На правах рукописи

Булатов Юрий Николаевич

B-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА—БЕССЕЛЯ—КИПРИЯНОВА

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, **Ляхов Лев Николаевич**.

Официальные оппоненты:

Сабитов Камиль Басирович, доктор физико-математических наук, профессор, институт механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, лаборатория «Механика твердого тела», главный научный сотрудник;

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, главный научный сотрудник.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Защита состоится «18» сентября 2025 года в 15:10 на заседании диссертационного совета 24.2.288.14 при Воронежском государственном университете по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, уч. корп. 1Б, ауд. 410П.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» и на сайте http://www.science.vsu.ru.

Автореферат разослан «   » июня 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.288.14
кандидат физико-математических наук, доцент Турбин М.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Теория сингулярных дифференциальных уравнений является одним из наиболее трудных разделов общей теории дифференциальных уравнений, этим и обусловлен интерес к ней. Одним из основоположников данной теории является И.А. Киприянов. Им исследованы весовые функциональные пространства на основе преобразований Фурье—Бесселя, разработаны подходы и методы решения сингулярных краевых задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя (далее — с.д. оператором Бесселя) $B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ с положительным параметром $\gamma > 0$, см. монографию[1]. В работах Пулькина[2] и его учеников изучены краевые задачи для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ при $p > 0$.

В 1980 году Иваном Александровичем было предложено исследовать задачи с с.д. оператором Бесселя с отрицательным параметром $-\gamma < 0$. Однако результаты по этой теме научных исследований не были опубликованы, так как возникшие трудности требовали введения принципиально нового математического аппарата по сравнению с известным в то время. Значительно позже, в 2010-х годах появились исследования профессора К.Б. Сабитова[3,4,5] и его учеников о задачах спектрального характера для B-гиперболических уравнений с оператором Бесселя с отрицательным параметром. Было использовано разложение функций в ряды Фурье—Бесселя и Дини по собственным функциям оператора Бесселя отрицательного порядка. В диссертации в некоторых доказательствах применена методика этих исследований. В 2020 г. опубликована совместная работа Л.Н. Ляхова и Е.Л. Саниной[6], где был введен сингулярный дифференциальный оператор Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^{n} B_{-\gamma_i}$ с отрицательными параметрами $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Было получено представление этого оператора на сфере. Этот результат лег в основу исследуемых в данной диссертации проблем. Представление оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ в виде оператора Бельтрами на сфере позволяет считать с.д. оператор Бесселя в качестве промежуточного между

[1] *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические задачи. М.:Наука, 1997.

[2] *Пулькин С.П.* Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ // Учен. зап. Пед. института. — 1958. — Т. 21. — С. 3—55.

[3] *Сабитов К.Б., Зайцева Н.В.* Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 123–133.

[4] *Сабитов К.Б., Зайцева Н.В.* Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2019. — № 10. — С. 75—86.

[5] *Сабитов К.Б.* О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье-Бесселя // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2022. — № 11. — С. 89—96.

[6] *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1610–1620.

оператором Лапласа в $\mathbb{R}_n=\{x:(x_1,\ldots,x_n)\}$ и оператором Лапласа в $\mathbb{R}_{n+1}$ см.[7]. Таким образом, в диссертации рассматриваются задачи в евклидовых пространствах, которым приписывается дробная размерность. Отсюда следует повышенный интерес и актуальность к исследованию сингулярных дифференциальных уравнений, инициированных еще четверть века назад.

Профессор С.М. Ситник указал автору диссертации, что часть его результатов следует из связи операторов Бесселя положительных и отрицательных параметров в виде соотношения Дарбу—Вайнштейна, данный факт использован в диссертации. Инструменты возникшего *весового гармонического анализа* потребовали дополнительных исследований.

При определении фундаментальных решений оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ возникли «обобщенные свертки», порожденные конструкцией, названной в диссертации «псевдосдвигом». Важно отметить, что псевдосдвиг эрмитов, в соответствующей билинейной форме, и коммутирует с оператором $B_{-\gamma}$. Оператор псевдосдвига ранее появился в исследованиях В.А. Какичева[8], им и его последователями изучались свертки, порожденные такой интегральной конструкцией. Также в диссертации построены новые классы операторов $\mathbb{T}$-сдвига и $\mathbb{T}$-квазисдвига, решившие проблему определения фундаментальных решений $\Delta_{B_{-\gamma}}$ оператора в произвольной точке области определения функций. Простым примером применения псевдосдвига является полученный аналог формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с одинаковыми отрицательными параметрами с.д. операторов Бесселя по времени и пространственной переменной. Постановка задачи Коши для такого уравнения задается в предельной форме С.А. Терсенова[9]. Решение получено в виде соответствующей формулы Пуассона, которая формально повторяет формулу доказанную Б.М. Левитаном[10] с положительными параметрами с.д. операторов Бесселя.

