

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

ЛЫЛОВ ЕВГЕНИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ
ОСОБЕННОСТЯМИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ
ГРАФЕ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Баев Александр Дмитриевич

Воронеж — 2015

Оглавление

Введение	6
1 Математическая модель малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями	19
1.1 Вариационное обоснование математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями	19
1.2 Корректность математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями	29
2 Математическая модель малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями	34
2.1 Вариационное обоснование математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями	35
2.2 Корректность математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями	42
2.3 Применение метода Фурье к математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями	52
2.3.1 О разложении функций из E в ряд Фурье по собственным функциям	52
2.3.2 О некоторых свойствах собственных функций	63

2.3.3	Доказательство возможности применения метода Фурье	66
3	Адаптация метода конечных элементов на геометрическом графе	70
3.1	Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями	70
3.2	Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов	74
3.3	Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых вынужденных колебаний растянутой сетки из струн с локализованными особенностями	80
3.4	Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов	85
4	Комплекс программ для реализации численных экспериментов	98
4.1	Программа для реализации численных экспериментов для математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями	98
4.2	Программа для реализации численных экспериментов для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями	101
5	Численный эксперимент	105
5.1	Первый численный эксперимент	105
5.2	Второй численный эксперимент	112
	Заключение	115
	Литература	116
A	Приложения	125
A.1	Текст программы Program1.py.	125
A.2	Текст программы Program2.py.	132

Введение

Актуальность темы. В последние десятилетия возрастает актуальность моделирования и исследований процессов в науке и технических приложениях, имеющих характер сетей, прежде всего в тех областях, где такая особенность обусловлена геометрическими свойствами исследуемых объектов. Прежде всего это заметно в бурно развивающихся приложениях нанотехнологий, где субатомный характер технологических задач предполагает кардинально новые подходы в моделировании процессов и явлений, проходящих в линейных фрагментах изучаемого объекта. Это только одно из возможных приложений математических моделей, которые используют формализмы эволюционных систем с локализованными особенностями на геометрических графах.

Группа математиков, работавших под руководством профессора Ю.В. Покорного, создала качественную теорию краевых задач второго порядка на геометрическом графе. К настоящему времени для уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами, рассматриваемых на геометрических графах, изучен вопрос о разрешимости задачи с краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля при условиях трансмиссии во внутренних вершинах графа, вопрос о структуре спектра, получен аналог осцилляционной теоремы Штурма, установлен аналог формулы Даламбера, разработаны алгоритмы для численного решения. Начато исследование задач на графе, когда коэффициенты и правая часть не только не являются непрерывными, но и могут иметь особенности типа дельта-функций и их производных. Здесь можно отметить работы следующих авторов: Ю.В. Покорного (см. [39–45, 65–66]), А.В. Боровских (см. [4]), В.В. Провоторова (см., напр., [8, 12, 36, 46]), О.М. Пенкина (см. [37]), В.Л. Прядиева (см. [47]), В.А. Юрко (см. [53]), М.Ш. Бурлуцкую,

А.П. Хромова (см. [5–7]), Ali-Mehmeti F. (см. [54]), Belov J. (см. [55]), Lagnese J.E. (см. [629]), Nicaise S. (см. [57, 64]), Rannacher R. (см. [67]), Roth J.P. (см. [68–69]) и других.

Однако, остается актуальной задача построения конкретных математических моделей, реализуемых в виде начально-краевых задач на геометрических графах, а также смежные вопросы построения и анализа приближенных решений. Актуальность диссертационной работы обусловлена необходимостью развивать имеющиеся и разрабатывать новые подходы для анализа математических моделей малых деформаций и вынужденных колебаний на геометрическом графе, численные методы и алгоритмы определения классических решений.

Цели и задачи исследования. Разработка новых качественных и приближенных методов исследования процессов с локализованными особенностями на геометрическом графе. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

- вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями;
- доказательство корректности рассматриваемых математических моделей на геометрическом графе;
- изучение возможности применения метода Фурье;
- разработка численных методов для нахождения приближенного решения математических моделей с локализованными особенностями на геометрическом графе;
- разработка программного комплекса для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, реализуемых в виде начально-краевых задач на геометрических графах.

Методы исследования. Разработанные в диссертации методы ис-

следования математических моделей основаны на теории математического моделирования, теории построения и обоснования метода конечных элементов для уравнений с распределенными параметрами на графе, теории графов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и численные методы исследования математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями, численные методы и комплексы программ:

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

2. Доказательство корректности математических моделей на геометрическом графе.

3. Доказательство возможности применения метода Фурье для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами.

4. Разработка эффективных численных методов решения рассматриваемых математических моделей на геометрическом графе (адаптация метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);

5. Разработка программного комплекса для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

— новый подход для анализа математических моделей, реализуемых в виде начально-краевых задач на геометрических графах;

— доказательство корректности математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями;

— адаптация метода конечных элементов к рассматриваемым моде-

лям;

— доказательство оценки близости приближенного решения, найденного с помощью адаптированного метода конечных элементов, к точному на геометрическом графе;

— комплекс программ для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость математических моделей и методов исследования, предложенных в диссертационной работе, заключается в расширении множества известных моделей подобного типа в направлении использования пространств неклассических решений соответствующих начально-краевых задач и могут быть использованы в теоретических исследованиях начально-краевых задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на геометрическом графе.

Разработаны эффективные численные методы для программного комплекса, позволяющего найти приближенные решения рассматриваемых математических моделей. Получены оценки близости приближенного решения, найденного с помощью адаптированного метода конечных элементов, к точному на геометрическом графе. Представлены результаты тестирования численных методов на основе тестовых задач.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п.1 "Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений", п.2 "Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий", п.4 "Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента".

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2013 г.), на конферен-

циях "Современные методы теории краевых задач" на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2012–14 гг.), на семинарах профессора А.Д. Баева (2012–14 гг.), семинарах профессора М.И. Каменского (2012–2014 гг.), семинарах доцентов С.А. Шаброва и М.Б. Зверевой (2012–2014 гг.).

Публикации. Все результаты, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные автором лично.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, библиографического списка из 70 наименований, и приложения, в котором приводятся тексты разработанных программ, написанных на Python. Работа изложена на 140 странице, содержит 37 рисунков и 1 таблицу.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность работы, формулируется цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов.

В первой главе приводятся основные положения и понятия. Пусть Γ — геометрическая сеть из \mathfrak{R}^n , реализованная в виде открытого геометрического графа. Если ребра сети допускают достаточно гладкую параметризацию и не имеют самопересечений, можно считать их прямолинейными интервалами (не включая в них внутренние узлы). Тем самым удобно считать, что Γ состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов

$$\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, (i = 1, 2, \dots, N),$$

называемыми ребрами, и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначим через $I(\Gamma)$, а каждую его точку назовем внутренней вершиной графа Γ . Концы интервалов γ_i , не включенные в $I(\Gamma)$, назовем граничными вершинами, их множество обозначим через $\partial\Gamma$, т.е. $\partial\Gamma = \{b_i, i = 1, 2, \dots, r\}$. Объединение всех ребер обозначим через $R(\Gamma)$.

Тем самым, $\Gamma = R(\Gamma) \cup I(\Gamma)$.

Любое связное открытое подмножество Γ будем называть подграфом Γ .

Подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ имеет внутренние вершины только из $I(\Gamma)$, т.е. любая внутренняя вершина подграфа является внутренней и для Γ . Более того, всегда будет считаться, что $I(\Gamma_0) = I(\Gamma) \cap \Gamma_0$. С граничными для Γ_0 вершинами ситуация другая. Их множество $\partial\Gamma_0$ может содержать точки, не входящие ни в $\partial\Gamma$, ни в $I(\Gamma)$. Это случается тогда, когда точка $a \in \partial\Gamma_0$ оказывается внутренней для одного из ребер графа Γ .

Ребра графа Γ предполагаются занумерованными произвольно, их набор $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ вместе с $I(\Gamma)$ определяет Γ . Чтобы выделить из $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ те ребра, которые примыкают к внутренней вершине a , введем множество $\Gamma(a)$, обозначая так подграф, состоящий из внутренней вершины a и примыкающих к ней ребер. На ребрах графа Γ зададим ориентацию в зависимости от наблюдаемого процесса.

Скалярной функцией $z(x)$ на графе Γ будем называть обычное отображение $f : \Gamma \rightarrow R$.

Всюду далее для заданной на $R(\Gamma)$ функции $z(x)$ ее сужение на ребро γ_i обозначим через $z_i(x)$.

На графе Γ рассмотрим следующую математическую модель:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = \frac{dF}{d\Gamma}, \\ u(b_j) = 0, j = \overline{1, L}, \end{cases} \quad (1)$$

где производную по Γ будем понимать в следующем смысле:

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu') = \begin{cases} (pu')', x \in R(\Gamma), \\ \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu_i(a_k)} p_i(a_k) u_i(a_k), a_k \in I(\Gamma), \end{cases}$$

где $\mu_i(a_k)$ — число, заданное следующим образом:

$$\mu_i(a_k) = \begin{cases} 1, \text{ если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана "к" вершине } a_k, \\ 0, \text{ если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана "от" вершины } a_k. \end{cases}$$

В рассматриваемой математической модели (1) будем предполагать, что функции p, Q, F ограниченной на Γ вариации, непрерывны в точках

$\partial\Gamma$, причем $\inf_{R(\Gamma)} p > 0$. Пусть, более того, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации.

Решение рассматриваемой модели (1) будем искать в классе E — абсолютно-непрерывных на Γ функций $u(x)$, производная которых $u'(x)$ является на каждом ребре функцией ограниченной вариации.

Заметим, что $p(x)$ определяет силу натяжения в точке x графа Γ , $\frac{dQ}{d\Gamma}$ определяет распределение упругой реакции внешней среды на графе Γ , а $\frac{dF}{d\Gamma}$ отвечает за плотность внешней нагрузки.

В первой главе приводится вариационное обоснование математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

Во втором параграфе первой главы доказывается корректность рассматриваемой математической модели (1) на геометрическом графе Γ .

Во второй главе изучается математическая модель малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями, помещенной во внешнюю среду:

$$\begin{cases} M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) Q'_\Gamma(x) + f(x, t), \\ u(x, t)|_{\partial\Gamma} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), x \in \Gamma, \\ u'_t(x, 0) = \varphi_1(x), x \in \Gamma, \end{cases} \quad (2)$$

где $x \in \Gamma$, $t > 0$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ определяют начальное отклонение от положения равновесия и начальная скорость системы, помещенной во внешнюю среду, с локализованными особенностями, функции $p(x)$ — сила натяжения сетки из струн в точке x графа Γ , Q'_Γ — локальный коэффициент упругости внешней среды, $f(x, t)$ — внешняя сила, приложенная в точке $x \in \Gamma$ в момент времени t .

В математической модели (2) будем предполагать, что функции $p(x)$, $Q(x)$ ограниченной на Γ вариации, $\inf_{R(\Gamma)} p(x) > 0$, $f(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных. Пусть, более того, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации.

Решение рассматриваемой модели (2) будем искать в классе E —

абсолютно-непрерывных функций $u(x, t)$ на множестве $\Gamma \times [0, T]$, производная которых $u'_x(x, t)$ при каждом фиксированном t является σ -абсолютно-непрерывной и при каждом фиксированном x производные u'_t и u''_{tt} непрерывны на Γ .

В первом параграфе второй главы приведено вариационное обоснование математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями.

Во втором параграфе доказывається корректность математической модели (2) на графе Γ , а именно доказывається

Теорема 1. Пусть функции $p(x)$, $Q(x)$ абсолютно непрерывны на Γ , $Q'_\Gamma(x) \geq 0$, $M'_\Gamma(x) > 0$, а функция $f(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда математическая модель (2) не может иметь более одного решения, определенного на $\Gamma \times [0; T]$, в классе E .

Также доказывається, что при малом изменении начальных условий $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ соответствующее решение математической модели (2) изменяется мало.

В третьем параграфе второй главы рассматривается задача разделения переменных для математической модели (2), в результате которой появляется следующая спектральная задача на графе Γ :

$$\begin{cases} LX = -\frac{d}{d\Gamma}(pX')(x) + q(x)X(x) = \lambda mX; \\ X|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

Также доказываются некоторые свойства собственных функций, а именно устанавливается рост собственных функций при $k \rightarrow \infty$ для спектральной задачи (3).

Лемма 1. Пусть $\varphi_k(x)$ - k -ая амплитудная функция спектральной задачи (2.25) и $\int_{\Gamma} \varphi_k^2(x) M'_\Gamma(x) d\Gamma = 1$ для всех k . Тогда существует константа $C^* > 0$ такая, что для всех $x \in \Gamma$ и натуральных k справедливо $|\varphi_k(x)| \leq C^*$, $x \in \Gamma$.

Для дальнейших рассуждений вводится обозначение $LX = -(pX')'_\Gamma + XQ'_\Gamma$ и доказывається основной результат второй главы.

Теорема 2. Пусть $p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ — абсолютно непрерывны на Γ ,

$p(x)$ отделена от нуля, функция $Q(x)$ - не убывает на Γ . Пусть $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ - абсолютно непрерывны на Γ , производные $\varphi'_0(x)$ и $\varphi'_1(x)$ имеют конечное на Γ изменение; квазипроизводные $p(x)\varphi'_0(x)$ и $p(x)\varphi'_1(x)$ - абсолютно непрерывны на Γ ; функции $\frac{L(\varphi_0)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ и $\frac{L(\varphi_1)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ непрерывны на Γ ; $\frac{L(\varphi_0)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ - абсолютно непрерывна и ее производная имеет конечное изменение на Γ ; $\varphi_0(x)\Big|_{\partial\Gamma} = L\varphi_0\Big|_{\partial\Gamma} = \varphi_1(x)\Big|_{\partial\Gamma} = L\varphi_1\Big|_{\partial\Gamma} = 0$. Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right),$$

где $\varphi_k(x)$ - нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k ,

$$A_k = \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) \varphi_k(x) \varphi_0(x) d\Gamma, B_k = \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) \varphi_k(x) \varphi_1(x) d\Gamma,$$

является решением математической модели (2).

Причем ряд (2.40) можно дифференцировать почленно по t дважды и по x , σ также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на $\Gamma \times [0; T]$.

В третьей главе метод конечных элементов адаптируется для математических моделей, описывающих деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

Без ограничения общности рассмотрим адаптацию метода конечных элементов для графа-звезды Γ , состоящего из N ребер и внутренней вершины a . Пусть каждое ребро γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) параметризовано отрезком $[0; 1]$ и ориентировано к внутренней вершине a . Тогда внутренней вершине a ставится в соответствие $x = 1$, граничным вершинам ставится в соответствие $x = 0$.

Для нахождения приближенного решения задачи выберем на графе Γ систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого рассмотрим разбиение ребра γ_i графа Γ на неравные части точками $0 = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{n_i}^i = 1$,

($i = 1, 2, \dots, N$). Отметим, что граничные вершины и внутреннюю вершину будем обязательно включать в разбиение.

Для i -го ребра k -ю базисную функцию $\varphi_{k,i}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N$) зададим формулой

$$\varphi_{k,i}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}^i}{x_k^i - x_{k-1}^i}, & x \in [x_{k-1}^i, x_k^i], \\ \frac{x - x_{k+1}^i}{x_k^i - x_{k+1}^i}, & x \in [x_k^i, x_{k+1}^i], \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Заметим, что базисные функции $\varphi_{k,i}(x)$ равны нулю везде на Γ , кроме промежутка (x_{k-1}^i, x_{k+1}^i) соответствующего ребра с номером i . При этом $\varphi_{k,i}(x_k^i) = 1$.

Также определим базисные функции для i -го ребра

$$\varphi_{n_i,i}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n_i-1}^i}{1 - x_{n_i-1}^i}, & x \in [x_{n_i-1}^i, 1], i = 1, 2, \dots, N, \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Пусть

$$\varphi_r(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_{n_i,i}(x),$$

где $r = \sum_{i=1}^N n_i - N + 1$.

В первом параграфе третьей главы приближенное решение математической модели (1) будем искать его в виде линейной комбинации функций

$$v(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} v_{j,i} \varphi_{j,i}(x) + c \varphi_r(x),$$

где $v_{j,i}$ - значения $v(x)$ в точках разбиения x_j^i , c - значение $\varphi_r(x)$ в точке 1.

Для нахождения коэффициентов модели $v_{j,i}$, c получаем систему $AV = F$ с трехдиагональной матрицей A размерности $R \cdot (N - 1) + 1$, где V - вектор-столбец, составленный из неизвестных $v_{j,i}$ и c , F - вектор, составленный из правых частей уравнения.

Введем обозначение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} p\varphi'\psi'dx + \int_{\Gamma} \varphi\psi dQ,$$

которое может служить скалярным произведением. Последнее выражение есть билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывных на Γ функций, имеющих производную, суммируемую с квадратом (на каждом ребре) и удовлетворяющих условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$. Поэтому этот функционал может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты рассматриваемой системы уравнений $A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$ образуют матрицу Грама системы линейно независимых векторов. Значит, определитель матрицы коэффициентов изучаемой системы уравнений отличен от нуля, а это означает, что полученная система имеет единственное решение.

Во втором параграфе доказана теорема для оценки погрешности адаптированного метода конечных элементов.

Теорема 3. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (1), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда справедливо неравенство

$$\langle u - v, u - v \rangle \leq Ch,$$

причем, константа C не зависит от $h = \frac{1}{n}$, где n — количество интервалов, на которые производится разбиение каждого ребра (сетка предполагается равномерной).

В третьем параграфе находим приближенное решение математической модели (2). Будем его искать в виде

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{j,i}(t)\varphi_{j,i}(x) + c(t)\varphi_r(x),$$

где $a_{j,i}(t)$, $c(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции на графе Γ , $\varphi_{j,i}(x)$ — j -ая базисная функция на ребре γ_i .

Таким образом, получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widehat{A}a''(t) + \widehat{B}a(t) = \widehat{F},$$

где \widehat{A} , \widehat{B} - матрицы порядка r , коэффициенты которых находятся по формулам

$$\widehat{A}_{kj} = \widehat{A}_{jk} = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dM, \quad (k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\widehat{A}_{rr} = \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dM,$$

$$\widehat{B}_{kj} = \widehat{B}_{jk} = \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dQ, \quad (k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\widehat{B}_{rr} = \int_{\Gamma} p(x) \varphi_r'^2(x) dx + \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dQ$$

где $a(t) = (a_{1,1}(t), a_{2,1}(t), a_{3,1}(t), \dots, a_{j,i}(t), \dots, a_{n_i-1,N}(t), c(t))^T$ и $\widehat{F}(t) = (F_{1,1}(t), F_{2,1}(t), \dots, F_{j,i}(t), \dots, F_r(t))^T$ — вектор-столбцы, компоненты $F_n(t)$ определяются равенствами

$$F_{k,i}(t) = \int_{\Gamma} f(x, t) \varphi_{k,i}(x) d\Gamma, \quad F_r(t) = \int_{\Gamma} f(x, t) \varphi_r(x) d\Gamma$$

В четвертом параграфе доказана теорема для оценки погрешности адаптированного метода конечных элементов.

Обозначим через $u_I(x)$ интерполянт в энергетической норме:

$$u_I(x, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} u(x_j^i, t) \varphi_{j,i}(x) + u(1, t) \varphi_r(x).$$

Теорема 4. Пусть $M_{\Gamma}'(x) > 0$, $Q_{\Gamma}'(x) \geq 0$, $p(x) > 0$ и начальные условия $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ таковы, что математическая модель (2) имеет единственное решение в классе E . Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (3.12), $v(x, t)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда

справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_{\Gamma} w_t'^2(x, t) dM + \int_{\Gamma} w_x'^2(x, t) dx + \int_{\Gamma} w^2(x, t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{C} \cdot \sqrt{h},$$

причем, константа \bar{C} не зависит от $h = \frac{1}{n}$, где n — количество интервалов, на которые производится разбиение, $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$.

В четвертой главе приводится описание комплекса программ, разработанного для проведения численных экспериментов. Программы написаны на высокоуровневом языке программирования общего назначения Python, ориентированным на повышение производительности и читаемости кода.

В пятой главе представлены результаты реализации численных методов при проведении вычислительных экспериментов. Результаты численных экспериментов на тестовых задачах иллюстрируются графическими изображениями и таблицами численных расчетов.

В приложении представлены тексты разработанных программ Program1.py, Program2.py.

Глава 1

Математическая модель малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями

В этой главе приведем основные положения и понятия, вариационное обоснование математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями, докажем корректность рассматриваемой математической модели на геометрическом графе.

На протяжении всего изложения будем пользоваться терминологией и обозначениями из [15, 20, 39, 40, 44].

1.1 Вариационное обоснование математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями

Пусть Γ — геометрическая сеть из \mathbb{R}^n , реализованная в виде открытого геометрического графа. Если ребра сети допускают достаточно гладкую параметризацию и не имеют самопересечений, можно считать их прямолинейными интервалами (не включая в них внутренние узлы). Тем самым удобно считать, что Γ состоит из некоторого набора непересека-

ющихся интервалов

$$\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, (i = 1, 2, \dots, N),$$

называемыми ребрами, и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначим через $I(\Gamma)$, а каждую его точку назовем внутренней вершиной графа Γ . Концы интервалов γ_i , не включенные в $I(\Gamma)$, назовем граничными вершинами, их множество обозначим через $\partial\Gamma$, т.е. $\partial\Gamma = \{b_i, i = 1, 2, \dots, r\}$. Объединение всех ребер обозначим через $R(\Gamma)$. Тем самым, $\Gamma = R(\Gamma) \cup I(\Gamma)$.

Определение 1.1. Любое связное открытое подмножество Γ будем называть подграфом Γ .

Подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ имеет внутренние вершины только из $I(\Gamma)$, т.е. любая внутренняя вершина подграфа является внутренней и для Γ . Более того, всегда будет считаться, что $I(\Gamma_0) = I(\Gamma) \cap \Gamma_0$. С граничными для Γ_0 вершинами ситуация другая. Их множество $\partial\Gamma_0$ может содержать точки, не входящие ни в $\partial\Gamma$, ни в $I(\Gamma)$. Это случается тогда, когда точка $a \in \partial\Gamma_0$ оказывается внутренней для одного из ребер графа Γ .

Ребра графа Γ предполагаются занумерованными произвольно, их набор $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ вместе с $I(\Gamma)$ определяет Γ . Чтобы выделить из $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ те ребра, которые примыкают к внутренней вершине a , введем множество $\Gamma(a)$, обозначая так подграф, состоящий из внутренней вершины a и примыкающих к ней ребер. На ребрах графа Γ зададим ориентацию в зависимости от наблюдаемого процесса.

Определение 1.2. Скалярной функцией $z(x)$ на графе Γ будем называть обычное отображение $f : \Gamma \rightarrow R$.

Всюду далее для заданной на $R(\Gamma)$ функции $z(x)$ ее сужение на ребро γ_i обозначим через $z_i(x)$.

На графе Γ рассмотрим следующую математическую модель:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = \frac{dF}{d\Gamma}, \\ u(x)|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где производную по Γ будем понимать в следующем смысле:

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu') = \begin{cases} (pu')', & x \in R(\Gamma), \\ \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu_i(a_k)} p_i(a_k) u_i(a_k), & a_k \in I(\Gamma), \end{cases}$$

где $\mu_i(a_k)$ — число, заданное следующим образом:

$$\mu_i(a_k) = \begin{cases} 1, & \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана "к" вершине } a_k, \\ 0, & \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана "от" вершины } a_k. \end{cases}$$

Таким образом, если исходные функции p , Q , F дифференцируемы внутри каждого ребра γ_i графа Γ , то на каждом ребре уравнение $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u \frac{dQ}{d\Gamma} = \frac{dF}{d\Gamma}$ эквивалентно классическому уравнению Штурма-Лиувилля:

$$-(p_i u_i')' + q_i u_i = f_i,$$

где q_i , f_i — обычные производные вдоль соответствующего ребра γ_i от функций Q_i , F_i .

