На правах рукописи

БАРАБАШ ОЛЬГА ПАВЛОВНА

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РОСТА И РАСПРОСТРАНЕНИЯ

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Воронеж — 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, доцент **Половинкин Игорь Петрович**
Официальные оппоненты:	**Меньших Валерий Владимирович** доктор физико–математических наук, профессор, ФГКОУ ВО «Воронежский институт Министерства внутренних дел Российской Федерации», кафедра математики и моделирования систем, профессор **Рощупкин Сергей Александрович** кандидат физико–математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина», Институт цифровых технологий и математики, директор
Ведущая организация:	Государственное казенное научное учреждение «Академия наук Чеченской Республики», г. Грозный

Защита состоится «25» февраля 2026 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета 24.2.288.15, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, «Белый зал».

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет» и на сайте http://www.science.vsu.ru.

Автореферат разослан «   » декабря 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Е.С. Барановский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена созданию и исследованию свойств семейства дискретных математических моделей роста и распространения на основе известных непрерывных моделей. Основой для этих моделей служит закон сохранения субстанции в дифференциальной форме. Дискретная модель позволяет перейти к компьютерному моделированию, и поэтому вызывает постоянный интерес исследователей. В диссертации основное внимание сосредоточено на сеточных конечно–разностных и проекционных методах дискретного моделирования.

Универсальным и крайне важным методом дискретного моделирования является метод конечных разностей. Ключевыми вопросами при построении моделей этим методом выступают аппроксимация, устойчивость и сходимость.

Проекционно–сеточные методы (методы конечных элементов) на сегодняшний день являются чрезвычайно действенными методами решения задач систематического моделирования. Эффективность использования таких алгоритмов обусловлена тем, что они по своей форме являются вариационными или проекционными и обладают всеми их преимуществами, а с другой стороны, приводят к системам алгебраических уравнений, подобным возникающим в разностных методах.

Во всех случаях велика роль численного эксперимента, особенно когда остаются непроработанными вопросы, связанные со сходимостью приближенных методов. В настоящее время в разделе, называемом «инженерная математика», вычислительному эксперименту отводится ключевая роль.

Объект исследования — непрерывные нелинейные математические модели роста и распространения и инструменты их дискретизации.

Предметом исследования являются разностные, проекционно–сеточные методы для моделей распределения, распространения и роста со степенной нелинейностью и их свойства.

Степень разработанности темы исследования.

В настоящее время огромный практический интерес представляют нелинейные модели роста, а также роста и распространения (или иначе реакции-диффузии), поскольку переход к математическому моделированию позволяет в ряде случаев, заменяя реальные наблюдения и измерения анализом математических моделей, прогнозировать течение процесса и помогает вырабатывать эффективные подходы к исследованию и прогнозированию.

О методах дискретизации таких нелинейных моделей можно сказать, что это недостаточно исследованная область, представляющая существенный практический интерес в последние годы. Большое число работ посвящено однородным разностным схемам, устойчивым на любых допустимых сетках (см. например работы А.А. Самарского, А.В. Гулина). По поводу дискретизации нелинейных моделей следует отметить работы П.П. Матуса. Эти работы могут считаться отправной точкой для дальнейшего развития методов дискретизации нелинейных моделей роста–распространения.

Таким образом, создание дискретных математических моделей на основе нелинейной модели роста и распространения представляется актуальной научной и важной прикладной проблемой.

Цель диссертационной работы — разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов дискретизации непрерывных нелинейных математических моделей роста и распространения с применением современных компьютерных технологий.

Задачами, порожденными сформулированной целью, являются:

1. Построение, математическое обоснование и численная реализация эффективных линейных конечно–разностных схем для непрерывной нелинейной модели роста и распространения с применением современных компьютерных технологий.

2. Разработка новой дискретной математической модели и эффективного численного метода дискретизации непрерывной сингулярной модели роста и распространения. Разработка и обоснование эффективных вычислительных методов для дискретизации плоской стационарной сингулярной модели распределения субстанции.

3. Создание комплекса программ для исследования проблемы роста и распространения с применением разработанной в рамках диссертации технологии дискретного математического моделирования и проведения вычислительного эксперимента.

Область исследований. Диссертация соответствует следующим пунктам паспорта специальности:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (пункт 1).

2. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно–ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (пункт 3).

3. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента (пункт 8).

Научная новизна диссертационного исследования.

В диссертации установлены следующие новые научные результаты:

1. Разработан, обоснован и протестирован эффективный линейный вычислительный метод для непрерывной нелинейной модели роста и распространения с применением современных компьютерных технологий, отличающийся от существующих тем, что он приводит к системе линейных алгебраических уравнений и позволяющий получить оценку порядка аппроксимации и достаточное условие устойчивости.

