

ФГБОУ ВПО ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

**Ноаман Салам Абдулхалек Ноаман**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВ СЛОЖНЫХ  
ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ МИКРОСТРУКТУРНЫХ  
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

**05.13.18 - математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук**

**Научный руководитель  
доктор технических наук, профессор  
Вервейко Николай Дмитриевич**

Воронеж 2015

## Содержание

	Стр.
<b>Введение</b>	5
<b>Глава 1. Математическая модель движения деформируемых материалов с учётом их характерного линейного размера представительного элемента объёма <math>\Delta V = h^3</math></b>	13
1.1. Иерархия математических моделей взаимодействия деформируемых материалов с твердыми поверхностями .....	13
1.2. Законы движения элементарного объема вязкопластического микроструктурного материала.....	17
1.3. Кинематические характеристики деформирования представительного объема $\Delta V$ .....	20
1.4. Реологические уравнения микроструктурного вязкопластического материала.....	20
1.5. Математическая модель стационарного течения микроструктурного вязкопластического материала в форме системы дифференциальных уравнений для скорости течения.....	21
1.6. Особенности исследования задач течения и деформирования микроструктурных вязкопластических материалов .....	25
<b>Глава 2. Вращательное движение вязкопластического микроструктурного материала в плоских зазорах с кольцевыми стенками</b>	27
2.1. Вращательное движение вязкопластического микроструктурного материала в кольцевом зазоре .....	27
2.2. Вращательное движение вязкопластического микроструктурного материала в зазоре между неконцентрическими окружностями.....	32
2.2.1. Постановка задачи .....	33
2.2.2. Постановка задачи течения микроструктурной вязкой	

жидкости в безразмерной форме .....	36
2.2.3. Внутреннее погранслоное нулевого порядка разложение скоростей в степенной ряд по $\delta$ .....	37
2.2.4. Нулевое приближение внешнего разложения - $\hat{w}_0(\xi, \varphi)$ , $\hat{v}_0(\xi, \varphi)$ .....	41
2.2.5. Внешнее разложения первого порядка скоростей $w_\delta$ и $v_\delta$ в разложении по малому параметру $\delta$ .....	45
2.2.6. Внешнее разложения первого порядка для скоростей $w_\varepsilon$ и $v_\varepsilon$ в разложении по малому параметру–эксцентриситету $\varepsilon$ .....	48
<b>Глава 3. Вращательное движение микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с эллиптической границей</b> .....	51
3.1. Постановка задачи.....	51
3.2. Анализ граничных условий .....	54
3.3. Полная постановка задачи течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре, образованном внешним эллипсом и вращающимся с угловой скоростью $\omega_0$ внутренним цилиндром с учетом малых параметров $\varepsilon$ и $\delta$ с точностью до величин первого порядка $\varepsilon^1$ и $\delta^1$ .....	57
3.4. Построение поля скоростей течения в пограничном слое.....	58
3.5.1. Построение внешнего разложения – решения исследуемой задачи в виде степенного ряда по малым параметрам $\delta$ и $\varepsilon$ .....	60
3.5.2. Внешнее разложение нулевого порядка в разложении по малым параметрам $\delta$ и $\varepsilon$ .....	61
3.5.3. Внешнее разложение первого порядка по параметру $\delta$ для скорости течения $V^\delta$ и $w^\delta$ .....	63
3.5.4. Внешнее разложение $V^\varepsilon, w^\varepsilon$ первого порядка по параметру	

$\varepsilon$ (эксцентриситету внешней эллиптической границы) для скорости течения .....	65
<b>Глава 4. Метод конечных элементов МКЭ с нелинейными базисными функциями компьютерного моделирования сингулярных задач течения микроструктурного материала</b>	<b>70</b>
4.1. Особенности численного моделирования задач вращательного движения микроструктурного вязкопластического материала.....	70
4.2. Выбор численного алгоритма решения задачи о течении вязкопластического материала при наличии неизвестных заранее границ отвердевания материала.....	72
4.3. Формулировка дифференциальной задачи .....	72
4.4. Характерные свойства метода конечных разностей решения задачи .....	73
4.5. Характерные свойства метода конечных элементов (МКЭ) решения дифференциальных уравнений с выбором нелинейных базисных функций .....	74
4.6.1. Конечно-разностная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка на сетке методом конечных элементов.....	77
4.6.2. Вычислительный алгоритм построения решения системы линейных алгебраических уравнений, реализующих метод конечных элементов .....	79
4.6.3. Схема алгоритма расчёта скорости .....	82
4.6.4. Алгоритма расчёта скорости .....	84
<b>Заключение</b>	<b>90</b>
<b>Основные публикации по теме диссертации</b>	<b>92</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>95</b>
<b>Листы программы</b>	

## Введение

**Актуальность темы.** Современные технологические процессы в машиностроении, строительном деле, биотехнологиях используют не только естественные материалы, но и, в большинстве случаев, искусственные материалы, обладающие заранее заданными свойствами. К таким материалам можно отнести пропант (полимерный материал с включением в него твердых плавающих шариков, которые после гидроразрыва нефте- и газовых пластов создают искусственные фильтры), искусственные смазки с добавлением твердых нано- и микрочастиц и ряд других. Проведение инженерных расчетов течения и деформирования таких материалов требует разработки новых математических моделей, развивающих классические подходы, и новых математических методов решения построенных задач, содержащих малые параметры.

Построение новых математических моделей, как правило, связано с развитием классических моделей вязкой жидкости Ньютона, Навье, Стокса путем учета моментных напряжений Эрингеном А. К., Аэро Э. Л., Булыгиным А. Н., Кувшинским Е. В. [32, 97, 98, 157-161, 164, 166-174, 176-179, 181, 182, 184-194] и другими.

Введение в рассмотрение малых, но не бесконечно малых, представительных объемов Эрингеном А. К., Николаевским В. Н., Вервейко Н. Д. привело к необходимости учета параметров микрообъемов в выражениях для деформаций, скоростей деформаций и в уравнениях баланса количества движения и момента количества движения.

Развитие математического моделирования непосредственно связано с построением новых математических моделей с учетом дополнительных характеристик объектов, уточнением и разработкой новых методов анализа существующих моделей, использованием новых численных алгоритмов, разработкой эффективных программных комплексов. Следует отметить, что

модели, построенные с учетом микроструктуры и времени релаксации, включают в себя дополнительные диссипативные эффекты, что приводит к возможности построения устойчивых, явных конечно-разностных схем [34-36, 39, 40, 51, 52, 57-59, 66, 72, 76, 83, 94, 108, 137-141, 150]. В современных условиях, когда происходит активное использование многоядерных процессоров и распределенных вычислений, этот фактор может стать решающим при выборе модели описания деформирования сплошной среды [16-18, 24, 25, 42, 44, 45, 48-56, 64, 73-75, 84, 96-98, 119, 122, 123, 127, 128, 158, 159, 161].

Можно выделить три основных направления исследований внутренних стационарных взаимодействий между структурными элементами: континуальный, статистический и структурно-феноменологический.

Первый метод приводит к уравнениям Навье-Стокса, следующие приближения приводят к уравнениям с более высоким порядком пространственных производных, что вызывает существенные трудности при их численном решении [77-79, 99-101, 111, 117, 118, 120, 129, 130].

Структурно-феноменологическое направление основано на пересмотре основных гипотез механики сплошных сред. Оно занимает промежуточное положение между классическим описанием сплошных сред и статистической физикой. Здесь следует отметить работы А. М. Кривцова [96,97], И. А. Кунина [98], Б. Е. Победря [121-123], А. К. Эрингена [164, 172, 173] и др. [174]

Получил широкое распространение подход, основанный на введении в представительный бесконечно малый объем дополнительных степеней свободы [132,135] (ротационных, осцилляционных или способностей к микродеформации). В результате чего появилась возможность учитывать внутреннюю структуру (микроструктуру) реальных материалов (зернистость, волокнистость и т. д.) [37,38]. Первоначально данный подход был предложен в 1909 [170] году путем учета ротационных степеней свободы и

впоследствии получил название континуум Коссера. В 1911 году была опубликована работа Леру, в которой происходил учет микродеформации бесконечно малого представительного объема. Особый интерес к исследованию неклассических континуумов возник в 50 – 60-е годы ввиду широкого внедрения композиционных материалов. В эти годы были выполнены работы В. Т. Койтера [93], Р. Д. Миндлина [181], В. Новацкого [112], Е. Рейснера [122], Л. И. Седова [142-145, 175] и др. Особое место в дальнейшем развитии данного подхода занимают исследования распространения различных видов волн в таких континуумах. В настоящее время данное направление активно развивается в работах отечественных и зарубежных авторов [5, 63, 64, 127, 128, 145].

Учет микроструктуры материала также возможен за счет уточнения основных кинематических характеристик сплошной среды. Данный подход предложен в работах Н. Д. Вервейко совместно с П. П. Сумцом, С. А. Шашкиной, М. И. Быковой [6, 48-56].

Введение элементарного объема также ставит вопрос о применимости методов механики сплошных сред при исследовании наноструктур с использованием совместного подхода Лагранжа и Эйлера [1, 33, 68, 85, 87, 88, 99-105, 131, 142-145, 147, 162, 163] в периодических средах. Некоторые исследователи считают, что процесс расчета механических характеристик должен проходить в рамках методов молекулярной механики [178-180].

Учет характерного размера микроструктуры и времени релаксации обычно необходим в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. В связи с этим следует отметить работы Г. И. Быковцева [46], А. А. Буренина [42,43], В. И. Рязских [136], И. А. Викторова, Ю. М. Мяснянкина, А. Д. Чернышева, Н. Д. Вервейко и др. Характерный размер микроструктуры вносит существенный вклад в описание процессов в задачах теории оболочек, где один из характерных размеров системы достаточно мал.

В настоящее время в зарубежной и отечественной литературе активно ведутся исследования, направленные на учет дополнительных физических характеристик реально существующих сред [6-15, 165-169, 171, 174, 176-178, 180]. Следует отметить, что до конца не решен вопрос о границах применимости того или иного метода исследования для конкретной практической задачи.

Предложенный в диссертационной работе подход базируется на классическом подходе Эйлера, используемом при описании неупругих сред [87, 88, 142-145, 152-155], сплошной среды в виде непрерывного поля осредненных физических характеристик. Для проведения процедуры осреднения представительный объем должен обладать определенными размерами, причем при его уменьшении погрешность вычисления осредненных характеристик будет возрастать. Характерной величиной порядка погрешности, подхода развиваемого в диссертации, является величина  $\delta = h/L$ . Идеальный случай  $\delta \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  соответствует классическому подходу в механике сплошных сред.

Особенности решения дифференциальных задач с малым параметром представляют собой достаточно серьезные затруднения, и в различных ситуациях они исследованы Ершовым Л. И., Иевлевым Д. Д. Перовым А. И., Задорожным В. Г., Найфе А. К., Коулом В. Ж. [47, 80, 81, 86-88, 95, 110].

Большой вклад в решение задач с особенностями внесли механики воронежской школы – Спорыхин А. Н., Артёмов М. А., Чернышов А. Д., Вервейко Н. Д., Ковалев А. В., Шашкин А. И и др. [45, 52, 148, 159].

Построенные математические модели течения микроструктурных материалов позволили описать такие эффекты течения, как проскальзывание вдоль границы и учесть образование застойных твердых зон [57, 58].



Диссертация посвящена разработке математической модели течения микроструктурного вязкопластического материала, постановке граничных условий на неподвижных и подвижных границах и границе затвердевания материала. В качестве конкретной задачи течения микроструктурного вязкопластического материала рассматривается вращательное течение между двумя почти цилиндрическими поверхностями, которое исследуется методом малого параметра и численным методом конечных элементов.

**Цели и задачи исследования.** Целью проведенной работы является построение замкнутой математической модели плоского вращательного течения микроструктурного вязкопластического материала в почти цилиндрическом зазоре и расчет поля скоростей течения аналитическими и численными методами. Поставленная цель достигается путем уточнения системы дифференциальных уравнений в частных производных плоского течения микроструктурного вязкопластического материала в полярных координатах, постановки граничных условий с учетом малых параметров микроструктуры, форм границ области течения и решения следующих задач:

- исследования вращательного течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с внешней эллиптической границей;
- исследования вращательного течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с внутренней эксцентрично вращающейся границей;
- разработки варианта МКЭ с нелинейными базисными функциями и программы на ЭВМ расчета основного вращательного течения в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач использованы аналитические методы механики сплошных сред, теории возмущений (малого параметра), численные методы конечных элементов (линейной алгебры) и методы программирования в среде Delphi.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Формулировка граничных условий течения микроструктурного вязкопластического материала на произвольной подвижной границе и на границе затвердевания материала.

2. Расчет методом малого параметра поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с внешней эллиптической границы.

3. Расчет поля методом малого параметра поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с эксцентрично вращающимся внутренним цилиндром.

4. Разработка варианта МКЭ с нелинейными базисными функциями для расчета основного течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре между цилиндрами.

**Научная новизна.** К новым научным результатам, полученным в диссертации относятся:

- постановка граничных условий течения микроструктурного вязкопластического материала на подвижной и неподвижной поверхностях и на границе отвердевания материала;

- построение поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с внешней эллиптической границы;

- построение поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с эксцентрично вращающимся внутренним цилиндром;

- построение варианта алгоритма МКЭ с нелинейными базисными функциями и программы в среде Delphi, расчет внешнего течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре между эксцентричными цилиндрами.

**Достоверность.** Все научные результаты, представленные в диссертации получены путем корректного применения теории уравнений в частных производных, методов малого параметра для решения регулярно и сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, методов конечных элементов с нелинейными базисными функциями, методов линейной алгебры, решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, методов прогонки, использованием стандартных программ построения пространственных графиков и правилами программирования в среде Delphi.

**Практическая значимость исследования.** Практическая значимость результатов диссертации определяется областью их применения в ситуациях, когда отсутствуют методы расчета течения микроструктурного вязкопластического материала, – это течение материалов в химических технологиях, пульпы в горнодобывающей промышленности, сложных растворов в технологиях гидроразрывов пластов и др.

Использованные в диссертации методы малого параметра и МКЭ могут служить частью общих курсов и спецкурсов для магистров, обучающимся по специальности «Математическое моделирование, механика деформируемого твердого тела» и ряда других.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на кафедре теоретической и прикладной механики, на научных сессиях факультета ПММ Воронежского государственного университета и на следующих конференциях:

1. Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Россия, г. Воронеж, 12 – 14 декабря 2013 г.
2. VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела, Россия, Чебоксары, 16 – 21 июня 2014 г.

3. Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы науки, технологии и производства», Россия, г. Санкт-Петербург, 26-27 сентября 2014 г.

4. IX Международная научно-практическая конференция «Инновации в науке: применение и результаты», Россия, г. Новосибирск, 17-18 октября 2014 г.

5. Международный молодежный симпозиум «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения», Россия, г. Воронеж, 18-19 ноября 2014 г.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, перечень которых приведен в конце автореферата, в том числе 2 статьи опубликованы в журналах из списка ВАК.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка. Работа содержит 115 страниц машинописного текста, на которых приведены 39 рисунков и листы программы на Delphi.

# **Глава 1. Математическая модель движения деформируемых материалов с учётом их характерного линейного размера представительного элемента объёма $\Delta V = h^3$**

## **1.1. Иерархия математических моделей взаимодействия деформируемых материалов с твердыми поверхностями**

Одной из самых простых и, в историческом плане, первой является модель взаимодействия подвижных относительно друг друга поверхностей, при которой не происходит деформирования или течения самих материалов. Силовое взаимодействие поверхностей определяется при этом законом Кулона сухого трения [65, 149]. Отметим, что деформирование трущихся материалов происходит в очень тонкой области взаимодействия тел. Актуальность исследования такого взаимодействия обусловлена широким распространением этого явления как в обычных условиях, так и в условиях низких температур при вакууме. Главными факторами при этом являются физико-химические процессы переноса вещества в тонких слоях.

Модель сухого взаимодействия поверхностей может быть представлена (схематически на рис. 1) в форме закона Кулона-Амонтона

$$F_{Tp} = Fp_n \tag{1.1}$$

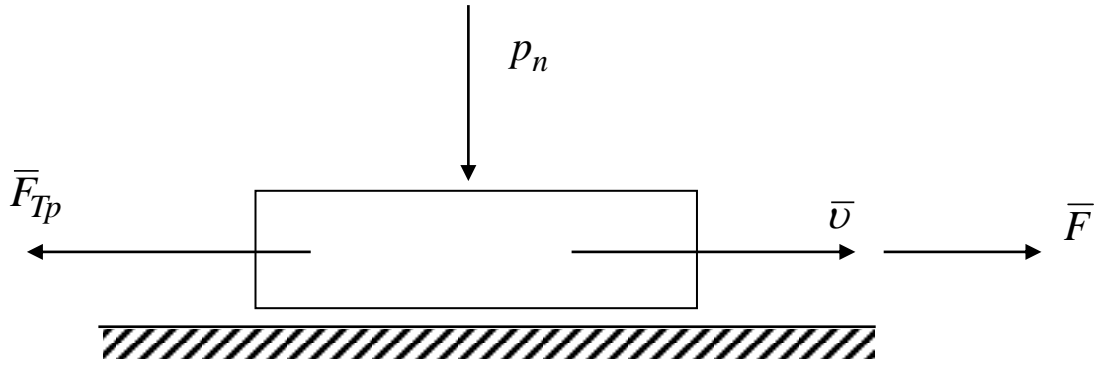


Рис. 1.1. Схематическое изображение модели сухого трения при взаимодействии поверхностей ( $\bar{F}$  - действующая сила на один из объектов;  $p_n$  - нормальная сила взаимодействия между поверхностями;  $\bar{F}_{Tp}$  - сила сопротивления (трения);  $\bar{v}$  - скорость относительного движения поверхностей).

Векторная запись закона Кулона (1.1) имеет нелинейный вид

$$\bar{\sigma}_{h\tau} = -f \sigma_{mn} \bar{v} / v \quad (1.2)$$

В случае динамического взаимодействия упругих тел при наличии поверхностных волн закон сухого трения Кулона-Амонтона в форме (1.2) представляет значительные трудности [112, 149] при расчёте упругих волн в стержнях, где необходимо учитывать переменность коэффициента сухого трения  $f$ , его зависимость от скорости  $v$  взаимодействия поверхностей.

В историческом плане появление колеса в материальной культуре человечества привело к уменьшению сопротивления при перемещении тел. Использование различного рода смазок в подшипниках скольжения значительно уменьшило сопротивление движения тел. Математическую модель движения вязкого материала в тонких цилиндрических зазорах подшипников скольжения связывают с именами Навье и Стокса. В соответствии с гипотезой вязкого сопротивления силу сопротивления движения колеса можно представить в виде

$$F = \mu \pi D H v / h \quad (1.3)$$

Здесь  $D$  – диаметр подшипника качения;  $H$  – ширина,  $h$  – толщина зазора подшипника;  $\mu$  - коэффициент вязкости смазки;  $v$  - скорость относительного движения поверхностей.

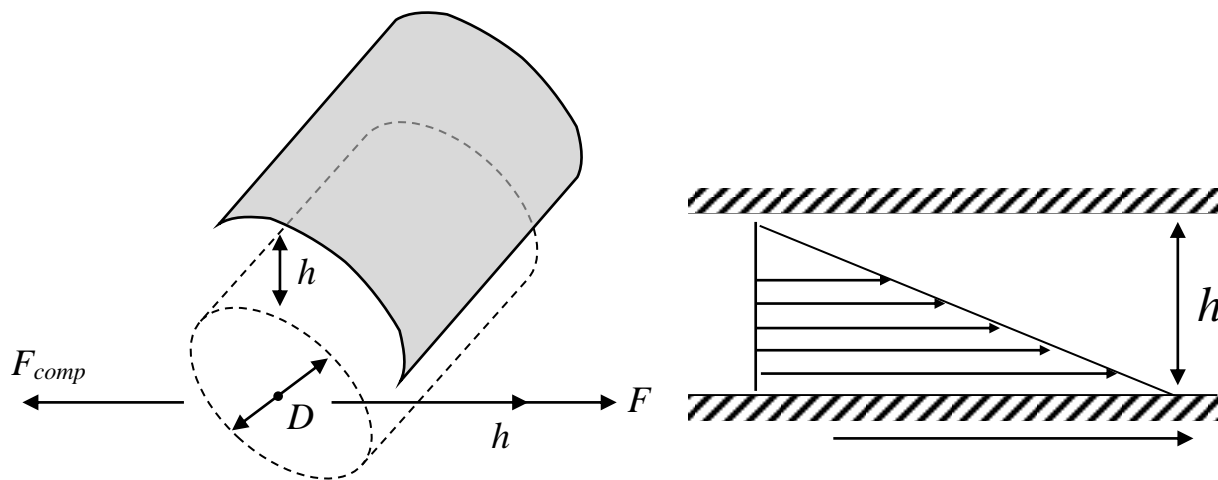


Рис. 1.2. Схематическое изображение элемента вязкого трения в подшипнике скольжения и распределения скорости течения в зазоре.

Закон вязкого трения Навье-Стокса в терминах напряжений можно представить в виде  $\tau = \mu dv/dn$  [89, 102-106, 147, 151, 156]

$$\sigma_{ij} = \mu_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений;  $\varepsilon_{ij} = (1/2)(v_{i,j} + v_{j,i})$  - тензор скоростей деформации;  $v_i$  - вектор скорости;  $\mu_0$  - коэффициент объёмной вязкости;  $\mu$  - коэффициент сдвиговой вязкости.

Увеличение температурного диапазона использования подшипников качения от южных широт России до полярного круга, когда смазочные материалы могут находиться как в жидком состоянии, так и в пластическом, застывшем, требует использования математической модели вязкопластического деформирования материала. Связь напряжений со скоростями деформаций определяется законом пластичности Мизеса  $f = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - 2k^2 = 0$  [87, 88] и законом Навье-Стокса

$$\sigma_{ij} = (1/3)\sigma_{kk} \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} . \quad (1.5)$$

В соответствии с условиями (1.5) вязкопластический материал находится в твёрдом недеформируемом состоянии до достижения напряжённого состояния, удовлетворяющего условию пластичности  $\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2k^2$ , а затем материал ведёт себя как вязкая жидкость (1.5). На рис. 1.3 представлена картина сдвига вязкопластического материала

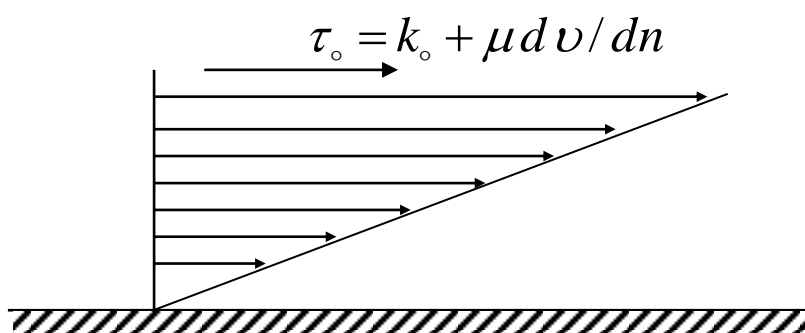


Рис. 1.3. Схематическое изображение сдвигового течения вязкопластического материала

Стремление к уменьшению силы вязкого трения привело к идее замены эффекта (факта) прилипания смазочного материала к поверхностям скольжения на эффект качения, перекачивания квазиэлементов смазочного материала вдоль поверхности. Такими свойствами обладают микроструктурные смазочные материалы, в которых отдельные молекулы образуют как бы связанные микроструктуры, обладающие внутренней связью и возможностью вести себя как квазитвёрдые образования [87, 88].

Характерная особенность деформирования таких микроструктурных вязкопластических материалов проявляется при сдвиге (рис. 1.4).



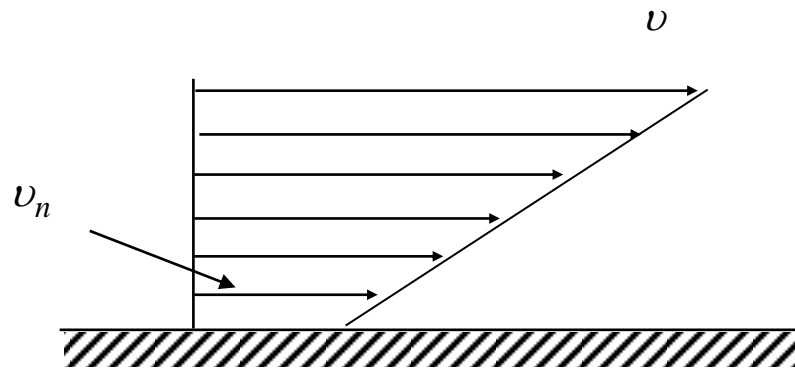


Рис. 1.4. Распределение скорости течения микроструктурного вязкопластического материала при сдвиге (скорость течения  $v_n$  на поверхности скольжения отлична от 0,  $v_n \neq 0$ )

Проскальзывание  $v_n \neq 0$  материала смазки вдоль поверхности ведёт к уменьшению градиента скорости  $v$  по направлению нормали и тем самым к уменьшению сопротивления вязкого трения

$$\tau = k_0 + \mu_m dv/dn \quad (1.6)$$

Здесь  $\mu_m$  - коэффициент вязкости микроструктурного материала.

Обстоятельства, связанные с уменьшением вязкого сопротивления микроструктурных вязкопластических материалов, делают актуальным изучение эффектов деформирования, обусловленных микроструктурой и приводящих к изменению характера течения таких материалов.

## **1.2. Законы движения элементарного объема вязкопластического микроструктурного материала**

Для описания движения микроструктурного материала выделим в материале объем  $\Delta V = h^3$  с центром в точке М (x,y,z) (рис. 1.5), заменим действие на него со стороны отброшенного материала силами и воспользуемся вторым законом динамики Ньютона: «Изменение количества движения твердого тела за некоторый промежуток времени  $\Delta t$  равняется импульсу внешних действующих сил [141, 143, 144]».

$$\rho \Delta V \bar{v}(t + \Delta t) - \rho \Delta V \bar{v}(t) = \bar{F} \Delta t + \bar{g} \Delta V \Delta t \quad (1.7)$$

Вводя координаты  $x_1=x$ ,  $x_2=y$ ,  $x_3=z$ , напряжение  $\sigma = F/h^2$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j=1,2,3$ ), переходя к пределу по времени  $t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  с сохранением слагаемых порядка  $h^2 O(h^2)$ .

Приведем уравнение (1.7) к виду [45]

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + h^2 \frac{\partial^3 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_k \partial x_j} + g_i \quad (1.8)$$

( $i=1,2,3$ )

$g_i$  - вектор объемных сил, действующих на материал.

Уравнение в частных производных (1.8) представляет собой уточнение классического уравнения движения материальной точки сплошной среды в напряжениях [142-145] за счет учета конечности представительного объема  $\Delta V$ , при  $h \rightarrow 0$  и  $\Delta V \rightarrow 0$  уравнение (1.8) переходит в известное уравнение изменения количества движения элемента сплошной среды [143].

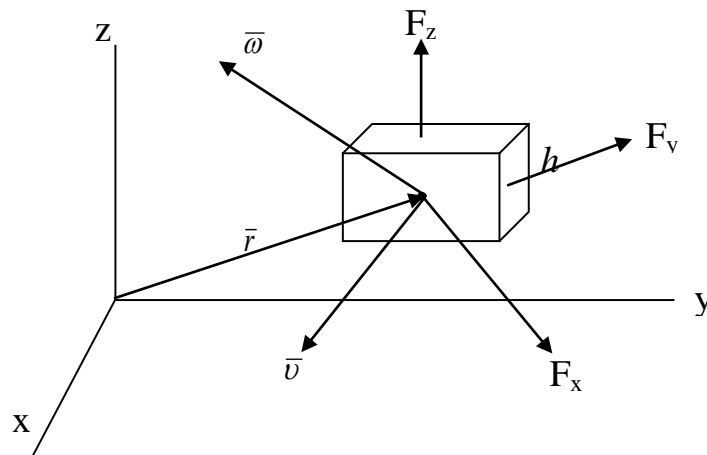


Рис. 1.5. Схематическое изображение представительного объема  $\Delta V$  материальной среды под действием сил  $F$  на гранях объема движущегося со скоростью  $\bar{v}$  центра масс, вращающегося с угловой скоростью  $\bar{\omega}$  в момент времени  $t$

Следующим необходимым законом, определяющим движение представительного объема  $\Delta V$  является закон изменения момента количества движения твердого тела: «Изменение момента количества движения твердого тела за промежуток времени  $\Delta t$  равняется импульсу момента всех внешних действующих сил» [143]. Для материальной точки массой  $m$  этот закон имеет вид

$$\Delta \bar{G}' = \bar{G}(t + \Delta t) - \bar{G}(t) = \bar{\mu}_{om} \bar{F} \quad (1.9)$$

где  $\bar{G} = \bar{r} \times m \bar{v}$  - момент количества движения материальной точки;

$\bar{F} = \bar{r} \times \bar{F}$  - момент вектора силы.

Для представительного объема  $\Delta V$  закон изменения момента количества движения (1.8) при предельном переходе в нем по  $t \Delta t \rightarrow 0$  конкретизируется

$$J_{ij} \frac{dw_j}{dt} = mom_i / 8h^3 \quad (i=1,2,3) \quad (1.10)$$

где  $J_{ij}$  - тензор инерции объема  $\Delta V$ .

Окончательно вводя  $\sigma_{ij}$  и  $m_{ij}$  - тензоры напряжений  $\sigma_{ij}$  и моментных напряжений  $w_{ij}$  получим

$$J_{ij} dm_j / dt = (1/2) \varepsilon_{ijk} \sigma_{ik} + \partial m_{ij} / \partial x_j + h^2 / 4 \partial^2 (\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}) / \partial x_\ell \partial x_\ell \quad (1.11)$$

Здесь  $\varepsilon_{ijk}$  - тензор Леви-Чивита,

$m_i$  - момент внешних сил в точке  $M$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{при четной перестановке индексов } i, j, k \text{ до } 123 \\ -1 & \text{при нечетной перестановке индексов } i, j, k \text{ до } 123 \\ 0 & \text{при совпадении } 2^x \text{ или } 3^x \text{ индексов } i, j, k. \end{cases}$$

Система 6-ти уравнений движения (1.8, 1.11) для скорости  $\bar{v}$  и угловой скорости вращения  $\bar{\omega}$  является не замкнутой, так как содержит восемнадцать неопределенных еще тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и моментных напряжений  $w_{ij}$ .

### 1.3. Кинематические характеристики деформирования представительного объема $\Delta V$

При построении классических математических моделей механики сплошных сред в выражениях для тензоров деформаций и скоростей деформаций ограничиваются точностью  $O(h)$ , а величины более высокого порядка не учитываются. Стремление прилагать МСС к течению и деформированию современных микроструктурных материалов на макроуровне и на микроуровне требует учета величин  $O(h^2)$  или в безразмерном виде  $O((h/L)^2)$ . В работах [45, 164] получены выражения для линейного представления деформаций и скоростей деформаций с учетом величин  $O(h^2)$

$$e_{ij} = e_{ij}^c + (h^2 / 6) \partial^2 e_{ij}^c / \partial x_k \partial x_k \quad (1.12)$$

здесь  $e_{ij}^c = (1/2)(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$  - тензор скоростей деформации по Коши. При  $h \rightarrow 0$  уточненный тензор скоростей деформации (1.12) совпадает с выражением тензора Коши.