Для всякой точки ξ , расположенной на ребре γ_i , в которой хотя бы одна из функций p_i , Q_i , F_i терпит разрыв, справедливо следующее равенство

$$-\Delta(p_i u_i')(\xi) + u(\xi) \Delta Q_i(\xi) = \Delta F_i(\xi).$$

Функция $Q_i(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды вдоль ребра γ_i графа Γ , а $F_i(x)$ — внешнюю нагрузку вдоль ребра γ_i . Скачок функции $\Delta z(\xi)$ в точке ξ определяется как $\Delta z(\xi) = z(\xi+0) - z(\xi-0)$. Отметим, что скачок функции $Q(x)$ в точке ξ равен упругости опоры, сосредоточенной в этой точке, а скачок функции $F(x)$ в точке ξ равен сосредоточенной в этой точке силе.

Пусть $S(\sigma_i)$ — множество точек разрыва функции $\sigma_i(x)$, которая порождает на каждом ребре γ_i меру σ_i . На γ_i введем метрику $\rho(x, y) = |\sigma_i(x) - \sigma_i(y)|$. Очевидно, что (γ_i, ρ) неполное метрическое пространство. Стандартное пополнение приводит к множеству, в котором каждая точка разрыва $\xi \in S(\sigma_i)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$, причем $\xi - 0$ и $\xi + 0$ ранее были предельными.

В рассматриваемой математической модели (1.1) будем предполагать, что функции p , Q , F ограниченной на Γ вариации, непрерывны в точках $\partial\Gamma$, причем $\inf_{R(\Gamma)} p > 0$. Пусть, более того, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации.

Решение рассматриваемой модели (1.1) будем искать в классе E — абсолютно-непрерывных на Γ функций $u(x)$, производная которых $u'(x)$ является на каждом ребре функцией ограниченной вариации.

Определение 1.3. Рассмотрим разбиение ребра $\gamma_i = (a_i, b_i)$ графа Γ точками $a_i = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{n_i}^i = b_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Будем говорить, что функция $z(x)$ имеет ограниченную вариацию на ребре γ_i , если:

- 1) функция $z(x)$ имеет конечные пределы в вершинах a_i, b_i ;
- 2) найдется константа C такая, что для произвольного разбиения

ребра γ_i сумма $\sum_{j=0}^{n_i-1} |z_i(x_{j+1}^i) - z_i(x_j^i)|$ ограничена константой C .

Точную верхнюю грань значений таких сумм будем называть вариацией $z(x)$ на ребре γ_i и обозначать $V_{\gamma_i}(z)$.

Определение 1.4. Функцию $z(x)$ будем называть функцией ограниченной вариации на графе Γ , если:

- 1) функция имеет конечные пределы во всех внутренних вершинах $I(\Gamma)$ графа;

- 2) $z(x)$ имеет ограниченную вариацию на каждом ребре γ_i графа Γ .

Сумму всех вариаций на ребрах γ_i , дополненную суммой абсолютных величин всевозможных скачков во внутренних вершинах, будем называть вариацией $z(x)$ на графе Γ и обозначать $V_{\Gamma}(z)$.

Определение 1.5. Функцию $z(x)$ будем называть σ -абсолютно непрерывной на ребре γ_i графа Γ , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{n_i}$ на ребре γ_i такая что $\sum_{i=1}^{n_i} (\sigma_i(\beta_i) - \sigma_i(\alpha_i)) < \delta$ выполнено неравенство $\sum_{i=1}^{n_i} |z_i(\beta_i) - z_i(\alpha_i)| < \varepsilon$. Функцию $z(x)$ будем называть σ -абсолютно непрерывной на графе Γ , если $z(x)$ является σ -абсолютно непрерывной на каждом ребре γ_i .

Определение 1.6. Функцию $z(x)$ будем называть абсолютно непрерывной на графе Γ , если:

- 1) $z(x)$ является абсолютно непрерывной на каждом ребре γ_i графа Γ ;
- 2) функция $z(x)$ непрерывной во всех внутренних вершинах графа $I(\Gamma)$.

Заметим, что $p(x)$ определяет силу натяжения в точке x графа Γ , $\frac{dQ}{d\Gamma}$ определяет распределение упругой реакции внешней среды на графе Γ , а $\frac{dF}{d\Gamma}$ отвечает за плотность внешней нагрузки.

Приведем вариационное обоснование математической модели (1.1), т.е. покажем, что рассматриваемая модель возникает из задачи о минимизации квадратичного функционала (потенциальной энергии)

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{p(x)u'^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} u dF, \quad (1.2)$$

при условии $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$.

Согласно вариационным принципам естествознания реальное состояние $u(x)$ системы минимизирует $\Phi(u)$ на множестве всех виртуальных (т.е. возможных) состояний. Поэтому для любой допустимой функции $h(x)$ должно быть выполнено

$$\inf_{\lambda} \Phi(u + \lambda h) = \Phi(u),$$

т.е. скалярная функция $\varphi(\lambda) = \Phi(u + \lambda h)$ минимизируется значением $\lambda = 0$. Так как эта функция дифференцируема по λ , и

$$\varphi'(0) = \int_{\Gamma} pu'h'dx + \int_{\Gamma} uhdQ - \int_{\Gamma} hdF,$$

то равенство нулю этого выражения при любой допустимой $h(x)$ и должно определять истинное значение $u(x)$:

$$\int_{\Gamma} p(x)u'(x)h'(x)dx + \int_{\Gamma} u(x)h(x)dQ - \int_{\Gamma} h(x)dF = 0. \quad (1.3)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится аналог формулы интегрирования по частям на произвольном геометрическом графе Γ . Докажем следующие вспомогательные теоремы.

Теорема 1.1. Пусть Γ — произвольный ориентированный граф, r — количество граничных вершин графа Γ , т.е. $\partial\Gamma = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$. Пусть на графе Γ заданы абсолютно-непрерывная функция $u(x)$ и функция ограниченной вариации $v(x)$, причем производная $u'_x(x)$ является абсолютно-непрерывной на Γ , а $v'_\Gamma(x)$ — функцией ограниченной вариации. Тогда на графе Γ справедлива следующая формула:

$$\int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma = \sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} u(b_i) v(b_i) - \int_{\Gamma} v(x) u'_x(x) dx, \quad (1.4)$$

где $\nu(b_i)$ — число, заданное следующим образом:

$$\nu(b_i) = \begin{cases} 1, & \text{если ориентация выбрана "от" граничной вершины } b_i, \\ 0, & \text{если ориентация выбрана "к" граничной вершине } b_i. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство разобьем на 2 этапа. На 1 этапе докажем справедливость формулы для графа без цикла, на 2 этапе — для графа с циклами.

Доказательство на 1 этапе проведем методом индукции по количеству ребер k графа Γ .

При $k = 1$ формула справедлива. Действительно, при $k = 1$ получаем ориентированный граф Γ , состоящий из одного ребра и двух граничных вершин b_1 и b_2 . Для определенности пусть задана ориентация на графе от вершины b_1 к b_2 . Для отрезка формула интегрирования по частям доказана и имеет следующий вид:

$$\int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma = \int_{b_1}^{b_2} u dv = u(b_2)v(b_2) - u(b_1)v(b_1) - \int_{b_1}^{b_2} v u'_x dx.$$

Предполагая справедливость формулы (1.4) при $k \leq N - 1$, покажем справедливость формулы при $k = N$. Выбросим из графа Γ внутреннюю вершину $a_k \in I(\Gamma)$, к которой примыкает m ребер графа Γ . Тогда получаем m -компонент связности, для которых выполнены следующие условия $\sum_{i=1}^m N_i = N$, $\sum_{i=1}^m r_i - m = r$, где N_i , r_i — количество ребер и

граничных вершин графов Γ_i , получившихся после выбрасывания внутренней вершины. Тогда получим

$$\int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Gamma_i} u_i \frac{dv_i}{d\Gamma_i} d\Gamma_i + (-1)^{\mu_i(a_k)} u_i(a_k) v_i(a_k) \right). \quad (1.5)$$

Для интеграла под знаком суммы выполнено наше предположение о справедливости формулы (1.4) при $k \leq N - 1$, т.е.

$$\int_{\Gamma_i} u_i \frac{dv_i}{d\Gamma_i} d\Gamma_i = \sum_{j=1}^{r_i-1} (-1)^{\nu(b_j)} u_i(b_j) v_i(b_j) + (-1)^{\nu(a_k)} u_i(a_k) v_i(a_k) - \sum_{j=1}^{N_i} \int_{\gamma_j} v_j u'_{jx} dx. \quad (1.6)$$

Подставляя представление (1.6) в (1.5), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{r_i-1} (-1)^{\nu(b_j)} u_i(b_j) v_i(b_j) + (-1)^{\nu(a_k)} u_i(a_k) v_i(a_k) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{N_i} \int_{\gamma_j} v_j u'_{jx} dx + (-1)^{\mu_i(a_k)} u_i(a_k) v_i(a_k) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} u(b_i) v(b_i) - \int_{\Gamma} v u'_x dx, \end{aligned}$$

т.е. формула (1.4) справедлива при $k = N$.

Доказательство на 2 этапе проведем методом индукции по количеству циклов k графа Γ .

При $k = 1$ получаем ориентированный граф Γ с одним циклом. Выбросим из графа Γ точки нулевой σ -меры x_i ребер γ_i , образующих цикл ($i = 1, 2, \dots, M$, причем $M \leq N$). Тогда получаем M подграфов, но уже без цикла, т.е.

$$\int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma = \sum_{i=1}^M \left(\int_{\Gamma_i} u_i \frac{dv_i}{d\Gamma_i} d\Gamma_i + (-1)^{\mu_i(x_i)} u_i(x_i) v_i(x_i) \right). \quad (1.7)$$

Для интеграла под знаком суммы в силу доказательства 1 этапа теоремы справедлива формула (1.4). Значит,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma &= \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^{r_i-1} (-1)^{\nu(b_j)} u(b_j) v(b_j) + (-1)^{\nu(x_i)} u_i(x_i) v_i(x_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{N_i} \int_{\gamma_j} v_j u'_{jx} dx + (-1)^{\mu(x_i)} u_i(x_i) v_i(x_i) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} u(b_i) v(b_i) - \int_{\Gamma} v u'_x dx, \end{aligned}$$

т.е. формула (1.4) справедлива при $k = 1$.

Предполагая справедливость формулы (1.4) при $k \leq N - 1$, покажем справедливость формулы при $k = N$. Выбросим из графа Γ точки нулевой σ -меры x_i ребер γ_i ($i = 1, 2, \dots, M$, причем $M \leq N$), образующих цикл. Тогда получаем M -компонент связности, для которых выполнены следующие условия $\sum_{i=1}^M N_i = N$, $\sum_{i=1}^M r_i - M = r$, где N_i , r_i — количество ребер и граничных вершин графов Γ_i , получившихся после выбрасывания внутренней вершины. Тогда получим

$$\int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma = \sum_{i=1}^M \left(\int_{\Gamma_i} u_i \frac{dv_i}{d\Gamma_i} d\Gamma_i + (-1)^{\mu_i(a_k)} u_i(a_k) v_i(a_k) \right). \quad (1.8)$$

Если получившийся граф Γ_i с циклом, то для него верно наше предположение о справедливости формулы (1.4) при $k \leq N - 1$, если же граф Γ_i без цикла, то в силу доказательства 1 этапа теоремы для него также

справедлива формула (1.4). Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u \frac{dv}{d\Gamma} d\Gamma &= \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^{r_i-1} (-1)^{\nu(b_j)} u(b_j) v(b_j) + (-1)^{\nu(a_k)} u(a_k) v(a_k) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{N_i} \int_{\gamma_j} v_j u'_{jx} dx + (-1)^{\mu(a_k)} u_i(a_k) v_i(a_k) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} u(b_i) v(b_i) - \int_{\Gamma} v u'_x dx, \end{aligned}$$

т.е. формула (1.4) справедлива при $k = N$. Таким образом, показали справедливость формулы (1.4) для произвольного графа. \square

Теперь вернемся к вариационному обоснованию математической модели (1.1).

Воспользовавшись теоремой 1.1, для первого интеграла в правой части уравнения (1.3) справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p(x) u'(x) h'(x) dx &= \sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} p(b_i) u'(b_i) h(b_i) - \\ &\quad - \int_{\Gamma} h(x) (p u'(x))'_x dx = - \int_{\Gamma} h(x) (p u'(x))'_x dx, \end{aligned} \quad (1.9)$$

так как $h(x)|_{\partial\Gamma} = 0$.

Для интеграла (1.9) справедливо покомпонентное представление:

$$- \int_{\Gamma} h(x) (p u'(x))'_x dx = - \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} h_i(x) d(p_i(x) u'_i(x)). \quad (1.10)$$

Второй и третий интегралы в уравнении (1.3) также имеют покомпонентное представление:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(x) h(x) dQ &= \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} u_i(x) h_i(x) dQ_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} u_i(a_k) h_i(a_k) Q_i \{a_k\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

и

$$\int_{\Gamma} h(x) dF = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} h_i(x) dF_i + \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} h_i(a_k) F_i\{a_k\}. \quad (1.12)$$

Здесь через $Q_i\{a_k\}$ обозначается Q -мера точки a_k , которая предполагается неотрицательной и совпадает с упругостью опоры, сосредоточенной в этой точке, а $F_i\{a_k\}$ — F -мера точки a_k , равная внешней силе, сосредоточенной в точке a_k .

Подставляя полученные выражения (1.10)—(1.12) в уравнение (1.3), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} h_i(a_k) (u_i(a_k) Q_i\{a_k\} - F_i\{a_k\}) + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} h_i(x) d(-(p_i u_i)' + g_i - F_i) = 0, \end{aligned}$$

где $g_i(x) = \int_0^x u_i dQ_i + c_i$. Значит, на каждом ребре верно равенство

$$-(p_i(x) u_i(x))' + \int_0^x u_i dQ_i - F_i(x) = const, \quad (1.13)$$

а также

$$\sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} (u_i(a_k) Q_i\{a_k\} - F_i\{a_k\}) = 0.$$

Из ограниченности вариаций на графе Γ функций $Q_i(x)$, $F_i(x)$ и из (1.13) следует, что $(p_i u_i)'$ имеет ограниченную вариацию на каждом ребре. Причем, $u(x)$ является абсолютно-непрерывной на Γ функцией, т.е. $u \in E$ — решение математической модели (1.1).

1.2 Корректность математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями

В этом параграфе покажем корректность математической модели (1.1).

Определение 1.7. Математическую модель (1.1) будем называть невырожденной, если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Теорема 1.2. Пусть $Q'_\Gamma(x) \geq 0$, $\inf_{R(\Gamma)} p(x) > 0$, причем $p(x)$, $Q(x)$ - абсолютно непрерывные функции на графе Γ . Тогда математическая модель (1.1) невырожденна.

Доказательство. Предположим противное: существует нетривиальное решение $u_0(x)$ однородной задачи на графе Γ , т.е. выполнено

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu'_0) + u_0(x)\frac{dQ}{d\Gamma} = 0, \\ u_0(x)|_{\partial\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Умножим однородное уравнение на $u_0(x)$ и проинтегрируем по Γ . Получим

$$-\int_{\Gamma} u_0(x)\frac{d}{d\Gamma}(pu'_0)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_0^2(x)\frac{dQ}{d\Gamma}d\Gamma = 0. \quad (1.14)$$

Первый интеграл в (1.14) проинтегрируем по частям, воспользовавшись теоремой 1.1:

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma} u_0(x)\frac{d}{d\Gamma}(pu'_0)d\Gamma &= -\sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} p(b_i)u'_0(b_i)u_0(b_i) + \\ &+ \int_{\Gamma} p(x)u_0'^2(x)dx = \int_{\Gamma} p(x)u_0'^2(x)dx, \end{aligned} \quad (1.15)$$

так как $u_0(x)|_{\partial\Gamma} = 0$.

Подставляя (1.15) в уравнение (1.14), получим

$$\int_{\Gamma} p(x)u_0'^2(x)dx + \int_{\Gamma} u_0^2(x)\frac{dQ}{d\Gamma}d\Gamma = 0. \quad (1.16)$$

В правой части уравнения (1.16) получаем сумму неотрицательных слагаемых, а значит каждое из них равно нулю, т.е. $\int_{\Gamma} p(x)u_0'^2(x)dx = 0$ и $\int_{\Gamma} u_0^2(x)\frac{dQ}{d\Gamma}d\Gamma = 0$. Откуда следует, что $p(x)u_0'^2(x) = 0$ на графе Γ . Значит, $u_0(x) = C$, где C — константа. И значит в силу граничных условий, получаем, что $u_0(x) \equiv 0$ на графе Γ . Полученное противоречие и доказывает, что математическая модель (1.1) невырождена. \square

Пусть $G(x, s)$ — функция влияния математической модели (1.1).

Определение 1.8. *Функцией влияния математической модели (1.1) будем называть непрерывную по совокупности переменных x, s функцию $G(x, s)$, позволяющую получить решение (1.1) в виде*

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, s)F_{\Gamma}'(x)d\Gamma \quad (1.17)$$

для любой абсолютно непрерывной функции $F(x)$ на графе Γ .

Теорема 1.3. *Пусть математическая модель (1.1) невырождена. Тогда функция влияния $G(x, s)$ модели (1.1) существует и единственна.*

Доказательство. Пусть m — размерность задачи (1.1) в том смысле, что пространство линейно независимых решений однородного уравнения имеет размерность $m = |\partial\Gamma|$, где через $|\partial\Gamma|$ обозначено число условий в граничных вершинах ($l_j(u) = 0$).

Пусть $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = 0$, такая что $l_j(\psi_i) = \delta_{ji}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), где δ_{ji} — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и нулю в противном случае. Такая система существует в силу невырожденности модели (1.1).

Пусть $H(x, s)$ — какое-либо фундаментальное решение уравнения $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = h(x)$. Это значит, что

$$v(x) = \int_{\Gamma} H(x, s)h(s)ds \quad (1.18)$$

есть решение неоднородного уравнения для любой функции $h(x)$, абсолютно-непрерывной непрерывной на Γ .

Остается доказать существование фундаментального решения. Представим его в явном виде. На ребре γ_i графа Γ возьмем, например, функцию вида

$$H_i(x, s) = \frac{1 + \text{sign}(x - s)}{-2p(s)} \cdot \frac{\psi_1(x)\psi_2(s) - \psi_2(x)\psi_1(s)}{\psi_1'(s)\psi_2(s) - \psi_2'(s)\psi_1(s)}.$$

Построим "диагональное" решение $H(x, s)$ на всем $R(\Gamma)$, полагая

$$H(x, s) = \begin{cases} H_i(x, s), & x, s \in \gamma_i \\ 0, & (x, s) \in \gamma_i \times \gamma_j, (i \neq j). \end{cases} \quad (1.19)$$

Использование такого фундаментального решения переносит на функцию влияния свойства скачка ее производной на диагонали " $x = s$ " в $R(\Gamma) \times R(\Gamma)$.

Положим

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(x), \quad (1.20)$$

где C_i — произвольные постоянные; $\{\psi_i(x)\}$ являются фундаментальной системой однородного уравнения, функция $v(x)$ определяется равенством (1.18).

Тогда (1.18) можно записать в виде

$$v(x) = \int_{\Gamma} H(x, s) F_{\Gamma}'(s) d\Gamma.$$

Функция $u(x)$, определяемая равенством (1.20) является решением неоднородного уравнения $-\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u \frac{dQ}{d\Gamma} = \frac{dF}{d\Gamma}$. Подберем константы C_i так, чтобы $u(x)$ удовлетворяла граничным условиям, т.е. $l_j(u) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$), для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$l_j(v) + \sum_{i=1}^m C_i l_j(\psi_i) = 0. \quad (1.21)$$

Последняя сумма имеет единственное решение в силу невырожденности математической модели, более того, в силу выбора системы $\psi_i(x)$ будем иметь $l_j(v) + C_j = 0$, откуда следует $C_j = -l_j(v)$. Таким образом,

$$u(x) = \int_{\Gamma} H(x, s) F_{\Gamma}'(s) d\Gamma - \sum_{i=1}^m \psi_i(x) l_i(v). \quad (1.22)$$

Так как l_j непрерывный функционал на пространстве решений, то интеграл и функционал l_j можно поменять местами:

$$l_i(v) = \int_{\Gamma} l_i(H(\cdot, s)) F'_{\Gamma}(s) d\Gamma, \quad (1.23)$$

где точка означает по какому аргументу применяется функционал.

Равенство (1.23) можно переписать в виде

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left[H(x, s) - \sum_{i=1}^m \psi_i(x) l_i(H(\cdot, s)) \right] F'_{\Gamma}(s) d\Gamma.$$

Тогда равенство

$$G(x, s) = H(x, s) - \sum_{i=1}^m \psi_i(x) l_i(H(\cdot, s)). \quad (1.24)$$

определяет функцию влияния математической модели (1.1). Таким образом, доказано существование функции влияния.

Покажем единственность функции влияния. Предположим противное: существуют две различные функции влияния $G_1(x, s)$ и $G_2(x, s)$. Так как они различны, то найдется такая внутренняя точка (x_0, s_0) ребра γ_i , что $G_2(x_0, s_0) \neq 0$, причем без ограничения общности можно считать, что $G_1(x_0, s_0) - G_2(x_0, s_0) > 0$. Из непрерывности вытекает существование окрестности $U_{\varepsilon}(x_0, s_0)$ точки (x_0, s_0) на ребре γ_i такой, что для всех (x, s) из окрестности справедливо неравенство $G_1(x, s) - G_2(x, s) \geq \eta_0 > 0$ при некоторой η_0 .

В равенство $\int_{\Gamma} [G_1(x_0, s_0) - G_2(x_0, s_0)] F'_{\Gamma}(s) d\Gamma = 0$, которое справедливо для любой абсолютно непрерывной функции $F(x)$ на графе Γ , подставим функцию

$$\widehat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq s_0 - \varepsilon, x, s \in \gamma_i, (x, s) \in \gamma_i \times \gamma_j, \\ \frac{\sigma_i(x) - \sigma_i(s_0 - \varepsilon)}{\sigma_i(s_0 + \varepsilon) - \sigma_i(s_0 - \varepsilon)}, & s_0 - \varepsilon < x \leq s_0 + \varepsilon, x, s \in \gamma_i, x, s \in \gamma_i, \\ 1, & x \geq s_0 + \varepsilon, x, s \in \gamma_i, \end{cases}$$

абсолютная непрерывность которой очевидна, будем иметь

$$0 = \int_{\Gamma} [G_1(x, s) - G_2(x, s)] \widehat{F}'_{\Gamma}(s) d\Gamma = \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} \left[\frac{G_1(x, s) - G_2(x, s)}{\sigma(s_0 + \varepsilon) - \sigma(s_0 - \varepsilon)} \right] d\sigma(s).$$

Тогда $0 = \int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} \left[\frac{G_1(x, s) - G_2(x, s)}{\sigma(s_0 + \varepsilon) - \sigma(s_0 - \varepsilon)} \right] d\Gamma \geq \eta_0 > 0$ для всех $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \in \gamma_i$. Полученное противоречие и доказывает единственность функции влияния. \square

Теперь можно завершить доказательство корректности математической модели (1.1).

Теорема 1.4. Пусть математическая модель (1.1) невырождена. Тогда при малом изменении правой части уравнения $\frac{dF}{d\Gamma}$, решение соответствующей задачи изменяется мало, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $(F_1)'_{\Gamma}(x)$ и $F'_{\Gamma}(x)$ таких, что $|(F_1)'_{\Gamma}(x) - F'_{\Gamma}(x)| < \delta$, выполнено $|u_1(x) - u(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Решение математической модели (1.1) согласно теореме 1.3 можно представить в следующем виде:

$$z(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) F'_{\Gamma}(x) d\Gamma,$$

причем это представление единственно.

Пусть $u(x)$ и $u_1(x)$ - решения рассматриваемой модели (1.1). Оценим их разность:

$$\begin{aligned} |u_1(x) - u(x)| &= \left| \int_{\Gamma} G(x, s) ((F_1)'_{\Gamma}(x) - F'_{\Gamma}(x)) d\Gamma \right| \leq \\ &\leq \int_{\Gamma} |G(x, s)| \cdot |((F_1)'_{\Gamma}(x) - F'_{\Gamma}(x))| d\Gamma \leq \delta \cdot C = \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

где $C = \max_{(x,s)} \int_{\Gamma} |G(x, s)| d\Gamma$.

