

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу  
Барабаш Ольги Павловны на тему «Модифицированная  
дискретизация и программная реализация для нелинейных  
непрерывных математических моделей роста и распространения»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по научной специальности  
1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ».

Актуальность темы диссертационного исследования определяется необходимостью разработки и анализа семейства дискретных моделей процессов роста и распространения. Основой для построения моделей служат классические непрерывные уравнения, базирующиеся на законе сохранения субстанции в дифференциальной форме. Ключевой акцент в работе сделан на сеточных конечно-разностных и проекционных методах дискретизации, обеспечивающих возможность численной реализации, что определяет их практическую ценность.

Основой для диссертационного исследования стало квазилинейное уравнение, входящее в класс уравнений реакции-диффузии (роста-распространения) со степенной нелинейностью. Это уравнение является инструментом моделирования во многих предметных областях и отраслях естественных и гуманитарных наук: в химии, генетике, медицине, популяционной динамике, экономике, лингвистике. Исследование качественных свойств решений этого уравнения ведется с первой половины прошлого века. В приложениях используются также многие модификации уравнения роста-распространения. Важным аспектом, наряду с изучением качественного поведения решений задач для рассматриваемого семейства уравнений, остаётся задача их явного построения. Поскольку явные представления точных решений известны только для ограниченного набора условий, возникает потребность в создании дискретных аналогов, допускающих получение приближённых решений в численной форме. В диссертационной работе О.П. Барабаш в качестве основных инструментов дискретизации применяются конечно-разностные и проекционно-сеточные методы. Если для линейных задач с гладкими решениями их теория в основном разработана, то в случае нелинейных моделей, сохраняется ряд нерешённых вопросов. Настоящее исследование вносит вклад в преодоление этих трудностей.

Значительный комплекс проблем, поставленных и решенных в диссертации, связан с дискретизацией моделей роста-распространения, содержащих степенные особенности, обусловленные оператором Бесселя. Несмотря на интенсивное развитие теории краевых задач для уравнений с такими особенностями во второй половине прошлого века, методы их числен-

ной аппроксимации исследованы в значительно меньшей степени. В частности, перспективные подходы, предложенные в 80-е годы XX века для стационарных сингулярных задач (например, на основе метода конечных элементов), не нашли в последующие годы достаточного продолжения и развития.

С учётом вышеизложенного, актуальность представленного диссертационного исследования следует считать вполне обоснованной.

**Описание структуры диссертации и ключевых научных результатов, полученных лично автором.** Работа имеет следующую структуру: введение, четыре главы, заключение, библиографический список и приложение. Общий объем диссертации составляет 155 страниц. Библиографический список включает 124 источника, в том числе публикации, отражающие результаты исследования, а также два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Введение** содержит обоснование актуальности темы, анализ степени ее научной разработанности, формулировку цели и конкретных задач работы. Также представлены используемые материалы и методы, сформулированы основные научные положения и результаты, раскрыты их новизна, теоретическая и практическая значимость.

**В первой главе** представлено описание законов сохранения, лежащих в основе моделей роста-распространения, и проведен аналитический обзор исследований по тематике диссертации, послуживший базой для определения цели и задач работы.

**Вторая глава** описывает дискретизацию непрерывной нелинейной модели роста-распространения методом конечно-разностной аппроксимации. Для исходной начально-краевой задачи построена линейная разностная схема на шеститочечном шаблоне. Линеаризация достигнута за счет распределения множителей квадратичной нелинейности по разным временным слоям. Такой подход позволяет при дискретизации получить вместо системы нелинейных уравнений систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, что существенно снижает вычислительную сложность алгоритма решения. В рамках главы проведен анализ построенной схемы: доказано, что она имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй — по пространственной переменной, а также доказаны достаточные условия ее устойчивости.

**Третья глава** направлена на разработку и адаптацию методов дискретизации для непрерывных сингулярных моделей роста-распространения с оператором Бесселя. В основе подхода лежит применение специальных сплайнов, изначально предложенных для дискретизации стационарных сингулярных моделей. Их применение к нестационарной линейной сингулярной диффузионной модели в рамках метода Галеркина позволило исследовать сходимость приближенного решения к точному и получить оценку погрешности. Далее выполнена дискретизация нелинейной нестационарной

сингулярной модели путем комбинации метода аппроксимации нелинейной составляющей (из второй главы) и метода аппроксимации линейной сингулярной составляющей распространения. Завершает главу раздел, в котором построена разностная схема для плоской стационарной сингулярной модели распределения субстанции, аппроксимирующая обобщенное решение пониженной гладкости, и получена априорная оценка.