2. Разработаны новые дискретные математические модели на основе непрерывной сингулярной модели распространения, непрерывной нелинейной сингулярной модели роста–распространения с помощью проекционно–сеточного метода Бубнова–Галеркина, отличающегося применением финитных сплайнов особого вида и позволяющего доказать оценку погрешности в весовом

функциональном пространстве, а также дискретизация плоской непрерывной сингулярной стационарной модели распределения субстанции, отличающаяся учетом ослабленных требований к гладкости решения и позволяющая получить априорную оценку.

3. На основе разработанной в рамках диссертации технологии создания дискретных линейных математических моделей создан комплекс программ, позволяющий осуществлять проведение вычислительных экспериментов в рамках исследования проблемы роста–распространения.

Степень достоверности результатов. Достоверность полученных теоретических результатов и положений обоснована строгостью применяемых методов исследования, корректностью использования математического аппарата. В модельных задачах, допускающих нахождение точного решения, результаты, полученные при реализации построенных в диссертации приближенных методов с помощью созданных программных продуктов, согласуются с точными решениями с незначительной погрешностью. В случае применения разработанного комплекса программ к задачам с использованием данных натурных измерений наблюдается соответствие между результатами расчетов и результатами наблюдений.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: на IV Международной научно–практической конференции «Математическое моделирование, программирование и прикладная математика» (г. Великий Новгород, 7–8 ноября 2022 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, 12–14 декабря 2022г.); на Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (г. Воронеж, 27 января–1 февраля 2023г.); на Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (г. Воронеж, 30 января–4 февраля 2025г.).

Методология и методы исследования. В работе использованы классические методы исследования конечно–разностных схем, их сходимости и устойчивости с привлечением аппарата математического анализа, функционального анализа, вычислительной математики, методы, развитые в работах научной школы И.А. Киприянова при исследовании весовых функциональных пространств и сингулярных дифференциальных уравнений, а также методика сравнения результатов, полученных в ходе численного эксперимента, с натурными данными, а при уникальном сочетании начальных и краевых условий, допускающем точное решение, было проведено сравнение с точным решением.

Теоретическая и практическая значимость диссертации заключается в том, что разработанные в ней методы линейной дискретизации нелинейных моделей роста и распространения приводят к вычислительным алгоритмам, имеющим линейную сложность, что упрощает их использование при исследовании моделируемых процессов. В этом состоит преимущество разработанных в диссертации разностных методов по сравнению с известными нелинейными методами.

Разработанный программный комплекс позволяет осуществлять прогнозирование роста и распространения. Этот комплекс был протестирован в двух ситуациях. Во-первых, при уникальном сочетании начальных и граничных условий известна явная формула представления точного решения рассматриваемой начально–краевой задачи первого рода. Полученные результаты численного эксперимента отличаются от точного решения со статистической погрешностью. Во-вторых, среди возможных применений разработанных методов было выбрано приложение к моделированию роста и распространения глиомы, после чего был выбран вариант тестирования, опирающийся на исходные данные этой предметной области. Результаты численного эксперимента согласуются с результатами измерений при введенных исходных данных. Получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

В рамках сформулированной в работе проблемы **на защиту выносятся следующие положения:**

1. Построена разностная схема для регулярной нелинейной модели роста–распространения, отличающаяся линейной структурой, позволяющая осуществлять численный эксперимент в условиях пониженной алгоритмической сложности, получена оценка ее порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau)$, достаточные условия устойчивости, позволяющие сделать вывод о ее сходимости.

2. Разработан и обоснован эффективный численный метод дискретизации сингулярной непрерывной модели распространения с использованием проекционно–сеточного метода Бубнова–Галеркина с финитными сплайнами специального вида, позволяющий доказать оценку погрешности в весовом функциональном пространстве, на основе которого проведена и протестирована дискретизация нелинейной сингулярной модели роста–распространения, кроме того, построена дискретизация плоской непрерывной сингулярной стационарной модели распределения субстанции, позволяющая учесть ослабленные требования к гладкости решения и получить априорную оценку.

3. Разработаны алгоритм реализации линейной разностной схемы для регулярной нелинейной модели роста–распространения и реализующая его программа для ЭВМ «Численное решение начально–краевой задачи для одномерного квазилинейного уравнения реакции–диффузии», алгоритм реализации линейной разностной схемы для сингулярной нелинейной модели роста–распространения и реализующая его программа для ЭВМ «Программа численного расчета для сингулярного нелинейного уравнения реакции–диффузии», позволяющие осуществлять вычислительные эксперименты в рамках исследования процессов роста–распространения.

