

«УТВЕРЖДАЮ»

Президент Государственного казенного
научного учреждения «Академия наук
Чеченской Республики»,
доктор исторических наук


Д.В. Умаров
« 15 » января 202 6 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Государственного казенного научного учреждения
«Академия наук Чеченской Республики»

на диссертационную работу Барабаш Ольги Павловны на тему
«Модифицированная дискретизация и программная реализация для
нелинейных непрерывных математических моделей роста и распространения»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по научной специальности 1.2.2. «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ».

Актуальность темы диссертации. Предметом диссертационного исследования является разработка и анализ свойств семейства дискретных моделей, описывающих процессы роста и распространения. Изучение рассматриваемых в диссертации моделей является актуальной и представляющей несомненный теоретический и практический интерес задачей. Модели созданы на основе классических непрерывных уравнений, фундаментом для которых служит дифференциальный закон сохранения субстанции. В работе основное внимание сосредоточено на методах дискретизации, позволяющих реализовать компьютерное моделирование, – а именно на сеточных конечно-разностных и проекционных подходах, что определяет их актуальность.

Отправной точкой диссертационного исследования явилось квазилинейное уравнение, относящееся к семейству уравнений реакции-диффузии, или роста-распространения, или диффузионно-логистических уравнений, со степенной нелинейностью. Интерес к уравнениям этого типа с 20-х годов 20-го века постоянно растет. Уравнение роста-распространения используется в свете популяционной динамики для описания пространственного распространения полезной аллели. Используется оно и для моделирования роста и распространения популяций (не человеческих). Кроме того, в последние десятилетия оно применяется как инструмент моделирования опухолей, в частности, глиомы.

При всей важности исследования качественных свойств решений начально-краевых задач для уравнений реакции-диффузии (роста-распространения) актуальной является проблема построения решений таких задач. Однако к настоящему времени явное представление указанных решений известно лишь для узкого семейства наборов краевых и начальных условий, что

в свою очередь влечет за собой острую потребность в построении дискретных моделей процессов роста-распространения, позволяющих получать приближенные решения в явном виде. Среди широко использующихся в настоящее время методов дискретизации непрерывных моделей можно выделить конечно-разностные методы и проекционно-сеточные методы, которые были выбраны в диссертации. Многие вопросы, связанные с дискретизацией нелинейных моделей, а также моделей (даже линейных) с решениями пониженной гладкости, понимаемыми в том или ином обобщенном смысле, остаются открытыми.

Отдельного упоминания заслуживают поднятые в диссертации проблемы, связанные с дискретизацией непрерывных моделей процессов роста-распространения со степенными особенностями, порожденными оператором Бесселя. Теория краевых, начально-краевых задач для уравнений с оператором Бесселя достаточно бурно развивается с первой половины – середины прошлого века. При этом многие вопросы дискретизации таких задач остаются открытыми.

Ввиду изложенного выше актуальность темы диссертационного исследования не вызывает сомнений.

Характеристика структуры диссертации и наиболее существенных научных результатов, полученных лично соискателем. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 155 страницах. Список литературы содержит 124 наименования, включает статьи, содержащие результаты работы, а также два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, характеризуется степень ее разработанности, формулируются цель и порождаемые ей задачи исследования, описываются материалы и методы, основные результаты и положения диссертационного исследования, их научная новизна, практическая и теоретическая значимость.

Первая глава содержит описание законов сохранения, приводящих к моделям роста-распространения, а также обзор результатов, связанных с темой диссертационного исследования, обосновывающий цели и задачи исследования.

Вторая глава посвящена дискретизации с помощью конечно-разностной аппроксимации непрерывной нелинейной модели роста-распространения. Построена линейная разностная схема на шеститочечном шаблоне. Линеаризация достигается благодаря использованию множителей в квадратичной нелинейности на различных временных слоях. Эта идея при своей простоте дает огромный эффект: вместо системы нелинейных уравнений получается трехдиагональная система линейных уравнений. Подобная модификация приводит к алгоритму с пониженной сложностью. В этой же главе проведено исследование предложенной разностной схемы. Доказано, что эта разностная схема обладает первым порядком аппроксимации по шагу времени τ и вторым по шагу пространственной переменной h . Получены достаточные условия устойчивости разностной схемы.