Известно, что сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя $B_{-\gamma}u(x)+u(x)=0$ имеет два линейно независимых решения, обозначенных $\mathbb{J}_{\pm\mu}(x)$. В работе используется $\mathbb{J}$-функция Бесселя положительного параметра $\mu=(\gamma+1)/2$. Оказалось, что через посредство псевдосдвига формулируется теорема сложения для $\mathbb{J}_\mu$-функции Бесселя: $\mathbb{T}_x^y\,\mathbb{J}_\mu(x)=\mathbb{J}_\mu(x)\,\mathbb{J}_\mu(y)$. На основе теоремы сложения в диссертации построен класс сингулярных псевдодиффе-

[7] *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.

[8] *Какичев В.А.* О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР, Сер.: Физ.-мат. наук. — 1967. — № 22. — С. 48—57.

[9] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973.

[10] *Левитан Б.М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // УМН. — 1951. — Т. 6. — № 2. — С. 102—143.

ренциальных операторов, названный в работе $\mathbb{J}$-*псевдодифференциальными операторами Киприянова.* Для данного класса псевдодифференциальных операторов доказаны теоремы о порядке, теорема о произведении и коммутаторе и аналог неравенства Гординга. В теории псевдодифференциальных операторов необходимо отметить работы Дж. Кона, Л. Ниренберга[11] и Л. Хёрмандера[12]. Результаты этих работ составляют основы теории псевдодифференциальных операторов, которую сегодня можно назвать классической. Существенные приложения и дальнейшее развитие даны в работах М.С. Аграновича, Л.Р. Волевича, В.В. Грушина, Дж. Дюстермаата, Ю.В. Егорова, Х. Куманого, Ф. Трева, О.А. Олейника, Е.В. Радкевича, М. Тейлора, М.А. Шубина и др.

Краевые задачи для В-эллиптических уравнений с операторами Бесселя положительных индексов γ исследовались в работах Я.И. Житомирского, Л.А. Иванова, В.В. Катрахова, М.И. Ключанцева, Л.Н. Ляхова, Ф.Г. Мухлисова, С.М. Ситника, И.П. Половинкина, Э.Л. Шишкиной и др. В диссертации параметр оператора Бесселя всегда дробный, поскольку $-\gamma\in(-1,0)$. Исследованный в диссертации класс сингулярных псевдодифференциальных операторов может служить для описания дробных степеней соответствующих сингулярных дифференциальных операторов. Уравнения с дробной степенью оператора Бесселя моделируют случайное блуждание частницы. Такие модели рассмотрены Р. Гаррой и Е. Орсингером[13]. Дробные степени дифференциальных операторов и соответствующие дифференциальные уравнения, описывающие случайные блуждания в непрерывном времени рассмотрены В.Н. Колокольцовым[14]. Уравнения в частных производных дробного порядка изучены А.В. Псху[15].

Приведенные сведения также подчеркивают актуальность темы исследований диссертации.

Цели и задачи исследования: построить теорию сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих операторы Бесселя с отрицательным параметром. Для этого необходимо:

---

[11] *Kohn J.J., Nirenberg L.* An algebra of pseudo-differential operators // Comm. Pure Appl. Math. — 1965. — Vol. 18. — P. 269—305.

[12] *Hörmander L.* The calculus of Fourier integral operators, Conference on Prospect in Mathematics, 1970

[13] *Garra R., Orsingher E.* Random flights related to the Euler—Poisson—Darboux equation // Markov processes and related fields. — 2016. — Vol. 22. — P. 87—110.

[14] *Колокольцов В.Н.* Обобщенные случайные блуждания в непрерывном времени (CTRW), субординация временами достижения и дробная динамика // Теория вероятн. и ее примен. — 2008. — Т. 53. — № 4. — С. 684—703.

[15] *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005.

1. Построить решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с с.д. операторами Бесселя отрицательного параметра, с использованием введенных операторов $\mathbb{T}$-псевдосдвига и $\mathbb{T}$-сдвига.

2. Найти фундаментальное решение с.д. оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной точке полуоси $[0,\infty)$. Используя найденное фундаментальное решение с.д. оператора $B_{-\gamma}$ и $\mathbb{T}$-сдвиг найти фундаментальное решение для оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с особенностью в произвольной точке из евклидова n-полупространства $\overline{\mathbb{R}^+_n} = \{x : \ x_i \geq 0\}$.

3. Привести формулы Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного B-ультрагиперболического уравнения.

4. Исследовать сингулярные $\mathbb{J}$-псевдодифференциальные операторы, созданные на базе $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Данные операторы включают линейные сингулярные обыкновенные дифференциальные операторы, состоящие из неотрицательных степеней оператора $B_{-\gamma}$.