### 1.4. Реологические уравнения микроструктурного вязкопластического материала

Замыкающими уравнениями системы уравнений движения (1.8, 1.11), позволяющими выразить напряжение  $\sigma_{ij}$  и моментные напряжения  $m_{ij}$  через скорость течения  $v_i$ , являются уравнения вязкопластичности:

а) условие пластичности, утверждающее, что пластическое течение возможно после достижения предельного напряженного состояния

$$I_2 = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K_o^2, \quad (1.13)$$

где  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk} \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера;  $\delta_{ij} = 1$  при  $i=j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

b) условие несжимаемости исследуемого материала

$$\rho = \rho_0 = \text{const} \quad \text{т.е.} \quad \partial v_k / \partial x_k = 0 \quad (1.14)$$

с) закон вязкого течения материала после достижения предельного пластического состояния

$$\sigma_{ij} = 2\mu e'_{ij}; \quad e'_{ij} = e_{ij} - (1/3)e_{kk} \delta_{ij}. \quad (1.15)$$

Для случая несжимаемости материала закон вязкости Ньютона (1.15) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}. \quad (1.16)$$

Система дифференциальных уравнений (1.8, 1.11, 1.13, 1.16) представляет собой замкнутую систему уравнений для величин  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $e_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ , определяющих деформирование и течение вязкопластического микроструктурного материала.

### 1.5. Математическая модель стационарного течения микроструктурного вязкопластического материала в форме системы дифференциальных уравнений для скорости течения

Рассмотрим течения материала, в котором отсутствует собственное вращение ( $\bar{w} \equiv 0$ ) отдельных частиц [45]. Это предположение приводит к отсутствию моментных напряжений ( $m_{ij} \equiv 0$ ) и к уравнению для напряжений

$$(E + h^2 \Delta)(\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}) = 0, \quad (1.17)$$

где  $E$  - единичный оператор,  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $\varepsilon_{ijk}$  - тензор Леви-Чивата.

Последнее уравнение в отсутствие внешних возмущений при нулевых внешних граничных условиях допускает решение, тождественно равное нулю,

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \quad (1.18)$$

которое соответствует симметричности тензора напряжений микроструктурного материала

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.19)$$

Сокращение (уменьшение) числа неизвестных  $\sigma_{ij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ , определяющих течение и деформирование вязкопластического материала, возможно путём исключения напряжений и скоростей деформаций системы уравнений, в результате чего получается система уравнений для векторов скорости  $\bar{v}(v_1, v_2, v_3)$  и угловой скорости  $\bar{\omega}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$ . Из уравнения (1.8) получим

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) + (\mu h^2 / 6) \frac{\partial^4 v_i}{\partial x_k \partial x_k \partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^4 v_j}{\partial x_k \partial x_k \partial x_i \partial x_j} + g_i \quad (1.20)$$

(i,j,k=1,2,3).

Заметим, что символы  $\partial / \partial x_\ell$  в дифференциальных уравнения обозначают операцию градиента, которая в случае прямоугольной ортогональной декартовой системы координат есть просто частная производная по координате  $x_\ell$ , а в криволинейной системе координат должна учитывать кривизну пространства.

Система уравнений в частных производных (1.20) имеет 4-й порядок производных по геометрическим координатам, является «жесткой», сингулярно возмущенной за счёт малого параметра  $h$  при старшей производной. [62, 65, 67, 70, 71]

Для построения стационарного поля скоростей течения в некоторой области  $D$  необходимо дополнить математическую модель (1.20) граничными условиями, учитывающими не только границу  $S$  области  $D$ , но и неизвестную заранее границу  $\Sigma$  возможной застойной, жесткой, области  $D^*$  (рис. 1.6)

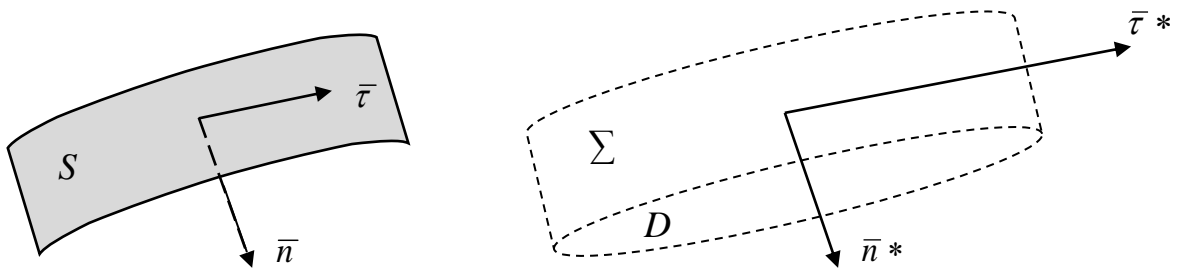


Рис. 1.6. Изображение границы  $S$  и  $\Sigma$  (внешней границы области течения  $D$  и границы  $\Sigma$  жесткой, застойной зоны)

Поскольку материал при течении и деформировании ведёт себя как вязкий, то естественным является предположение прилипания к границе  $S$

$$v_r|_S = 0 ; v_\tau|_S = v_S,$$

т. е.  $v_i n_i = 0 ; v_i \tau_i \nu_S$  (1.21)

Наличие микроструктуры материала с характерным линейным размером  $h$  предполагает возникновение пограничного слоя с поперечным размером порядка  $O(h)$ , в котором представительный элемент  $\Delta V = h^2$  может катиться с линейным поперёк слоя распределением скорости

$$v_t = v_\tau|_S + h \partial v_\tau / \partial n$$
 (1.22)

Выделение пограничного слоя необходимо дополнить условием «сращивания» внешнего течения и течения внутри пограничного слоя.

Таким условием может быть условие линейного продолжения [47, 86, 95, 110] решения на границе  $S_A$  пограничного слоя во внешнее течение

$$v_\tau|_{S_A} - v_\tau|_S = \gamma \frac{\partial v_\tau}{\partial n}|_{S_A}$$
 (1.23)

где  $\gamma = const$  – материала.

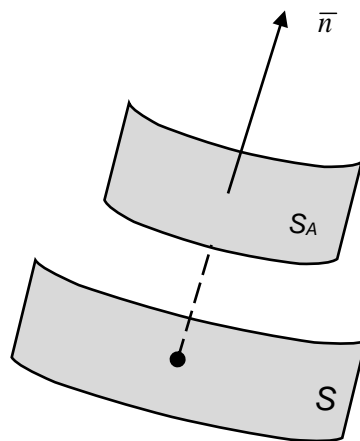


Рис. 1.7. Изображение внешней границы  $S$  области течения  $D$  и границы  $S_A$  пограничного слоя

В зависимости от величины предела пластичности для разных материалов возможно более «слабое» продолжение решения для поля

скорости на границе  $S_A$  пограничного слоя

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial n} \Big|_{S_A} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 v_\tau}{\partial n^3} \Big|_{S_A} = 0. \quad (1.24)$$

Условия (1.23 - 1.24) применимы к течению материалов с разным уровнем микроструктуры и с разной степенью гладкости продолжения решения на границе  $S_A$  пограничного слоя.

Условие на границе  $\Sigma$ , отделяющей область течения от области твёрдого «жесткого» состояния материала, состоит в выполнении на  $S_A$  условия пластичности, условия достижения в материале предельного напряжённого состояния

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2k_o^2 \quad . \quad (1.13)$$

Условие предельного напряжённого состояния материала (1.13) может быть представлено в скоростях, учитывая закон вязкости и направление скорости течения на  $\Sigma$

$$\sigma_{nt} - k_o \Big|_{\Sigma} = 2\mu e_{nt} \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (1.25)$$

Условие пластичности ( 1.13 ) в скоростях на  $\Sigma$  примет вид

$$e_{n\tau}^c \Big|_{\Sigma} + (h^2 / 6) \partial^2 e_{n\tau}^c / \partial n^2 = 0 \quad , \quad (1.26)$$

где  $e_{n\tau}^c = \frac{1}{2} (\partial v_n / \partial \tau + \partial v_\tau / \partial n)$ ;  $v_n \Big|_{\Sigma} = 0$

Таким образом, система 3-х дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка вместе с граничными условиями является замкнутой и позволяет рассчитывать поля скоростей течения и его характеристики: объемный расход, перепад давлений при течении в ограниченных областях.

$$\begin{aligned} v_{i,jj} + v_{j,ij} + (v_{i,jjk} + v_{j,ijk}) + g_i = 0 ; \quad v_{k,k} = 0 ; \\ v_i n_i \Big|_S = 0 ; \quad v_i \tau_i \Big|_S = 0 ; \quad v_i \tau_i \Big|_{S_A} = v_i \tau_i \Big|_S + \gamma (v_i \tau_i)_{,j} n_j \Big|_{S_A} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$e_{n\tau} \Big|_{\Sigma} = 0; \quad v_{\tau,n} \Big|_{S_A} + \delta v_{\tau,mm} \Big|_{S_A} = 0.$$



## 1.6. Особенности исследования математической модели течения и деформирования микроструктурных вязкопластических материалов

Рассматриваемая в диссертации математическая модель течения микроструктурного вязкопластического материала представляет собой линейную систему стационарных уравнений в частных производных 4-го порядка с граничными условиями на заданной границей  $S$  области  $D$  и с неизвестной границей  $S^*$  области  $D^*$  твёрдого состояния материала. При всей внешней простоте исследуемая задача обладает трудностями, связанными с:

- а) не заданностью заранее границы  $S^*$  области твёрдого поведения материала, которая определяется выполнением условия предельного напряженного состояния материала, являющегося существенно нелинейным  $\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2K_o^2$ .
- б) наличием малого параметра  $\delta$ , стоящего при старшей производной в системе уравнений в частных производных; такие системы называют «жёсткими», или сингулярно возмущёнными;
- в) наличием больших градиентов скоростей течения по направлению нормали к границе  $S$  области  $D$ , что требует внимательного подхода к выбору численного метода, учитывающего пограничный слой путём построения решения в нём или путём игнорирования расчётов самого пограничного слоя.

В рассматриваемом в диссертации классе задач первая особенность, связанная с определением границы  $S^*$  твёрдого поведения материала, упрощается ввиду линейности условия предельного состояния материала (1.25), которое представимо

$$e'_{n\tau} = (1/2)(v_{n,\tau} + v_{\tau,n}) + \delta(1/2)(v_{n,\tau ee} + v_{\tau,nee}) = 0. \quad (1.28)$$

Вторая особенность исследуемых задач, связанная с наличием малого параметра  $\delta$ , требует применения теории малого параметра и численных методов [47, 86, 95, 110]. Изменение масштаба нормальной координаты и к поверхности  $S$  позволяет выделять решение вблизи  $S$  в пограничном слое (внутреннее разложение) и выделить решение вне пограничного слоя с малыми градиентами скоростей (внешнее разложение).

Наличие больших градиентов скоростей в исследуемых задачах диссертации требует анализа различных дискретных методов решения и выбора наиболее оптимального с точки зрения минимизации погрешности количества операций.

Для случая стационарного вращательного движения микроструктурного вязкопластического материала уравнения движения (1.20) представим в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ , положив  $v_r = v(r, \varphi)$ ;  $v_\varphi = w(r, \varphi)$

$$\frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \varphi} + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right] + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right] = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} \quad (1.30)$$

Здесь  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ;  $\varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right)$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{v}{r} + \delta \Delta (\varepsilon_{r\varphi}^c) = 0 \quad (1.31)$$

## Глава 2. Вращательное движение вязкопластического микроструктурного материала в плоских зазорах с кольцевыми стенками

### 2.1. Вращательное движение вязкопластического микроструктурного материала в кольцевом зазоре

Наиболее часто сдвиговое течение различных технических материалов между двумя цилиндрами встречается в широко распространенных подшипниках скольжения. В случае смазки с микродобавками из микрочастиц этот материал можно моделировать вязкопластической жидкостью с учетом конечности представленных элементов  $\Delta V = h^3$ . Общий подход к построению реологических уравнений сложных сред развит Д. Д. Ивлевым в [87, 88]. На рис. 2.1 изображена схема течения, где  $R^-, R^+$  - внутренний и внешний радиус границ области течения,  $w(r)$  - величина окружной скорости течения,  $w_o = w(R^-)$  - скорость внутренней границы,  $w(R^+) = 0$  - условие на внешней границе.

Уравнение в напряжениях стационарного движения микроструктурного вязкопластического материала имеет вид [87]

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}$ ;  $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c$ ;  $\varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right)$ .

$\sigma_{r\varphi}$  - касательная компонента тензора напряжений,  $\varepsilon_{r\varphi}$  - компонента тензора скорости деформаций,  $h$  - характерный линейный размер микроструктуры.

Дифференциальное уравнение (2.1) для напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  интегрируется [45]

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^o r_o^2 / r^2 \quad (2.2)$$

и для скорости деформаций  $\varepsilon_{r\varphi}$  получаем выражение

$$\varepsilon_{r\varphi} / \varepsilon_{r\varphi}^o = (r_o / r)^2 . \quad (2.3)$$

Подстановка в (2.3) выражения скорости деформаций  $\varepsilon_{r\varphi}$  через скорость  $w(r)$  приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка для  $w(r)$

$$h^2/6 (w' - \frac{w}{r})'' + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r} (w' - \frac{w}{r})' - (w' - \frac{w}{r}) = \varepsilon_{r\varphi}^o \cdot \frac{r_o^2}{r^2} . \quad (2.4)$$

Граничные условия при наличии застойной зоны при  $r \geq R^*$  имеют вид

$$\begin{aligned} w(R^-) &= w_o ; w'(R^-) + \gamma w''(R^-) = 0 ; \\ w(R^*) &= 0 ; w'(R^*) = 0 ; K_o = \mu \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c (R^*) , \end{aligned} \quad (2.5)$$

здесь  $K_o$  – предел пластичности,  $\mu$  - коэффициент вязкости.

Количество граничных условий позволяет определить 4 постоянных интегрирования и границу  $R^*$  застойной зоны.

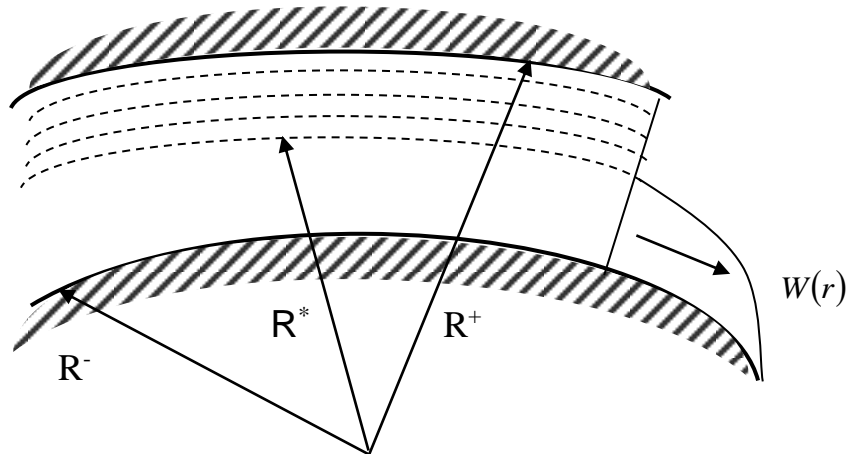


Рис. 2.1. Схематическое изображение течения в кольцевом канале с застойной зоной  $r \in [R^*, R^+]$

Точное решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения 4-го порядка (2.4) представляется громоздким и для исследования воспользуемся методом малого параметра [47, 90-92, 95, 110].

Внешнее  $\hat{w}$  по малому решению удовлетворяет уравнению (2.4) при  $h \rightarrow 0$

$$\hat{w}' - \frac{\hat{w}^2}{r} = \varepsilon_{r\varphi}^o \frac{r_o^2}{r^2} . \quad (2.6)$$

Уравнение (6) имеет точное решение

$$\hat{w}(r) = C_1 \cdot r + C_2 \frac{1}{r} , \quad (2.7)$$

здесь  $C_1 = w_o / r_o$  ,  $C_2 = -\frac{\varepsilon_{r\varphi}^o r_o}{2}$  - постоянные интегрирования.

Использование граничных условий только на одном конце границы  $r = R^-$  или  $r = R^*$  приводит к значениям постоянных  $C_1$  и  $C_2$  :  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ , т. е. к невозможности движения без учета влияния параметра  $h$  микроструктуры. Построим внешнее решение задачи при выполнении первых граничных условий

$$\begin{aligned} \hat{w}(R^-) = W^- ; \hat{w}(r^*) = 0 , t.e \\ C_1 \cdot R^- + C_2 / R^- = W^- ; C_1 \cdot R^* + C_2 / R^* = 0 . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Получим из условий (2.8) [49]

$$\begin{aligned} C_1 = W^- \cdot \left( \frac{R^{*4} \cdot R^-}{R^{*2} - R^{-2}} \right) ; C_2 = W^- \left( \frac{R^{*2} \cdot R^-}{R^* - R^{-2}} \right) ; \\ \hat{w}(r) = \left( \frac{R^{*2} R^-}{R^{*2} - R^{-2}} \right) W^- \left( -\frac{r}{R^*} + \frac{R^*}{r} \right) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

На рис. 2.2 представлен график (2.9) зависимости скорости  $\frac{\hat{w}}{W^-}$  течения от границы  $R^*$  застойной зоны и радиуса  $r$ .

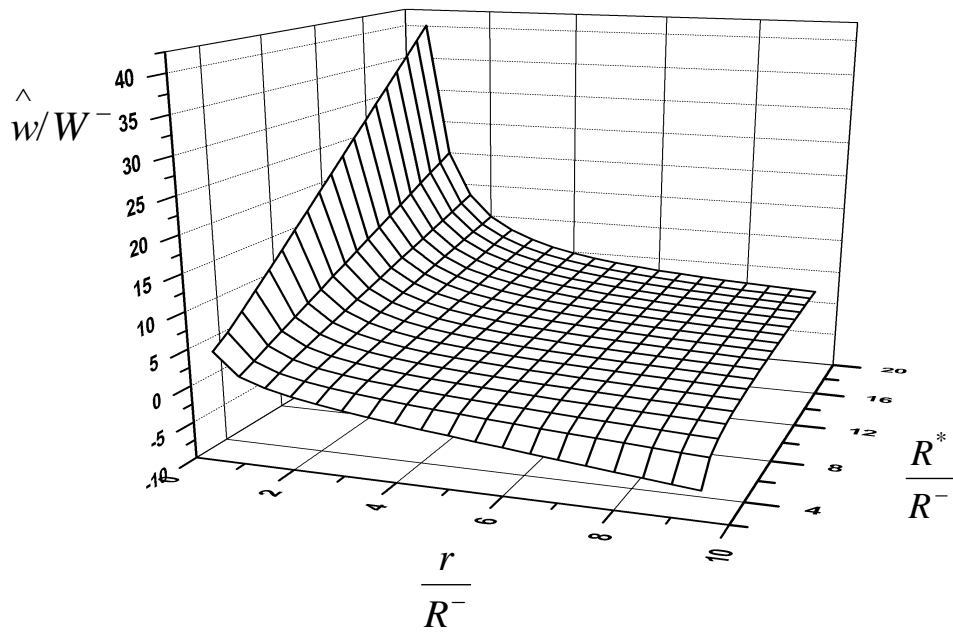


Рис. 2.2. Пространственный график распределения скорости течения  $\hat{w}(r)$  для различных значений  $R^*$  застойной зоны

На рис. 2.3 представлен график зависимости скорости  $\hat{w}(r)$  в нулевом внешнем разложении скорости в ряд по малому параметру  $h$

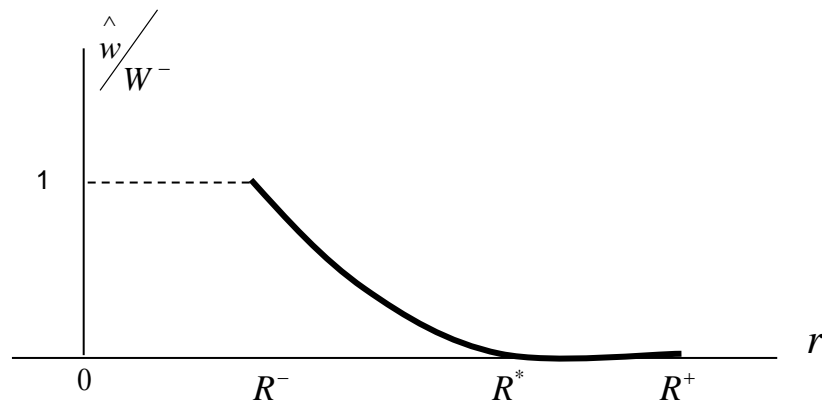


Рис. 2.3. Поведение безразмерной скорости течения  $\hat{w}(r)/W^-$  в нулевом приближении разложения решения  $w(r)$  в степенной ряд по  $h$

Найдем радиус  $R^*$  застойной зоны исходя из внешнего решения  $\hat{w}(r) = AW^- \left( -\frac{r}{R^*} + \frac{R^*}{r} \right)$ , где  $(A = \frac{R^* R^-}{R^{*2} - R^{-2}})$  и условия выполнения предельного напряжения на границе застойной зоны

$$\tau_{r\varphi}(R^*) = K_0 = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}(R^*), \quad (2.10)$$

$$\text{здесь } \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6}\Delta\varepsilon_{r\varphi}^c = \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon_{r\varphi}^c\right). \quad (2.11)$$

После подстановки значения  $\varepsilon_{r\varphi}^c = (1/2)(\partial w/\partial r - w/r)$  в уравнение (2.10) получим

$$(K_0/2\mu) = -(B/r^2)(1 + 2h^2/3r^2)/r = R^*, \quad (2.12)$$

здесь  $B = W^-R^{*2}R^-/(R^{*2} - R^{-2})$ .

Уравнение (2.12) является уравнением для  $R^*$

$$3K_0/2\mu R^{*4} - \left(3K_0R^{-2}/2\mu + 3W^-R^-\right)R^{*2} - 2W^-R^-h^2 = 0. \quad (2.13)$$

Для малых  $h^2$  уравнение (2.13) имеет решение для радиуса  $R^*$  застойной зоны

$$R_0^{*2} = R^{-2} + 2\mu\frac{R^-W^-}{K_0}. \quad (2.14)$$

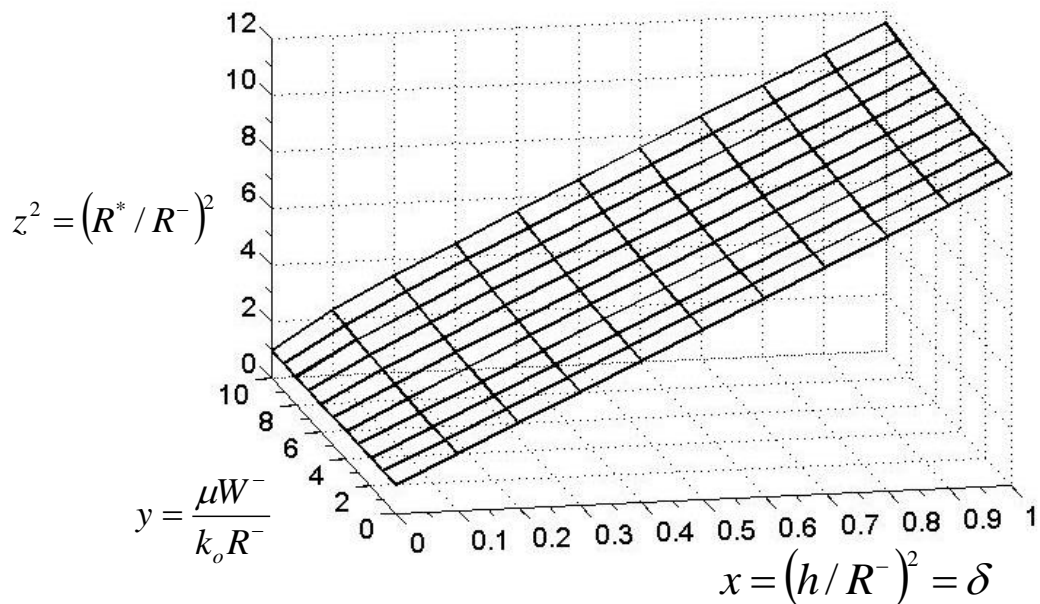


Рис. 2.4. График изображения поведения квадрата радиуса застойной зоны  $(R^*/R^-)^2$  в зависимости от  $(h/R^-)^2$  и  $(K_0R^-/\mu W^-)$

Уравнение для радиуса  $R^*$  застойной зоны с учетом характерного размера  $h^2$  микроструктуры можно получить из (2.13)

$$R^{*2} \approx R_0^{*2} + \frac{4\mu W^- R^-}{3R_0^* K_0} h^2. \quad (2.15)$$

После подстановки значения  $R_0^{*2}$  из (2.14) в (2.15) получим [49]

$$R_0^{*2} \approx R^{-2} + 2\mu \frac{R^- W^-}{K_0} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{R_0^{*2}} \right). \quad (2.16)$$

Из выражения (2.16) для радиуса  $R^*$  застойной зоны следует, что сам радиус  $R^*$  увеличивается с ростом относительного характерного линейного размера  $(h/R^-)$  микроструктуры, при этом толщина  $R^+ - R^*$  застойной зоны уменьшается. Скорость роста  $R^*/R^-$  в зависимости от  $(h/R^-)$  определяется безразмерным параметром  $\lambda = (\mu W^- / K_0 R^-)$ . Из чего можно сделать вывод, что увеличение вязкости  $\mu$  и скорости движения  $W^-$  границы, а также уменьшение предела пластичности  $K_0$  и радиуса  $R^-$  ведут к усилению влияния микроструктуры  $(h/R)$  на радиусе застойной зоны (рис. 2.4).

## **2.2. Вращательное движение вязкопластического микроструктурного материала в зазоре между неконцентрическими окружностями**

Построение поля скорости и давления при течении вязкой жидкости в кольцевых зазорах связано с расчётом цилиндрических подшипников качения. В процессе вращения вала в таком подшипнике возможен вариант эксцентрического расположения вала по отношению к внешнему цилиндрическому корпусу. Для случая малых кольцевых зазоров смазочные материалы проявляют не только свойство вязкости, но и свойства, обусловленные микроструктурой материала, что приводит к необходимости учёта конечности скорости деформаций для представительного объёма



$\Delta v = h^3$  материала [57, 61]. Далее проведено применение математической модели течения вязкой жидкости с учётом скорости деформаций величин порядка  $\delta = (h/L)^2$  ( $h$  - характерный линейный размер представительного объёма материала,  $L$  - характерный линейный размер объёма течения) к задаче течения микроструктурных материалов в зазорах малой ширины.

### 2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим течение микроструктурного вязкого материала в круговой области радиуса  $R_0$ , порожденного вращением окружности радиуса  $r_0$ , эксцентрично расположенной внутри области  $D$  (рис. 2.5).

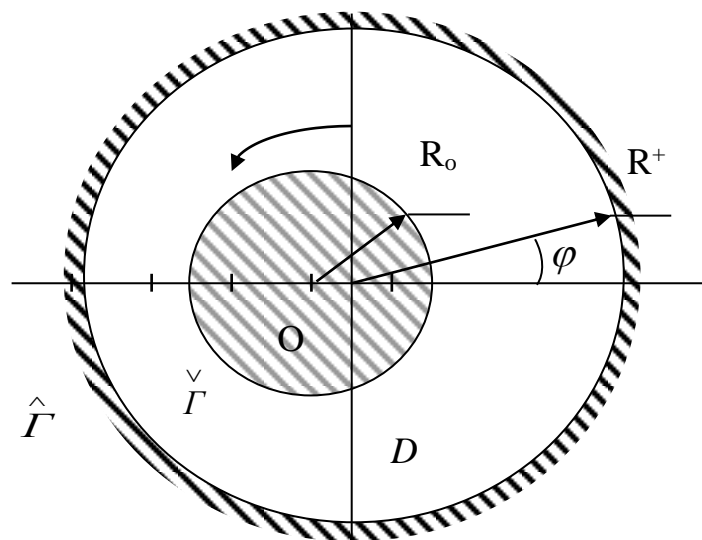


Рис. 2.5. Схематическое изображения области  $D$  течения материала за счёт вращения окружности радиуса  $R_0$  с центром в точке  $O$

Зададим границы течения неподвижной внешней окружностью  $\hat{\Gamma}$  и вращающейся внутренней окружности  $\check{\Gamma}$

$$r = R_0, \tag{2.17}$$

$$r^2 = r_0^2 - 2r_0 \varepsilon_0 \cos \varphi + \varepsilon_0^2. \tag{2.18}$$

Здесь  $\varepsilon_0$  - расстояние между центрами окружностей (рис. 2.5),  $\varphi$  - полярный угол.

Для случая малых  $\varepsilon_0$  уравнение границы  $\check{\Gamma}$  с точностью до  $\varepsilon_0^1$  представим в виде

$$r = r_0 - \varepsilon_0 \cos\varphi. \quad (2.19)$$

Поле скоростей  $v_r = v(r_1, \varphi), v_\varphi = w(r_1, \varphi)$  стационарного течения удовлетворяет системе 2\* уравнений в частных производных [49]

$$\frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \varphi} + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r};$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right] + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{r \partial \varphi}. \quad (2.20)$$

Здесь  $\mu$  - коэффициент вязкости;  $h$  - характерный линейный размер представительного объема  $\Delta v = h^3$ ;  $\Delta$  - оператор Лапласа;  $\varepsilon_{r\varphi}^c$  - скорость деформации сдвига

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right). \quad (2.21)$$

Граничными условиями для скорости на границах  $\hat{\Gamma}$  и  $\check{\Gamma}$  будут условие прилипания и условие линейного распределения скорости течения в пограничном слое вблизи твёрдых границ

$$v(R_0) = 0; w(R_0) = 0; w(R_0) - \gamma \frac{\partial w(R_0)}{\partial r} = 0. \quad (2.22)$$

$$v^n(r\varphi)|_{\check{\Gamma}} = 0; v^t(r\varphi)|_{\check{\Gamma}} = \Omega r_0; \left( v_{\text{отн}}^t + \gamma \frac{\partial v^t}{\partial n} \right) \Big|_{\check{\Gamma}} = 0. \quad (2.23)$$

Здесь  $v^t$  - касательная компонента скорости на  $\check{\Gamma}$ ;  $v^n$  - нормальная

компонента вектора скорости течения на вращающейся границе  $\check{\Gamma}$ .