Таким образом, мы показали, что при малом изменении правой части уравнения решение соответствующей задачи изменяется мало. \square

Глава 2

Математическая модель малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями

К настоящему времени достаточно подробно изучена математическая модель малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями на отрезке (см., напр., [51]), доказана единственность классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями (см. [1]).

На геометрическом графе изучены некоторые начально-краевые задачи (см., напр., [2, 3, 9, 11, 14, 22, 26, 52, 58]), проведены исследования о корректности задач на графе (см. [25]).

В этой главе приводится вариационное обоснование математической модели малых вынужденных колебаний растянутой сетки из струн с локализованными особенностями, доказываются корректность рассматриваемой математической модели на геометрическом графе и возможность применения метода Фурье к рассматриваемой модели.

2.1 Вариационное обоснование математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями

На графе Γ рассмотрим математическую модель малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями:

$$\begin{cases} M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) Q'_\Gamma(x) + f(x, t), \\ u(x, t)|_{\partial \Gamma} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), x \in \Gamma, \\ u'_t(x, 0) = \varphi_1(x), x \in \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x \in \Gamma$, $t > 0$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ определяют начальное отклонение от положения равновесия и начальная скорость системы, помещенной во внешнюю среду, с локализованными особенностями.

Напомним, что $M(x)$ определяет распределение масс на графе Γ , $p(x)$ — силу натяжения в точке x графа Γ , Q'_Γ — распределение упругой реакции внешней среды на графе Γ , $f(x, t)$ — внешнюю силу, приложенную в точке $x \in \Gamma$ в момент времени t .

В рассматриваемой модели через $u(x, t)$ обозначено отклонение точки $x \in \Gamma$ от положения равновесия в момент времени t . Вторая производная по пространственной переменной в правой части уравнения в (2.1) понимается как производная по мере, которая включает в себя все особенности параметров рассматриваемой модели. На ребрах графа задана ориентация.

В математической модели (2.1) будем предполагать, что функции $p(x)$, $Q(x)$ ограниченной на Γ вариации, $\inf_{R(\Gamma)} p(x) > 0$, $f(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных. Пусть, более того, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации.

Решение рассматриваемой модели (2.1) будем искать в классе E — абсолютно-непрерывных функций $u(x, t)$ на множестве $\Gamma \times [0, T]$, производная которых $u'_x(x, t)$ при каждом фиксированном t является σ -абсолютно-непрерывной и при каждом фиксированном x производные

u'_t и u''_{tt} непрерывны на Γ .

Приведем вариационное обоснование математической модели (2.1). Кинетическая энергия рассматриваемой системы выражается формулой:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dM(x).$$

Потенциальную энергию рассматриваемой системы можно записать в виде:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^2(x, t) dQ(x) - \int_{\Gamma} u(x, t) dF.$$

Рассмотрим на множестве E функционал вида

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dM(x) dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} u^2(x, t) dQ(x) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} u(x, t) dF(x, t) dt. \end{aligned}$$

Покажем, что рассматриваемая модель возникает из задачи о минимизации функционала $\Phi(u)$.

Согласно вариационным принципам естествознания реальное состояние системы $u(x, t)$ минимизирует $\Phi(u)$ на множестве всех возможных состояний. Поэтому для любой допустимой функции $h(x, t)$, т.е. принадлежащей множеству E и обращающейся в нуль на границе множества $\Gamma \times [t_0; t_1]$, должно быть выполнено $\inf_{\lambda} \Phi(u + \lambda h) = \Phi(u)$, т.е. скалярная функция $\varphi(\lambda) = \Phi(u + \lambda h)$ минимизируется значением $\lambda = 0$. Так как

эта функция дифференцируема по λ , и

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} u'_t(x, t) h'_t(x, t) dM(x) dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} p u'_x(x, t) h'_x(x, t) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} u(x, t) h(x, t) dQ(x) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} h(x, t) dF(x, t) dt, \end{aligned}$$

то равенство нулю этого выражения при любой допустимой $h(x, t)$ и должно определять истинное значение $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} u'_t h'_t dM(x) dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} p u'_x h'_x dx dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} u h dQ(x) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} h dF dt = 0. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу в левой части (2.2) абстрактную теорему Фубини и интегрируя внутренний интеграл по частям получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} u'_t h'_t dM(x) dt &= \int_{\Gamma} \int_{t_0}^{t_1} u'_t h'_t dt dM(x) = \\ &= \int_{\Gamma} \left[u'_t(x, t) h(x, t) \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h(x, t) u''_{tt}(x, t) dt \right] dM(x) = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} h(x, t) u''_{tt}(x, t) dM(x) dt, \quad (2.3) \end{aligned}$$

так как $h(x, t_0) = h(x, t_1) = 0$. Интегрирование по частям внутреннего интеграла (2.3) законно в силу свойств функций из класса E .

Для интеграла (2.3) справедливо покомпонентное представление:

$$\begin{aligned}
-\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} h(x, t) u''_{tt}(x, t) dM(x) dt &= -\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} h_i(x, t) u''_{itt}(x, t) dM_i(x) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} h_i(a_k, t) u''_{itt}(a_k, t) M_i\{a_k\} \right] dt
\end{aligned}$$

где через $M_i\{a_k\}$ обозначается M -мера во внутренней вершине a_k графа Γ , равная массе, сосредоточенной во внутренней вершине $a_k \in I(\Gamma)$.

Внутренний интеграл в интеграле $\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} p u'_x h'_x dx dt$ также проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} p u'_x(x, t) h'_x(x, t) dx &= \\
&= \left[\sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} p(b_i) u'_x(b_i, t) h(b_i, t) - \int_{\Gamma} h(x, t) (p(x) u'_x(x, t))'_x d\Gamma \right] = \\
&= - \int_{\Gamma} h(x, t) (p(x) u'_x(x, t))'_x d\Gamma \quad (2.4)
\end{aligned}$$

так как $h(b_i, t) = 0$, $b_i \in \partial\Gamma = \{b_j, j = 1, 2, \dots, r\}$. Интегрирование по частям внутреннего интеграла (2.4) законно в силу свойств функций из класса E .

Внутренний интеграл в третьем и четвертом интегралах в левой части (2.2) также имеют покомпонентное представление:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} u(x, t) h(x, t) dQ &= \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} u_i(x, t) h_i(x, t) dQ_i + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} u_i(a_k, t) h_i(a_k, t) Q_i\{a_k\},
\end{aligned}$$

и

$$\int_{\Gamma} h(x, t) dF = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} h_i(x, t) dF_i + \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} h_i(a_k, t) F_i\{a_k\}.$$

Подставляя полученные представления в уравнение (2.2), получаем:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} h_i(x, t) [-M'_\sigma(x)(u_i)''_{tt}(x, t) + \right. \\
& \quad \left. + (p_i(x)(u_i)'_x(x, t))'_\sigma - u_i(x, t)Q'_\sigma + F'_\sigma(x, t)] d\sigma \right] dt + \\
& \quad + \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} h_i(a_k, t) \left[u''_{tt}(a_k, t) M_i\{a_k\} + \right. \\
& \quad \left. + u_i(a_k, t) Q_i\{a_k\} + F_i\{a_k\} \right] (t_1 - t_0) = 0. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Значит на каждом ребре графа Γ верно равенство

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} h_i(x, t) [-M'_\sigma(x)(u_i)''_{tt}(x, t) + \right. \\
& \quad \left. + (p_i(x)(u_i)'_x(x, t))'_\sigma - u_i(x, t)Q'_\sigma + F'_\sigma(x, t)] d\sigma \right] dt = 0,
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu(a_k)} h_i(a_k, t) \left[u''_{tt}(a_k, t) M_i\{a_k\} + \right. \\
& \quad \left. + u_i(a_k, t) Q_i\{a_k\} + F_i\{a_k\} \right] (t_1 - t_0) = 0.
\end{aligned}$$

Покажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть $A(x, t)$ равномерно ограничена на графе Γ ; σ -суммируема на Γ при каждом фиксированном $t \in [t_0; t_1]$; непрерывна по t при всех $x \in \Gamma$; интеграл $\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} A(x, t) h(x, t) d\Gamma dt$ равен нулю для каждой функции $h(x, t)$, принадлежащей классу E . Тогда $A(x, t)$ равна нулю почти всюду на Γ относительно меры $\sigma \times t$.

Доказательство. Рассмотрим ребро графа Γ с номером i . Из условий леммы следует измеримость $A(x, t)$ на ребре γ_i , значит, существует последовательность непрерывных функций $A_n(x, t)$, которая сходится к $A(x, t)$ на ребре γ_i . Применяя теорему Егорова, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти измеримое множество $Q \subset I = \gamma_i \times [t_0; t_1]$ такое,

что $\sigma \times t$ -мера дополнения $(\gamma_i \times [t_0; t_1]) \setminus Q$ меньше $\frac{\varepsilon}{K}$ (K — $\sigma \times t$ -мера $\gamma_i \times [t_0; t_1]$) и $A_n(x, t)$ сходится к $A(x, t)$ равномерно на множестве Q .

Введем следующие обозначения: $dS = \sigma \times t$ и $\mu(\widehat{I})$ — $\sigma \times t$ -мера измеримого множества \widehat{I} .

Докажем справедливость следующей леммы.

Лемма 2.2. Пусть $A_n(x, t)$ непрерывны по совокупности переменных; для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N , что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$\left| \int_I A_n h dS \right| < \frac{\varepsilon}{K}$$

для всякой непрерывной $h(x, t)$, равной нулю на границе I . Тогда для всех $(x, t) \in \gamma_i \times [t_0; t_1]$ справедливо $|A_n(x, t)| < \varepsilon$, как только $n > N$.

Доказательство. Предположим противное: для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $(x^*, t^*) \in \gamma_i \times [t_0; t_1]$ такая, что $|A_n(x^*, t^*)| \geq \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ произвольным образом. Так как $A_n(x, t)$ непрерывна и $|A_n(x^*, t^*)| \geq \varepsilon$, то $A_n(x^*, t^*)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки (x^*, t^*) . Пусть для определенности значение $A_n(x^*, t^*)$ положительно. Тогда, существует $\delta_1 > 0$ такое, что $A_n(x^*, t^*) > \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $(x, t) \in I_1 = [x^* - \delta_1, x^* + \delta_1] \times [t^* - \delta_1, t^* + \delta_1]$. Рассмотрим функцию $h(x, t)$, равную $\frac{2}{K \cdot \mu(\widehat{I})}$ на $\widehat{I} = \left[x^* - \frac{\delta_1}{2}, x^* + \frac{\delta_1}{2} \right] \times \left[t^* - \frac{\delta_1}{2}, t^* + \frac{\delta_1}{2} \right]$ и нулю на дополнении к I_1 , продолженную на $I_1 \setminus \widehat{I}$ непрерывным образом так, чтобы $h(x, t) \geq 0$ на всем I . Тогда для этой функции получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{K} &> \left| \int_I A_n h dS \right| = \left| \int_{I_1} A_n h dS \right| = \int_{I_1} A_n h dS \geq \int_{\widehat{I}} A_n h dS \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{K \cdot \mu(\widehat{I})} \int_{\widehat{I}} 1 \cdot dS = \frac{\varepsilon}{K \cdot \mu(\widehat{I})} \cdot \mu(\widehat{I}) = \frac{\varepsilon}{K}. \end{aligned}$$

Откуда вытекает противоречивое неравенство $\frac{\varepsilon}{K} > \frac{\varepsilon}{K}$. Полученное противоречие и доказывает лемму. \square

Вернемся к доказательству леммы 2.1. Покажем, что абсолютную величину интеграла $\int_I A_n dS$ можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа ε . Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_I A_n h dS \right| &= \left| \int_I (A_n - A) h dS \right| \leq \int_Q |A_n - A| \cdot |h| dS \leq \\ &\leq \int_{I \setminus Q} |A_n - A| \cdot |h| dS \leq \varepsilon \cdot \int_Q |h| dS + 2\bar{K} \int_{I \setminus Q} |h| dS \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot M^* \cdot K + 2\bar{K} \cdot M^* \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

где $M^* = \max_{(x,t)} |h(x,t)|$, $\bar{K} = \max\{\max_{(x,t)} |A_n(x,t)|, \sup_{(x,t)} |A(x,t)|\} < \infty$. Значит, n можно выбрать настолько большим, что

$$\left| \int_I A_n h dS \right| < \frac{\varepsilon}{K}$$

и, воспользовавшись леммой 2.2, получаем, что $|A_n(x,t)| < \varepsilon$ для всех $(x,t) \in I$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим, что $|A(x,t)| < \varepsilon$ для почти всех $(x,t) \in I$. В силу произвольности ε мы получаем $A(x,t) = 0$ почти всюду на ребре γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Так как во внутренних вершинах рассматриваемого графа Γ мера σ имеет атом меры, поэтому $A(a_k, t) = 0$, ($a_k \in I(\Gamma)$). Таким образом, получаем, что $A(x,t)$ равна нулю почти всюду на Γ относительно меры $\sigma \times t$. Лемма доказана.

Таким образом, на основании леммы 2.1 на рассматриваемом графе Γ получим следующее равенство:

$$M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x,t) Q'_\Gamma(x) + f(x,t),$$

дополнив которое граничными условиями

$$u(x,t)|_{\partial \Gamma} = 0$$

и начальными

$$u(x,0) = \varphi_0(x), x \in \Gamma, \quad u'_t(x,0) = \varphi_1(x), x \in \Gamma.$$

получаем математическую модель (2.1).

2.2 Корректность математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями

В этом параграфе докажем корректность рассматриваемой математической модели (2.1) на графе Γ .

Теорема 2.1 Пусть функции $p(x)$, $Q(x)$ абсолютно непрерывны на Γ , $Q'_\Gamma(x) \geq 0$, $M'_\Gamma(x) > 0$, а функция $f(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда математическая модель (2.1) не может иметь более одного решения, определенного на $\Gamma \times [0; T]$, в классе E .

Доказательство. Предположим противное: существуют два различных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, определенных на $\Gamma \times [0; T]$, математической модели (2.1). Через $u(x, t)$ обозначим разность этих решений, т.е. $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Тогда $u(x, t)$ является решением следующей модели

$$\begin{cases} M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) Q'_\Gamma, & x \in \Gamma, t > 0, \\ u(x, t) \Big|_{\partial \Gamma} = u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{T^*} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \left(M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u(x, t) Q'_\Gamma \right) d\Gamma dt, \quad (2.7)$$

где $T^* \in (0, T]$. Так как $u(x, t)$ является решением модели (2.6), то интеграл (2.7) равен нулю. Разобьем его на три интеграла

$$\int_0^{T^*} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\Gamma dt, \quad (2.8)$$

$$- \int_0^{T^*} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Gamma dt, \quad (2.9)$$

$$\int_0^{T^*} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} u(x, t) Q'_\Gamma d\Gamma dt. \quad (2.10)$$

Применяя к интегралу (2.8) абстрактную теорему Фубини (см. [48, С. 127–129]), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} M'_{\Gamma}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\Gamma dt &= \int_{\Gamma} \int_0^{T^*} u'_t(x, t) d(u'_t) dM = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left((u'_t(x, T^*))^2 - (u'_t(x, 0))^2 \right) dM = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u'_t(x, T^*))^2 dM, \end{aligned}$$

так как $u'_t(x, 0) = 0$.

Интегрируя внутренний интеграл в (2.9) по частям, получим:

$$\begin{aligned} - \int_0^{T^*} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Gamma \right) dt &= \\ &= - \int_0^{T^*} \left(\sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} (u_i)'_t(b_i, t) p_i(b_i) (u_i)'_x(b_i, t) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma} p(x) u'_x(x, t) d_x(u'_t(x, t)) \right) dt = \int_0^{T^*} \int_{\Gamma} p(x) u'_x d_x(u'_t(x, t)) dt. \end{aligned}$$

так как $u'_x(x, t) \Big|_{\partial\Gamma} = 0$ в силу краевых условий.

Покажем на графе Γ справедливость следующего равенства

$$\int_0^{T^*} \int_{\Gamma} p(x) u'_x(x, t) d_x(u'_t(x, t)) dt = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) (u'_x(x, T^*))^2 dx, \quad (2.11)$$

если $u(x, t)$ принадлежит E .

Заметим, что:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T^*} \int_{\Gamma} p(x) u'_x(x, t) d_x(u'_t(x, t)) dt = \\
& = \int_0^{T^*} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} p_i(x) (u_i)'_x(x, t) d_x((u_i)'_t(x, t)) \right] dt = \\
& = \int_0^{T^*} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} p_i(x) (u_i)'_x(x, t) d_x \left((u_i)'_t(x, t) - \int_0^x (u_i)''_{xt}(s, t) ds \right) \right] dt + \\
& + \int_0^{T^*} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} p_i(x) (u_i)'_x(x, t) d_x \left(\int_0^x (u_i)''_{xt}(s, t) ds \right) \right] dt. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Покажем, что функция $(u_i)'_t(x, t) - \int_0^x (u_i)''_{xt}(s, t) ds$ на ребре γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) графа Γ не зависит от x , что будет означать равенство нулю первого слагаемого в правой части равенства (2.12). Введем следующее обозначение:

$$w_i(x, t) = (u_i)'_t(x, t) - \int_0^x (u_i)''_{xt}(s, t) ds.$$

Интегрируя функцию $w_i(x, t)$ по переменной t в пределах от 0 до некоторого $t_0 \leq T^*$ и применяя абстрактную теорему Фубини, получим:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_0} w_i(x, \tau) d\tau &= u_i(x, t_0) - u_i(x, 0) - \int_0^{t_0} \int_0^x (u_i)''_{xt}(s, \tau) ds d\tau = \\
&= u_i(0, t_0) - u_i(0, 0).
\end{aligned}$$

Откуда следует, что $w_i(x, t_0) = (u_i)'_t(0, t_0)$. Это означает, что $w_i(x, t)$ не зависит от x . Таким образом, доказали, что первое слагаемое в правой части равенства (2.12) равно нулю.

Заметим, что во втором слагаемом (2.12) для выражения, стоящего в

квадратных скобках, справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} p_i(x) (u_i)'_x(x, t) dx \left(\int_0^x (u_i)''_{xt}(s, t) ds \right) &= \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} p_i(x) (u_i)'_x(x, t) (u_i)''_{xt}(x, t) dx = \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \frac{1}{2} p_i(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(((u_i)'_x)^2 \right) dx, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись представлением (2.13) и применив абстрактную теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^{T^*} \left(\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \frac{1}{2} p_i(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(((u_i)'_x)^2 \right) dx \right) dt &= \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} p_i(x) \left(((u_i)'_x(x, T^*))^2 - ((u_i)'_x(x, 0))^2 \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} p_i(x) ((u_i)'_x(x, T^*))^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) ((u'_x(x, T^*))^2) dx dt,
\end{aligned}$$

так как $(u_i)'_x(x, 0) = 0$. Таким образом, равенство (2.11) доказано.

Применяя к интегралу (2.10) абстрактную теорему Фубини, получим:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T^*} \int_{\Gamma} u'_t(x, t) u(x, t) Q'_\Gamma d\Gamma dt &= \int_{\Gamma} \int_0^{T^*} u(x, t) d_t(u(x, t)) dQ = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} ((u^2(x, T^*) - u^2(x, 0))) dQ = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^2(x, T^*) dQ,
\end{aligned}$$

так как $u(x, 0) = 0$.

Таким образом, с учетом всех преобразований получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \left(M'_{\Gamma}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u(x, t) Q'_{\Gamma} \right) d\Gamma dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, T^*) \right)^2 dM + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, T^*) \right)^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^2(x, T^*) dQ. \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства получаем сумму неотрицательных слагаемых, значит, каждое из них равно нулю. Из равенства $\int_{\Gamma} p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, T^*) \right)^2 dx = 0$ следует, что $\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, T^*) \right)^2 = 0$ на графе Γ , а так как $u(x, T^*)$ абсолютно непрерывна, то $u(x, T^*)$ есть константа на графе Γ . С учетом граничных условий получаем тождество $u(x, T^*) \equiv 0$ на графе Γ . Последнее противоречит нашему предположению. Теорема доказана. \square

Пусть $G(x, s)$ — функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u(x, t) Q'_{\Gamma}(x) = \frac{dF}{d\Gamma}, \\ u(x, t)|_{\partial \Gamma} = 0, \end{cases}$$

существование и единственность которой доказаны в работе [41]. Тогда разрешимость математической модели (2.1) эквивалентна разрешимости системы

$$\begin{cases} -\int_{\Gamma} G(x, s) \left[M'_{\Gamma}(s) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(s, t) \right] d\Gamma = u(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ u'_t(x, 0) = \varphi_1(x). \end{cases}$$

Интегрируя дважды по переменной t в пределах от 0 до t получаем, что разрешимость последней системы эквивалентна разрешимости в E уравнения Фредгольма первого рода $(Au)(x, t) = z(x, t)$, где

$$(Au)(x, t) = \int_{\Gamma} G(x, s) u(s, t) dM(s) + \int_0^t (t - \tau) u(x, \tau) d\tau$$

и

$$z(x, t) = \int_{\Gamma} G(x, s) \left[\varphi_0(s) + t\varphi_1(s) + \int_0^t (t - \tau)f(s, \tau)d\tau \right] d\Gamma.$$

Заметим, что функция $z(x, t)$ принадлежит AE , что означает, $(Au)(x, t) = z(x, t)$ разрешимо в E .

Теперь покажем, что при малом изменении начальных условий $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ соответствующее решение рассматриваемой математической модели (2.1) изменяется мало.

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — решения математической модели (2.1) при начальных данных $\varphi_0^{(1)}(x)$, $\varphi_1^{(1)}(x)$, $\varphi_0^{(2)}(x)$ и $\varphi_1^{(2)}(x)$ соответственно, т.е. решения следующих математических моделей

$$\begin{cases} M'_{\Gamma}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t)Q'_{\Gamma} + f(x, t), x \in \Gamma, t > 0, \\ u(x, t) \Big|_{\partial \Gamma} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi_0^{(i)}(x), x \in \Gamma, \\ u'_t(x, 0) = \varphi_1^{(i)}(x), x \in \Gamma, \end{cases} \quad (2.14)$$

($i = 1, 2$). Через $u(x, t)$ обозначим разность этих решений, т.е. $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, через $\widehat{\varphi}_0(x)$ и $\widehat{\varphi}_1(x)$ разности $\widehat{\varphi}_0(x) = \varphi_0^{(1)}(x) - \varphi_0^{(2)}(x)$ и $\widehat{\varphi}_1(x) = \varphi_1^{(1)}(x) - \varphi_1^{(2)}(x)$ соответственно.

Также как и при доказательстве единственности решения рассматриваемой математической модели, для функции $u(x, t)$ рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{T^*} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \left(M'_{\Gamma}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u(x, t)Q'_{\Gamma} \right) d\Gamma dt. \quad (2.15)$$

Так как $u(x, t)$ является решением математической модели (2.14), то интеграл (2.15) равен нулю. Разбивая этот интеграл на три, интегрируя второй интеграл по частям, и применяя те же рассуждения, что и при

доказательстве теоремы 2.1, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T^*} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \left(M'_{\Gamma}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u(x, t) Q'_{\Gamma} \right) d\Gamma dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[(u'_t(x, T^*))^2 - (u'_t(x, 0))^2 \right] dM - \int_0^{T^*} \int_{\Gamma} p(x) u'_x(x, t) dx (u'_t(x, t)) dt + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u^2(x, T^*) - u^2(x, 0)) dQ = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u'_t(x, T^*))^2 dM - \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}_1^2(x) dM + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) (u'_x(x, T^*))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) \widehat{\varphi}_0^2(x) dx + \\
& \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^2(x, T^*) dQ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}_0^2(x) dQ(x),
\end{aligned}$$

так как $u(x, 0) = \widehat{\varphi}_0(x)$, $u'_x(x, 0) = (\widehat{\varphi}_0)'_x(x)$, $u'_t(x, 0) = \widehat{\varphi}_1(x)$, $u'_x(0, t) = 0$ и $u'_x(x, t) \Big|_{\partial\Gamma} = 0$ в силу граничных условий. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u'_t(x, T^*))^2 dM + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) (u'_x(x, T^*))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^2(x, T^*) dQ = \\
& \quad = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}_1^2(x) dM + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) \widehat{\varphi}_0^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}_0^2(x) dQ(x). \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Вспоминая условия, что правая часть мала, получаем, что левая часть равенства тоже мала. Обозначая через ε правую часть равенства (2.16), найдем, что для всякого $T^* \in [0, T]$ и каждого $x \in \gamma_i$ графа Γ будем иметь

$$\int_0^x ((u_i)'_t(s, T^*))^2 dM_i(s) \leq \varepsilon \quad (2.17)$$

и

$$\int_0^x p_i(x) ((u_i)'_x(s, T^*))^2 ds \leq \varepsilon,$$

($i = 1, 2, \dots, N$).