Личный вклад соискателя. В количественном выражении в опубликованных работах личный вклад соискателя 4.628 печатных листов, что составляет 91% от общего количества печатных листов равного 5.063 п.л.. Основные результаты и положения, выносимые на защиту, получены лично автором. Совместно с научным руководителем проводилась постановка задачи, обсуждались полученные основные научные результаты и формировались выводы.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 155 страницах. Список литературы, который содержит 124 наименования, включает статьи, содержащие результаты работы, а также два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация приводимых ниже определений и утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

Во **введении** обосновывается актуальность темы, характеризуется степень разработанности темы исследования, формулируются цель и задачи диссертационного исследования, приводятся материалы и методы, описывается научная новизна работы, раскрывается практическая и научная значимость.

В первой главе показано, каким образом закон сохранения субстанции приводит к непрерывной нелинейной модели роста–распространения. Кроме того, в первой главе приводится обзор основных научных достижений, мотивирующих тематику диссертационного исследования.

Во второй главе рассматривается нелинейная модель роста–распространения (реакции–диффузии), включающая соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au(1-u), 0 < x < 1, 0 < t \leq T, A > 0, \tag{2.1.1}$$

краевые условия

$$u(0,t) = u_1(t), u(1,t) = u_2(t), 0 \leq t \leq T, \tag{2.1.2}$$

и начальное условие

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \leq x \leq 1. \tag{2.1.3}$$

Вводится равномерная сетка с шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/M$:

$$\overline{w}_{h\tau} = \overline{w}_h \times w_\tau = \{x_i = ih, i = 0, 1, .., N\} \times \{t_j = j\tau, j = 0, 1, .., M\}.$$

Для дискретизации модели (2.1.1)-(2.1.3) вводится следующая разностная схема

$$\begin{gathered}\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \\ +(A-\beta)(1-y_i^j)y_i^{j+1} + \beta(1-y_i^{j+1})y_i^j, 0 < i < N, 0 \leq j < M,\end{gathered} \tag{2.2.1}$$

$$y_0^j = u_1^j, y_N^j = u_2^j, \tag{2.1.5}$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \tag{2.1.6}$$

В диссертации доказано, что при выполнении условий

$$\sigma + \eta = 1,\ \alpha + \beta = A, \tag{2.1.9}$$

погрешность аппроксимации оценивается как $\psi = O(h^2 + \tau)$. Далее значения весовых параметров принимаются следующими: $0 < \sigma < 1$, $A/2 < \beta < A$.

Теорема 2.3.5. *Пусть выполнены условия*

$$\frac{A}{2} < \beta < \min\left\{A, \frac{2(1-\sigma)}{h^2}\right\}, \tag{2.3.9}$$

$$\tau < \min\left\{\frac{1}{2\frac{(1-\sigma)}{h^2} - \beta}, \frac{1}{A-\beta}\right\} \tag{2.3.10}$$

и разностное решение $y(x,t)$ *неотрицательно на сетке* $\overline{\omega}_{h\tau}$. *Тогда справедлива двусторонняя оценка:*

$$0 \le y_i^j \le e^{At_j} m_2, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M},$$

где

$$m_1 = \min_{(x,t)\in\overline{D}}\{u_1(t), u_2(t), u_0(x)\}, m_2 = \max_{(x,t)\in\overline{D}}\{u_1(t), u_2(t), u_0(x)\}.$$

Следствие 2.3.3. Для решения разностной схемы (2.2.1), (2.1.5),(2.1.6) справедлива априорная оценка

$$\|y^j\|_{\overline{C}} \le e^{At_j} m_2, j = \overline{0,N}.$$

Установлена монотонность разностной схемы (2.2.1), (2.1.5), (2.1.6) для $0 < \sigma < 1$ при выполнении неравенств:

$$\begin{gathered} \frac{A}{2} < \beta < \min\left\{A, \frac{2(1-\sigma)}{h^2}\right\}, \\ \tau < \min\left\{\frac{1}{A-\beta}, \frac{1}{Am_2e^{AT} + 2\frac{(1-\sigma)}{h^2} - \beta}\right\}. \end{gathered} \tag{2.4.8}$$

Для сеточной функции $\delta y = \tilde{y} - y$, где y — решение разностной схемы (2.2.1), (2.1.5), (2.1.6), а $\tilde{y}$ — решение разностной схемы для задачи с возмущенными входными данными получена оценка:

$$\|\delta y^{j+1}\|_C \le \max\left\{\max_t\{|\delta u_1(t)|, |\delta u_2(t)|\}, e^{\lambda t_{j+1}}\|\delta u_0(x)\|_C\right\}, \tag{2.4.9}$$

демонстрирующая устойчивость разностной схемы (2.2.1), (2.1.5), (2.1.6) при выполнении условий (2.4.8) по отношению к малому возмущению входных данных.