Ограничиваясь величинами до  $\varepsilon_0^1$  конкретизируем граничные условия (2.23) на  $\check{\Gamma}$ , для чего вычислим векторы  $\bar{t}$  и  $\bar{n}$  - касательной и нормали к  $\check{\Gamma}$ , обозначив  $\nabla f$  - градиент к линии  $\check{\Gamma}$ , где  $f = r - r_0 + \varepsilon_0 \cos \varphi = 0$  - уравнение границы  $\check{\Gamma}$ .

$$\nabla f = (1; -\varepsilon_0 \sin \varphi); \bar{n} = (1, -\varepsilon_0 \sin \varphi); \bar{t} = (-\varepsilon_0 \sin \varphi; 1) \quad (2.24)$$

$$\partial / \partial n = \partial / \partial r - \varepsilon_0 \sin \varphi \partial / \partial \varphi .$$

Относительную компоненту касательной скорости  $v_{OTH}^t$  с точностью до  $\varepsilon_0^1$  представит в виде

$$v_{OTH}^t = \bar{v}\bar{t} = -v_{OTH} \varepsilon_0 \sin \varphi + w_{OTH} ;$$

$$v_{OTH}^t |_{\check{\Gamma}} = v; w_{OTH} |_{\check{\Gamma}} = w - \Omega r_0 - \varepsilon_0 \sin \varphi v . \quad (2.25)$$

В граничных условиях (2.23), задаваемых на криволинейном контуре  $\check{\Gamma}$ , содержащем малый параметр  $\varepsilon_0$ , желательно значение компонент скорости сразу разложить в степенной ряд по параметру  $\varepsilon_0$  [49, 57, 61]

$$v(r, \varphi) |_{\check{\Gamma}} = v(r_0 + \varepsilon_0 \cos \varphi, \varphi) = v(r_1, \varphi) + \frac{\partial v}{\partial r} |_{r=r_0} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_0} \varepsilon_0 + \dots ;$$

$$w(r, \varphi) |_{\check{\Gamma}} = w(r_0 + \varepsilon_0 \cos \varphi, \varphi) = w(r_1, \varphi) + \frac{\partial w}{\partial r} |_{r=r_0} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_0} \varepsilon_0 + \dots ; \quad (2.26)$$

здесь  $\partial r / \partial \varepsilon_0 = -\cos \varphi$ .

Таким образом, используя разложение функций  $v$  и  $w$  на границе  $\check{\Gamma}$ , перенося граничные условия с действительной эксцентрической окружности (2.26) на окружность того же радиуса с центром в начале координат  $r = r_0$ , преобразуем граничные условия (2.23) с учётом  $\varepsilon_0^1$

$$v(r_0, \varphi) - \left( \frac{\partial v(r_0, \varphi)}{\partial r} \cos \varphi - w(r_0, \varphi) \sin \varphi \right) \varepsilon_0 = 0 ; \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
w(r_0, \varphi) - \left( \frac{\partial w(r_0, \varphi)}{\partial r} \cos \varphi - v(r_0, \varphi) \sin \varphi \right) \varepsilon_0 &= 0 ; \\
w(r_0, \varphi) - \frac{\partial w(r_0, \varphi)}{\partial r} - \Omega r_0 - \varepsilon_0 \left[ + \left( \frac{\partial w(r_0, \varphi)}{\partial r} + \gamma \frac{\partial^2 w(r_0, \varphi)}{\partial r^2} \right) \cos \varphi + \right. \\
\left. + \left( v(r_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial v(r_0, \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial w(r_0, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi \right] &= 0 ; \tag{2.28}
\end{aligned}$$

### 2.2.2. Постановка задачи течения микроструктурной вязкой жидкости в безразмерной форме

Выберем в качестве характерных величин  $R_0$  - линейный размер;  $w_0^\circ$  - характерная скорость;  $p_0^\circ$  - характерное давление и введём обозначения  $\delta = h^2 / 6R_0^2$ ;  $\varepsilon_0 = \varepsilon / R_0$ ;  $p_0^\circ = (\mu w_0^\circ / R_0)$ ;  $\xi = r / R_0$  и знак обезразмеривания скорости и давления далее не будем использовать, т. е. старые обозначения скорости и давления будем использовать в качестве безразмерных, тогда уравнения стационарного движения (2.19) и граничные условия (2.5 - 2.6) примут вид

$$\begin{aligned}
v_{,\varphi\varphi} + \xi w_{,\zeta\varphi} - w_{,\varphi} + \delta \xi (\Delta \varepsilon_{r\varphi}^c)_{,\varphi} &= \xi^2 p_{1\xi} ; \\
v_{,\zeta\varphi} + \xi w_{,\zeta\zeta} - w_{,\varphi} + \delta \Delta (\xi \varepsilon_{r\varphi}^c)_{,\xi} &= p_{,\varphi} ; \tag{2.29} \\
\Delta &= \partial / \partial \xi^2 + \partial / \xi \partial \xi + \partial^2 / \xi^2 \partial \varphi^2 ; \varepsilon_{r\varphi}^c = (1/2)(\partial v / \xi \partial \varphi + \partial w / \partial \xi - w / \xi) \\
v|_{\hat{\Gamma}} &= 0; w|_{\hat{\Gamma}} = 0; (w - \gamma \partial w / \partial \xi)|_{\hat{\Gamma}} = 0;
\end{aligned}$$

на границе  $\check{\Gamma}$ , где  $\xi = 1$ , граничные условия будут

$$v(1\varphi) = 0 ; w(1\varphi) = 0 ; v(1\varphi) - \gamma \frac{\partial w(1, \varphi)}{\partial \xi} = 0 ; \tag{2.30}$$

На поверхности вращающейся окружности, на границе  $\check{\Gamma}$  граничные условия с точностью до  $\varepsilon_0^1$  будут

$$\begin{aligned}
v(\xi_0, \varphi) - \varepsilon \left( \frac{\partial v(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} \cos \varphi + w(\xi_0, \varphi) \sin \varphi \right) &= 0 \\
w(\xi_0, \varphi) - \varepsilon \left( \frac{\partial w(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} \cos \varphi + v(\xi_0, \varphi) \sin \varphi \right) &= 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
w(\xi_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} - w_0 \xi_0 - \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial w(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial^2 w(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi^2} \right) \cos \varphi + \right. \\
\left. + \left( v(\xi_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial v(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial w(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} \right) \right] \sin \varphi = 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Система  $2^x$  уравнений в частных производных (2.29) имеет  $4^{\text{й}}$  порядок, является сингулярно возмущенной, граничные условия (2.30 - 2.32) позволяют выделить часть из них на условия в пограничном слое, а часть для уравнений, решения которых применимы вне пограничного слоя.

Условие совместности системы (2.29) даёт уравнение для давления  $P(\xi, \varphi)$ , которое получим путём дифференцирования  $1^{\text{го}}$  по переменной  $\xi$ , а  $2^{\text{го}}$  из (12) дифференцированием по переменной  $\varphi$  и исключением скоростей  $v, w$

$$\left( \xi^2 p, \xi \right)_{\xi} + p, \varphi\varphi = 0. \tag{2.33}$$

Для решения поставленной задачи применим метод возмущений (метод малого параметра), представляя решение в виде степенного ряда по  $\delta$  и  $\varepsilon$ , ограничиваясь слагаемыми  $1^{\text{го}}$  порядка по  $\delta^1$  и  $\varepsilon^1$ .

### 2.2.3. Внутреннее погранслоное нулевого порядка разложение скоростей в степенной ряд по $\delta$

Для исследования задачи внутреннего решения в пограничном слое толщиной  $\Delta$ . (рис. 2.6) проведём растяжение нормальной координаты  $n$  в несколько раз с тем, чтобы сохранить в уравнениях (2.29) производные до  $4^{\text{го}}$  порядка. Очевидно при такой операции изменение скоростей  $v$  и  $w$  вдоль

границы  $\Gamma$  будет несущественно и производными по направлению  $\bar{t}$  можно будет пренебречь. В граничных условиях выделим элемент границы  $r = R$  и растянем координату  $\xi = \lambda\zeta$  так, что

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}; \quad \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}; \quad \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} = \frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4}, \quad (2.34)$$

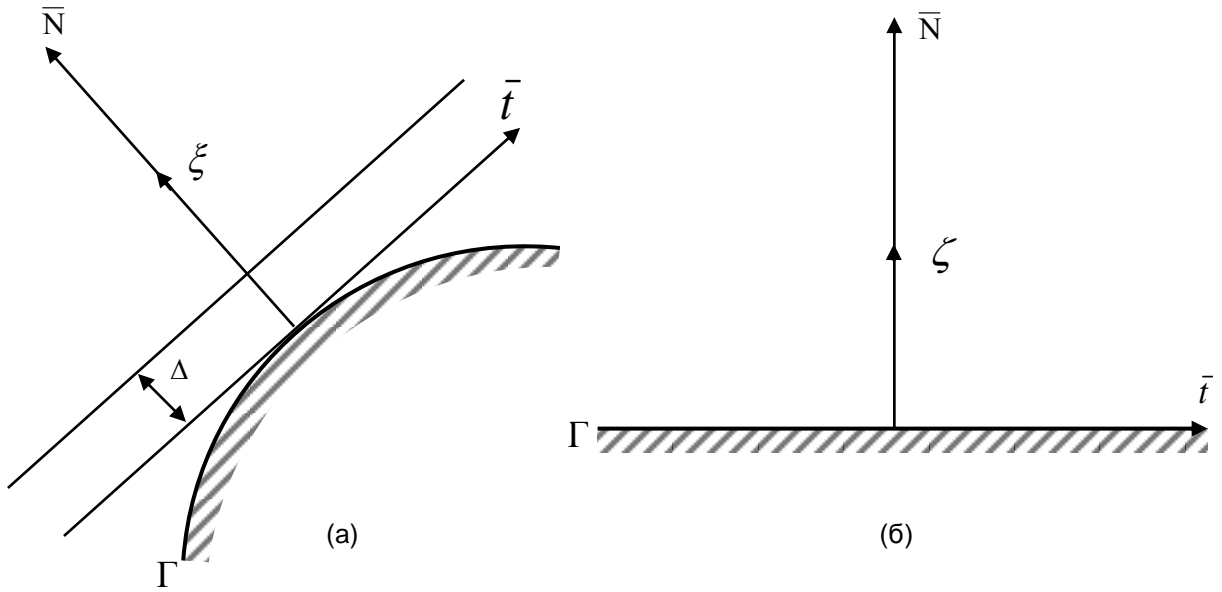


Рис. (2.6). Схематическое изображение области течения вблизи границы  $\Gamma$ : а) выделение пограничного поля толщиной  $\Delta$ ; б) выделение области течения вблизи границы  $\Gamma$  при условии её растяжения по нормали  $\bar{n}$

Уравнения (2.29) примут вид

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} v_{,\xi\varphi} + \xi \frac{1}{\lambda} w_{,\xi\xi} + \partial \tilde{\Delta} (\xi \tilde{\varepsilon}_{\zeta\varphi}^c), \zeta = p_{,\varphi} \\ v_{,\varphi\varphi} + \xi w_{,\xi\varphi} - w_{,\varphi} + \partial \cdot \lambda^2, \tilde{\Delta} (\zeta \tilde{\varepsilon}_{\zeta\varphi}^c), \varphi = -\lambda^2 \xi^2 p_{,\xi} \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\zeta\varphi}^c = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{\xi} v_{,\varphi} + w_{,\xi} - w / \xi \right)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\xi^2 \partial \varphi^2} \right).$$

Для случая растяжения координаты  $\zeta$  в  $\lambda$  расположим  $\lambda = \delta^\alpha$  и устремим  $\delta$  к 0 ( $\delta \rightarrow 0, \alpha > 1$ ).

Предельные уравнения (2.35) при  $\lambda = \delta \rightarrow 0$  примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\xi^2 \partial \varphi^2} \left( \overset{\vee}{v}_{,\varphi} + \xi \overset{\vee}{w}_{,\xi} - \overset{\vee}{w} \right),_{\xi} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\xi \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\xi^2 \partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial \overset{\vee}{v}}{\xi \partial \varphi} + \frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{\overset{\vee}{w}}{\xi} \right) = 0 \end{cases}, \quad (2.36)$$

здесь  $\overset{\vee}{w}$  и  $\overset{\vee}{v}$  - функции координат внутри пограничного слоя:  $\overset{\vee}{w} = \overset{\vee}{w}(\xi, \varphi)$ ,  $\overset{\vee}{v} = \overset{\vee}{v}(\xi, \varphi)$ , при этом координата  $\zeta$  отсчитывается от границы  $\Gamma^+$  или  $\Gamma^-$ , где  $\xi^+$  или  $\xi^-$  равны нулю.

В предположении цилиндрической внешней границы  $\Gamma^+$ , где мы смотрим наш пограничный слой, в уравнениях (2.36)

$\frac{\partial \overset{\vee}{v}}{\partial \varphi} = 0$  и  $\frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \varphi} = 0$ , так что получим

$$\begin{aligned} \left( \xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \left( \frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{\overset{\vee}{w}}{\xi} \right) \right) &= 0; \\ \left( \xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{\overset{\vee}{w}}{\xi} \right) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{\overset{\vee}{w}}{\xi} \right) = 0,$$

то выполняется

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{\overset{\vee}{w}}{\xi} \right) = 0.$$

И, следовательно,

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{\overset{\vee}{w}}{\xi} \right) = C,$$

откуда

$$\frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{\overset{\vee}{w}}{\xi} = C_{11} \int \frac{\partial}{\partial \xi} + C_2 = C_1 \ln \xi + C_2.$$

Постоянная  $C_{11} = 0$  в силу ограниченности  $\overset{\vee}{w}$  при  $\xi \rightarrow 0$ .

Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial \overset{\vee}{w}}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \overset{\vee}{w} = C_2, \quad (2.38)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{w}(\xi) &= C_1 \xi + \xi C_2 \int -\xi \partial \xi \\ \overset{\vee}{w}(\xi) &= C_1 \xi + C_2 \xi \ln \xi \end{aligned} \quad (2.39)$$

Выберем  $C_2 = 0$  в силу ограниченности  $\ln \xi$  при  $\xi \rightarrow 0$ .

Поле скорости течения внутри пограничного слоя представляет собой [113]

$$\overset{\vee}{v}(\xi) \equiv 0; \quad \overset{\vee}{w}(\xi) \equiv C \xi; \quad (2.40)$$

одномерное линейное по нормальной координате течение, соответствующее

прилипанию материала к стенке  $\overset{\vee}{w}(0) = 0$  [116].

Постоянная интегрирования  $C$  определяется из условия сращивания внутреннего разложения  $\overset{\vee}{w}(\xi_n)$  на границе пограничного слоя и внешнего решения  $\overset{\vee}{w}(\xi, \varphi)$  на границе  $\Gamma^+$  (вследствие малости  $\xi_n$  границы пограничного слоя внешняя  $\Gamma^+$  совпадает с погрешностью порядка  $\delta$ ).



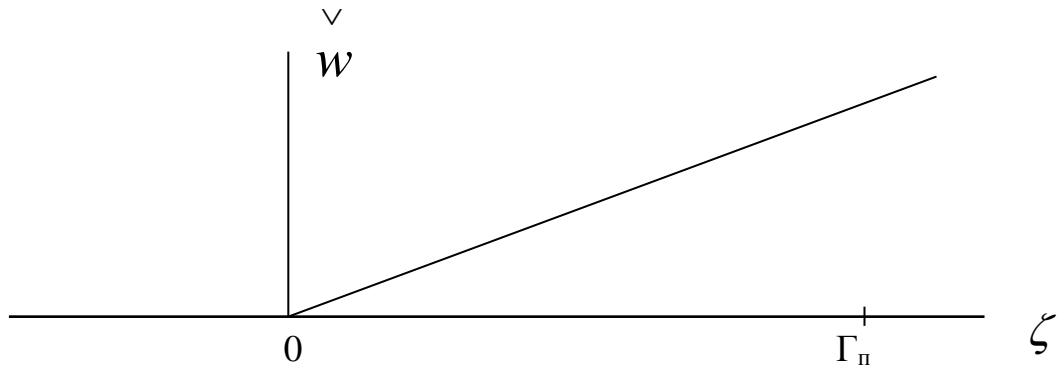


Рис. 2.7. График изменения скорости течения  $\overset{\vee}{w}(\xi)$  внутри пограничного слоя  $\xi \in [0 \Gamma_n]$

#### 2.2.4. Нулевое приближение внешнего разложения: $\hat{w}_\circ(\xi, \varphi)$ , $\hat{v}_\circ(\xi, \varphi)$

В уравнениях (2.29) для скорости  $w$  и  $v$  удерживая слагаемые, не содержащие параметры [3]  $\delta$  и  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} \hat{v}_{0,\zeta\varphi} + \xi \hat{v}_{0,\zeta\zeta} &= K \bar{p}, \varphi; \\ \hat{v}_{0,\varphi\varphi} + \xi \hat{w}_{0,\zeta\varphi} - \hat{w}_{0,\varphi} &= K \xi^2 \bar{p}, \xi. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Граничные условия для компонентов скоростей  $\hat{w}_\circ(\xi, \varphi)$  и  $\hat{v}_\circ(\xi, \varphi)$  на внешней границе  $\Gamma^+$  при  $\xi=1$  поставим исходя из существования пограничного слоя и условия линейного приближения скорости  $\hat{w}_\circ(1, \varphi)$  вблизи границы, и условия безотрывного течения на  $\Gamma^+$ , т. е. условия  $\hat{v}_\circ(1, \varphi)=0$ .

$$\begin{aligned} \hat{v}_\circ(1, \varphi) &= 0 ; \\ \hat{w}_\circ(1, \varphi) - \gamma \frac{\partial \hat{w}_\circ(1, \varphi)}{\partial \zeta} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Аналогичный вид имеют граничные условия на внутренней границе  $\Gamma^+$  в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \hat{v}_\circ(\xi_\circ, \varphi) &= \omega_\circ \xi ; \\ \hat{w}_\circ(\xi_\circ, \varphi) + \gamma \frac{\partial \hat{w}_\circ(\xi_\circ, \varphi)}{\partial \xi} &= \omega_\circ \xi. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Вследствие независимости граничных условий от угловой координаты  $\varphi$ , т. е. вследствие осимметричности условий (2.42 — 2.43), компоненты скорости  $\hat{w}_0(\xi, \varphi)$  и  $\hat{v}_0(\xi, \varphi)$  не зависят от угла  $\varphi$ , т. е.

$$\hat{v}_0, \varphi = 0; \quad \hat{w}_0, \varphi = 0. \quad (2.44)$$

Система уравнений в частных производных (2.41) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2<sup>го</sup> порядка с граничными условиями (2.42 — 2.43)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \xi^2} = k \frac{\partial \bar{p}}{\partial l}; \text{ (здесь } \partial l \text{ — элемент дуги )} \\ o = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}; \\ \hat{w}_0(1) - \gamma \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \xi} = 0; \quad \hat{w}_0(\xi_0) + \gamma \frac{\partial \hat{w}_0(\xi_0)}{\partial \xi} = w_0 \xi_0. \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

Правые части уравнений (2.45) равны нулю вследствие оссимметричности и отсутствия поперечного движения

$$\hat{v}_0(\varepsilon) \equiv 0. \quad (2.46)$$

Окружная скорость  $\hat{w}_0(\varepsilon)$  определяется из (2.46)

$$\hat{w}_0(\xi) = C_1 + C_2 \xi, \quad (2.47)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий на  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  в нулевом приближении

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 - \gamma C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 \xi_0 + \gamma C_2 = w_0 \xi_0 \end{array} \right\}. \quad (2.48)$$

Из (2.31) следует

$$C_1 = w_0 \xi_0 \frac{1}{(1 - \xi_0 - 2\gamma)(1 - \gamma)}; \quad C_2 = w_0 \xi_0 \frac{1}{1 - \xi_0 - 2\gamma}. \quad (2.49)$$

Скорость  $\hat{w}_0(\xi)$  приобретает следующее выражение

$$Z(\xi) = \hat{w}_0(\xi) \frac{1 - \xi_0 - 2\gamma}{w_0 \xi_0} = \frac{1}{1 - \gamma} - \xi \quad (2.50)$$

На рис. 2.8 приведен график функции  $Z(\xi) = \hat{w}_0(\xi) \frac{1 - \xi_0 - 2\gamma}{w_0 \xi_0}$  в зависимости от  $\gamma$  и  $\xi$

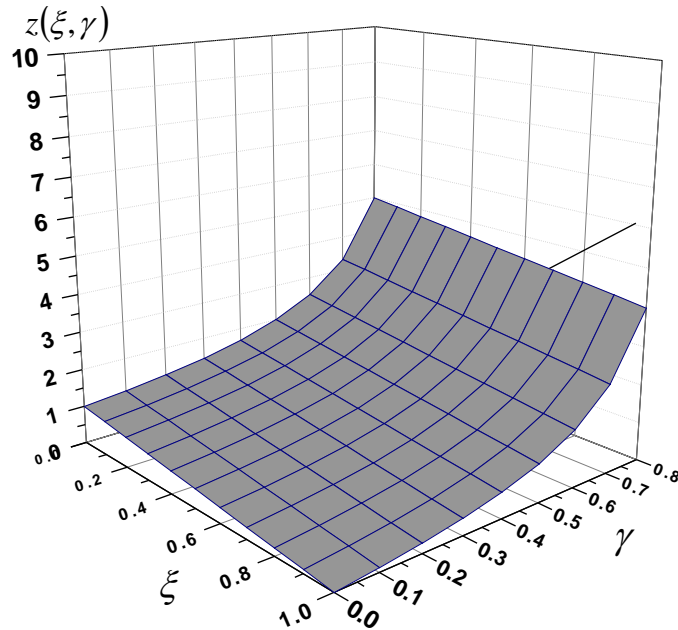


Рис. 2.8. График изображения распределения относительной скорости  $Z$  в зависимости от  $\gamma$  и  $\xi$

Из рис. 2.8 следует линейное убывание скорости от радиуса и гиперболический рост с увеличением параметра микроструктуры  $\gamma$ .

Знание распределения скорости течения в зазоре позволяет найти необходимый крутящий момент  $M$ , обеспечивающий вращение вала с угловой скоростью. Крутящий момент  $M$  вычисляется следующим образом

$$M = 2\pi R \sigma_{r\varphi}, \text{ где } \sigma_{r\varphi} = \mu \frac{\partial \varphi_\varphi}{\partial r}. \quad (2.50.1)$$

$$M = 2\pi \mu \Omega R^2 / (H + 2\gamma); \quad \bar{M} = H M / 2\pi M R^2 \Omega. \quad (2.50.2)$$

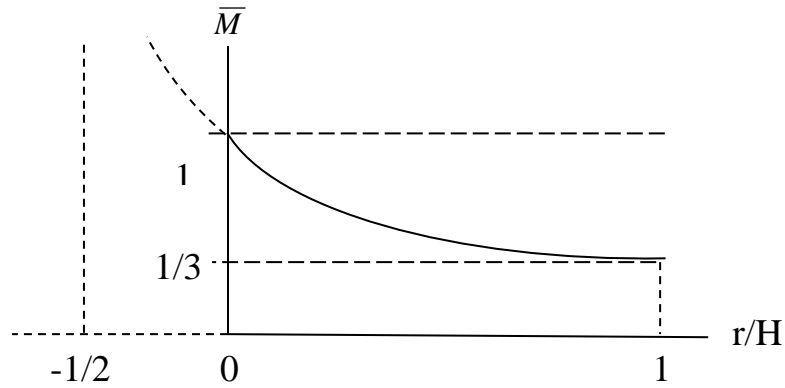


Рис. 2.8.1. График зависимости момента сопротивления от параметра микроструктуры  $\gamma$  ( $\bar{M} = 1/(1 + 2\gamma/H)$ )

Относительное безразмерное уменьшение момента сопротивления можно представить в виде

$$\eta = \frac{\bar{M}(\gamma) - \bar{M}(0)}{\bar{M}(0)} = -2\bar{\gamma}/(1 + 2\gamma) \approx -2\bar{\gamma}, \quad \text{где } \bar{\gamma} = \gamma/H. \quad (2.50.3)$$

На рис. 2.8.1 сплошной линией представлен график зависимости  $\bar{M}$  момента сопротивления на валу в зависимости от параметра микроструктуры  $\bar{\gamma} = \gamma/H$ , а штриховой линией показан момент сопротивления вращению вала в вязкой жидкости.

Из выражения (2.50.3) для относительного безразмерного уменьшения момента сопротивления вращению вала с угловой скоростью  $\Omega$  следует, что относительное уменьшение момента пропорционально относительному характерному размеру микроструктуры  $\delta/H = \bar{\gamma}$ , является малой величиной вследствие малости характерного размера микроструктуры. Сам эффект уменьшения относительного момента сопротивления  $\eta$  существенен для случая малых  $H$  зазоров и предельное уменьшение момента сопротивления составляет 1/3 от момента сопротивления вращению вала в вязкой жидкости без эффекта микроструктуры [114].

**2.2.5. Внешние разложения первого порядка скоростей  $w_\delta$  и  $v_\delta$   
в разложении по малому параметру  $\delta$**

Уравнения первого порядка для скоростей в разложении по малому параметру  $\delta$  получим из (2.29), удерживая слагаемые порядка  $\delta$

$$v_{\delta, \zeta\varphi} + \xi w_{\delta, \zeta\zeta} + \Delta(\xi \varepsilon_{r\varphi}^c) = p_{\delta, \varphi} ; \quad (2.51)$$

$$v_{\delta, \varphi\varphi} + \xi w_{\delta, \xi\varphi} - w_{\delta, \varphi} + \xi^2 \Delta(\varepsilon_{r\varphi}^c) = -\xi^2 p_{\delta, \xi} ;$$

здесь  $\varepsilon_{r\varphi}^c = (1/2)(\partial \hat{v}_0 / \xi \partial \varphi + \partial \hat{w}_0 / \partial \xi - \hat{w}_0 / \xi)$ .

Граничные условия проскальзывания первого порядка в разложении по параметру  $\delta$  (2.30-2.32) принимают вид:

на внешней границы  $\Gamma^+$ , где  $\xi = 1$

$$w_\delta(1, \varphi) - \gamma \partial w_\delta(1, \varphi) / \partial \xi = 0 ; \quad (2.52)$$

$$v_\delta(1, \varphi) = 0 ;$$

на внутренней границе  $\Gamma^-$  в первом приближении по  $\delta$ , где  $\xi = \xi_0$  условие проскальзывания, получим

$$w_\delta(\xi_0, \varphi) + \gamma \partial w_\delta(\xi_0, \varphi) / \partial \xi = 0 ; \quad (2.53)$$

$$v_\delta(\xi_0, \varphi) = 0 .$$

Нулевое приближение  $\hat{w}_0$  и  $\hat{v}_0$  скорости внешнего течения известно по (2.46, 2.47)

$$\hat{v}_0(\xi, \varphi) = 0 ; \quad \hat{w}_0(\xi, \varphi) = \frac{w_0 \xi_0}{1 - \xi_0 - 2\gamma} \left( \frac{1}{1 - \gamma} - \xi \right) .$$

Таким образом, неоднородная часть уравнений определяется

$$\varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{w_0 \xi_0}{1 - \xi_0 - 2\gamma} \right) \left( -\frac{1}{\xi} \left( \frac{1}{1 - \gamma} \right) \right) = \frac{B}{2\xi(1 - \gamma)} ;$$

где  $B = w_0 \xi_0 / (1 - \xi_0 - 2\gamma)$ ;

$$\xi \cdot \varepsilon_{r\varphi}^c = -\frac{B}{2(1 - \gamma)} ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\xi \partial \xi} ; \quad \Delta(\xi \varepsilon_{r\varphi}^c) = 0 ;$$

$$\Delta(\varepsilon_{r\varphi}^c) = -\frac{B}{2(1-\gamma)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\xi \partial \xi} \right) \left( \frac{1}{\xi} \right) = -\frac{B}{2(1-\gamma)} \left( \frac{2}{\xi^3} - \frac{1}{\xi^3} \right) = -\frac{B}{2(1-\gamma)} \frac{1}{\xi^3}; \quad (2.53)$$

Вследствие независимости граничных условий от угловой координаты уравнения (2.51) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial^2 w_\sigma}{\partial \xi^2} &= K \frac{\delta p_\sigma}{\delta \rho}; \\ -\frac{B}{2(1-\gamma)} \frac{1}{\xi^3} &= -K \frac{\delta p_\sigma}{\delta \xi}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Задача изучения сдвигового течения в цилиндрическом зазоре  $\xi \in [\xi_0, 1]$  ставилась в предположении отсутствия внешнего давления  $P$ . Анализ уравнений (2.55) первого приближения по параметру  $\delta$  показывает, что исследуемое движение возможно только при возникновении слабого, порядка  $\delta$ , перепада давления вдоль радиуса

$$K \frac{\delta p_\sigma}{\delta \xi} = \frac{B}{2k(1-\gamma)} \frac{1}{\xi^3} \quad (2.56)$$

Из (2.56) следует, что давление в зазоре изменяется вдоль радиуса  $\xi$  по закону

$$p = \delta p_\delta = \delta \left( A - \frac{B}{k(1-\gamma)} \frac{1}{\xi^2} \right), \quad (2.57)$$

где  $A$  - постоянная интегрирования.

На рис. 2.9 представлен качественный график изменения давления вдоль радиуса  $\xi$

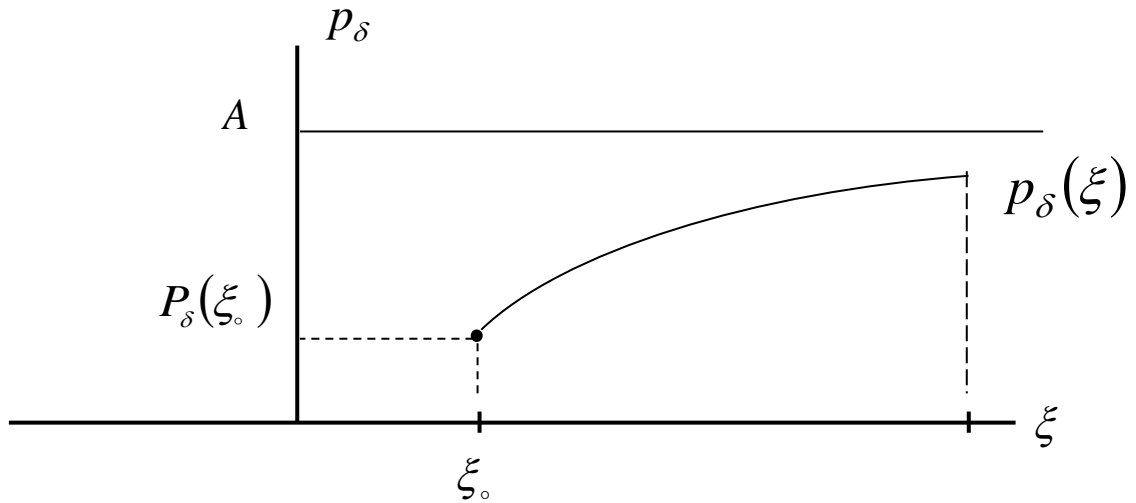


Рис. 2.9. График изменения давления  $p_\delta(\xi)$ , показывающий слабое увеличение давления по направлению к внешнему контуру цилиндрического зазора

Скорость  $w_\delta$  удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (2.55)

$$\frac{\partial^2 w_\delta}{\partial \xi^2} = 0, \quad (2.58)$$

так что из (2.58) следует

$$w_\delta(\xi) = C_1 + C_2 \xi;$$

при граничных условиях (2.50, 2.51)

$$C_1 + C_2 - \gamma C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 \xi_0 - \gamma C_2 = 0. \quad (2.59)$$

Определитель  $D$  однородной системы  $2^x$  линейных алгебраических уравнений отличен от нуля

$$D = (\xi_0 + \gamma) - (1 - \gamma) = \xi_0 - 1 + 2\gamma \neq 0$$

Тогда из (2.59) следует, что  $C_1 = C_2 = 0$ , т. е. первое внешнее приближение разложения скорости по параметру  $\delta$  равна нулю, и параметр  $\delta$  не влияет на поле скоростей в первом приближении.

