+1} \frac{d}{dt} t^{\gamma+1} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\gamma} t^{\gamma} = 1$$

Отсюда следует следствие 3.1.1.

Доказательство закончено.

При $\gamma = 0$ сингулярный дифференциальный оператор Бесселя есть вторая производная. Но при $\gamma = 0$ из локазанного следствия вытекает, что фундаментальным решением второй производной должна быть функция $\mathcal{E}(t) = t$. Это легко проверить: если $\varphi \in S(\mathbb{R}_n)$ (т.е. быстро убывает вместе с производной), то

$$\int_0^{\infty} t \varphi''(t) dt = t \varphi'(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(0).$$

Замечание 3.1.1. В работе [38] получено фундаментальное решение $\mathcal{E}_{\gamma,m}$ натуральных степеней $(B_{\gamma})^m$ сингулярного дифференциального оператора Бесселя при $\gamma > 0$. В частности, при $0 < \gamma < 1$ фундаментальное решение оператора B_{γ} имеет вид $\mathcal{E}_{\gamma,1} = \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. Т.е., фундаментальное решение имеет вырождение (вместо привычной сингулярности) порядка $O(t^{1-\gamma})$, $t \rightarrow 0$. Тем самым, результат следствия 3.1.1 справедлив в более общей форме: фундаментальным решением оператора B_{γ} при $-1 < \gamma < 0$ является функция $\mathcal{E}_{\gamma} = \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1}$.

Полученный в следствии 3.1.1 результат проверим, применяя хорошо известную связь операторов B_{γ} и $B_{-\gamma}$ соотношением Дарбу—Вайнштейна¹

$$r^{2\mu} B_{2\mu-1} r^{-2\mu} f(r) = B_{-2\mu+1} f(r), \quad \text{где } 2\mu - 1 = \gamma,$$

(см. [26, с.160]), где в обоих случаях $\gamma > 0$. Пусть $-\gamma = -2\mu + 1$, тогда $\gamma = 2\mu - 1 \implies 2\mu = \gamma + 1 \implies \mu = \frac{\gamma+1}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{E}(x), B_{-\gamma} \varphi(x) \right)_{-\gamma} &= \left(\mathcal{E}(x), x^{\gamma+1} B_{\gamma} x^{-\gamma-1} \varphi(x) \right)_{-\gamma} = \\ &= \int_0^{\infty} \mathcal{E}(x) x^{\gamma+1} B_{\gamma} x^{-\gamma-1} \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(x) B_{\gamma} x^{-\gamma-1} \varphi(x) x^1 dx = \end{aligned}$$

¹Профессор С.М. Ситник (НИБелГУ) указал на возможность применить это соотношение.

$$= \int_0^{\infty} \mathcal{E}(x) x^{\gamma+1} B_{\gamma} x^{-\gamma-1} \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathcal{E}(x) B_{\gamma} x^{-\gamma-1} \varphi(x) x^1 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{\varepsilon}.$$

Применяя здесь формулу интегрирования по частям, получим

$$J(\varepsilon) = \mathcal{E}(x) \frac{1}{x^{\gamma}} x^{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{-\gamma-1} \varphi(x) \right) x^1 \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} x^{-\gamma-1} \mathcal{E}(x) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{-\gamma-1} \varphi(x) \right) x^1 dx.$$

Рассмотрим внеинтегральный член. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) \frac{1}{x^{\gamma}} x^{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{-\gamma-1} \varphi(x) \right) x^1 \Big|_{\varepsilon}^{\infty} &= \\ &= \mathcal{E}(x) \left[(-\gamma-1) x^{-\gamma-2} \varphi(x) + x^{-\gamma-1} \varphi'(x) \right] x \Big|_{\varepsilon}^{\infty}. \end{aligned}$$

Чтобы получить требуемый результат ($= \varphi(0)$) достаточно предположить, что искомое фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ имеет вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

Действительно, в этом случае учитывая, что $\varphi \in S_{ev}$, получим

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{-\gamma-1} \varphi(x) \right) x^1 \Big|_{\varepsilon}^{\infty} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{x^{\gamma+2}}{\gamma+1} \left[(-\gamma-1) x^{-\gamma-2} \varphi(x) + x^{-\gamma-1} \varphi'(x) \right] \right) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} = -\varphi(x) + x \varphi'(x) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0) \end{aligned}$$

При этом

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} x^{-\gamma-1} \frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{-\gamma-1} \varphi(x) \right) x^1 dx = 0$$

поскольку под знаком интеграла оказалась производная константы.

Проверка закончена.

Замечание 3.1.2. Получить фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ непосредственно из соотношения Дарбу–Вайнштейна представляется более сложной задачей. Но таким же образом можно проверить полученное выше фундаментальное решения с особенностью в произвольной точки полу-прямой $[0, \infty)$.

3.1.2 Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в $L_2^1[0, \infty)$ с особенностью в произвольной точке

Принципиальной особенностью этой части нашего исследования является тот факт, что оператор $B_{-\gamma}$ не является самосопряженным в пространстве комплекснозначных функций L_2^1 , что следует из теоремы 1.2.1.

Пусть u и v принадлежат пространству функций $S_{ev}[0, \infty)$, тогда согласно теореме 1.2.1 при $\omega = 1$, имеем

$$(B_{-\gamma}u, v)_1 = (u, B_{\gamma+2} v)_1 .$$

Фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ в пространстве L_2^1 будем называть регулярную обобщенную функцию $\mathcal{E}_1$ удовлетворяющую тождеству

$$(\mathcal{E}_1, B_{-\gamma}^* \varphi)_1 = \varphi(0) , \quad (3.1.4)$$

где $B_{-\gamma}^* = B_{\gamma+2}$ — оператор сопряженный к оператору $B_{-\gamma}$ в $L_2^1[0, \infty)$.

Теорема 3.1.2. Пусть $Z(x)$ регулярный функционал из $S'_{ev,1}$ и пусть в области $x > 0$ функция Z одновременно удовлетворяет уравнениям первого и второго порядков

$$x Z'(x) - (\gamma + 1) Z(x) = -1 \quad (3.1.5)$$

$$B_{-\gamma} Z(x) = 0, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (3.1.6)$$

Тогда в смысле обобщенных функций $S'_{ev,1}$ функция Z есть фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в $L_2^1[0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из условий теоремы надо доказать равенство (3.1.4). Имеем

$$\begin{aligned} (Z, B_{-\gamma}^* \varphi)_1 &= \int_0^\infty Z(x) B_{\gamma+2} \varphi(x) x dx = \int_0^\infty Z(x) x^{-\gamma-1} \frac{d}{dx} x^{\gamma+2} \frac{d}{dx} \varphi(x) dx = \\ &= (Z(x) x \varphi'(x)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(x Z'(x) - (\gamma + 1) Z(x) \right) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx . \end{aligned}$$

Так как функция φ быстро убывает вместе со всеми производными, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Z(x) x \varphi'(x) = 0 .$$

По условию функция φ четная и бесконечно дифференцируемая в окрестности начала координат, следовательно $\varphi'(x) = O(x)$, $x \rightarrow 0$. Учитывая, что $0 < \gamma < 1$, имеем

$$Z(x) x \varphi'(x) = O(x), \quad x \rightarrow 0 .$$

Следовательно, $Z(x) \text{ и } \varphi'(x)|_0^\infty = 0$. Вновь применяя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} (Z, B_{-\gamma}^* \varphi)_1 &= - \left(x Z'(x) - (\gamma + 1) Z(x) \right) \varphi(x) \Big|_0^\infty + \\ &+ \int_0^\infty \left((-\gamma - 1) Z'(x) + Z'(x) + x Z''(x) \right) \varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^\infty B_{-\gamma} Z(x) \varphi(x) x dx = \varphi(0). \end{aligned}$$

Здесь в предпоследнем равенстве мы воспользовались условием (3.1.5), а в последнем равенстве условием (3.1.6).

Доказательство закончено.

Следствие 3.1.2. *Фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ в смысле обобщенных функций $S'_{ev,1}$ в области $x > 0$ является функция*

$$\mathcal{E}_1(x) = \frac{x^{\gamma+1} + 1}{\gamma + 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1.2 надо найти функцию Z , удовлетворяющую условиям (3.1.5) и (3.1.6). Первое из них представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(\gamma + 1) Z(x) - x Z'(x) = 1,$$

решение которого

$$Z = Cx^{\gamma+1} + \frac{1}{\gamma + 1},$$

где C — произвольная константа. Нетрудно проверить, что эта функция является решением однородного уравнения (3.1.6). Учитывая вид фундаментального решения оператора B_γ при $|\gamma| < 1$, естественно положить $C = \frac{1}{\gamma+1}$.

Доказательство закончено.

3.1.3 Фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в произвольной точке, порожденное $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом

Из представления фундаментальных решений оператора $B_{-\gamma}$ (следствия 3.1.1 и 3.1.2), в пространстве весовых обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ и $S'_{ev,1}$ видим, что они отличаются лишь слагаемой константой, поэтому одновременно являются фундаментальными решениями в классе весовых обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ и $S'_{ev,1}$. Следовательно мы можем упростить обозначения, полагая фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ функцию $\mathcal{E} = \frac{x^{\gamma+1}+1}{\gamma+1}$.

Теорема 3.1.3. В пространствах весовых обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ и $S'_{ev,1}$ фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ с центром в начале координат является функция

$$\mathcal{E}(x) = \frac{x^{\gamma+1} + 1}{\gamma + 1}.$$

В пространстве весовых обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной (фиксированной) точке $y \in \mathbb{R}_1^+$ является функция

$$E(x, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) (xy)^{\gamma+1}}{\gamma \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\pi \left[\frac{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha)^{\frac{\gamma+1}{2}} + 1}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha)^{\frac{\gamma+1}{2}}} \right] \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы уже доказана (см. следствия 3.1.1 и 3.1.2). Докажем вторую часть. Имеем

$$\begin{aligned} (B_{-\gamma} \mathbb{T}_y^x \mathcal{E}, \varphi)_{-\gamma} &= (\mathbb{T}_y^x B_{-\gamma} \mathcal{E}, \varphi)_{-\gamma} = (B_{-\gamma} \mathcal{E}, \mathbb{T}_y^x \varphi)_{-\gamma} = \\ &= (B_{-\gamma} \mathcal{E}, \mathbb{T}^{x*} \varphi)_1 = \varphi(x). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Здесь первое равенство следует из коммутативности $\mathbb{T}$ -псевдосдвига с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{-\gamma}$, второе из самосопряженности $\mathbb{T}$ -псевдосдвига в $L_2^{-\gamma}$, третье очевидно, четвертое вытекает из следствия 3.1.2.

Отметим, что цепочку равенств (3.1.7) можно записать в виде, использующим только свойства $\mathbb{T}$ -псевдосдвига и, разумеется, следствие 3.1.2.

$$\begin{aligned} (B_{-\gamma} \mathbb{T}^y \mathcal{E}, \varphi)_{-\gamma} &= (\mathbb{T}^y B_{-\gamma} \mathcal{E}, \varphi)_{-\gamma} = \\ &= (B_{-\gamma} \mathcal{E}, \mathbb{T}^y \varphi)_{-\gamma} = (B_{-\gamma} \mathcal{E}, \mathbb{T}^{y**} \varphi)_1 = \varphi(y). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства воспользуемся видом $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (2.0.1), который надо применить к функции $\mathcal{E} = \frac{x^{\gamma+1}+1}{\gamma+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \mathbb{T}^y \mathcal{E}(x) = \mathbb{T}^y \left[\frac{x^{\gamma+1} + 1}{\gamma + 1} \right] = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right) (xy)^{\gamma+1}}{(\gamma + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\pi \left[\frac{(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y)^{\gamma+1} + 1}{(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y)^{\gamma+1}} \right] \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$ и что $(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}$, получим утверждение теоремы.

Доказательство закончено.

3.2 Фундаментальные решения Δ_B -оператора Киприянова

Определение 3.2.1. δ -Функционалом Дирака—Киприянова, сосредоточенный в произвольной точке $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ будем называть распределение $\mathbb{T}_x^y \delta_1 \in S'_{ev,1}(\mathbb{R}_n^+)$, действие которого определено формулой

$$(\mathbb{T}_x^y \delta_1, \varphi)_{-\gamma} = (\delta_1, \mathbb{T}_x^{y**} \varphi)_1 = \varphi(y), \quad (3.2.1)$$

где $\mathbb{T}_x^y = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i**}$ — многомерный $\mathbb{T}$ -квазисдвиг (2.6.1).

Замечание 3.2.1. Отметим, что необходимость в определении 3.2.1 связана с тем, что оператор $\mathbb{T}^{**}$ -квазисдвига не коммутирует с оператором $B_{-\gamma}$ (см. замечание 2.6.1), но является эрмитовым в L_2^1 (см. свойство 1^{**}).

О корректности определения 3.2.1. Упрощая, рассмотрим случая одной переменной x_i , $i = \overline{1, n}$. Учитывая эрмитовость оператора $\mathbb{T}$ -псевдосдвига, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} \delta_1, \varphi)_{-\gamma} &= \\ &= \int_0^\infty \delta_1(x_i) \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma_i+2}{2})} \int_0^\pi \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1} f(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i, x^i)}{(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i x_i^{-\gamma_i} dx_i = \\ &= \int_0^\infty \delta_1(x_i) \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma_i+2}{2})} \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} f(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i, x^i)}{(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i x_i dx_i = \\ &= (\delta_1, \mathbb{T}_x^{y**} \varphi)_1, \end{aligned}$$

где $x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha}$, $x^i = (\dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots)$.

Тем самым получено первое равенство в (3.2.1). Второе равенство определения 3.2.1 получим учитывая, что

$$\left(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i \right) \Big|_{x_i=0} = \left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha} \right) \Big|_{x_i=0} = y_i,$$

и формулу вычисления В-функции Эйлера:

$$\int_0^\pi \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i = B\left(\frac{\gamma_i+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma_i+2}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma_i+3}{2})}.$$

Таким образом определение 3.2.1 корректно.

Фундаментальное решение $\Delta_{B_{-\gamma}}$ оператора Киприянова ищем в классе радиальных функций $f=f(r)$, $r=|x|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$. В работе [49] для такого оператора Δ_B получена формула

$$\Delta_{B_{-\gamma}}f(|x|) = B_\mu f(r), \quad \mu = n - |\gamma| - 1, \quad \text{где } n - |\gamma| > 0.$$

Возможны три случая.

А) $n - |\gamma| > 1$; В) $n - |\gamma| = 1$; С) $n - |\gamma| < 1$;

Случай А. Фундаментальное решение из $S'_{ev,\mu}$ такого оператора имеет вид:

$$E_A = T_{|x|}^{|y|} \mathcal{E}_A = T_{|x|}^{|y|} |x|^{2-n-|\gamma|},$$

где $T^{|y|}$ — обобщенный сдвиг Пуассона (2.0.4), отвечающий параметру $n-|\gamma|-1>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем сферические координаты $x=r\Theta$, $|\Theta|=1$, тогда

$$\Delta_{B_{-\gamma}}u(|x|) = B_{n-|\gamma|-1}u(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Отсюда, предполагая функцию $\varphi = \varphi(|x|)$ радиальной и учитывая $n-|\gamma|-1>0$, получим

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} E_A, \varphi)_\gamma &= (\Delta_{B_{-\gamma}} T_{|x|}^{|y|} \mathcal{E}_A, \varphi)_{-\gamma} = |S_1^+|_\gamma (B_{n-|\gamma|-1} T_r^\rho \mathcal{E}_A(r), \varphi(r))_{-\gamma} = \\ &= |S_1^+|_\gamma (T_r^\rho B_{n-|\gamma|-1} \mathcal{E}_A(r), \varphi(r))_{-\gamma} = |S_1^+|_\gamma (B_{n+|\gamma|-1} \mathcal{E}_A(r), T_r^\rho \varphi(r))_{-\gamma} = \varphi(\rho), \end{aligned}$$

где $|S_1^+(n)|_\gamma$ — площадь нагруженной сферы:

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)=\{x: |x|=1, x_i>0\}} \prod_{k=1}^n x_i^{\gamma_k} dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\alpha_k+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\alpha|}{2}\right)}.$$

Доказательство закончено.