Научная новизна и значимость полученных результатов. В рамках исследования были изучены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром. Этот случай специфичен тем, что для его анализа приходится использовать перенормированные бесселевы функции, отличающиеся от общеупотребительных степенным множителем. Представлен обоснованный переход на язык таких функций (билинейные формы, ортогональность, интегральное преобразование, аналог оператора сдвига, теорема сложения и др.). Был получен ряд новых результатов и установлена связь операторов типа Бесселя с новыми классами псевдодифференциальных операторов. Одной из основных задач было нахождение фундаментальных решений оператора Киприянова. В общем случае фундаментальное решение с особенностью в произвольной точке n-полупространства найдено через посредство интегрального оператора типа «сдвига». Все результаты, полученные в работе, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании решений и других классов дифференциальных уравнений. Кроме того, возможно использование результатов диссертационного исследования при чтении курсов по выбору в университетах для магистрантов и аспирантов физико-математических специальностей.

Методология и методы исследования. В работе используются интегральные преобразования Фурье, Бесселя и Киприянова—Катрахова, а также методы теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений и методы, развитые в работах научной школы И.А. Киприянова при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту. Все результаты диссертационной работы являются новыми и получены лично автором. Из них выделим:

1. Теорема сложения для $\mathbb{J}_\mu$-функции Бесселя.

2. Фундаментальные решения с.д. оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной точке полуоси, а также фундаментальное решение оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ с особенностью в произвольной точке из евклидова n-полупространства.

3. Экстремальное свойство K-гармонических функций и теоремы о единственности решения внутренней и внешней задач Дирихле с оператором $\Delta_{B_{-\gamma}}$.

4. Теоремы о порядке, теорема о произведении и коммутаторе для сингулярных $\mathbb{J}$-псевдодифференциальных операторов Киприянова и соответствующий аналог неравенства Гординга.

5. Теоремы о порядке и теорема о произведении для сингулярных $\mathbb{J}$-псевдодифференциальных операторов Киприянова—Катрахова.

Степень достоверности результатов полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах и конференциях, а также публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация результатов диссертации. Результаты исследования докладывались и обсуждались *на международном семинаре* AMADE (Минск, 2021, 2024 гг.); *на научно-исследовательском семинаре* факультета ВМК МГУ «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» под руководством проф. Ломова И.С.; *на международных научных конференциях:* «Современные проблемы математики и физики» (Стерлитамак, 2021 г.), «Дифференциальные уравнения и динамические системы» (Суздаль, 2022, 2024 гг.), «Воронежская весенняя математическая школа» (Воронеж, 2021—2024 гг.), «Воронежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 2022—2025 гг.), «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2022—2024 гг.), «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2021, 2023 гг.), «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Казань, 2024 г.), «Математика в созвездии наук»» (Москва, 2024 г.);

на областном профильном семинаре «Школа молодых ученых» (Липецк, 2021, 2023, 2024 гг.).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантом РНФ № 24–21–00387 (исполнитель, 2024–2025).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–15]. В совместных статьях [4–9, 13–15] профессору Л.Н. Ляхову принадлежит постановка задач. Доказательства основных результатов по построению и исследованию решений получены лично диссертантом. Работы [1–11] опубликованы в журналах из перечня ВАК Минобрнауки РФ. Опубликовано также 19 материалов конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка цитируемой литературы, включающего 84 наименований. Общий объем диссертации 118 с.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается обоснование актуальности выбранной темы, формулируется цель исследования, приводятся методы исследования, краткий обзор содержания диссертации и основные научные результаты. Нумерация изложенных ниже теорем и следствий совпадает с нумерацией в диссертации.

В **главе 1** вводятся основные обозначения и определения, в §1.1 приведены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя

$$B_{-\gamma}\, u(x)+u(x)=0,\ B_{-\gamma}=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\gamma}{x}\,\frac{d}{dx},\quad -1<-\gamma<0\,,\quad x>0$$

В работе они представлены функциями:

$$\mathbb{J}_\mu(x)=\Gamma(1+\mu)\,2^\mu\,x^\mu\;J_\mu(x),\quad \mathbb{J}_{-\mu}(x)=\Gamma(1-\mu)\,2^{-\mu}\,x^\mu J_{-\mu}(x)\,,$$

где $\mu=(\gamma+1)/2$, $J_{\pm\mu}$ — функции Бесселя первого рода.

В §1.2 оператор $B_{-\gamma}$ рассмотрен в произвольной весовой билинейной форме

$$(u,v)_\omega=\int_0^\infty u(x)\;v(x)\;x^\omega\;dx\,, \tag{1}$$

в рамках которой он может быть не самосопряженным. Определение (1) порождает весовое функциональное пространство $L_2^\omega=\{f: x^\omega f\in L_2(0,\infty)\}$.

В качестве основного пространства функций рассматривается подпространство Шварца $S_{ev}=S_{ev}[0,\infty)$, состоящее из функций быстро убывающих вместе со всеми производными, четных по Киприянову[1]. Соответствующее пространство функционалов будем обозначать $S'_{ev,\omega}$.