**2.2.6. Внешние разложения первого порядка для скоростей  $w_\varepsilon$  и  $v_\varepsilon$  в разложении по малому параметру – эксцентриситету  $\varepsilon$**

Дифференциальное уравнение для скоростей  $w_\varepsilon$  и  $v_\varepsilon$  получим из системы (2.29), удерживая слагаемые порядка  $\varepsilon$  [49, 57]

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,\zeta\varphi} + \xi w_{\varepsilon,\zeta\zeta} &= p_{\varepsilon,\varphi} \\ v_{\varepsilon,\varphi\varphi} + \xi w_{\varepsilon,\zeta\varphi} - w_{\varepsilon,\varphi} &= -\xi^2 p_{\varepsilon,\zeta} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Для полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2.63) граничные условия проскальзывания принимают вид

$$\begin{aligned} w_\xi(1, \varphi) - \gamma \frac{w_\xi(1, \varphi)}{\alpha \xi} &= 0; \quad v_\xi(1, \varphi) = 0; \\ w_\varepsilon(\xi_0, \varphi) + \gamma \frac{w_\varepsilon(\xi_0, \varphi)}{\alpha \xi} &= 0; \\ v_\varepsilon(\xi_0, \varphi) - \sin \varphi w_0(\xi_0, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Граничные условия (2.61) содержат переменную  $\varphi$ , поэтому система уравнений (2.60) является системой уравнений в частных производных, которая в силу граничных условий допускает решение для  $w_\varepsilon$  и  $v_\varepsilon$  следующего вида

$$w_\varepsilon(\xi, \varphi) = f(\xi) \cos \varphi; \quad v_\varepsilon(\xi, \varphi) = g(\xi) \sin \varphi. \quad (2.62)$$

Для сомножителей  $f(\xi)$  и  $g(\xi)$  получим из (2.60-2.61) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} &= p_\varepsilon^c; \\ -g - \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + f &= -\xi^2 p_\varepsilon^c; \\ f(1) - f'(1) &= 0; \quad g(1) = 0; \\ f(\xi_0) - f'(\xi_0) &= 0; \quad g(\xi_0) = w_0(\xi_0). \end{aligned} \quad (2.63)$$



Для возмущенного давления допустимо представление вида  
 $p_\varepsilon(r, \varphi) = p_\varepsilon^c(\xi) \sin \varphi$

Эксцентричный сдвиг внутреннего контура приводит к возникновению слабого порядка  $\varepsilon$ , возмущению давления  $p_\varepsilon$ , для которого получим из (2.63) следующее уравнение

$$\begin{aligned} -(\xi^2 p')' + p &= 0, \\ \xi^2 p'' + 2\xi p' - p &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Построим решение дифференциального уравнения (2.64), положив  $p = z / \xi$ , тогда

$$p' = \frac{z'}{\xi} - \frac{z}{\xi^2} \quad p = \frac{z}{\xi} ; \quad \xi^2 p' = \xi z' - z \quad (2.65)$$

$$(\xi^2 p')' z' - \xi z'' - z' = -\xi z'' ;$$

уравнение (2.64) примет вид

$$-\xi z'' - z / \xi = 0 ; \quad \xi^2 z'' + z = 0 ; \quad (2.66)$$

уравнение (2.66) есть уравнение Эйлера

$$\begin{aligned} z'' &= C \xi^\alpha z \quad (\alpha = -2; C = -1; s = \sqrt{5} / 2) \\ z &= C_1 \sqrt{\xi} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \ln \xi\right) + C_2 \sqrt{\xi} \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \ln \xi\right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Давление  $p_\varepsilon(\xi, \varphi)$  принимает вид

$$p_\varepsilon = C_1 \frac{1}{\sqrt{\xi}} \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \ln \xi + C_2\right) \sin \varphi = p_\varepsilon^c(\xi) \sin \varphi . \quad (2.68)$$

$$\xi \in [\xi_0; 1]$$

$$p_\varepsilon^c(\xi) = C_1 \xi^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \ln \xi + C_2\right) \quad (2.69)$$

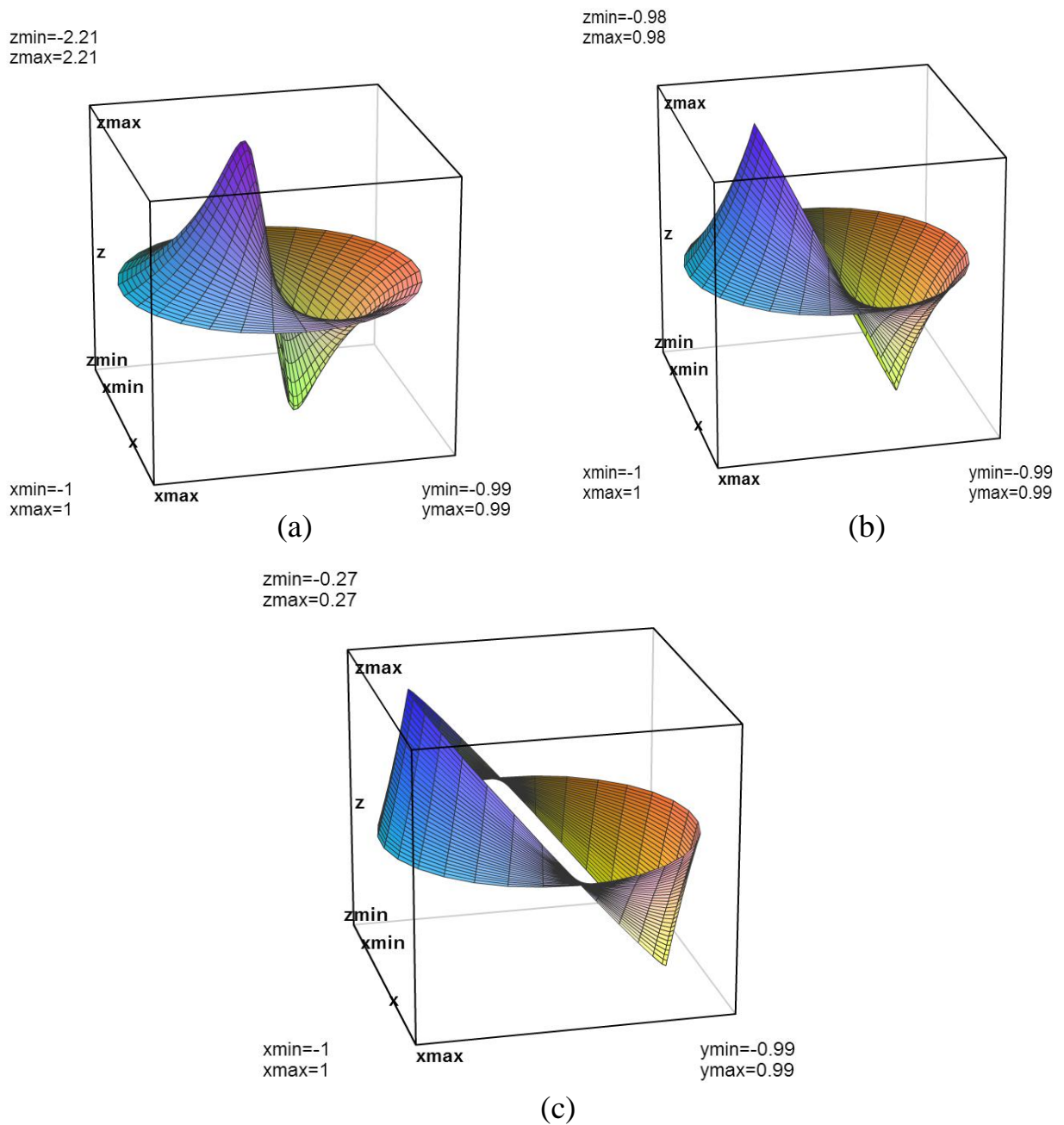


Рис. 2.10. Распределение возмущения давления  $p_\varepsilon(\xi, \varphi)$  в области течения

$$p_\varepsilon = C_1 \frac{1}{\sqrt{\xi}} \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \ln \xi + C_2\right) \sin \varphi \cdot \varphi \in [0, 2\pi],$$

$$\text{a) } \xi \in [0.1, 1], \quad \text{b) } \xi \in [0.5, 1], \quad \text{c) } \xi \in [0.8, 1]$$

Расчёты возмущения окружной скорости и возмущения давления  $p_\varepsilon$  за счёт сдвига внутреннего вращающегося цилиндра на малое расстояние  $\varepsilon$ . влево от центра от внешнего контура показывают, что перепад давления в области расширения течения уменьшается, а в области сужения потока перепад давления возрастает (рис. 2.10).

# Глава 3. Вращательное движение микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с эллиптической границей

## 3.1. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное плоское движение микроструктурной вязкой жидкости в щелевом канале, образованном внешней границей в форме эллипса и внутренним цилиндром, вращающимся с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 3.1) [58].

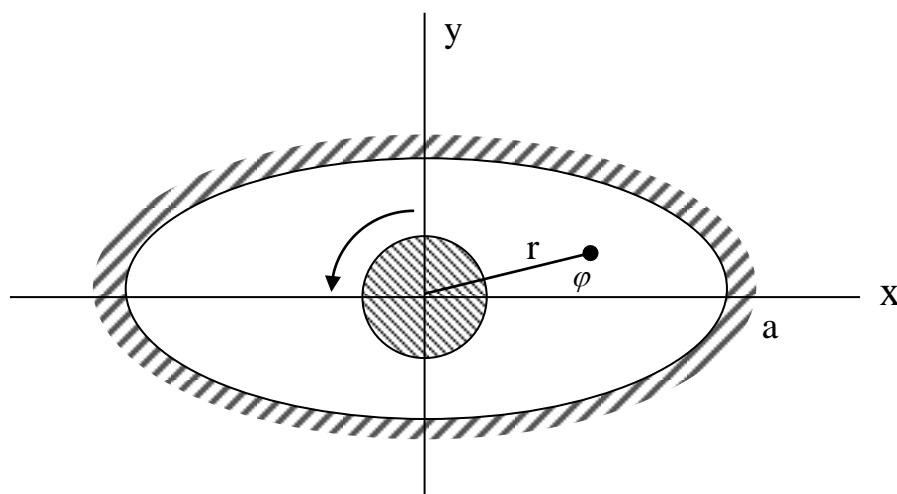


Рис. 3.1. Изображение внешнего эллиптического контура с полуосями  $a$  и  $b$  с внутренним цилиндром радиуса  $r_0$ , вращающегося с угловой скоростью  $\Omega$

Уравнения стационарного плоского движения микроструктурной вязкой жидкости в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  для радиальной и окружной компонент скорости  $V_r(r, \varphi) = v$ ,  $V_\varphi(r, \varphi) = w$  и давления  $P$  имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right) + \frac{1}{r} \left( \varepsilon_{r\varphi}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{r\varphi}^c \right) = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\varepsilon_{r\varphi}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right)$  – скорость деформации по Коши,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad P(r, \varphi) - \text{давление.}$$

Уравнение неразрывности (несжимаемости) в случае плоского стационарного движения микроструктурного материала в полярных координатах представимо в форме

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^c + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_{kk}^c = 0; \quad \varepsilon_{kk}^c = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{V}{r}.$$

Вводя характерные параметры течения:  $w_0$  – скорость,  $R_0$  – линейный размер,  $K_0$  – напряжение – представим систему (1) в безразмерном виде.

$$\begin{aligned} v_{,\varphi\varphi} + \xi w_{,\xi\varphi} - w_{,\varphi} + \delta \xi \Delta (\varepsilon_{\xi\varphi}^c)_{,\varphi} &= -K \xi^2 P_{,\xi}; \\ v_{,\xi\varphi} + \xi w_{,\xi\xi} + \delta \Delta (\varepsilon_{\xi\varphi}^c)_{,\xi} &= K P_{,\varphi}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{kk} = \xi v_{,\xi} + w_{,\varphi} + w + \partial \xi \Delta \partial \varepsilon_{kk}^c = 0; \quad \varepsilon_{kk}^c = v_{,\xi} + (1/\xi) w_{,\varphi} + (1/\xi) w;$$

$$\text{уравнение неразрывности } \varepsilon = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{V}{r} + \frac{h^2}{6} \Delta \varepsilon_c.$$

В уравнениях (2) знак обезразмеривания опущен,  $K = K_0 R_0 / \mu w_0$ ;

$$\xi = r / R_0; \quad \delta = h^2 / 6 R_0^2; \quad \varepsilon_{\xi\varphi}^c = (1/2) \left( (1/\xi) v_{,\varphi} + w_{,\varphi} - w/\xi \right);$$

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0}; \quad \Delta = \left( \frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\xi^2 \partial \varphi^2}; \quad \varepsilon_{kk}^c = v_{,\xi} + (1/\xi) w_{,\varphi} + (1/\xi) v.$$

Система трёх уравнений (3.2) в частных производных [107, 124, 125, 126, 146] имеет 4-й порядок, причем малый параметр  $\delta = h^2 / 6 R_0^2$  стоит перед производными 4-го порядка. Такие системы именуются сингулярно возмущенными [45] и они обладают той особенностью, что при малых  $\delta \rightarrow 0$  система (3.2) будет иметь 2-й порядок, нельзя будет удовлетворить 4-м

граничным условиям и возникнет необходимость введения пограничного слоя [57].

Исследование одномерного сдвигового течения в плоском зазоре проведено в [115].

Для случая движения исследуемого материала в тонких слоях относительно малой толщины  $H$  ( $V=H/R_0 \ll 1$ ) преобразуем уравнения движения и неразрывности от переменных  $(\xi, \varphi)$  к переменным  $(\eta, \varphi)$ , где  $\eta$  - относительное расстояния от внутреннего цилиндра,  $r = R_0$

$$r = R_0 + y ; \quad \xi = 1 + y/R_0 = 1 + \frac{y/H}{R_0} H = 1 + \nu \eta ;$$

$$\eta = y/H ; \quad \nu = H/R_0 ; \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial y} ; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} ;$$

уравнения движения и неразрывности (3.2) примут вид

$$\nu_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{\nu}(1 + \nu\eta)w_{,\eta\varphi} + (1 + \nu\eta)\frac{1}{\nu^2}\Delta(\varepsilon_{\eta\varphi}^c)_{,\varphi} = -K(1 + \nu\eta)^2 P_{,\eta} ;$$

$$\frac{1}{\nu}\nu_{,\eta\varphi} + (1 + \nu\eta)\frac{1}{2}w_{,\eta\eta} + \frac{1}{\nu^2}\Delta(\varepsilon_{\eta\varphi}^c)_{,\eta} = KP_{,\varphi} ;$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{1 + \nu\eta} + \frac{\nu}{1 + \nu\eta} + \frac{\partial}{\nu^2}\Delta\varepsilon_c = 0 ;$$

$$\varepsilon_{\eta\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \eta} \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{w}{1 + \nu\eta} \right) ;$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial \eta} + \frac{1}{1 + \nu\eta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{1 + \nu\eta} .$$

### 3.2. Анализ граничных условий

Сформулируем граничные условия нашей задачи.

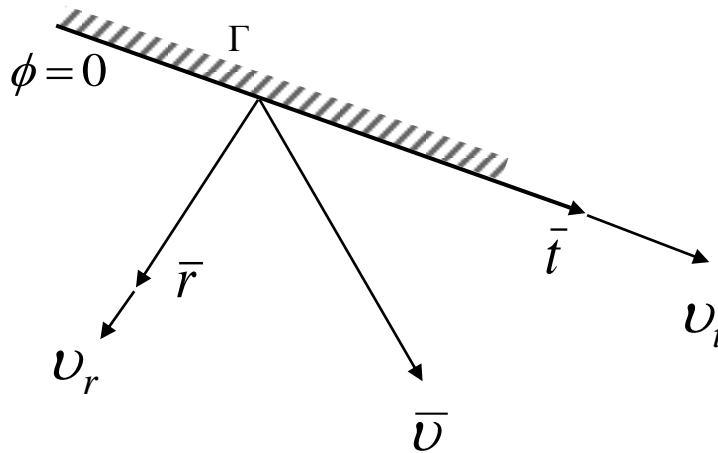


Рис. 3.2. Элемент границы  $\Gamma(\Phi(\xi, \varphi)=0)$  области течения

Будем полагать, что представительный элемент микроструктурного материала прилипает к границе области, допускает качение вдоль нее (относительно границы) и не протекает сквозь границу  $\Gamma$  [2].

$$\bar{v}|_{\Gamma} = 0, \text{ т.е. } v|_{\Gamma} = 0; \quad w|_{\Gamma} = 0; \quad (3.3)$$

$$v_{\tau}^{\text{отн}}|_{\Gamma+\Delta_0} - \gamma \frac{\partial v_{\tau}^{\text{отн}}}{\partial n}|_{\Gamma+\Delta_0} = 0 \quad . \quad (3.4)$$

Условие (3.4) может рассматриваться как условие линейного распределения скоростей вблизи границы  $\Gamma$  или как условие линейного сращивания скоростей на границе пограничного слоя  $\Gamma+\Delta_0$ .

Конкретизируем граничные условия (3-4) на внутреннем контуре  $\check{\Gamma}$  окружности радиуса  $\xi_0$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega_0 = \Omega_0 \cdot \frac{R_0}{w_0}$ .

$$\begin{aligned} v(\xi_0, \varphi) &= 0; \quad w(\xi_0, \varphi) = \omega_0 \xi_0; \\ w^{\text{отн}}(\xi_0 + \Delta_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^{\text{отн}}(\xi_0 + \Delta_0, \varphi)}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Внешнюю границу в форме эллипса зададим в виде

$$\Phi(\xi, \varphi) = \xi - \rho / \sqrt{1 + \varepsilon \cos 2\varphi} = 0. \quad (3.6)$$

где  $\rho = ab\sqrt{2}/R_0\sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\varepsilon = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$ ,  $a, b$  – полуоси эллипса,  $\varepsilon$  – эксцентриситет.

С точностью до  $\varepsilon^1$  уравнение эллипса (6) принимает вид

$$\Phi(\xi, \varphi) = \xi - \rho \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \cos 2\varphi \right) = 0.$$

Нормаль к эллипсу зададим через оператор градиента  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \xi}; \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ ;

$$\bar{n} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} = (1; \rho \varepsilon \sin 2\varphi). \quad (3.7)$$

Вектор касательной  $\bar{\tau}$  к эллипсу определим из условия его ортогональности к нормали  $\bar{n}$  ( $\bar{n} \cdot \bar{\tau} = 0$ )

$$\bar{\tau} = (-\rho \varepsilon \sin 2\varphi; 1). \quad (3.8)$$

Нормальные и касательные к границе эллипса компоненты скорости вычислим, используя (3.7, 3.8).

$$v_n = \bar{v} \cdot \bar{n} = v + w \cdot \rho \varepsilon \sin 2\varphi; \quad (3.9)$$

$$v_\tau = \bar{v} \cdot \bar{\tau} = -v \cdot \rho \varepsilon \sin 2\varphi + w.$$

Граничные условия (3.3, 3.4) на неподвижном эллипсе с точностью до  $\varepsilon^1$  вычисляются

$$v_n|_{\hat{\Gamma}} = (v(\xi, \varphi) + w(\xi, \varphi) \cdot \rho \varepsilon \sin 2\varphi)|_{\hat{\Gamma}} = 0;$$

$$v_\tau|_{\hat{\Gamma}} = (-v(\xi, \varphi) \cdot \rho \varepsilon \sin 2\varphi + w(\xi, \varphi))|_{\hat{\Gamma}} = 0; \quad (3.10)$$

$$\left( v_\tau - \gamma \frac{\partial v_\tau}{\partial n} \right)|_{\hat{\Gamma}} = \left[ - \left( v - \gamma \frac{\partial v}{\partial n} \right) \rho \varepsilon \sin 2\varphi + \left( w - \gamma \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right]|_{\hat{\Gamma} + \Delta_0} = 0. \quad (3.11)$$

Однородная система линейных уравнений (3.10) для  $v(\xi, \varphi)$  и  $w(\xi, \varphi)$  на  $\hat{\Gamma}$  имеет определитель  $D = 1 + \rho^2 \varepsilon^2 \sin^2 2\varphi \neq 0$ , поэтому условия (3.10) принимают более простой вид:

$$v(\xi, \varphi)|_{\hat{\Gamma}} = 0; \quad w(\xi, \varphi)|_{\hat{\Gamma}} = 0. \quad (3.12)$$

Условие (3.11) преобразуем, заменяя производную по нормали  $n$  через производные по  $\xi$  и  $\varphi$ .

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \rho \varepsilon \sin 2\varphi. \quad (3.13)$$

Тогда условие (3.11) преобразуется с учетом  $\varepsilon^1$

$$\left( - \left( v - \gamma \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \rho \varepsilon \sin 2\varphi + \left( w - \gamma \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - \gamma \rho \varepsilon \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\hat{\Gamma} + \Delta_0} = 0. \quad (3.14)$$

Граничные условия (3.12, 3.14) представлены в форме, учитывающей параметр  $\varepsilon^1$ , но сами значения компонентов скоростей  $v(\xi, \varphi)$  и  $w(\xi, \varphi)$  вычислены на точной границе  $\hat{\Gamma} + \Delta_0$ , на эллипсе, уравнение которого имеет нелинейное представление (3.6). Преследуя дальнейшую цель использовать для решения рассматриваемой задачи метод возмущений (метод малого параметра) [95, 110, 183] с точностью до  $\varepsilon^1$  разложим функции  $v(\xi, \varphi)$  и  $w(\xi, \varphi)$ , вычисляемые на контуре эллипса, в степенной ряд по малому параметру  $\varepsilon$  условий (3.12, 3.14), удержим слагаемые с учетом до  $\varepsilon^1$  на эллипсе  $\xi = \rho \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \cos 2\varphi \right)$ .

$$v(\xi, \varphi) \Big|_{\hat{\Gamma}} = v(\xi, \varphi) \Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \frac{\partial v(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \Big|_{\varepsilon=0} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \dots, \quad (3.15)$$

где  $\left( \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \left( \frac{1}{2} \right) \rho \cos 2\varphi$ , а уравнение границы при  $\varepsilon=0$  принимает вид  $\xi = \rho$ ,

т. е. граничные условия (12,14) ставятся на окружности  $\xi = \rho = ab\sqrt{2}/\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Значения скорости  $v$  и  $w$  на поверхности эллипса представляются в виде ряда по малому эксцентриситету  $\varepsilon$

$$v(\xi, \varphi) \Big|_{\hat{\Gamma}} = v(\xi, \varphi) \Big|_{\xi=\rho} + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \frac{\partial v(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\rho}; \quad (3.16)$$



$$w(\xi, \varphi)|_{\hat{\Gamma}} = w(\xi, \varphi)|_{\xi=\rho} + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \frac{\partial w(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\rho}.$$

Граничные условия прилипания (3.12) представительного элемента жидкости к границе в форме эллипса, представленные в виде ряда по малому эксцентриситету  $\varepsilon$  с точностью до  $\varepsilon^1$ , принимают вид

$$\begin{aligned} v(\xi, \varphi)|_{\hat{\Gamma}} + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \frac{\partial v(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\rho} &= 0; \\ w(\xi, \varphi)|_{\hat{\Gamma}} + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \frac{\partial w(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Используя разложения (3.16) скоростей в ряд по малому параметру  $\varepsilon$ , упростим граничное условие (3.14) с точностью до  $\varepsilon^1$  на границе  $\hat{\Gamma}$ , уравнение которой в нулевом приближении есть  $\xi = \rho$ .

$$\begin{aligned} - \left( v(\xi, \varphi) - \gamma \frac{\partial v(\xi, \varphi)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial w(\xi, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\xi=\rho} \rho \varepsilon \sin 2\varphi + \left( w(\xi, \varphi) - \gamma \frac{\partial w(\xi, \varphi)}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=\rho} + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \left( \frac{\partial w(\xi, \varphi)}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 w(\xi, \varphi)}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi=\rho} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

### **3.3. Полная постановка задачи течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре, образованном внешним эллипсом и вращающимся с угловой скоростью $\omega_0$ внутренним цилиндром с учетом малых параметров $\varepsilon$ и $\delta$ с точностью до величин первого порядка $\varepsilon^1$ и $\delta^1$**

Дадим полную систему 3-х уравнений в частных производных (3.2) (для компонент скорости течения  $v(\xi, \varphi)$  и  $w(\xi, \varphi)$ ) и граничных условий:

$$\begin{aligned} v_{,\varphi\varphi} + \xi w_{,\xi\varphi} - w_{,\varphi} + \delta \xi \Delta(\varepsilon_{\xi}^c \varphi) \Big|_{1\varphi} &= -K \xi^2 P_{,\xi}; \\ v_{,\xi\varphi} + \xi w_{,\xi\xi} + \delta \Delta(\varepsilon_{\xi}^c \varphi) \Big|_{,\xi} &= K P_{,\varphi}; \\ v(\xi_0, \varphi) &= 0; \quad w(\xi_0, \varphi) = \omega_0 \xi_0; \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$v_{,\xi} + (1/\xi)w_{,\varphi} + (1/\xi)v + \delta\Delta(\varepsilon_{kk}^c) = 0. \quad (3.20)$$

$$w^{\text{отк}}(\xi_0 + \Delta_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^{\text{отк}}(\xi_0 + \Delta_0, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad (3.21)$$

$$v(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \frac{\partial v(\rho, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad w(\rho, \varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad (3.22)$$

$$w(\rho, \varphi) - \gamma \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \xi} - \rho \varepsilon \sin 2\varphi \left( v(\rho, \varphi) - \gamma \frac{\partial v(\rho, \varphi)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \xi} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \rho \cos 2\varphi \left( \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 w(\rho, \varphi)}{\partial \xi^2} \right) = 0 \quad (3.23)$$

Здесь  $\rho = ab\sqrt{2}/\sqrt{a^2 + b^2}$  - радиус окружности, аппроксимирующей эллипс с погрешностью порядка  $\varepsilon^1$ . Заметим, что граничные условия (3.20, 3.22) прилипания материала к границам  $\hat{\Gamma}$  и  $\check{\Gamma}$  заданы на самих границах  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = \rho$ , а граничные условия (3.21, 3.23) приближенно вычисляются на этих границах, хотя их место на границах пограничных слоев  $\hat{\Gamma} + \Delta_0$  и  $\check{\Gamma} + \Delta_0$ . Это замечание важно при применении этих условий к внутреннему и внешнему течениям.

### 3.4. Построение поля скоростей течения в пограничном слое

Параметром, определяющим сингулярность задачи, является  $\delta$  и для построения поля скоростей в пограничном слое растянем координату  $\xi$ , положив  $\xi = \lambda\zeta$ ;  $\zeta = \xi/\lambda$ ;  $\lambda = \delta^2$ ;  $\alpha > 1$  (3.24)

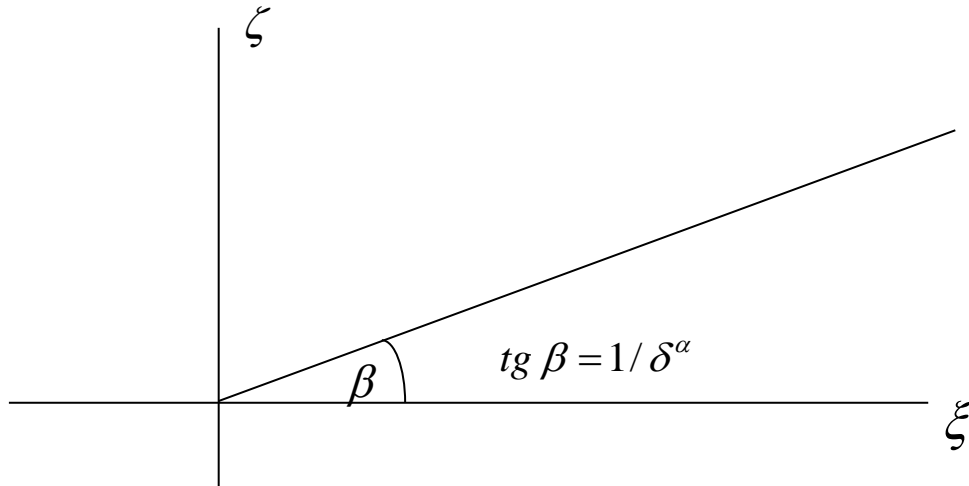


Рис. 3.3. Схематическая картина растяжения координаты  $\xi$  в  $(1/\delta^\alpha)$  раз, так что малым изменениям  $\zeta$  следуют большие значения координаты  $\xi$

Для осесимметричных граничных условий при  $\varepsilon \rightarrow 0$  система уравнения (19, 20) становится системой 3-х обыкновенных уравнений по переменной  $\xi$ . В силу граничных условий  $v(\xi) = v(\rho) = 0$  получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\overset{\vee}{w}_\delta(\xi)$ , которое в пределе при  $\delta \rightarrow 0$  принимает вид

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi \left( \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d \overset{\vee}{w}_\delta}{d\xi} - \frac{\overset{\vee}{w}_\delta}{\xi} \right) \right) \right] \right\} = 0. \quad (3.25)$$

Далее будем координату  $\xi$  отсчитывать от границы течения и вследствие ограниченности и возможности существования  $\overset{\vee}{w}_\delta(\Delta)$  при  $\xi=0$  уравнение (3.25) будет иметь решение для  $w(\xi)$  в виде

$$\overset{\vee}{w}_\delta(\xi) = C\xi, \quad (3.26)$$

где постоянная  $C$  должна определяться из условия согласования  $\overset{\vee}{w}_\delta(\Delta)$  на границе пограничного с внешним разложением  $\hat{w}_\delta(\xi)$  при  $\xi \rightarrow 0$ .

Таким образом, в таком пограничном слое  $\xi \in [0, \Delta_0/\delta]$  ( $\xi \in [0, \Delta_0/\delta]$ )

имеет место линейное распределение скорости  $\hat{w}_\delta(\xi)$ . [4]

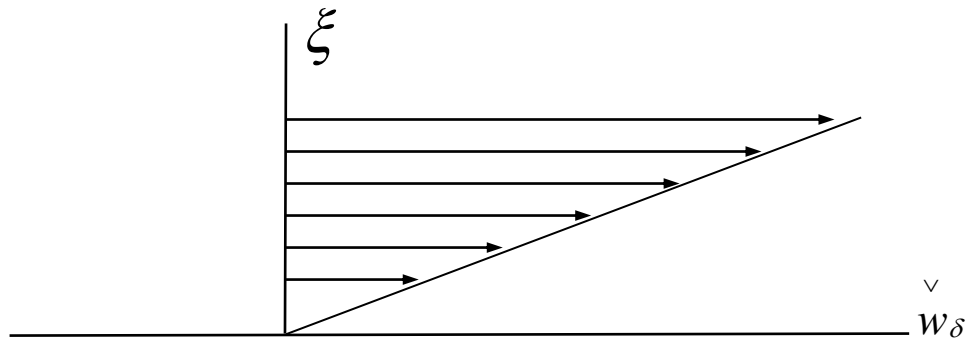


Рис. 3.4. Линейный график скорости течения  $\hat{w}_\delta(\xi)$  в пограничном слое, соответствующий скорости точек представительного элемента при его качении вдоль границы

### 3.5.1. Построение внешнего разложения решения исследуемой задачи в виде степенного ряда по малым параметрам $\delta$ и $\varepsilon$

Решение задачи (3.19 - 3.23) для поля скоростей  $V(\xi, \varphi)$  и  $w(\xi, \varphi)$  вне пограничного слоя будем искать в виде отрезка степенного ряда по  $\delta$  и  $\varepsilon$  с точностью до первых порядков  $\delta^1$  и  $\varepsilon^1$  [95, 110, 183, 186]

$$V(\xi, \varphi) = V^0(\xi, \varphi) + \delta \cdot V^\delta(\xi, \varphi) + \varepsilon V^\varepsilon(\xi, \varphi) + \dots \quad (3.27)$$

$$w(\xi, \varphi) = w^0(\xi, \varphi) + \delta w^\delta(\xi, \varphi) + \varepsilon w^\varepsilon(\xi, \varphi) + \dots \quad (3.28)$$

Для формулировки уравнений и граничных условий для членов рядов (3.27 - 3.28) подставим эти представления в постановку задачи (3.19 - 3.23) и выполним эти уравнения с точностью до  $\delta^1$  и  $\varepsilon^1$ , т. е. с погрешностью второго порядка по  $\varepsilon$  и  $\delta$ .