Покажем, что для всех x ребра γ_i , соединяющего вершины a_k и a_{k+1} , и $T^* \in [0; T]$ величина $|u_i(x, T^*)|$ мала, если малы ε и величина $\max_{x \in \gamma_i} |\widehat{\varphi}_0(x)|$.

Имеем

$$|u_i(x, T^*)| \leq |u_i(x, T^*) - u_i(0, T^*)| + |u_i(0, T^*)|. \quad (2.18)$$

Для первого слагаемого в правой части неравенства (2.18) имеем

$$|u_i(x, T^*) - u_i(0, T^*)| = \left| \int_0^x (u_i)'_x(s, T^*) ds \right| \leq \int_0^x |(u_i)'_x(s, T^*)| ds.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |u_i(x, T^*) - u_i(0, T^*)| &\leq \left(\int_0^x 1^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^x ((u_i)'_x(s, T^*))^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{l_i} \left(\int_{\gamma_i} p_i(s) ((u_i)'_x(s, T^*))^2 \frac{ds}{p_i(s)} \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где через l_i обозначили длину ребра γ_i графа Γ , $c_0 = \min_{\gamma_i} p_i(x) > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Таким образом, для первого слагаемого получаем оценку

$$|u_i(x, T^*) - u_i(0, T^*)| \leq \sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.19)$$

Интеграл по ребру $\gamma_i \int_{\gamma_i} |u_i(x, T^*) - u_i(0, T^*)| dM_i(x)$, в силу неравенства (2.19), допускает оценку

$$\int_{\gamma_i} |u_i(x, T^*) - u_i(0, T^*)| dM_i(x) \leq \sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|}.$$

Отсюда, после несложных преобразований, найдем

$$\begin{aligned} |u(0, T^*)| (M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)) &\leq \\ &\leq \sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|} + \int_{\gamma_i} |u(x, T^*)| dM_i(x) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|} + \int_{\Gamma} |u_i(x, T^*) - u_i(x, 0)| dM_i(x) + \\ &\quad + \int_{\gamma_i} |\widehat{\varphi}_0(x)| dM_i(x). \quad (2.20) \end{aligned}$$

Для интеграла $\int_{\Gamma} |u_i(x, T^*) - u_i(x, 0)| dM_i(x)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} |u_i(x, T^*) - u_i(x, 0)| dM_i(x) &= \int_{\gamma_i} \left| \int_0^{T^*} (u_i)'_t(x, t) dt \right| dM_i(x) \leq \\ &\leq \int_{\gamma_i} \int_0^{T^*} |(u_i)'_t(x, t)| dt dM_i(x), \end{aligned}$$

или, после применения теоремы Фубини и неравенства Коши-Буняковского,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} |u(x, T^*) - u(x, 0)| dM_i(x) &\leq \int_0^{T^*} \int_{\gamma_i} |u'_t(x, t)| dM_i(x) dt \leq \\ &\leq \int_0^{T^*} \left[\left(\int_{\gamma_i} 1^2 dM_i(x) \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\gamma_i} |(u'_t(x, t))^2 dM_i(x) \right)^{1/2} \right] dt \leq \\ &\leq \sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot T^* \leq \sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot T. \end{aligned}$$

Теперь, неравенство (2.20) принимает вид

$$\begin{aligned} |u_i(0, T^*)| \cdot |M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)| &\leq \sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon} \cdot |M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)| + \\ &+ \sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot T + \max_{\gamma_i} |\widehat{\varphi}_0(x)| \cdot |M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$|u_i(x, T^*)| \leq \sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon} + \frac{T}{\sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|}} \sqrt{\varepsilon} + \max_{\gamma_i} |\widehat{\varphi}_0(x)|. \quad (2.21)$$

Таким образом, (2.18) с учетом (2.19) и (2.21), допускает перезапись

$$|u_i(x, T^*)| \leq 2\sqrt{\frac{l_i}{c_0}} \sqrt{\varepsilon} + \frac{T}{\sqrt{|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|}} \sqrt{\varepsilon} + \max_{\gamma_i} |\widehat{\varphi}_0(x)|.$$

Таким образом, показали, что величина $|u_i(x, T^*)|$ на ребре γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) мала. В силу конечности графа Γ , получаем, что $|u(x, T^*)|$ мала на графе Γ .

Таким образом, доказана корректность математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями.

2.3 Применение метода Фурье к математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями

В настоящее время на геометрическом графе изучены обоснования метода Фурье для некоторых классов систем на геометрическом графе. Здесь можно отметить работы следующих авторов: Диаба А.Т. (см. [16]), Завгороднего М.Г. (см. [17–19]), Кулаева Р.Ч. (см. [24]), Мартыновой Ю.В. (см. [35]). В работах [28–33] начато исследование вопросов, связанных с обоснованием применимости метода Фурье для математической модели колебаний сетки из струн.

2.3.1 О разложении функций из E в ряд Фурье по собственным функциям

Рассмотрим задачу разделения переменных для математической модели (2.1). Решения уравнения

$$M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} (pu'(x, t)) - u(x, t)Q'_\Gamma(x), \quad (2.22)$$

будем искать в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$, причем потребуем от этих решений, чтобы они удовлетворяли граничным условиям.

Если решение $u(x, t) = X(x)T(t)$ существует, то, подставляя его в (2.22), получаем уравнение, которому должны удовлетворять функции $X(x)$ и $T(t)$:

$$M'_\Gamma(x)X(x)T''(t) = \frac{d}{d\Gamma} (pX')(x)T(t) - X(x)T(t)Q'_\Gamma(x). \quad (2.23)$$

Введем в рассмотрение множество $A = \{t \geq 0 : T(t) = 0\}$. Так как $A \cap [0, T^*]$ — конечно, то найдется точка t_1 такая, что $T(t_1) \neq 0$ на $[0, T^*]$. Разделив уравнение (2.23) на величину $T(t_1)$, получим равенство:

$$-\frac{d}{d\Gamma} (pX')(x) + X(x) \left(\frac{T''(t)}{T(t_1)} M'_\Gamma(x) + Q'_\Gamma(x) \right) = 0.$$

Также на графе Γ найдется точка x_1 такая, что $X(x_1) \neq 0$. Тогда

$$\frac{T''(t)}{T(t_1)} = \left(\frac{d}{d\Gamma} (pX')(x_1) - Q'_\Gamma(x_1)X(x_1) \right) \frac{1}{M'_\Gamma(x_1)X(x_1)}. \quad (2.24)$$

Равенство (2.24) показывает, что на множестве $[0, +\infty] \setminus A$ справедливо отношение $\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$, т.е. $T''(t) + \lambda T(t) = 0$.

Из курса дифференциальных уравнений известно, что решение уравнения $T_k''(t) + \lambda_k T_k(t) = 0$ имеет вид $T_k(t) = A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + B_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t)$.

Преобразуя уравнение (2.24), получаем

$$-\lambda M'_\Gamma(x)X(x) = \frac{d}{d\Gamma}(pX')(x) - Q'_\Gamma(x)X(x).$$

Таким образом возникает спектральная задача для графа Γ :

$$\begin{cases} LX = -\frac{d}{d\Gamma}(pX')(x) + q(x)X(x) = \lambda mX; \\ X|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

где λ - спектральный параметр.

В этом параграфе дополнительно потребуем общность положения спектральной задачи (2.25) в соответствии с определением из монографии [44, стр. 96–98], что позволяет гарантировать простоту каждого собственного значения рассматриваемой задачи. Также в работах [39, 44] доказано, что если Γ является деревом и L не осциллирует на Γ , выполняется условие общности положения, то спектр задачи $Lu = -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda ru$, $u|_{\partial\Gamma} = 0$ состоит из неограниченной последовательности вещественных и строго положительных простых собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. При этом соответствующая λ_k собственная функция $\varphi_k(x)$ имеет в Γ точно k нулей, в каждом из которых она меняет знак, и $(k+1)$ S -зон, в каждой из которых функции $\varphi_k(x)$ содержится ровно один нуль функции $\varphi_{k+1}(x)$.

Также отметим, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема 2.2. *Собственные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ортогональны в смысле скалярного произведения, т.е.*

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} \varphi(x)\psi(x)dM(x) = 0.$$

Доказательство. Так как $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - собственные функции, то выполнено

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\Gamma}(p\varphi')(x) + \varphi(x)Q'_\Gamma(x) &\equiv \lambda_1\varphi M'_\Gamma, \\ -\frac{d}{d\Gamma}(p\psi')(x) + \psi(x)Q'_\Gamma(x) &\equiv \lambda_2\psi M'_\Gamma. \end{aligned}$$

Умножая первое тождество на $\psi(x)$ и интегрируя по Γ , будем иметь

$$-\int_\Gamma \frac{d}{d\Gamma}(p\varphi')(x)\psi(x)d\Gamma + \int_\Gamma \varphi(x)\psi(x)Q'_\Gamma d\Gamma = \int_\Gamma \lambda_1\varphi\psi M'_\Gamma d\Gamma,$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} p_i(b_i)\varphi'(b_i)\psi(b_i) + \int_\Gamma p\varphi'(x)\psi'(x)dx + \int_\Gamma \varphi(x)\psi(x)Q'_\Gamma d\Gamma = \\ = \int_\Gamma \lambda_1\varphi\psi M'_\Gamma d\Gamma. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} p_i(b_i)\varphi'(b_i)\psi(b_i) + \int_\Gamma p\varphi'(x)\psi'(x)dx + \int_\Gamma \varphi(x)\psi(x)Q'_\Gamma d\Gamma = \\ = \int_\Gamma \lambda_2\varphi\psi M'_\sigma d\Gamma. \end{aligned}$$

Значит,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_\Gamma \varphi(x)\psi(x)M'_\Gamma(x)d\Gamma = 0,$$

откуда следует, что

$$\int_\Gamma \varphi(x)\psi(x)M'_\Gamma(x)d\Gamma = 0.$$

Теорема доказана. \square

Теперь вернемся к разложению функций из E в ряд Фурье по собственным функциям. Сначала покажем, что для всякой абсолютно непрерывной на графе Γ функции $f(x)$, производная которой имеет конечное изменение на Γ и принимает нулевые значения в граничных точ-

ках Γ , ряд Фурье по собственным функциям сходится равномерно и абсолютно на Γ . Тогда коэффициенты ряда Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, построенного для функции $f(x)$ на Γ , определяются по формулам

$$c_n = \int_{\Gamma} f(x) \varphi_n(x) M'_{\Gamma}(x) d\Gamma. \quad (2.26)$$

Докажем, что ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, где c_n определяются по формулам (2.26), сходится к $f(x)$ в среднем на Γ , т.е.

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) f_H^2 d\Gamma = 0,$$

где $f_H(x) = f(x) - \sum_{n=1}^H c_n \varphi_n(x)$.

Рассмотрим функционал $\Phi(X) = \int_{\Gamma} p X'^2 dx + \int_{\Gamma} X^2 dQ(x)$ на множестве абсолютно непрерывных на Γ функций $X(x)$, производная которых имеет конечную на Γ вариацию и $X(x)|_{\partial\Gamma} = 0$.

Заметим, что функции $f_H(x)$ принадлежат множеству E при всех H . Для дальнейшего удобства введем следующие обозначения

$$\Delta_H^2 = \int_{\Gamma} f_H^2(x) dM(x), \quad \psi_H(x) = \frac{f_H(x)}{\Delta_H}.$$

После несложных преобразований, для функции $\Phi(\psi_H)$ имеем:

$$\begin{aligned}
\Phi(\psi_H) &= \int_{\Gamma} p(x)\psi_H'^2(x)dx + \int_{\Gamma} \psi_H^2(x)Q_{\Gamma}'(x)d\Gamma = \\
&= \frac{1}{\Delta_H^2} \left[\int_{\Gamma} p(x) \left(f'(x) - \sum_{k=1}^H c_k \varphi_k'(x) \right)^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Gamma} \left(f(x) - \sum_{k=1}^H c_k \varphi_k(x) \right)^2 Q_{\Gamma}'(x) d\Gamma \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta_H^2} \left[\int_{\Gamma} p(x) f'^2(x) dx + \int_{\Gamma} f^2(x) Q_{\Gamma}'(x) d\Gamma - \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^H c_k \left(\int_{\Gamma} p(x) f'(x) \varphi_k'(x) dx + \int_{\Gamma} f(x) \varphi_k(x) Q_{\Gamma}' d\Gamma \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^H \sum_{m=1}^H c_k c_m \left(\int_{\Gamma} p(x) \varphi_k'(x) \varphi_m'(x) dx + \int_{\Gamma} \varphi_k(x) \varphi_m(x) Q_{\Gamma}' d\Gamma \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta_H^2} \left[\Phi(f) - \sum_{k=1}^H \lambda_k c_k^2 \right].
\end{aligned}$$

На графе Γ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} p(x) f'(x) \varphi_k'(x) dx + \int_{\Gamma} f(x) \varphi_k(x) Q_{\Gamma}'(x) d\Gamma &= \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} p(b_i) \varphi_k'(b_i) f(b_i) - \int_{\Gamma} f(x) (p(x) \varphi_k'(x))'_x d\Gamma + \\
&+ \int_{\Gamma} f(x) \varphi_k(x) Q_{\Gamma}' d\Gamma = \int_{\Gamma} f(x) [-(p(x) \varphi_k'(x))'_x + \varphi_k(x) Q_{\Gamma}'(x)] d\Gamma = \\
&= \int_{\Gamma} f(x) \lambda_k M_{\Gamma}'(x) \varphi_k(x) d\Gamma = \lambda_k c_k,
\end{aligned}$$

ввиду того, что $f|_{\partial\Gamma} = 0$.

Также заметим, что для собственных функций $\varphi_k(x)$ справедливо:

$$\int_{\Gamma} p(x)\varphi'_k(x)\varphi'_m(x)dx + \int_{\Gamma} \varphi_k(x)\varphi_m(x)dQ(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ \lambda_k, & \text{если } k = m. \end{cases}$$

Таким образом, для функции $\Phi(\psi_H)$ получаем следующее представление:

$$\Phi(\psi_H) = \frac{1}{\Delta_H^2} \left[\Phi(f) - \sum_{k=1}^H \lambda_k c_k^2 \right].$$

Покажем, что на Γ выполнено $\Phi(\psi_n) \geq \lambda_{n+1}$, где λ_{n+1} — $(n+1)$ -ое собственное значение задачи (2.25) на Γ . Доказательство разобьем на 4 этапа.

1. Рассмотрим задачу о нахождении минимума функционала $\Phi(X)$ при условии

$$\int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)X^2(x)d\Gamma = 1$$

на множестве E абсолютно непрерывных на графе Γ функций, первая производная которых имеет конечное на Γ изменение и обращающихся в нуль в граничных точках графа Γ . Таким образом, эта функция должна удовлетворять следующему уравнению при некотором λ для функционала

$$\Phi_0(X) = \int_{\Gamma} p(x)X'^2(x)dx + \int_{\Gamma} X^2(x)Q'_\Gamma(x)d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)X^2(x)d\Gamma$$

Оно совпадает с уравнением $-(pX')'_\Gamma + XQ'_\Gamma = \lambda M'_\Gamma(x)X$, граничные условия которого совпадают с граничными условиями задачи (2.4.4). Значит функция $\varphi_1(x)$, дающая минимум $\Phi(X)$ при условии $\int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)X^2(x)d\Gamma = 1$, является собственной функцией спектральной задачи (2.25).

Найдем значение функционала $\Phi(\varphi_1)$:

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_1) &= \int_{\Gamma} p(x)\varphi_1'^2(x)dx + \int_{\Gamma} \varphi_1^2(x)Q_{\Gamma}'(x)d\Gamma = \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} p(b_i)\varphi_1'(b_i)\varphi_1(b_i) + \\ &+ \int_{\Gamma} \left[-(p(x)\varphi_1'(x))'_x + \varphi_1(x)Q_{\Gamma}'(x) \right] \varphi_1(x)d\Gamma = \\ &= \lambda \int_{\Gamma} M_{\Gamma}'(x)\varphi_1^2(x)d\Gamma = \lambda.\end{aligned}$$

Заметим, что λ является наименьшим собственным значением. Обозначим его через λ_1 . Поэтому, $\Phi(X) \geq \lambda_1$, причем знак равенства возможен только на $\varphi_1(x)$.

2. Докажем, что функция $X(x)$, дающая минимум функционалу $\Phi(X)$ в классе E , удовлетворяющих условиям

$$\int_{\Gamma} M_{\Gamma}'(x)X^2(x)d\Gamma = 1, \quad (2.27)$$

$$\int_{\Gamma} M_{\Gamma}'\varphi_1(x)X(x)d\Gamma = 0, \quad (2.28)$$

является амплитудной функцией, отвечающей второй собственной частоте $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$.

Функция $X(x)$, дающая на E минимум $\Phi(X)$ при условиях (2.27) и (2.28), должна удовлетворять следующему уравнению при некоторых λ и κ для функционала

$$\begin{aligned}\Phi_1(X) &= \int_{\Gamma} p(x)X'^2(x)dx + \int_{\Gamma} X^2(x)Q_{\Gamma}'(x)d\Gamma - \\ &- \lambda \int_{\Gamma} M_{\Gamma}'(x)X^2(x)d\Gamma - \kappa \int_{\Gamma} M_{\Gamma}'(x)\varphi_1(x)X(x)d\Gamma.\end{aligned}$$

Заметим, что это уравнение принимает вид

$$-(pX')'_{\Gamma} + XQ'_{\Gamma} - \lambda M'_{\Gamma}(x)X - \frac{1}{2}\kappa M'_{\Gamma}(x)\varphi_1(x) = 0. \quad (2.29)$$

Покажем, что в уравнении (2.29) величина $\kappa = 0$, тогда уравнение принимает вид $-(pX')'_\Gamma + XQ'_\Gamma - \lambda M'_\Gamma(x)X = 0$.

Для этого умножим тождество $-(p\varphi'_1)'_\Gamma + \varphi_1 Q'_\Gamma - \lambda M'_\Gamma(x)\varphi_1 \equiv 0$ на $X(x)$, а (2.29) - на $\varphi_1(x)$. Вычитая почленно одно из другого и интегрируя по Γ , получаем:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} (p(x)X'(x))'_\Gamma \varphi_1(x) d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)X(x)\varphi_1(x) d\Gamma - \\ & \quad - \frac{\kappa}{2} \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)\varphi_1^2(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} (p(x)\varphi'_1(x))'_\Gamma X(x) d\Gamma + \\ & \quad \quad \quad + \lambda \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)\varphi_1(x)X(x) d\Gamma = 0, \end{aligned}$$

или, с учетом (2.28),

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} (p(x)X'(x))'_\Gamma \varphi_1(x) d\Gamma - \frac{\kappa}{2} \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)\varphi_1^2(x) d\Gamma + \\ & \quad \quad \quad + \int_{\Gamma} (p(x)\varphi'_1(x))'_\Gamma X(x) d\Gamma = 0, \quad (2.30) \end{aligned}$$

Интегрируя первый и последний интегралы в левой части последнего уравнения по частям и, вспоминая, что $X(x) \in E$, $\varphi_1(x) \in E$, имеем

$$-\frac{\kappa}{2} \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x)\varphi_1^2(x) d\Gamma = 0,$$

из которого и следует требуемое: $\kappa = 0$.

Таким образом, получаем, что $X(x)$ является собственной функцией. Обозначим ее через $\varphi_2(x)$.

Так как от увеличения числа условий на допустимые функции минимум $\Phi(X)$ может только увеличиться и $\Phi(\varphi_2) = \lambda_2$, то $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Заметим, что $\lambda_2 \neq \lambda_1$, т.к. при $\lambda_2 = \lambda_1$ функция $\varphi_2(x)$ была бы коллинеарна $\varphi_1(x)$, что противоречит условию (2.28). Значит, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Покажем, что между λ_1 и λ_2 нет других собственных значений. Предположим противное: между λ_1 и λ_2 существует собственное значение λ^* .

Но тогда собственная функция $\varphi^*(x)$, отвечающая λ^* , давала бы минимум $\Phi(X)$ при условиях (2.27) и (2.28), т.е. была бы решением поставленной задачи, что невозможно.

3. Рассмотрим задачу минимизации $\Phi(X)$ на E при следующих условиях

$$\int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x)X^2(x)d\Gamma = 1,$$

$$\int_{\Gamma} M'_{\Gamma}\varphi_i(x)X(x)d\Gamma = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.31)$$

где $\varphi_i(x)$ - i -ая собственная функция.

Функция $X(x)$, дающая на E минимум $\Phi(X)$ при условиях (2.27) и (2.31), должна удовлетворять следующему уравнению при некоторых λ и κ_i для функционала

$$\Phi_n(X) = \Phi(X) - \lambda \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x)X^2(x)d\Gamma - \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x)\varphi_i(x)X(x)d\Gamma,$$

которое принимает вид

$$-(pX')'_{\Gamma} + XQ'_{\Gamma} - \lambda M'_{\Gamma}(x)X - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i M'_{\Gamma}(x)\varphi_i(x) = 0. \quad (2.32)$$

Покажем, что в уравнении (2.32) величина $\kappa_j = 0$. Для этого тождество (2.32) умножим на $\varphi_j(x)$, а тождество

$$-(p\varphi'_j)'_{\Gamma} + \varphi_j Q'_{\Gamma} - \lambda_j M'_{\Gamma}(x)\varphi_j \equiv 0$$

на $X(x)$, вычитая почленно одно из другого, и результат интегрируя по Γ :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} (p(x)X'(x))'_{\Gamma}\varphi_j(x)d\Gamma - \lambda_j \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x)X(x)\varphi_j(x)d\Gamma - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x)\varphi_j(x)d\Gamma + \int_{\Gamma} (p(x)\varphi'_j(x))'_{\Gamma}X(x)d\Gamma + \\ & + \lambda_j \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x)\varphi_j(x)X(x)d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя интегралы

$$\int_{\Gamma} (p(x)X'(x))'_{\Gamma} \varphi_j(x) d\Gamma, \int_{\Gamma} (p(x)\varphi'_j(x))'_{\Gamma} X(x) d\Gamma$$

по частям, используя равенство

$$\int_{\Gamma} M'_{\Gamma} \varphi_i(x) \varphi_j(x) d\Gamma = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ \lambda_i, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

и условие (2.31) будем иметь

$$\frac{\kappa_j}{2} \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) \varphi_j^2(x) d\Gamma = 0.$$

Из последнего равенства и следует, что $\kappa_j = 0$ (для любого $j = 1, 2, \dots, n-1$).

Таким образом, $X(x)$ есть n -ая амплитудная функция, причем $\lambda_{n-1} > \lambda_n$ и между λ_n и λ_{n-1} нет собственных значений.

4. Теперь остается заметить, что для всякой допустимой функции, удовлетворяющей условиям (2.27) и (2.31), значение функционала $\Phi(X)$ не меньше λ_n .

Таким образом, неравенство $\Phi(\psi) \geq \lambda_{N+1}$ доказано. Из него вытекает

$$\Delta_H^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left(\Phi(f) - \sum_{k=1}^H \lambda_k c_k^2 \right). \quad (2.33)$$

Так как $\lambda_k > 0$ для всех k , то выражение $\Phi(f) - \sum_{k=1}^H \lambda_k c_k^2$ ограничено при всех N . Из того, что $\lambda_{n+1} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ и следует $\Delta_H^2 \rightarrow 0$.

Таким образом, ряд Фурье по собственным функциям сходится к $f(x)$ в среднем.