В третьей главе вводятся основные инструменты дискретизации непрерывной сингулярной модели распределения с оператором Бесселя. Дискретизация осуществляется методом Ритца в весовом пространстве Киприянова H^1_γ. Исследуются основные свойства оператора, находится оценка погрешности используемого метода. Также производится построение проекционно–сеточной схемы с дальнейшим исследованием вопроса численной реализации алгоритма.

На равномерной сетке $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, n-1}, x_i = ih$ отрезка $[0,1]$ введем кусочно–непрерывные функции:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}{x_i^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}, x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{x_{i+1}^{1-\gamma} - x_i^{1-\gamma}}, x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], i = 2, .., n-1. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, x_1], 0, x \notin [0, x_2], \\ \frac{x_2^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{x_2^{1-\gamma} - x_1^{1-\gamma}}, x \in [x_1, x_2]. \end{cases} \qquad \phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}{x_n^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}, x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, x \notin [x_{n-1}, x_n]. \end{cases} \tag{3.1.18}$$

Выводятся вспомогательные результаты, связанные с аппроксимацией в пространствах Киприянова и с применением метода конечных элементов для нахождения решения в случае стационарной сингулярной модели.

Рассматривается сингулярная линейная диффузионная модель, включающая соотношение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - x^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\gamma p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x) u = f, \tag{3.2.1}$$

начальное условие

$$u(x, 0) = u_{(0)} \tag{3.2.2}$$

и краевые условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, u(1, t) = 0, \tag{3.2.3}$$

где $f = f(x,t) \in L_{2,\gamma}(\Omega)\ \forall t,\ x \in \Omega = (0,1),\ t \in [0, T],\ u_{(0)} = u_{(0)}(x)$, $p(x) \in C^1[0,1]$ и $q(x) \in C[0,1]$, $p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0, p_0 = \mathrm{const},\ \gamma > 0, \gamma \neq 1$.

Определение 3.2.2. Обобщенным решением задачи (3.2.1)–(3.2.3) назовем функцию $u(x,t)$, которая почти при каждом $t \in (0, T)$ принадлежит пространству $H^1_\gamma(\Omega)$, $\partial u / \partial t \in L_{2,\gamma}((0,T) \times \Omega)$ и почти всюду на $(0, T)$ при любом выборе $w(x) \in H^1_\gamma(\Omega)$ удовлетворяющую равенствам:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w \right)(t) + [u, w](t) = (f, w)(t), \tag{3.2.5}$$

$$(u(x, 0), w) = (u_{(0)}, w). \tag{3.2.6}$$

Здесь $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_{2,\gamma}(\Omega)}$,

$$[u, v] = \int_0^1 x^\gamma \left(p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q(x) uv \right) dx.$$

Для построения приближенного решения вида $u_h = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i(t) \phi_i$ задачи (3.2.1)–(3.2.3) используется определение 3.2.2. На отрезке $[0,1]$ вводится равномерная сетка $x_i = ih$, $i = 0, .., n$. Коэффициенты $a_i(t)$ ищутся из системы ОДУ, полученной с помощью метода Бубнова–Галеркина из (3.2.5)–(3.2.6):

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi_i\right)(t) + [u_h, \phi_i](t) = (f, \phi_i)(t), \qquad (3.2.7)$$

$$(u_h(x,0) - u_{(0)}, \phi_i) = 0, i = 1, .., n-1. \qquad (3.2.8)$$

На отрезке $[0,T]$ вводится равномерная сетка $t_j = j\tau$,$\tau = T/J$,$j = 0, \ldots, J$. К уравнениям (3.2.7)–(3.2.8) применяется аппроксимация по времени с помощью неявной разностной схемы.

Для приближенного решения u_h была получена априорная оценка

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_h\|^2(t) + \int_0^T [u_h]^2(t')dt' \le C\left(\int_0^T \|f\|^2(t')dt' + \|u_{(0)}\|^2\right), \qquad (3.2.22)$$

доказывающая непрерывную зависимость решения u_h задачи от f и $u_{(0)}$.

Доказана сходимость u_h к u при $h \to 0$:

$$\max_{t\in(0,T)} \| u - u_h\|^2(t) + \int\limits_0^T [u - u_h]^2 dt' \to 0, h \to 0,$$

а также оценка

$$\left(\int\limits_0^T \left\|\frac{\partial \xi_h}{\partial t}\right\|^2 dt'\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{t\in(0,T)} [\xi_h](t) \le ch, \xi_h = u - u_h.$$

Строится дискретная модель, аппроксимирующая сингулярную нелинейную модель роста–распространения (реакции–диффузии). Построение приближенного решения осуществляется двумя методами. Для левой части основного соотношения разностная схема строится на основе данных, полученных с помощью проекционно-сеточного метода, рассмотренного в настоящей главе диссертации. Для аппроксимации нелинейной правой части $u(1-u)$ используется разностная схема с весами, построенная во второй главе.