Случай В. Фундаментальным решением оказывается функция [38]

$$\mathcal{E}_B(r) = \frac{1}{\gamma+1} r^{\gamma+1}, \quad r = |x|$$

к которой следует применить обычный сдвиг $r \rightarrow r - \rho$, $\rho=|y|$.

Случай С. Согласно теореме 3.1.3 фундаментальное решение $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператора Киприянова с особенностью в точке $x=y$ из пространства распределений $S'_{ev,1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} E_C(x, y) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} \mathcal{E}_C(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} \left(\frac{x_i^{\gamma_i+1} + 1}{\gamma_i + 1} \right) = \\ &= C_{n,\gamma} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi (x_i y_i)^{\gamma_i+1} \frac{\left[\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i} \right)^{\gamma_i+1} + 1 \right]}{\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i} \right)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где $C_\gamma = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\gamma_i \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\gamma_i}{2})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}_x^y \mathcal{E}_C, \varphi)_{-\gamma} &= \left(\Delta_{B_{-\gamma}} \prod_{j=1}^n \mathbb{T}_{x_j}^{y_j} \mathcal{E}_C, \varphi \right)_{-\gamma} = \\ &= \left(\sum_i \prod_{j=1, j \neq i}^n B_{-\gamma_i} \mathbb{T}_{x_j}^{y_j} \mathcal{E}_C, \varphi \right)_{-\gamma} = \left(\prod_{j=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} \sum_i B_{-\gamma_i} \mathcal{E}_C, \varphi \right)_{-\gamma} = \\ &= \left(\sum_i B_{-\gamma_i} \mathcal{E}_C, \prod_{j=1}^n \mathbb{T}_{x_j}^{y_j} \varphi \right)_{-\gamma} = \left(\Delta_{B_{-\gamma}} \mathcal{E}_C, \prod_{j=1}^n \mathbb{T}_{x_j}^{**y_j} \varphi \right)_1. \end{aligned}$$

Здесь первое и второе равенства связаны с определениями многомерного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига и определением Δ_B -оператора Киприянова; третье вытекает из свойства коммутирования оператора Бесселя $B_{-\gamma}$ и одномерного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига; четвертое следует из эрмитовости $\mathbb{T}$ -псевдосдвига в $L_2^{-\gamma}$; пятое — очевидно. Остается воспользоваться определением 3.2.1 фундаментального решения (равенство (3.2.1)) и мы получим $(\Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}_x^y \mathcal{E}_C, \varphi)_{-\gamma} = \varphi(y)$.

Доказательство закончено.

3.3 Решения задач Дирихле с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова

Пусть $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n); x_i > 0\}$. Учитывая особенность операторов Бесселя, далее полагаем, что область Ω^+ прилегает к сингулярным координатным гиперплоскостям $x_i=0$, $i = \overline{1, n}$ оператора Δ_B . Тогда граница области Ω^+ состоит из двух частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^o \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. Область $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$

получена объединением Ω^+ со своими зеркальными отражениями относительно координатных гиперплоскостей $x_i = 0$ (см. определение 1.2.1). Граница Γ области Ω предполагается гладкой в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^o$ (условие гладкости границы И.А. Киприянова [28, §3.1]). Это условие так же предполагает, что рассматриваемые функции в области Ω^+ должны иметь гладкое четное продолжение через границу Γ^o по отношению к каждой координате x_i (см. определение 1.2.1).

Замечание 3.3.1. Каждую из областей Ω^+ и Ω^- , как правило, удобно считать часть частично замкнутыми границами Γ^o , а границу Γ^o — границей симметрии (не границей области) и, поэтому полагаем $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^o$ и $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^o$. При этом $\partial\Omega = \partial(\Omega^+ \cup \Omega^-) = \Gamma^+$. Точки, принадлежащие $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^o$ или $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^o$ будем называть s -внутренними. Аналогично, подобласть $\Omega_*^+ = \Omega_*^+ \cup \Gamma_*^o$ области Ω^+ , имеющую общую границу $\Gamma_*^o \subset \Gamma^o$, будем называть s -подобластью области Ω^+ . Это же касается и Ω^- .

Определение 3.3.1. Функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ называется K -гармонической функцией в области Ω^+ , если $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0$ в каждой точке Ω^+ .

3.3.1 К-Формулы Грина

Многие свойства K -гармонических функций вытекают из соответствующих аналогов формул Грина, отвечающих оператору $\Delta_{B_{-\gamma}}$ (K -формулы Грина).

Пусть u и v — n -четные функции, принадлежащие классу функций $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ и $x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$, $-1 < -\gamma_i < 0$. В работах [22], [42] получено следующее равенство, называемое первая K -формула Грина:

$$\int_{\Omega^+} v \Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx = - \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} x^{-\gamma} dx + \int_{\Gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+, \quad (3.3.1)$$

где $\bar{\nu}$ — направление внешней нормали к границе Γ^+ области Ω^+ .

Приведем несколько простых следствий из равенства (3.3.1).

Если в (3.3.1) $u = v$, то

$$\int_{\Omega^+} u \Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx = - \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 x^{-\gamma} dx + \int_{\Gamma^+} u \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} dx. \quad (3.3.2)$$

Если же в (3.3.1) $v = 1$, тогда

$$\int_{\Omega^+} \Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+. \quad (3.3.3)$$

И, наконец, если в (3.3.3) функция u K -гармоническая, то из определения 3.3.1 следует равенство

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+ = 0. \quad (3.3.4)$$

Условие K -гармоничности: если равенство (3.3.4) справедливо в любой s -подобласти области Ω^+ , то u — K -гармоническая функция в Ω^+ .

Действительно, если функция u — K -гармоническая в Ω^+ , то равенство (3.3.4) выполнено в любой s -подобласти области Ω^+ , что с очевидностью вытекает из (3.3.3).

Наоборот, пусть равенство (3.3.4) выполняется в любой s -подобласти области Ω^+ . Тогда из (3.3.3) следует, что $\Delta_{B-\gamma} u = 0$ в любой s -внутренней точке области Ω^+ , т.е. выполнено требование определения K -гармоничности функции u в области Ω^+ .

Формула (3.3.1) называется первой K -формулой Грина; формулы (3.3.2) — (3.3.4) — следствия из первой K -формулы Грина, вторая K -формула Грина получается из (3.3.1), после применения обычной формулы Грина интегрирования по частям в объемном интеграле правой части равенства (3.3.1):

$$\int_{\Omega^+} (v \Delta_{B-\gamma} u - u \Delta_B v) x^{-\gamma} dx = \int_{\Gamma^+} \left(v \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}} \right) x^{\gamma} d\Gamma^+.$$

3.3.2 Представление Грина n -четных функций

Учитывая самосопряженность $\mathbb{T}$ -сдвига в $\mathbb{R}_n^+$ и его коммутируемость с $\Delta_{B-\gamma}$ -оператором Киприянова, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} \mathbb{T}^y v(x) \Delta_{B-\gamma} u(y) y^{-\gamma} dy &= \\ &= \int_{\Omega^+} v(y) \mathbb{T}^y (\Delta_{B-\gamma} u)(x) y^{-\gamma} dy = \int_{\Omega^+} v(y) (\Delta_{B-\gamma})_y \mathbb{T}^y u(x) y^{\gamma} dy. \end{aligned}$$

В следующей теореме доказывается K -формула Грина представления n -четных функций, которая в нашем случае будет вытекать из правой части написанного выше равенства. Следующее утверждение получено Л.Н. Ляховым, С.А. Рощупкиным и Е.Л. Саниной в [66].

Теорема 3.3.1. Пусть n -четная функция $u \in C_{ev}^2(\Omega^+) \cap C_{ev}^1(\overline{\Omega^+})$, $\mathcal{E}(n, \gamma)$ — фундаментальное решение $\Delta_{B-\gamma}$ -уравнения, порожденное $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом

(2.0.1). Имеет место следующая формула представления C_{ev}^2 -функций (формула Грина)

$$u(x) = -\frac{1}{(n+|\gamma|-2) |S_1^+(n)|_{-\gamma}} \left(\left(\int_{\Omega^+} \mathbb{T}_y^x \mathcal{E}(y) \Delta_{B_{-\gamma}} u(y) y^{-\gamma} dy - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\Gamma^+} \left(\mathbb{T}_y^* \mathcal{E}(y) \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}_y} - u(x) \frac{\partial \mathbb{T}_y^* \mathcal{E}(y)}{\partial \bar{\nu}} \right) y^{-\gamma} d\Gamma^+ \right) \right). \quad (3.3.5)$$

где $\mathbb{T}_y^x \mathcal{E}(y) = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} \mathcal{E}_C(x)$ (см. равенство (3.2.2))

Уравнение Пуассона. Если функция u является решением краевой задачи

$$\Delta_{B_{-\gamma}} u = f(x), \quad u|_{\Gamma^+} = u_0,$$

то равенство (3.3.5) запишется в виде суммы трех К-потенциалов (объемного, простого слоя и двойного слоя):

$$u(x) = -C_{n,\gamma} \left(\left(\int_{\Omega^+} \mathbb{T}_y^x \mathcal{E}(y) f(y) y^{-\gamma} dy - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\Gamma^+} \left(\mathbb{T}_y^* \mathcal{E}(y) \frac{\partial u_0(x)}{\partial \bar{\nu}_y} - u_0(x) \frac{\partial \mathbb{T}_y^* \mathcal{E}(y)}{\partial \bar{\nu}} \right) y^{-\gamma} d\Gamma^+ \right) \right). \quad (3.3.6)$$

Это выражение можно назвать сверткой Какичева фундаментального решения $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с обобщенной правой частью уравнения Пуассона.

3.3.3 Сферическое среднее K -гармонической функции

Из равенства

$$\Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}_y^* f(x) = \mathbb{T}_y^* \Delta_{B_{-\gamma}} f(x),$$

полученного в работе [22], вытекает, что функции f и $\mathbb{T}_y^* f(x)$ одновременно К-гармонические. Кроме того, в [66] была доказана (Л.Н. Ляховым, С.А. Рощупкиным и Е.Л. Саниной) следующая теорема о среднем для К-гармонических функций: Пусть функция $u(x)$ является К-гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ — единичная n -полусфера с центром в начале координат, целиком лежащая в Ω^+ . Тогда

$$u(x) = \frac{1}{|S_r^+(n)|_\gamma} \int_{S_r^+(n)} \mathbb{T}_y^* u(x) y^{-\gamma} dS_r(y). \quad (3.3.7)$$

Принципиальной особенностью формулы (3.3.7) является то, что интегрирование происходит по n -полусфере с центром в начале координат, а точка интегрирования принадлежит сфере с центром в точке $x \in \Omega^+$, вообще говоря, не совпадающей с началом координат. Эта особенность исчезает, если нет весовой нагрузки на оси координат, т.е. если все $\gamma_i = 0$.

3.3.4 Экстремальное свойство B -гармонических функций

Для классических гармонических функций экстремальное свойство вытекает из теоремы о среднем гармонике в ограниченной области. В исследуемом случае область Ω^+ прилегает к границе, образованной координатными гиперплоскостями в $\mathbb{R}_n^+$, следовательно куски этих гиперплоскостей тоже оказываются границами областями Ω^+ . Однако эти куски всего лишь границы симметрии.

Теорема 3.3.2. *B -гармоническая функция $u(x) \not\equiv \text{const}$ в Ω^+ принимает экстремальные значения ($\sup u$ и $\inf$) на границе Γ^+ области B -гармоничности:*

$$\min_{x \in \Gamma^+} u(x) < u(x) < \max_{x \in \Gamma^+} u(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходим из формулы среднего значения (3.3.7). Предположив противное, что, например, $\sup u = u(x_0)$, x_0 — внутренняя точка Ω^+ .

Применив в ней формулу среднего значения (3.3.7) с центром в этой точке и такого радиуса, чтобы сфера целиком лежала в Ω^+ . Мы получим

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_r(n)|_\gamma} \int_{S_r}^* \mathbb{T}^y u(x_0) \ y^\gamma dS_1(y), \quad (3.3.8)$$

а так как $u(x) \neq \text{const}$, то на сфере тоже должна присутствовать точка y' , в которой функция u среди всех значений на этой сфере принимает наибольшее значение $u(y') = M'$. Обобщенный $\mathbb{T}^*$ -сдвиг действует ограничено (свойство 6* и свойство 9*), но тогда из (3.3.8) следует, что

$$u(x_0) = M \leq \frac{M'}{|S_r(n)|_\gamma} |S_r(n)|_\gamma = M',$$

т.е. $u(x_0) = M \leq M'$, что возможно если $u(x) = \text{const}$ внутри этой сферы. Напомним, что для точек пересечения $\Gamma^0 \cap \Gamma^+$ выполнено условие Киприянова. Поэтому существует конечное покрытие области Ω^+ шарами, в которых функция u B -гармонична и значит эта функция есть константа: $u(x) = M$. Но это противоречит условию теоремы.

Доказательство закончено.

Следствие 3.3.1. Если $u \in C_{ev}^1(\overline{\Omega^+})$ — K -гармоническая функция в частично замкнутой области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$, то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in \Gamma^+} |u(x)|, \quad x \in \overline{\Omega^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+} = 0$, то $u \equiv 0$ в Ω^+ .

Будем говорить, что n -четная функция $u = u(x)$ непрерывна на бесконечности и принимает там значение a , если она непрерывна вне некоторого n -полушара в $\overline{\mathbb{R}_n^+}$ и $\lim_{x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}, |x| \rightarrow \infty} u = a$.

Следствие 3.3.2. Пусть $\Omega_1^+ = \overline{\mathbb{R}_n^+} \setminus \Omega^+$. Если $u \in C_{ev}^1(\overline{\Omega_1^+})$ — B гармоническая функция в частично замкнутой области $\Omega_1^+ = \Omega_1^+ \cup \Gamma^0$ и

$$u(\infty) = \lim_{x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}, |x| \rightarrow \infty} u = 0,$$

то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in \Gamma^+} |u(x)|, \quad x \in \overline{\Omega_1^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+} = 0$ и $u(\infty) = 0$, то $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_1^+$.

Следствие 3.3.3. Если последовательность K -гармонических функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ равномерно сходится на границе Γ^+ области B -гармоничности Ω^+ , то она равномерно сходится на $\overline{\Omega^+}$. Это справедливо для области Ω_1^+ , если дополнительно известно, что $u_k(\infty) = 0$ и мы его не приводим.

Доказательства следствий 3.3.1 и 3.3.2 отличаются от доказательств классических утверждений для гармонических функций лишь обозначениями, см., например, [21, § 24].

3.3.5 Постановка и единственность решения внутренней и внешней задачи Дирихле

Внутренняя задача Дирихле.

Пусть область Ω^+ — конечная область в $\mathbb{R}_n^+$ прилегающая к координатным гиперплоскостям по границе Γ^0 и функция φ — задана и непрерывна на части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$. Найти функцию $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$, удовлетворяющую в области Ω^+ уравнению Пуассона $\Delta_{B_{-\gamma}} u = f$, и граничным условиям $u|_{\Gamma^+} = \varphi$. В работе [49] получено решение внутренней задачи Дирихле в n -полушаре, принадлежащего части евклидова n -полупространству $\mathbb{R}_n^+$.

Теорема 3.3.3. *Внутренняя задача Дирихле в n -полушаре для уравнения Лапласа и Пуассона с $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператором Киприянова имеет единственное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют два решения задачи u_1 и u_2 . Тогда функция $u = u_1 - u_2$ является К-гармонической: $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0$, и поэтому, согласно следствию 3.3.1, равна нулю, т.е. $u_1 = u_2$.

Доказательство закончено.

Внешняя задача Дирихле.

Обозначим $\Omega_1^+ = \mathbb{R}_n^+ \setminus \Omega^+$. Граница этой области состоит из участков $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и Γ_1^0 . Область Ω_1^+ в $\mathbb{R}_n^+$ прилегает к координатным гиперплоскостям $x_i=0$ (по границе Γ_1^0) и функция φ — задана и непрерывна на внешней части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_1^+) \cap C(\overline{\Omega_1^+})$, удовлетворяющую в области Ω_1^+ уравнению Пуассона $\Delta_{B_{-\gamma}} u^+ = f$ и граничным условиям $u^+|_{\Gamma^+} = \varphi$, и условию $u^+ = O(|x|^{2-n+|\gamma|})$.

