

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертационную работу
Барабаш Ольги Павловны на тему «Модифицированная дискретизация
и программная реализация для нелинейных непрерывных математических
моделей роста и распространения», представленной на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук
по научной специальности

1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ».

Актуальность темы диссертационной работы. Непрерывные нелинейные диффузионно-логистические математические модели роста-распространения, основанные на уравнениях и системах из семейства уравнений реакции-диффузии, как форма закона сохранения в дифференциальной форме, возникают в различных областях знаний: в химии, эпидемиологии, генетике, онкологии, экономике, теории языка и т.д., начиная с первой четверти прошлого века. Для большинства нелинейных начально-краевых задач для уравнений и систем, возникающих при моделировании процессов роста-распространения, неизвестны формулы явного представления решений. Поэтому, с одной стороны, необходимы исследования качественных свойств этих задач и их решений как неотъемлемая часть анализа моделей, а с другой стороны, необходимы механизмы дискретизации - построения и исследования дискретных моделей, дающих приближенное решение исходных непрерывных задач. Диссертационное исследование Барабаш О.П. посвящено именно дискретизации непрерывных нелинейных математических моделей роста-распространения. Отдельный пласт рассматриваемых проблем связан с дискретизацией моделей роста-распространения, содержащих степенные сингулярности, порожденные оператором Бесселя. Во второй половине 20-го века и в 21 веке качественная теория краевых и начально-краевых задач для уравнений с такими сингулярностями развивалась достаточно интенсивно. Методы их численной аппроксимации изучены недостаточно полно или же не получили после 80-х годов прошлого века должного развития и систематизации. Необходимость разработки и последующего анализа комплекса дискретных моделей, описывающих процессы роста и распространения, определяет актуальность темы диссертации.

Структура и основные результаты. Диссертация структурно включает введение, четыре главы, заключение, список цитированной литературы и приложения. Объем работы составляет 155 страниц машинописного текста. Библиографический список содержит 124 наименования, среди которых — публикации автора по теме исследования, два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Во введении сформулированы основные исходные предпосылки, определяющие актуальность темы исследования, цель и задачи работы, охарактеризована степень научной разработанности проблемы, описаны методология, материалы и методы, изложены основные научные положения, результаты, их новизна, теоретическая и практическая значимость.

В первой главе приведен вывод законов сохранения, лежащих в основе моделей роста-распространения, представлен обзор литературы, на основании которого определены цели и задачи исследования.

Вторая глава посвящена построению конечно-разностной схемы для непрерывной нелинейной модели роста-распространения. Для исходной начально-краевой задачи предложена линейная шеститочечная разностная схема. Ключевой прием, обеспечивающий линеаризацию, состоит в рассредоточении множителей квадратичной нелинейности на разных временных слоях. Это позволяет заменить решение системы нелинейных алгебраических уравнений решением трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений, что кардинально снижает вычислительные затраты. Доказаны аппроксимационные свойства полученной разностной схемы (первый порядок по времени, второй — по пространству), найдены и обоснованы достаточные условия ее устойчивости.

В третьей главе решаются задачи дискретизации для сингулярных непрерывных моделей с оператором Бесселя. Методологическую основу составляют специальные финитные сплайны, первоначально предложенные для стационарных сингулярных моделей. Их применение в рамках метода Бубнова–Галеркина к нестационарной линейной сингулярной модели позволило исследовать сходимость и получить оценку погрешности в весовом пространстве. Далее проведена дискретизация нелинейной нестационарной сингулярной модели с помощью суперпозиции разработанного метода линеаризации и метода аппроксимации сингулярного оператора. Завершает главу раздел, посвященный дискретизации плоской стационарной сингулярной модели, для которой построена разностная схема, учитывающая обобщенный характер решения, получена априорная оценка для построенного метода.

Четвертая глава содержит описание реализованного программного комплекса, включая архитектуру, пользовательский интерфейс, алгоритмы моделирования для регулярных и сингулярных случаев. Приведены результаты вычислительных экспериментов. Для верификации алгоритма в случае регулярной модели использована уникальная комбинация начальных и граничных условий, допускающая явное решение. В остальных случаях, когда точное решение неизвестно, валидация проводилась путем сравнения с данными натурных экспериментов, для чего была выбрана предметная область (моделирование роста глиомы) с развитой эмпирической базой. Проведенная всесторонняя проверка подтвердила высокую точность вычислений.

Основные научные результаты, полученные лично соискателем, заключаются в следующем:

1. Разработан, теоретически обоснован и апробирован эффективный линейный вычислительный метод для непрерывной нелинейной модели роста и распространения. Его отличительная особенность — сведение задачи к системе линейных алгебраических уравнений, что позволило получить оценки порядка аппроксимации и достаточные условия устойчивости разностной схемы.