### 3.5.2. Внешнее разложение нулевого порядка в разложении по малым параметрам $\delta$ и $\varepsilon$

Из полной постановки задачи (3.19 - 3.23) после подстановки приближенного решения в форме (3.27 - 3.28) и выполнения этих уравнений при  $\delta^0$  и  $\varepsilon^0$  получим систему уравнений

$$V_{\varphi\varphi}^0 + \xi w_{\varphi}^0 = -K\xi^2 P_{\xi}^0; \quad (3.29)$$

$$V_{\xi\varphi}^0 + \xi w_{\xi\xi}^0 = KP_{\varphi}^0; \quad (3.30)$$

и граничные условия

$$V^0(\xi_0, \varphi) = 0; w^0(\xi^0, \varphi) = w_0 \xi_0; w^{0omn}(\xi_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^{0omn}(\xi^0, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad (3.31)$$

$$V^0(\rho, \varphi) = 0; w^0(\rho, \varphi) = 0; w^0(\rho, \varphi) - \gamma \frac{\partial w^0(\rho, \varphi)}{\partial \xi} = 0. \quad (3.32)$$

Вид пограничных условий (3.31 - 3.32) говорит о том, что они не зависят от угловой координаты  $\varphi$ , и сами уравнения в частных производных тоже не содержат переменную  $\varphi$ , следовательно и скорости  $V^0$ ,  $w^0$  и давление  $P^0$  не зависят от переменной  $\varphi$ .

В результате мы должны рассматривать систему (3.29 - 3.30) как систему 2-х обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$0 = -k_{\xi}^2 P_{\xi}^0; \quad (3.33)$$

$$\xi w_{\xi\xi}^0 = 0; \quad (3.34)$$

при граничных условиях

$$V^0(\xi^0) = 0; w^0(\xi^0) = \omega_0 \xi_0; w^{0omn}(\xi_0) + \gamma w^{0omn}(\xi_0)_{\xi} = 0; \quad (3.35)$$

$$V(\rho) = 0; w^0(\rho) = 0; w^0(\rho) - \gamma w^0(\rho) = 0, \quad (3.36)$$

где  $w^{0omn}(\xi_0) = w^0 - \omega_0 \xi_0$ .

Уравнение (3.33) для  $V^0(\xi)$  и граничные условия (3.35 - 3.36) для  $V^0(\xi)$

показывают, что допустимым является нулевое решение для  $V^0(\xi)$ , т. е. радиальное движение материала в нулевом приближении отсутствует и перепада давления по радиусу нет, так что давление  $P^0$  в нулевом приближении постоянно

$$P^0(\xi, \varphi) = Const. \quad (3.37)$$

Для дифференциального уравнения второго порядка для  $w^0(\xi)$  (3.34) из (3.35 - 3.36) мы имеем право выбирать только условия сопряжения внутреннего и внешнего разложений на границе пограничного слоя, поскольку условия прилипания уже использованы для решений внутри пограничного слоя, что для  $w^0(\xi)$  будет иметь следующие задачи:

$$\begin{aligned} w^{0''}(\xi) &= 0; \\ w^{0отн}(\xi_0) + \gamma w^{0отн}(\xi_0) &= 0; \\ w^0(\rho) - \lambda w^{0'}(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Решение дифференциальной задачи (3.38) имеет вид

$$w^0(\xi) = C_1 + C_2 \xi, \quad (3.39)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \xi_0 + \gamma C_2 &= \omega_0 \xi_0, \\ C_1 + C_2 \rho - \gamma C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Из условий (3.40) определяются  $C_1$  и  $C_2$ .

$$C_2 = \omega_0 \xi_0 / (\rho - \xi_0 + 2\gamma); \quad C_1 = \omega_0 \xi_0 (\rho - \gamma). \quad (3.41)$$

Распределение окружной скорости  $w^0(\xi)$  имеет линейный вид

$$w^0(\xi) = \frac{\omega_0 \xi_0}{(\rho - \xi_0 - 2\gamma)} (\rho - \gamma - \xi). \quad (3.42)$$

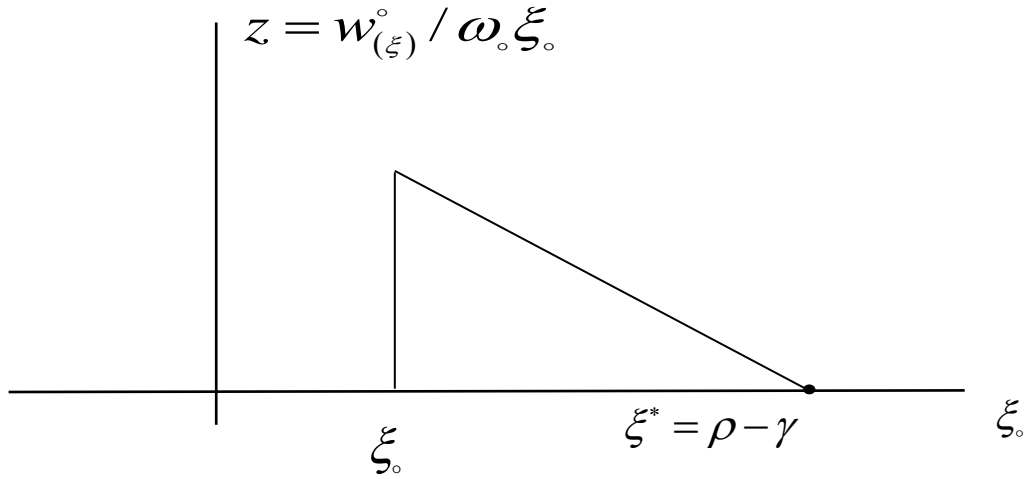


Рис. 3.5. График распределения окружной скорости  $w^0(\xi)$  в нулевом приближении

Как следует из графика распределения окружной скорости  $w^0(\xi)$  в нулевом приближении вблизи высшей границы  $\xi = \rho$  образуется застойная зона малой толщины  $(\rho - \gamma)$ .

Таким образом, в нулевом приближении разложения скоростей и давления в ряд по малым  $\delta$  и  $\varepsilon$  материал совершает чисто вращательное движение  $V^0 = 0, w^0 \neq 0$  по окружности при постоянном давлении  $P^0$  в области течения с относительно тонкой зоной застоя вблизи внешней неподвижной границы.

### 3.5.3. Внешнее разложение первого порядка по параметру $\delta$ для скорости течения $V^\delta$ и $w^\delta$

Подставляя разложение для скоростей  $V$  и  $w$  в виде рядов (3.27, 3.28) в уравнения (3.19) и граничные условия (3.20 - 3.23) и выполняя условия равенства при слагаемых  $\delta^1$ , получим

$$\begin{aligned} V_{\varphi\varphi}^\delta + \xi w_{\xi\varphi}^\delta - w_{\varphi}^\delta &= -\xi \Delta(\varepsilon_s^{c_0})_{,\varphi} - k \xi^2 P_{,\xi}^\delta; \\ V_{\xi\varphi}^\delta + \xi w_{\xi\xi}^\delta &= -\Delta(\xi \varepsilon_{\xi\varphi}^{c_0})_{,\xi} + k P_{,\varphi}^\delta; \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$V^\delta(\xi_0, \varphi) = 0; w^\delta(\xi_0, \varphi) = 0; w^\delta(\xi_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^0(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} = 0;$$

$$V^\delta(\rho, \varphi) = 0; w^\delta(\rho, \varphi) = 0; w^\delta(\rho, \varphi) - \gamma \frac{\partial w^0(\rho, \varphi)}{\partial \xi} = 0. \quad (3.44)$$

Граничные условия (3.44) и сами границы  $\xi = \xi_{0j}, \xi = \rho$  не содержат угловой переменной  $\varphi$  и сами уравнения в правой части (3.43) тоже не содержат переменной  $\varphi$ , так что задачи (3.43 - 3.44) являются системой 2-х обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, в которой

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon_{v\varphi}^{c0})_{,\varphi} &\equiv 0; \Delta(\xi \varepsilon_{v\varphi}^{c0})_{,\xi} \neq 0. \\ \varepsilon_{v\varphi}^{c0} &= \frac{1}{2}(w_{,\xi}^0 - w_0^0/\xi) = \frac{1}{2}(C_2 - C_1/\xi - C_2) = -C_1/2\xi; \\ (\xi \varepsilon_{v\varphi}^{c0})_{,\xi} &= -C_1/2; \Delta((\xi \varepsilon_{v\varphi}^{c0})_{,\xi})_{,\xi} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

В результате вычислений (45) приходим к выводу, что система уравнений (3.43) является неоднородной и при нулевых граничных условиях (3.44) имеет не нулевое решение, т. е. в первом приближении по малому параметру микроструктуры  $\delta$  сама микроструктура влияет на внешнее разложение в нулевом приближении, т. е.

$$V^\delta(\xi, \varphi) \neq 0; w^\delta(\xi, \varphi) \neq 0. \quad (3.46)$$

Условие непротиворечивости уравнений (3.43) доставляет обыкновенное дифференциальное уравнение для возмущения давления

$$(\xi^2 P^{\delta'}(\xi))' = 0. \quad (3.47)$$

Из (3.47) можно получить распределение по радиусу добавочного давления  $P^\delta(\xi)$

$$P^\delta(\xi) = A/\xi + B. \quad (3.48)$$

Однако независимость правых частей уравнений (3.43) от  $\varphi$  приводит к однородному уравнению для  $w^\delta(\xi)$  и при граничных условиях (3.44).

$$w_{,\xi\xi}^\delta = 0; w^\delta(\xi_0) = -\gamma C_2; w^\delta(\rho) = \gamma C_2. \quad (3.49)$$

где  $C_2 = -w_0 \xi_0 / (\rho - \xi_0 - 2\gamma)$ ,

Из уравнения и граничных условий (3.49) определяется возмущенная



скорость  $w^\delta$

$$w^\delta(\xi) = \frac{w_0 \xi_0 \gamma (\rho + \xi_0 - 2\xi)}{(\rho - \xi_0)(\rho - \xi_0 - 2\gamma)}. \quad (3.50)$$

Радиальная добавка скорости  $V^\delta(\xi)$  не ограничивается уравнением, но в силу нулевых граничных условий она равна нулю

$$V^\delta(\xi) = 0. \quad (3.51)$$

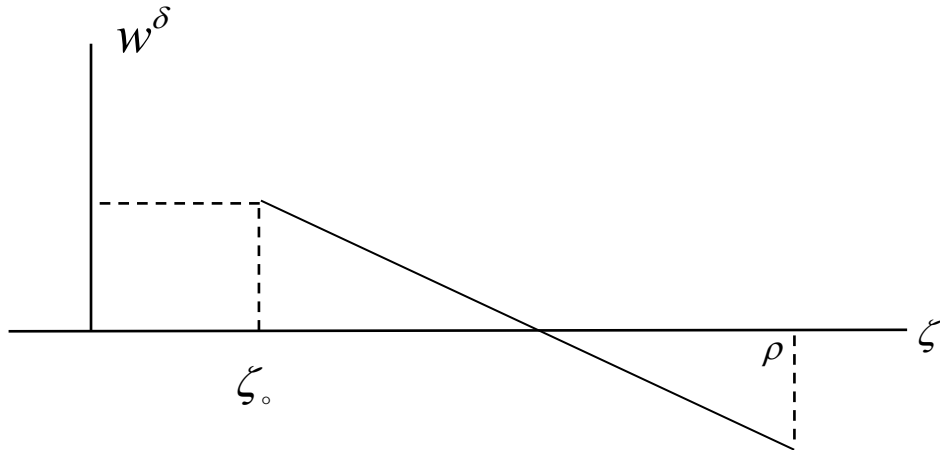


Рис. 3.6 . Схематическое изображение добавочной  $w^\delta$  окружной скорости

Из рис. 3.6 следует, что микроструктура ведет к увеличению окружной скорости вблизи вращающегося вала и к уменьшению скорости на внешней границе.

### 3.5.4. Внешнее разложение $V^\varepsilon, w^\varepsilon$ первого порядка по параметру $\varepsilon$

(эксцентриситету внешней эллиптической границы)

для скорости течения

Подставляя разложение для скоростей  $V(\xi, \varphi)$  и  $w(\xi, \varphi)$  в виде рядов (3.27, 3.28) в уравнение (3.19) и граничные условия (3.20 - 3.23) и выполняя условия равенства при слагаемых  $\varepsilon^1$ , получим уравнения

$$V_{\varphi\varphi}^\varepsilon + \xi w_{\xi\xi}^\varepsilon - w_{\varphi}^\varepsilon = 0. \quad (3.47)$$

$$V_{\xi\varphi}^\varepsilon + \xi w_{\xi\xi}^\varepsilon = 0. \quad (3.48)$$

И граничные условия

$$V^\varepsilon(\xi_0, \varphi) = 0; \quad w^\varepsilon(\xi_0, \varphi) = 0; \quad w^\varepsilon(\xi_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^\varepsilon(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad (3.49)$$

$$V^\varepsilon(\rho, \varphi) + \frac{1}{2} \rho \cos 2\varphi \frac{\partial V^0(\rho, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad w^\varepsilon(\rho, \varphi) + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \frac{\partial w^0(\rho, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad (3.50)$$

$$w^\varepsilon(\rho, \varphi) - \gamma \frac{\partial w^\varepsilon(\rho, \varphi)}{\partial \xi} - \rho \sin 2\varphi (V^0(\rho, \varphi) - \gamma \frac{\partial V^0(\rho, \varepsilon)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial w^0(\rho, \varphi)}{\partial \varphi}) + \frac{1}{2} \rho \cos 2\varphi \left( \frac{\partial w^0(\rho, \varphi)}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 w^0(\rho, \varphi)}{\partial \xi^2} \right) = 0. \quad (3.51)$$

Граничные условия (3.50 - 3.51) содержат выражения, показывающие влияние приближения нулевого порядка  $V^0(\varepsilon, \varphi)$  и  $w^0(\varepsilon, \varphi)$  на приближение 1-го порядка  $V^\varepsilon$  и  $w^\varepsilon$ . Уточним граничные условия с учетом  $V^0$  и  $w^0$

$$V^\varepsilon(\xi_0, \varphi) = 0; \quad w^\varepsilon(\xi_0, \varphi) = 0;$$

$$V^\varepsilon(\rho, \varphi) = 0; \quad w^\varepsilon(\rho, \varphi) = -\frac{1}{2} C_2 \rho \cdot \cos 2\varphi; \quad (3.52)$$

$$w^\varepsilon(\xi_0, \varphi) + \gamma \frac{\partial w^\varepsilon(\xi_0, \varphi)}{\partial \xi} = 0; \quad w^\varepsilon(\rho, \varphi) - \gamma \frac{\partial w^\varepsilon(\rho, \varphi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} C_2 \rho \cos 2\varphi. \quad (3.53)$$

Для системы 2-х уравнений в частных производных 2-го порядка шести граничных условий избыточно, так что граничные условия, используемые в расчете пограничного слоя, должны быть исключены. Такими условиями являются условия прилипания

$$w^\varepsilon(\xi_0, \varphi) = V^\varepsilon(\xi_0, \varphi) = V^\varepsilon(\rho, \varphi) = 0. \quad (3.54)$$

Саму систему 2-х уравнений (3.47 - 3.48) упростим, исключив из них  $V^\varepsilon$  путем дифференцирования 1-го уровня по  $\xi$ , второго – по  $\varphi$  и исключая из полученных  $V'_{\xi\varphi\varphi}$ , получим условие непротиворечивости

$$w'_{\xi\varphi} + \xi w'_{\xi\xi\varphi} - w'_{\xi\varphi} - \xi w'_{\xi\xi\varphi} = 0.$$

Граничные условия (3.50 - 3.51) и уравнения (3.47 - 3.48) допускают представление скоростей  $V^\varepsilon$  и  $w^\varepsilon$  в форме разделяющихся переменных

$$V^\varepsilon(\xi, \varphi) = V(\xi) \cdot \sin 2\varphi; \quad w^\varepsilon(\xi, \varphi) = w(\xi) \cdot \cos 2\varphi. \quad (3.55)$$

Для сомножителей  $V$  и  $w$  получим систему 2-х обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -4V - 2\xi w + 2w &= 0 \\ 2V' - \xi w'' &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Граничные условия (3.52 - 3.53) примут для  $w$  вид

$$\begin{aligned} w(\rho) &= -\frac{C_2}{2} \rho; \quad w(\rho) - \gamma w'(\rho) = -\frac{C_2}{2} \rho \\ w(\xi_0) + \gamma w'(\xi_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Граничные условия для  $V$  будут

$$V(\xi_0) = 0; \quad V(\rho) = 0. \quad (3.58)$$

Система уравнений (3.56) имеет точное решение

Второе из уравнений (3.56) интегрируется один раз

$$2V - \xi w' + w = 2D_1, \quad (3.59)$$

где  $D_1$  - постоянная интегрирования.

Из (3.59) получаем

$$V = \frac{1}{2}(\xi w' - w + 2D_1). \quad (3.60)$$

Подставляя  $V$  из (3.60) в (3.56) получим уравнение для  $w$ .

$$-\xi w' + w = D_1. \quad (3.61)$$

Уравнение (61) интегрируется и имеет точное решение

$$w = D_1 + D_2 \xi. \quad (3.62)$$

Поскольку мы рассматриваем внешнее разложение, то условие прилипания не выполняем, а используем условия качения представительного элемента для нахождения постоянных  $D_1$  и  $D_2$

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 \xi_0 + \gamma D_2 &= 0 \\ D_1 + D_2 \cdot \rho - \gamma D_2 &= -\frac{C_2}{2} \rho. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Из (3.63) находим  $D_1$  и  $D_2$

$$D_1 = -D_2(\xi_0 + \gamma); D_2 = -\frac{C_2\rho}{2} \cdot \frac{1}{\rho - \xi_0 - 2\gamma}. \quad (3.64)$$

$$\text{Так что } w = +\frac{C_2\rho}{2} \cdot \frac{1}{\rho - \xi_0 - 2\gamma} (\xi_0 + \gamma - \xi), \quad (3.65)$$

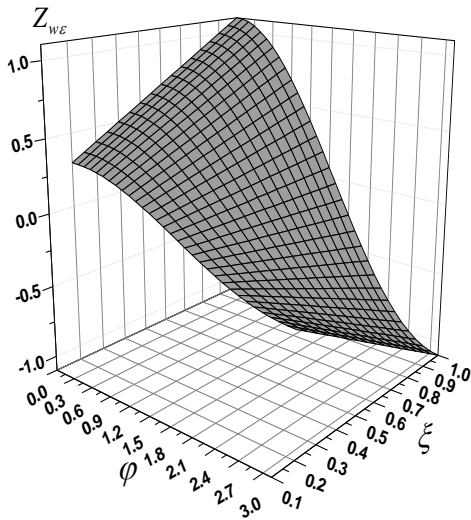
$$V = \frac{D_1}{D_2} = \frac{C_2\rho}{4} \frac{\xi_0 + \gamma}{\rho - \xi_0 - 2\gamma}, \quad (3.66)$$

$$\text{где } C_2 = -\omega_0\xi_0/(\rho - \xi_0 - 2\gamma). \quad (3.67)$$

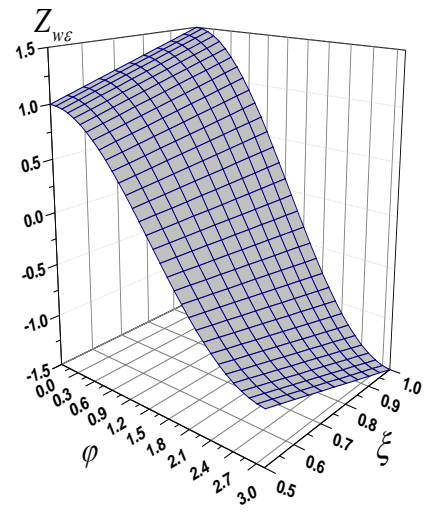
Собирая представление для слагаемых первого порядка  $V^\varepsilon$  и  $w^\varepsilon$  (3.55) вместе с  $\varepsilon$  (3.65 - 3.67) получим

$$w^\varepsilon(\xi, \varphi) = \frac{w_0\xi_0\rho}{2(\rho - \xi_0 - 2\gamma)^2} (\xi_0 + \gamma + \xi) \cdot \cos 2\varphi; \quad (3.68)$$

$$V^\varepsilon(\xi, \varphi) = -\frac{w_0\xi_0\rho}{(\rho - \xi_0 - 2\gamma)^2 \cdot 4} (\xi_0 + \gamma) \sin 2\varphi. \quad (3.69)$$



(а)



(б)

Рис. 3.7. График возмущения относительной окружной скорости  $Z_{w\varepsilon}$  как функции угла  $\varphi$  и параметра микроструктуры  $\gamma$  для случаев

$$а) \xi_0 + \gamma = \eta_0 = 0.1, \quad б) \xi_0 + \gamma = \eta_0 = 0.5$$

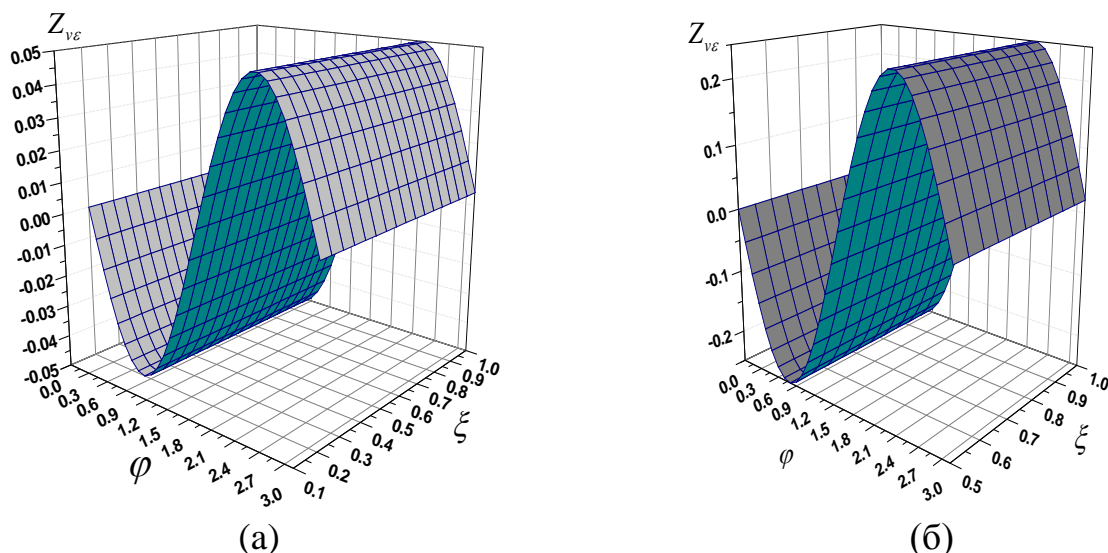


Рис. 3.8. График возмущения относительной радиальной скорости  $Z_{v\varepsilon}$  как функции угла  $\varphi$  и параметра микроструктуры  $\gamma$  для случаев  
 а)  $\xi_0 + \gamma = \eta_0 = 0.1$ , б)  $\xi_0 + \gamma = \eta_0 = 0.5$

Из (3.68 - 3.69) следует, что эксцентриситет  $\varepsilon$  вызывает слабое порядка  $\varepsilon^1$  изменение окружной скорости  $w^\varepsilon$  (3.68) (которая зависит от радиуса и угла  $\varphi$ ) и радиальной скорости  $V^\varepsilon$  (не зависящей от радиуса). На рис. 3.7 представлены графики относительных добавочных скоростей  $V^\varepsilon$  и  $w^\varepsilon$ .

Как следует из рис. 3.7, 3.8 увеличение относительного радиуса  $\xi_0$  вращающегося цилиндра ведёт к увеличению возмущения окружной скорости  $w_\varepsilon$  за счёт эксцентриситет  $\varepsilon$ , причём это возмущение носит гармонический характер по углу  $\varphi$ .

Сам знак + или - возмущения определяется знаком  $\varepsilon = (\bar{\sigma}^2 - a^2)/(\bar{\sigma}^2 + a^2)$ , так что для эллипса, растянутого вдоль  $x$  ( $a > \bar{\sigma}$ ;  $\varepsilon < 0$ ), окружная  $w(r, \varphi)$  скорость уменьшается.

Отметим, что возмущение радиальной скорости  $Z_{v\varepsilon}$  не зависит от радиуса  $\xi$  и носит гармонический характер по углу  $\varphi$ .

## **Глава 4. Компьютерное моделирование сингулярных задач течения микроструктурного материала методом конечных элементов (МКЭ) с нелинейными базисными функциями**

### **4.1. Особенности численного моделирования задач вращательного движения микроструктурного вязкопластического материала**

Сложность компьютерного, аналитического и численного математического рассмотрения сдвигового течения микроструктурной вязкопластической жидкости в цилиндрической щели определяется несколькими причинами [60]:

во-первых, отсутствуют алгоритмы и выражения в виде формул расчёта мощности сил трения МВПМ во вращательном движении подшипников скольжения;

во-вторых, возможно образование зон отвердевания материала (застойных зон течения), границы которых могут быть определены только в процессе решения самой задачи;

в-третьих, сама дифференциальная задача нахождения скорости течения материала определяется дифференциальным уравнением [45] 4<sup>го</sup> порядка, в котором малый параметр  $\delta = h/R$  (характеризующий микроструктуру материала) стоит как коэффициент при старших производных 4<sup>го</sup> порядка (в однажды продифференцируемом уравнении [45] старшими производными являются производные 3-го порядка). Этот факт характеризует задачу [45] как сингулярно возмущенную [95, 110] и учёт малого параметра  $\delta$  ведёт к отличию поведения скорости сдвигового течения (рис. 4.1) с учётом  $\delta$  от поведения скорости  $w = v/V_0$  без учёта  $\delta$ , т. е. течение вязкопластического материала и течение микроструктурного вязкопластического материала кардинально отличаются.

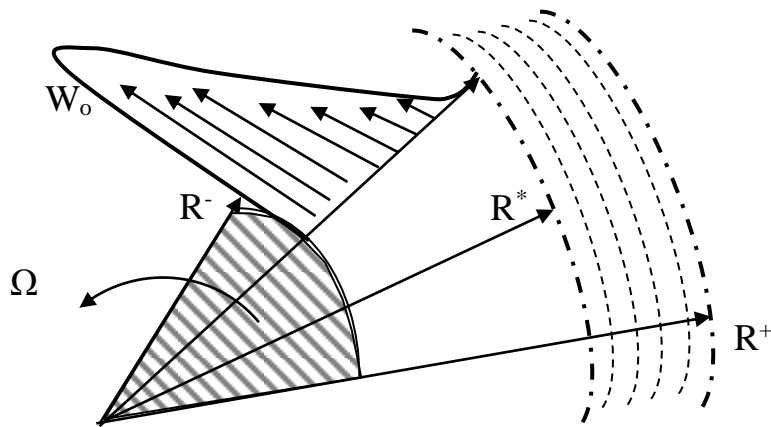


Рис. 4.1. Схематическое изображение области  $r \in [R^-, R^*]$ ,  
сдвигового течения и застойной зоны  $r \in [R^*, R^+]$

Задачу компьютерного моделирования сдвигового течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре поставим как задачу численного построения решения обыкновенного дифференциального уравнения [45] четвертого порядка с граничными условиями на неизвестной границе  $r = R^*$  и на известной границе  $r = R^-$ .

$$\frac{\delta^2}{6}(\zeta^2 \Theta')''' + \frac{\delta^2}{6}(\zeta \Theta')'' + (\zeta^2 \Theta)' = 0; \quad (4.1)$$

$$\Theta = w' - w/\zeta ; \quad w = v/V_0 ; \quad \zeta = r/R^- ; \quad w(1) = w_0 ; \quad w(\zeta^*) = 0 ;$$

$$w'(\zeta^*) = 0 ; \quad w(1) + \gamma w'(1) = 0 ; \quad 2\pi\zeta^* k_0 = \mu_0 . \quad (4.2)$$

Предложенная задача (4.1 - 4.2) представляет собой граничную задачу и её решение планируется осуществить методом конечных элементов с выбором нелинейных базисных функций, заданных на всей области решения  $\xi \in [0, 1]$ .

## 4.2. Выбор численного алгоритма решения задачи о течении вязкопластического материала при наличии неизвестных заранее границ отвердевания материала

Задача определения поля скоростей при плоском течении вязкопластического материала с учётом микроструктуры самого материала формулируется как задача нахождения решения обыкновенного (или в частных производных) линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Особенностью задачи является то, что она является сингулярно возмущённой. Малый параметер  $\delta = h/L$ , характеризующий микроструктуру (здесь  $h$  - характерный размер микроструктуры,  $L$  - характерный линейный размер самой задачи), стоит как коэффициент при старших производных, так что анализ задачи методом возмущений приводит в нулевом по  $\delta$  приближении к потере части граничных условий. Исходя из этих соображений желателен анализ задачи в целом в отличие от разложения по малому параметру  $\delta$  и выделения пограничного слоя.

## 4.3. Формулировка дифференциальной задачи

Пусть поле скоростей плоского течения вязкопластического материала задаётся системой  $2^x$  дифференциальных уравнений в частных производных  $4^{\text{го}}$  порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 DV = \sum_{ij=1}^2 \delta^2 (a_{4x}^{ij}(x, y) D_x^4 + a_{4y}^{ij}(x, y) D_y^4) V_j + \delta^2 (a_{3x}^{ij}(x, y) D_x^3 + a_{3y}^{ij}(x, y) D_y^3) V_j + \\
 (a_{2x}^{ij}(x, y) D_x^2 + a_{2y}^{ij}(x, y) D_y^2) V_j + (a_x^{ij}(x, y) D_x + a_y^{ij}(x, y) D_y) V_j + \dots \\
 a_i^{i0} v = v_i \quad (i=1,2). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Здесь  $D_x, D_y$  - частная производная,  $a$  - функции координат.

На рис. 4.2 представлена область  $D$  течения, при этом часть границы  $\Gamma^*$  области течения  $(x, y) \in D$  заранее неизвестно.