Рассматривается сингулярная нелинейная модель роста–распространения (реакции–диффузии), включающая соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - x^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\gamma p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = \rho u(1-u), 0 < x < 1, 0 < t \le T, \qquad (3.3.1)$$

начальное условие

$$u(x,0) = u_{(0)}, 0 \le x \le 1, \qquad (3.3.2)$$

краевое условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, u(1,t) = 0, 0 \le t \le T. \qquad (3.3.3)$$

Для дискретизации модели (3.3.1)–(3.3.3) построена разностная схема

$$y_1^j \left[\tau(A_{1,1} - \beta + \rho y_1^{j-1}) + B_{1,1}\right] + y_2^j[\tau A_{1,2} + B_{1,2}] =$$
$$= y_1^{j-1}[B_{1,1} + \tau\alpha] + y_2^{j-1} B_{1,2}, i = 1,$$
$$y_{i-1}^j[\tau A_{i,i-1} + B_{i,i-1}] + y_i^j \left[\tau(A_{i,i} - \beta + \rho y_i^{j-1}) + B_{i,i}\right] +$$
$$+ y_{i+1}^j[\tau A_{i,i+1} + B_{i,i+1}] = y_{i-1}^{j-1} B_{i,i-1} + y_i^{j-1}[B_{i,i} + \tau\alpha] + y_{i+1}^{j-1} B_{i,i+1}, i = \overline{2, N-2},$$
$$y_{N-2}^j[\tau A_{N-1,N-2} + B_{N-1,N-2}] + y_{N-1}^j \Big[\tau(A_{N-1,N-1} - \beta + \rho y_{N-1}^{j-1}) +$$
$$+ B_{N-1,N-1}\Big] = y_{N-2}^{j-1} B_{N-1,N-2} + y_{N-1}^{j-1}[B_{N-1,N-1} + \tau\alpha], i = N-1.$$

$$A_{ij} = A_{ji} = [\phi_i, \phi_j] = \int_{\Omega_{ij}} x^\gamma \left(p \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + q\phi_i\phi_j\right) dx, j = 1, \ldots, n-1.$$

$$B_{ij} = B_{ji} = (\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega_{ij}} x^\gamma \phi_i \phi_j dx.$$

$$y_1^{j-1} - y_0^{j-1} = 0, y_N^{j-1} = 0, y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i).$$

Рассматривается дискретизация стационарной сингулярной модели распределения субстанции.

Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, $\Gamma = \{x_1 = 1,\ 0 \le x_2 \le 1\} \cup$ $\cup \{x_2 = 0, 1, 0 \le x_1 \le 1\}$ и

$$Lu = x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - qu, q \in C(\overline{\Omega}), q \ge 0.$$

Рассматривается плоская сингулярная модель распределения, включающая соотношение (уравнение)

$$Lu = -f(x_1, x_2), \gamma > 0, (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{3.4.1}$$

и краевые условия

$$x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, x_1 = 0, u(x) = 0, x \in \Gamma. \tag{3.4.2}$$

На замыкании области Ω вводится сетка $\overline{\omega} = \overline{\omega}_{x_1} \times \overline{\omega}_{x_2}$:

$$\overline{\omega}_{x_1} = \{x_{1,i} = (i - \frac{1}{2})h_1, i = \overline{1, N_1}, (N_1 - \frac{1}{2})h_1 = 1\},$$

$$\overline{\omega}_{x_2} = \{x_{2,j} = jh_2, j = \overline{0, N_2}, h_2 = \frac{1}{N_2}\}.$$

Множество внутренних узлов сетки $\overline{\omega}$ обозначается ω, а множество узлов, лежащих на границе Γ обозначается σ.