Решение внешней задачи Дирихле в шаре сводится к решению внутренней задачи следующим (вообще говоря стандартным) образом. Пусть R достаточно большое число, чтобы область Ω^+ оказалась в n -полушаре $\mathbb{H}^+ = \{x : |x| < R, x_i > 0\}$, тогда область $\mathbb{H}^+ \setminus \Omega^+$ окажется конечной и поэтому задача Дирихле в этой области окажется внутренней. Следовательно её решение известно. В этом решении присутствует интеграл по сфере радиуса R . Теперь надо перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$ и воспользоваться условием $u^+ = O(|x|^{2-n+|\gamma|})$, $|x| \rightarrow \infty$ и тогда это слагаемое в решении, представленным соответствующим рядом Лапласа, исчезнет. Тем самым существование решения внешней задачи Дирихле становится очевидным.

Теорема 3.3.4. *Внешняя задача Дирихле для уравнения Пуассона с оператором Киприянова имеет единственное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку область Ω^+ предполагается ограниченной, то существует сфера достаточно большого радиуса R , включающая в себя эту область. Из условия убывания решения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число R , что на этой сфере S_R выполняется условие $u(x)|_{S_R} < \varepsilon$. Область $G^+ = \mathbb{H}_R \setminus \Omega^+$, разумеется, конечная. Если u_1 и u_2 два решения внешней задачи Дирихле, то функция $u = u_1 - u_2$ — К-гармоническая в замкнутой области G^+ с граничным условием $|u| < 2\varepsilon$ на границе ∂G . Согласно следствию 3.3.2, $|u(x)| < 2\varepsilon$ в Ω^+ . А поскольку число ε произвольное, то это возможно только, если $u = 0$, т.е., когда $u_1 = u_2$.

Доказательство закончено.

Глава 4

Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова, порожденные J-преобразованием Бесселя

4.1 Весовые распределения И.А. Киприянова

Весовые обобщенные функции, приспособленные для исследований задач с оператором Бесселя, действующим по всем пространственным переменным, соответствующей задачи Коши и с одинаковыми положительными индексом размерности $\gamma > 0$ впервые появились в работе [23]. В случае когда оператор Бесселя действует только по одной переменной подобные задачи наиболее полно описаны в книге [28]. Последнее не принципиально, т.к. индексы размерности для переменных, по которым не действуют бесселевы производные, можно считать равными нулю.

В этой работе весовые линейные формы рассматриваются с интегральной мерой Лебега—Киприянова $d\mu_\gamma(x) = x^{-\gamma}dx$, $-1 < -\gamma < 0$.

Обыкновенный сингулярный линейный дифференциальный оператор

$$L(x, B_{-\gamma}) = \sum_{k=0}^m a_k(x) B_{-\gamma}^k, \quad a_k \in C_{ev}^{2m}(\overline{\Omega^+}), \quad \Omega^+ \subseteq \overline{\mathbb{R}_1^+} \quad (4.1.1)$$

рассмотрим вначале на функциях из класса $C_{ev}^{2m}(\Omega^+)$ (см. определение 1.2.2). И пусть функция $\varphi \in C_{ev}^\infty(\Omega^+)$ имеет конечный носитель в $\overline{\mathbb{R}_1^+} = [0, \infty)$. Линейное

сингулярное дифференциальное уравнение

$$L(x, B_{-\gamma}) u(x) = f(x) \quad (4.1.2)$$

эквивалентно интегральному равенству

$$\int L(x, B_{-\gamma}) u(x) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \int f(x) \varphi(x) x^{-\gamma} dx,$$

которое интегрированием по частям приводится к равенству (следствие 1.2.1)

$$\int u(x) L(x, B_{-\gamma}) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \int f(x) \varphi(x) x^{-\gamma} dx, \quad u \in L_1^{-\gamma, loc}. \quad (4.1.3)$$

Это выражение не содержит производных от решения u и, следовательно, уже не эквивалентно (4.1.2) и более общее по сравнению с ним, поскольку имеет смысл для локально интегрируемых функций u .

Обозначим через $C_{ev,0}^\infty(\mathbb{R}_1^+)$ множество финитных бесконечно дифференцируемых четных по Киприянову функций.

Определение 4.1.1. Функция $u \in L_1^{-\gamma, loc}$, удовлетворяющая уравнению (4.1.3) при всех $\varphi \in C_{ev,0}^\infty$, называется обобщенным решением уравнения (4.1.2).

Топология на $C_{ev,0}^\infty$ вводится через понятие сходимости, которое в нашем случае определяется следующим образом: последовательность $\varphi_i \rightarrow \varphi$ в $C_{ev,0}^\infty[0, a)$, $a < \infty$, если

1) существует компакт $[0, b]$, $b < a$, такой, что

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \forall x \in (b, a).$$

2) Для любого числа $k \in \mathbb{Z}^+$ последовательность $B_{-\gamma}^k \varphi_i$ сходится в компакте $[a, b]$ ($a \geq 0$) равномерно к $B_{-\gamma}^k \varphi$.

Класс функций $C_{ev,0}^\infty[0, a)$, снабженный такой топологией называется основным пространством функций и обозначается $\mathcal{D}_{ev}[0, a)$

Определение 4.1.2. K -Распределением называется линейный непрерывный функционал над пространством $\mathcal{D}_{ev}[0, a)$. Множество всех распределений обозначается $\mathcal{D}'_{ev}$.

Согласно замечанию 3.3.1, область $\Omega_1^+ \Subset \Omega^+$ считаем строго внутренней, когда обе эти области опираются на границу симметрии $\{x: x_i = 0\} \cap \Gamma^0$. В одномерном случае $\Omega^+ = [0, a)$.

Определение 4.1.3. K -Распределение u имеет порядок $k=2t$ на множестве $\Omega_1^+ \Subset \Omega^+ \subset \overline{\mathbb{R}_1^+}$, если существует такая постоянная C , что

$$|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{C_{ev}^{2m}(\Omega_1^+)} \quad \text{для } \varphi \in C_{ev,0}^\infty(\Omega_1^+).$$

Примером распределения, имеющего порядок $2m$ в области Ω^+ , может служить функционал

$$u(\varphi) = \int_0^a u(x) L(x, B_{-\gamma}) \varphi(x) x^{-\gamma} dx,$$

входящий в левую часть равенства (4.1.3), когда функция u локально интегрируема с весом $x^{-\gamma}$. В самом деле, из (4.1.1) имеем

$$u(\varphi) = \int_0^a u(x) \left[\sum_{k=0}^m a_k B_{-\gamma}^k \varphi(x) \right] x^{-\gamma} dx.$$

Введем следующую систему норм

$$\|\varphi\|_{C_{ev}^{2m}(\Omega_1^+)} = \sup_{x \in [0, a]} \left(\max_{0 \leq k \leq m} |B_{-\gamma}^k \varphi(x)| \right)$$

имеем

$$u(\varphi) \leq \|\varphi\|_{C_{ev}^{2m}(\Omega_1^+)} \sum_{k=0}^m |a_k| \int_{\Omega_1^+ \in [0, a]} u(x) x^{-\gamma} dx.$$

Учитывая, ограниченность коэффициентов a_k и локальную интегрируемость функции u , получим

$$|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{C_{ev}^{2m}(\Omega_1^+)}.$$

Далее удобным (по сравнению с опр. 1.2.3) является следующее определение пространства Л.Щварца основных функций.

Определение 4.1.4. *Пространство $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ есть пространство бесконечно дифференцируемых четных в $\mathbb{R}_1^+$ (по Киприянову) функций $\varphi \in C_{ev}^\infty$, для которых*

$$\sup_{x \in \overline{\mathbb{R}_1^+}} |x^\alpha B_{-\gamma}^k \varphi(x)| < \infty$$

при любых α и k .

Ясно, что $C_{ev,0}^\infty(\mathbb{R}_1^+) \subset S_{ev}$. Из определения видно, что пространство S_{ev} инвариантно относительно В-дифференцирования и умножения на многочлены.

В пространстве S_{ev} вводится система норм

$$|\langle \varphi \rangle|_N = \sup_{|\alpha|+|k| \leq N} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}_1^+}} |x^\alpha B_{-\gamma}^k \varphi(x)|,$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \overline{\mathbb{R}_1^+}$ и всем α и k , с $|\alpha| + |k| \leq N$, а N пробегает все целые неотрицательные числа.

4.2 $\mathbb{J}$ -Преобразования Бесселя функций на $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$

По определению (1.4.1) прямым $\mathbb{J}$ -преобразованием Бесселя функции φ , называется выражение

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](x) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx. \quad (4.2.1)$$

Так как основные функции φ из S_{ev} абсолютно интегрируемы по $\mathbb{R}_1^+$, то

$$|\widehat{\varphi}| = \left| \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx \right| \leq \int_0^\infty |\varphi(x)| x^{-\gamma} dx < \infty.$$

Поэтому на функциях из S_{ev} $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя определено.

Обратное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя задается выражением

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\varphi](\xi) = C_\mu \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \widehat{\varphi}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi. \quad (4.2.2)$$

Теорема 4.2.1. Пусть $\varphi \in S_{ev}$. Тогда $\widehat{\varphi} \in C_{ev}^\infty$ и имеют место следующие формулы

$$B_{-\gamma}^k \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[(-x^2)^k \varphi](\xi), \quad \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[B_{-\gamma}^k \varphi](\xi) = (-\xi^2)^k \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B_{-\gamma,\xi} \mathbb{J}_\mu(x\xi) = (-x^2) \mathbb{J}_\mu(x\xi)$, то первая из формул достаточно просто вытекает из теоремы Лебега о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$\begin{aligned} B_{-\gamma}^k \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) &= B_{-\gamma,\xi}^k \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \int_0^\infty B_{-\gamma,\xi}^k \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \\ &= \int_0^\infty (-x^2)^k \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[(-x^2)^k \varphi](\xi). \end{aligned}$$

В результате видно, что в рамках $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя дифференцирование равносильно умножению на соответствующий полином. Но, если $\varphi \in S_{ev}$, то $(-x^2)^k \varphi \in S_{ev}$. Следовательно, $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) \in C_{ev}^\infty$.

Докажем вторую формулу. Так как $B_{-\gamma,x} \mathbb{J}_\mu(x\xi) = (-\xi^2) \mathbb{J}_\mu(x\xi)$, имеем

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[B_{-\gamma}^k \varphi](\xi) = \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) B_{-\gamma,x}^k \varphi(x) x^{-\gamma} dx =$$

$$= \int_0^\infty (-\xi^2)^k \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = (-\xi^2)^k \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx = (-\xi^2)^k \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi).$$

Доказательство закончено.

Стоит также отметить, что $\mathbb{J}$ -Преобразование Бесселя переводит $x^{2k}\varphi(x)$ на $(-B_{-\gamma}^k)\widehat{\varphi}$. Докажем теперь инвариантность пространства S_{ev} относительно $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя.

Теорема 4.2.2. Пусть $\varphi \in S_{ev}$, тогда $\widehat{\varphi} \in S_{ev}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.2.1, имеем

$$\begin{aligned} |(-\xi^2)^\alpha B_{-\gamma,x}^k \widehat{\varphi}| &= \left| (-\xi^2)^\alpha \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[x^{2k}\varphi](\xi) \right| = \left| \mathbb{F}\left[B_{-\gamma,x}^\alpha \left((-x^2)^k \varphi\right)\right](\xi) \right| = \\ &= \left| \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) B_{-\gamma,x}^\alpha (-x^2)^k \varphi(x) x^{-\gamma} dx \right| \leq \int_0^\infty \left| (1+x^2) B_{-\gamma,x}^\alpha (-x^2)^k \varphi(x) \right| \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2} \leq \\ &\leq \sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} (1+x^2) \left| B_{-\gamma,x}^\alpha \left((-x^2)^k \varphi(x)\right) \right| \int_0^\infty \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Представим интеграл из последнего выражения в следующем виде

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2} = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \frac{x^{-\gamma} dx}{1+x^2} = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим интеграл J_1

$$J_1 \leq \int_0^1 \frac{x^{-\gamma}}{1} dx = \frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-\gamma} < \infty.$$

Теперь перейдем к J_2 , имеем

$$J_2 \leq \int_0^1 \frac{x^{-\gamma}}{x^2} dx = \int_0^1 x^{-\gamma-2} dx = \frac{x^{-\gamma-1}}{-\gamma-1} \Big|_1^\infty = \frac{1}{-\gamma-1} < \infty.$$

Следовательно

$$\sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} (1+x^2) \left| B_{-\gamma,x}^\alpha \left((-x^2)^k \varphi(x)\right) \right| \leq C |\langle \varphi \rangle|_N.$$

Так как $\varphi \in S_{ev}$, то $|\langle \varphi \rangle|_{N'} < \infty$ для любого целого неотрицательного числа N' . Следовательно

$$|(-\xi^2)^\alpha B_{-\gamma, x}^k \widehat{\varphi}| \leq C |\langle \varphi \rangle|_{N'}$$

и, таким образом, мы доказали, что $|(-\xi^2)^\alpha B_{-\gamma, x}^k \widehat{\varphi}| < \infty$. Из этого вытекает, что $\widehat{\varphi} \in S_{ev}$. Кроме того,

$$C |\langle \varphi \rangle|_N = \sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} (1 + |x|^2)^\alpha |B_{-\gamma}^k \widehat{\varphi}| \leq C \sup_{\alpha+k \leq N, x \in \mathbb{R}_1^+} |x|^{2\alpha} |B_{-\gamma}^k \widehat{\varphi}|.$$

и, по предыдущему неравенству, получаем неравенство между нормами

$$\forall N \exists N' : |\langle \widehat{\varphi} \rangle|_N \leq C_{N, N'} |\langle \varphi \rangle|_{N'}. \quad (4.2.3)$$

Отметим, что эта форма справедлива для функций определенных в $\mathbb{R}_n^+$.

Доказательство закончено.

Напомним, что нормированные пространства Φ и $\widehat{\Phi}$ называются изоморфными [33], если существуют взаимно однозначное соответствие $\varphi \leftrightarrow \widehat{\varphi}$ между их элементами $\varphi \in \Phi$ и $\widehat{\varphi} \in \widehat{\Phi}$, такое, что

1) $\varphi_1 \leftrightarrow \widehat{\varphi}_1$ и $\varphi_2 \leftrightarrow \widehat{\varphi}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \leftrightarrow \lambda_1 \widehat{\varphi}_1 + \lambda_2 \widehat{\varphi}_2$ для любых чисел λ_1, λ_2 .

2) Если $\varphi \leftrightarrow \widehat{\varphi}$, то существуют независимые от этих элементов константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \|\varphi\| \leq \|\widehat{\varphi}\| \leq C_2 \|\varphi\|$$

Если вместо **2** выполняется равенство $\|\varphi\| = \|\widehat{\varphi}\|$, то такие пространства называются изометрическими.

Следствие 4.2.1. *ℐ-Преобразование Бесселя осуществляет непрерывный в обе стороны изоморфизм пространств S_{ev} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взаимно однозначное соответствие между элементами пространств S_{ev} и $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[S_{ev}]$ вытекает из формул обращения (1.4.2) $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi] = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\varphi] = \varphi$. Свойство **1** в определении изоморфизма нормированных пространств вытекает из линейности операции интегрирования. Непрерывность ℐ-преобразования Бесселя вытекает из неравенства (4.2.3). И, наконец, непрерывность в обе стороны следует из связи прямого и обратного ℐ-преобразований Бесселя, см. формулы (4.2.1) и (4.2.2).

Доказательство закончено.