Первым основным результатом первой главы является теорема:

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\gamma\in(0,1)$ *и* ω *- произвольное действительное число,* $u(x)$ *и* $v(x)$ *принадлежат* S_{ev}*, тогда справедлива формула*

$$(B_{-\gamma}u,v)_\omega=\left(u,\left[B_{\gamma+2\omega}+\frac{(\gamma+\omega)(\omega-1)}{x^2}\right]\,v\right)_\omega\,.$$

В §1.3 доказана ортогональность $\mathbb{J}_\mu$-функций Бесселя, в §1.4 получено равенство Ганкеля на основе $\mathbb{J}_\mu$-функций Бесселя и введены четные $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя, что является вторым основным результатом первой главы:

Теорема 1.4.1. *Пусть* $\gamma=2\mu-1$ *и* $\mu\in\left(\frac{1}{2},1\right)$*. Если* $f\in L_2^{-\mu}(0,\infty)=\{f:\ x^{-\mu}f(x)\in L_2(0,\infty)\}$*, то*

$$f(x)=C_\mu\int_0^\infty\mathbb{J}_\mu(x\xi)\,\xi^{-2\mu+1}\,d\xi\,\int_0^\infty\mathbb{J}_\mu(y\xi)y^{-2\mu+1}\,f(y)\,dy\,.$$

Определение 1.4.1. *Прямым и обратным* $\mathbb{J}$*-преобразованиями Бесселя соответственно будем называть следующие выражения:*

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[f](y)=\widehat{f}(\xi)=\int_0^\infty\mathbb{J}_\mu(y\xi)\,f(y)\,y^{-\gamma}\,dy\,,\ \mathbb{F}^{-1}_{B_{-\gamma}}[f](\xi)=C_\mu\int_0^\infty\mathbb{J}_\mu(x\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,\xi^{-\gamma}\,d\xi\,.$$

Глава 2 посвящена изучению интегральных операторов $\mathbb{T}$-псевдосдвига, $\mathbb{T}$-сдвига и $\mathbb{T}$-квазисдвига. В §2.1 был получен интеграл Пуассона для $\mathbb{J}$-функций Бесселя положительного порядка В §2.2 приведена теорема сложения для $\mathbb{J}$-функций Бесселя положительного порядка $\mathbb{J}_\mu(x\xi)\ \mathbb{J}_\mu(y\xi)=\mathbb{T}_x^y\,\mathbb{J}_\mu(x\xi)$, $x\,,y\,,\,\xi\in\mathbb{R}_1^+$, где $\mathbb{T}$-псевдосдвиг, имеет вид

$$\mathbb{T}_x^yf(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}\int\limits_0^\pi(xy)^{\gamma+1}\frac{f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha)}\right)^{\gamma+1}}\,\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha.\qquad(2)$$

В §2.3 приведены основные свойства обобщенного $\mathbb{T}$-псевдосдвига и в §2.4 доказан аналог неравенства Петре:

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\xi\,,\eta\,,\tau$ *точки пространства* $\mathbb{R}_1^+$ *и пусть* p *и* q *произвольные достаточно большие числа. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\mathbb{T}_\eta^\xi\left(1+\eta^2\right)^{-p}\mathbb{T}_\tau^\eta\left(1+\tau^2\right)^{-q}\eta^{-\gamma}\,d\eta\ \leqslant\ C_\gamma\ \mathbb{T}_\tau^\xi\left(1+\tau^2\right)^{-p}\ .$$

В параграфах 2.5–2.6 вводятся операторы $\mathbb{T}$-сдвига и $\mathbb{T}$-квазисдвига

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y\,f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}\int\limits_0^\pi\frac{x^{\gamma+1}f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha)}\right)^{\gamma+1}}\,\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha\,,$$

$$\overset{**}{\mathbb{T}}{}_x^y\,f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)}\int\limits_0^\pi\frac{y^{\gamma+1}f\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha)}\right)}{\left(\sqrt{(x^2+y^2-2xy\,\cos\alpha)}\right)^{\gamma+1}}\,\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha\,,$$

Доказывается принадлежность $\mathbb{T}$-сдвига классу обобщенных сдвигов Левитана и приведены свойства $\mathbb{T}$-сдвига и $\mathbb{T}$-квазисдвига.

Параграф 2.7 посвящен решению задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу—Киприянова

$$B_{-\gamma,t}\,u(x,t) = B_{-\gamma,x}\,u(x,t). \tag{3}$$

Постановка задачи Коши: найти функцию $u(x,t)\in S_{ev}$, удовлетворяющую следующим начальным условиям в предельной форме С.А. Терсенова

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{\gamma+1}}\,u(x,t) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0. \tag{4}$$

Вторым основным результатом второй главы является теорема:

Теорема 2.7.1. *Пусть $f(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая четная по Киприянову функция. Тогда решение задачи Коши (3), (4) определено следующей формулой Пуассона*

$$u(x,t) = \mathbb{T}^t f(x) = \frac{\Gamma\left(\mu+1\right)(xt)^{2\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int\limits_0^\pi \frac{f\left(x \overset{\alpha}{\to} t\right)}{\left(x \overset{\alpha}{\to} t\right)^{2\mu}}\sin^{2\mu}\alpha d\alpha. \tag{5}$$

Решение, определяемое формулой (5), единственно.