Теперь остается показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (2.34)$$

сходится равномерно и абсолютно, так как в этом случае сходиться он может только к $f(x)$. Применим критерий Коши для доказательства равномерной сходимости функционального ряда (2.34).

Для суммы $\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)|$ при некоторых n, m последовательно находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| &= \sum_{k=n}^{n+m} |c_k \sqrt{\lambda_k}| \cdot \left| \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \lambda_k \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Так как числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k$ сходится и обозначая $K = \max |\varphi_k(x)|$, последняя оценка принимает вид

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \right)^{\frac{1}{2}} K \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_1 \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $K_1 = \sqrt{\Phi(f)}K$.

В [13, стр. 369] для случая $Q(x) \equiv const$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n^*}} = \frac{1}{\Pi} \int_{\gamma_i} \sqrt{M'_x(x)} dx$, где $M'_x(x)$ — производная Лебега и λ_n^* — собственное значение спектральной задачи на графе Γ

$$\begin{cases} -pu'_x(x) = -pu'_x(0) + \lambda \int_0^x udM, \\ u|_{\partial\gamma_i} = 0. \end{cases}$$

Из этого равенства следует, что при некоторых константах C_1 и C_2 справедливо неравенство $C_1 n^2 + C_2 \leq \lambda_n^*$.

Таким образом, $C_1 n^2 + C_2 < \lambda_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ мажорируется сходящимся рядом. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N^* , что для всех $n \geq N^*$ и m верно

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} < \frac{\varepsilon}{K_1}.$$

Таким образом, доказали равномерную и абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$.

2.3.2 О некоторых свойствах собственных функций

Лемма 2.3. Пусть $\varphi_k(x)$ - k -ая амплитудная функция спектральной задачи (2.25) и $\int_{\Gamma} \varphi_k^2(x) M'_{\Gamma}(x) d\Gamma = 1$ для всех k . Тогда существует константа $C^* > 0$ такая, что для всех $x \in \Gamma$ и натуральных k справедливо $|\varphi_k(x)| \leq C^*$, $x \in \Gamma$.

Доказательство. Предположим противное: для всякого $C^* = n$ существуют x' и k такие, что $|\varphi_k(x')| > n$. Без ограничения общности можно считать $\varphi_k(x') > 0$.

Так как $\varphi_k(x)$ непрерывна на Γ и $\varphi_k(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то существует подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$, содержащий точку x' , и для всех $x \in \Gamma_0$ $\varphi_k(x) \geq n - 1$. Пусть Γ_1 - максимальный граф, содержащий Γ_0 , и такой, что $\varphi_k(x) \geq n - 1$ для всех $x \in \Gamma_1$.

Зафиксируем n , и рассмотрим множество

$$\omega_n = \{x \in \Gamma_1 | n - 1 \leq \varphi_k(x) \leq n + 1\}. \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует, что

$$(n - 1)^2 \int_{\omega_n} dM \leq \int_{\omega_n} \varphi_k^2(x) M'_{\Gamma}(x) d\Gamma \leq (n + 1)^2 \int_{\omega_n} dM,$$

откуда немедленно находим, что M -мера множества не превосходит $\frac{1}{(n - 1)^2}$.

Рассмотрим две ближайшие точки x_1 и x_2 графа Γ , лежащие на разных ребрах γ_i , в смысле, что $\varphi_k(x_1) = n - 1$ и $\varphi_k(x_2) = n$. Тогда для любой точки x , принадлежащей подграфу Γ , содержащей x_1 и x_2 . Далее, $|x_1 - x_2| < \frac{1}{(n - 1)^2}$ и $|\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x_2)| \leq |\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi_k(x_2)| = 2$. Но последнее противоречит абсолютной непрерывности $\varphi_k(x)$. \square

Следствие 2.1. Пусть $\varphi_k(x)$ - собственная функция, нормированная

$$\left(\int_{\Gamma} \varphi_k^2(x) dM = 1 \right)$$

и отвечающая собственной частоте λ_k . Тогда найдется такая постоянная

C_2^* , что для всех k и x справедлива оценка

$$|\varphi'_k(x)| \leq C_2^* \cdot \lambda_k. \quad (2.36)$$

Доказательство. Так как $\varphi_k(x)$ - амплитудная функция, то справедливо тождество

$$\varphi_k(x) \equiv \lambda_k \int_{\Gamma} G(x, s) \varphi_k(s) dM(s), \quad (2.37)$$

где $G(x, s)$ - функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} -(pX')'_\Gamma + Q'_\Gamma = F'_\Gamma, \\ X|_{\partial\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Из (2.37) и леммы 2.3 находим

$$\begin{aligned} |\varphi'_k(x)| &\leq \lambda_k \left| \int_{\gamma_i} G'_\Gamma(x, s) \varphi_k(s) dM_i(s) \right| \leq \\ &\leq \sup |G'_\Gamma(x, s)| \times \\ &\quad \times C_1^* \cdot \lambda_k (|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|), \end{aligned}$$

т.е. (2.36) справедливо при

$$C_2^* = \sup |G'_\Gamma(x, s)| \cdot C_1^* \cdot (|M_i(a_{k+1}) - M_i(a_k)|).$$

В предыдущем параграфе показано, что для всякой функции из E , обращающейся в нуль в граничных вершинах графа Γ , ее ряд сходится равномерно и абсолютно. Покажем, что для всякой непрерывной на Γ функции $f(x)$ ряд Фурье, построенной по этой функции, сходится к $f(x)$ в среднем.

Заметим, что для любого положительного ε найдется функция $\hat{f}(x)$, принадлежащая E и обращающаяся в нуль в граничных вершинах Γ , такая, что

$$\int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) (f(x) - \hat{f}(x))^2 d\Gamma < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Пусть N выбрано настолько большим, что

$$\int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) \left[\hat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \hat{c}_k \varphi_k(x) \right]^2 d\Gamma < \frac{\varepsilon}{6},$$

где \widehat{c}_k - коэффициенты ряда Фурье функции $\widehat{f}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) \left(f(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right)^2 d\Gamma \leq \\
& \leq \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) \left(|f(x) - \widehat{f}(x)| + \left| \widehat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right| \right)^2 d\Gamma = \\
& = \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) |f(x) - \widehat{f}(x)|^2 d\Gamma + \\
& + 2 \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) |f(x) - \widehat{f}(x)| \cdot \left| \widehat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right| d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) \left| \widehat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right|^2 d\Gamma < \frac{\varepsilon}{6} + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{6}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}} + \frac{\varepsilon}{6} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, для всякой непрерывной на Γ функции $f(x)$ найдутся такое N и такие \widehat{c}_k ($k = 1, 2, \dots, N$), что интеграл

$$\int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) \left(f(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right)^2 d\Gamma \quad (2.38)$$

сколь угодно мал. В то же время интеграл (2.38) принимает наименьшее значение, если вместо \widehat{c}_k взять коэффициенты ряда Фурье, посчитанные для этой функции.

Так как $\varphi_k(x)$ ортогональны с весом $M'_{\Gamma}(x)$, то для всех N справедливо

$$\int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) f^2(x) d\Gamma \geq \sum_{k=1}^N c_k^2,$$

из которого следует аналог неравенства Бесселя

$$\int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) f^2(x) d\Gamma \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \quad (2.39)$$

2.3.3 Доказательство возможности применения метода Фурье

В этом параграфе приводится доказательство возможности применения метода Фурье. Для дальнейших рассуждений обозначим $LX = -(pX')'_\Gamma + XQ'_\Gamma$ и докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. Пусть $p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ — абсолютно непрерывны на Γ , $p(x)$ отделена от нуля, функция $Q(x)$ — не убывает на Γ . Пусть $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — абсолютно непрерывны на Γ , производные $\varphi'_0(x)$ и $\varphi'_1(x)$ имеют конечное на Γ изменение; квазипроизводные $p(x)\varphi'_0(x)$ и $p(x)\varphi'_1(x)$ — абсолютно непрерывны на Γ ; функции $\frac{L(\varphi_0)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ и $\frac{L(\varphi_1)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ непрерывны на Γ ; $\frac{L(\varphi_0)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ — абсолютно непрерывна и ее производная имеет конечное изменение на Γ ; $\varphi_0(x)|_{\partial\Gamma} = L\varphi_0|_{\partial\Gamma} = \varphi_1(x)|_{\partial\Gamma} = L\varphi_1|_{\partial\Gamma} = 0$. Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right), \quad (2.40)$$

где $\varphi_k(x)$ — нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k ,

$$A_k = \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) \varphi_k(x) \varphi_0(x) d\Gamma, \quad B_k = \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) \varphi_k(x) \varphi_1(x) d\Gamma,$$

является решением математической модели (2.1).

Причем ряд (2.40) можно дифференцировать почленно по t дважды и по x , σ также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на $\Gamma \times [0; T]$.

Доказательство. Для коэффициентов ряда Фурье функции $\varphi_0(x)$ имеем

$$\begin{aligned} A_k &= \int_{\Gamma} \varphi_0(x) M'_\Gamma(x) \varphi_k(x) d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} \varphi_0(x) \frac{1}{\lambda_k} (-(p(x)\varphi'_k(x))'_\Gamma + Q'_\Gamma(x)\varphi_k(x)) d\Gamma = \\ &= -\frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_0(x) ((p(x)\varphi'_k(x))'_\Gamma) d\Gamma + \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_0(x) \varphi_k(x) Q'_\Gamma(x) \varphi_k(x) d\Gamma. \end{aligned}$$

Интегрируя первый интеграл в правой части последнего равенства дважды по частям, имеем:

$$\begin{aligned}
A_k &= -\frac{1}{\lambda_k} \left[\sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} (\varphi_0(b_i)p(b_i)\varphi'_k(b_i) - \varphi_k(b_i)p(b_i)\varphi'_0(b_i)) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_k(x) ((p(x)\varphi'_0(x))'_x) d\Gamma + \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_0(x)\varphi_k(x)Q'_\Gamma(x) d\Gamma = \\
&\quad = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_k(x)L\varphi_0(x) d\Gamma = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_k(x)M'_\Gamma(x) \frac{L\varphi_0(x)}{M'_\Gamma(x)} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Таким образом, получили, что $\lambda_k A_k$ — это коэффициенты ряда Фурье функции $\frac{L(\varphi_0)(x)}{M'_\Gamma(x)}$.

Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k A_k| \cdot |\varphi_k(x)|$ сходится равномерно и абсолютно. Из неравенства (2.33) вытекает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^3$ сходится.

Для B_k получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}
B_k &= \int_{\Gamma} \varphi_1(x)M'_\Gamma(x)\varphi_k(x) d\Gamma = \\
&\quad = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_1(x) (-(p(x)\varphi'_k(x))'_\Gamma + Q'_\Gamma(x)\varphi_k(x)) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Разбивая интеграл в последнем равенстве на два, и интегрируя первый интеграл дважды по частям, получаем:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \varphi_1(x) (-(p(x)\varphi'_k(x))'_\Gamma) d\Gamma = \\
&= \left[\sum_{i=1}^r (-1)^{\nu(b_i)} (\varphi_1(b_i)p(b_i)\varphi'_k(b_i) - \varphi_k(b_i)p(b_i)\varphi'_1(b_i)) \right] + \\
&\quad + \int_{\Gamma} \varphi_k(x) ((p(x)\varphi'_1(x))'_\Gamma) d\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi_k(x) ((p(x)\varphi'_1(x))'_\Gamma) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Тогда

$$B_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Gamma} \varphi_k(x)M'_\Gamma(x) \frac{L\varphi_1(x)}{M'_\Gamma(x)} d\Gamma,$$

и $\lambda_k B_k$, являются коэффициентами ряда Фурье непрерывной на Γ функции $\frac{L(\overline{\varphi_1})(x)}{M'_\Gamma(x)}$.

Воспользовавшись аналогом неравенства Бесселя (2.39), доказанного в предыдущем параграфе, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2 \leq \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) \left(\frac{L(\varphi_1)(x)}{M'_\Gamma(x)} \right)^2 d\Gamma,$$

из которого следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2$ сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi'_k(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k t} + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} (p \varphi'_k(x))'_\Gamma \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k t} + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k t} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (Q'_\Gamma \varphi_k(x) - \lambda_k M'_\Gamma(x) \varphi_k(x)) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k t} + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k t} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k t} + B_k \cos \sqrt{\lambda_k t} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi'_k(x) \left(-A_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k t} + B_k \cos \sqrt{\lambda_k t} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k \lambda_k \cos \sqrt{\lambda_k t} - B_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k t} \right), \end{aligned}$$

каждый из которых оценивается числовым рядом

$$K \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k| \right),$$

где K - постоянная.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k| \right), \quad (2.41)$$

сходится на Γ . Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ сходится, то для произвольного положительного ε найдется такое N , что для всякого натурального $n \geq N$ и любого m выполнено $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} < \varepsilon$.

Для этих n и m последовательно находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} \left(\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k| \right) &= \sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^{3/2} |A_k| \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} + \sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k |B_k| \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^3 A_k^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda_k}} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 B_k^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\lambda_k}} < \left(\sqrt{\widehat{A}} + \sqrt{\widehat{B}} \right) \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где через \widehat{A} и \widehat{B} обозначены соответственно суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k A_k)^2$. Таким образом, ряд (2.41) сходится по признаку Коши. Теорема доказана. \square

Глава 3

Адаптация метода конечных элементов на геометрическом графе

На геометрическом графе рассмотрены вопросы о приближенном решении некоторых краевых задач (см., напр., [10, 21, 23, 34, 50, 59–60]), в работе [32] разностные схемы граничных задач для дифференциальных уравнений с распределенными параметрами адаптированы на графе, также проведен анализ точности метода конечных элементов для некоторых классов краевых задач (см. [38, 52]).

В данной главе метод конечных элементов адаптируется для математических моделей, описывающих деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

3.1 Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями

На графе Γ рассмотрим следующую математическую модель:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = \frac{dF}{d\Gamma}, \\ u(x)|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

описание которой приведено в первой главе настоящей работы.

Без ограничения общности рассмотрим адаптацию метода конечных элементов для графа-звезды Γ , состоящего из N ребер и внутренней вершины a . Пусть каждое ребро γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) параметризовано отрезком $[0; 1]$ и ориентировано к внутренней вершине a . Тогда внутренней вершине a ставится в соответствие $x = 1$, граничным вершинам ставится в соответствие $x = 0$.

Для нахождения приближенного решения задачи (3.1) выберем на графе Γ систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Для этого рассмотрим разбиение ребра γ_i графа Γ на неравные части точками $0 = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{n_i}^i = 1$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Отметим, что граничные вершины и внутреннюю вершину будем обязательно включать в разбиение.

Для i -го ребра k -ю базисную функцию $\varphi_{k,i}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N$) зададим формулой

$$\varphi_{k,i}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}^i}{x_k^i - x_{k-1}^i}, & x \in [x_{k-1}^i, x_k^i], \\ \frac{x - x_{k+1}^i}{x_k^i - x_{k+1}^i}, & x \in [x_k^i, x_{k+1}^i], \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad (3.2)$$

Заметим, что базисные функции $\varphi_{k,i}(x)$ равны нулю везде на Γ , кроме промежутка (x_{k-1}^i, x_{k+1}^i) соответствующего ребра с номером i . При этом $\varphi_{k,i}(x_k^i) = 1$.

Также определим базисные функции для i -го ребра

$$\varphi_{n_i,i}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n_i-1}^i}{1 - x_{n_i-1}^i}, & x \in [x_{n_i-1}^i, 1], i = 1, 2, \dots, N, \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad (3.3)$$

Пусть

$$\varphi_r(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_{n_i,i}(x), \quad (3.4)$$

где $r = \sum_{i=1}^N n_i - N + 1$.

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в точках разбиения. В связи с этим будем использовать в задаче (3.1) вместо $u(x)$ кусочно-непрерывную функцию

$$v(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} v_{j,i} \varphi_{j,i}(x) + c \varphi_r(x),$$

где $v_{j,i}$ - значения $v(x)$ в точках разбиения x_j^i , c - значение $\varphi_r(x)$ в точке 1. Умножим уравнение в (3.1) на $\varphi_{k,i}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N$) и проинтегрируем по Γ . Заметим, что

$$\int_{\Gamma} z dG = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} z_i dG_i + z(1)G\{1\},$$

где $G\{1\}$ - атом меры, сосредоточенной во внутренней вершине, G_i - сужение G на ребро γ_i , z_i - сужение функции $z(x)$ на ребро γ_i .

Получим, что

$$-\int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) d(pu') + \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) u(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) dF.$$

Поскольку базисные функции $\varphi_{k,i}(x)$ равны нулю в граничных и внутренней вершинах, то интеграл $-\int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) d(pu')$ совпадает с суммой интегралов по ребрам, которая после применения на каждом ребре формулы интегрирования по частям, равна

$$\int_{\Gamma} \varphi'_{k,i}(x) (pu') dx.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} \varphi'_{k,i}(x) (pu') dx + \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) u dQ = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) dF. \quad (3.5)$$

Умножим теперь уравнение в (3.1) на $\varphi_r(x)$ и проинтегрируем по Γ . Получим, что

$$-\int_{\Gamma} \varphi_r(x) d(pu') + \int_{\Gamma} \varphi_r(x) u(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi_r(x) dF.$$

Проинтегрируем по частям первый интеграл в последнем тождестве:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma} \varphi_r(x) d(pu') &= -\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \varphi_{n_i,i}(x) d(pu') + \varphi_r(1) \sum_{i=1}^N p_i u'_i (1-0) = \\
&= -\varphi_r(1) \sum_{i=1}^N p_i u'_i (1-0) + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \varphi'_{n_i,i}(x) (p_i u'_i) dx + \varphi_r(1) \sum_{i=1}^N p_i u'_i (1-0) = \\
&= \int_{\Gamma} \varphi'_r(x) pu' dx,
\end{aligned}$$

так как $\varphi(r) = 0$.

Таким образом, справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} \varphi'_r(x) (pu') dx + \int_{\Gamma} \varphi_r(x) u(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi_r(x) dF. \quad (3.6)$$

Подставив в равенства (3.5), (3.6) вместо $u(x)$ функцию $v(x)$, получим систему из r уравнений с r неизвестными вида

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} v_{j,i} \int_{\Gamma} p_i(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + c \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_r(x) dx + \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} v_{j,i} \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dQ + c \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_r(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) dF.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} v_{j,i} \int_{\Gamma} p_i(x) \varphi'_{n_i,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + c \int_{\Gamma} p(x) \varphi_r'^2(x) dx + \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} v_{j,i} \int_{\Gamma} \varphi_{n_i,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dQ + c \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi_r(x) dF.
\end{aligned}$$

Эта система имеет почти "трехдиагональную" матрицу. Введем обозначение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} p \varphi' \psi' dx + \int_{\Gamma} \varphi \psi dQ.$$

Последнее выражение есть билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывных на Γ функций, имеющих производную, суммируемую с квадратом (на каждом ребре) и удовлетворяющих условию

$u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$. Благодаря положительности функции $p(x)$, неубывания функции $Q(x)$ на каждом ребре γ_i (в смысле ориентации) и неотрицательности $Q\{a\}$, он еще и невырожденный, т.е.

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} p\varphi'\psi' dx + \int_{\Gamma} \varphi\psi dQ > 0$$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \iff \varphi = 0.$$

Поэтому этот функционал может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты рассматриваемой системы уравнений $A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$ образуют матрицу Грама системы линейно независимых векторов. Значит, определитель матрицы коэффициентов изучаемой системы уравнений отличен от нуля, а это означает, что полученная система имеет единственное решение.

3.2 Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов

Теорема 3.1. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (3.1), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда справедливо неравенство

$$\langle u - v, u - v \rangle \leq Ch,$$

причем, константа C не зависит от $h = \frac{1}{n}$, где n — количество интервалов, на которые производится разбиение каждого ребра (сетка предполагается равномерной).

Доказательство. Для упрощения выкладок будем считать $p(x) = 1$ на графе Γ . Как было показано в параграфе 1.1, математическая модель (3.1) возникает из задачи минимизации квадратичного функционала (потенциальной энергии)

$$\Phi(v) = \int_{\Gamma} \frac{(v')^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{v^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} v dF \quad (3.7)$$

при условии $v|_{\partial\Gamma} = 0$. Решение математической модели (3.1) является точкой минимума функционала (3.7) на множестве E_0 , где E_0 — подпространство E функций, удовлетворяющих условию $v|_{\partial\Gamma} = 0$. Так как функционал (3.7) не содержит вторых производных, то его можно определить на функциях, у которых первая производная суммируема с квадратом, т.е. на \widehat{E}_0 - пополнении E_0 по норме

$$\|u\|_{\widehat{E}_0}^2 = \int_{\Gamma} (u')^2 dx + \int_{\Gamma} u^2 dQ.$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимального значения функционала, поскольку каждое новое значение $\Phi(v)$ есть предел $\Phi(v_n)$, где $v_n \in E_0$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{E}_0}^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, если u доставляет $\min \Phi(v)$, то $\Phi(v_n) \geq \Phi(u)$, и значит, $\Phi(v) \geq \Phi(u)$ для всех $v \in \widehat{E}_0$.

В обратную сторону, то, что минимизация $\Phi(v)$ на \widehat{E}_0 приводит к математической модели (3.1) показано в параграфе 1.1.

Таким образом, можно минимизировать $\Phi(v)$ на \widehat{E}_0 . Другими словами, в качестве базисных функций можно брать кусочно-линейные функции. После решения линейной системы получаем приближенное решение $v(x)$. Оценим разность между точным решением $u(x)$ и полученным приближенным решением $v(x)$.

Сначала оценим разность между точным решением и его интерполянтном $u_I(x)$ в энергетической норме, где

$$u_I(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} u(x_j^i) \varphi_{j,i}(x) + u(1) \varphi_r(x).$$

Обозначим $w(x) = u(x) - u_I(x)$. Заметим, что $w(x_j^i) = 0$ для всякой точки разбиения x_j^i . Имеем

$$\langle u - u_I, u - u_I \rangle = \langle w, w \rangle = \int_{\Gamma} w'^2 dx + \int_{\Gamma} w^2 dQ.$$

Заметим, что $\int_{\Gamma} w'^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} w_i'^2 dx$. Оценим $\int_{\gamma_i} w_i'^2 dx$ на ребре γ_i

графа Γ . Заметим, что

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_i} w_i'^2 dx &= \int_{\gamma_i} w_i' dw_i = w_i' w_i \Big|_{0+0}^{1-0} - \int_{0+0}^{1-0} w_i d(w_i') = \\
&= - \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i d(w_i') + \sum_{j=1}^{n_i-1} w_i(x_j^i) \Delta w_i'(x_j^i) \right) = \\
&= - \sum_{j=0}^{n_i-1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i d(w_i') = - \sum_{j=0}^{n_i-1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i d(u_i'),
\end{aligned}$$

так как $w_i(1-0) = w_i(1) = 0$, $w_i(0+0) = w_i(0) = 0$, $w_i(x_j^i) = 0$, $dw_i' = du_i'$ на промежутках (x_j^i, x_{j+1}^i) ребра γ_i . Тогда

$$\left| \int_{\gamma_i} w_i'^2 dx \right| = \left| - \sum_{j=0}^{n_i-1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i(x) d(u_i') \right| \leq \sum_{j=0}^{n_i-1} \sup_{[x_j^i, x_{j+1}^i]} |w_i| \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (u_i'), \quad (3.8)$$

где \bigvee означает полную вариацию по соответствующему промежутку. Заметим, что при $x \in [x_j^i, x_{j+1}^i]$ верно

$$\begin{aligned}
w_i(x) &= \int_{x_j^i}^x w_i'(s) ds = \int_{x_j^i}^x \left(w_i'(x_j^i+0) + \int_{x_j^i+0}^s dw_i' \right) ds = \\
&= w_i'(x_j^i+0)(x - x_j^i) + \int_{x_j^i}^x \int_{x_j^i+0}^s du_i' ds.
\end{aligned}$$

Тогда для всех $x \in [x_j^i, x_{j+1}^i]$ справедливо неравенство

$$|w_i(x)| \leq |w_i'(x_j^i+0)|h + h \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (u_i').$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |w'_i(x_j^i + 0)| &= \left| u'_i(x_j^i + 0) - \frac{u_i(x_{j+1}^i) - u_i(x_j^i)}{h} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} |u'_i(x_j^i + 0) - u'_i(s)| ds \leq \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (u'_i). \end{aligned}$$

Значит, для всех $x \in [x_j^i, x_{j+1}^i]$

$$|w_i(x)| \leq 2h \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (u'_i) \leq 2h \bigvee_{\gamma_i} (u').$$

Таким образом, получим неравенство

$$\int_{\Gamma} w'^2(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} w_i'^2(x) dx \leq 2h \sum_{i=1}^N \left(\bigvee_{\gamma_i} (u') \right)^2 \leq 2h \left(\bigvee_{\Gamma} (u') \right)^2.$$

Оценим $\int_{\Gamma} w^2(x) dQ$. С учетом $w(1) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} w^2(x) dQ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{n_i-1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} w_i^2(x) dQ_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \sup w_i^2 \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (Q_i) \right) \leq 4h^2 \left(\bigvee_{\Gamma} (u') \right)^2 \bigvee_{\Gamma} (Q). \end{aligned}$$

Значит,

$$\langle u - u_I, u - u_I \rangle \leq 2h \left(\bigvee_{\Gamma} (u') \right)^2 + 4h^2 \left(\bigvee_{\Gamma} (u') \right)^2 \bigvee_{\Gamma} (Q).$$

Получаем

$$\bigvee_{\Gamma} (u') \leq \sup_{\Gamma} |u| \bigvee_{\Gamma} (Q) + \bigvee_{\Gamma} (F).$$

В свою очередь, $|u(x)| \leq \left| \int_{\Gamma} |G(x, s)| dF(s) \right| \leq \max_{\Gamma} |G(x, s)| \bigvee_{\Gamma} (F)$, где

$G(x, s)$ — функция влияния математической модели (3.1). Таким образом, $\langle u - u_I, u - u_I \rangle \leq Ch$.