Множество всех функций из пространства Киприянова $W_{2,\gamma}^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям (3.4.2) обозначается $W_{2,\gamma,0}^2(\Omega)$

Определение 3.4.1. Сильным решением в модели (3.4.1)–(3.4.2) будем называть функцию $u \in W^2_{2,\gamma,0}(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$a(u,\mu) = -l(\mu), \forall \mu \in W^2_{2,\gamma,0}(\Omega), \tag{3.4.8}$$

где

$$a(u,\mu) = \iint\limits_{\Omega} x^{\gamma} L(u) L(\mu) d\Omega, l(\mu) = \iint\limits_{\Omega} x_1^{\gamma} f(x_1,x_2) L(\mu) d\Omega, f \in L_{2,\gamma}(\Omega).$$

Теорема 3.4.2. *Пусть $f(x_1,x_2) \in L_{2,\gamma}(\Omega)$. Тогда сильное решение задачи (3.4.1)–(3.4.2) существует и единственно.*

Рассматривается разностная схема (обозначения А.А. Самарского):

$$((x_1 - 0,5h_1)^{\gamma} y_{\overline{x}_1})_{x_1} + x_1^{\gamma} y_{\overline{x}_2 x_2} - q x_1^{\gamma} y = -S_1 S_2 \left(x_1^{\gamma} f(x_1,x_2)\right), (x_1,x_2) \in \omega,$$

$$y(x_1,x_2) = 0, (x_1,x_2) \in \sigma, \tag{3.4.15}$$

где S_i—усредняющие операторы Стеклова, определенные по формуле

$$S_i u(x) = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i - 0,5h_i}^{x_i + 0,5h_i} u(x_1, \ldots, \xi_i, \ldots, x_n) d\xi_i.$$

Пусть $v = y - u$, где y — решение задачи (3.4.15), u — решение задачи (3.4.1)-(3.4.2), — погрешность этой разностной схемы. Введена в рассмотрение следующая норма:

$$\|\Xi v\|_{0,\gamma,\omega} = \left\{((x_1 - 0,5h_1)^{\gamma} v_{\overline{x}_1}, v_{\overline{x}_1}]_1 + (x_1^{\gamma} v_{\overline{x}_2}, v_{\overline{x}_2}]_2 + (x_1^{\gamma} q v, v)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3.4.3. *Разностная схема (3.4.15) имеет единственное решение, являющееся устойчивым по правой части. Выполнена априорная оценка:*

$$\|\Xi v\|_{0,\gamma,\omega} \leq \left\|\frac{1}{\sqrt{(x - 0,5h_1)^{\gamma}}} \eta_1 \right]\Bigg|_1 + \left\|\frac{1}{\sqrt{x_1^{\gamma}}} \eta_2 \right]\Bigg|_2 + \|\eta_3\| C,$$

где η_1, η_2, η_3 определены по формулам

$$\eta_1 = (x_1 - 0,5h_1)^{\gamma} u_{\overline{x}_1} - S_2 \left(x_1^{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^{-0,5_1}, \tag{3.4.17}$$

$$\eta_2 = x_1^{\gamma} u_{\overline{x}_2} - S_1 \left(x_1^{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^{-0,5_2}, \tag{3.4.18}$$

$$\eta_3 = -x_1^{\gamma} q u + S_1 S_2 \left(x_1^{\gamma} q u\right). \tag{3.4.19}$$

Глава 4 содержит описание комплекса программ, включающее интерфейс пользователя, реализацию алгоритмов на языке Python, диаграммы классов и сценариев, а также результаты вычислительных экспериментов. Первый программный продукт реализует численный метод для регулярной нелинейной модели роста–распространения, второй — для сингулярной нелинейной модели. Для сравнения результатов численного эксперимента с данными наблюдений было выбрано применение изучаемых уравнений описанию роста и распространения глиомы.

На рисунках 1–2 представлены диаграммы сценариев и классов соответственно для первого программного продукта. Рисунок 3 отражает интерфейс пользователя. При попытке ввода некорректных данных, возникает сообщение об ошибке.

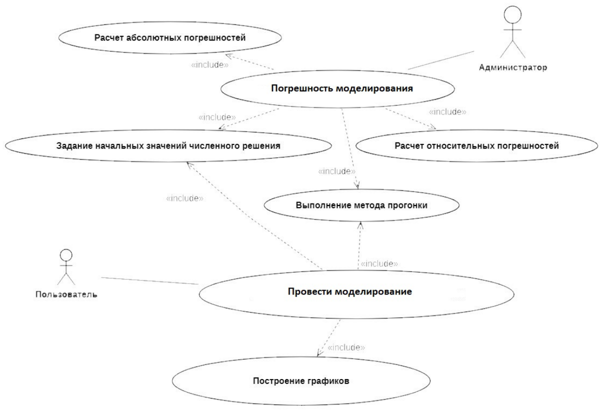

Рис. 1: Диграмма сценариев для программы, реализующей морегулярную модель реакции–диффузии

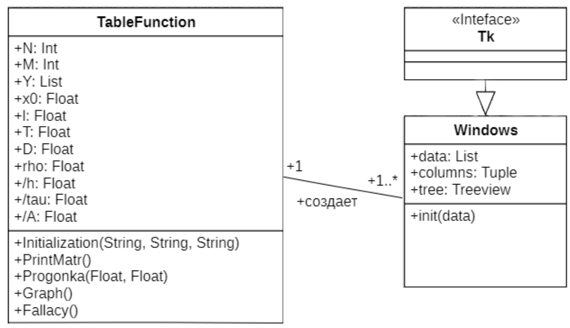

Рис. 2: Диаграмма классов для программы, реализующей регулярную модель реакции–диффузии