Третья глава посвящена построению и модификации инструментов дискретизации непрерывных сингулярных моделей роста-распространения с

оператором Бесселя. Используются сплайны специального вида для дискретизации стационарных сингулярных непрерывных моделей. О.П. Барабаш сначала применила их для дискретизации непрерывной линейной нестационарной сингулярной диффузионной модели с помощью метода Галеркина. Исследован вопрос о сходимости построенного приближенного решения к точному. Получена оценка погрешности. Далее проведена дискретизация непрерывной нелинейной нестационарной сингулярной модели роста-распространения с помощью разностной схемы, вобравшей в себя метод аппроксимации нелинейной составляющей роста, предложенный во второй главе и метод аппроксимации линейной составляющей распространения, предложенный ранее в третьей главе. Завершается третья глава разделом, посвященным дискретизации плоской стационарной сингулярной модели распределения субстанции. Построена разностная схема, позволяющая приближать решение пониженной гладкости, понимаемое в обобщенном смысле. Получена априорная оценка.

Четвертая глава содержит описание комплекса программ: описание интерфейса пользователя, алгоритмов симуляции регулярной и сингулярной моделей роста-распространения, диаграмм классов и сценариев. Приведены результаты численных экспериментов. Следует отметить, что для регулярной модели роста-распространения имеется уникальное сочетание начальных и краевых условий, для которого известно явное представление решения. Это удобно для сравнения приближенного решения, полученного в результате работы программы, с точным решением. Это успешно продемонстрировано в диссертации. В остальных случаях точное решение неизвестно, так что проверка результатов работы программы может быть осуществлена лишь сравнением с данными натуральных экспериментов. При универсальности модели роста-распространения для этой цели следует найти сферу применения с достаточно большой доступной базой результатов. О.П. Барабаш провела многогранную проверку для модели роста-распространения глиомы, которая продемонстрировала высокую точность вычислений.

В диссертации установлены следующие новые научные результаты:

1. Разработан, обоснован и протестирован эффективный линейный вычислительный метод для непрерывной нелинейной модели роста и распространения с применением современных компьютерных технологий, отличающийся от существующих тем, что он приводит к системе линейных алгебраических уравнений и позволяющий получить оценку порядка аппроксимации и достаточное условие устойчивости.

2. Разработаны новые дискретные математические модели на основе непрерывной сингулярной модели распространения, непрерывной нелинейной сингулярной модели роста-распространения с помощью проекционно-сеточного метода Бубнова-Галеркина, отличающегося применением финитных сплайнов особого вида и позволяющего доказать оценку погрешности в весовом функциональном пространстве, а также дискретизация плоской непрерывной сингулярной стационарной модели распределения субстанции, отличающаяся учетом ослабленных требований к гладкости решения и позволяющая получить априорную оценку.

3. На основе разработанной в рамках диссертации технологии создания дискретных линейных математических моделей создан комплекс программ, позволяющий осуществлять проведение вычислительных экспериментов в рамках исследования проблемы роста-распространения.

Новизна полученных результатов и выводов.

Представленные в диссертационной работе О.П. Барабаш результаты являются новыми и представляют несомненный интерес для специалистов в области математического моделирования, численных методов, прикладного программирования.

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов, сформулированных в диссертации. Результаты диссертационной работы ясно сформулированы. В диссертационном исследовании в теоретической части использованы классические и современные методы теории уравнений в частных производных, математического анализа, функционального анализа, вычислительной математики. Все утверждения строго доказаны с помощью стандартных логических математических конструкций, что подтверждает их обоснованность и достоверность. При использовании работ других авторов даны необходимые ссылки. Для случая известного явного представления точного решения проведено сравнение приближенного решения с точным решением. В случаях, когда точное решение неизвестно, осуществлено сравнение с данными натуральных экспериментов. Продемонстрирована высокая точность вычислений. Это свидетельствует об обоснованности и достоверности практически ориентированных результатов.

Значимость результатов диссертации. Диссертационная работа О.П. Барабаш имеет как теоретические результаты в области численных методов, так и практически ориентированные результаты в области построения дискретных моделей нелинейных процессов. Теоретические результаты обладают значимостью для пополнения арсенала инструментов исследования численных методов и могут быть использованы в дальнейшем при анализе сходимости приближенных решений к точным. Практически ориентированные результаты обладают значимостью для исследования процессов роста-распространения и могут быть использованы в различных предметных областях: в медицине, эпидемиологии, популяционной динамике, теории горения. Особая практическая значимость диссертации заключается в том, что разработанные в ней методы линейной дискретизации нелинейных моделей роста и распространения приводят к вычислительным алгоритмам, имеющим линейную сложность, что упрощает их использование при исследовании моделируемых процессов. В этом состоит преимущество разработанных в диссертации разностных методов по сравнению с известными нелинейными методами.

