

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор МГУ имени М.В. Ломоносова,

д.ф.-м.н., профессор

А.А. ФЕДЯНИН



А.А. Федянин

2025 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

**Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования**

«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

на диссертационную работу Булатова Юрия Николаевича

«В-Эллиптические уравнения с оператором Лапласа–Бесселя–

Киприянова», представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы

Диссертационная работа Булатова Юрия Николаевича посвящена исследованию эллиптических уравнения, содержащих сингулярные дифференциальные операторы Бесселя с отрицательным параметром. Исследовать такие задачи, со слов профессора Л.Н. Ляхова, было предложено И.А. Киприяновым, им были изучены весовые функциональные пространства на основе преобразований Фурье–Бесселя, разработаны подходы и методы решения сингулярных краевых задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя с положительным параметром. Исследованием задач для эллиптических уравнений с операторами Бесселя положительных индексов занимались также В.В. Катрахов, Л.Н. Ляхов, Я.И. Житомирский, М.И. Ключанцев, С.М. Ситник, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина и др. Профессор К.Б. Сабитов и его ученики исследовали задачи спектрального характера для В-гиперболических уравнений с оператором Бесселя с отрицательным параметром. При этом использовано разложение функций в ряды Фурье–Бесселя и Дини по собственным функциям оператора Бесселя отрицательного порядка. Л.Н. Ляховым и Е.Л. Саниной был введен сингулярный дифференциальный оператор Киприянова, состоящий из суммы операторов Бесселя с отрицательными параметрами, и получено его представление на сфере. В диссертации

ционном исследовании Булатова Ю.Н. параметр оператора Бесселя всегда отрицательный и дробный, т.к. находится в пределах $(-1,0)$. Результаты исследования могут применяться в теории уравнений в частных производных, теории интегро-дифференциальных уравнений, теории общего дробно-дифференциального интегрирования, теории вложения пространств, теории оптимального управления. К практическим приложениям результатов исследования относятся приложения к обратным задачам и теории рассеяния, к задачам фильтрации, геофизики, трансзвуковой газодинамики и теоретической механики.

Характеристика содержания диссертационной работы

Диссертация Ю.Н. Булатова состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 118 страниц.

Диссертационная работа посвящена исследованию сингулярных дифференциальных уравнений, содержащих операторы Бесселя с отрицательным параметром.

Во введении дается обоснование актуальности выбранной темы, формулируется цель исследования, приводятся методы исследования, краткий обзор содержания диссертации и основные научные результаты.

В первой главе вводятся основные обозначения, определения и приведены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром. Приведено равенство Ганкеля на основе новых функций Бесселя с положительным параметром и введены четное прямое и четное обратное преобразования Бесселя.

Во второй главе получен интеграл Пуассона и приведена теорема сложения для новых функций Бесселя положительного индекса. Также изучены новые интегральные операторы типа «сдвиг»: T -псевдосдвиг, T -сдвиг и T -квазисдвиг. Приведены основные свойства данных операторов, для T -псевдосдвига доказан аналог неравенства Петре, для T -сдвига доказана принадлежность классу обобщенных сдвигов Левитана. Получен аналог формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с одинаковыми отрицательными параметрами сингулярных дифференциальных операторов.

Третья глава посвящена нахождению фундаментальных решений оператора Бесселя с отрицательным параметром с особенностью в начале координат. Приведено два подхода к определению фундаментального решения в функциональных пространствах L_2 с различными показателями веса. Также с применением оператора T -псевдосдвига построено фундаментальное решение с особенностью в произвольной точке полупространства. Приводятся

теоремы о единственности решения внутренней и внешней задач Дирихле с сингулярным оператором Киприянова.

В четвертой главе изучаются введенные ранее новые интегральные преобразования Бесселя. Дано представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках данного преобразования и вводятся пространства Соболева–Киприянова, задается пространство символов, вводится новый класс сингулярных псевдодифференциальных операторов. Доказываются основные теоремы, в том числе, неравенство Гординга.

В пятой главе приведено рекурсивное соотношение производной функции Бесселя с положительным индексом, вводится нечетное преобразование Бесселя, на основе которого введено преобразование со смешанным ядром, т.е. полное преобразование Фурье–Бесселя–Киприянова–Катрахова.