**Четвертая глава** посвящена описанию разработанного программного комплекса, включая пользовательский интерфейс, алгоритмы компьютерной реализации для регулярных и сингулярных моделей, диаграммы классов и сценариев. Приведены результаты вычислительных экспериментов. В качестве источника для сравнения натуральных данных с результатами численных экспериментов использовался набор данных из открытых публикаций о росте и распространении глиомы.

#### **Установленные в диссертации результаты и их научная новизна.**

1. Разработан, обоснован и протестирован эффективный линейный вычислительный метод для непрерывной нелинейной модели роста и распространения с применением современных компьютерных технологий, отличающийся от существующих тем, что он приводит к системе линейных алгебраических уравнений и позволяющий получить оценку порядка аппроксимации и достаточное условие устойчивости. Новыми в этой части исследования являются как оригинальный способ линеаризации за счет распределения сомножителей, образующих степенную нелинейность, по временным слоям, так и примененный к рассматриваемой задаче метод неопределенных коэффициентов для выделения семейства конечно-разностных схем с подходящими аппроксимационными свойствами. Новыми являются и собственно ключевые результаты второй главы о порядке аппроксимации и об устойчивости построенной конечно-разностной схемы, как и сама конечно-разностная схема.

2. Разработаны новые дискретные математические модели на основе непрерывной сингулярной модели распространения, непрерывной нелинейной сингулярной модели роста–распространения с помощью проекционно-сеточного метода Бубнова–Галеркина, отличающегося применением финитных сплайнов особого вида и позволяющего доказать оценку погрешности в весовом функциональном пространстве, а также дискретизация плоской непрерывной сингулярной стационарной модели распределения субстанции, отличающаяся учетом ослабленных требований к гладкости решения и позволяющая получить априорную оценку. Новыми здесь являются метод решения линейной нестационарной сингулярной задачи диффузии, который можно расценивать как развитие ранее разработанных проекционно-сеточных методов для сингулярных стационарных краевых задач, не получивших в свое время продолжения, а также результаты, связанные с оценкой погрешности метода в весовых функциональных пространствах.

Принцип суперпозиции диффузионной составляющей и составляющей роста привел к новой конечно-разностной схеме для сингулярной нелинейной модели роста-распространения. Конечно-разностные схемы для случаев повышенной (с оценкой порядка аппроксимации) и ослабленной (с априорной оценкой) гладкости в плоской сингулярной задаче распределения являются новыми. Новым является результат, связанный с существованием и единственностью сильного решения такой задачи.

3. На основе разработанной в рамках диссертации технологии создания дискретных линейных математических моделей создан комплекс программ, позволяющий осуществлять проведение вычислительных экспериментов в рамках исследования проблемы роста-распространения. Новизной обладают алгоритмы, лежащие в основе разработанного комплекса программ, диаграммы классов и сценариев.

Результаты, представленные в диссертации, обладают научной новизной и имеют значительную ценность для специалистов в сфере математического моделирования, численных методов и прикладного программирования.

**Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность.** Все положения и выводы, представленные в диссертации, сформулированы в ясной форме. Теоретическая часть исследования опирается на классические и современные методы математического и функционального анализа, а также вычислительной математики. Каждое утверждение сопровождается строгим доказательством в рамках общепризнанного математического формализма, что гарантирует их обоснованность и достоверность. При использовании результатов исследований других авторов приводятся соответствующие библиографические ссылки. Достоверность численных результатов подтверждена комплексной проверкой. В ситуациях, когда известно явное представление точного решения, выполнено прямое сравнение с ним результатов вычислительного моделирования. В случаях отсутствия явного представления точного решения корректность результатов верифицирована путем сопоставления с данными натуральных экспериментов. Продемонстрированная высокая точность расчётов служит убедительным подтверждением обоснованности и достоверности результатов, имеющих прикладное значение.

**Научная и практическая значимость результатов диссертационного исследования.**

Проведённая работа вносит вклад как в теоретическую область численных методов, так и в прикладную сферу построения дискретных моделей для нелинейных процессов и создания комплексов проблемно ориентированных программ. Теоретические результаты представляют ценность для развития арсенала методов анализа вычислительных алгоритмов и могут быть применены в дальнейших исследованиях сходимости приближённых

решений к точным. Практическая значимость работы заключается в создании инструментария для изучения процессов роста-распространения, что актуально для широкого круга предметных областей: медицины, эпидемиологии, популяционной динамики, теории горения и других. Особое прикладное преимущество диссертации связано с разработанными методами линеаризующей дискретизации. Предложенные подходы позволяют конструировать вычислительные алгоритмы линейной сложности, что существенно упрощает и ускоряет компьютерное моделирование исследуемых процессов. В этом состоит ключевое преимущество разработанных разностных методов по сравнению с традиционными нелинейными подходами.