4.2.1 ℐ-Преобразование Бесселя К-распределений в $\mathbb{R}_1^+$

Определение 4.2.1. *Пространство линейных непрерывных функционалов, порожденное весовой линейной формой $(\cdot, \cdot)_{-\gamma}$, над S_{ev} называется пространством распределений умеренного роста и обозначается S'_{ev} .*

Легко заметить, что линейный функционал над S_{ev} принадлежит S'_{ev} только в том случае, если существуют такие индексы α и k и такая постоянная C , что выполнено неравенство

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|+|k| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}_1^+} |x^\alpha B_{-\gamma}^k \varphi(x)|, \quad \varphi \in S_{ev}.$$

Теорема 4.2.3. Пусть $\varphi, \psi \in S_{ev}$. Тогда

- 1) $\int_{\mathbb{R}_1^+} \widehat{\varphi}(x) \psi(x) x^{-\gamma} dx = \int_{\mathbb{R}_1^+} \varphi(x) \widehat{\psi}(x) x^{-\gamma} dx.$ (Равенство Парсеваля);
- 2) $\int_{\mathbb{R}_1^+} \varphi(x) \overline{\widehat{\psi}(x)} x^{-\gamma} dx = C_\mu \int_{\mathbb{R}_1^+} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} x^{-\gamma} dx.$ (Равенство Планшереля).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем 1). По теореме Фубини имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(xy) \varphi(y) y^{-\gamma} dy \psi(x) x^{-\gamma} dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(xy) \psi(x) x^{-\gamma} dx \int_{\mathbb{R}_1^+} \varphi(y) y^{-\gamma} dy = \int_{\mathbb{R}_1^+} \varphi(y) \widehat{\psi}(y) y^{-\gamma} dy. \end{aligned}$$

Докажем 2). Воспользовавшись 1), запишем

$$C_\mu \int_{\mathbb{R}_1^+} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} x^{-\gamma} dx = C_\mu \int_{\mathbb{R}_1^+} \varphi(x) \overline{\widehat{\widehat{\psi}(x)}} x^{-\gamma} dx \quad (4.2.4)$$

Обратим внимание на выражение $\overline{\widehat{\widehat{\psi}(x)}}$. Ясно, что комплексное сопряжение вместе с коэффициентом C_μ превратит его в четное обратное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя:

$$C_\mu \overline{\widehat{\widehat{\psi}(\xi)}} = C_\mu \overline{\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(xy) \psi(x) x^{-\gamma} dx} = C_\mu \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(xy) \overline{\widehat{\psi}(x)} x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_B^{-1} [\overline{\psi}](\xi).$$

Следовательно, учитывая формулу обращения $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя, получим

$$C_\mu \overline{\widehat{\widehat{\psi}(\xi)}} = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}} \left[\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} [\overline{\psi}] \right](x).$$

Теперь, продолжая равенство (4.2.4), получим 2).

Определение 4.2.2. $\mathbb{J}$ -Преобразованием Бесселя K -распределений $u \in S'_{ev}$ называется функционал $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u]$, определяемый из равенства

$$(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u], \varphi)_{-\gamma} = (u, \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi])_{-\gamma}.$$

Так как $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя действует из S_{ev} в S_{ev} , то в правой части этого равенства – функционал, принадлежащий пространству распределений S'_{ev} . Если же, при этом, этот функционал задан функцией $u \in S_{ev}$, то равенство в определении 4.2.2 – формула Парсеваля (см. теорему 4.2.3). Это говорит о корректности введенного определения $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя K -распределений $u \in S'_{ev}$.

Теорема 4.2.4. $\mathbb{J}$ -Преобразование Бесселя непрерывно из S'_{ev} в S'_{ev} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_k \in S'_{ev}$ и $u_k \rightarrow u$ в смысле пространства K -распределений S'_{ev} . Надо доказать, что и $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u_k] \rightarrow \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u]$ в смысле S'_{ev} . Согласно определению 4.2.2

$$(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u_k], \varphi)_{-\gamma} = (u_k, \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi])_{-\gamma}.$$

Так как функция $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi] \in S_{ev}$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u_k], \varphi)_{-\gamma} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi])_{-\gamma} = (u, \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi])_{-\gamma} = (\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u], \varphi)_{-\gamma},$$

что означает $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u_k] = u$ в смысле K -распределений S'_{ev} .

Доказательство закончено.

Теорема 4.2.5. Для $u \in S'_{ev}$ справедлива формула обращения $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя

$$u(-x) = C_\mu \widehat{\widehat{u}} \Leftrightarrow \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi] = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\varphi] = \varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что функционал не зависит от аргумента функции, к которой он применен. В записи функционала вида $u(x)$ аргумент x означает аргумент основной функции. Поэтому $(u(-x), \varphi) = (u, \varphi(-x))$.

Из формулы обращения $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя и связи прямого и обратного $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя (2.3.1) для основных функций u вытекает $u = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi] = C_\mu \widehat{\widehat{\varphi}}(-x)$, тогда $\varphi(-x) = C_\mu \widehat{\widehat{\varphi}}(x)$ и, следовательно

$$(u(-x), \varphi)_{-\gamma} = (u, \varphi(-x))_{-\gamma} = (u, C_\mu \widehat{\widehat{\varphi}}(x))_{-\gamma}$$

4.2.2 $\mathbb{J}$ -Преобразование Бесселя обобщенной $\mathbb{T}$ -свёртки

Некоторые свёртки функций, изучаемые ранее В.А. Какичевым и его учениками (см. [24]), имеют вид

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)_{-\gamma} &= \int_0^\infty \mathbb{T}^y \varphi(x) \psi(y) y^{-\gamma} dy = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{(xy)^{\gamma+1} \varphi\left(\sqrt{(x \xrightarrow{\alpha} y)}\right)}{(x \xrightarrow{\alpha} y)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1} \alpha d\alpha \psi(y) y^{-\gamma} dy, \end{aligned}$$

где $\gamma = 2\mu - 1$ ($0 < \gamma < 1$) и $(x \xrightarrow{\alpha} y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}$.

Теорема 4.2.6. Пусть $\varphi, \psi \in L_2^{-\gamma}(0, \infty)$, тогда

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}} \left[(\varphi * \psi)_{-\gamma} \right] (\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, учитывая перестановочность $\mathbb{T}$ -псевдосдвига в скалярном произведении в $L_2^{-\gamma}$ и теорему сложения 2.2.1, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{B_{-\gamma}} \left[(\varphi * \psi)_{-\gamma} \right] (\xi) &= \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \int_0^\infty \mathbb{T}^y \varphi(x) \psi(y) y^{-\gamma} dy x^{-\gamma} dx = \\ &= \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(x\xi) \varphi(x) x^{-\gamma} dx \int_0^\infty \mathbb{J}_\mu(y\xi) \psi(y) y^{-\gamma} dy = \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Следствие 4.2.2. Пусть $u = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} \varphi$ и $v = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} \psi$. Тогда

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}} [u v] = (\widehat{u} * \widehat{v})_{-\gamma}. \quad (4.2.5)$$

4.2.3 Представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя

Рассмотрим линейный сингулярный дифференциального оператор

$$L(B_{-\gamma}) = \sum_{k=0}^m a_k(x) B_{-\gamma}^k.$$

Если предположить, что функция u — четная, достаточно гладкая и для неё имеет место представление Ганкеля в образах $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя $u(x) =$

$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\widehat{u}](x)$, то

$$L(B_{-\gamma})u(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x) B_{-\gamma}^k \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}[\widehat{u}](x) = \left(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} \right)_{\xi \rightarrow x} \left[\sum_{k=0}^m a_k(x) (-\xi^2)^k \widehat{u}(\xi) \right] (x).$$

Обычно используемая символическая запись действия $L(B_{-\gamma})$ оператора имеет вид:

$$L(B_{-\gamma})u(x) = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} [a(x, \xi) \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u]] , \quad (4.2.6)$$

где

$$a(x, \xi) = \sum_{k=0}^m a_k(x) (-\xi^2)^k. \quad (4.2.7)$$

Функция (4.2.7) называется символом сингулярного дифференциального оператора $L(B_{-\gamma}^k)$.

Пусть $a(x, \xi)$ есть C_{ev}^∞ функция, определенная при всех x и $\xi \neq 0$ и являющаяся положительно однородной по ξ степени m . Допустим, что на сфере $|\xi| = 1$ функция $a(x, \xi)$ имеет предел $a(\infty, \xi)$, когда $x \rightarrow \infty$ и, что $a(x, \xi) - a(\infty, \xi)$, как функция x , принадлежит пространству S_{ev} равномерно по ξ . Кроме того, для всех производных по ξ и для любых целых чисел p, β будем предполагать

$$(1 + |x|^p) B_{-\gamma}^k (a(x, \xi) - a(\infty, \xi)) \rightarrow 0 , \text{ если } |x| \rightarrow \infty , \quad (4.2.8)$$

равномерно по ξ , когда $|\xi| = 1$.

4.2.4 Представление $L(B_{-\gamma})$ -сопряженного оператора в рамках $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя

Рассмотрим весовую линейную форму (1.2.1) в виде

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_0^\infty u(x) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx .$$

Упрощая, предположим, что $u, v \in S_{ev}(0, \infty)$. Тогда

$$(L(B_{-\gamma})u, v)_{-\gamma} = \int_0^\infty L(B_{-\gamma})u(x) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx .$$

Исходя из $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя оператора $L(B_{-\gamma})$, получим

$$(L(B_{-\gamma})u, v)_{-\gamma} = C_\mu \int_0^\infty x^{-\gamma} dx \int_0^\infty \xi^{-\gamma} d\xi \int_0^\infty \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} u(y) y^{-\gamma} dy =$$

$$= C_\mu \int_0^\infty u(y) y^{-\gamma} dy \int_0^\infty \xi^{-\gamma} d\xi \int_0^\infty \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx.$$

Введём обозначение

$$\tilde{L}(B_{-\gamma})v(y) = C_\mu \int_0^\infty x^{-\gamma} dx \int_0^\infty \overline{\mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) v(x)} \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Тогда

$$(L(B_{-\gamma})u, v)_{-\gamma} = (u, \tilde{L}(B_{-\gamma})v)_{-\gamma}.$$

Таким образом, оператор $\tilde{L}(B_{-\gamma})$ с комплексно сопряженным символом $\overline{a(x, \xi)}$ оказывается формально сопряженным оператору $L(B_{-\gamma})$.

Подобно (4.2.6) имеем следующую формальную запись действия сопряженного оператора

$$L(B_{-\gamma})u(x) = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1} \left[\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\overline{a(x, \xi)} u] \right], \quad (4.2.9)$$

где $\overline{a(x, \xi)}$ — символ оператора $\tilde{L}(B_{-\gamma})$, комплексно сопряженный символу (4.2.6).

4.3 Пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с оператором $B_{-\gamma}$

Функциональные пространства формально вводятся по тем же схемам, что и в книге [28]. В рамках весовой билинейной формы (1.3.1) для любой функции $\varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ действие $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя принимает следующий вид

$$(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}u, \varphi)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_1^+} u(\xi) \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[\varphi](\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Топология в S_{ev} определяется системой норм

$$|\langle u \rangle|_N = \sup |(1+x)^\ell B_{-\gamma}^k u(x)|,$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \overline{\mathbb{R}_1^+}$ и всем ℓ и k , с $\ell + k \leq N$, а N пробегает все целые неотрицательные числа.

Для любого вещественного s через $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$ обозначим пополнение множества S_{ev} по норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_1^+} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (4.3.1)$$

где $\widehat{u}$ — прямое $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя. При целом положительном s норма (4.3.1) эквивалентна норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \sum_{|k| \leq s} \int_{\mathbb{R}_1^+} |B_{-\gamma}^k u(x)|^2 x^{-\gamma} dx,$$

а при дробном s эквивалентна норме, содержащей киприяновские операторы дробного дифференцирования [27], порождаемые $\mathbb{J}$ -преобразованием Бесселя.

4.4 Сингулярные $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова

j -Псевдодифференциальные операторы введены в [31], [29] и оказалось, что эти операторы образуют алгебру истинного порядка -1 . Позже в [25] было введено специальное преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова, которое позволило построить алгебру j -псевдодифференциальных операторов истинного порядка $-\infty$. $\mathbb{J}$ -Псевдодифференциальные операторы Киприянова построены по схеме j -псевдодифференциальных операторов и образуют алгебру истинного порядка -1 .

4.4.1 Пространство символов $\Xi_{-\gamma}^m$

Формулы (4.2.6) и (4.2.9) приводят к общим конструкциям оператора, включающего линейные сингулярные операторы типа $L(B_{-\gamma}^k)$. Норма, записанная в образах $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя, приведет к умножению на символ, представляющий многочлен порядка m . Поэтому для многочлена с ограниченными коэффициентами справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^{|\alpha|} &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \leq \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left[(1 + \xi_1^2)^{\alpha_1/2} \cdots (1 + \xi_n^2)^{\alpha_n/2} \right] \leq \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left[(1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\alpha_1/2} \cdots (1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\alpha_n/2} \right] = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (1 + |\xi|^2)^{\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{2}} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|/2}. \end{aligned}$$

Определение 4.4.1. Через $\Xi_{-\gamma}^m = \Xi_{-\gamma}^m(\mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1^+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных функций $a(x, \xi)$, удовлетворяющих усло-

вию (4.2.8) и неравенству

$$\left| (B_{-\gamma}^\sigma)_x (B_{-\gamma}^\beta)_\xi a(x, \xi) \right| \leq C_{\sigma, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2} - \beta}$$

при любых σ и β с константой $C_{\sigma, \beta}$, которая не зависит от x и ξ . Класс функций $\Xi_{-\gamma}^m$ будем называть символами порядка m .

Топология в $\Xi_{-\gamma}^m$ определяется счетным набором норм

$$|[a]|_N = \sup (1 + \xi^2)^{\frac{-m}{2} + \beta} \left| (B_{-\gamma}^\sigma)_x (B_{-\gamma}^\beta)_\xi a(x, \xi) \right| ,$$

где верхняя грань берется по всем $x, \xi \in \overline{\mathbb{R}_1^+}$ и по всем неотрицательным целым числам $\sigma, \beta : \sigma + \beta \leq \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}$ пробегает все неотрицательные целые числа.

Из определения 4.4.1 следует

$$\begin{aligned} (\mathbb{F}_{B_{-\gamma}})_{x \rightarrow \eta} \left[(1 + B_{-\gamma})^p (B_{-\gamma}^\beta)_\xi a(x, \xi) \right] &= \\ &= (1 + |\eta|^2)^p (B_{-\gamma}^\beta)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) \leq C_{\sigma, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2} - \beta} , \end{aligned}$$

где ${}^1\hat{a}$ — обозначение $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя функции $a(x, \xi)$ по первому аргументу. Для любого положительного числа p найдется такая константа C , что

$$\begin{aligned} {}^1\hat{a}(\eta, \xi) &\leq C (1 + |\eta|^2)^{-p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} , \\ (B_{-\gamma}^\beta)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) &\leq C (1 + |\eta|^2)^{-p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-\beta}{2}} . \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Определение 4.4.2. Операторы, действующие на функцию, принадлежащую пространству $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$, по формулам

$$A u(x) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi , \quad (4.4.2)$$

$$\mathcal{A} u(x) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi , \quad (4.4.3)$$

будем называть сингулярными $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальными операторами Киприянова (далее введем сокращение — $\mathbb{J}$ -ПДО).

