

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Булатова Юрия Николаевича «В-Эллиптические уравнения с оператором Лапласа – Бесселя – Киприянова», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

### Актуальность темы исследования.

Как известно, в работах Чаплыгина С.А., Трикоми Ф., Франкля Ф.И., Келдыша М.В., Векуа И.Н., Лаврентьева М.А., Бабенко К.И., Бицадзе А.В. и др. были исследованы краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического и смешанного типов из-за важных приложений в газовой динамике, теории малых изгибаний поверхностей, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, теории плазмы и других областях науки и техники. Такие уравнения заменой переменных сводятся к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, которые исследовались в работах Пулькина С.П., Терсенова С.А., Киприянова А.И. и их учеников. Данная диссертация посвящена построению теории сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя с отрицательным параметром. Ранее такая теория была построена для В-Эллиптических и В-Гиперболических уравнений с положительными параметрами. Поэтому актуальность темы исследования не вызывает сомнений.

### Структура и содержание работы.

Диссертация изложена на 118 страницах и состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Список литературы содержит 84 наименования.

Во *введении* изложены цели и задачи диссертационного исследования, обоснована актуальность темы диссертационного исследования. Приведен краткий обзор результатов, сформулированы положения, выносимые на защиту, указана апробация результатов.

В *первой главе* построены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром оператора

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{\gamma}{x} \frac{du}{dx} + u(x) = B_{-\gamma} u + u(x) = 0, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Для анализа этих решений использованы перенормированные бесселевы функции, отличающиеся от общеупотребительных степенным множителем. Введена билинейная форма, в которой указанные функции Бесселя ортогональны, получен аналог интеграла Ганкеля и построены аналоги взаимнообратных преобразований Бесселя.

Во *второй главе* предварительно вводятся интегральные операторы сдвига, псевдосдвига, квазисдвига и их обобщения. Подробно изучены их свойства. На их основе построено в явном виде решение весовой задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t)}{t^{1+\gamma}} = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

Затем для многомерного гиперболического уравнения

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{\beta_i}{y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

где  $\beta_i > -1$ ,  $\gamma_i > -1$ , найдено решение задачи Коши с условиями:

$$u(x, y)|_{y_i=0} = f(|x|), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y_i} \right|_{y_i=0} = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

когда параметр  $s = n + |\gamma| - 1 = m + |\beta| - 1$ ,  $s > 0$  и  $s = 0$ .

В случае  $-1 < s < 0$  построено решение задачи Коши с весом

$$\lim_{y_i \rightarrow 0} \frac{u(x, y)}{|y|^{1-s}} = f(|x|), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y_i} \right|_{y_i=0} = 0.$$

В *третьей главе* построены фундаментальные решения сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром и оператора Лапласа – Бесселя – Киприянова  $\Delta_{B-\gamma}$  с применением оператора псевдосдвига. Затем для К-гармонических функций, то есть для решения уравнения  $\Delta_{B-\gamma}u(x) = 0$ , получены аналоги формул Грина для гармонических функций. Установлен аналог теоремы о среднем для К-гармонических функций и на основании этой теоремы доказан принцип экстремума. В качестве применения принципа экстремума доказаны теоремы единственности решения внутренней и внешней задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta_{B-\gamma}u(x) = f(x).$$

В *четвертой главе* вводятся пространства Соболева–Киприянова, ассоциированные с оператором Бесселя с отрицательным параметром, построен новый класс сингулярных псевдодифференциальных операторов. Для данных псевдодифференциальных операторов доказаны теоремы о порядке, теорема о произведении и коммутаторе.

В *пятой главе* приведено рекуррентное соотношение для производной многомерного варианта  $J_\mu$  – функции Бесселя с положительным индексом, на основе которого вводятся нечетное преобразование Бесселя и преобразование со смешанным «четным + нечетным» ядром. На их основе введены псевдодифференциальные операторы типа Киприянова–Катрахова и доказаны теоремы о порядке и произведении.

**Новизна полученных результатов.** Приведенные выше результаты являются новыми и представляют научный интерес.

#### **Достоверность результатов исследования.**

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью использованных методов и подробными математическими доказательствами. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в пятнадцати научных статьях, одиннадцать из которых входят в перечень научных изданий ВАК. Девять работ опубликованы в журналах, входящих в международные базы цитирования Web of Science или Scopus. Результаты исследования многократно докладывались на международных, научных конференциях, а также поддержаны РНФ (№ 24 – 21 – 00387).

#### **Теоретическая и практическая значимость.**

Результаты, полученные Булатовым Ю.Н., имеют как теоретическое, так и практическое значение. Они вносят определенный вклад в теорию краевых задач для дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя. Практическая значимость работы состоит в возможности использования полученных результатов для дальнейшей разработки теории краевых задач для более общих дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами и применение их при решении конкретных задач естествознания, а также при чтении спецкурсов для студентов, аспирантов и докторантов.

#### **Замечания и пожелания по работе.**

1. В тексте диссертации встречаются пунктуационные, грамматические ошибки и опечатки, которые не влияют на достоверность основных результатов. Отмечу некоторые из них:

- а) с. 24, п. 1.2:  $x^{-\gamma}u'(x) = O(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , хотя ниже показано  $u'(x) = O(x)$ ;  
б) с. 25

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u'(x) - u'(-x)}{2x} = 2xu''(0),$$

в) с. 52, в теореме 2.8.1 в случае 3, где  $-1 < s < 0$ , не указана четкая постановка задачи Коши, из-за чего во второй формуле без номера имеется опечатка:  $2s$  надо заменить на  $1 - s$ ;

г) с. 53 при  $s = 0$  приведен предел, который равен нулю, но не равен той функции, которая приводится в тексте; хотя ниже дается другое обоснование этого случая.

2. В третьей главе диссертации построено фундаментальное решение оператора  $\Delta_{B-\gamma}$ , но не изучен вопрос о построении решений соответствующих краевых задач.

#### **Заключительная оценка работы.**

Указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования и не меняют общей положительной оценки работы. Диссертация написана ясным научным языком, хорошо структурирована и оформлена. Автореферат соответствует установленным требованиям и полностью отражает основное содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Булатова Юрия Николаевича «В-Эллиптические уравнения с оператором Лапласа – Бесселя – Киприянова» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является законченной научно-квалификационной работой и соответствует требованиям пп. 9 – 14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г. №842 (в редакции Постановлений Правительства РФ от 21.04.2016 г. №335, от 01.10.2018 г. № 1168), предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а её автор, Булатов Юрий Николаевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика.

**Официальный оппонент:** доктор физико - математических наук (специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения), профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Механика твердого тела» Института механики им. Р.Р. Мавлютова – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Сабитов Камиль Басирович.

Адрес: Институт механики УФИЦ РАН, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, 71.

Тел. +7 (347) 235-52-55.

E-mail: sabitov\_fmfm@mail.ru

Согласен на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.

«25» августа 2025 г.

К.Б. Сабитов

|                                |                           |         |
|--------------------------------|---------------------------|---------|
| Подпись                        | <i>Сабитова К.Б.</i>      | заверяю |
| Ученый секретарь ИМех УФИЦ РАН | <i>Наиф Таймулла З.Ф.</i> |         |
| «25» августа                   | 2025 г.                   |         |