**Апробация работы.** Результаты работы были доложены на IV Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование, программирование и прикладная математика» (г. Великий Новгород, 7–8 ноября 2022 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, 12–14 декабря 2022г.); на Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (г. Воронеж, 27 января–1 февраля 2023г.); на Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (г. Воронеж, 30 января–4 февраля 2025г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, из них 3 публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ и приравненных к ним, 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ, 2 публикации в изданиях, индексируемых в международной базе GeoRef, 7 публикаций в прочих изданиях. 11 публикаций выполнены без соавторов.

**Соответствие содержания диссертации автореферату и специальности.** Автореферат соответствует содержанию диссертации, полно и правильно отражает все основные результаты и положения диссертации. Диссертация соответствует паспорту специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки), в частности, следующим направлениям исследований: 1) разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (пункт 1); 2) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (пункт 3); 3) комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента (пункт 8).

#### *Замечания и вопросы по диссертационной работе*

1. Использована некорректная формулировка в частной научной задаче «Разработка ... математической модели ... модели роста и распространения». Исходя из содержания диссертации корректнее сформулировать

«разработан и реализован *подход к дискретизации ... модели роста и распространения*».

2. Использована общая нумерация утверждений, как полученных автором, так и классических, использованных по ходу изложения текста, что затрудняет оценку новизны полученных результатов (примером служат теоремы 2.3.1-2.3.4, опубликованные в классических монографиях А.А. Самарского, после которых следует теорема 2.3.5 (с доказательством) уже полученная автором без чёткого указания на авторство диссертанта.

3. Имеют место неточности в математических обозначениях. Например, на с. 12 пространство первоначально обозначено как  $\mathbb{R}^n$ , а далее по тексту без дополнительного пояснения обозначается просто как  $\mathbb{R}$ .

4. Имеет место неоднозначность в терминах и обозначениях, относящихся к различным частям диссертации. Например, используются одновременно термины и «глава», и «раздел», нумерация таблиц и формул должна быть сквозной в пределах раздела и др.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

#### **Общая оценка диссертационной работы**

Диссертация О.П. Барабаш может быть признана научно-квалификационной работой, в которой содержится решение многоаспектной научной задачи дискретизации нелинейных моделей роста-распространения. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно, о чем можно сделать вывод на основе анализа публикационной активности автора и сравнения основных результатов и положений, включенных в диссертацию, с результатами, включенными в публикации. Диссертация обладает внутренним единством. Все результаты диссертации являются новыми и свидетельствуют о личном вкладе автора диссертации в науку. В диссертации приводятся сведения о практическом использовании полученных автором диссертации научных результатов. Практико-ориентированные результаты могут быть рекомендованы к применению в исследованиях процессов роста-распространения и могут быть использованы в различных предметных областях: в медицине, эпидемиологии, популяционной динамике, теории горения. Теоретические результаты важны для пополнения средств исследования численных методов и могут быть использованы при анализе сходимости приближенных решений к точным при исследовании как конечно-разностных, так и проекционно-сеточных схем. Все результаты являются достоверными и обоснованными. Теоретические результаты математически строго доказаны, а практико-ориентированные результаты корректно верифицированы. Предложенные автором диссертации решения аргументированы и оценены по сравнению с другими известными решениями. Основные научные результаты диссертации в полной мере опубликованы в рецензируемых центральных российских и зарубежных научных изданиях. Количество публикаций, в которых излагаются основные научные результаты

диссертации, в рецензируемых изданиях соответствует установленным нормативам. Результаты диссертации апробированы на многих российских и международных конференциях. В диссертации соискатель ученой степени ссылается на автора и (или) источник заимствования материалов или отдельных результатов. При использовании в диссертации результатов научных работ, выполненных соискателем ученой степени лично и (или) в соавторстве, соискателем ученой степени отмечено в диссертации это обстоятельство.

Работа представляет собой законченное и целостное научное исследование, удовлетворяет пунктам 9-11,13,14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842.

Считаю, что диссертационная работа Барабаш Ольги Павловны на тему «Модифицированная дискретизация и программная реализация для нелинейных непрерывных математических моделей роста и распространения» является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение многоаспектной научной задачи дискретизации нелинейных моделей роста-распространения, а её автор – Барабаш Ольга Павловна, заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Официальный оппонент:

Меньших Валерий Владимирович,  
доктор физико-математических наук по специальности  
05.13.18 Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ  
(физико-математические науки), профессор;  
Заслуженный деятель науки Российской Федерации  
профессор кафедры математики и моделирования систем  
Федерального государственного казенного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Воронежский институт Министерства  
внутренних дел Российской Федерации»

Россия, Воронеж, 394065, проспект Патриотов, дом 53.

e-mail: [menshikh@list.ru](mailto:menshikh@list.ru)

Телефон: +7 (473) 200-52-10

Подпись, дата:

21.01.2026

В.В. Меньших