Остается показать, что интерполянт дает приближение не хуже, чем $v(x)$. Это утверждение основано на следующем аналоге классического результата теории конечных элементов.

Предположим, что $u(x)$ минимизирует функционал $\Phi(v)$, задаваемый равенством (3.6), на множестве \widehat{E}_0 . Обозначим через E_N конечномерное подпространство \widehat{E}_0 . Тогда

1) минимум $\Phi(v_h)$ и минимум $\langle u - v_h, u - v_h \rangle$, где v_h пробегает подпространство E_N , достигается на одной и той же функции u_h .

2) по отношению к энергетическому скалярному произведению u_h есть проекция u на E_N , или, что то же самое, ошибка $u - u_h$ ортогональна E_N :

$$\langle u - u_h, v_h \rangle = 0 \quad (3.9)$$

для всех $v_h \in E_N$.

3) функция u_h , на которой достигается минимум, удовлетворяет условию

$$\langle u_h, v_h \rangle = \int_{\Gamma} v_h dF, \quad (3.10)$$

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} v dF, \quad (3.11)$$

для всех $v_h \in E_N$, $v \in \widehat{E}_0$. Как и в классической теории, для нас эта теорема ключевая. Более того, все три части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве с энергетическим скалярным произведением функция из подпространства E_N , ближайшая к заданной функции u , всегда является ее проекцией на E_N . Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\begin{aligned} \langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle &= \langle u - u_h, u - u_h \rangle = \\ &= \langle u - u_h, u - u_h \rangle - 2\langle u - u_h, v_h \rangle + \langle v_h, v_h \rangle. \end{aligned}$$

Если справедливо равенство (3.9), то

$$\langle u - u_h, u - u_h \rangle \leq \langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle.$$

Равенство возможно только тогда, когда $\langle v_h, v_h \rangle = 0$, т.е. когда $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция, на которой $\langle u - v_h, u - v_h \rangle = 0$ достигает минимум, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (3.11) справедливо для всех $v \in \widehat{E}_0$, то оно справедливо и для $v_h \in E_N$; вычитая из него (3.10), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3). Из него вытекает 2), и из него следует 1). Если u_h минимизирует $\Phi(v)$ на E_N , то $\Phi(u_h) \leq \Phi(u_h + \varepsilon v_h)$ для всех ε и v_h . Заметив, что $\Phi(v) = \frac{1}{2}\langle u, u \rangle - \int_{\Gamma} u dF$, из предыдущего неравенства получим, что

$$0 \leq \varepsilon \left(\langle u_h, v_h \rangle - \int_{\Gamma} v_h dF \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle v_h, v_h \rangle.$$

Так как неравенство верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h \rangle = \int_{\Gamma} v_h dF$. Последнее выражает равенство нулю первой вариации функционала Φ в точке u_h по направлению v_h . Таким образом, утверждение 3) доказано. Теорема доказана. \square

3.3 Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых вынужденных колебаний растянутой сетки из струн с локализованными особенностями

Как и в параграфе 3.1 без ограничения общности рассмотрим адаптацию метода конечных элементов для графа-звезды Γ , состоящего из N ребер и внутренней вершины a . Пусть каждое ребро γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) параметризовано отрезком $[0; 1]$ и ориентировано к внутренней вершине a . Тогда внутренней вершине a ставится в соответствие $x = 1$, граничным вершинам ставится в соответствие $x = 0$.

На графе Γ рассмотрим следующую математическую модель:

$$\begin{cases} M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) \frac{dQ}{d\Gamma} + f(x, t), x \in \Gamma, t > 0, \\ u(x, t)|_{\partial\Gamma} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), x \in \Gamma, \\ u'_t(x, 0) = \varphi_1(x), x \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.12)$$

описание которой приведено во второй главе настоящей работы.

Для нахождения приближенного решения задачи (3.12) выберем на графе Γ систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Базисные функции $\varphi_{k,i}(x)$, $\varphi_{n_i,i}(x)$ и $\varphi_r(x)$ задаются формулами (3.2) — (3.4) соответственно.

В задаче (3.12) вместо искомой функции $u(x)$ будем использовать кусочно-непрерывную функцию

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{j,i}(t) \varphi_{j,i}(x) + c(t) \varphi_r(x),$$

где $a_{j,i}(t)$, $c(t)$ - неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции на графе Γ , $\varphi_{j,i}(x)$ - j -ая базисная функция на ребре γ_i .

Умножим уравнение в (3.12) на базисную функцию $\varphi_{k,i}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N$) и проинтегрируем по Γ .

Получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) u''_{tt}(x, t) \varphi_{k,i}(x) d\Gamma &= \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) d(pu') - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) u(x, t) dQ + \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) dF. \end{aligned}$$

Поскольку базисные функции $\varphi_{k,i}(x)$ равны нулю в граничных и внутренней вершинах, то интеграл $-\int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) d(pu')$ совпадает с суммой интегралов по ребрам, которая после применения на каждом ребре формулы интегрирования по частям, равна

$$\int_{\Gamma} \varphi'_{k,i}(x) (pu') dx.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) u''_{tt}(x, t) \varphi_{k,i}(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} p(x) u'_x(x, t) \varphi'_{k,i}(x) dx + \\ + \int_{\Gamma} u(x, t) \varphi_{k,i}(x) dQ = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) dF. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Умножим теперь уравнение в (3.12) на $\varphi_r(x)$ и проинтегрируем по Γ . Получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x) u''_{tt}(x, t) \varphi_r(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi_r(x) d(pu') - \\ - \int_{\Gamma} \varphi_r(x) u(x, t) dQ + \int_{\Gamma} \varphi_r(x) dF. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям первый интеграл в последнем тождестве:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \varphi_r(x) d(pu') &= \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \varphi_{n_i,i}(x) d(pu') - \varphi_r(1) \sum_{i=1}^N p_i u'_i(1 - 0) = \\ &= \varphi_r(1) \sum_{i=1}^N p_i u'_i(1 - 0) - \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \varphi'_{n_i,i}(x) (p_i u'_i) dx - \varphi_r(1) \sum_{i=1}^N p_i u'_i(1 - 0) = \\ &= - \int_{\Gamma} \varphi'_r(x) pu' dx, \end{aligned}$$

так как $\varphi_r(x) = 0$.

Таким образом, справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} M'_{\Gamma}(x)u''_{tt}(x,t)\varphi_r(x)d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi'_r(x)(pu')dx + \\ + \int_{\Gamma} \varphi_r(x)udQ = \int_{\Gamma} \varphi_r(x)dF. \quad (3.14)$$

Подставив в равенства (3.13), (3.14) вместо функции $u(x)$ функцию $v(x,t)$, получим систему из r уравнений с $r = \sum_{i=1}^N n_i - N + 1$ неизвестными вида

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a''_{j,i}(t) \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x)\varphi_{j,i}(x)dM + c''(t) \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x)\varphi_r(x)dM + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{j,i}(t) \int_{\Gamma} p(x)\varphi'_{k,i}(x)\varphi'_{j,i}(x)dx + c(t) \int_{\Gamma} p(x)\varphi'_{k,i}(x)\varphi'_r(x)dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{j,i}(t) \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x)\varphi_{j,i}(x)dQ + c(t) \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x)\varphi_r(x)dQ = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x)dF,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a''_{j,i}(t) \int_{\Gamma} \varphi_r(x)\varphi_{j,i}(x)dM + c''(t) \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x)dM + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{j,i}(t) \int_{\Gamma} p(x)\varphi'_r(x)\varphi'_{j,i}(x)dx + c(t) \int_{\Gamma} p(x)\varphi_r'^2(x)dx + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{j,i}(t) \int_{\Gamma} \varphi_r(x)\varphi_{j,i}(x)dQ + c(t) \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x)dQ = \int_{\Gamma} \varphi_r(x)dF.$$

Таким образом, мы получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widehat{A}a''(t) + \widehat{B}a(t) = \widehat{F}, \quad (3.15)$$

где \widehat{A} , \widehat{B} - матрицы порядка r , коэффициенты которых находятся по

формулам

$$\widehat{A}_{kj} = \widehat{A}_{jk} = \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dM, \quad (k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\widehat{A}_{rr} = \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dM,$$

$$\widehat{B}_{kj} = \widehat{B}_{jk} = \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx +$$

$$+ \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dQ, \quad (k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\widehat{B}_{rr} = \int_{\Gamma} p(x) \varphi_r'^2(x) dx + \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dQ$$

где $a(t) = (a_{1,1}(t), a_{2,1}(t), a_{3,1}(t), \dots, a_{j,i}(t), \dots, a_{n_i-1,N}(t), c(t))^T$ и $\widehat{F}(t) = (F_{1,1}(t), F_{2,1}(t), \dots, F_{j,i}(t), \dots, F_r(t))^T$ — вектор-столбцы, компоненты $F_n(t)$ определяются равенствами

$$F_{k,i}(t) = \int_{\Gamma} f(x, t) \varphi_{k,i}(x) d\Gamma, \quad F_r(t) = \int_{\Gamma} f(x, t) \varphi_r(x) d\Gamma$$

Умножим каждое начальное условие $u(x, 0) = \varphi_0(x)$ и $u_t'(x, 0) = \varphi_1(x)$ на базисную функцию $\varphi_{k,i}(x)$, проинтегрируем по Γ , подставим вместо $u(x, t)$ функцию $v(x, t)$:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a_{j,i}(0) \int_{\Gamma} \varphi_{j,i}(x) \varphi_{k,i}(x) dx + c(0) \int_{\Gamma} \varphi_r(x) \varphi_{k,i}(x) dx = \int_{\Gamma} \varphi_0(x) \varphi_{k,i}(x) dx,$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} a'_{j,i}(0) \int_{\Gamma} \varphi_{j,i}(x) \varphi_{k,i}(x) dx + c'(0) \int_{\Gamma} \varphi_r(x) \varphi_{k,i}(x) dx = \int_{\Gamma} \varphi_1(x) \varphi_{k,i}(x) dx,$$

или, в матричном виде,

$$\widehat{C}a(0) = H_1, \quad \widehat{C}a'(0) = H_2 \quad (3.16)$$

где \widehat{C} - квадратная матрица с коэффициентами

$$\widehat{C}_{kj} = \widehat{C}_{jk} = \int_{\Gamma} \varphi_{j,i}(x) \varphi_{k,i}(x) dx, \quad (k = 1, 2, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\widehat{C}_{rr} = \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dx$$

H_1, H_2 - вектор-столбцы с координатами ($j = 1, 2$)

$$(H_j)_n = \int_{\Gamma} \overline{\varphi}_{j-1}(x) \varphi_k(x) dx.$$

Коэффициенты рассматриваемой системы уравнений образуют матрицы Грамма \widehat{A} и \widehat{C} системы линейно независимых функций $\varphi_{k,i}(x)$, $\varphi_r(x)$. Поэтому матрицы \widehat{A} и \widehat{C} имеют обратные. Тогда, (3.15), (3.16) принимают следующий вид

$$a''(t) + \widehat{A}^{-1} \widehat{B} a(t) = \widehat{A}^{-1} \widehat{F}, \quad (3.17)$$

$$a(0) = \widehat{C}^{-1} H_1, \quad a'(0) = \widehat{C}^{-1} H_2. \quad (3.18)$$

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что (3.17), дополненная начальными условиями (3.18), имеет единственное решение.

Для численного решения (3.17), (3.18) применим явную схему. Для реализации алгоритма имеем следующие формулы:

$$\frac{a_{k,i}((j+1)\tau) - 2a_{k,i}(j\tau) + a_{k,i}((j-1)\tau)}{\tau^2} + \sum_{j=1}^{n_i-1} \eta_{k,j} a_{j,i}(j\tau) = F_k(j\tau),$$

$$k = 1, 2, \dots, n_i - 1,$$

где $\eta_{k,n}$ - коэффициенты матрицы $\widehat{A}^{-1} \widehat{B}$. Два начальных слоя мы найдем, используя начальные данные:

$$a_{k,i}(0) = \left(\widehat{C}^{-1} H_1 \right)_{k,i}, \quad \frac{a_{k,i}(\tau) - a_{k,i}(0)}{\tau} = \left(\widehat{C}^{-1} H_2 \right)_{k,i}.$$

3.4 Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов

Обозначим через $u_I(x)$ интерполянт в энергетической норме:

$$u_I(x, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} u(x_j^i, t) \varphi_{j,i}(x) + u(1, t) \varphi_r(x).$$

Теорема 3.2. Пусть $M'_\Gamma(x) > 0$, $Q'_\Gamma(x) \geq 0$, $p(x) > 0$ и начальные условия $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ таковы, что математическая модель (3.12) имеет единственное решение в классе E . Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (3.12), $v(x, t)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда справедливо неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_{\Gamma} w_t'^2(x, t) dM + \int_{\Gamma} w_x'^2(x, t) dx + \int_{\Gamma} w^2(x, t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{C} \cdot \sqrt{h},$$

причем, константа \bar{C} не зависит от $h = \frac{1}{n}$, где n — количество интервалов, на которые производится разбиение, $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$.

Доказательство. Сначала оценим разность между точным и приближенным решениями $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Для всех $t \in [0; T]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M'_\Gamma(x) w_{tt}''(x, t) \varphi_{k,i}(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} p(x) w_x'(x, t) \varphi'_{k,i}(x) dx + \\ + \int_{\Gamma} w(x, t) \varphi_{k,i}(x) dQ = 0, \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} w_t'(x, 0) \varphi_{k,i}(x) dx = 0, \quad \int_{\Gamma} w(x, 0) \varphi_{k,i}(x) dx = 0,$$

Докажем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma} w''_{tt}(x, \tau) w'_t(x, \tau) dM d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} p(x) w'_x(x, \tau) w''_{tx}(x, \tau) dx d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma} w(x, \tau) w'_t(x, \tau) dQ d\tau \equiv \int_0^t \int_{\Gamma} w''_{tt}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) dM d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Gamma} p(x) w'_x(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_x dx d\tau + \\
& \quad \quad + \int_0^t \int_{\Gamma} w(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) dQ d\tau. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Преобразуем левую часть тождества (3.19) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma} w''_{tt}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) dM d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Gamma} p(x) w'_x(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_x dx d\tau + \\
& \quad \quad \int_0^t \int_{\Gamma} w(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) dQ d\tau + \\
& \quad + \int_0^t \left\{ \int_{\Gamma} w''_{tt}(x, \tau) (u'_{It}(x, \tau) - v'_t(x, \tau)) dM + \right. \\
& \quad \quad + \int_{\Gamma} p(x) w'_x(x, \tau) (u'_{It}(x, \tau) - v'_t(x, \tau))'_x dx + \\
& \quad \quad \quad \left. + \int_{\Gamma} w(x, \tau) (u'_{It}(x, \tau) - v'_t(x, \tau)) dQ \right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Докажем, что выражение в фигурных скобках равно нулю. Воспользовавшись представлениями функций $v(x, t)$ и $u_I(x, t)$, последовательно

имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \int_{\Gamma} u''_{tt}(x, \tau) \varphi_{j,i}(x) dM + \\
& \quad + (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} u''_{tt}(x, \tau) \varphi_r(x) dM - \\
& - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \sum_{k=1}^{n_i-1} a''_{k,i}(\tau) \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dM - \\
& \quad - c''(\tau) (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dM + \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \int_{\Gamma} p(x) u'_x(x, \tau) \varphi'_{j,i}(x) dx + \\
& \quad + (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} p(x) u'_x(x, \tau) \varphi'_r(x) dx - \\
& - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \sum_{k=1}^{n_i-1} a_{k,i}(\tau) \int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + \\
& \quad - c(\tau) (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} p(x) \varphi_r^2(x) dx \\
& \quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \int_{\Gamma} u(x, \tau) \varphi_{j,i}(x) dQ - \\
& - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_i(\tau)) \sum_{k=1}^{n_i-1} a_{k,i}(\tau) \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dQ + \\
& \quad + (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} u(x, \tau) \varphi_r(x) dQ - \\
& \quad - c(\tau) (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dQ = \\
& = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \int_{\Gamma} [u''_{tt}(x, \tau) M'_{\Gamma}(x) - (p(x) u'_x(x, \tau))'_x + \\
& \quad + Q'_{\Gamma}(x) u(x, \tau)] \varphi_{j,i}(x) d\Gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \sum_{k=1}^{n_i-1} a''_{k,j}(\tau) \int_{\Gamma} \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) dM - \\
& - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_i, \tau) - a'_i(\tau)) \sum_{k=1}^{n_i-1} a_{k,i}(\tau) \left[\int_{\Gamma} p(x) \varphi'_{k,i}(x) \varphi'_{j,i}(x) dx + \right. \\
& \quad \left. - \int_{\Gamma} Q'_{\Gamma}(x) \varphi_{k,i}(x) \varphi_{j,i}(x) d\Gamma \right] + \\
& + (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} [u''_{tt}(x, \tau) M'_{\Gamma}(x) - (p(x) u'_x(x, \tau))'_x + \\
& \quad + Q'_{\Gamma}(x) u(x, \tau)] \varphi_r(x) d\Gamma - \\
& - c''(\tau) (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} \varphi_r^2(x) dM \\
& - c(\tau) (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \int_{\Gamma} [p(x) \varphi_r'^2(x) dx + \varphi_r^2(x) dQ].
\end{aligned}$$

Так как $u(x, \tau)$ решение рассматриваемой математической модели, тогда

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (u'_t(x_j^i, \tau) - a'_{j,i}(\tau)) \left[\int_{\Gamma} f(x, \tau) \varphi_{j,i}(x) d\Gamma - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{n_i-1} (a''_{k,i}(\tau) \widehat{A}_{ik} + a_{k,i}(\tau) \widehat{B}_{ik}) \right] + \\
& + (u'_t(1, \tau) - c'(\tau)) \left[\int_{\Gamma} f(x, \tau) \varphi_r(x) d\Gamma - (c''(\tau) \widehat{A}_{rr} + c(\tau) \widehat{B}_{rr}) \right].
\end{aligned}$$

Так как $a_{k,i}(\tau)$, $c(\tau)$ — решения системы (3.15), то выражения в квадратных скобках равны нулю. Таким образом, доказали тождество (3.19).

Поменяв в левой части тождества (3.19) пределы интегрирования в

силу теоремы Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma} w''_{tt}(x, \tau) w'_t(x, \tau) dM d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma} p(x) w'_x(x, \tau) w''_{tx}(x, \tau) dx d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Gamma} w(x, \tau) w'_t(x, \tau) dQ d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_t'^2(x, t) dM - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) w_x'^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p(x) w_x'^2(x, 0) dx + \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w^2(x, t) dQ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ.
\end{aligned}$$

Тогда, из (3.19) вытекает, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} w_t'^2(x, t) dM + \int_{\Gamma} p(x) w_x'^2(x, t) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^2(x, t) dQ = \\
& = \int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM + \int_{\Gamma} p(x) w_x'^2(x, 0) dx + \int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ + \\
& \quad + 2 \int_0^t \int_{\Gamma} w''_{tt}(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) dM d\tau + \\
& \quad + 2 \int_0^t \int_{\Gamma} p(x) w'_x(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_x dx d\tau + \\
& \quad + 2 \int_0^t \int_{\Gamma} w(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) dQ d\tau. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Преобразуем (3.20)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} w_t'^2(x, t) dM + \int_{\Gamma} p(x) w_x'^2(x, t) dx + \int_{\Gamma} w^2(x, t) dQ = \\
& = \int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM + \int_{\Gamma} p(x) w_x'^2(x, 0) dx + \int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ + \\
& + 2 \int_{\Gamma} w_t'(x, t) (u_t'(x, t) - u'_{It}(x, t)) dM - 2 \int_{\Gamma} w_t'(x, 0) (u_t'(x, 0) - u'_{It}(x, 0)) dM - \\
& - 2 \int_0^t \int_{\Gamma} w_t'(x, \tau) (u_t'(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_t dM d\tau + \\
& + 2 \int_0^t \int_{\Gamma} p(x) w_x'(x, \tau) (u_t'(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_x dx d\tau + \\
& + 2 \int_0^t \int_{\Gamma} w(x, \tau) (u_t'(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) dQ d\tau. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части равенства (3.21).

Сначала оценим $\int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM$. Имеем

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM \right| &= \left| \int_{\Gamma} w_t'(x, 0) (\varphi_1(x) - u'_{It}(x, 0)) dM + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Gamma} w_t'(x, 0) (u'_{It}(x, 0) - v_t'(x, 0)) dM \right| \leq \\
&\leq \left| \int_{\Gamma} w_t'(x, 0) \left(\varphi_1(x) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} \varphi_1(x_j^i) \varphi_{j,i}(x) - u_t'(1, 0) \varphi_r(x) \right) dM \right| + \\
&\quad + \left| \int_{\Gamma} w_t'(x, 0) (u'_{It}(x, 0) - v_t'(x, 0)) dM \right| \leq \\
&\leq \sqrt{\int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM} \cdot \\
&\quad \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} \left(\varphi_1(x) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} \varphi_1(x_j^i) \varphi_{j,i}(x) - u_t'(1, 0) \varphi_r(x) \right)^2 dM} + \\
&\quad + \sqrt{\int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{It}(x, 0) - v_t'(x, 0))^2 dM}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\sqrt{\int_{\Gamma} w_t'(x, 0) dM} &\leq \\
&\leq \sqrt{\int_{\Gamma} \left(\varphi_1(x) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} \varphi_1(x_j^i) \varphi_{j,i}(x) - u_t'(1, 0) \varphi_r(x) \right)^2 dM} + \\
&\quad + \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{It}(x, 0) - v_t'(x, 0))^2 dM} \leq (C_1 h + C_2 h) \sqrt{\sum_{i=1}^N M_i(0) - M\{1\}},
\end{aligned}$$

так как для абсолютно непрерывной функции $\varphi_1(x)$, которая имеет производную с ограниченным изменением, при некоторой константе C_1 спра-

ведливо неравенство

$$\left| \varphi_1(x) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} \varphi_1(x_j^i) \varphi_{j,i}(x) - u'_t(1,0) \varphi_r(x) \right| \leq C_1 h,$$

вторая оценка справедлива ввиду цепочки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} (u'_{It}(x,0) - v'_t(x,0))^2 dM \right| &= \\ &= \left| \int_{\Gamma} (u'_{It}(x,0) - v'_t(x,0))(u'_{It}(x,0) - v'_t(x,0)) dM \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{It}(x,0) - v'_t(x,0))^2 dM} \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{It}(x,0) - v'_t(x,0))^2 dM} \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{It}(x,0) - v'_t(x,0))^2 dM} \cdot C_2 h, \end{aligned}$$

откуда вытекает требуемая оценка.