2. Построены новые дискретные математические модели на основе непрерывных сингулярных уравнений. Для этого применен проекционно-сеточный метод Бубнова–Галеркина с использованием специальных сплайнов, доказана оценка погрешности в весовом функциональном пространстве. Также выполнена дискретизация плоской стационарной сингулярной модели с учетом пониженной гладкости обобщенного решения и получена априорная оценка.

3. На основе разработанной технологии создания дискретных линейных моделей реализован комплекс программ, обеспечивающий проведение полного цикла вычислительных экспериментов для исследования процессов роста-распространения.

Обоснованность и достоверность результатов. Все научные положения и выводы диссертации сформулированы четко и однозначно. Теоретическая база исследования включает классические и современные методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, математического, функционального анализа и вычислительной математики. Каждое утверждение снабжено корректным математическим доказательством с использованием стандартного логического аппарата, что обеспечивает его обоснованность и достоверность. Привлечение для нужд исследования работ других авторов сопровождается соответствующими ссылками. Достоверность численных результатов обеспечена двухуровневой проверкой: путем сравнения с известными точными решениями (где это возможно) и путем валидации на данных натуральных экспериментов (в противном случае). Продемонстрированная высокая точность моделирования служит подтверждением достоверности прикладных результатов.

Научная новизна.

1. Разработанный О.П. Барабаш метод дискретизации нелинейной модели роста-распространения с помощью линейной конечно-разностной схемы является новым с точки зрения способа линеаризации (разнесения сомножителей по разным временным слоям), а кроме того, абсолютно новым является обоснование сходимости приближенного решения, построенного с помощью этой конечно-разностной схемы, к точному решению, включающее в себя оценку порядка аппроксимации (первый порядок по шагу времени и второй порядок по пространственной переменной) и доказательство устойчивости схемы при сформулированных автором достаточных условиях, проверяемых в режиме реального времени. Следует отметить также, что использование в диссертации метода неопределенных коэффициентов, который сам по себе, разумеется, не может расцениваться как новый, при построении сходящейся линейной конечно-разностной схемы для нелинейной начально-краевой задачи, может быть классифицировано как новая, оригинальная идея и как новый метод исследования дискретных моделей.

2. Построенная в третьей главе конечно-элементная схема линейной начально-краевой сингулярной задачи диффузии (распространения, согласно более часто применяемой в диссертации терминологии), является новым и ожидаемым развитием серии исследований стационарных сингулярных краевых задач и методов их дискретизации. Суперпозиция этой дискретной диффузионной модели и линеаризованной дискретизированной нелинейной составляющей роста является новым методом дискретизации нелинейной сингулярной модели роста-распространения. Также новым является метод дискретизации двумерной сингулярной краевой задачи, изложенный и обоснованный в конце третьей главы, причем априорная оценка является также новым результатом. Здесь следует отметить, что доказанный в диссертации факт существования и единственности сильного решения этой задачи также является новым научным результатом.

3. Разработанный и описанный в четвертой главе комплекс программ, обеспечивающий проведение полного цикла вычислительных эксперимен-

тов для исследования процессов роста-распространения, является программным продуктом с ярко выраженными признаками новизны, алгоритмы, на которых они основаны, в свою очередь являющиеся итогом диссертационных исследований, обладают научной новизной, как и разработанные в диссертации диаграммы классов и сценариев для каждой из программ комплекса.

Полученные в ходе исследования результаты являются новыми, представляют интерес для специалистов в математическом моделировании, численных методах и программировании и вносят значимый вклад в соответствующие области знания.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет выраженную двухаспектную значимость. С теоретической точки зрения, ее результаты развивают аппарат исследования вычислительных схем и могут быть использованы при построении и анализе численных методов. Практическая значимость заключается в создании эффективного набора средств для моделирования процессов роста-распространения, востребованного в таких областях, как медицина, эпидемиология, экология, теория горения. Ключевое практическое преимущество предложенных методов — возможность построения алгоритмов линейной вычислительной сложности, что обеспечивает существенное преимущество в скорости и эффективности по сравнению с методами, требующими решения нелинейных систем.

Апробация и публикации. Основные положения и результаты диссертации были представлены на ряде международных и всероссийских научных конференций, включая: IV Международную научно-практическую конференцию «Математическое моделирование, программирование и прикладная математика» (Великий Новгород, 2022); Международную конференцию «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2022); Международные научные конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (2023, 2025).

По материалам диссертации опубликовано 12 научных работ, в том числе 3 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ (и приравненных к ним), 2 статьи, индексируемые в международной базе GeoRef, и 7 публикаций в других изданиях. На программный комплекс получены два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Соответствие содержания диссертации автореферату и специальности. Автореферат соответствует содержанию диссертации, полно и правильно отражает все основные результаты и положения диссертации. Диссертация соответствует паспорту специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки), прежде всего, следующим направлениям исследований: 1) разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (пункт 1); 2) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (пункт 3); 3) комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента (пункт 8).

Замечания и вопросы по диссертационной работе

1. Конечно-разностная схема во второй главе, возможно, может быть улучшена до второго порядка по времени.