4.4.2 Порядок сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова с символом из Ξ_{ev}^m

Теорема 4.4.1. *Сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО (4.4.2) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$, является оператором порядка m , т.е.*

$$\|A u\|_{H_{-\gamma}^s} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{A u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi. \quad (4.4.4)$$

Из формулы (4.4.2) и теоремы сложения 2.2.1, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{A u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(x\xi) \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\eta) a(x, \eta) u(y) y^{-\gamma} dy \eta^{-\gamma} d\eta x^{-\gamma} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(x\xi) \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(x\eta) a(x, \eta) \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta x^{-\gamma} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \eta) \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta x^{-\gamma} dx. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и применяя неравенство (4.4.1), запишем

$$\begin{aligned} \widehat{A u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \eta) x^{-\gamma} dx \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Согласно (4.4.5) выражение (4.4.4) примет вид

$$\begin{aligned} \|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\xi|^2)^s \left[\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta \right]^2 \xi^{-\gamma} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + \eta^2} \right)^s (1 + \eta^2)^s \left[\mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta \right]^2 \xi^{-\gamma} d\xi. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Из неравенства (2.4.1) (неравенство Петре)

$$\left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^k \leq 2^{|k|} \left(1 + |\xi - \eta|^2 \right)^{|k|}, \quad k \in \mathbb{R}_1,$$

следует

$$\|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 \leq 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|} (1 + \eta^2)^s \left[\mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta \right]^2 \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Применяя к символу ${}^1\widehat{a}$ неравенство (4.4.1), получим

$$|{}^1\widehat{a}(\xi, \eta)| \leq C (1 + |\xi|^2)^{-p} (1 + \eta^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Учитывая интегральную природу оператора $\mathbb{T}$, имеем

$$\mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) \leq \mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p} (1 + |\eta|^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 &\leq 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} \mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p} \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 + |\eta|^2)^{\frac{s+m}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi. \end{aligned}$$

К выражению $(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} \mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p}$ применим неравенство (2.4.6), тогда

$$(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} \mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p} \leq \mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s|}{2} - p}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 &\leq 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s|}{2} - p} (1 + |\eta|^2)^{\frac{s+m}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{\mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s|}{2} - p}} \sqrt{\mathbb{T}^\eta (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s|}{2} - p}} \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 + |\eta|^2)^{\frac{s+m}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi. \quad (4.4.7) \end{aligned}$$

К внутреннему интегралу применим неравенство Коши—Буняковского и воспользуемся тем, что $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг симметричен:

$$\begin{aligned} \|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 &\leqslant 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\xi (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}-p} \eta^{-\gamma} d\eta \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\eta (1+|\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}-p} \left(1+|\eta|^2\right)^{s+m} |\widehat{u}(\eta)|^2 \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi. \end{aligned}$$

Рассмотрим первый из внутренних интегралов. Введем обозначение $\lambda = p - \frac{|s|}{2}$. Полагая $\mathbb{T}_\eta^\xi = \frac{\mathbb{T}_\eta^\xi}{\eta^{2\mu}}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\xi (1+|\eta|^2)^{-\lambda} \eta^{-\gamma} d\eta &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^{**\xi} (1+|\eta|^2)^{-\lambda} \eta d\eta = \\ &= C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \eta d\eta \int_0^\pi |\xi|^{2\mu} \frac{(1+\eta^2+\xi^2-2\xi\eta\cos\alpha)^{-\lambda}}{\left(\sqrt{\eta^2+\xi^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu}\alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Здесь величина $(1+\eta^2+\xi^2-2\xi\eta\cos\alpha)^{-\lambda}$ убывает с ростом $|\eta-\xi|$, а знаменатель имеет особенность на прямой $\xi = \eta$ при $\alpha = 0$. Поэтому наибольшее значение этот интеграл примет при $\xi = \eta$. Но тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\xi (1+|\eta|^2)^{-\lambda} \eta^{-\gamma} d\eta &\leqslant C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \eta d\eta \int_0^\pi \frac{\eta^{2\mu} (1+2\eta^2(1-\cos\alpha))^{-\lambda}}{\eta^{2\mu}(2(1-\cos\alpha))^\mu} \sin^{2\mu}\alpha d\alpha \leqslant \\ &\leqslant C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \eta d\eta \int_0^\pi \frac{(1+2\eta^2(1-\cos\alpha))^{-\lambda}}{2^\mu} \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^{2\mu} d\alpha = \end{aligned}$$

Кроме того, при $\lambda > 1$ и $\eta > 1$, очевидно выполнение неравенства

$$(1+2\eta^2(1-\cos\alpha))^{-\lambda} \leqslant (1+\eta^2-2\eta)^{-\lambda} = (1+\eta)^{-2\lambda},$$

тогда

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\xi (1+|\eta|^2)^{-\lambda} \eta^{-\gamma} d\eta \leqslant C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \eta d\eta \int_0^\pi \frac{(1+\eta)^{-2\lambda}}{2^\mu} \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^{2\mu} d\alpha.$$

Как видим подынтегральная функция непрерывно зависит от α . Перейдём к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, в результате

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \eta d\eta \int_0^\pi \frac{(1+\eta)^{-2\lambda}}{2^\mu} \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|^{2\mu} d\alpha = \frac{C_\gamma}{2^\mu} \int_{\mathbb{R}_1^+} \eta d\eta (1+\eta)^{-2\lambda}.$$

Учитывая, что λ достаточно большое положительное число, получим

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\xi (1+|\eta|^2)^{-\lambda} \eta^{-\gamma} d\eta \leq \frac{C_\gamma}{2^\mu} \int_{\mathbb{R}_1^+} \frac{\eta d\eta}{(1+\eta)^{2\lambda}} = Q_1, \quad 0 < Q_1 < \infty.$$

Поэтому

$$\|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 \leq 2^{|s|} Q_1 \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\eta (1+|\xi|^2)^{-p+\frac{|s|}{2}} (1+|\eta|^2)^{s+m} |\widehat{u}(\eta)|^2 \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 &\leq 2^{|s|} Q_1 \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\eta (1+|\xi|^2)^{-p+\frac{|s|}{2}} \xi^{-\gamma} d\xi \times \\ &\quad \times (1+|\eta|^2)^{s+m} |\widehat{u}(\eta)|^2 \eta^{-\gamma} d\eta. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Рассмотрим внутренний интеграл и, используя ранее введенное обозначение $\lambda = p - \frac{|s|}{2}$ и полагая $\mathbb{T}_\xi^{\eta**} = \frac{\mathbb{T}_\xi^\eta}{\xi^{2\mu}}$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\eta (1+|\xi|^2)^{-\lambda} \xi^{-\gamma} d\xi &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^{\eta**} (1+|\xi|^2)^{-\lambda} \xi d\xi = \\ &= C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \xi d\xi \int_0^\pi |\eta|^{2\mu} \frac{(1+\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha)^{-\lambda}}{\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu}\alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Величина $(1+\eta^2+\xi^2-2\eta\xi\cos\alpha)^{-\lambda}$ также убывает с ростом $|\eta-\xi|$ и знаменатель имеет особенность на прямой $\eta = \xi$ при $\alpha = 0$. Поэтому наибольшее значение этот интеграл примет при $\eta = \xi$, следовательно

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\eta (1+|\xi|^2)^{-\lambda} \xi^{-\gamma} d\xi \leq C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_0^\pi \frac{\eta^{2\mu} (1+2\eta^2(1-\cos\alpha))^{-\lambda}}{\eta^{2\mu} (2(1-\cos\alpha))^\mu} \sin^{2\mu}\alpha d\alpha \xi d\xi \leq$$

$$\leq C_\gamma \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_0^\pi \frac{(1+2\eta^2(1-\cos\alpha))^{-\lambda}}{2^\mu} \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|^{2\mu} d\alpha \xi d\xi =$$

При $\lambda > 1$ и $\eta > 1$, выполняется неравенство

$$(1+2\eta^2(1-\cos\alpha))^{-\lambda} \leq (1+\eta^2-2\eta)^{-\lambda} = (1+\eta)^{-2\lambda},$$

и подынтегральная функция, как видим, непрерывно зависит от α , тогда учитывая, что λ достаточно большое положительное число, получим

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}^\eta (1+|\xi|^2)^{-\lambda} \xi^{-\gamma} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}_1^+} \frac{\xi d\xi}{(1+\xi)^{2\lambda}} = Q_2, \quad 0 < Q_2 < \infty.$$

Поэтому

Через C обозначим константы $2^{|s|} Q_1 Q_2$, теперь продолжая неравенство (4.4.8), получим

$$\|A u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m}}.$$

Доказательство закончено.

4.4.3 Порядок оператора $T = A - \mathcal{A}$

Сингулярные $\mathbb{J}$ -ПДО A и $\mathcal{A}$ определены формулами (4.4.2) и (4.4.3) соответственно. Оператор (4.4.3), сопряженный к оператору A , рассмотрим в следующей форме:

$$\mathcal{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(x\xi) \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(y\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi.$$

$\mathbb{J}$ -Преобразование Бесселя этого выражения определено равенством

$$\widehat{\mathcal{A}u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_\mu(y\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy.$$

Пользуясь формулой $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя произведения (4.2.5), имеем

$$\widehat{\mathcal{A}u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\eta^\xi {}^1\widehat{a}(\eta, \xi) \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta.$$

Напомним, что ${}^1\widehat{a}(\eta, \xi)$ — это $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя символа $a(x, \xi)$ по первой переменной.

Теорема 4.4.2. *Сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО вида $[A - \mathcal{A}]$ с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$, является оператором порядка $m - 1$, т.е.*

$$\|(A - \mathcal{A})u\|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.4.1 и формуле (4.4.6) получим

$$(\widehat{A - \mathcal{A}}) u(\xi) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \left[\mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) - \mathbb{T}_\eta^\xi {}^1\widehat{a}(\eta, \xi) \right] \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta.$$

Выражение в квадратных скобках обозначим Λ и т.к. $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг симметричен, но действует по первой переменной, то

$$\Lambda = \mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) - \mathbb{T}_\eta^\xi {}^1\widehat{a}(\eta, \xi) = \mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \eta) - \mathbb{T}_\xi^\eta {}^1\widehat{a}(\xi, \xi).$$

Это означает, что можно воспользоваться формулой Лагранжа конечных приращений, тогда

$$\Lambda = \mathbb{T}_\xi^\eta \frac{\partial}{\partial \zeta} {}^1\widehat{a}(\xi, \zeta) \Big|_{\zeta=\xi+\Theta(\eta-\xi)} (\eta - \xi), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Из определения класса символов Ξ_{ev}^m и из (4.4.1) при $\beta = 1$ следует неравенство

$$|\Lambda| \leq C \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} |1 + \zeta^2|^{\frac{m-1}{2}} |\xi - \eta|.$$

Т.к. функция $\zeta = \xi + \Theta(\eta - \xi)$ — линейная по Θ , то её максимальные значения достигаются либо при $\Theta = 0$, либо при $\Theta = 1$. Следовательно

$$|\Lambda| < \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \left[\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m-1}{2}} + \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{m-1}{2}} \right] |\xi - \eta|. \quad (4.4.9)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|(A - \mathcal{A})u\|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}}^2 &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(1 + |\xi|^2\right)^{s-m+1} \left| (\widehat{A - \mathcal{A}})(\xi) \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(1 + |\xi|^2\right)^{s-m+1} \left| \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \left[\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m-1}{2}} + \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{m-1}{2}} \right] \right| \times \\ &\quad \times |\xi - \eta| |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \Big|^2 \xi^{-\gamma} d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \frac{\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s-m+1}{2}}}{\left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}}} \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \left[\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m-1}{2}} + \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{m-1}{2}} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\xi - \eta| |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi = \\
&= C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \left[\left(\frac{\left(1 + |\xi|^2\right)}{\left(1 + |\eta|^2\right)} \right)^{\frac{s}{2}} + \left(\frac{\left(1 + |\xi|^2\right)}{\left(1 + |\eta|^2\right)} \right)^{\frac{s-m+1}{2}} \right] \mathbb{T}_\xi^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\xi - \eta| |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi.
\end{aligned}$$

Вновь применим неравенство Петре, тогда

$$\begin{aligned}
\| (A - \mathcal{A}) u \|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}}^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \left[\left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{\frac{|s|}{2}} + \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{\frac{|s-m+1|}{2}} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \mathbb{T}^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\xi - \eta| |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi \leq \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \left[\left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{\frac{|s|}{2}+1} + \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{\frac{|s-m+1|}{2}+1} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \mathbb{T}^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi = J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
J_1 &= C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{\frac{|s|}{2}+1} \mathbb{T}^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \\
J_2 &= C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{\frac{|s-m+1|}{2}+1} \mathbb{T}^\eta \left(1 + |\xi|^2\right)^{-p} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi.
\end{aligned}$$

Выражения J_1 и J_2 принципиально не отличаются доказательства неравенства (4.4.7), поэтому можем опустить часть доказательства, тогда

$$J_1 \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2, \quad J_2 \leq C_2 \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| \eta^{-\gamma} d\eta \right|^2.$$

в результате имеем

$$\| (A - \mathcal{A}) u \|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}}^2 \leq C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}_1^+} 2 \left(1 + |\eta|^2\right)^s |\widehat{u}(\eta)|^2 \eta^{-\gamma} d\eta \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Доказательство закончено.

Следствие 4.4.1. Пусть $a(x, \xi) \in S_{ev}^m(q)$, тогда согласно теореме 4.4.2 имеем

$$A = \mathcal{A} + T,$$

где T — оператор порядка $m - 1$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ так же, как оператор A имеет порядок, равный m в $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$.

Лемма 4.4.1. Пусть A — сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО (4.4.2) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$. Для любой функции $u \in H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$ имеет место неравенство

$$|(Au, u)_{-\gamma}| = |(u, \mathcal{A}u)_{-\gamma}| \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}.$$

с константой, независимой от функции u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упрощая доказательство, положим $a(\infty, \xi) = 0$. Применяя формулу Планшереля, запишем

$$\begin{aligned} |(Au, u)_{-\gamma}| &= |\operatorname{Re}(\widehat{Au}, \widehat{u})_{-\gamma}| = \int_{\mathbb{R}_1^+} \widehat{u}(\xi) \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\eta^\xi \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)} \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \widehat{u}(\xi) \sqrt{\mathbb{T}_\eta^\xi \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)}} \sqrt{\mathbb{T}_\eta^\xi \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)}} \widehat{u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi. \end{aligned}$$

Применим неравенство Коши-Буняковского, тогда

$$\begin{aligned} |(Au, u)_{-\gamma}| &\leq \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{|\widehat{u}(\xi)|^2 \mathbb{T}_\eta^\xi \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)} \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi} \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{|\widehat{u}(\xi)|^2 \mathbb{T}_\eta^\xi \overline{\widehat{a}(\eta, \xi)} \eta^{-\gamma} d\eta \xi^{-\gamma} d\xi}. \end{aligned}$$

По определению символа класс $\Xi_{-\gamma}^m$ по переменной x есть функция пространства Шварца. Тогда ее $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя по первой группе переменных есть быстро убывающая функция. Т.е. можем записать

$$\mathbb{T}_{\eta}^{\xi} \overline{\widehat{a}}(\eta, \xi) \leq c (1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-2p},$$

где p произвольное достаточно большое число. Следовательно

$$\begin{aligned} |(Au, u)_{-\gamma}| &\leq c \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{\left[(1 + |\xi|^2)^{m/2} |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi \right] \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-2p} \eta^{-\gamma} d\eta} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \sqrt{\left[(1 + |\eta|^2)^{m/2} |\widehat{u}(\eta)|^2 \eta^{-\gamma} d\eta \right] \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{m/2} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-2p} \xi^{-\gamma} d\xi}. \end{aligned}$$

Теперь, обозначим

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-p} \eta^{-\gamma} d\eta, \quad K_2 = \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{\frac{m}{4}} \mathbb{T}_{\eta}^{\xi} (1 + |\eta|^2)^{-p} \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Факт, что K_1 и K_2 константы, доказывается так же как в теореме 4.4.1. Первое по аналогу неравенства Киприянова—Ключанцева для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (см. свойство 9*), второе также, но с предварительным применением аналога неравенства Петре для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (лемма 2.4.2). Следовательно применяя теорему 4.4.1 с показателем $s = 0$, получим

$$|(Au, u)_{-\gamma}| \leq c \sqrt{K_1 K_2} \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}} = C \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}^2.$$

Доказательство закончено.

4.4.4 Произведения и коммутаторы

Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_2}$, а A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные $\mathbb{J}$ -ПДО. Аналогичное утверждение справедливо для сингулярного псевдодифференциального оператора с символом, равным произведению символов операторов A_1 и A_2 , который будем обозначать $A_1 \circ A_2$.