Оценим $\int_{\Gamma} w_x'^2(x,0) dx$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} w_x'^2(x,0) dx \right| &= \\ &= \left| \int_{\Gamma} w_x'(x,0)(u'_x(x,0) - u'_{Ix}(x,0) + u'_{Ix}(x,0) - u'_{Nx}(x,0)) dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma} w_x'^2(x,0) dx} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_x(x,0) - u'_{Ix}(x,0))^2 dx} + \\ &\quad + \sqrt{\int_{\Gamma} w_x'^2(x,0) dx} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x,0) - v'_x(x,0))^2 dx}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{\Gamma} w_x'^2(x, 0) dx} \leq & \sqrt{\int_{\Gamma} (u_x'(x, 0) - u'_{Ix}(x, 0))^2 dx} + \\ & + \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - v_x'(x, 0))^2 dx}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (3.22):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - v_x'(x, 0))^2 dx \right| &= \\ &= \left| \int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - v_x'(x, 0))(u'_{Ix}(x, 0) - v_x'(x, 0)) dx \right| = \\ &= \left| \int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - v_x'(x, 0))(u'_{Ix}(x, 0) - u_x'(x, 0)) dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - v_x'(x, 0))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - u_x'(x, 0))^2 dx} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - v_x'(x, 0))^2 dx} \leq \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - u_x'(x, 0))^2 dx}$$

Таким образом, для (3.22) получаем неравенство

$$\sqrt{\int_{\Gamma} (w_x'^2(x, 0))^2 dx} \leq 2 \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_{Ix}(x, 0) - u_x'(x, 0))^2 dx} \quad (3.23)$$

Интеграл, стоящий под знаком корня в правой части (3.23), оценим сле-

дующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Gamma} (u'_x(x, 0) - u'_{Ix}(x, 0))^2 dx \right| = \\
& = \left| \int_{\Gamma} (u'_x(x, 0) - u'_{Ix}(x, 0)) d(u(x, 0) - u_I(x, 0)) \right| = \\
& = \left| \sum_{i=1}^N (u'_{ix}(x, 0) - u'_{Ix}(x, 0)) (u_i(x, 0) - u_I(x, 0)) \Big|_0^1 - \right. \\
& \quad \left. - \int_{\Gamma} (u(x, 0) - u_I(x, 0)) d(u'_x(x, 0) - u'_{Ix}(x, 0)) \right| = \\
& = \left| \int_{\Gamma} (\varphi_0(x) - u_I(x, 0)) d(\varphi'_0(x) - u'_{Ix}(x, 0)) \right|,
\end{aligned}$$

так как $(u(x, 0) - u_I(x, 0)) \Big|_{\partial\Gamma} = 0$, $u(1, 0) - u_I(1, 0) = 0$, $u(x, 0) = \varphi_0(x)$.
Тогда

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Gamma} (\varphi_0(x) - u_I(x, 0)) d(\varphi'_0(x) - u'_{Ix}(x, 0)) \right| = \\
& = \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i+1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (\varphi_0(x) - u_I(x, 0)) d(\varphi'_0(x)) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i-1} (\varphi_0(x_j^i) - u_I(x_j^i, 0)) \Delta(\varphi'_0(x_j^i) - u'_{Ix}(x_j^i, 0)) \right| = \\
& = \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i+1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (\varphi_0(x) - u_I(x, 0)) d(\varphi'_0(x)) \right| \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i+1} \max_{[x_j^i; x_{j+1}^i]} |\varphi_0(x) - u_I(x, 0)| \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (\varphi'_0), \quad (3.24)
\end{aligned}$$

так как $\varphi_0(x_j^i) - u_I(x_j^i, 0) = 0$ в силу того, что $u_I(x, t)$ - интерполант и $u'_{Ix}(x_j^i, 0)$ константа на $(x_j^i; x_{j+1}^i)$ на ребре γ_i графа Γ . Величину

$\max |\varphi_0(x) - u_I(x, 0)|$ оценим (для всякого $x \in \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$))

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x) - u_I(x, 0)| &= \left| \varphi_0(x) - \varphi_0(x_j^i) - \frac{\varphi_0(x_{j+1}^i) - \varphi_0(x_j^i)}{x_{j+1}^i - x_j^i} (x - x_j^i) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_j^i}^{x_{j+1}^i} \int_{x_j^i}^x (\varphi_0'(\tau) - \varphi_0'(s)) d\tau ds \right| \leq \bigvee_{x_j^i}^{x_{j+1}^i} (\varphi_0') \cdot h. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива следующая оценка

$$\max_{[x_j^i; x_{j+1}^i]} |\varphi_0(x) - u_I(x, 0)| \leq h \cdot \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (\varphi_0'). \quad (3.25)$$

Тогда, (3.24), с учетом (3.25), перепишем в виде

$$\left| \int_{\Gamma} (\overline{\varphi_0}(x) - u_I(x, 0)) d(\overline{\varphi_0}'(x) - u'_{Ix}(x, 0)) \right| \leq h \left(\bigvee_{\Gamma} (\varphi_0') \right)^2. \quad (3.26)$$

Для интеграла $\int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ \right| &= \\ &= \left| \int_{\Gamma} w(x, 0) (u(x, 0) - u_I(x, 0) + u_I(x, 0) - v(x, 0)) dQ \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u(x, 0) - u_I(x, 0))^2 dQ} + \\ &\quad + \sqrt{\int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u_I(x, 0) - v(x, 0))^2 dQ}, \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\sqrt{\int_{\Gamma} w^2(x, 0) dQ} \leq 2 \sqrt{\int_{\Gamma} (u(x, 0) - u_I(x, 0))^2 dQ}.$$

Воспользовавшись (3.25), для интеграла в последнем неравенстве получаем оценку сверху

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Gamma} (u(x, 0) - u_I(x, 0))^2 dQ_i \right| = \\
& = \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i+1} \int_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (u_i(x, 0) - u_I(x, 0))^2 dQ_i(x) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i+1} (u_i(x_j^i, 0) - u_I(x_j^i, 0))^2 \Delta Q(x_j^i) \right| \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i+1} h^2 \left(\bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (\varphi'_0) \right)^2 \bigvee_{x_j^i+0}^{x_{j+1}^i-0} (Q) = h^2 \left(\bigvee_{\Gamma} (\varphi'_0) \right)^2 \bigvee_{\Gamma} (Q). \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Оценим остальные слагаемые в правой части тождества (3.19)

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_{\Gamma} w'_t(x, t) (u'_t(x, t) - u'_{It}(x, t)) dM \right| + \\
& \quad + \left| \int_{\Gamma} w'_t(x, t) (u'_t(x, 0) - u'_{It}(x, 0)) dM \right| + \\
& + \int_0^t \left| \int_{\Gamma} w'_t(x, \tau) (u''_{tt}(x, \tau) - u''_{Itt}(x, \tau)) dM \right| d\tau + \\
& + \int_0^t \left| \int_{\Gamma} w'_x(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_x dx \right| d\tau + \\
& + \int_0^t \left| \int_{\Gamma} w(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_x dQ \right| d\tau \leq \\
& \leq \sqrt{\int_{\Gamma} w_t'^2(x, t) dM} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u'_t(x, t) - u'_{It}(x, t))^2 dM} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\int_{\Gamma} w_t'^2(x, 0) dM} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u_t'(x, 0) - u'_{It}(x, 0))^2 dM} + \\
& + \int_0^t \sqrt{\int_{\Gamma} w_t'^2(x, \tau) dM} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u_t'(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))^2 dM} d\tau + \\
& + \int_0^t \sqrt{\int_{\Gamma} w_x'^2(x, \tau) dx} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u''_{tx}(x, \tau) - u''_{Itx}(x, \tau))^2 dx} d\tau + \\
& + \int_0^t \sqrt{\int_{\Gamma} w^2(x, \tau) dQ} \cdot \sqrt{\int_{\Gamma} (u_t'(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))^2 dQ} d\tau. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Заметим,, что второй сомножитель в каждом слагаемом в правой части последнего неравенства оценивается сверху величиной $C\sqrt{h}$ при некоторой постоянной C , не зависящей от h , в силу принадлежности $u(x, t)$ — решения математической модели, классу E . Поэтому, (3.28) принимает вид

$$\begin{aligned}
A \leq C\sqrt{h} & \left(\sqrt{\int_{\Gamma} w_t'(x, t) dM} + \sqrt{\int_{\Gamma} w_t'(x, 0) dM} + \right. \\
& \left. + \int_0^t \left(\sqrt{\int_{\Gamma} w_t'^2(x, \tau) dM} + \sqrt{\int_{\Gamma} w_x'^2(x, \tau) dx} + \sqrt{\int_{\Gamma} w^2(x, \tau) dQ} \right) d\tau \right). \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Таким образом, из (3.19) мы получаем оценку

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq T} & \left(\int_{\Gamma} w_t'^2(x, t) dM + \int_{\Gamma} w_x'(x, t) dx + \int_{\Gamma} w^2(x, t) dQ \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \bar{C} \cdot \sqrt{h},
\end{aligned}$$

где \bar{C} не зависит от h .

Таким образом, мы получаем требуемую оценку. \square

Глава 4

Комплекс программ для реализации численных экспериментов

В этой главе приводится комплекс программ, разработанных для проведения численных экспериментов. Программы написаны на высокоуровневом языке программирования общего назначения Python, ориентированным на повышение производительности и читаемости кода. Библиотека Python включает большой объем полезных функций (см., [27, 70]).

4.1 Программа для реализации численных экспериментов для математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями

Описание программы.

Общие сведения о программе.

Наименование программы — Program2.py.

Для функционирования программы требуется следующее программное обеспечение:

- одна из операционных систем: Linux, Windows XP, 2003, 2007;
- интерпретатор языка Python;
- пакеты math, scipy.integrate, pylab, multiprocessing, mlab.

Для нормальной работы программы необходимо 1 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 6404 bytes.

Программа написана на высокоуровневом языке программирования Python.

Функциональное назначение.

Программа предназначена для нахождения приближенного решения для математической модели малых деформаций растянутой сетки из струн с локализованными особенностями адаптированным методом конечных элементов.

Загрузка программы.

Загрузка программы осуществляется при помощи консоли. Из консоли запускается скрипт Program1.py, в котором задается количество точек разбиения ребер графа N , а также осуществляется выбор представления результатов: либо в виде графиков приближенного значения, либо в виде таблицы значений на каждом ребре графа Γ .

На рисунке 4.1 представлен алгоритм программы Program1.py.



Рис. 4.1: Алгоритм программы

На рисунке 4.2 представлен скрипт программы Program1.py.

```
Введите N 10
Вы хотите построить график приближенного решения или получить таблицу значений?
1 - график
2 - таблица
Сделай выбор. По умолчанию 1: 1
```

Рис. 4.2: Скрипт программы

Эксплуатация программы.

Входными данными для программы являются параметры математической модели (1.1), которые задаются в модуле Data1.py, а именно:

- количество ребер графа;
- сила натяжения;
- распределение упругой реакции внешней среды;
- внешняя сила;
- количество особых точек;
- особые точки;
- упругие опоры и сосредоточенные силы.

Выходными данными программы являются:

- графики приближенного решения на ребрах графа Γ ;
- таблица значений приближенного решения на ребрах графа Γ .

На рисунках 4.3 — 4.4 представлены окна работающей программы Program1.py.

Текст программы представлен в приложении А.1.

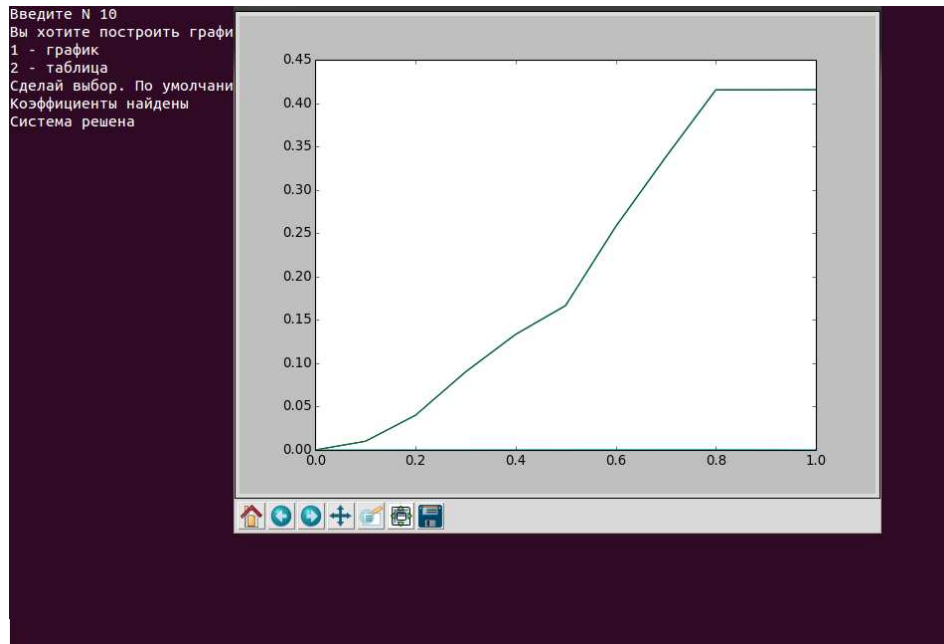


Рис. 4.3: Окно работающей программы

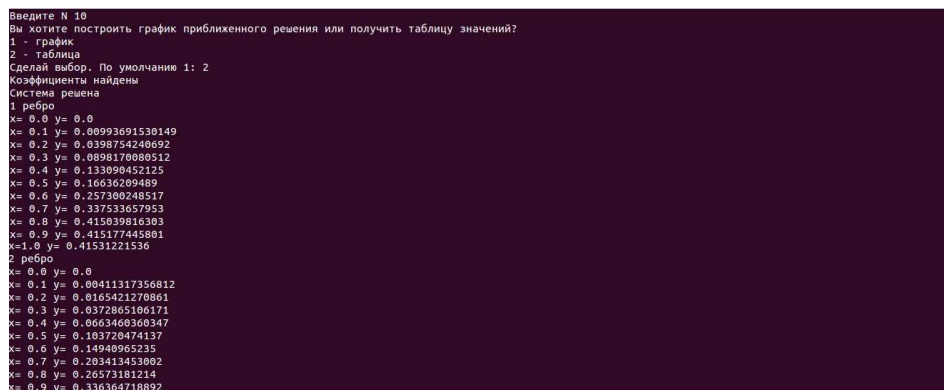


Рис. 4.4: Окно работающей программы

4.2 Программа для реализации численных экспериментов для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями

Описание программы.

Общие сведения о программе.

Наименование программы — Program2.py.

Для функционирования программы требуется следующее программ-

ное обеспечение:

- одна из операционных систем: Linux, Windows XP, 2003, 2007;
- интерпретатор языка Python;
- пакеты math, scipy.special, copy, scipy.integrate, pylab, matrix.

Для нормальной работы программы необходимо 1 ГБ оперативной памяти. Объем исходного текста составляет 11233 bytes.

Программа написана на высокоуровневом языке программирования Python.

Функциональное назначение.

Программа предназначена для нахождения приближенного решения математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями адаптированным методом конечных элементов.

Загрузка программы.

Загрузка программы осуществляется при помощи консоли. Из консоли запускается скрипт Program2.py, в котором задается шаг τ и количество шагов по временной шкале.

На рисунке 4.5 представлен алгоритм программы Program2.py.



Рис. 4.5: Алгоритм программы

На рисунке 4.6 представлен скрипт программы Program2.py.

```

Введите шаг по временной переменной
рекомендуем между 0.01 и 0.001
0.01
Введите количество шагов по временной переменной
1000
  
```

Рис. 4.6: Скрипт программы

Эксплуатация программы.

Входными данными для программы являются параметры математи-

ческой модели (2.1), которые задаются в модуле Data2.py, а именно:

- количество ребер графа;
- распределение массы на графе;
- сила натяжения;
- распределение упругой реакции внешней среды;
- внешняя сила, приложенная к точке x в момент времени t ;
- начальные условия;
- количество особых точек;
- особые точки;
- сосредоточенные массы, упругие опоры в особых точках.

Выходными данными программы являются графики формы сетки из струн при различных значениях времени t на ребрах графа Γ ;

На рисунке 4.7 представлено окно работающей программы Program2.py.

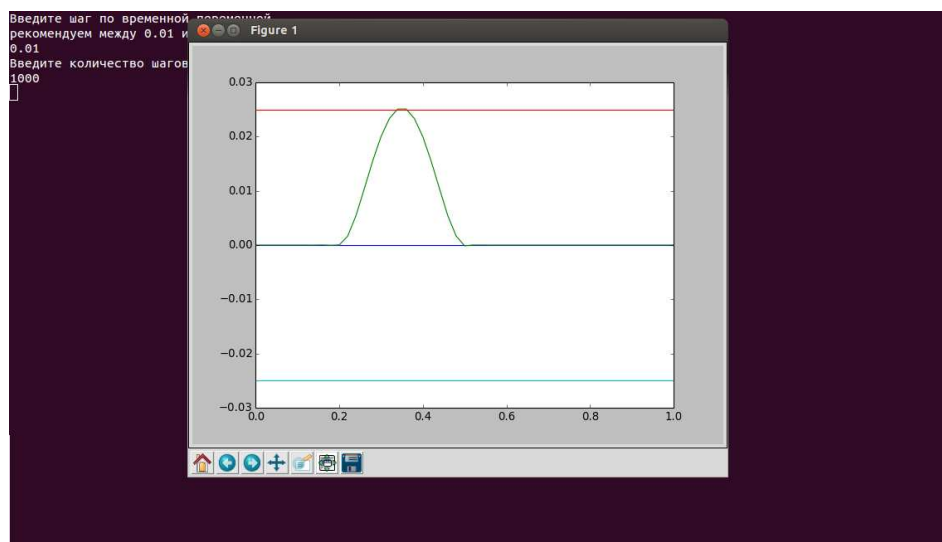


Рис. 4.7: Окно работающей программы

Текст программы представлен в приложении А.2.

Глава 5

Численный эксперимент

В этой главе представлены результаты реализации численных методов при проведении вычислительных экспериментов. Результаты численных экспериментов на тестовых задачах иллюстрируются графическими изображениями и таблицами численных расчетов.

5.1 Первый численный эксперимент

Приведем результаты численного эксперимента на графе Γ для математической модели:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = \frac{dF}{d\Gamma}, \\ u(x)|_{\partial\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Численный эксперимент проведен с помощью программы Program1.py, описание которой приведено в предыдущей главе.

Для удобства представления результатов пусть ребра параметризованы отрезком $[0, 1]$.

Зададим следующие параметры: количество ребер графа Γ — 5, сила натяжения $p(x) \equiv 1$ на всем графе Γ , распределение упругой реакции

внешней среды имеет следующий вид:

$$q_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \xi_1, \\ \frac{x^2}{2}, & \xi_1 \leq x < \xi_2, \\ 0, & \xi_2 \leq x < \xi_3, \\ \frac{x^3}{3}, & \xi_3 \leq x < \xi_4, \\ 2, & \xi_4 \leq x < \xi_5, \\ 1, & \xi_5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$q_2(x) = 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$q_3(x) = 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$q_4(x) = 0, 0 \leq x \leq 1,$$

$$q_5(x) = 0, 0 \leq x \leq 1,$$

где через $q_i(x) = Q'_\sigma(x)$ обозначено сужение $q(x)$ на ребро γ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), а через ξ_i особые точки на ребрах: $\xi_1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$, $\xi_3 = \frac{2}{3}$, $\xi_4 = \frac{3}{4}$, $\xi_5 = \frac{4}{5}$.

Внешняя сила на графе Γ имеет вид:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^3 - 2, & 0 \leq x < \xi_1, \\ 0.1666666666x^3, & \xi_1 \leq x < \xi_2, \\ -6x, & \xi_2 \leq x < \xi_3, \\ 0.112654321x^3, & \xi_3 \leq x < \xi_4, \\ -2.449074074 + 2x^2, & \xi_4 \leq x < \xi_5, \\ 0.4154629630, & \xi_5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = -0.8309259260 + 0.4154629630x^2, 0 \leq x \leq 1,$$

$$f_3(x) = 2.492777778 - 1.246388889x^2 + 1.661851852x, 0 \leq x \leq 1,$$

$$f_4(x) = \frac{8974}{10800}, 0 \leq x \leq 1,$$

$$f_5(x) = \frac{8974}{10800}, 0 \leq x \leq 1,$$

где через $f_i(x)$ обозначено сужение $f(x)$ на ребро γ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Сосредоточенные силы в особых точках на ребре γ_1 равны $fs(\xi_1) = 0.3333333333$, $fs(\xi_2) = -0.4166666667$, $fs(\xi_3) = 1.3333333333$, $fs(\xi_4) = -1.5$, $fs(\xi_5) = 1.6$, на остальных ребрах сосредоточенные силы равны нулю.

Графики приближенного решения на ребрах графа при $N = 10$, найденного разработанной программой Program1, представлены на рисунках 5.1 — 5.5.

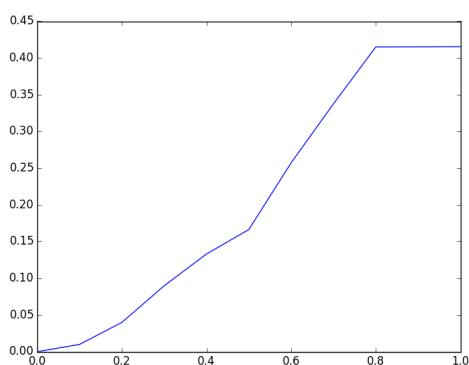


Рис. 5.1: Приближенное решение на ребре γ_1

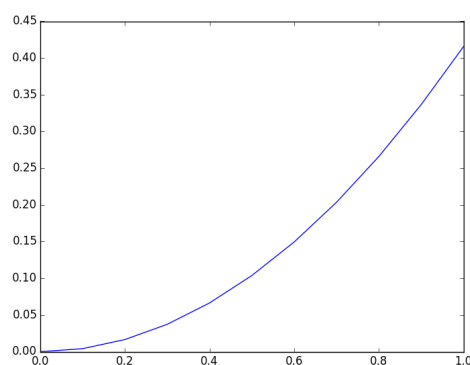


Рис. 5.2: Приближенное решение на ребре γ_2

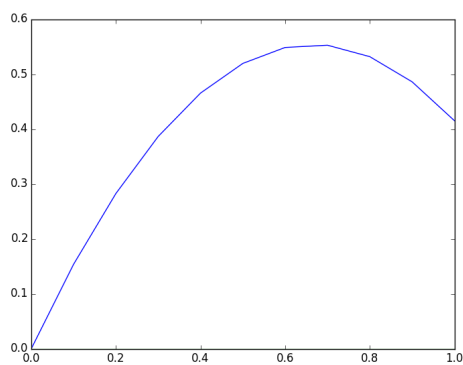


Рис. 5.3: Приближенное решение на ребре γ_3

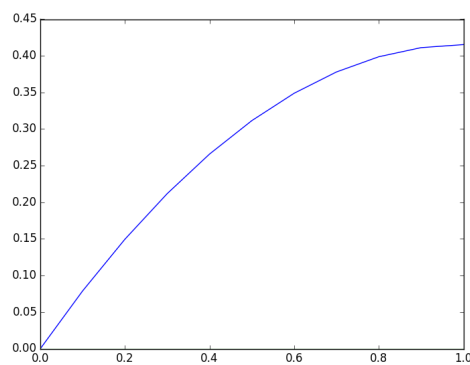


Рис. 5.4: Приближенное решение на ребре γ_4

Таблица 5.1: Значения приближенного решения на ребрах

x	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
$x= 0.0$	$y=0.0$	$y=0.0$	$y=0.0$	$y=0.0$	$y=0.0$
$x= 0.1$	$y= 0.0099$	$y= 0.0041$	$y=0.1331$	$y=0.0789$	$y=0.0789$
$x= 0.2$	$y= 0.0399$	$y= 0.0165$	$y=0.2826$	$y=0.1495$	$y=0.1495$
$x= 0.3$	$y= 0.0898$	$y= 0.0373$	$y=0.3865$	$y=0.2118$	$y=0.2118$
$x= 0.4$	$y= 0.1331$	$y= 0.0663$	$y=0.4655$	$y=0.2658$	$y=0.2658$
$x= 0.5$	$y= 0.1664$	$y= 0.1037$	$y=0.5195$	$y=0.3115$	$y=0.3115$
$x= 0.6$	$y= 0.2573$	$y= 0.1494$	$y=0.5486$	$y=0.3489$	$y=0.3489$
$x= 0.7$	$y= 0.3375$	$y= 0.2034$	$y=0.5527$	$y=0.378$	$y=0.378$
$x= 0.8$	$y= 0.415$	$y= 0.2657$	$y=0.5318$	$y=0.3987$	$y=0.3987$
$x= 0.9$	$y= 0.4152$	$y= 0.3364$	$y=0.486$	$y=0.4112$	$y=0.4112$
$x= 1.0$	$y= 0.4153$	$y= 0.4153$	$y=0.4153$	$y=0.4153$	$y=0.4153$

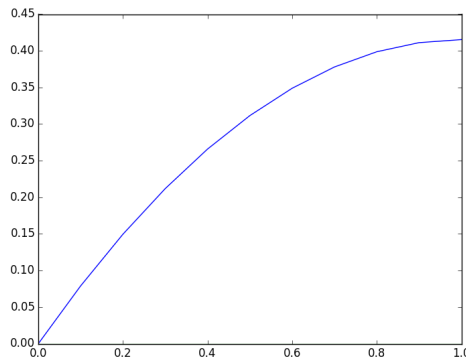


Рис. 5.5: Приближенное решение на ребре γ_5

В таблице 5.1 представлены результаты в виде таблицы значений x, y найденного приближенного решения на каждом ребре, округленные до десятитысячных.