Модельные примеры проводились с использованием различных комбинаций значений скорости диффузии и пролиферации: [низкая диффузия, низкая пролиферация], [высокая диффузия, низкая пролиферация], [низкая диффузия, высокая пролиферация], [высокая диффузия, высокая пролиферация] и [средняя диффузия, средняя пролиферация] и для различных времен наблюдения: 4, 9, 13, 26, 39, 52, 65 и 81 неделя. Входные данные и данные натурных наблюдений взяты из статей М. Пападогиоргаки, К.Р. Свансон.

Рисунок 4 иллюстрирует графическую часть результатов одного из серии численных экспериментов. Модельный пример проводился для средних значений диффузии и пролиферации: $D = 1.8$ мм^2/ неделю, $\rho = 0.19$ 1/ неделю, отрезке изменения пространственной переменной от 0 до 80 мм, временной переменной от 0 до 100 недель, значениях весовых параметров $\sigma = 0.5$, $\beta = 0.08$. При таком выборе параметров D и ρ, значение «индекса невидимости» (D/ρ) равно 9.47, что является наиболее распространенным значением для этого показателя. Вторая программа построена на аналогичных принципах.

Анализ результатов проведенных экспериментов позволил сделать выводы, среди которых основными являются следующие:

1. Для уникального сочетания начального профиля и граничных режимов, допускающего явное решение в виде бегущей волны, результаты вычислительного эксперимента для регулярной модели роста–распространения глиомы сравнены с точным решением. Расчеты показали высокую точность приближения. Для набора входных данных, полученных в результате натурных измерений, результаты вычислительного эксперимента согласуются с данными наблюдений.

2. Для сингулярной модели роста–распространения получены результаты численного эксперимента, согласующиеся с натурными наблюдениями.

На основании этих выводов можно заключить, что разработанные в диссертации математический аппарат и программный комплекс могут служить инструментом исследования роста и распространения.

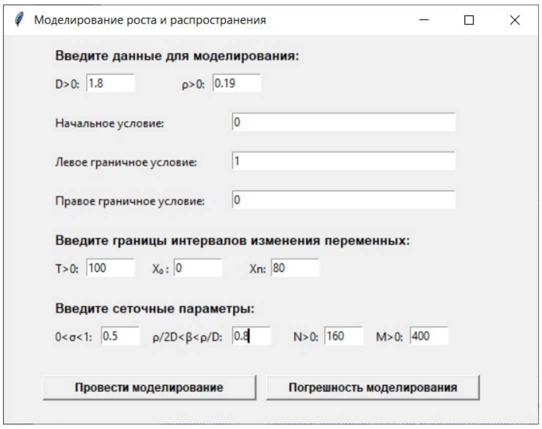

Рис. 3: Пример некорректного заполнения стартовой формы (параметр β)

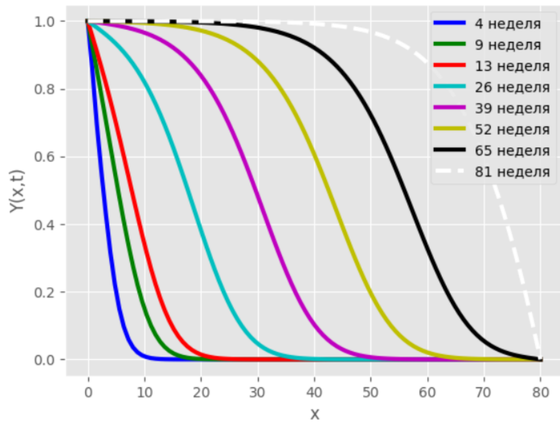

Рис. 4: Моделирование роста и распространения глиомы у человека, $D = 1.8$ мм^2/ неделю, $\rho = 0.19$ 1/ неделю

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан, обоснован и протестирован эффективный линейный вычислительный метод для непрерывной нелинейной модели роста–распространения с применением современных компьютерных технологий. Разработанный метод дискретизации нелинейной модели роста–распространения отличается тем, что он приводит к системе линейных алгебраических уравнений. При этом он позволяет получить оценку порядка аппроксимации и достаточное условие устойчивости.