Теорема 4.4.3. *Оператор*

$$A_1 A_2 - A_1 \circ A_2$$

имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\zeta_1(x, \xi) = a_1(x, \xi)\zeta(\xi), \quad \zeta_2(x, \xi) = a_2(x, \xi)\zeta(\xi).$$

Из представления (4.4.5) имеем

$$\begin{aligned} \widehat{A_1 A_2 u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta \widehat{\zeta}_1(\xi, \eta) \widehat{A_2 u}(\eta) \eta^{-\gamma} d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta \widehat{\zeta}_1(\xi, \eta) \mathbb{T}_\eta^\tau \widehat{\zeta}_2(\eta, \tau) \widehat{u}(\tau) \tau^{-\gamma} d\tau \eta^{-\gamma} d\eta. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

С другой стороны, учитывая формулу (4.2.5), получим

$$\widehat{A_1 \circ A_2 u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta \widehat{\zeta}_1(\xi, \tau) \mathbb{T}_\eta^\tau \widehat{\zeta}_2(\eta, \tau) \widehat{u}(\tau) \tau^{-\gamma} d\tau \eta^{-\gamma} d\eta. \quad (4.4.11)$$

Из (4.4.10) и (4.4.11) имеем

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 - A_1 \circ A_2)u(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left[\mathbb{T}_\xi^\eta \left(\widehat{\zeta}_1(\xi, \eta) - \widehat{\zeta}_1(\xi, \tau) \right) \right] \mathbb{T}_\eta^\tau \widehat{\zeta}_2(\eta, \tau) \times \\ &\quad \times \widehat{u}(\tau) \tau^{-\gamma} d\tau \eta^{-\gamma} d\eta. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Выражение в квадратных скобках в (4.4.12) обозначим через Φ . Для нее справедливо неравенство вида (4.4.9)

$$|\Phi| \leq C \mathbb{T}_\xi^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p} \left[(1 + |\eta|^2)^{\frac{m_1-1}{2}} + (1 + |\tau|^2)^{\frac{m_1-1}{2}} \right] |\eta - \tau|,$$

где p - произвольное положительное число. Кроме того, из неравенства (4.4.1) следует, что

$$|\mathbb{T}_\eta^\tau \widehat{\zeta}_2(\eta, \tau)| \leq \mathbb{T}_\eta^\tau (1 + |\tau|^2)^{\frac{m_2}{2}} (1 + |\eta|^2)^{-q},$$

где q - произвольное положительное число. В результате выражение (4.4.12) примет следующий вид

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 - A_1 \circ A_2)u(\xi) &\leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left\{ \mathbb{T}_\xi^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p} \left[(1 + |\eta|^2)^{\frac{m_1-1}{2}} + (1 + |\tau|^2)^{\frac{m_1-1}{2}} \right] |\eta - \tau| \right\} \times \\ &\quad \times \mathbb{T}_\eta^\tau (1 + |\tau|^2)^{\frac{m_2}{2}} (1 + |\eta|^2)^{-q} \widehat{u}(\tau) \tau^{-\gamma} d\tau \eta^{-\gamma} d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
& \| (A_1 A_2 - A_1 \circ A_2) u \|^2_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} = \\
& = \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{s-m_1-m_2+1} |(\widehat{A_1 A_2 - A_1 \circ A_2} u)|^2(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi \leq \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{\frac{s-m_1-m_2+1}{2}} \frac{\left(1 + |\eta|^2 \right)^{\frac{s-m_1-m_2+1}{2}}}{(1 + |\tau|^2)^{\frac{s}{2}}} (1 + |\tau|^2)^{\frac{s}{2}} \left(1 + |\tau|^2 \right)^{\frac{m_2}{2}} \times \\
& \times \left[(1 + |\eta|^2)^{\frac{m_1-1}{2}} + (1 + |\tau|^2)^{\frac{m_1-1}{2}} \right] \mathbb{T}_\xi^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p} \mathbb{T}_\eta^\tau (1 + |\eta|^2)^{-q} \times \\
& \times |\eta - \tau| |\widehat{u}(\tau)| \tau^{-\gamma} d\tau \eta^{-\gamma} d\eta \Big|^2 \xi^{-\gamma} d\xi \leq \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\eta|^2} \right)^{\frac{s-m_1-m_2+1}{2}} \left[\left(\frac{1 + |\eta|^2}{1 + |\tau|^2} \right)^{\frac{s-m_2}{2}} + \left(\frac{1 + |\eta|^2}{1 + |\tau|^2} \right)^{\frac{s-m_1-m_2+1}{2}} \right] \times \\
& \times (1 + |\tau|^2)^{\frac{s}{2}} \mathbb{T}_\xi^\eta (1 + |\xi|^2)^{-p} \mathbb{T}_\eta^\tau (1 + |\eta|^2)^{-q} |\eta - \tau| |\widehat{u}(\tau)| \tau^{-\gamma} d\tau \eta^{-\gamma} d\eta \Big|^2 \xi^{-\gamma} d\xi.
\end{aligned}$$

Учитывая неравенства (2.4.5) и (2.4.6) имеем

$$\begin{aligned}
& \| (A_1 A_2 - A_1 \circ A_2) u \|^2_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\xi^\eta (1 + |\xi|^2)^{-k_1} \mathbb{T}_\eta^\tau (1 + |\eta|^2)^{-k_2} |f(\tau)| \tau^{-\gamma} d\tau \eta^{-\gamma} d\eta \Big|^2 \xi^{-\gamma} d\xi,
\end{aligned}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\begin{aligned}
-k_1 &= \frac{|s - m_1 - m_2| + 1}{2} - p, \quad -k_2 = \min \left(\left| \frac{s - m_2}{2} - q \right|, \left| \frac{s - m_1 - m_2 + 1}{2} - q \right| \right), \\
|f(\tau)| &= (1 + |\tau|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\tau)|.
\end{aligned}$$

К интегралу по переменной η применим теорему 2.4.1 (неравенство (2.4.3)), тогда

$$\begin{aligned}
& \| (A_1 A_2 - A_1 \circ A_2) u \|^2_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\tau^\xi (1 + |\tau|^2)^{-k_1} |f(\tau)| \tau^{-\gamma} d\tau \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi = \\
& = C \int_{\mathbb{R}_1^+} \left| \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\tau|^2)^{-\frac{k_1}{2}} (1 + |\tau|^2)^{-\frac{k_1}{2}} \mathbb{T}_\tau^\xi |f(\tau)| \tau^{-\gamma} d\tau \right|^2 \xi^{-\gamma} d\xi.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} & \| (A_1 A_2 - A_1 \circ A_2) u \|^2_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}_1^+} \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\tau|^2)^{-k_1} \tau^{-\gamma} d\tau \int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\tau|^2)^{-k_1} (\mathbb{T}_\tau^\xi |f(\tau)|)^2 \tau^{-\gamma} d\tau \xi^{-\gamma} d\xi. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{T}_\tau^\xi |f(\tau)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi = \|f\|_{L_2^{-\gamma}}^2 = \|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2$$

получаем

$$\| (A_1 A_2 - A_1 \circ A_2) u \|^2_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq C \left[\int_{\mathbb{R}_1^+} (1 + |\tau|^2)^{-2k_1} \tau^{-\gamma} d\tau \right] \|f\|_{L_2^{-\gamma}}^2 = C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2.$$

Доказательство закончено.

Следствие 4.4.2. Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_2}$, а A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные $\mathbb{J}$ -ПДО. Тогда их коммутатор

$$[A_1 A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$$

имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.4.3 имеем

$$A_1 A_2 = A_1 \circ A_2 + T_1, \quad A_2 A_1 = A_1 \circ A_2 + T_2,$$

где T_1 и T_2 — операторы порядков $m_1 + m_2 - 1$. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

Следствие 4.4.3. Пусть $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$ и A — соответствующий этому символу сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО. Тогда его коммутатор с оператором $\left(1 + B_{-\gamma}^\beta\right)^{\frac{k}{2}}$ имеет порядок $m + k - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$.

Справедливость последнего утверждения непосредственно следует из следствия 4.4.2, если заметить, что операторы $\left(1 + B_{-\gamma}^\beta\right)^{\frac{k}{2}}$ и $\left(B_{-\gamma}^\beta\right)^{\frac{k}{2}}$ отличаются на оператор порядка $k - 1$.

4.4.5 Аналог неравенства Гординга для сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова

Введем обозначение

$$K = \max_{x \in \mathbb{R}_1^+, \xi \in S_1} |a(x, \xi)|, \quad (4.4.13)$$

где S_1 — единичная сфера в $\mathbb{R}_1^+$ с центром в начале координат. Ясно, что для символа $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$ эта величина ограничена.

Докажем следующую форму неравенства Гординга [74] (для классических псевдодифференциальных операторов это неравенство получено в [77, 83]).

Лемма 4.4.2. Пусть $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$, A — соответствующий этому символу сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО, и пусть на единичной сфере $S_1 = \{\xi : |\xi| = 1\}$ символ $\operatorname{Re} a(x, \xi)$ ограничен снизу некоторой константой c . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $c' = c'(\varepsilon)$ такая, что для всех функций $u \in S_{ev}^+(\mathbb{R}_1^+)$

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{-\gamma} + c' \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}}^2 \geq (c - \varepsilon) \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}. \quad (4.4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A' — сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО вида (4.4.2) с символом $i \cdot \operatorname{Im} a(x, \xi)$, тогда

$$\overline{(A'u, u)_{-\gamma}} = \int_{\mathbb{R}_1^+} A'u(x) \overline{u(x)} x^{-\gamma} dx = \int_{\mathbb{R}_1^+} u(x) \overline{A'u(x)} x^{-\gamma} dx = (u, A'u)_{-\gamma},$$

следовательно

$$\operatorname{Re}(A'u, u)_{-\gamma} = \frac{1}{2} \left[(A'u, u)_{-\gamma} + \overline{(A'u, u)_{-\gamma}} \right] = \frac{1}{2} \left[(A'u, u)_{-\gamma} + (u, A'u)_{-\gamma} \right].$$

С другой стороны, если $\overline{A}$ — оператор с комплексно сопряженным символом $\overline{a}(x, \xi)$, то $A' = 1/2 \{A - \overline{A}\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A'u, u)_{-\gamma} &= \frac{1}{4} \left[(\{A - \overline{A}\} u, u)_{-\gamma} + (u, \{A - \overline{A}\} u)_{-\gamma} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\{A - \mathcal{A}\} u, u)_{-\gamma} + (\{\overline{A} - \overline{\mathcal{A}}\} u, u)_{-\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Теперь, согласно теореме 4.4.2 и лемме 4.4.1, имеем

$$|\operatorname{Re}(A'u, u)_{-\gamma}| \leq C_1 \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}},$$

Учитывая, что $\operatorname{Re}(Au, u)_{-\gamma} = \operatorname{Re}[(A''u, u)_{-\gamma} + (A'u, u)_{-\gamma}]$, где A'' — сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО, соответствующий символу $\operatorname{Re} a(x, \xi)$, получаем

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{-\gamma} + C_1 \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}} \geq \operatorname{Re}(A''u, u)_{-\gamma}.$$

Таким образом, эту лемму достаточно доказать для сингулярного $\mathbb{J}$ -ПДО A'' с действительным символом, что и будем предполагать в дальнейшем.

Рассмотрим однородный степени нуль символ

$$\frac{1}{|\xi|^m} a(x, \xi) - C + \varepsilon \geq \varepsilon > 0.$$

Извлекая из него квадратный корень и продолжая полученную функцию до однородной по ξ степени $m/2$ функции получим символ $q(x, \xi)$ такой, что

$$q^2(x, \xi) = a(x, \xi) - (C - \varepsilon) (|\xi'|^2 + |\xi''|^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Пусть Q и $\mathcal{Q}$ — сингулярные $\mathbb{J}$ -ПДО, соответствующие символу $q(x, \xi)$ в виде (4.4.2) и (4.4.3) соответственно, и $Q \circ Q$ — сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО (4.4.2), соответствующий символу $q^2(x, \xi)$. Тогда

$$Q \circ Q = A - (C - \varepsilon) (B_{-\gamma}^k)^{\frac{m}{2}}.$$

По теореме 4.4.3 имеем $Q \circ Q = Q^2 + T$, где T — оператор порядка $m - 1$. Таким образом, оператор

$$G = Q \circ Q - \mathcal{Q} \cdot Q = Q^2 - \mathcal{Q} \cdot Q + T = (Q - \mathcal{Q}) Q + T$$

имеет порядок $m - 1$, т.е. имеет место неравенство

$$|(Gu, u)_{-\gamma}| \leq c' \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}},$$

которое можно записать в виде

$$(Au, u)_{-\gamma} - (C - \varepsilon) \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}} - (\mathcal{Q}Qu, u)_{-\gamma} \geq -c' \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}}.$$

Так как $(\mathcal{Q}Qu, u)_{-\gamma} = \|Qu\|_{H_{-\gamma}^0}^2 \geq 0$, то

$$(Au, u)_{-\gamma} + c' \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}} \geq (C - \varepsilon) \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}. \quad (4.4.15)$$

Вследствии теоремы 4.4.2, неравенство вида (4.4.15) справедливо и для оператора $\mathcal{A}$ вида (4.4.3) с действительным символом $a(x, \xi) \in \Xi_q^m(q)$, т.е. справедлива оценка

$$(\mathcal{A}u, u)_{-\gamma} + c' \|u\|_{H_{-\gamma}^{(m-1)/2}} \geq (C - \varepsilon) \|u\|_{H_{-\gamma}^{m/2}}. \quad (4.4.16)$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Re} (Au, u)_{-\gamma} = \frac{1}{2} \left[(Au, u)_{-\gamma} + (\mathcal{A}u, u)_{-\gamma} \right].$$

Из (4.4.15) и (4.4.16) получаем (4.4.14).

Доказательство закончено.

Глава 5

Нечетное и полное J-преобразования Фурье—Бесселя— Киприянова—Катрахова и сингулярные J-псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова

Пусть $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x: x_n > 0\}$. Смешанные прямое и обратное преобразования Фурье—Бесселя определяются выражениями

$$F_B[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i\langle x', \xi' \rangle} j_\nu(x_n \xi_n) f(x) x_n^\gamma dx,$$

$$F_B^{-1}[f](\xi) = C(\nu) \int_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i\langle x', \xi' \rangle} j_\nu(x_n \xi_n) f(x) x_n^\gamma dx,$$

$$\text{где } \nu = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad C(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1)} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} 2^{\gamma-1} \Gamma^2\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}.$$

Изучение сингулярных псевдодифференциальных операторов на основе смешанного преобразования Фурье—Бесселя было инициировано И.А. Киприяновым в 1974 году. Формально, этот класс псевдодифференциальных операторов построен в [31] по символу $a(x, \xi)$ следующим представлением

$$\begin{aligned} A(x, D) &= F_B^{-1} \left[a(x, \xi) F_B[u](\xi) \right] (x) = \\ &= C_\gamma \int \int_{\mathbb{R}_n^+ \mathbb{R}_n^+} e^{-i(x'-y', \xi')} T_{x_n}^{y_n} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_n \xi_n) a(x, \xi) u(y) y_n^\gamma dy \xi_n^\gamma d\xi. \end{aligned}$$

Это выражение называется *сингулярным j -псевдодифференциальным оператором Киприянова* (далее — j -ПДО). Здесь $T_{x_n}^{y_n}$ — обобщенный сдвиг Пуассона:

$$T_{x_n}^{y_n} f(x', x_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(x', \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos \alpha}\right) \sin^{2\nu} \alpha d\alpha.$$

Из представления j -функции Бесселя видим, что эта функция четная, поэтому прямое и обратное j -преобразования Бесселя — четные функции. Далее преобразования F_B и F_B^{-1} будем называть *четными преобразованиями Фурье—Бесселя*.

Теория j -ПДО и применение этой теории к построению регуляризаторов граничных задач для B -эллиптических уравнений было развито Л.Н. Ляховым в его кандидатской диссертации [37]. Однако было выяснено, что используемое «четное» преобразование Фурье—Бесселя не дает возможности построить алгебру таких операторов, как это сделано для классических псевдодифференциальных операторов, построенных на основе преобразования Фурье. Например, применение оператора Бесселя к произведению функций определено формулой

$$B_{x_n}(u v) = B_{x_n} u v + u B_{x_n} v + 2 u'_{x_n} v'_{x_n},$$

в которой производные первого порядка по x_n оказываются нечетными функциями и не могут быть определены в рамках четного преобразования Фурье—Бесселя. Поэтому регуляризаторы граничных задач построены для сингулярных дифференциальных уравнений главного типа. Было установлено, что невозможно в рамках четного преобразования Фурье—Бесселя построить алгебру таких сингулярных j -ПДО истинного порядка $-\infty$.

Эта «неадекватность» введенных четных j -ПДО исправлена в работе И.А.Киприянова и В.В. Катрахова [29] введением «нечетного» преобразования Фурье—Бесселя, называемого сейчас *преобразованием Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова*. Ядром служила «четная+нечетная» функция

$$k_\nu^\pm(t) = j_\nu(t) \pm i \frac{t}{2(\nu+1)} j_{\nu+1}(t), \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}, \quad \gamma > 0.$$

Введенное преобразование позволило исследовать решения уравнений, содержащих сингулярные дифференциальные операторы нечетного порядка вида

$$(D_B)_{x_n}^{2m+1} = \frac{\partial}{\partial x_n} B_{\gamma, x_n}^m.$$

Алгебра многомерных сингулярных псевдодифференциальных операторов, где преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова применялось только по одной переменной, построена В.В. Катраховым и Л.Н. Ляховым в работе [25]. Для многих весовых переменных теория j -ПДО Киприянова—Катрахова построена в совместных работах Л.Н. Ляхова и С.А. Рощупкина [48, 80].

5.1 $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя в $\mathbb{R}_n^+$.