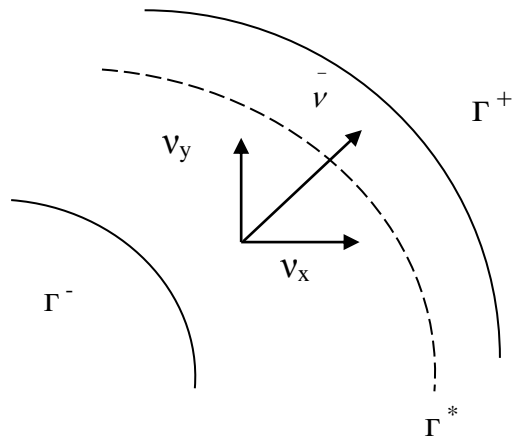


Рис. 4.2. Схематическое изображение области течения вязкопластического материала

Граничными условиями на  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  являются условия прилипания частицы материала к границе и условия типа «качения» представительного элемента вдоль  $\Gamma$

$$\begin{aligned}
 v|_{\Gamma^+} &= 0 ; \quad v|_{\Gamma^-} = v_0; \\
 v|_{\Gamma^-} + \gamma \frac{\delta v}{\delta n} \Big|_{\Gamma^-} &= 0 ; \quad v|_{\Gamma^+} - \gamma \frac{\delta v}{\delta n} \Big|_{\Gamma^+} = 0 ; \\
 2\pi \zeta^* k_0 &= \tau .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

здесь  $n$ ,  $\tau$  - нормаль и касательная к границе  $\Gamma$  или  $\Gamma^*$ .

Построение точного или приближенного аналитического решения задачи (4.3 - 4.4) представляется затруднительным, поэтому остановимся на выборе численных методов.

#### 4.4. Характерные свойства метода конечных разностей решения задачи

При замене функций  $v_i$  непрерывного аргумента  $(x, y)$  и производных по  $x, y$  на стеке с шагом  $\Delta x, \Delta y$  задача (4.3 - 4.4) сведётся к системе  $M \times N$  линейных алгебраических уравнений для  $\tilde{v}$  с разреженной матрицей, при этом порядок аппроксимации задачи (4.3 - 4.4) конечно разностным

аналогом будет иметь второй порядок точности по шагу  $\Delta$

$$\|Dv - \tilde{D}\tilde{v}\| \leq C \cdot \Delta^2 \quad (4.5)$$

здесь  $\tilde{D}$  - разреженная матрица размерности  $M \times N$ ,  $\tilde{v}$  - вектор.

#### 4.5. Характерные свойства метода конечных элементов (МКЭ) решения дифференциальных уравнений с выбором нелинейных базисных функций

Самым простым вариантом МКЭ является [109] введение линейных базисных функций на сетке с шагом  $\Delta$  (в одномерном случае), представление решения задачи (4.3 - 4.4) в виде ряда по базисным функциям (4.7) и ортогонализация невязки (4.8) в системе тех же базисных функций .

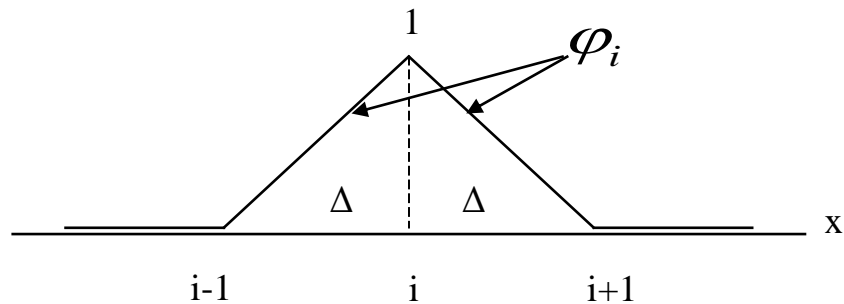


Рис. 4.3. Схематическое изображение одномерной линейной базисной функции

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x_{i+1} - x) / \Delta, & \text{при } x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ (x - x_{i-1}) / \Delta, & \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ 0 & \text{при } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]; \end{cases} \quad (4.6)$$

$$v(x) \approx w(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x); \quad (4.7)$$

$$\int_D D(w(x)) \varphi_k(x) dx = 0, \quad (4.8)$$

( $k=1, 2, \dots, N$ ).

Однако такой подход к решению задачи (4.3-4.4) невозможен в силу отсутствия 2-х, 3-х и 4-х производных от  $\varphi_k(x)$  в силу линейности базисных функций (4.7).

Возможным выходом из сложившейся ситуации является введение базисных функций более высокого порядка[109] или введение нелинейных базисных функций вида [41]

$$\psi_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{\sigma^2}}. \quad (4.9)$$

Предложенная базисная функция известна как «мексиканская шляпа» [41]. Её особенностью является наличие производных по  $x$  от  $\psi_i(x)$  любого порядка и быстрое затухание  $\psi_i(x)$  с увеличением  $(x-x_i)^2$  при уменьшении параметра  $\sigma$ .

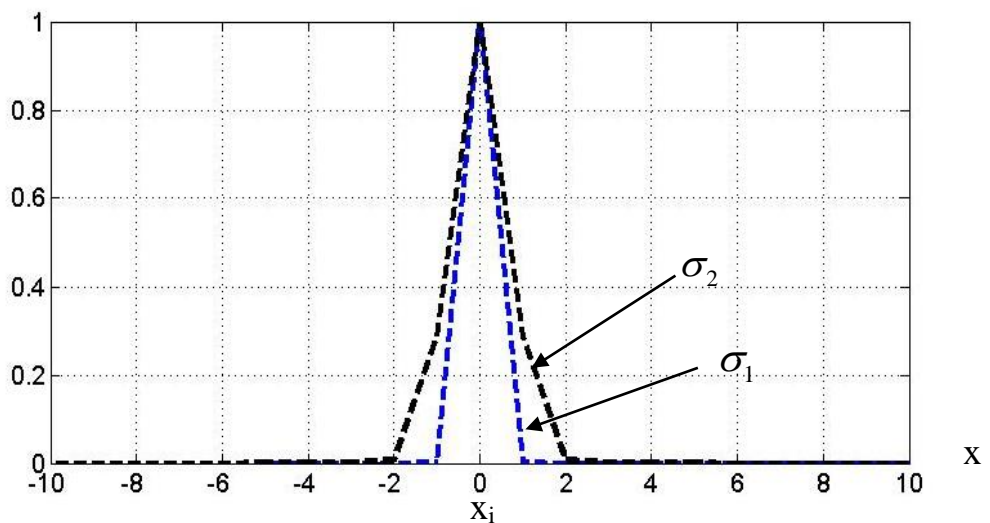


Рис. 4.4. График базисной функции «мексиканская шляпа» для различных значений  $\sigma_1 < \sigma_2$  (представленный в системе MATLAB)

Систему нелинейных, почти ортогональных, базисных функций можно ввести аналогично (4.9)

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \exp -(x - x_i) / \sigma & , \text{ при } x \rangle x_i \\ 1 & , \text{ при } x = x_i \\ \exp (x - x_i) / \sigma & , \text{ при } x \langle x_i \\ 0 & , \text{ при } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\psi_i(x) = \exp -(|x - x_i| / \sigma).$$

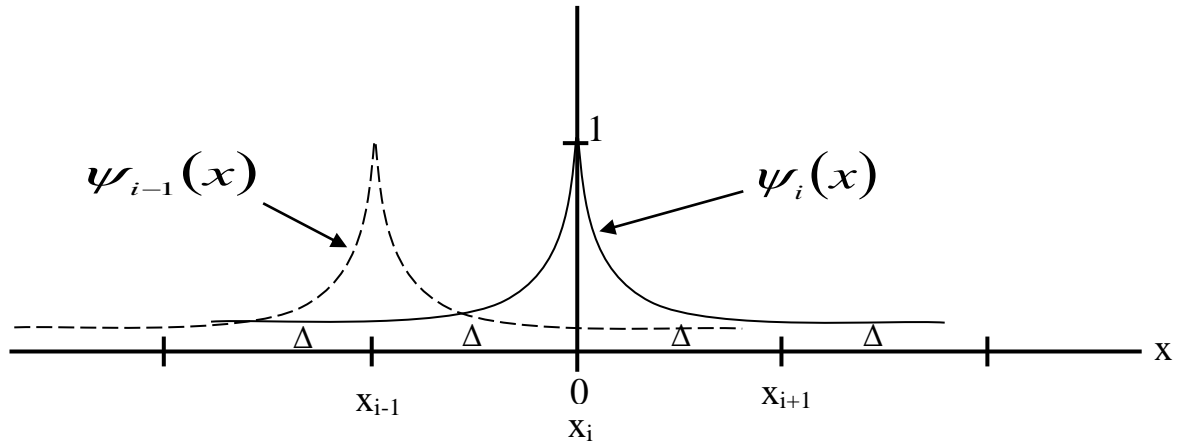


Рис. 4.5. Схематическое изображение базисной функции  $\psi_i(x)$

Подсчитаем производные от базисной функции  $\psi_i(x)$

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \begin{cases} \exp -(x - x_i) / \sigma, & \text{ при } x \rangle x_i \\ \exp -(x_i - x) / \sigma, & \text{ при } x \langle x_i \end{cases} \\ \psi_i'(x) &= \begin{cases} -\frac{1}{\sigma} \psi_i(x), & \text{ при } x \rangle x_i \\ +\frac{1}{\sigma} \psi_i(x), & \text{ при } x \langle x_i \end{cases} \\ \psi_i''(x) &= \begin{cases} +\frac{1}{\sigma^2} \psi_i(x), & \text{ при } x \rangle x_i \\ -\frac{1}{\sigma^2} \psi_i(x), & \text{ при } x \langle x_i \end{cases} \\ \psi_{(x)}^{(k)}(x) &= \begin{cases} \frac{(-1)^k}{\sigma^k} \psi_i(x), & \text{ при } x \rangle x_i \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\sigma^k} \psi_i(x), & \text{ при } x \langle x_i \end{cases} \quad (k = 1, 2 \dots). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Оценим порядок неортогональности рядом стоящих базисных функций  $\psi_i$  и  $\psi_{i+1}$ , вычислив интеграл от произведения  $\psi_i, \psi_j$

$$J_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi_i \psi_j dx = e^{-\Delta/\sigma} \Delta + O(\Delta^2). \quad (4.12)$$

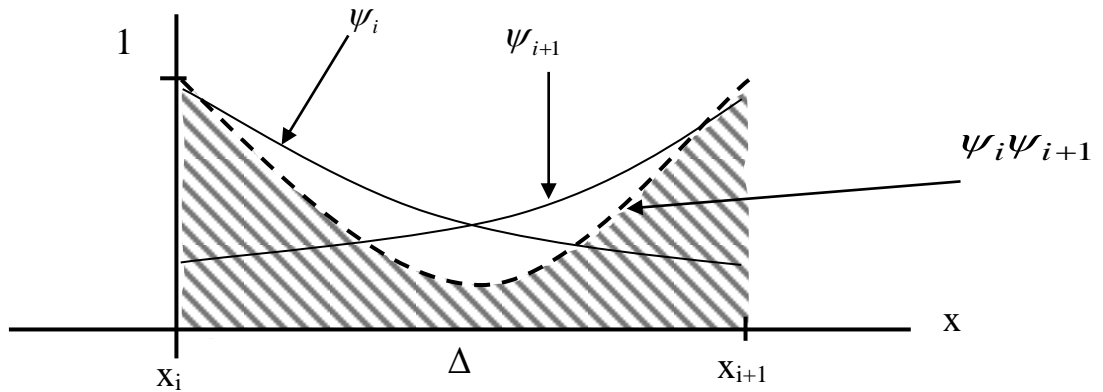


Рис. 4.6. Схематическое изображение графика произведения соседних базисных функций  $\psi_i \cdot \psi_{i+1}$

Использование нелинейных базисных функций (4.10) позволяет построить систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей для решения обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. В качестве регулятора построенной матрицы выступают:  $\delta$  - малый параметр сингулярно возмущенного уравнения (4.1),  $\Delta$  - шаг сетки и параметр  $\sigma < \Delta$  [116].

#### 4.6.1. Конечно-разностная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка на сетке методом конечных элементов

Пусть задача (1) приведена к виду

$$\Phi = \delta^2 a_4(x) y'''' + \delta^2 a_3(x) y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y - b_0 = 0, \quad (4.13)$$

где  $y = \sum_1^4 y_i \psi_i(x)$ .

Условие ортогональности невязки уравнения (4.13) к базисной функции  $\psi_j(x) (j=1, 2, \dots, n)$  (4.8) приводит задачу (4.13) к системе линейных алгебраических уравнений  $Ay = b$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2}{\sigma^4} (\bar{a}_{4,j-1} y_{j-1} + \bar{a}_{4,j} y_j + \bar{a}_{4,j+1} y_{j+1}) + \frac{\delta^2}{\sigma^3} (\bar{a}_{3,j-1} y_{j-1} + \bar{a}_{3,j} y_j + \bar{a}_{3,j+1} y_{j+1}) + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} (\bar{a}_{2,j-1} y_{j-1} + \bar{a}_{2,j} y_j + \bar{a}_{2,j+1} y_{j+1}) + \frac{1}{\sigma} (\bar{a}_{1,j-1} y_{j-1} + \bar{a}_{1,j} y_j + \bar{a}_{1,j+1} y_{j+1}) + \\ & + (\bar{a}_{0,j-1} y_{j-1} + \bar{a}_{0,j} y_j + \bar{a}_{0,j+1} y_{j+1}) - b_{0j} = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

здесь  $\bar{a}_{k,j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} a_k(x) \psi_{i-1}(x) \psi_j(x) dx \approx a_k(x_{j-1/2}) \Delta e^{-\Delta/\sigma}$ ;

$$\bar{a}_{k,j} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} a_k(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \approx a_k(x_j) \sigma (1 - e^{-2\Delta/\sigma});$$

$$\bar{a}_{k,j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} a_k(x) \psi_i(x) \psi_{j+1}(x) dx \approx a_k(x_{j+1/2}) \Delta e^{-\Delta/\sigma};$$

Система алгебраических уравнений (4.14)  $Ay = B$  имеет 3-х диагональный вид с параметрами  $\sigma$ ,  $\delta^2$  и  $\Delta$

$$A_{i,i-1} y_{i-1} + A_{ii} y_i + A_{i,i+1} y_{i+1} = B_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &= \left[ \frac{\delta^2}{\sigma^4} a_{4i-1}(x_{i-1/2}) + \frac{\delta^2}{\sigma^3} a_{3i-1}(x_{i-1/2}) + \frac{1}{\sigma^2} a_{2i-1}(x_{i-1/2}) + \frac{1}{\sigma} a_{1i-1}(x_{i-1/2}) + a_{0i-1}(x_{i-1/2}) \right] \Delta e^{-\Delta/\sigma} \\ A_{i,i} &= \left[ \frac{\delta^2}{\sigma^4} a_{4i}(x_i) + \frac{\delta^2}{\sigma^3} a_{3i}(x_i) + \frac{1}{\sigma^2} a_{2i}(x_i) + \frac{1}{\sigma} a_{1i}(x_i) + a_{0i}(x_i) \right] \sigma (1 - e^{-2\Delta/\sigma}) = A_{ii}^0 \sigma (1 - e^{-2\Delta/\sigma}); \\ A_{i,i+1} &= \left[ \frac{\delta^2}{\sigma^4} a_{4i+1}(x_{i+1/2}) + \frac{\delta^2}{\sigma^3} a_{3i+1}(x_{i+1/2}) + \frac{1}{\sigma^2} a_{2i+1}(x_{i+1/2}) + \frac{1}{\sigma} a_{1i+1}(x_{i+1/2}) + a_{0i+1}(x_{i+1/2}) \right] \Delta e^{-\Delta/\sigma}; \\ B_i &= b_{0i}(x_i) \sigma (1 - e^{-2\Delta/\sigma}) = B_i^0 \sigma (1 - e^{-2\Delta/\sigma}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Физическая сущность задачи течения микроструктурных материалов предполагает положительную определённость матрицы  $A$  и одинаковый

порядок коэффициентов для учёта эффектов микроструктуры. Это возможно при выборе величины  $\sigma$  базисных функций:  $\delta/\sigma^2 = O(1)$  т. е. при  $\sigma \sim \sqrt{\delta}$ , при этом размер шага дискретизации  $\Delta$  должен быть больше  $\sigma$  ( $\Delta \gg \sigma$ ).

Предельная оценка решения  $y_i$  в случае больших  $\Delta$ , малых  $\sigma \sim \sqrt{\delta}$  следует из (4.15)

$$y_i = B_{oi}^0(x_i)/A_{ii}^0 \quad (i=2 \ 3 \dots n-1) \quad (4.17)$$

Повышение точности предложенного варианта МКЭ можно осуществить путём учёта в уравнении (4.8) (ортогонализации невязки) интервала  $[x_{j-2}, x_{j+2}]$ , что приведёт систему разностных уравнений  $Ax = b$  (4.14) к виду с пятидиагональной матрицей, необходимости учета всех граничных условий и выявлению пограничного слоя . [102, 105, 143, 144]

#### **4.6.2. Вычислительный алгоритм построения решения системы линейных алгебраических уравнений, реализующих метод конечных элементов**

Задача состоит в нахождении решения системы линейных алгебраических уравнений  $Ay=b$ , где

$A = \{a_{ij}\}$  – квадратная матрица ( $i, j=1 \ 2 \dots n$ ) (задан)

$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$  – вектор столбец (неизвестное)

$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$  – вектор столбец (задан)

трехдиагональная матрица  $A$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} = \Delta - \gamma & a_{12} = \lambda & a_{13} = 0 & \dots & a_{1n} = 0 \\ & a_{ij} \ (i = 2, 3, \dots, n-1) & & & \\ 0 & 0 & a_{nn-1} = \gamma & & a_{nn} = \Delta - \gamma \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

где элементы матрицы  $A$  представимы таким образом

$$\begin{aligned} a_{k,k-1} &= \frac{\Delta}{\sigma} e^{-\frac{\Delta}{\sigma}} \left( -\frac{\delta}{\sigma^3} \xi_{k-1}^3 - 2\frac{\delta}{\sigma^2} \xi_{k-1}^2 - 3\frac{\delta}{\sigma} \xi_{k-1} - 3\delta + \frac{\xi_{k-1}^3}{\sigma} + \xi_{k-1}^2 \right); \\ a_{k,k} &= \frac{1 - e^{-\frac{2\Delta}{\sigma}}}{\sigma} \left( -4\frac{\delta}{\sigma^2} \xi_k^2 - 6\delta + 2\xi_k^2 \right) \quad ; \\ a_{k,k+1} &= \frac{\Delta}{\sigma} e^{-\frac{\Delta}{\sigma}} \left( \frac{\delta}{\sigma^3} \xi_{k+1}^3 - 2\frac{\delta}{\sigma^2} \xi_{k+1}^2 + 3\frac{\delta}{\sigma} \xi_{k+1} - 3\delta - \frac{\xi_{k+1}^3}{\sigma} + \xi_{k+1}^2 \right), \quad (k=2, 3, \dots, n-1); \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$a_{k1} = a_{k2} = \dots a_{k,k-2} = 0; \quad a_{k,k+2} = a_{k,k+3} = \dots a_{kn} = 0 .$$

Вектор  $b$  представим следующим образом

$$b_1 = 0; \quad b_2 = C_0 \frac{\Delta}{\sigma} (\xi_0 + \Delta); \quad b_k = C_0 \frac{\Delta}{\sigma} (\xi_0 + \Delta(k-1)) \dots ; \quad b_n = 0 \quad (4.20)$$

$$\xi \in (0;1) \quad k = 2, 3, \dots, n-1.$$

Схематически заполняемость элементов матрицы  $A$  можно представить так

$$A = \begin{pmatrix} v & v & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v & v & v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v & v & v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v & v & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v & v \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v \\ \vdots \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

где символ  $v$  означает элемент матрицы отличный от нуля .

Параметры задачи задаются в виде таблицы



Таблица 4.1. Входные данные для параметров  
при расчёте скорости методом прогонки

n	10, 20, 30
$\Delta$	1/n
$\gamma$	0.01, 0.1
$\sigma$	0.01, 0.1
$\delta$	0, 0.01, 0.1
$C_0$	1

Алгоритм прямой прогонки задаётся формулами [140, 141]

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -a_{12}/r_1 ; q_1 = b_1/r_1 ; r_1 = a_{11} ; & 1^{\text{й}} \text{ шаг} \\
 p_k &= -a_{k,k+1}/r_k ; q_k = (b_k - a_{k,k-1}q_{k-1})/r_k ; r_k = a_{kk} + a_{kk-1}p_{k-1} & k^{\text{й}} \text{ шаг} \quad (4.22) \\
 k &= 2, 3, \dots, n-1 ; \\
 q_n &= (b_n - a_{n,n-1}q_{n-1})/r_n ; r_n = a_{nn} + a_{n,n-1}p_{n-1} . & n^{\text{й}} \text{ шаг}
 \end{aligned}$$

Обратно решение задачи находим по формуле [140, 141]

$$y_n = q_n, \quad y_j = p_j y_{j+1} + q_j \quad (j=n-1, n-2, \dots, 1) \quad (4.23)$$

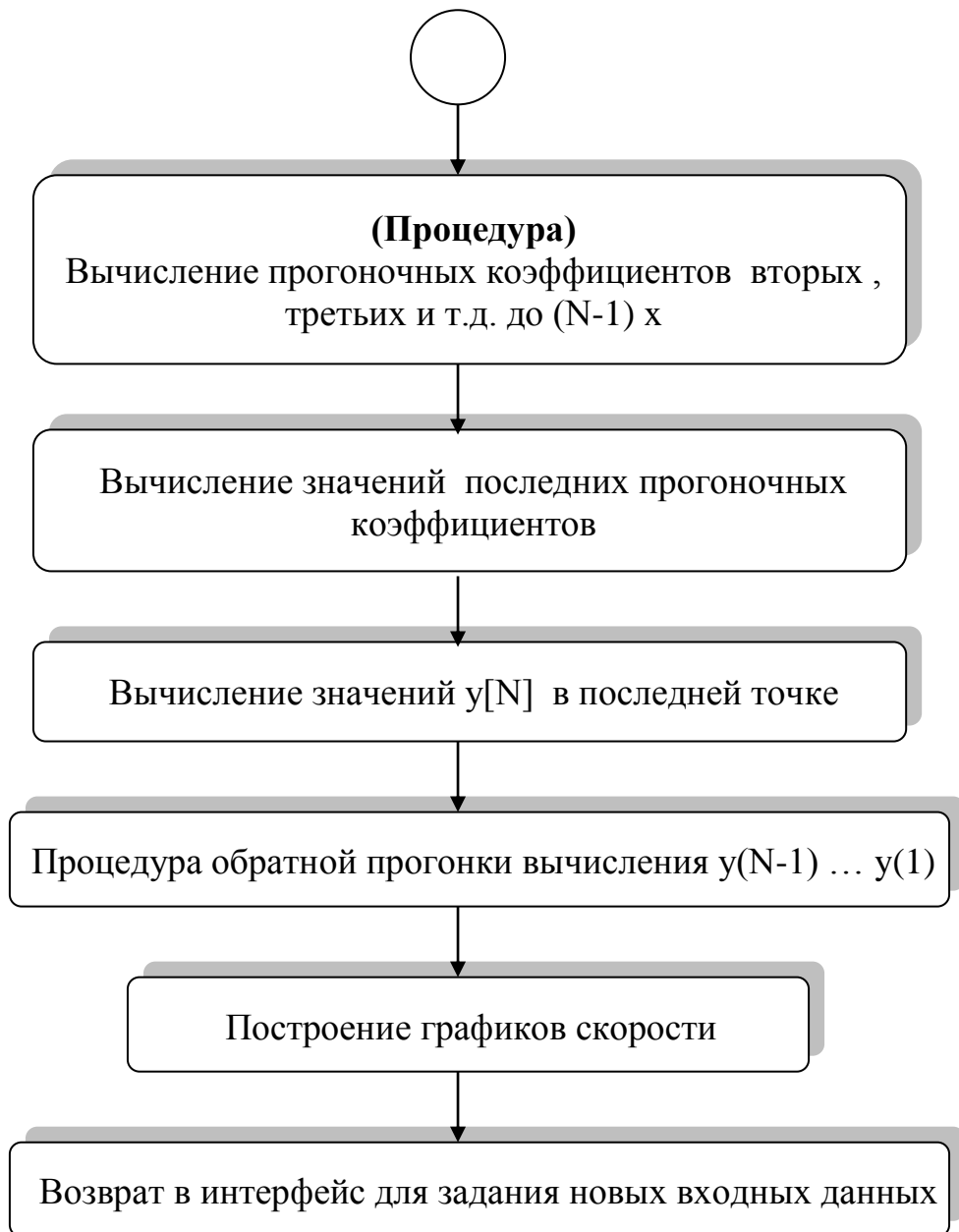
В результате нахождения решения  $y_i$  строится график функции

$$y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

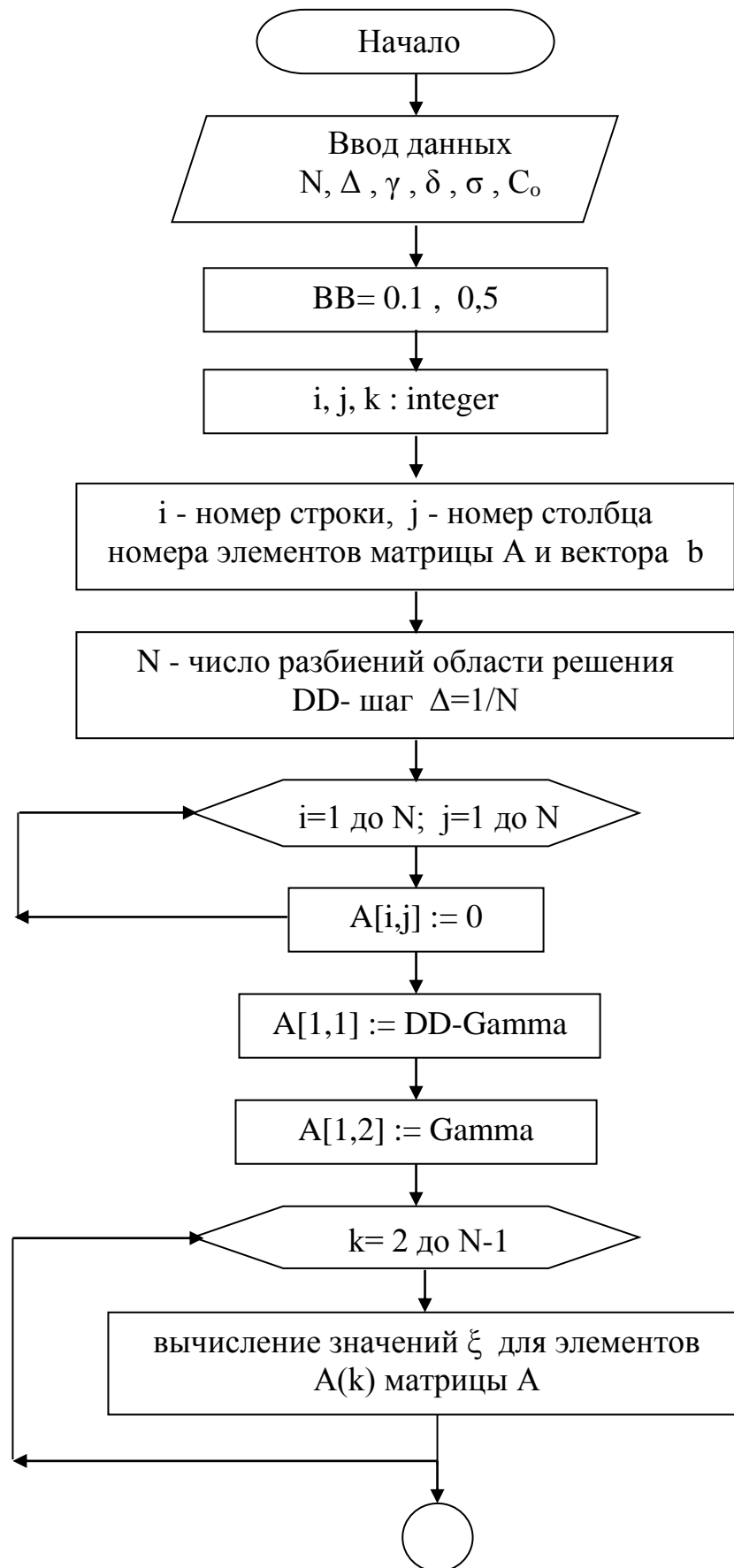
Программа решения системы алгебраических уравнений с 3-х диагональностью матрицей реализовано на языке Delphi. [11, 31, 19-23, 26-30, 116]

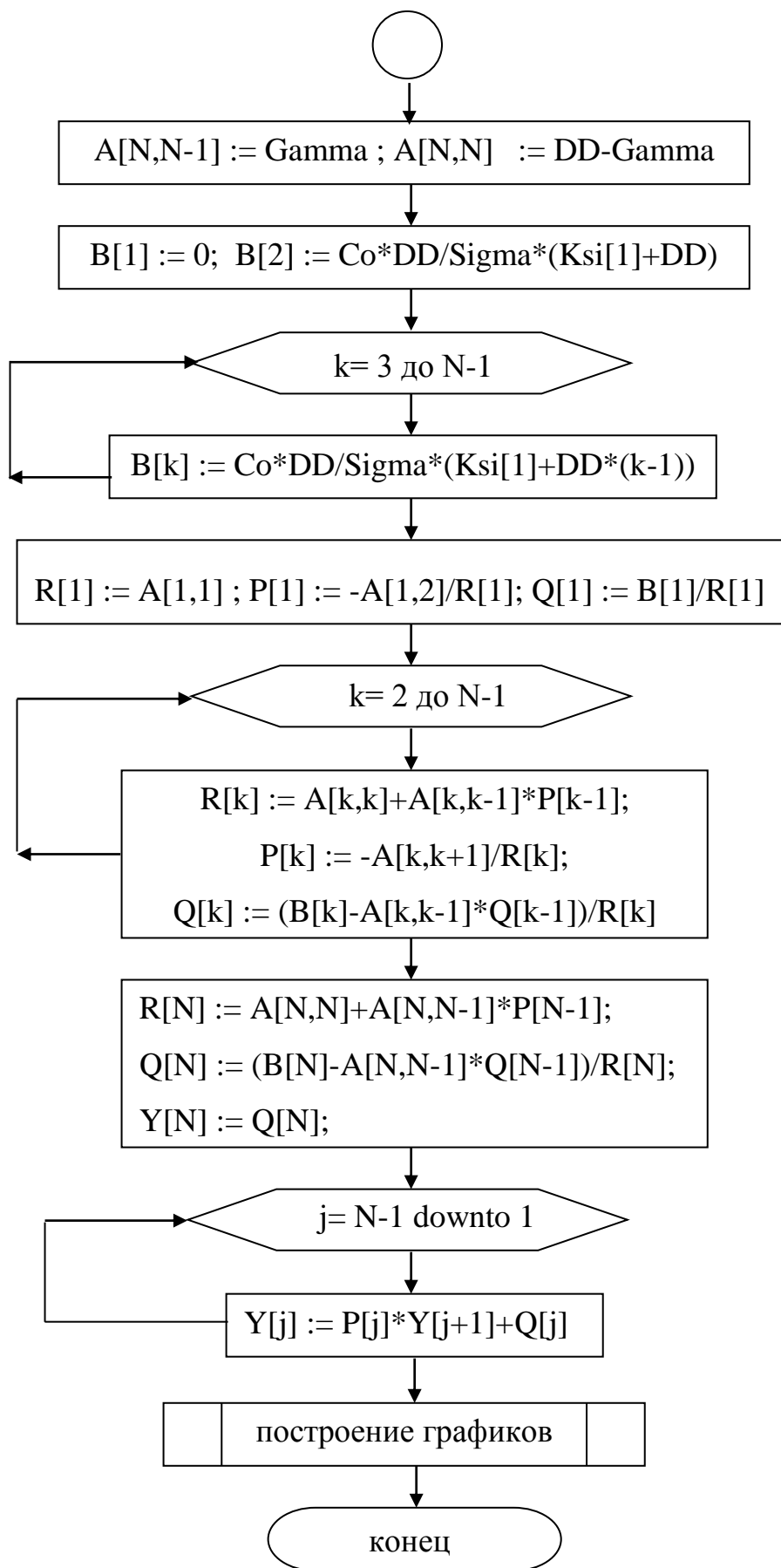
### 4.6.3. Схема алгоритма расчёта скорости





#### 4.6.4. Алгоритма расчёта скорости





Численные расчёты скорости течения микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре, под действием перепада давления внутренний цилиндр которого неподвижен, приведены на рис. 4.7 - 4.14.