В §2.8 приведены формулы Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного B-ультрагиперболического уравнения

$$\left(\Delta_{B_\beta}\right)_y u(x,y) = \left(\Delta_{B_\gamma}\right)_x u(x,y), \tag{6}$$

где $x\in\mathbb{R}^+_n$, $y\in\mathbb{R}^+_m$, координаты мультииндексов $\beta_i>-1$ и $\gamma_i>-1$. Размерностью операторов в уравнении (6) являются числа $m+|\beta|>0$ и $n+|\gamma|>0$.

Постановка задачи Коши: найти функцию $u\in C^2_{ev}\left(\overline{\mathbb{R}^+_n}\right)$ такую, что

$$u(x,y)\bigg|_{|y|=0} = f(|x|)\ , \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y_i}\bigg|_{y_i=0} = 0\ , \quad \forall\ i=\overline{1,n}\ . \tag{7}$$

И пусть выполнено условие Киприянова о размерности Δ_B операторов слева и справа уравнения (6):

$$n+|\gamma|-1 = m+|\beta|-1 = s. \tag{8}$$

Третьим основным результатом второй главы является теорема:

Теорема 2.8.1. *Пусть координаты мультииндексов β и γ удовлетворяют условиям $\beta_i>-1$, $\gamma_i>-1$, тогда решение задачи Коши (6) с условиями (7) и (8) существует и представлено следующими формулами:*

1. Если $s>0$, то решение задачи Коши (6) определено первой формулой Пуассона:

$$u(x,y) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)}\ \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x|\ |y|\ \cos\alpha}\right)\ \sin^{2s}\alpha\ d\alpha.$$

2. Для $s=0$ решение задачи (6) имеет вид формулы Даламбера:

$$u(x,y)=\frac{f(|x|+|y|)+f(|x|-|y|)}{2}.$$

3. Пусть $0>s>-1$, тогда решение задачи Коши (6) определено второй формулой Пуассона:

$$u(x,y)=\mathbb{T}^{|y|}f(x)=\frac{\Gamma\left(s+1\right)(xy)^{2s}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(s+\frac{1}{2})}\int\limits_0^\pi\frac{f\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\ \cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\ \cos\alpha}\right)^{2s}}\ \sin^{2s}\alpha d\alpha\,.$$

Глава 3 посвящена нахождению фундаментальных решений оператора $B_{-\gamma}$ и $\Delta_{B_{-\gamma}}$-оператора Киприянова. В §3.1 найдено фундаментальное решение с.д. оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной точке полуоси. Функционал Дирака-Киприянова определен равенством

$$(\delta_{-\gamma},\,\varphi)_{-\gamma}=\varphi(0),\ \forall\,\varphi\in S_{ev}.$$

Согласно весовой билинейной форме (1) и теореме 1.2.1 имеем

$$(B_{-\gamma}u,v)_{-\gamma}=(u,B_{-\gamma}v)_{-\gamma}\ \ \textit{и}\ \ (B_{-\gamma}u,v)_1=(u,B_{\gamma+2}\,v)_1\,.$$

Следовательно возможно два подхода к определению фундаментального решения с.д. оператора $B_{-\gamma}$ в функциональных пространствах $L_2^{-\gamma}$ и в L_2^1 соответственно. Соответствующие пространства обобщенных функций обозначим $S'_{ev,-\gamma}$ и $S'_{ev,1}$.

Первый подход. Фундаментальное решение с.д. оператора $B_{-\gamma}$ в $L_2^{-\gamma}(0,\infty)$ определяется как обобщенная функция $\mathcal{E}\in S'_{ev,-\gamma}$, удовлетворяющая равенству $B_{-\gamma}\mathcal{E}=\delta_{-\gamma}$ или, что тоже самое, $(\mathcal{E},\,B_{-\gamma}\varphi)_{-\gamma}=\varphi(0)$.

Теорема 3.1.1. *Пусть $Z(x)$ регулярный функционал из $S'_{ev,-\gamma}$ и пусть*

$$\lim_{x\to 0}x^{-\gamma}\frac{d}{dx}Z(x)=1,\quad 0<\gamma<1.$$

Если в области $x{>}0$ функция $Z=Z(x)$ удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению

$$B_{-\gamma}Z(x)=0,\quad 0<\gamma<1\,,$$

то в смысле обобщенных функций S'_{ev} функция Z есть фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в пространстве $L_2^{-\gamma}$.