Многомерное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя имеет своим ядром произведение $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_\mu(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+,$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — мультииндекс, каждая координата которого связана с параметром $-\gamma_i$ сингулярного дифференциального оператора Бесселя $B_{-\gamma_i}$ равенством $\mu_i = \frac{\gamma_i+1}{2}$, $\gamma_i \in (0, 1)$, $\mu_i \in (\frac{1}{2}, 1)$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} \right)_x = \left\{ \begin{array}{ll} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ \frac{\partial}{\partial x_i} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{array} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Введем весовую билинейную форму следующего вида:

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_i x_i^{-\gamma_i}, \quad -\gamma_i \in (-1, 0). \quad (5.1.1)$$

Класс основных функций обозначим символом $S_{ev, -\gamma} = S_{ev, -\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$, в который входят два множества функций. К первому из них относятся функции из $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ такие, что $x^{-\gamma} \varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Ко второму множеству отнесем производные первого порядка от этих функций. Ясно, что

$$\forall \varphi \in S_{ev} \implies \varphi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \in S_{ev, -\gamma}(\mathbb{R}_n^+) \quad (a_i \in \mathbb{R}_1).$$

Топология в $S_{ev, -\gamma}$ определяется системой норм

$$|\langle u \rangle|_{\mathbb{N}} = \sup \left| (1+x)^k D_{B_{-\gamma}}^\alpha u(x) \right|,$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ и всем k и α , с $k + \alpha \leq \mathbb{N}$.

Пространство двойственное к $S_{ev,-\gamma}$, в смысле билинейной формы (5.1.1), будем называть распределениями Киприянова и обозначать $S'_{ev,-\gamma}$. Обобщенные D_B^α -производные распределений Киприянова понимаются в следующем смысле

$$(D_B^\alpha u, \varphi(x))_{-\gamma} = (-1)^{|\alpha|} (u, D_B^\alpha \varphi(x))_{-\gamma}.$$

Из теоремы сложения для $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя (одного переменного) вытекает теорема сложения для ядер многомерного $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя

$$\mathbb{J}_\mu(x) \mathbb{J}_\mu(y) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x).$$

Здесь оператор *обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига*, имеет следующий вид:

$$\mathbb{T}_x^y f(x, t) = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f\left(x \xrightarrow{\alpha} y, t\right) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i,$$

где

$$(x \xrightarrow{\alpha} y) = (\dots, x_i \xrightarrow{\alpha_i} y_i, \dots) = (\dots, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}, \dots).$$

5.1.1 Рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}$ -функции Бесселя

Лемма 5.1.1. Пусть $2\mu_i = \gamma_i + 1$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Имеют место следующие формулы

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i),$$

$$\nabla \mathbb{J}_\mu(x) = 2(\mu_1 x_1 \mathbb{J}_{\mu_1-1}(x_1), \dots, \mu_n x_n \mathbb{J}_{\mu_n-1}(x_n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходим из определения $\mathbb{J}_\mu(x) = x^{2m} j_\mu(x)$. Имеем

$$\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i) = x_i^{2\mu_i} j_{\mu_i}(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i + 1)}{\Gamma(k + \mu_i + 1)} \frac{x_i^{2(k+\mu_i)}}{2^{2k}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i + 1)}{(k + \mu_i)} \frac{2(k + \mu_i)}{\Gamma(k + \mu_i)} \frac{x_i^{2(k + \mu_i) - 1}}{2^{2k}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i + 1)}{\Gamma(k + [\mu_i - 1] + 1)} \frac{x_i^{2(k + \mu_i) - 1}}{2^{2k - 1}} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\mu_i \Gamma(\mu_i)}{\Gamma(k + [\mu_i - 1] + 1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} 2 x_i^{2\mu_i - 1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\mu_i - 1 + 1)}{\Gamma(k + \mu_i - 1 + 1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} 2\mu_i x_i^{2\mu_i - 1} = \\
&= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma([\mu_i - 1] + 1)}{\Gamma(k + [\mu_i - 1] + 1)} \left(\frac{x_i}{2}\right)^{2k} \right] 2\mu_i x_i^{(2\mu_i - 2)} x_i = \\
&= 2\mu_i x_i j_{\mu_i - 1}(x_i) x_i^{2(\mu_i - 1)} = 2\mu_i x_i \mathbb{J}_{\mu - 1}(x_i) .
\end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Следствие 5.1.1.

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i^2 x_i \mathbb{J}_{\mu_i - 1}(x_i \xi_i).$$

Доказательство с очевидностью вытекает из леммы 5.1.1.

5.1.2 Нечетное и полное $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова

$\mathbb{J}$ -Преобразования Бесселя на основе $\mathbb{J}$ -функций Бесселя введены в определении 1.4.1. В общем случае: *четным прямым и четным обратным $\mathbb{J}$ -преобразованиями Бесселя* будем называть выражения

$$\mathbb{F}_{ev}[f](y) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n} f(y) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i y_i) y_i^{-\gamma_i} dy_i ,$$

$$\mathbb{F}_{ev}^{-1}[f](\xi) = C_{\mu,n} \int_{\mathbb{R}_n} \widehat{f}(\xi) \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i x_i) \xi_i^{-\gamma_i} d\xi_i , \quad C_{\mu,n} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{2^{-\mu_i}}{\Gamma(\mu_i + 1)} \right)^2 .$$

Следуя [29] и следствию 5.1.1, введем *нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова*, основанное на функции

$$\frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i - 1}(x_i \xi_i) ,$$

которое имеет вид

$$\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i .$$

Несобственный интеграл здесь, как обычно, понимается в смысле главного значения по Коши. Как видим, ядро этого преобразования нечетно, поэтому для четных функций $\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = 0$.

Лемма 5.1.2. Пусть $f \in S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$. Тогда

$$\mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \xi_i \mathbb{F}_{ev}[f](\xi) = \xi_i \widehat{f}(\xi), \quad (5.1.2)$$

где $\widehat{f}(\xi)$ — четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i = \int_0^{\infty} f(x) \frac{x_i^{\gamma_i}}{\xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} \right) x_i^{-\gamma_i} dx_i. \end{aligned}$$

Поскольку $x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} \right) = B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)$, то

$$\mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \int_0^{\infty} f(x_i) \frac{1}{\xi_i} B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) x_i^{-\gamma_i} dx_i.$$

Согласно равенству (1.1.1), получим

$$\mathbb{F}_{od} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \xi_i \int_0^{\infty} f(x_i) \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) x_i^{-\gamma_i} dx_i = \xi_i \mathbb{F}_{ev}[f](\xi) = \xi_i \widehat{f}(\xi).$$

Доказательство закончено.

Из равенства (5.1.2) видно, что преобразование $\mathbb{F}_{od}$ производной четной функции свелось к преобразованию $\mathbb{F}_{ev}$. Поэтому удобно ввести одно преобразование со смешанным ядром, которое назовем *полным $\mathbb{J}$ -преобразованием Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова* (сокращенно—ФБKK-преобразование)

$$\mathbf{J}_{\mu}(x\xi) = \mathbb{J}_{\mu}(x\xi) + \psi \mathbb{J}_{\mu-1}(x\xi), \quad \psi = 2 \prod_{i=1}^n \mu_i x_i \xi_i.$$

При этом, полагая $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f_{ev}(x) + f_{od}(x)$, получим

$$\mathbf{F}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \mathbf{J}_\mu(x\xi) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{ev}[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{od}[f_{od}](\xi),$$

где первое слагаемое представляет собой четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя, а второе нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.¹

Замечание 5.1.1. Легко видеть, что утверждения теорем 4.2.3 и 4.2.6 справедливы для полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.

Теорема 5.1.1 (о символе $D_{B_{-\gamma}}^\alpha$ -оператора). Для $f \in S(\mathbb{R}_n)$ имеет место формула

$$\mathbf{F}[D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} f](\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} (-\xi_i^2)^k \widehat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i \widehat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k + 1 \end{array} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция f четная по Киприянову и число $\alpha = 2k \geq 0$ — четное. Тогда

$$\mathbf{F}[D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} f](\xi) = \mathbb{F}_{ev}[B_{-\gamma_i}^k f](\xi) = (-\xi_i^2)^k \widehat{f}(\xi), \quad (5.1.3)$$

что уже было доказано в выше.

Пусть теперь $\alpha = 2k + 1$ — нечетное число. Тогда, воспользовавшись леммой 5.1.2 и равенством (5.1.3), получим

$$\mathbf{F}[D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} f](\xi) = \xi_i \mathbb{F}_{ev}[B_{-\gamma_i}^k f](\xi) = (-\xi_i^2)^k \xi_i \widehat{f}(\xi), \quad (5.1.4)$$

Из (5.1.4) и (5.1.3) следует равенство теоремы 5.1.1.

Доказательство закончено.

5.1.3 Представление $L(D_{B_{-\gamma}}^\alpha)$ оператора в рамках полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.

Рассмотрим линейный сингулярный дифференциального оператор

$$L\left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha\right) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_{B_{-\gamma}}^\alpha,$$

где $D_{B_{-\gamma}}^\alpha = D_{B_{-\gamma_1}}^{\alpha_1} \dots D_{B_{-\gamma_n}}^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

¹Как видим, прослеживается аналогия с синус и косинус преобразованиями Фурье.

Пусть функция $u \in C_{ev}^m$. Тогда $u(x) = \mathbb{F}_{ev}^{-1}[\widehat{u}](x)$. Следовательно

$$L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u(x) = \mathbf{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) \right] (x),$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi_i^{\alpha_i} = \begin{cases} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{cases} \quad \Bigg|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Действие оператора $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ в рамках полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова имеет следующий вид:

$$L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u(x) = \mathbf{F}^{-1} [a(x, \xi) \mathbb{F}_{ev} [u]], \quad (5.1.5)$$

где функция

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha_i}(x_i) \xi_i^{\alpha_i}, \quad \xi_i^{\alpha_i} = \begin{cases} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{cases} \quad , \quad (5.1.6)$$

символ сингулярного дифференциального оператора $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$.

5.1.4 $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ -Сопряженный оператор в рамках полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.

Рассмотрим весовую линейную форму (1.2.1) в виде

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(x) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_i |x_i|^{-\gamma_i}, \quad -\gamma_i \in (-1, 0).$$

Упрощая, предположим, что $u, v \in S_{ev}(\mathbb{R}_n)$. Тогда

$$\left(L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u, v \right)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u(x) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx.$$

Исходя из полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова оператора $L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right)$, получим

$$\begin{aligned} \left(L\left(D_{B-\gamma}^\alpha\right) u, v \right)_{-\gamma} &= C_{\mu, n} \int_{\mathbb{R}_n} x^{-\gamma} dx \int_{\mathbb{R}_n} \xi^{-\gamma} d\xi \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} u(y) y^{-\gamma} dy = \\ &= C_{\mu, n} \int_{\mathbb{R}_n} u(y) y^{-\gamma} dy \int_{\mathbb{R}_n} \xi^{-\gamma} d\xi \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx. \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$\tilde{L} \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right) v(y) = C_{\mu,n} \int_{\mathbb{R}_n} x^{-\gamma} dx \int_{\mathbb{R}_n} \overline{\mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi)} \overline{a(x,\xi)} v(x) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Тогда

$$\left(L \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right) u, v \right)_{-\gamma} = \left(u, \tilde{L} \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right) v \right)_{-\gamma}.$$

Таким образом, оператор $\tilde{L} \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)$ с комплексно сопряженным символом $\overline{a(x,\xi)}$ оказывается формально сопряженным оператору $L \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)$.

Подобно (5.1.5) имеем следующую формальную запись действия сопряженного оператора

$$L \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right) u(x) = \mathbf{F}^{-1} \left[\mathbb{F}_{ev} \left[\overline{a(x,\xi)} u \right] \right], \quad (5.1.7)$$

где $\overline{a(x,\xi)}$ — символ, комплексно сопряженный символу (5.1.6).

5.1.5 Пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с $D_{B_{-\gamma}}^\alpha$ оператором.

Вводится следующее пространство Соболева—Киприянова: для любого вещественного s через $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим пополнение множества $S_{ev,-\gamma}$ по норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathbf{F}[u](\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad \xi^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n |\xi_i|^{-\gamma_i}, \quad (5.1.8)$$

где $\mathbf{F}[u]$ — полное $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова.

В рамках наших исследований нечетным по переменной ξ_i символом линейного сингулярного дифференциального оператора является производная четной по ξ_i функции $a(x,\xi)$. В результате первая производная интегрированием по частям окажется примененной к функции $x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x)}{\partial x_i}$. При этом $\mathbb{J}$ -преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова с ядром $\mathbf{J}_\mu$ превращается в $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя четной функции ($\mathbb{F}_{ev}$) с ядром $\mathbb{J}_{\mu_i}$, что приводит к равенству

$$x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x)}{\partial x_i} \right) = B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x) = -\xi_i^2 \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x).$$

После таких действий операторы с «нечетным» символом окажутся операторами с «четным» символом и мы имеем дело с $\mathbb{F}_{ev}$ преобразованием, для которого соответствующие результаты приведены в пункте 4.2.

Пусть $u \in S'_{ev,-\gamma}$. В рамках весовой билинейной формы (5.1.1) для любой функции $\varphi \in S_{ev}$ действие полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова принимает следующий вид:

$$(\mathbf{F}u, \varphi)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \mathbf{F}[\varphi](\xi) \xi^{-\gamma} d\xi = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \mathbb{F}_{ev}[\varphi](\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Если же регулярный функционал u представлен производной четной функции по координате x_i своего аргумента, то

$$(\mathbf{F}u, \varphi'_{x_i})_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \xi_i \mathbb{F}_{ev}[\varphi](x) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Сказанное означает, что введенное нами пространство $H^s_{-\gamma}$ чаще окажется пространством функций с конечной нормой

$$\|u\|_{H^s_{-\gamma}}^2 = \int_{\mathbb{R}_n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (5.1.9)$$

где $\widehat{u}$ — четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

Утверждение 5.1.1. Пусть $u = u(x) \in S_{ev,-\gamma}$, $-1 < -\gamma_i < 0$. При целом неотрицательном $s = t$ норма (5.1.8) эквивалентна норме

$$\|u\|_{H^m_{-\gamma}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}_n^+} \left| D_{B_{-\gamma}}^\alpha u(x) \right|^2 x^{-\gamma} dx. \quad (5.1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства Планшереля для полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова (см. теорему 4.2.3 и замечание 5.1.1) вытекает равенство

$$\left\| \sum_{|\alpha| \leq s} \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)^s u \right\|_{L_2^{-\gamma}} = \|\mathbf{F}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}}, \quad (5.1.11)$$

где $\psi = \sum_{|\alpha| \leq s} \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)^s u$. Но

$$\|\mathbf{F}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}} = \left\| \sum_{i=1}^n |\xi^\alpha|^2 \widehat{u} \right\|_{L_2^{-\gamma}}.$$

Теперь утверждение 5.1.1 для $t \in \mathbb{N}$ вытекает из практически очевидного неравенства

$$C^{-1}(1 + |\xi|^2)^s \leq \sum_{i=1}^n |\xi^\alpha|^2 \leq C(1 + |\xi|^2)^s$$

При $s = 0$ норма (5.1.11) совпадает с $L_2^{-\gamma}$ -нормой функции $\mathbf{F}[u]$, что вытекает из равенства (5.1.10).

Доказательство закончено.

5.2 Сингулярные $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова

Формулы (5.1.5) и (5.1.7) приводят к общим конструкциям операторов, включающих линейные сингулярные операторы типа $L \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)$.

Поскольку норма, записанная в образах полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова, приведет к умножению на символ, представляющий многочлен порядка m , то для многочлена с ограниченными коэффициентами справедливо неравенство

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha(x)| (1 + |\xi|)^\alpha.$$

Определение 5.2.1. Через $\Xi_{-\gamma}^m = \Xi_{-\gamma}^m(\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных по Киприянову по каждой координате аргумента функций $a(x, \xi)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} \right)_x \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m - |\beta|}{2}},$$

константа $C_{\alpha, \beta}$ не зависит от x и ξ . Класс функций $\Xi_{-\gamma}^m$ будем называть пространством символов порядка m .