На рис. 4.7 - 4.8 даны графики скорости течения для случаев прилипания материала к неподвижным стенкам зазора на которых демонстрируется факт уменьшения максимальной скорости течения с увеличением параметра микроструктуры  $\delta$ :

$$\begin{aligned}v_{\max}(\delta = 0.1) &= 0.07, \\v_{\max}(\delta = 0.01) &= 0.11 .\end{aligned}$$

Градиент скорости при этом на внешнем контуре принимает значения

$$\begin{aligned}v'(\delta = 0.1) &= 0.015, \\v'(\delta = 0.01) &= 0.03 .\end{aligned}$$

Из приведенных значений следует, что касательное напряжение на стенке, пропорциональное градиенту скорости уменьшается с увеличением параметра  $\delta$  и сама скорость  $v_{\max}$  уменьшается, т.е. течение материала становится гладким.

На рис. 4.9 - 4.14 приведены графики скорости течения в случае движения материала на внутренней границе. Увеличение скорости течения на границе ведёт к слабому влиянию градиента давления (рис. 4.9 - 4.11), уменьшение скорости на внутренней границе (рис. 4.12. - 4.14) приводит к усилению влияния перепада давления, так что при очень маленькой скорости  $v = B[1] = 0.001$  её влияние пренебрежимо мало (рис. 4.14).

Рис. 4.7.

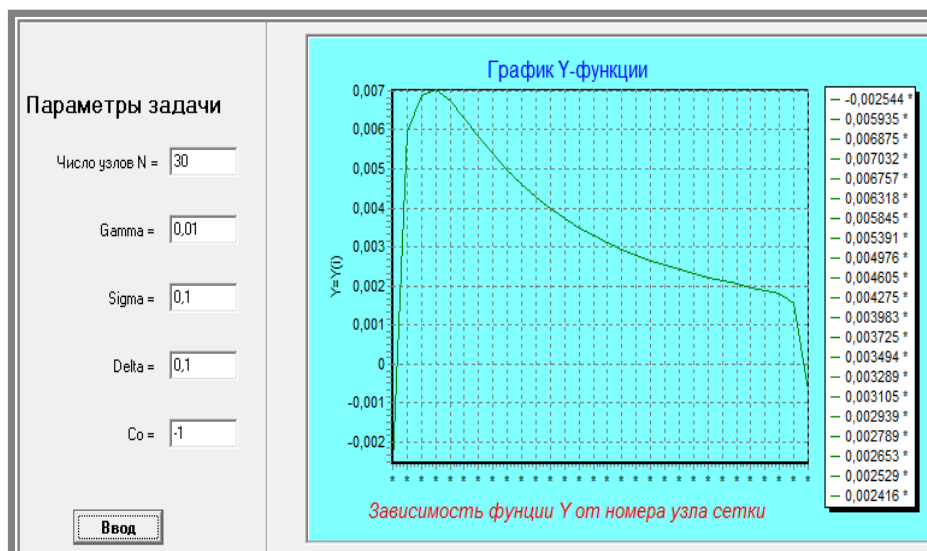


Рис. 4.8.

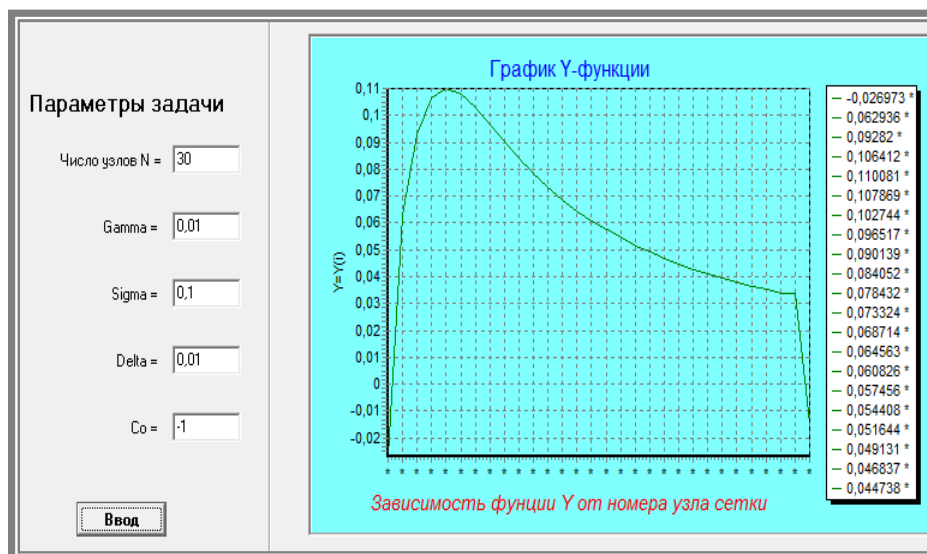


Рис. 4.9.

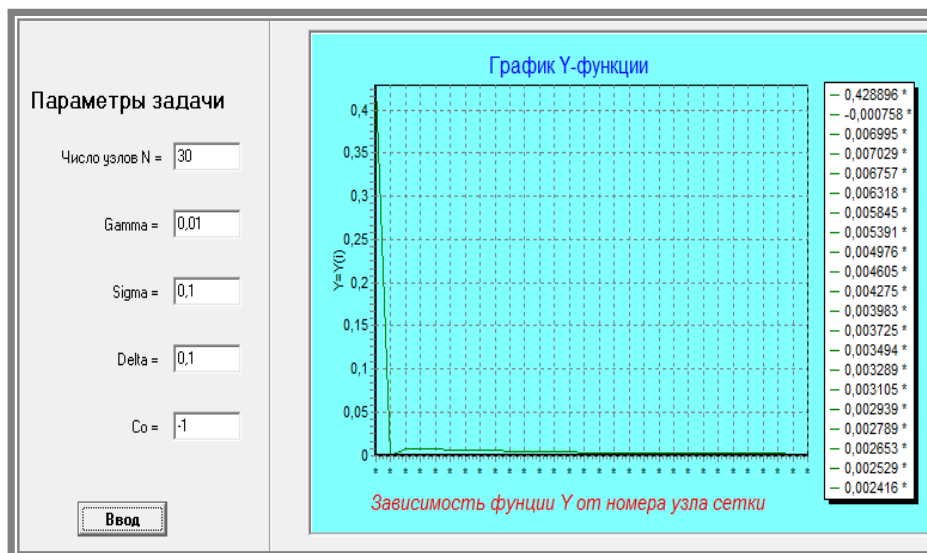


Рис. 4.10.

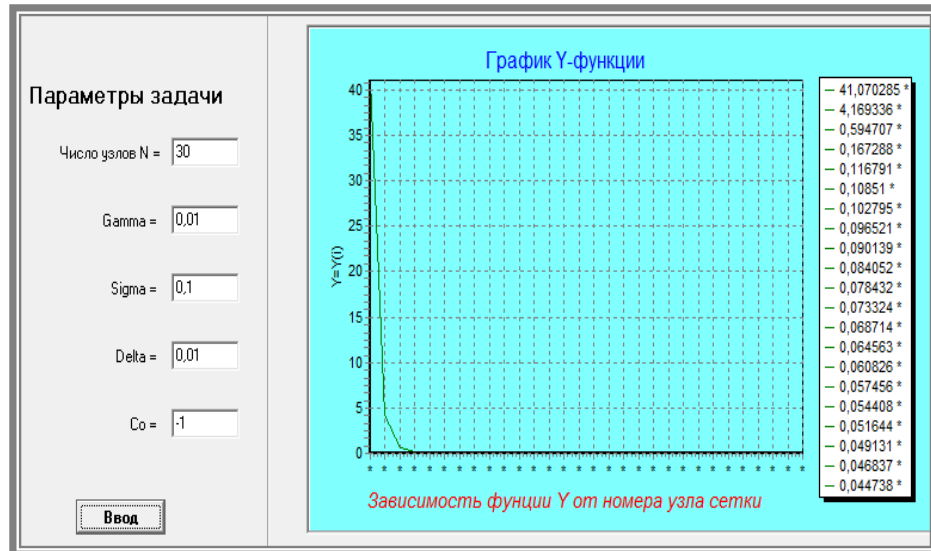


Рис. 4.11.

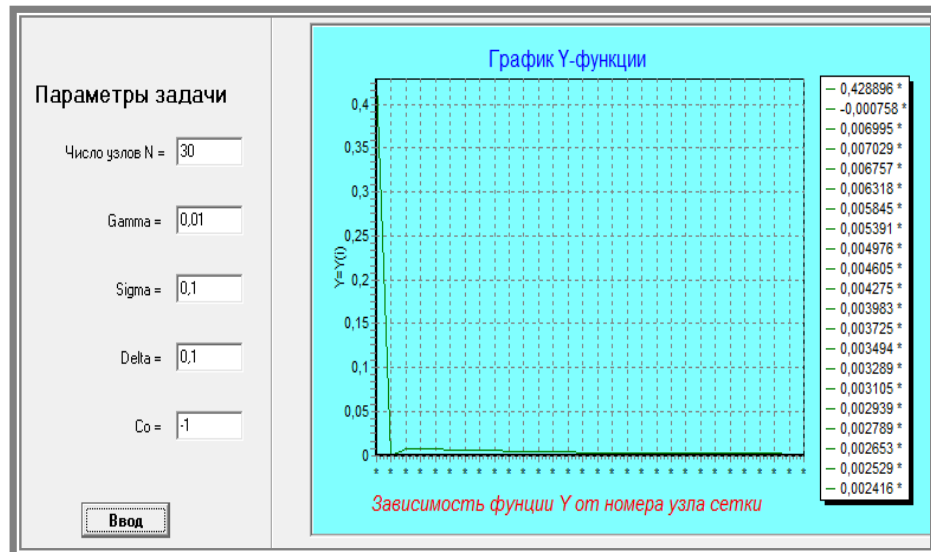


Рис. 4.12.

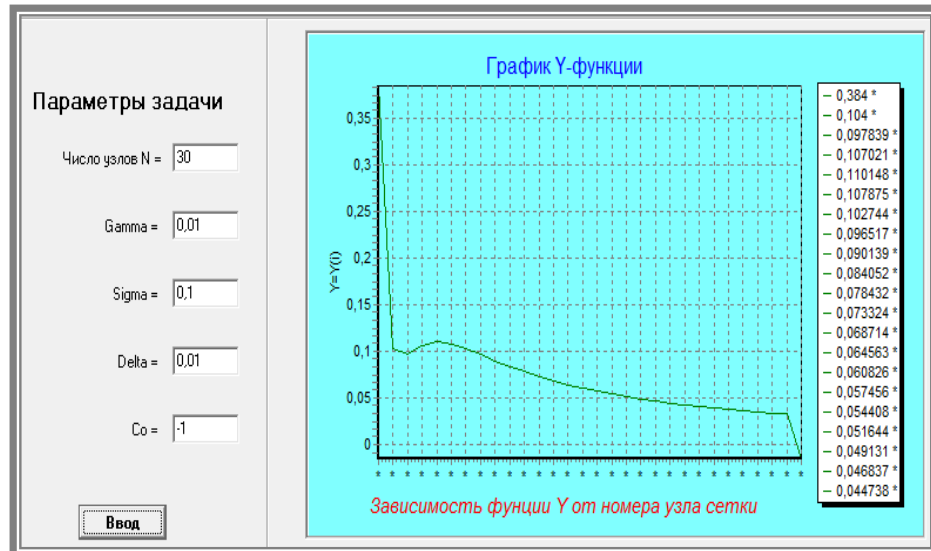




Рис. 4.13.

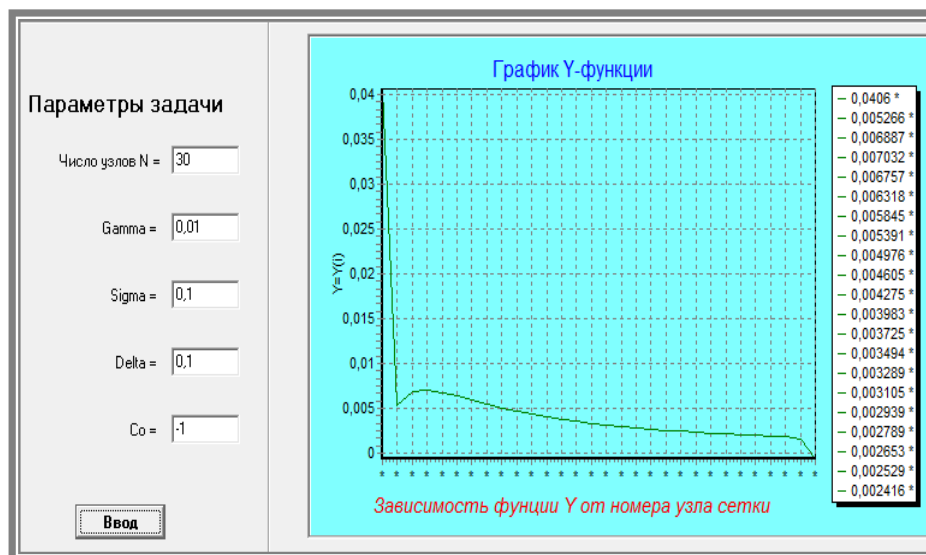


Рис. 4.14.

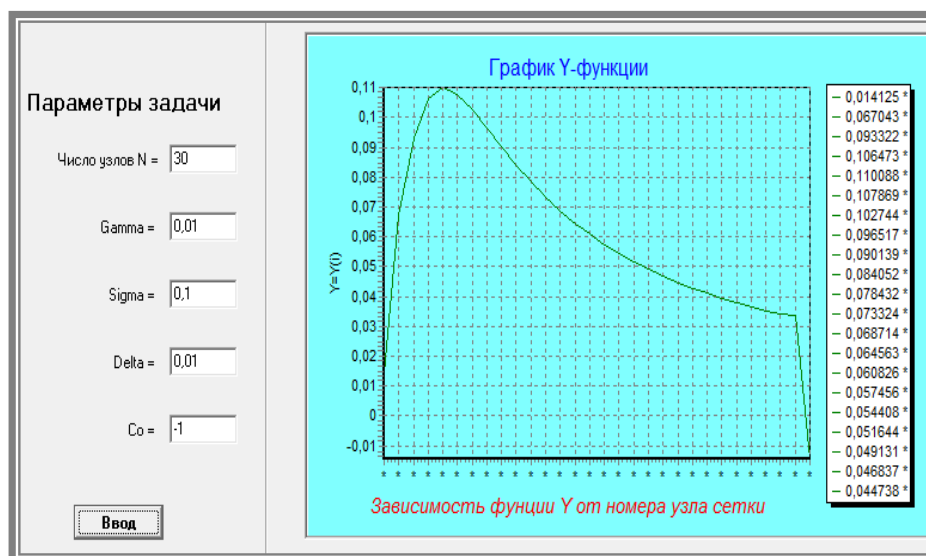


Рис. 4.7. - 4.14. Примеры расчета скорости течения при различных значениях входных параметров  $\Delta$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$  (вдоль оси координат отложена скорость, значения которой в соответствующей точке представлены в виде таблицы)

Проведенные расчёты поля скоростей течения при уменьшении шага сетки показывают детализацию течения и структуру пограничного слоя, что согласуется с анализом течения методом возмущений.

## Заключение

В заключении сформулированы основные научные результаты диссертации.

1. Формулировка замкнутой математической модели вращательного движения микроструктурного вязкопластического материала с учётом выделения пограничного слоя, граничных условий на заданных внешних границах и условия на границе затвердевания вязкопластического материала, сильные условия продолжения решения, состоящие в линейном продолжении решения за пограничный слой.

2. Создан алгоритм и расчётные формулы математической модели построения поля скоростей вращательного течения микроструктурного вязкопластического материала в зазоре с внешней эллиптической границей и внутренним вращающимся валом. Показано, что малый эксцентриситет внешней границы сохраняет устойчивым характер сдвигового течения и приводит к увеличению необходимого для вращения цилиндра крутящего момента.

3. Выражения для расчёта поля скоростей течения в кольцевом зазоре с эксцентрично вращающимся внутренним валом и графики скоростей течения в зазоре, которые показали сохранение общего характера сдвигового течения при малом эксцентриситете расположения внутреннего вала. Малый эксцентриситет расположения внутреннего вращающегося цилиндра приводит к увеличению прикладываемого крутящего момента.

4. Программный комплекс, реализующий численный алгоритм дискретизации исследуемой сингулярно возмущенной задачи методом конечных элементов (МКЭ) с использованием нелинейных базисных функций. Программа решения полученной системы линейных алгебраических уравнений реализована в среде Delphi. Построенный алгоритм обладает устойчивостью по отношению к малым возмущениям и

позволил проводить расчёты поля скорости без выделения пограничного слоя. Погрешность построенного алгоритма есть величина порядка геометрического шага разбиения и зависит также от параметра  $\sigma$  базисных функций.

Проведенные численные расчёты вращательного течения соответствуют расчётам по методу введения пограничного слоя и выделения основного течения, выполненным в главе 2 для течения с возмущёнными границами.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статья [4,8] опубликована в издании, включенном в перечень ведущих редактируемых научных журналов и изданий.

1. Аль Имам, А. А. МКЭ с нелинейными базисными функциями расчёта параметров течения микроструктурного вязкопластического материала / А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела, 16–21 июня 2014 г. - Чебоксары, 2014. - С. 11 - 15.

2. Аль Имам А. А. Течение микроструктурного вязкопластичного материала в плоской трубе в условиях прилипания и отсутствия микровращения представительного элемента / А. А. Аль Имам, С. А. Ноаман // Международный независимый институт математики и систем "МиС", IX Международная научно-практическая конференция «Инновации в науке : применение и результаты». - г. Новосибирск, 2014. - № 9. - С. 5 - 7.

3. Аль Имам А. А. МКЭ сквозного решения сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка без выделения пограничного слоя/ А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // Международный молодежный симпозиум «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения». - 2014. - № 5. Ч. 2. - С. 134-137.

4. Вервейко, Н. Д. Стационарное сдвиговое течение вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в плоском зазоре между двумя цилиндрами/ Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. - 2013. - № 1(15). - С. 51 - 55.

5. Вервейко, Н. Д. Асимптотический анализ сдвигового течения вязкопластической микроструктурной жидкости в кольцевом зазоре / Н. Д.

Вервейко, С. А. Ноаман // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXIV». - Воронеж, 2013. - С. 231 - 233.

6. Вервейко, Н. Д. Особенности применения МКЭ для решения сингулярно возмущённых задач / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // XXVIII Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач», 3 - 9 мая 2014 г. - Воронеж, 2014. - С. 37 - 38.

7. Вервейко, Н. Д. Стационарное течение микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре с эксцентрично вращающимся валом / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела 16 – 21 июня 2014 г. - Чебоксары, 2014. - С. 94 - 97.

8. Вервейко, Н. Д. К устойчивости формы сдвигового течения микроструктурной вязкой жидкости в узких криволинейных каналах / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман, А. И. Шашкин // Вестн. ВГУ. Сер. Физика, математика. - 2014. - № 1. - С. 56 - 63.

9. Ноаман, С. А. Компьютерное моделирование линейной формы пограничного слоя при стационарном течении микроструктурных материалов/ С. А. Ноаман // Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы науки, технологии и производства». - г. СПб., 2014. - № 1. - С. 55 - 58.

10. Ноаман С. А. Влияние микроструктурных параметров вязкопластической смазки на эффективность подшипника скольжения / С. А. Ноаман // Наука и мир. - 2014. - № 3 (7). - С. 45 - 47.

11. Ноаман, С. А. Сдвиговое течение вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в плоском канале / С. А. Ноаман // Вест. факультета ПММ. - 2014. - Вып. 9. - С. 149 - 153.

12. Ноаман, С. А. Метод конечных элементов с нелинейными базисными функциями компьютерного моделирования сингулярных задач течения микроструктурной жидкости / С. А. Ноаман // Междун. науч.-техн. журнал. Информационные технологии моделирования и управления, Воронеж. гос. техн. ун-т . - 2014. - № 5(89). - С. 50 - 56.

## Список использованных источников

1. Акивис, М. А. Тензорное исчисление / М. А. Акивис, В. В. Гольдберг. - М. : Наука, 1969. - 351 с.
2. Александрова, Н. И. Аппроксимация граничных условий в задачах гидроупругости / Н. И. Александрова // Математическое моделирование. - 1991. - № 12. - С. 3 - 12.
3. Аль Имам, А. А. МКЭ с нелинейными базисными функциями расчёта параметров течения микроструктурного вязкопластического материала / А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман //VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела, 16–21 июня 2014 г. - Чебоксары, 2014. - С. 11 - 15.
4. Аль Имам, А. А. Течение микроструктурного вязкопластичного материала в плоской трубе в условиях прилипания и отсутствия микровращения представительного элемента / А. А. Аль Имам, С. А. Ноаман // Международный независимый институт математики и систем "МиС", IX Международная научно-практическая конференция «Инновации в науке : применение и результаты». - г. Новосибирск, 2014. - № 9. - С. 5 - 7.
5. Аль Имам, А. А. МКЭ сквозного решения сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка без выделения пограничного слоя / А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // Международный молодежный симпозиум «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения». - 2014. - № 5 Ч. 2. – С. 134 - 137.
6. Амензаде, Ю. А. Теория упругости: учебник для ун-тов / Ю. А. Аменадзе. – 3-е доп. - М. : Высш. шк., 1976. - 272 с.
7. Артемов, М. А. Общие принципы графических пользовательских интерфейсов. Роль и влияние аппаратных компонентов на дизайн

- графического интерфейса/ М. А. Артемов, А. А. Чиченин // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы XII Междунар. науч.-метод. конф., 9 - 10 февраля 2012 г. - Воронеж, 2012. - С. 22 - 23.
8. Артемов, М. А. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности треска / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2011. — Т. 7, № 3. - С. 7 - 8.
  9. Артемов, М. А. О соотношениях, вытекающих из условия пластичности максимального приведенного напряжения / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А.П. Якубенко // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2011.— Т. 7, № 4. - С. 4 - 5.
  10. Артемов, М. А. Общие соотношения математической теории пластичности / М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Кибернетика и высокие технологии XXI века : XII Междунар. науч.-техн. Конф., 11 - 12 мая 2011 г. - Воронеж, 2011. - Т. 2. - С. 822 - 830.
  11. Артемов, М. А. Разработка компонентов в Delphi : учеб.-метод. пособие для вузов / М. А. Артемов, Г. Э. Вошинская, В. Г. Рудалев.— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. — 56 с.
  12. Артемов, М. А. Вариационные принципы в механике сплошной среды: учеб. пособие для вузов / М. А. Артемов, Ю. М. Мяснянкин, Т. Д. Семькина. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. — 56 с.
  13. Артемов, М. А. О соотношениях пространственного состояния пластических тел/ М. А. Артемов, Н. С. Потапов, А. П. Якубенко // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2011.— Т. 7, № 5. - С. 101 - 103.
  14. Артемов, М. А. Определение напряжений и деформаций в сжимаемом упругопластическом теле/ М. А. Артемов, И. А. Ларин, Н. С. Потапов // Кибернетика и высокие технологии XXI века : XI Междунар. науч.-техн. конф., 12-14 мая 2010 г. — Воронеж, 2010. - Т. 1. - С. 363-373.



15. Артемов, М. А. О соотношениях, вытекающих из условия полной пластичности / М. А. Артемов, Н. С. Потапов // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — Воронеж, 2010. — Т. 6, № 9. - С. 136 - 138.
16. Артемов, М. А. Об общих соотношениях математической теории пластичности / М. А. Артемов, А. П. Якубенко // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы 9-й Междунар. науч.-метод. конф., 12-13 февраля 2009 г. — Воронеж, 2009. — Т. 1. - С. 49 - 51.
17. Артемов, М. А. Об одной математической модели волнового процесса деформирования нелинейно упругой микроструктурной среды, учитывающей инерцию теплового потока/ М. А. Артемов, В. А. Баскаков, Н. П. Бестужева // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. — Воронеж, 2009. — Т. 5, №10. - С. 66 - 68.
18. Артемов, М. А. Моделирование предельных состояний/ М. А. Артемов, А. Г. Баскаков, А. П. Якубенко // Кибернетика и высокие технологии XXI века : IX Междунар. науч.-техн. конф., 13-15 мая 2008 г. — Воронеж, 2008.— Т. 2. - С. 1133 - 1140.
19. Артемов, М. А. Выбор языка программирования для реализации математических задач, использующих работу с матрицами/ М. А. Артемов, Д. Е. Кочкин, Н. А. Проскурякова // Из режима функционирования в режим развития : сб. науч. тр. регион. межвуз. науч.-практ. конф. в 2-х ч. — Воронеж, 2007. — Ч. 2. - С. 56 - 59.
20. Артемов, М. А. Математическое моделирование в задачах физики, механики, технологиях / М. А. Артемов, А. Г. Баскаков, А. В. Крутов // Вестн. физ.-мат. ф-та Елецкого гос. ун-та им. И. А. Бунина. — Елец, 2007. — Вып. 2. - С. 66 - 76.
21. Артемов, М. А. Портирование файловой системы / М. А. Артемов, Ю. А. Коваленко, С. Н. Пупыкин // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы 5-ой регион. науч.-метод.

конф., 8-9 февраля 2005 г. — Воронеж, 2005. — Ч. 1. — С. 29 - 32.

22. Артемов, М. А. Написание драйверов устройств с файловым интерфейсом для Windows Се / М. А. Артемов, С. Н. Пупыкин // Вестн. Воронеж. филиала Всерос. заоч. финансово-экономического ин-та Мин. обр. и науки РФ : научно-практический журнал Воронеж. филиала ВЗФЭИ. - Воронеж, 2005. — № 3. - С. 64 - 67.
23. Артемов, М. А. Работа с Unicode строками в Yava / М. А. Артемов, А. П. Якубенко // Современные проблемы механики и прикладной математики : сб. тр. междунар. шк.-семинара, 24 - 28 мая 2004 г. - Воронеж, 2004. — Ч. 1, т. 1. — С. 30 - 34.
24. Артемов, М. А. Метод малого параметра в задачах теории упрочняющегося упругопластического тела / М. А. Артемов, В. В. Корзунина, М. С. Лопасов, Е. В. Шестопалова // Авиакосмические технологии "АКТ-2003", тр. четвертой российской науч.-техн. конф. и шк. молодых ученых, аспирантов и студен. — 2003. — Ч. 1. — С. 144-147.
25. Артемов, М. А. Модели пластических материалов / М. А. Артемов, О. Д. Горбенко // Вестн. ф-та приклад. математики и механики. — 2002. — Вып. 3. — С. 9 - 16.
26. Артемов, М. А. О кинематически определяемых задачах теории пластичности/ М. А. Артемов [и др.] // Авиакосмические технологии: тр. 3-ей междунар. науч.-техн. конф., 29 октября - 1 ноября 2002 г. — Воронеж, 2002. — С. 34 - 37.
27. Артемов, М. А. Математическое моделирование и компьютерный эксперимент: метод. пособ. для студ. 3-5 курсов по спец. 010200 и 010500 / М. А. Артемов, Е. Н. Коржов. — Воронеж, 2001. — 65 с.
28. Артемов, М. А. О постановке задач исследования существования состояния деформируемого тела, сохранности его формы и

- сходимости метода малого параметра/ М. А. Артемов, О. Д. Горбенко, Н. В. Минаева // Вестн. ф-та прикл. математики и механики. — 2000. — Вып. 2. — С. 12 - 16.
29. Астахова, И. Ф. Компьютерные науки. Деревья, операционные системы, сети : учеб. пособие / И. Ф. Астахов [и др.]. — Москва : Физматлит, 2013. — 88 с.
  30. Астахова, И. Ф. Автоматизированный учебный курс "Базы данных и экспертные системы" : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / И. Ф. Астахова, Ю. Л. Фалалеева. — М., 2010.
  31. Астахова, И. Ф. Язык С + : пробное учеб. пособие / И. Ф. Астахова [и др.]. — Воронеж : ВГУ, 2001. — 150 с.
  32. Аэро Э. Л. Ассиметричная гидромеханика / Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский // Прикл. мат. и мех. - Т. 29, № 2. - 1965. - С. 297 - 308.
  33. Бабкин, А. В. Основы механики сплошных сред : учеб. для вузов в 3 т. // А. В. Бабкин, В. В. Селиванов. - 2-е изд., испр. - Т. 1. — М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. - 376 с.
  34. Бахвалов, Н. С. Осреднение процессов в периодических средах/ Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. - М. : Наука, 1984. - 352 с.
  35. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. - М. : Наука, 1973. - 631 с.
  36. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - 5-е изд. - М : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 636 с.
  37. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел / Дж. Ф. Белл. - М. : Наука, 1984. Ч. 1. - 597 с.
  38. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел / Дж. Ф. Белл. - М. : Наука, 1984. Ч. 2. - 432 с.
  39. Белоцерковский, О. М. Метод крупных частиц в газовой динамике /

- О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов. - М. : Наука, 1982. - 392 с.
40. Биркгоф, Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие/ Г. Биркгоф. - М. : Изд-во иност. лит-ры, 1963. - 244 с.
41. Блаттер. Вейвлет – анализ. Основы теории / Блаттер. - М. : Техносфера, 2006. - 271 с.
42. Буренин, А. А. Об условиях существования поверхностей разрывов необратимых деформаций в упругопластических средах/ А. А. Буренин, О. В. Дудко, К. Т. Семенов // ПМТФ. - 2009. - Т. 50. - С. 176-185.
43. Буренин, А. А. Ударные волны в изотропном упругом пространстве/ А. А. Буренин, А. Д. Чернышев // ПММ. - 1978. - Т. 42. - Вып. 4 — С.711 - 717.
44. Буренин, А. А. Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Известия Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. - 2009. - Вып. 4, ч. 2. - С. 14 - 24.
45. Быкова, М. И. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры: монография / М. И. Быкова [и др.]. - Воронеж : ВГУ, 2010. - 192 с.
46. Быковцев, А. Г. О преломлении ударных волн чистого сдвига в упруго-пластическое полупространство / А. Г. Быковцев // ПММ. - 1989. - Т. 53, вып. 2. - С. 309-318.
47. Ван-Дайк, М. Д. Методы возмущений в механике жидкости / М. Д. Ван-Дайк. - М. : Мир, 1967. - 310 с.
48. Вервейко, Н. Д. Влияние микроструктуры упругого материала на его деформирования / Н. Д. Вервейко, С. А. Шашкина // Вестн. СамГУ. - Естественная серия. - 2009. - № 4(70). - С. 101 - 113.
49. Вервейко, Н. Д. К устойчивости формы сдвигового течения микроструктурной вязкой жидкости в узких криволинейных каналах /

- Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман, А. И. Шашкин // Вестн. ВГУ. Сер. Физика, математика. - Воронеж, 2014. - № 1. - С. 56 — 63.
50. Вервейко, Н. Д. Влияние однородной микроструктуры материала на его деформирование и течение / Н. Д. Вервейко, А. А. Воронков, М. И. Быкова // Вестн. ВГУ. Сер. Физика, математика. - 2005. - № 2. - С. 111 - 118.
51. Вервейко, Н. Д. Влияние характерного линейного размера микроструктуры и времени релаксации на переходные процессы в тонких слоях / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Вестн. ВГУ. Сер. Физика, математика. - 2013. - № 2. - С. 141 - 147.
52. Вервейко, Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н. Д. Вервейко. - Воронеж : ВГУ, 1997. - 204 с.
53. Вервейко, Н. Д. Математическое моделирование поведения сплошной среды с учетом микроструктуры и времени релаксации / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Механика и процессы управления. Материалы XXXXII Всероссийского симпозиума. - М. : РАН, 2012. Т. 1 - С. 111 - 122.
54. Вервейко, Н. Д. О построении одной квазимодели механики сплошной среды / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. межд. конф. - Воронеж : ВГУ, 2010. - С. 94 - 96.
55. Вервейко, Н. Д. Расчет влияния микроструктуры жидкости и времени релаксации на ее течение вдоль линии тока средствами MathCad Prime 1.0 / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Теоретическая и прикладная механика. - Вып. 27. - Минск : БНТУ, 2012. - С. 155 - 160.
56. Вервейко, Н. Д. Учет микроструктуры материала и его инерциальных свойств в моделях механики сплошной среды / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы

- «Понтрягинские чтения XXII». - Воронеж : ВГУ, 2011. - С. 39 - 41.
57. Вервейко, Н. Д. Вращательное движение микроструктурной вязкой жидкости в цилиндрическом зазоре под действие эксцентрично расположенного внутреннего вращающегося цилиндра / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман, А. И. Шашкин // Межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», 12 – 14 декабря 2013 г. - Воронеж, 2013.
58. Вервейко, Н. Д. Стационарное сдвиговое течение вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в плоском зазоре между двумя цилиндрами / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. - 2013. - № 1(15). - С. 51 - 55.
59. Вервейко, Н. Д. Асимптотический анализ сдвигового течения вязкопластической микроструктурной жидкости в кольцевом зазоре / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXIV». - Воронеж, 2013. - С. 231 — 233.
60. Вервейко, Н. Д. Особенности применения МКЭ для решения сингулярно возмущённых задач / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // XXVIII Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач», 3 - 9 мая 2014 г. - Воронеж, 2014. - С. 37 - 38.
61. Вервейко, Н. Д. Стационарное течение микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре с эксцентрично вращающимся валом / Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // VIII Всероссийская конф. по механике деформируемого твердого тела 16 – 21 июня 2014 г. - Чебоксары, 2014. - С. 94 — 97.
62. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. - Изд. 4-е. - М. : Наука, 1981. - 512 с.

63. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики: учеб. для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. - 2-е изд., стереотип. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 400 с.
64. Галактионов, В. А. Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка : ударные волны, волны разрежения и разрушения / В. А. Галактионов, С. И. Похожаев // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2008. - Т. 48, № 10. - С. 1819-1846.
65. Гаркунов, Д. Н. Триботехника: учеб. для ВТУЗов / Д. Н. Гаркунов. - 2-е изд. - М. : Машиностроение, 1989. - 328 с.
66. Годунов, С. К. Разностные схемы. Введение в теорию / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. - М. : Наука, 1973. - 400 с.
67. Годунов, С. К. Элементы механики сплошной среды / С. К. Годунов. - М. : Наука, 1978. - 303 с.
68. Годунов, С. К. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов. - Новосибирск : Научная книга, 1998. - 280 с.
69. Головнева, Е. И. Особенности применения методов механики сплошных сред для описания наноструктур / Е. И. Головнева, И. Ф. Головнев, В. М. Фомин // Физическая мезомеханика. - 2005. - № 5. - С. 47 - 54.
70. Демидов, С. П. Теория упругости: учеб. для вузов / С. П. Демидов. - М. : Высш. шк., 1979. - 432 с.
71. Димитриенко, Ю. И. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов / Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов // Математическое моделирование. - 2012. - Т. 24, № 5. - С. 3-20.
72. Дородницын, Л. В. Аппроксимации квазигазодинамической системы уравнений, приводящие к явным алгоритмам / Л. В. Дородницын // Математическое моделирование. - 2006. - Т. 18, № 4. - С. 77 - 88.
73. Егоров, Ю. Э. Применение метода масштабирования сжимаемости

- для расчета стационарных течений вязких газов и газовых смесей в соплах Лавалья / Ю. Э. Егоров, М. Х. Стрелец, М. Л. Шур // Математическое моделирование. - 1990. - Т. 2, № 10. - С. 3 - 12.
74. Елизарова, Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Лекции по математическим моделям и численным методам в динамике газа и жидкости / Т. Г. Елизарова. - М. : Научный мир, 2007. - 350 с.
75. Елизарова, Т. Г. Лекции. Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений / Т. Г. Елизарова. - М. : Физический факультет МГУ, 2005. - 224 с.
76. Еняшин, А. Н. Нанотубулярные композиты : моделирование капиллярного заполнения нанотрубок дисульфида молибдена молекулами  $TiCl_4$  // Наносистемы : физика, химия, математика / А. Н. Еняшин, А. Л. Ивановский. - 2010. - Т. 1, №1. - С. 63 - 71.
77. Жилин, П. А. Математическая теория неупругих сред / П. А. Жилин // Успехи механики. - 2003. - Т. 2, № 4. - С. 3-36.
78. Жилин, П. А. Основные уравнения теории неупругих сред / П. А. Жилин // Сб. тр. ХУН! летней школы «Актуальные проблемы механики». - СПб., 2001. - С. 14 - 58.
79. Жилин, П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики / П. А. Жилин. - СПб. : Питер, 2003. - 340 с.
80. Задорожний, В. Г. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи / В. Г. Задорожний, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Известия РАН. Механика твердого тела. - М., 2008. - № 1. - С. 138 - 146.
81. Задорожний, В. Г. Метод малого параметра для уравнения Риккати со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний // Межвуз. сб. тр.



- семинара по фундаментальному и прикладному анализу. — Старый Оскол, 2006. — С. 101 - 105.
82. Задорожний, В. Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными / В. Г. Задорожний. — Воронеж, 2000. — 368 с.
83. Захаров, Е. В. Уравнения математической физики: учеб. для студ. высш. учеб. заведений / Е. В. Захаров, И. В. Дмитриева, С. И. Орлик. - М. : Издат. центр «Академия», 2010. - 320 с.
84. Иванова, Е. А. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток при учете моментных взаимодействий на микроуровне / Е. А. Иванова, А. М. Кривцов, Н. Ф. Морозов // Прикладная математика и механика. - 2007. - Т. 71, № . - С. 595-615.
85. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды: учебник / А. А. Ильюшин. - 3-е изд. - М. : Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.
86. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. :Наука, 1978. - 208 с.
87. Ивлев, Д. Д. Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. - Т. 2. - 448 с.
88. Ивлев Д. Д. Механика пластическая сред : в 2 т. т. z.
89. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. - М. : Машиностроение, 1975. - 559 с.
90. Карташев, А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. - 2-е изд., пер. и доп. - М. : Наука, 1979. - 288 с.
91. Клайн, С. Дж. Подобие и приближённые методы / С. Клайн. -М. : Мир, 1968. - 304 с.
92. Коган, М. Н. Динамика разреженного газа / М. Н. Коган. - М. : Наука, 1967. - 440 с.
93. Койтер, В. Т. Моментные напряжения в теории упругости / В. Т.

- Койтер // Механика. Сб. Пер. - 1965. - № 3. - С. 89 - 112.
94. Кондауров, В. И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями / В. И. Кондауров // Прикл. механика и техн. физика. – 1982. - № 4. - С.133 - 139.
95. Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. - М. : Мир, 1972. - 274 с.
96. Кривцов, А. М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой / А. М. Кривцов. - М. : Физматлит, 2007. — 304 с.
97. Кривцов, А. М. К теории сред с микроструктурой / А. М. Кривцов // Труды СПбГТУ. - 1992. - № 443. - С. 9 - 17.
98. Кунин, И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости / И. А. Кунин. - М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1975. - 416 с.
99. Ландау, Л. Д. Механика сплошных сред / Е. М. Лифшиц, Л. Д. Ландау. - М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1954. - 795 с.
100. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в X-ти т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - 3-е изд., перераб. - М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. Т. VI. Гидродинамика. - 736 с.
101. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в X-ти т. / Л. Д. Ландау, Т. Ф. Лифшиц. - 4-е изд., испр. и доп. - М. : Наука, 1987. Т. VII. Теория упругости. - 248 с.
102. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. - М. : Наука, 1970. - 904 с.
103. Лойцянский, Л. Г. Ламинарный пограничный слой / Л. Г. Лойцянский. - М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1952. - 479 с.
104. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. - М. : Наука, 1970. - 904 с.
105. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л. Г. Лойцянский. - 7-е изд., испр. - М. : Дрофа, 2003. - 840 с.

106. Мак-Коннел, А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел. - М., 1963. - 411 с.
107. Мартинсон, Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики: учеб. для вузов / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов. - 2-е изд. - М. : Изд - во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. - 368 с.
108. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. - М. : Наука, 1980. - 456 с.
109. Митчел, Уэйт. МКЭ решения уравнений в частных производных / У. Митчел. - М. : Мир.
110. Найфэ, А. Х. Введение в метод возмущений / А. Х. Найфэ. - М. : Мир, 1984. - 535 с.
111. Негрескул, С. И. Моделирование зернистых сред методом элементной динамики / С. И. Негрескул, С. Г. Псахье, С. Ю. Коростелев, В. Е. Панин // АН СССР. СО. Том. науч. центр. - 1989. - № 39. - С. 1 - 27.
112. Никитин, Л. В. Статика и динамика твёрдых тел с сухим трением / Л. В. Никитин. - М. : «Московский лицей», 1998. - 272 с.
113. Ноаман, С. А. Компьютерное моделирование линейной формы пограничного слоя при стационарном течении микроструктурных материалов / С. А. Ноаман // Межд. науч.-практ. конф. «Актуальные вопросы науки, технологии и производства», г. Санкт-Петербург. - 2014. - № 1 – С. 55 - 28.
114. Ноаман, С. А. Влияние микроструктурных параметров вязкопластической смазки на эффективность подшипника скольжения / С. А. Ноаман // Межд. журнал «Наука и мир». - Volgograd, 2014. - № 3 (7), Vol. I. – С. 45 - 47.
115. Ноаман, С. А. Сдвиговое течение вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в плоском канале / С. А. Ноаман // Вестн.

- ф-та ПММ. - Вып. 9. - 2014. – С. 149 - 153.
116. Ноаман, С. А. Метод конечных элементов с нелинейными базисными функциями компьютерного моделирования сингулярных задач течения микроструктурной жидкости / С. А. Ноаман // Межд. науч.-техн. журн. Информационные технологии моделирования и управления. ВГТУ. - Воронеж, 2014. - № 5(89). - С. 50 - 56.
117. Новацкий, В. Теория упругости: пер. с пол. / В. Новацкий. - М. : Мир, 1975. – 872 с.
118. Новожилов, И. В. Методы формирования приближенных математических моделей движения/ И. В. Новожилов // Фундаментальная и прикладная математика. - 2005. - Т. 11, № 7. – С. 5-9.
119. Новожилов, И. В. Об уточнении предельных моделей механики / И. В. Новожилов // Нелинейная механика. – М. : Физматлит, 2001. – С. 174 - 191.
120. Павлов, А. Н. Разностные схемы с кинетически согласованной искусственной вязкостью для решения уравнений Навье-Стокса на криволинейных ортогональных сетках / А. Н. Павлов, А. С. Чайка, Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. - 1993. - Т. 5. - № 4. – С. 57 - 75.
121. Победря, Б. Е. Модели механики сплошных сред / Б. Е. Победря // Фундаментальная и прикладная математика. - 1997. - Т. 3, № 1. – С. 93 - 127.
122. Победря, Б. Е. Элементы структурной механики деформируемого твердого тела / Б. Е. Победря // Математическое моделирование систем и процессов. - 1996. - № 4. – С. 66 - 73.
123. Победря, Б. Е. Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды / Б. Е. Победря // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. - 2005. - № 1. – С. 54 - 59.

124. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. - М. : Физматлит, 2005. - 256 с.
125. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. - М. : Физматлит, 2001. - 576 с.
126. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л. С. Понтрягин. - Изд. 4-е. - М. : Наука, 1974. - 331 с.
127. Просветов, В. И. Математические модели механики сплошной среды с учетом микроструктуры материала/ В. И. Просветов // Тр. молодых ученых : секция математика. - 2010. - В. 1-2. - С. 26 - 27.
128. Просветов, В. И. Поведение материалов в тонких переходных слоях с учетом конечности представительных элементов и времени релаксации / В. И. Просветов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. межд. конф. - Воронеж : ВГУ, 2011. - С. 325 - 328.
129. Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике. - М. : Миц «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. - 776 с.
130. Пухначев, В. В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса/ В. В. Пухначев // Успехи механики. - 2006. - № 1. - С. 6 - 76.
131. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела/ Ю. Н. Работнов. - М. : Наука, 1974. - 744 с.
132. Ревуженко, А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ / А. Ф. Ревуженко. Новосибирск. - 428 с.
133. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер. - М. : Наука, 1965. - 224 с.
134. Рогова, Б. В. Обзор моделей вязких внутренних течений / Б. В. Рогова, И. А. Соколова // Математическое моделирование. -2002. - Т. 14, №1. - С. 41 - 72.

135. Рябченков, Л. Н. Закономерности деформирования песчаного грунта при низкочастотных воздействиях. Основания и фундаменты в геологических условиях Урала / Л. Н. Рябченков, А. В. Кузнецов. - Пермь, 1989. - С. 147 - 156.
136. Ряжских, В. И. Динамика фильтр-адсорбционного процесса очистки мелкодисперсионных взвесей с растворяющей твердой фазой/ В. И. Ряжских, О. А. Семенихин, Д. А. Горьковенко // Известия высших учебных заведений. Сер. Химия и химическая технология. - 2007. - Т. 50, № 2. - С. 70 - 72.
137. Самарский, А. А. Численные методы математической физики/ А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Науч. мир, 2000. - 316 с.
138. Самарский, А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики/ А. А. Самарский, Ю. П. Попов. - М. : Наука, 1980. - 360 с.
139. Самарский, А. А. Математическое моделирование : Идеи. Методы. Примеры/ А. А. Самарский, А. П. Михайлов. - 2-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2005. - 320 с.
140. Самарский, А. А. Разностные методы задач газовой динамики: учеб. пособ. для вузов / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. - 3-е изд., доп. М. : Наука, 1992. - 424 с.
141. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. - М. : Наука, 1973. - 416 с.
142. Седов, Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред / Л. И. Седов // Успехи математических наук. - 1965. - Т. XX. - Вып. 5(125). - С. 121-180.
143. Седов, Л. И. Механика сплошных сред / Л. И. Седов. - М. : Наука, 1970. Т. 1. - 492 с.
144. Седов, Л. И. Механика сплошных сред / Л. И. Седов. - М. : Наука, 1970. Т. 2. - 568 с.
145. Седов, Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями

- свободы / Л. И. Седов // ПММ. - 1968. - Т. 32, № 5. - С. 771 - 785.
146. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. - 4-е изд. - М. : Наука, 1966. - 443 с.
147. Сокольников, И. С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред/ И. С. Сокольников — М. : Наука, 1971. - 376 с.
148. Спорыхин, А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород/ А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. — М. : Физматлит, 2004. - 232 с.
149. Справочник по триботехнике. В 3 т. Т.1. Теоретические основы / Под общ. ред. М. Хебды, А. В. Чичинидзе. – М. : Машиностроение, 1989. – 400 с.
150. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. - 7-е изд. - М. : Наука, 1977. - 735 с.
151. Тимошенко, С. П. Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. - М. : Мир, 1976. - С. 145 - 151.
152. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах/ Т. Томас. - М. : Мир, 1964.
153. Успенский, В. А. Что такое нестандартный анализ? / В. А. Успенский. - М. : Наука, 1987. - 128 с.
154. Филоненко-Бородич, М. М. Теория упругости/ М. М. Филоненко-Бородич. - М. : Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1959. - 364 с.
155. Хан, Х. Теория упругости : основы линейной теории и ее применения: пер. с нем. / Х. Хан. - М. : Мир, 1988. - 344 с.
156. Черняк, В. Г. Механика сплошных сред: учеб. пособ. для вузов. / В. Г. Черняк. - М. : Физматлит, 2006. - 352 с.
157. Четверушкин, Б. Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды/ Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. - 2005. - Т. 17, № 4. - С. 27 - 39.

158. Четверушкин, Б. Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред/ Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. - 2012. - Т. 24, № 11. - С. 33-52.
159. Шашкина, С. А. Формулировка задачи теории упругости для материалов с микроструктурой/ С. А. Шашкина // Сб. «Математические модели и операторные уравнения». - Воронеж, 2005. - С. 81 - 86.
160. Шемякин, Е. И. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок / Е. И. Шемякин, М. В. Курленя, В. Н. Опарин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. - Ч. 1, № 3. - 1986.
161. Шемякин, Е. И. Эффект зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок/ Е. И. Шемякин, М. В. Курленя, В. Н. Опарин // ДАН СССР. - Т. 289, № 5. - 1986.
162. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя/ Г. Шлихтинг. - М. : Наука, 1974. - 711 с.
163. Шуликовский, В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении/ В. И. Шуликовский. - М. : Глав. изд-во физ.-мат. лит-ры. - 1963. - 540 с.
164. Эринген, А. К. Теория микрополярной упругости/ А. К. Эринген // Разрушение. - 1975. - Т. 2. - С. 646 - 751.
165. Abraham, F. F. Simulating materials failure by using up to one billion atoms and the world's fastest computer / F. F. Abraham, R. Walkup, H. Gao // Work-hardening. Proceedings of National Academy of Sciences (USA). - 2002. - V. 99, № 9. - P. 5783 - 5787.
166. Baskes, M. I. The status role of modeling and simulation in materials science and engineering / M. I. Baskes // Current Opinion in Solid State & Mater. Sc. - 1999. - V. 4, № 3. - P. 273 - 277.
167. Chevrier, P. Spall fracture : Mechanical and microstructural aspects/ P.



- Chevrier, J. R. Klepaczko // *Engineering Fracture Mechanics*. - 1999. - V. 63, № 3. - P. 273 - 294.
168. Cambou B. Change of scale in granular materials/ B. Cambou, M. Chaze, F. Dedecker // *Eur. J. Mech.* - 2000. - V. 19, № 6. - P. 999 - 1014. '
169. Casaverde, L. Distinct element analysis for rock avalanche / L. Casaverde [et al.] // *Proc. JSCE 55, № 515, 1989.* - P. 153 - 162.
170. Cosserat, E. et F. *Theorie des Corps Defonnables* / E. et F. Cosserat. - Paris. Librarie Scientifique A. Hennann et Fils.,1909.
171. Ebinger, T. Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes / T. Ebinger, H. Steeb, S. Diebles // *Comput. Mater. Sci.* - 2005. - Vol. 32. - P. 337 - 347.
172. Eringen, A. C. Theory of micropolar fluid / A. C. Eringen // *J. Math. Mech.* - 1966. - V. 16, № 1, - P. 1 - 16.
173. Eringen, A. C. *Microcontinuum Field Theories. 1. Foundation and Solids* / A. C. Eringen. - Springer- Verlag New York, 1998. - 319 p.
174. Evans, M. W. The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations / M. W. Evans, F. H. Harlow. - Los Alamos Scientific Lab. Rept. № LA-2139. - Los Alamos, 1957.
175. Forest, S. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua / S. Forest, R. Sievert // *Acta Mech.* - 2003. - Vol. 160. - P. 71 - 111.
176. Forest, S. Homogenization Methods and the Mechanics of Generalized Continua. Part 2 / S. Forest // *Theoretical and Applied Mechanics*. 2002. - Vol. 28 - 29. - P. 113 - 143.
177. Kardiadakis, G. Microflows and nanoflows / G. Kardiadakis, A. Beskok, N. Aligi // *Fundamentals and simulation*. - Springer, 2005. - 817 p.
178. Kucaba-PiEetal A. Flows in microchannels / A. Kucaba-PiEetal, Z. Walenta, Z. Peradzynski // *TASK Quart.* - 2001. - V. 5, № 2. - C. 179 - 189.

179. Le, K. C. Kontinuums mechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur / K. C. Le // Mitt. Inst. Mech 106. - 1996. - P. 1 - 193.
180. Lomdahl, P. S. Molecular dynamics of very large systems / P. S. Lomdahl, D. M. Beazley, S. J. Zhou // Radiation Effects and Defects in Solids. - 1997. - V. 142, № 4. - P. 1 - 7.
181. Mindlin, R. D. Influence of Couple-Stress on Stress Concentration / R. D. Mindlin // Exp. Mech. - 1963. - V. 3. - P. 1 - 7.
182. Misra, J. C. A mathematical model for the study of blood flow through a channel with permeable walls / J. C. Misra, S. K. Ghosh // Acta mech. 1-4. - 1997. - V. 122. -P. 137-153.
183. Naufeh, A. H. Perturbation method / A. H. Naufeh, Y. Wiley. - New York, 1973.
184. Pearson, J. R. A. Key questions in rock mechanics / J. R. A. Pearson // Key Quest. Rock Mech.: Proc. 29th U.S. Symp., Minneapolis, 13 - 15 June, 1988. - Rotterdam; Brookfield, 1988. - P. 7 - 16.
185. Prat Pere C. Microplane model for triaxial deformation of soils/ C. Prat Pere, P. Bazant Zdenek // Num. Models Geomech. NUMOG III: Proc. 3rd Int. Symp., Niagara Falls, 8-11 May, 1989. - London; New York, 1989. - 139 - 146.
186. Prosvetov, V. I. Modeling of flow of medium with homogeneous microstructure/ V. I. Prosvetov, P. P. Sumets, N. D. Vervevko // International journal of mathematical models and methods in applied sciences. - 2011. - V. 5., I. 3. - P. 508 - 516.
187. Schraad, M. W. On the macroscopic properties of discrete media with nearly periodic microstructures / M. W. Schraad // Int. J. Solids and Struct. - 2001. - V. 38, № 4243. -P. 7381 - 7407.
188. Takahashi, K. Continuum mechanics for higher stage micropolar materials. 1st report. Kinematics / K. Takahashi, K. Shizawa // Jap. Soc. Mech. Eng.

- A. 55. - 1989. - № 519. - P. 2356 - 2361.
189. Thomton, C. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media / C. Thomton // *Geotechnique*. - 2000. - V. 50. - P. 43 - 53.
190. Tuckerman, M. E. Understanding modern molecular dynamics : Techniques and applications / M. E. Tuckerman, O. J. Martyna // *J. Phys. Chem. B*. - 2000. - V. 104, № 2. - P. 159 - 178.
191. Trent Bruce G. Microstructural effects in static and dynamic numerical experiments / C. Trent Bruce // *Key Quest. Rock Mech. : Proc. 29th U.S. Symp. Minneapolis, 13 - 15 June, 1988*. - Rotterdam; Brookfield, 1988. - P. 395 - 402.
192. Vashishta, P. Million atom molecular dynamics simulations of materials on parallel computers / P. Vashishta [et al.] // *Current Opinion in Solid State & Mater. Sc.* - 1996. - V. 1. - № 6. - P. 853 - 863.
193. Warren, William E. Micropolar and nonlocal effects in spatially-periodic, two-dimensional structures / E. Warren William, E. Byskov // *Rept. R 37*, 1997. - P. 1 - 49.
194. Watts, A. J. Dimensional scaling for impact cratering and perforation / A. J. Watts, D. Atkinson // *Int. J. Impact Eng.* - 1995. - № 4 - 6. - P. 925 - 935.

## Листы программы

### **unit DECLAR;**

```
{Назначение: Описание и объявление нестандартных типов и
глобальных данных и объектов }
interface
Const
    NMax=100;
Type
    Vector = array [1..NMax] of real;
    Matrix = array [1..NMax,1..NMax] of real;
var
    A          : Matrix;
    B          : Vector;
    Co         : integer;
    DD         : real;
    Delta      : real;
    EndCal     : boolean; // Окончание вычислений
    EndExp     : boolean; //Завершение компьютерного эксперимента
    Gamma      : real;
    Ksi        : Vector;
    N          : integer; //Число узлов
    P          : Vector;
    Q          : Vector;
    R          : Vector;
    Sigma      : real;
    Y          : Vector;
implementation
end.
```

### **unit CALCUL;**

```
// Назначение: Проведение вычислений согласно дискретному аналогу
// математической модели и разработанному алгоритму вычислений
interface
uses
    DECLAR;
    procedure Stepon;
    procedure Result;
implementation
    procedure Stepon;
var
    i, j, k : integer; // i - номер строки, j - номер столбца
                // номера элементов матрицы A и вектора b
```

```

begin
  for i := 1 to N do // N - число разбиений области решения
    for j := 1 to N do
      A[i,j] := 0;
      A[1,1] := DD-Gamma; // Задание элементов 1-й строки
                          // матрицы A , DD- шаг Δ=1/N

      A[1,2] := Gamma;
    for k := 2 to N-1 do // Задание элементов матрицы A
      // начиная со строки 2 до строки N-1 включительно
      Begin
        // Вычисление значений ksi для элементов A(k) матрицы A
        Ksi[k-1] := (k-1)/N;
        Ksi[k] := k/N;
        Ksi[k+1] := (k+1)/N;
        A[k,k-1] := DD/Sigma*exp(-DD/Sigma)
          *(-Delta/(sqr(Sigma)*Sigma)
          *sqr(Ksi[k-1])*Ksi[k-1]-2*Delta/sqr(Sigma)*sqr(Ksi[k-1])
          -3*Delta/Sigma*Ksi[k-1]-3*Delta+sqr(Ksi[k-1])*Ksi[k-1]
          /Sigma+sqrt(Ksi[k-1]));
        A[k,k] := (1-exp(-2*DD/Sigma))/Sigma
          *(-4*Delta/sqr(Sigma)*sqr(Ksi[k]) -6*Delta+2*sqr(Ksi[k]));
        A[k,k+1] := DD/Sigma*exp(-DD/Sigma)
          *(Delta/(sqr(Sigma)*Sigma)
          *sqr(Ksi[k+1])*Ksi[k+1]-2*Delta/sqr(Sigma)*sqr(Ksi[k+1])
          +3*Delta/Sigma*Ksi[k+1]-3*Delta-sqr(Ksi[k+1])*Ksi[k+1]
          /Sigma+sqrt(Ksi[k+1]));
      end;
      A[N,N-1] := Gamma; // Задание элементов матрицы A строки
      A[N,N] := DD-Gamma; // для последней строки
      B[1] := 0; // Задание элементов вектора b первой части
                // уравнения Ay=b
      B[2] := Co*DD/Sigma*(0.1+DD);
      For k := 3 to N-1 do B[k] := Co*DD/Sigma*(0.1+DD*(k-1));
    { Алгоритм прогонки}
    { прямой ход }
    R[1] := A[1,1]; // Задание элементов 1x значений прогоночные
                  // коэффициентов p,Q
    P[1] := -A[1,2]/R[1];
    Q[1] := B[1]/R[1];
    For k := 2 to N-1 do
      Begin // Вычисление в цикле прогоночные коэффициентов
        R[k] := A[k,k]+A[k,k-1]*P[k-1];
        P[k] := -A[k,k+1]/R[k];
        Q[k] := (B[k]-A[k,k-1]*Q[k-1])/R[k];
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

        End;
        // Вычисление значений последних прогоночных коэффициентов
        R[N] := A[N,N]+A[N,N-1]*P[N-1];
        Q[N] := (B[N]-A[N,N-1]*Q[N-1])/R[N];
        { обратный ход          }
        // Вычисление значений решения y(N) в последней точке
        Y[N] := Q[N];
// обратной прогонки операция
For j := N-1 downto 1 do Y[j] := P[j]*Y[j+1]+Q[j]
    end; {Stepon}
procedure Result;          // построение графиков
begin
end; {Result}
end.

```

### **unit CONTROL;**

```

        // Назначение: Организация управления вычислениями в комплексе
interface
    uses
        DECLAR, PROLOG, CALCUL, OUTPUT, EPILOG;
    procedure Contr1;
implementation
    procedure Contr1;
        // Назначение: Последовательность шагов выполнения
        // вычислений для одного расчета в рамках технологии
        // программирования OLYMPUS
    begin
        Inital; // задание начальных физических данных
        Auxval; // Вычисление промежуточных величин
        Start; // задание начальных значений управляющих
                переменных
        Output1; // вывод исходных данных в файл результатов
    repeat
        Stepon; // вычисления на одном шаге
        Output2; // вывод промежуточных данных
        Tesend; // проверка окончания вычислений
    until EndCal;
        Result; // вычисления интегральных характеристик
    end; {Contr1}
end.

```

**unit DATAWINDOW;**

interface

uses

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls,  
Forms, Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls, DECLAR, TeeProcs, TeEngine, Chart,  
Buttons, Series;

type

TForm1 = class(TForm)  
    Panel1: TPanel;  
    Panel2: TPanel;  
    Label1: TLabel;  
    Panel3: TPanel;  
    LabeledEdit1: TLabeledEdit;  
    LabeledEdit2: TLabeledEdit;  
    LabeledEdit3: TLabeledEdit;  
    LabeledEdit4: TLabeledEdit;  
    LabeledEdit5: TLabeledEdit;  
    BitBtn1: TBitBtn;  
    Chart1: TChart;  
    Series1: TLineSeries;  
    procedure BitBtn1Click(Sender: TObject);  
private { Private declarations }  
public { Public declarations }  
end;

var

Form1: TForm1;

implementation

procedure TForm1.BitBtn1Click(Sender: TObject);  
    //Назначение: Чтение данных с клавиатуры

begin

    N := StrToInt (LabeledEdit1.Text);  
    Gamma := StrToFloat(LabeledEdit2.Text);  
    Sigma := StrToFloat(LabeledEdit3.Text);  
    Delta := StrToFloat(LabeledEdit4.Text);  
    Co := StrToInt (LabeledEdit5.Text);

end;

end.