2. При определенном уникальном соотношении коэффициентов конечно-разностной схемы во второй главе схема становится явной. Это не выделено в тексте диссертации. Возникает естественный вопрос: характеризуется ли этот случай какими-то особенностями или он не отличается (кроме простоты численной реализации) от остальных случаев соотношения коэффициентов с точки зрения аппроксимации и устойчивости?

3. В третьей главе построена конечно-разностная схема для сингулярной двумерной стационарной модели распределения на принципах, отличных от тех, которые использовались в диссертации ранее, в результате чего стало возможным приближать неклассическое сильное решение, понимаемое в обобщенном смысле. Возникает вопрос: нельзя ли доработать эту схему до нестационарной дискретной модели роста-распространения или же на этих принципах построить дискретизацию нестационарных моделей, рассмотренных перед этим?

4. Имеется незначительное число опечаток, стилистических недочетов. Некоторые сокращения, несмотря на их общепризнанность, следовало разъяснить (КТ, МРТ, СЛАУ). Название раздела 3.1.3. «Интерполяционные свойства пространства $H_\gamma^2(x_j, x_{j+1})$ » может быть воспринято как отсылка к теории интерполяции банаховых пространств, к которой материал этого раздела не имеет никакого отношения: в этом разделе речь идет об интерполяции элементов пространства. На стр. 13 символ v используется для обозначения вектора нормали, а на стр. 15 v_0 - количество нейтронов, образующихся при делении, то есть допущено дублирование обозначений. Стр. 83. Фраза «Матрица $B \square$ невырождена, поскольку является матрицей Грама $\{\varphi_i\}$ », видимо предполагалась в виде «Матрица $B \square$ невырождена, поскольку является матрицей Грама системы функций $\{\varphi_i\}$ ». Стр. 98. Фраза «Оператор L имеет вид» некорректна, поскольку далее следует не вид оператора, а результат его действия.

Указанные замечания не снижают значимости и качества полученных результатов и не влияют на положительную оценку диссертационной работы.

Заключение. Диссертационная работа О.П. Барабаш представляет собой законченный научно-квалификационный труд, содержащий решение многогранной исследовательской задачи, связанной с дискретизацией нелинейных моделей роста-распространения. Проведенный анализ публикационной активности автора и сопоставление материалов диссертации с опубликованными результатами позволяют утверждать, что все представленные в работе результаты получены соискателем самостоятельно.

Работа характеризуется целостностью и внутренним единством. Полученные результаты обладают научной новизной и отражают значительный личный вклад автора в развитие научного знания. В диссертации приведены данные о практическом применении разработанных научных положений.

Результаты, ориентированные на практическое применение, могут быть рекомендованы к использованию в моделировании при изучении процессов роста-распространения в различных предметных областях, включая химию, медицину, эпидемиологию. Теоретические выводы работы имеют существенное значение для развития методологического аппарата вычислительной математики и могут быть использованы при анализе численных методов.

Все представленные в диссертации результаты и положения являются достоверными и обоснованными. Теоретические положения подтверждены

строгими математическими доказательствами, а практические результаты прошли корректную процедуру верификации. Предложенные автором решения аргументированы и сопровождаются сравнительной оценкой с существующими аналогами.

Основные научные положения и результаты диссертации в полном объеме опубликованы в рецензируемых изданиях. Количество публикаций соответствует установленным нормативным требованиям. Материалы работы неоднократно докладывались и получили апробацию на российских и международных научных конференциях.

В тексте диссертации соблюдены академические нормы цитирования: имеются корректные ссылки на авторов и источники заимствований. В случаях использования результатов, полученных лично соискателем или в соавторстве, данное обстоятельство соответствующим образом отражено.

Таким образом, диссертация удовлетворяет пунктам 9-11,13,14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842.

Диссертационная работа Барабаш Ольги Павловны на тему «Модифицированная дискретизация и программная реализация для нелинейных непрерывных математических моделей роста и распространения» является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение многоаспектной научной задачи дискретизации нелинейных моделей роста-распространения, а её автор – Барабаш Ольга Павловна, без сомнения, заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Официальный оппонент:

Рошупкин Сергей Александрович,
кандидат физико-математических наук
по специальности
01.01.02 дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное
управление (физико-математические науки),
доцент; директор Института цифровых
технологий и математики
Федерального государственного
бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Елецкий государственный
университет имени И.А. Бунина»
(ЕГУ им. И.А. Бунина).
Россия, Липецкая обл.,
г. Елец. 399770.
Улица Коммунаров, дом 28, 1.
e-mail: roshupkinsa@mail.ru
Телефон: +7 (47467) 2-27-66

Подпись, дата:

Подпись С.А. Рошупкина «УДОСТОВЕРЯЮ»
Ученый секретарь ЕГУ им. И.А. Бунина



С.А. Рошупкин

Т. М. Саженалова