Из определения 5.2.1 следует

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x \rightarrow \eta} \left[\left(1 + D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} \right)_x^p \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi a(x, \xi) \right] &= \\ &= (1 + |\eta|^2)^p \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m - |\beta|}{2}}, \end{aligned}$$

где ${}^1\hat{a}$ — обозначение полного $\mathbb{J}$ -преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова функции $a(x, \xi)$ по первой переменной. Следовательно, для любого положительного числа p найдется такая константа C , что

$$\left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) \leq C (1 + |\eta|^2)^{-p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m - |\beta|}{2}}.$$

Определение 5.2.2. Операторы, действующие на функцию $u \in S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$, по формулам

$$\mathbf{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (5.2.1)$$

$${}^t\mathbf{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{J}_\mu(x\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (5.2.2)$$

будем называть сингулярными $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальными операторами Киприянова—Катрахова ($\mathbb{K}$ -ПДО).

5.2.1 Основные теоремы сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова—Катрахова

Теорема 5.2.1. Сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО (5.2.1) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$, является оператором порядка m , т.е.

$$\|\mathbf{A}u\|_{H_{-\gamma}^s} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m}}.$$

Теорема 5.2.2. Сингулярный $\mathbb{K}$ -ПДО $\mathbf{A} - \mathbf{A}$ с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$, является оператором порядка $m - 1$, т.е.

$$\|(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})u\|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Теорема 5.2.3. Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_2}$, а $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — соответствующие этим символам сингулярные $\mathbb{K}$ -ПДО. Оператор $[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2]$ имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$, т.е.

$$\|[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2]u\|_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Доказательства приведенных выше теорем практически не отличаются от доказательств §4.4, поэтому мы их не приводим.

Список литературы

- [1] Агранович, М.С. Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы / М.С. Агранович // УМН. — 1965. — Т. 20. — С. 3—120.
- [2] Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Т. 1. — М.: Наука, 1965. — 295 с.
- [3] Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Т. 2. — М.: Наука, 1966. — 297 с.
- [4] Булатов, Ю.Н. Вычисление предфрактальной $k(\gamma)$ -размерности типа «пред-канторовской пыли» / Ю.Н. Булатов, В.А. Калитвин, Е.Л. Санина // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : Материалы 10-го международного семинара (Минск, 13—17 сентября 2021 г.). — Минск, 2021. — С. 20.
- [5] Булатов, Ю. Н. Неравенство Гординга для сингулярных J-псевдодифференциальных операторов Киприянова / Ю.Н. Булатов // Дифференциальные уравнения и их приложения : Сборник трудов Международной конференции (Казань, 06—07 июня 2024 г.). — Казань, 2024. — С. 34—35.
- [6] Булатов, Ю. Н. Об интеграле Ханкеля на основе решений сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром / Ю.Н. Булатов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, (Воронеж, 04—06 декабря 2023 г.). — Воронеж, 2024. — С. 46—48.
- [7] Булатов, Ю. Н. Обобщенный T-псевдосдвиг и формула Пуассона решения уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприянова / Ю.Н. Булатов // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2024 : Материалы международной Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В.П. Маслова (Воронеж, 26—30 января 2024 г.). — Воронеж, 2024. — С. 71—72.

- [8] Булатов, Ю.Н. Обобщенный T -сдвиг и некоторые свойства / Ю.Н. Булатов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции. Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, 27 января—01 февраля 2023 г.). — Воронеж, 2023. — С. 75—77.
- [9] Булатов, Ю. Н. Об одной задаче Коши для сингулярного волнового уравнения / Ю.Н. Булатов // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV : Материалы Международной Воронежской весенней математической школы (Воронеж, 26–30 апреля 2024 г.). — Воронеж, 2024. — С. 72—73.
- [10] Булатов, Ю.Н. Об одном интегральном преобразовании Бесселя / Ю.Н. Булатов // Школа молодых ученых: материалы областного профильного семинара по проблемам естественных наук (Липецк, 27 ноября 2024 г.). — Липецк, 2024. — С. 109—113.
- [11] Булатов, Ю.Н. Об одном элементарном неравенстве для обобщенных T -псевдосдвигов в $\mathbb{R}_1$ / Ю.Н. Булатов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции (Воронеж, 12—14 декабря 2022 г.). — Воронеж, 2023. — С. 18—22.
- [12] Булатов, Ю.Н. Оператор $B_{-\gamma}$ в весовой билинейной форме / Ю.Н. Булатов // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXIV : Материалы международной Воронежской весенней математической школы, посвящённой 115-летию со дня рождения академика Л.С. Понтрягина (Воронеж, 03—09 мая 2023 г.). — Воронеж, 2023. — С. 90–91.
- [13] Булатов, Ю.Н. О фундаментальном решении сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Ю.Н. Булатов // Школа молодых учёных : материалы областного профильного семинара по проблемам естественных наук (Липецк, 12 октября 2023 г.). — Липецк, 2023. — С. 123 —127.
- [14] Булатов, Ю.Н. Размерности фрактала типа «канторовской пыли», порожденные сферической симметрией / Ю. Н. Булатов, В. А. Калитвин, Е. Л. Санина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики : Сборник статей. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2021. — Вып. 15. — С. 51–64.

- [15] Булатов, Ю.Н. Теорема о среднем для К-гармонических функций / Ю.Н. Булатов, С.А. Рошчупкин, Е.Л. Санина // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : Материалы 11-го международного семинара (Минск, 16—20 сентября 2024 г.). — Минск, 2024. — С. 14—15.
- [16] Булатов, Ю. Н. Следствие из неравенства Петре для обобщенных Т-псевдосдвигов в $\mathbb{R}_1$ / Ю. Н. Булатов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2023. — № 27. — С. 73—80.
- [17] Булатов, Ю.Н. Фрактальная размерность фрактальных структур: новый взгляд на подход Хаусдорфа / Ю.Н. Булатов // Школа молодых ученых: материалы областного профильного семинара по проблемам естественных наук (Липецк, 14 октября 2021 г.). — Липецк, 2021. — С. 25—29.
- [18] Булатов, Ю.Н. Функция Грина для сингулярного оператора Киприянова / Ю.Н. Булатов // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна: Материалы международной конференции (Воронеж, 22—26 января 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 40—43.
- [19] Булатов, Ю. Н. J-Преобразования Бесселя К-распределений, порожденные интегралом Ханкеля / Ю.Н. Булатов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2024. — № 2. — С. 36—42.
- [20] Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. — М.: Издательство иностранной литературы, 1947. — 780 с.
- [21] Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
- [22] Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рошчупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 483—493.
Переводная версия: Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Problem for the Poisson Equation with a Singular Δ_B -Kipriyanov Operator / L.N. Lyakhov, Yu.N. Bulatov, S.A. Roshchupkin, E.L. Sanina // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, No. 1. — P. 491—501.
- [23] Житомирский, Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя //

- Я.И. Житомирский // Математический сборник. — 1955. — Т. 36 (78). — № 2. — С. 299—310.
- [24] Какичев, В.А. О свертках для интегральных преобразований / В.А. Какичев // Изв. АН БССР, Сер. : Физ.-мат. наук. — 1967. — № 22. — С. 48—57.
- [25] Катрахов, В.В. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов / В.В. Катрахов, Л.Н. Ляхов // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47. — № 5. — С. 681—695.
- [26] Катрахов, В.В. Сингулярные краевые задачи / В.В. Катрахов. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2024. — 509 с.
- [27] Киприянов И.А. Об одном операторе, порожденном преобразованием Фурье—Бесселя / И.А. Киприянов // Сибирский математический журнал. — 1967. — Т. 8. — № 3. — С. 601—620.
- [28] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические задачи / И.А. Киприянов. — М.:Наука, 1997. — 199 с.
- [29] Киприянов, И.А. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И.А. Киприянов, В.В. Катрахов // Математический сборник. — 1977. — Т. 104(146). — № 1(9). — С. 49—68.
- [30] Киприянов, И.А. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига / Киприянов И.А., Ключанцев М.И. // Сибирский математический журнал. — 1970. — Т. 2. — № 5. — С. 1060—1083.
- [31] Киприянов, И.А. Об одном классе псевдодифференциальных операторов / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // Доклады Академии наук СССР. — 1974. — 218:2. — С. 278—280.
- [32] Колокольцов, В.Н. Обобщенные случайные блуждания в непрерывном времени (СТRW), субординация временами достижения и дробная динамика / В.Н. Колокольцов // Теория вероятн. и ее примен. — 2008. — Т. 53. — № 4. — С. 684—703.
- [33] Крейн С.Г. Функциональный анализ / ред. Л.А. Люстерник, А.Р. Янпольский, С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1964. — 424 с.
- [34] Левитан, Б.М. Применение операторов обобщённого сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка / Б.М. Левитан // УМН. — 1949. — Т. 4. — № 1. — С. 3—112.

- [35] Левитан, Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. — 1951. — Т. 6. — № 2. — С. 102—143.
- [36] Левитан, Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига / Б.М. Левитан. — М.: Наука, 1973. — 312 с.
- [37] Ляхов, Л.Н. Граничные задачи для В-эллиптических уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Ляхов Лев Николаевич. — Минск, 1982. — 133 с.
- [38] Ляхов Л.Н. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с D_B -оператором Бесселя / Л.Н. Ляхов // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — Москва, 2012. — Т. 278. — С. 148—160.
- [39] Ляхов, Л.Н. Аналог формулы Пуассона для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с операторами Бесселя с отрицательными параметрами / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXIV : Материалы международной Воронежской весенней математической школы, посвящённой 115-летию со дня рождения академика Л.С. Понтрягина (Воронеж, 03—09 мая 2023 г.). — Воронеж, 2023. — С. 264—266.
- [40] Ляхов, Л.Н. Задача Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : Материалы 11-го международного семинара (Минск, 16—20 сентября 2024 г.). — Минск, 2024. — С. 40—41.
- [41] Ляхов, Л.Н. О произведении и коммутаторе сингулярных $\mathbf{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова в $\mathbb{R}_n$ / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // И.А. Киприянов — 100 : Сборник статей, посвященных 100-летию со дня рождения Киприянова Ивана Александровича, выдающегося подвижника математики. Крупного ученого, специалиста в области сингулярных дифференциальных уравнений и весовых функциональных пространств. — Воронеж, 2023. — С. 149—174.
- [42] Ляхов, Л.Н. Формулы Грина для Δ_B -оператора Киприянова в весовой линейной форме / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — Т. 231. — С. 68—73.
- [43] Ляхов, Л.Н. Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова, порожденные $\mathbf{J}$ -преобразованием Бесселя / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов,

- С.А. Рощупкин // Проблемы математического анализа. — 2023. — № 121. — С. 71–82.
- [44] Ляхов, Л.Н. Формула Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61, № 2. — С. 229–241.
- [45] Ляхов, Л.Н. Оператор псевдосдвига, коммутирующий с D_B оператором Киприянова / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции (Воронеж, 03–09 мая 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 196–197.
- [46] Ляхов, Л.Н. Псевдодифференциальные операторы Киприянова / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2024 : Материалы международной Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В.П. Маслова (Воронеж, 26–30 января 2024 г.). — Воронеж, 2024. — С. 158–161.
- [47] Ляхов, Л.Н. Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 516–526.
- [48] Ляхов, Л.Н. Полное преобразование Фурье–Бесселя некоторых основных функциональных классов / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2013. — № 11. — С. 85–92.
- [49] Ляхов, Л.Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
- [50] Ляхов, Л.Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, № 4. — С. 517–528.
- [51] Никольский, С.М. Курс математического анализа / С.М. Никольский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 592 с.
- [52] Обобщение теоремы Асгейрссона–Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения и их приложения : Сборник трудов Международной конференции (Казань, 06–07 июня 2024 г.). — Казань, 2024. — С. 84–85.

- [53] Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654—1665.
Переводная версия: Pseudoshift and the Fundamental Solution of the Kipriyanov Δ_B -Operator / L.N. Lyakhov, Yu.N. Bulatov, S.A. Roshchupkin, E.L. Sanina // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, No. 12. — P. 1639—1650.
- [54] Пулькин, С.П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ / С.П. Пулькин // Учен. зап. Пед. института. — 1958. — Т 21. — С. 3—55.
- [55] Сабитов, К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 352 с.
- [56] Сабитов, К.Б. О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье-Бесселя / К.Б. Сабитов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2022. — № 11. — С. 89—96.
- [57] Сабитов, К.Б. Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 123—135.
- [58] Сабитов, К.Б. Вторая начально-граничная задача для В-гиперболического уравнения / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2019. — № 10. — С. 75—86.
- [59] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
- [60] Санина Е.Л. Оператор Лапласа—Киприянова на сфере / Е. Л. Санина, Ю. Н. Булатов, Е. С. Терлецкая // Современные методы теории краевых задач : Материалы Международной конференции (Воронеж, 03–09 мая 2021 г.). — Воронеж, 2021. — С. 214–216.
- [61] Терсенов, С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А. Терсенов. — Новосибирск : НГУ, 1973. — 144 с.
- [62] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
- [63] Толстов, Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. — М.: Наука, 1980. — 381 с.

- [64] Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М.: Мир, 1980. — 664 с.
- [65] Трикоми, Ф. Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. — М.: Издательство иностранной литературы, 1957. — 443 с.
- [66] Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52—65.
Переводная версия: Fundamental Solution of a Singular Bessel Differential Operator with a Negative Parameter / L.N. Lyakhov, E.L. Sanina, S.A. Roshchupkin, Yu.N. Bulatov // Russian Mathematics. — 2023. — Vol. 67, No. 7. — P. 43—54.
- [67] Шварц, Л. Математические методы для физических наук: С участием Дениз Юэ: Пер. с франц. / Л. Шварц. — М.: Мир, 1965. — 412 с.
- [68] Шишкина, Э.Л. Единственность решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу / Э.Л. Шишкина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1688—1693.
- [69] Янке, Е. Специальные функции, формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
- [70] J-функции Бесселя и их применения в задачах математической физики : учебно-методическое пособие. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2015. — 96 с.
- [71] Bulatov, Yu. N. Commutators of singular $\mathbb{K}$ -pseudodifferential operators in $\mathbb{R}_n$ / Yu.N. Bulatov // Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications. — 2024. — Vol. 15, Is. 4. — P. 87.
- [72] Bulatov, Yu. N. Gording's Inequality for Singular $\mathbf{J}$ -pseudodifferential Kipriyanov Operators / Yu.N. Bulatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No 11. — P. 5346—5354.
- [73] Bulatov, Yu.N. The Hankel—Kiprianov—Katrakhov Transform and Singular $\mathbf{K}$ -Pseudodifferential Operators / Yu.N. Bulatov // Mathematical Notes of NEFU. — 2024. — Vol. 31, No. 1. — P. 21—34.
- [74] Garding, L. Dirichlet's problem for elliptic partial differential equations / L. Garding // Math.Scand. — 1953. — Vol. 1. — P. 55—72.

- [75] Garra, R. Random flights related to the Euler—Poisson—Darboux equation / R. Garra E. Orsingher // Markov processes and related fields. — 2016. — Vol. 22. — P. 87—110.
- [76] Hörmander, L. Pseudo-differential Operators and Non-elliptic Boundary Problems / L. Hörmander // Annals of Mathematics. — 1966. — Vol. 83. — P. 129—209.
- [77] Kohn, J.J. An algebra of pseudo-differential operators / J.J. Kohn, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1965. — Vol. 18. — P. 269—305.
- [78] Lyakhov, L. N. Composition and Commutator of Singular **J**-Pseudodifferential Kipriyanov Operators in $\mathbb{R}_N$ / L.N. Lyakhov, Yu.N. Bulatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, No 8. — P. 3438—3454.
- [79] Lyakhov, L.N. Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel $\mathbb{J}$ -transform / L.N. Lyakhov, S.A. Roshchupkin, Yu.N. Bulatov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 269, No. 2. — P. 205—216.
- [80] Lyakhov, L.N. A Priori Estimate for Solutions of Singular B-Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel ∂_B -Operators / L.N. Lyakhov, S.A. Roshchupkin // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 196. — P. 563—571.
- [81] Metzler, R. Fractional model equation for anomalous diffusion / R. Metzler, W.G. Glöckle, T.F. Nonnenmacher // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 1994. — Vol. 211, No 1. — P. 14—24.
- [82] Peetre, J. Another approach to elliptic boundary problems / J. Peetre // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — Vol. 14. — P. 711—731.
- [83] Seeley, R.T. Integro-Differential Operators on Vector Bundles / R.T. Seeley // Transactions of the American Mathematical Society. — 1965. — Vol. 117. — P. 167—204.
- [84] Weinstein, A. Selecta / A. Weinstein. — Pitman. — 1978.