2. Разработана новая дискретная математическая модель и эффективный численный метод дискретизации непрерывной сингулярной модели распространения. Модель реализована с помощью проекционно–сеточного метода Бубнова–Галеркина, отличающегося применением финитных сплайнов особого вида и позволяющего доказать оценку погрешности в весовом функциональном пространстве. Предложена линейная дискретная модель для сингулярной

нелинейной непрерывной модели роста–распространения. Разработана аппроксимирующая дискретная модель для плоской сингулярной стационарной задачи распределения субстанции, которая отличается учетом ослабленных требований к гладкости решения и позволяет получить априорную оценку.

3. На основе разработанной в рамках диссертации технологии создания дискретных линейных математических моделей создан комплекс программ для исследования проблемы роста–распространения и проведения вычислительных экспериментов.

Полученные в диссертации результаты, положения и программный комплекс могут быть использованы в различных предметных областях, связанных с моделированием процессов роста–распространения: в медицине, эпидемиологии, популяционной динамике, теории горения.

Публикации автора по теме диссертации.

Основные публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ и приравненных к ним.

1. Барабаш, О.П. Численный метод решения уравнения «реакция–диффузия» / О.П. Барабаш // Прикладная математика & Физика. — 2025. — Т. 57 № 1. — С. 52–58.

2. Barabash, O.P. On a difference scheme for the Growth-Propagation Equation / O.P. Barabash, M.V. Polovinkina, I.P. Polovinkin, M.L. Zhadanova // Lobachevskii journal of mathematics. — 2023. — Vol. 44 № 3. — P. 989–992.

3. Barabash, O.P. A discrete model of glioma growth and spread / O.P. Barabash, I.P. Polovinkin // Computational Mathematics Modeling. — 2025.

Индексируемые в международной базе GeoRef.

4. Барабаш, О.П. Применение проекционно-сеточного метода для решения нестационарной задачи / О.П. Барабаш // Международный научно-исследовательский журнал. — 2023. — № 11(137).

5. Барабаш, О.П. Об одном способе дискретизации задачи Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова / О.П. Барабаш // Международный научно-исследовательский журнал. — 2025. — № 5(155).

Публикации в прочих изданиях.

6. Барабаш, О.П. Некоторые особенности реализации метода конечных элементов для сингулярного дифференциального уравнения / О.П. Барабаш // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика. — 2023. — № 2. — С. 27–35. (перечень ВАК по специальности 1.1.2)

7. Сумин, В.И. Разработка модели функционирования сложных субстанций на основе диффузионно–логистического уравнения / В.И. Сумин, О.П. Барабаш, И.П. Половинкин // Вестник Воронежского института ФСИН России. — 2023. — № 1. — С. 138–143. (перечень ВАК по специальности 1.2.2 технические науки)

8. Барабаш, О.П. Об одном подходе к сильному решению B-эллиптической краевой задачи и его разностном приближении / О.П. Бара-

баш // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Часть 2: Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы краевых задач. Понтрягинские чтения—XXXV», Воронеж, 26-30 апреля, 2024 г. — 2024. — Т. 236 — С. 3–12.

9. Барабаш, О.П. Об одной схеме для диффузионно-логистического уравнения / О.П. Барабаш // Математическое моделирование, программирование и прикладная математика: IV Международная научно–практическая конференция, Великий Новгород, 7-8 ноября, 2022 г. — Великий Новгород, 2023. — С. 6–7.

10. Барабаш, О.П. Разностная схема для диффузионно-логистического уравнения / О.П. Барабаш // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: материалы Международной научной конференции, Воронеж, 12-14 декабря, 2022 г. — Воронеж: издательский дом ВГУ, 2023. — С. 325–328.

11. Барабаш, О.П. Об одной разностной схеме для диффузионно-логистического уравнения / О.П. Барабаш // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января-1февраля 2023г.) / Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им М.В. Ломоносова; Математический институт им В.А. Стеклова РАН. — Воронеж: издательский дом ВГУ, 2023. — С. 43–45.

12. Барабаш, О.П. О разностных методах сингулярных краевых задач / О.П. Барабаш // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (30 января-4 февраля 2025г.) / Воронежский государственный университет; Московский государственный университет им М.В. Ломоносова; Математический институт им В.А. Стеклова РАН. — Воронеж: издательский дом ВГУ, 2025. — С. 65–67.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2024663009 Российская Федерация. Численное решение начально–краевой задачи для одномерного квазилинейного уравнения реакции–диффузии / О.П. Барабаш; заявитель и правообладатель Барабаш О.П.— № 2024661715/69 ; заявление 21.05.2024; опубл. 03.06.2024.

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2024689152 Российская Федерация. Программа численного расчета для сингулярного нелинейного уравнения реакции–диффузии / О.П. Барабаш; заявитель и правообладатель Барабаш О.П.— № 2024687972/69; заявление 21.11.2024; опубл. 04.12.2024.