Следствие 3.1.1 *Фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ в смысле обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ является функция $\mathcal{E}_{-\gamma}(x)=x^{\gamma+1}/(\gamma+1)$.*

Второй подход. Фундаментальным решением с.д. оператора $B_{-\gamma}$ в пространстве L_2^1 будем называть регулярную обобщенную функцию $\mathcal{E}_1$ удовлетворяющую тождеству $(\mathcal{E}_1,B_{\gamma+2}\,\varphi)_1=\varphi(0)$.

Теорема 3.1.2. *Пусть $Z(x)$ регулярный функционал из $S'_{ev,1}$ и пусть в области $x>0$ функция Z одновременно удовлетворяет уравнениям первого и* *второго порядков*

$$x\ Z'(x) - (\gamma+1)\ Z(x) = -1\ , \qquad B_{-\gamma}Z(t)=0, \quad 0<\gamma<1.$$

Тогда в смысле обобщенных функций $S'_{ev,1}$ функция Z есть фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ в $L_2^1(0,\infty)$.

Следствие 3.1.2. *Фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ в смысле обобщенных функций $S'_{ev,1}$ является функция $\mathcal{E}_1(x)=(x^{\gamma+1}+1)/(\gamma+1)$.*

Из представленных выше фундаментальных решений оператора $B_{-\gamma}$, в пространствах весовых обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ и $S'_{ev,1}$ видно, что они отличаются лишь слагаемой константой.

Первым основным результатом третьей главы является теорема:

Теорема 3.1.3. *В пространствах весовых обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ и $S'_{ev,1}$ фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ с центром в начале координат является функция $\mathcal{E}(x)=\frac{x^{\gamma+1}+1}{\gamma+1}$. В пространстве весовых обобщенных функций $S'_{ev,-\gamma}$ фундаментальным решением оператора $B_{-\gamma}$ с особенностью в произвольной (фиксированной) точке $y\in\mathbb{R}_1^+$ является функция*

$$\mathcal{E}_{-\gamma}(x,y)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\ (x\,y)^{\gamma+1}}{\gamma\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_0^\pi\left[\frac{1}{(x^2+y^2-2xy\cos\alpha\,)^{\frac{\gamma+1}{2}}}+1\right]\,\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha.$$

В §3.2 найдены фундаментальное решения Δ_B-оператора.

Определение 3.2.1. *δ-Функционалом Дирака—Киприянова, сосредоточенным в произвольной точке $x\in\overline{\mathbb{R}_n^+}$ будем называть распределение $\mathbb{T}_x^y\delta_1\in S'_{ev,1}(\mathbb{R}_n^+)$, действие которого определено формулой*

$$(\mathbb{T}_x^y\delta_1,\,\varphi)_{-\gamma}=(\delta_1,\overset{**}{\mathbb{T}_x^y}\,\varphi)_1=\varphi(y)\,.$$

Вторым основным результатом третьей главы являются, найденные фундаментальные решения $\Delta_{B_{-\gamma}}$ оператора. Их ищем в классе радиальных функций $f{=}f(r)\,,\ r{=}|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. В работе[5] для оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ получена формула:

$$\Delta_{B_{-\gamma}}f(|x|)=B_\mu f(r), \qquad \mu=n-|\gamma|-1, \ \ \text{где}\ \ n-|\gamma|>0.$$

Возможны три случая: A) $\ n-|\gamma|>1$; B) $\ n-|\gamma|=1$; C) $\ n-|\gamma|<1$.

Случай A. Фундаментальное решение из $S'_{ev,\mu}$ такого оператора имеет вид:

$$E_A=T_{|x|}^{|y|}\ \mathcal{E}_A=T_{|x|}^{|y|}\ |x|^{2-n-|\gamma|},$$

где $T^{|y|}$ — обобщенный сдвиг Пуассона, отвечающий параметру $n{-}|\gamma|{-}1{>}0$.

Случай B. Фундаментальным решением при $y{=}0$ оказывается функция

$$\mathcal{E}_B(|x|)=\frac{1}{\gamma+1}\ |x|^{\gamma+1}\,,$$

к которой следует применить обычный сдвиг $x\to|x|-|y|$.

Случай C. Фундаментальное решение $\Delta_{B_{-\gamma}}$-оператора Киприянова с особенностью в точке $x=y$ из пространства распределений $S'_{ev,1}$ имеет вид

$$E_C\,(x,y)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{T}_{x_i}^{y_i}\mathcal{E}_C(x)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{T}_{x_i}^{y_i}\left(\frac{x_i^{\gamma_i+1}+1}{\gamma_i+1}\right).$$

В §3.3 приводится теорема о сферическом среднем для функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа для оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$. В качестве следствия доказана единственность решения внутренней и внешней задач Дирихле.

