

**Отзыв научного руководителя  
о диссертации Булатова Юрия Николаевича  
«В-Эллиптические уравнения с оператором Лапласа–Бесселя–Киприянова»,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика.**

Диссертация посвящена исследованию линейно независимых решений сингулярного дифференциального уравнения Бесселя  $B_{-\gamma}u(x\xi) + \xi^2 u(x\xi)$  с отрицательным параметром  $-\gamma \in (-1, 0)$  оператора Бесселя  $B_{-\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}$ . Этот случай специфичен тем, что для его анализа приходится использовать перенормированные бесселевы функции, отличающиеся от общеупотребительных степенным множителем. Представлен обоснованный переход на язык таких функций: билинейные формы, ортогональность, интегральное преобразование, аналог оператора сдвига, теорема сложения и др.

Диссертация состоит из пяти глав, разделенных на параграфы.

В **первой главе** приведены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром оператора. В работе они представлены функциями:  $\mathbb{J}_{\pm\mu}(x) = \Gamma(1 \pm \mu) 2^{\pm\mu} x^\mu J_{\pm\mu}(x)$ , где  $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$ ,  $J_{\pm\mu}$  – функции Бесселя первого рода. Доказана ортогональность  $\mathbb{J}_\mu$ -функций Бесселя, введены четное прямое и четное обратное  $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя.

Во **второй главе** исследуются интегральные операторы:  $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг,  $\mathbb{T}$ -сдвиг и  $\mathbb{T}$ -квазисдвиг. Решена задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с сингулярными дифференциальными операторами Бесселя с малым отрицательным параметром. Приведены формулы Пуассона решения радиальной задачи Коши для сингулярного В-ультрагиперболического уравнения, при выполнении условия Киприянова (дробные размерности входящих в уравнение операторов равны одному и тому же положительному числу).

**Третья глава** посвящена нахождению фундаментальных решений оператора  $B_{-\gamma}$ ,  $-\gamma \in (-1, 0)$  и оператора  $\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}$ ,  $-\gamma_i \in (-1, 0)$ . Воспользовавшись теоремой о сферическом среднем для К-гармонических функций (функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа  $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0$ ) доказан принцип максимума и доказаны теоремы о единственности решения внутренней и внешней задач Дирихле.

В **четвертой главе** изучаются  $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Заданы пространства Соболева–Киприянова, ассоциированные с оператором  $B_{-\gamma}$  и введены сингулярные  $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова, для которых доказываются основные теоремы о порядке, теорема о произведении и коммутаторах и аналог неравенства Гординга.

В пятой главе приведено рекуррентное соотношение для производных  $J_\mu$ -функции Бесселя, на основе которого вводится нечетное  $J$ -преобразование Фурье–Бесселя–Киприянова–Катрахова. Доказано, что нечетное  $J$ -преобразование Фурье–Бесселя–Киприянова–Катрахова производной четной функции можно привести к четному  $J$ -преобразованию Бесселя. В связи с чем было введено полное  $J$ -преобразование Фурье–Бесселя–Киприянова–Катрахова, на основе которого определены сингулярные  $J$ -псевдодифференциальные операторы Киприянова–Катрахова.

Отметим основные результаты, полученные в работе:

1. Теорема сложения для  $J_\mu$ -функции Бесселя.
2. Фундаментальные решения сингулярного дифференциального оператора  $B_\gamma$  с особенностью в произвольной точке полуоси, а также фундаментальное решение оператора  $\Delta_{B_\gamma}$ -оператора Киприянова с особенностью в произвольной точке из евклидова  $n$ -полупространства.
3. Экстремальное свойство  $K$ -гармонических функций и теоремы о единственности решения внутренней и внешней задач Дирихле с оператором  $\Delta_{B_\gamma}$ .
4. Теоремы о порядке, теорема о произведении и коммутаторе для сингулярных  $J$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова и соответствующий аналог неравенства Гординга.
5. Теоремы о порядке и теорема о произведении для сингулярных  $J$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова–Катрахова.

В период работы над диссертацией Юрий Николаевич Булатов проявил себя как добросовестный, вдумчивый и зрелый исследователь, способный четко определить цели и задачи исследования, глубоко осмыслить и анализировать полученные результаты. В диссертации был получен ряд новых результатов, которые опубликованы в 15 научных статьях, в том числе в 11 публикациях в изданиях «Перечня ведущих периодических изданий ВАК».

Считаю, что диссертация «В-Эллиптические уравнения с оператором Лапласа–Бесселя–Киприянова» удовлетворяет всем требованиям, установленным п.14 Положения о присуждении учёных степеней, а ее автор, Булатов Юрий Николаевич, заслуживает присуждения искомой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика.

Доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры математики, информатики, физики  
и методики обучения ФГБОУ ВО «ЕГУ им. И.А. Бунина»

 Л.Н. Ляхов

адрес: 399770, Россия, Липецкая обл., г. Елец, ул. Ленина, д. 86  
тел.: 8(47467)2-81-72,  
эл. почта: [levnlva@mail.ru](mailto:levnlva@mail.ru)