Рекомендации к использованию. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях процессов роста-распространения, а также в исследованиях численных методов, ведущихся в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Воронежском государственном университете, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша, Московском физико-

техническом институте, а также при чтении специальных курсов студентам и магистрантам математических и естественно-научных направлений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: на IV Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование, программирование и прикладная математика» (г. Великий Новгород, 7–8 ноября 2022 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.); на Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (г. Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г.); на Международной научной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (г. Воронеж, 30 января – 4 февраля 2025 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, из которых публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ и приравненных к ним – 3, индексируемые в международной базе GeoRef – 2, публикации в прочих изданиях – 7. Получены два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Соответствие содержания диссертации автореферату и специальности. Автореферат соответствует содержанию диссертации, полно и правильно отражает все основные положения диссертации. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Замечания к диссертационной работе.

1. Представляется, что раздел «1.3. Моделирование роста и распространения глиом» перегружен специальными медицинскими сведениями. Следовало ограничиться сведениями, необходимыми для проведения численного эксперимента, описанного в четвертой главе.

2. Теорема 3.4.2 о существовании и единственности сильного решения сингулярной стационарной краевой задачи, доказанная в диссертации, заслуживает включения в список основных результатов диссертации. Правда, эту теорему можно обобщить на области более сложного вида.

3. После получения результатов по дискретизации плоской сингулярной краевой задачи, возможно, следовало бы перейти к дискретизации нестационарной плоской сингулярной модели, хотя бы линейной.

4. Заголовок раздела «3.1.3. Интерполяционные свойства пространства...» воспринимается неоднозначно: в этом разделе речь идет об интерполяции функций из весовых пространств и оценке погрешности интерполяции в нормах этих пространств, но не об интерполяции пространств, как может показаться из заголовка.

5. Предложенный в диссертации метод линейной дискретизации можно обобщить на степенные нелинейности с более высокими степенями, чем квадратичные.

Сделанные замечания не снижают общую положительную оценку диссертационной работы О.П. Барабаш.

Диссертация представляет собой законченное научное исследование, выполненное на актуальную тему, в котором получены новые теоретические и практически ориентированные результаты

Заключение. Вышеизложенное позволяет заключить, что диссертационная работа О.П. Барабаш «Модифицированная дискретизация и программная реализация для нелинейных непрерывных математических моделей роста и распространения» соответствует требованиям пунктов 9-14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 года № 842 (в ред. Постановлений Правительства РФ от 21.04.2016 № 335, от 02.08.2016 № 748, от 29.05.2017 № 650, от 28.08.2017 № 1024, от 01.10.2018 № 1168, от 20.03.2021 № 426, от 11.09.2021 № 1539, с изменениями, внесенными Постановлением Правительства РФ от 26.05.2020 № 751), а ее автор – Барабаш Ольга Павловна – заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Отзыв подготовил доктор физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, доцент, заведующий сектором физико-математических наук отдела физико-математических и технических наук Центра проблем материаловедения Государственного казенного научного учреждения «Академия наук Чеченской Республики», Умаров Хасан Галсанович.

Отзыв рассмотрен и утвержден на заседании сектора физико-математических наук отдела физико-математических и технических наук Центра проблем материаловедения Государственного казенного научного учреждения «Академия наук Чеченской Республики»,

протокол № « 1 » от « 15 » января 2026 г.

Заведующий сектором физико-математических наук
отдела физико-математических и технических наук
Центра проблем материаловедения Государственного
казенного научного учреждения «Академия наук
Чеченской Республики» Умаров Хасан Галсанович

 Х.Г. Умаров

Сведения о ведущей организации.

Государственное казенное научное учреждение «Академия наук Чеченской Республики» (ГКНУ «Академия наук Чеченской Республики»).

Почтовый адрес: 364043, ЧР, г. Грозный, ул. Вахи Алиева, 19а

Адрес официального сайта в сети «Интернет»: <https://anchr.ru>

Телефон: +7 928 478-22-11

Адрес электронной почты: academy_chr@mail.ru