В **главе 4** изучаются $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя функций на $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Доказывается инвариантность пространства S_{ev} относительно $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя, приведены равенства Парсеваля и Планшереля и доказано, что $\mathbb{J}$-преобразование Бесселя осуществляет непрерывный в обе стороны изоморфизм пространств S_{ev}. Дано представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках $\mathbb{J}$-преобразований Бесселя

$$L(B_{-\gamma}^k)u(x)=\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{-1}\left[a(x,\xi)\;\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[u]\right], \tag{12}$$

где функция $a(x,\xi)=\sum_{k=0}^{m}a_k(x)\,(-\xi^2)^k$ является символом сингулярного дифференциального оператора $L(B_{-\gamma}^k)$. Подобно (12) получена формальная запись действия сопряженного оператора.

В пункте 4.3 вводятся пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с оператором $B_{-\gamma}$, задается топология в S_{ev}. Для любого вещественного s через $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_1^+)$ обозначено пополнение множества S_{ev} по норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2=\int_{\mathbb{R}_1^+}\left(1+|\xi|^2\right)^s\;|\widehat{u}(\xi)|^2\,\xi^{-\gamma}\,d\xi\;.$$

В пункте 4.4 задается пространство символов $\Xi_{-\gamma}^m$, вводятся сингулярные $\mathbb{J}$-псевдодифференциальные операторы Киприянова, доказываются основные теоремы о порядке и теорема о произведении.

Определение 4.4.2. *Сингулярные операторы, действующие на функцию, принадлежащую пространству $S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$, по формулам*

$$A\,u(x)=\int_{\mathbb{R}_1^+}\int_{\mathbb{R}_1^+}\mathbb{T}_x^y\mathbb{J}_\mu(x\xi)\;a(x,\xi)\;u(y)\;y^{-\gamma}\;dy\;\xi^{-\gamma}\,d\xi\;,$$

$$\mathcal{A}\,u(x)=\int_{\mathbb{R}_1^+}\int_{\mathbb{R}_1^+}\mathbb{T}_x^y\mathbb{J}_\mu(x\xi)\;a(y,\xi)\;u(y)\;y^{-\gamma}\;dy\;\xi^{-\gamma}\,d\xi\;,$$

называются $\mathbb{J}$-псевдодифференциальными операторами Киприянова.

Основным результатом четвертой главы являются следующие теоремы:

Теорема 4.4.1. *Сингулярный $\mathbb{J}$-псевдодифференциальный оператор (11) с символом $a(x,\xi)\in\Xi_{ev}^m$, является оператором порядка m, т.е.*

$$\|A\;u\|_{H_{-\gamma}^s}\leqslant C\;\|u\|_{H_{-\gamma}^{s+m}}.$$

Теорема 4.4.2. *Сингулярный $\mathbb{J}$-псевдодифференциальный оператор $A - \mathcal{A}$ с символом $a(x,\xi) \in \Xi^m_{ev}$, является оператором порядка $m-1$, т.е.*

$$\|(A-\mathcal{A})u\|_{H^{s-m+1}_{-\gamma}} \leqslant C\ \|u\|_{H^s_{-\gamma}}\ .$$

Теорема 4.4.3. *Пусть $a_1(x,\xi) \in \Xi^{m_1}_{ev}$, $a_2(x,\xi) \in \Xi^{m_2}_{ev}$, а A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные псевдодифференциальные операторы. Аналогичное утверждение справедливо для сингулярного псевдодифференциального оператора с символом, равным произведению символов операторов A_1 и A_2. Этот оператор будем обозначать $A_1 \circ A_2$. Оператор*

$$A_1 A_2 - A_1 \circ A_2$$

имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H^s_{-\gamma}\ (\mathbb{R}^+_1)$.

В **главе 5** в многомерном варианте представлены $\mathbb{J}_\mu$-функции Бесселя, заданы четные $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя в $\mathbb{R}^+_n$ и приведена теорема сложения для ядер многомерного $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя. Приведено рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}_\mu$-функции Бесселя, на основе которого вводится нечетное $\mathbb{J}$-преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова

$$\mathbb{F}_{od}[f](\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)}{\partial x_i}\ x_i^{-\gamma_i}\ dx_i\ .$$

Доказано, что преобразование $\mathbb{F}_{od}$ производной четной функции можно привести к четному $\mathbb{J}$-преобразованию Бесселя. Поэтому было введено еще одно преобразование со смешанным ядром $\mathbf{J}_\mu(x\xi) = \prod_{i=1}^n \left[\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i) + 2\ \mu_i\, x_i\, \xi_i\ \mathbb{J}_{\mu_i - 1}(x_i\xi_i)\right]$, которое названо *полным $\mathbb{J}$-преобразованием Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова*:

$$\mathbf{F}[f](\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\ \mathbf{J}_\mu(x\xi)\ x^{-\gamma}dx = \mathbb{F}_{ev}\,[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{od}\,[f_{od}](\xi).$$

Основным результатом пятой главы является теорема:

Теорема 5.1.1. (о символе $D^\alpha_{B_{-\gamma}}$-оператора).