Достоверность и новизна результатов диссертации

В рамках исследования были изучены линейно независимые решения сингулярного дифференциального уравнения Бесселя с отрицательным параметром. Этот случай специфичен тем, что для его анализа приходится использовать перенормированные бесселевы функции, отличающиеся от общеупотребительных степенным множителем. Представлен обоснованный переход на язык таких функций (билинейные формы, ортогональность, интегральное преобразование, аналог оператора сдвига, теорема сложения и др.). Был получен ряд новых результатов и установлено представление линейных сингулярных дифференциальных операторов с новыми классами псевдодифференциальных операторов. Одной из основных целей диссертационного исследования являлось определение фундаментальных решений оператора Киприянова. В общем случае фундаментальное решение с особенностью в произвольной точке n -полупространства найдено посредством оператора псевдосдвига, который не принадлежал левитановским операторам обобщенного сдвига. Это привело исследователя к существенным трудностям, не возникающим в классической теории сингулярных дифференциальных уравнений. Достоверность результатов подтверждается имеющимися публикациями в ведущих российских журналах и выступлениями на научных семинарах и конференциях.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Научные положения, выводы и заключения, представленные в диссертационной работе обоснованы полностью, что подтверждается строгостью математических доказательств, а также корректным использованием методов теории сингулярных дифференциальных уравнений.

Значимость для науки и практики полученных результатов

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании решений других классов дифференциальных уравнений.

Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати.

Результаты диссертационной работы Ю.Н. Булатова опубликованы в 15 научных статьях, в том числе в 11 публикациях в изданиях «Перечня ведущих периодических изданий ВАК». Опубликовано 19 тезисов в материалах конференций.

Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания по диссертационной работе

Работа не свободна от недостатков, которые квалифицируются как небрежность изложения её содержания.

1. В диссертации отсутствует информация о задачах естествознания, в которых могут быть использованы полученные результаты. Это особенно интересно в связи с узким интервалом изменения параметров операторов Бесселя и соответствующих функций Бесселя.

2. Работа содержит множество фактических неточностей. Так, например на странице 13 утверждается, что функции Бесселя первого рода порядка ν определены и образуют ФСР уравнения Бесселя при $\nu > -1/2$, хотя в действительности необходимо требовать $\nu \notin \mathbb{Z}$.

3. На странице 18 автор неточно формулирует теорему о почленном дифференцировании функционального ряда. Но в итоге это не приводит к ложным результатам – приведённый ряд (1.1.6) допускает почленное дифференцирование внутри области сходимости как степенной.

4. На странице 24 формулой (1.2.1) вводится скалярное произведение следующим образом

$$(u_1, u_2)_\omega = \int_0^\infty u(x)v(x)x^\omega dx.$$

Из этого автор делает вывод, что функции $u(x)x^\omega$ и $v(x)x^\omega$ должны принадлежать пространству $L_2[0, +\infty)$. Помимо того, что формула (1.2.1) содержит очевидную опечатку в обозначении аргументов, правильно было бы сказать,

что функции $u(x)x^{\omega/2}$ и $v(x)x^{\omega/2}$ должны принадлежать пространству $L_2[0, +\infty)$.

Эти недостатки не имеют принципиального значения и не снижают ценности полученных в диссертации результатов.

Заключение

Диссертационное исследование Булатова Юрия Николаевича является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержатся новые подходы к исследованию краевых задач сингулярных дифференциальных уравнений, имеющих важное значение в теории функций и общей теории дифференциальных уравнений.

Работа соответствует требованиям, установленным п.14 Положения о присуждении учёных степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а её автор, Булатов Юрий Николаевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Отзыв подготовлен профессором кафедры общей математики, доктором физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, Игорем Сергеевичем Ломовым.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры общей математики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова». Протокол № 5 от 26 июня 2025 г.

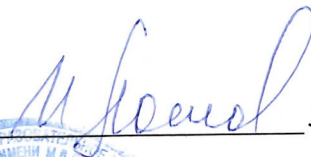
Присутствовал 21 сотрудник кафедры.

Результаты голосования: «За» - 21, «Воздержались» - 0, «Против» - 0.

Председательствующий на заседании:

И.О. заведующего кафедрой,

д.ф.-м.н., профессор _____



Ломов И.С.

Подпись И.С. Ломова заверяю

Декан факультета ВМК МГУ

академик РАН, д.т.н., профессор _____



Соколов И.А.

Контактные данные: адрес: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова;
контактный телефон: 8 (495) 939-30-10; адрес электронной почты: cmc@cs.msu.ru.