Для $f \in S(\mathbb{R}_n)$ имеет место формула

$$\mathbf{F}[D^{\alpha_i}_{B_{-\gamma_i}} f](\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} (-\xi_i^2)^k\, \widehat{f}(\xi), & \text{если}\ \ \alpha = 2k \\ (-\xi_i^2)^k\, \xi_i\ \widehat{f}(\xi), & \text{если}\ \ \alpha = 2k+1 \end{array} \right| ,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Далее дано представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках полного $\mathbb{J}$-преобразования Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова и вводятся пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с $D^\alpha_{B_{-\gamma}}$ оператором. В §5.2 дается определение сингулярных $\mathbb{J}$-псевдодифференциальных операторов Киприянова—Катрахова, приводятся основные теоремы о порядке и теорема о произведениях и коммутаторах.

В заключение автор выражает благодарность профессору Л.Н. Ляхову за терпение, внимательное отношение, постановку задач и помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Bulatov, Yu.N. The Hankel–Kiprianov–Katrakhov Transform and Singular K–Pseudodifferential Operators / Yu.N. Bulatov // Mathematical Notes of NEFU. — 2024. — Vol. 31, No. 1. — P. 21—34.

[2] Bulatov, Yu. N. Gording's Inequality for Singular **J**-pseudodifferential Kipriyanov Operators / Yu.N. Bulatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No 11. — P. 5346—5354.

[3] Bulatov, Yu. N. Commutators of singular $\mathbb{K}$-pseudodifferential operators in $\mathbb{R}_n$ / Yu.N. Bulatov // Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications. — 2024. — Vol. 15, Is. 4. — P. 87.

[4] Lyakhov, L. N. Composition and Commutator of Singular **J**-Pseudodifferential Kipriyanov Operators in $\mathbb{R}_{\boldsymbol{N}}$ / L.N. Lyakhov, Yu.N. Bulatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, No 8. — P. 3438—3454.

[5] Lyakhov, L.N. Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel $\mathbb{J}$-transform / L.N. Lyakhov, S.A. Roshchupkin, Yu.N. Bulatov // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 269, No. 2. — P. 205—216.

[6] Ляхов, Л.Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654—1665.
Переводная версия: Lyakhov, L.N. Pseudoshift and the Fundamental Solution of the Kipriyanov Δ_B-Operator / L.N. Lyakhov, Yu.N. Bulatov, S.A. Roshchupkin, E.L. Sanina // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, No. 12. — P. 1639—1650.

[7] Ляхов, Л.Н. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B-оператором Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 483—493.
Переводная версия: Lyakhov, L.N. Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Problem for the Poisson Equation with a Singular Δ_B-Kipriyanov Operator / L.N. Lyakhov, Yu.N. Bulatov, S.A. Roshchupkin, E.L. Sanina // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, No. 1. — P. 491—501.

[8] Ляхов, Л.Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Сани-

на, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52—65.

Переводная версия: Lyakhov, L.N. Fundamental Solution of a Singular Bessel Differential Operator with a Negative Parameter / L.N. Lyakhov, E.L. Sanina, S.A. Roshchupkin, Yu.N. Bulatov // Russian Mathematics. — 2023. — Vol. 67, No. 7. — P. 43—54.

[9] Ляхов, Л.Н. Формула Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61, № 2. — С. 229—241.

[10] Булатов, Ю. Н. Следствие из неравенства Петре для обобщенных $\mathbb{T}$-псевдосдвигов в $\mathbb{R}_1$ / Ю.Н. Булатов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2023. — № 4. — С. 72—79.

[11] Булатов, Ю. Н. $\mathbb{J}$-Преобразования Бесселя K-распределений, порожденные интегралом Ханкеля / Ю.Н. Булатов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2024. — № 2. — С. 36—42.

[12] Булатов, Ю.Н. Размерности фрактала типа «канторовской пыли», порожденные сферической симметрией / Ю.Н. Булатов, В.А. Калитвин, Е.Л. Санина // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики : Сборник статей. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2021. — Вып. 15. — С. 51—64.

[13] Ляхов, Л.Н. О произведении и коммутаторе сингулярных $\mathbf{J}$-псевдодифференциальных операторов Киприянова в $\mathbb{R}_n$ / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // И.А. Киприянов — 100 : Сб. статей. — Воронеж, 2023. — С. 149–174.

[14] Ляхов, Л. Н. Формулы Грина для Δ_B-оператора Киприянова в весовой линейной форме / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — Т. 231. — С. 68–73.

[15] Ляхов, Л.Н. Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова, порожденные J-преобразованием Бесселя / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин // Проблемы математического анализа. — 2023. — № 121. — С. 71—82.