На рисунках 5.6 — 5.20 представлены графики погрешности между известным точным решением рассматриваемой математической модели при заданных параметрах и найденным приближенным решением при разбиении ребер графа на 10, 100 и 1000 равных частей.

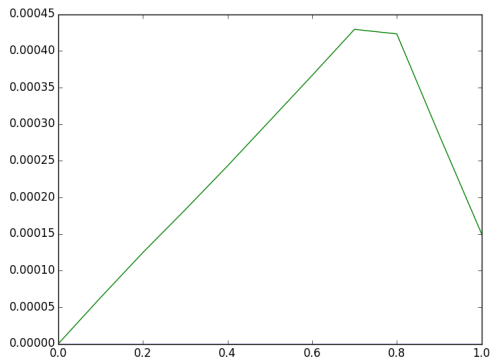


Рис. 5.6: Погрешность решения на ребре γ_1 при $N = 10$

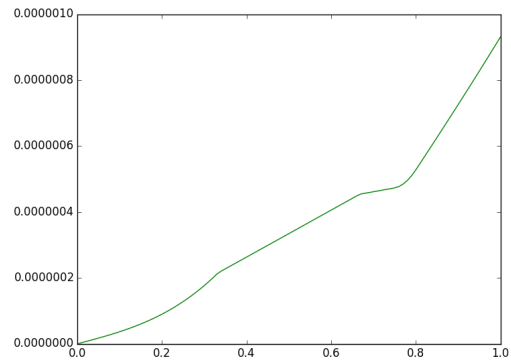


Рис. 5.7: Погрешность решения на ребре γ_1 при $N = 100$

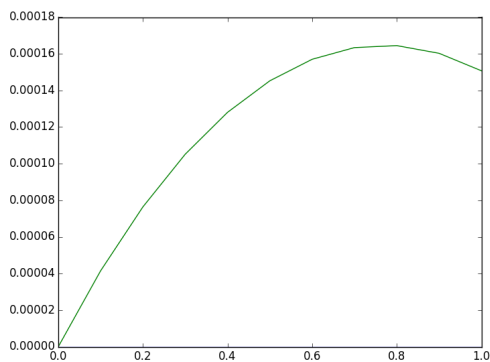


Рис. 5.8: Погрешность решения на ребре γ_2 при $N = 10$

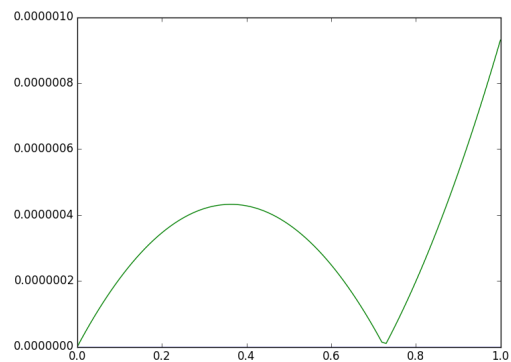


Рис. 5.9: Погрешность решения на ребре γ_2 при $N = 100$

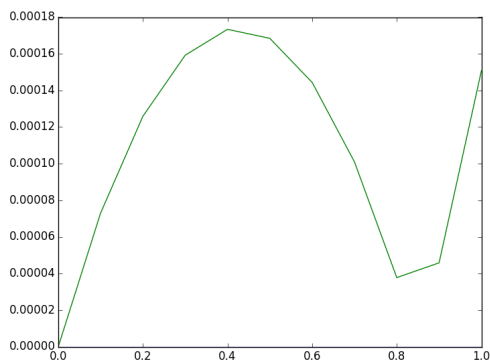


Рис. 5.10: Погрешность решения на ребре γ_3 при $N = 10$

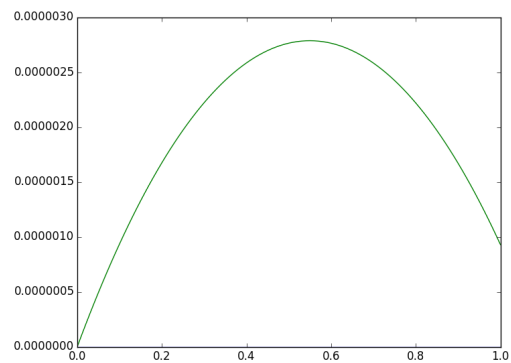


Рис. 5.11: Погрешность решения на ребре γ_3 при $N = 100$

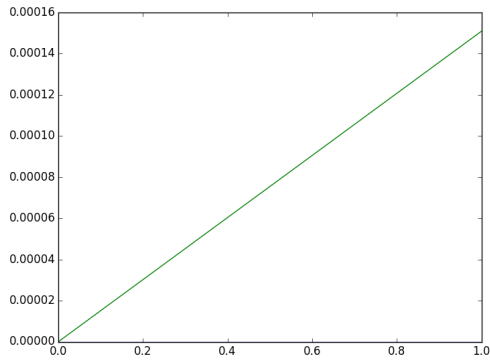


Рис. 5.12: Погрешность решения на ребре γ_4 при $N = 10$

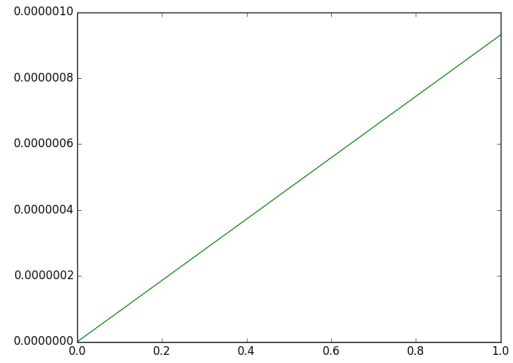


Рис. 5.13: Погрешность решения на ребре γ_4 при $N = 100$

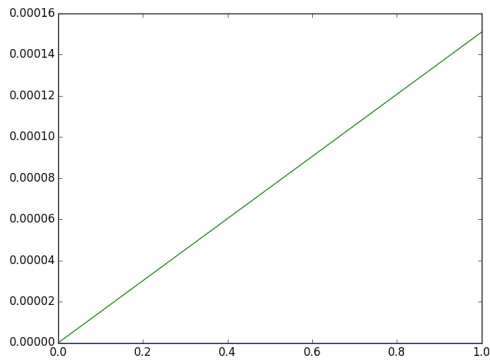


Рис. 5.14: Погрешность решения на ребре γ_5 при $N = 10$

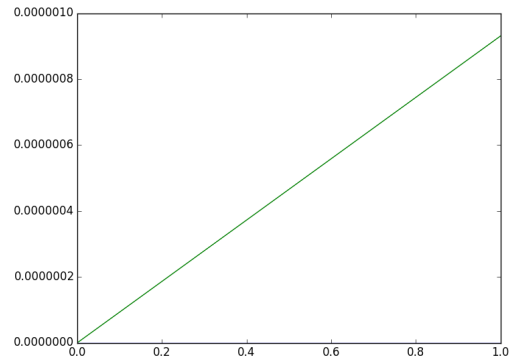


Рис. 5.15: Погрешность решения на ребре γ_5 при $N = 100$

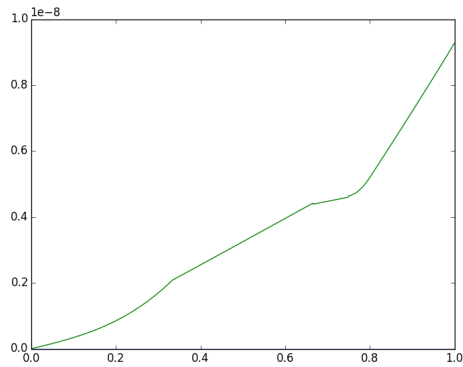


Рис. 5.16: Погрешность решения на ребре γ_1 при $N = 1000$

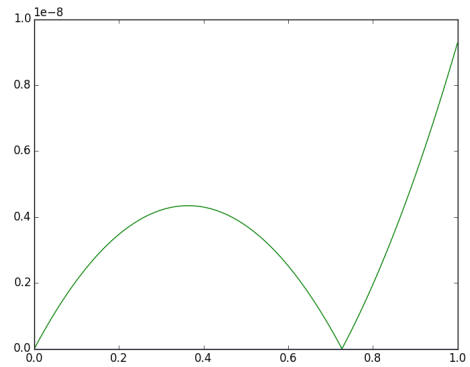


Рис. 5.17: Погрешность решения на ребре γ_2 при $N = 1000$

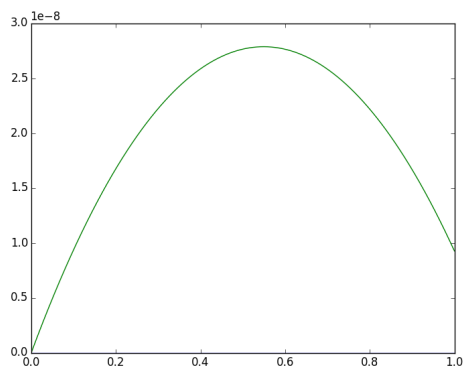


Рис. 5.18: Погрешность решения на ребре γ_3 при $N = 1000$

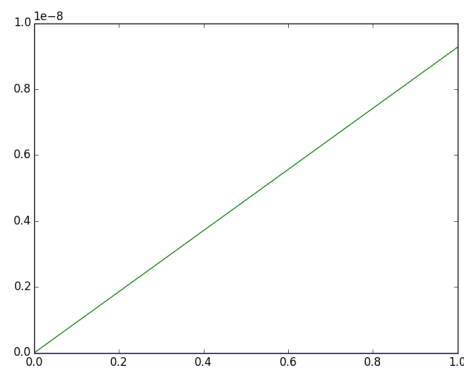


Рис. 5.19: Погрешность решения на ребре γ_4 при $N = 1000$

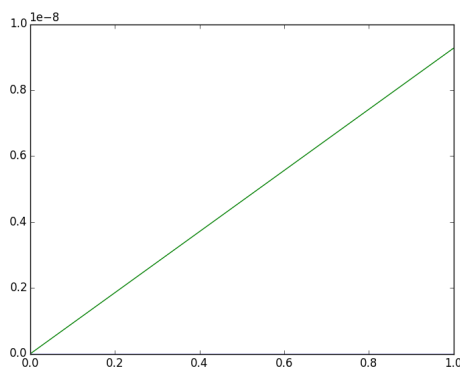


Рис. 5.20: Погрешность решения на ребре γ_5 при $N = 1000$

5.2 Второй численный эксперимент

Приведем результаты численного эксперимента на графе Γ для математической модели:

$$\begin{cases} M'_\Gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u(x, t) Q'_\Gamma(x) + f(x, t), x \in \Gamma \\ u(x, t)|_{\partial \Gamma} = 0, x \in \Gamma \\ u(x, 0) = \varphi_0(x), u'_t(x, 0) = \varphi_1(x), x \in \Gamma. \end{cases}$$

Численный эксперимент проведен с помощью программы Program1.py, описание которой приведено в предыдущей главе.

Для удобства представления результатов пусть ребра параметризованы отрезком $[0, 1]$.

Зададим следующие параметры: количество ребер графа Γ — 5, сила натяжения $p(x) \equiv 1$, распределение упругой реакции внешней среды $q(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$ на всем графе Γ , распределение массы на графе $m(x) = 2$, также заданы массы сосредоточенные в особых точках на ребре γ_1 $m_1(\xi_2) = 4$, на ребре γ_3 $m_3(\xi_5) = 6$.

Начальное отклонение от положения равновесия на каждом ребре γ_i имеет вид:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.2, 0.5 \leq x \leq 1, \\ 50 \cdot (0.2 - x)^2 (x - 0.5)^2, & x > 0.2, x < 0.5, \end{cases}$$

начальная скорость системы равняется нулю на всем графе Γ .

Графики приближенного решения при различных значениях времени t , найденного разработанной программой Program2, представлены на рисунках 5.21 — 5.30. На рисунках 5.21 — 5.25 представлены графики приближенного решения на ребрах γ_i при $t = 0; 0.5; 1$:

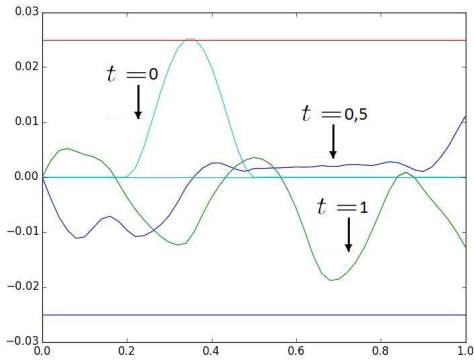


Рис. 5.21: Приближенное решение на ребре γ_1

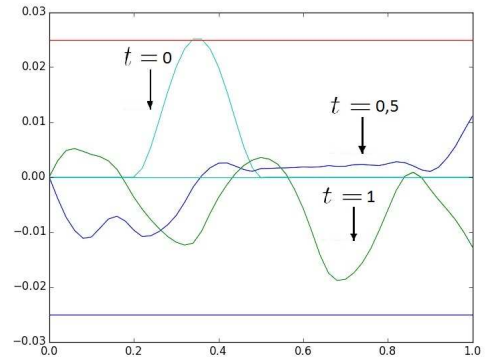


Рис. 5.22: Приближенное решение на ребре γ_2

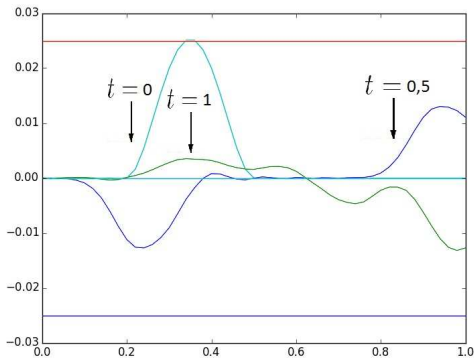


Рис. 5.23: Приближенное решение на ребре γ_3

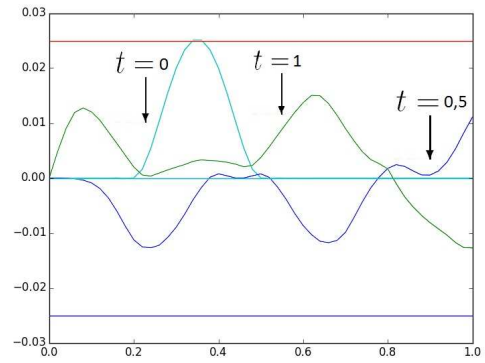


Рис. 5.24: Приближенное решение на ребре γ_4

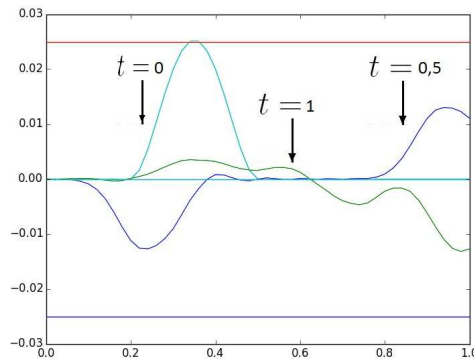


Рис. 5.25: Приближенное решение на ребре γ_5

На рисунках 5.26 — 5.30 представлены графики приближенного решения на ребрах γ_i при $t = 2.2; 2.8; 3.9$:

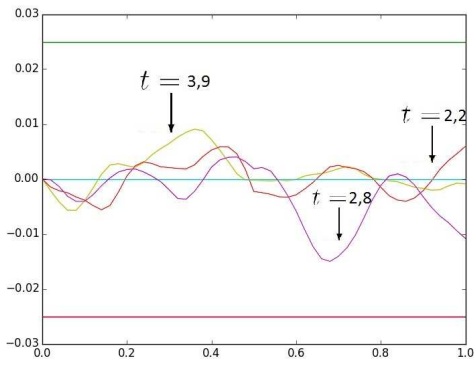


Рис. 5.26: Приближенное решение на ребре γ_1

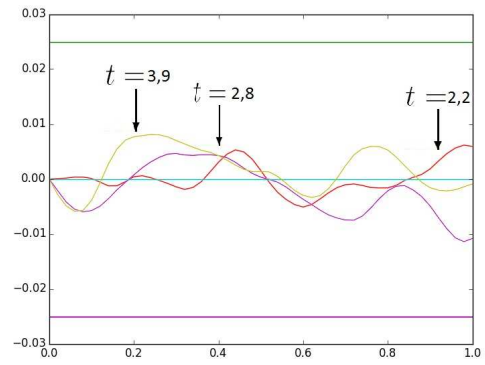


Рис. 5.27: Приближенное решение на ребре γ_2

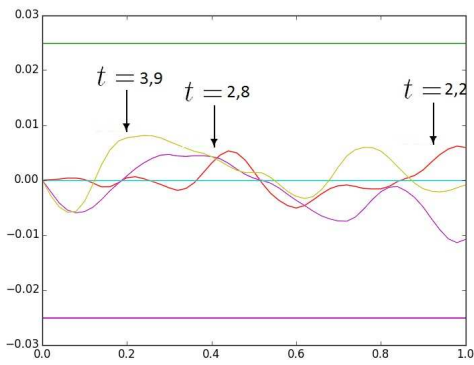


Рис. 5.28: Приближенное решение на ребре γ_3

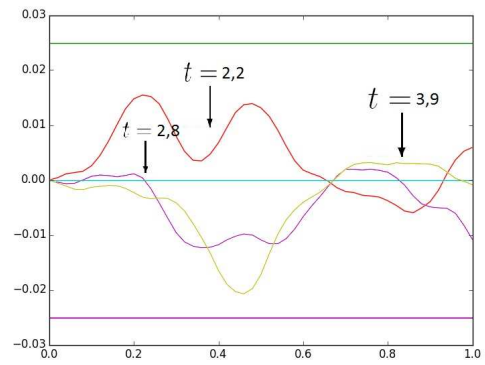


Рис. 5.29: Приближенное решение на ребре γ_4

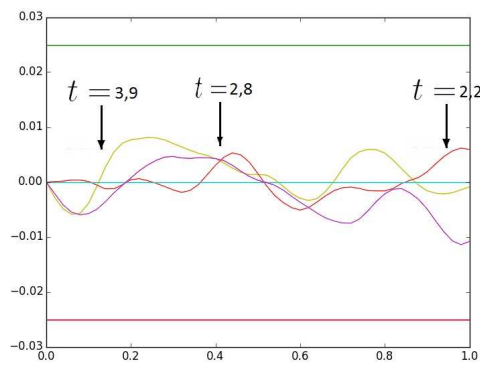


Рис. 5.30: Приближенное решение на ребре γ_5

Заключение

В заключении представим основные результаты диссертационного исследования:

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

2. Доказательство корректности математических моделей на геометрическом графе.

3. Доказательство возможности применения метода Фурье для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами.

4. Разработка эффективных численных методов решения рассматриваемых математических моделей (адаптация метода конечных элементов для математических моделей и оценка сходимости приближенного решения к точному решению);

4. Разработка структуры программного комплекса для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Литература

- [1] Баев А.Д. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А.Д. Баев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованева, Меач Мон // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — №2. — С. 57–63.
- [2] Баев А.Д. Дифференциал Стильтеса в импульсных нелинейных задачах / А.Д. Баев, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Доклады РАН. —2014. — Т. 458, №6. — С. 627.
- [3] Баязитова А.А. Задача Штурма-Лиувилля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2010. — №16. — С. 4–10.
- [4] Боровских А.В. Об одном классе дифференциальных уравнений на пространственной сети / А.В. Боровских, Р. Мустафокулов, К.П. Лазарев, Ю.В. Покорный // Доклады РАН. —1995. — Т. 345, №6. — С. 730–732.
- [5] Бурлуцкая М.Ш. Резольвентный подход в методе Фурье / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов// Доклады РАН. —2014. — Т. 458, №2. — С. 138.
- [6] Бурлуцкая М.Ш. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов// Известия Саратовского университета.Новая серия. Серия: Математика.Механика.Информатика. —2014. — Т. 14, №1. — С. 10–20.

- [7] Бурлуцкая М.Ш. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, В.В. Корнев, А.П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, №9. — С. 1621.
- [8] Волкова А.С. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе / А.С. Волкова, В.В. Провоторов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — №3. — С. 3–18.
- [9] Волкова А.С. Однозначная разрешимость начально-краевых задач с распределенными параметрами на графе / А.С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. — 2013. — Т.18, №5-2. — С. 2473–2475.
- [10] Геворкян Г.А. Плоско-пространственная задача метода конечных элементов / Г.А. Геворкян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2014. — №1. — С. 49–52.
- [11] Гнилицкая Ю.А. Задача идентификации исходных данных волновой системы с распределенными параметрами на графе / Ю.А. Гнилицкая // Системы управления и информационные технологии. — 2014. — Т. 57, №3.1. — С. 143–146.
- [12] Гнилицкая Ю.А. Управление системами с распределенными параметрами на геометрическом графе / Ю.А. Гнилицкая, В.В. Провоторов // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки. — 2013. — Т. 18, №5-2. — С. 2483–2485.
- [13] Гохберг И.Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // М. — 1967. — 508 с.
- [14] Грищенко А.В. Об одной асимптотике функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка на геометрическом графе / А.В. Грищенко, В.Л. Прядиев // Вестник Во-

- ронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — №2. — С. 194–197.
- [15] Давыдова М.Б. О краевых задачах с негладкими и разрывными решениями / М.Б. Давыдова, С.А. Шабров.— Саарбрюкен, 2012. — 92 с.
- [16] Диаб А.Т. О кратности собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля на графах / Адель Т. Диаб, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика.Физика. — 2012. — Т. 27, №11. — С.48–59.
- [17] Завгородний М.Г. Аналог ряда Фурье на геометрическом графе / М.Г. Завгородний, С.П. Майорова // Сб. науч. тр. "Современные методы теории функций и смежные проблемы".— Воронеж: ВГУ.— 2009. — С. 64–65.
- [18] Завгородний М.Г. Метод разделения переменных для жестко сочлененных стержневых систем / М.Г. Завгородний, С.П. Майорова // Вестник Воронеж. гос. техн. ун-та. — 2006. — Т. 2, №8. — С. 57–59.
- [19] Завгородний М.Г. О непрерывной зависимости точек спектра краевой задачи на графе от параметров условий согласования / М.Г. Завгородний, Р.Ч. Кулаев // Владикавказский математический журнал. — 2004. — Т. 6, №2. — С. 10–16.
- [20] Зверева М.Б. Задача граничного управления дифференциальной системой с нелинейным условием / М.Б. Зверева // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — №2. — С. 182–191.
- [21] Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтеса на геометрическом графе / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — №1. — С. 97–105.

- [22] Конарев М.В. К вопросу о приближенном решении краевых задач на геометрическом графах/ М.В. Конарев // — Воронеж: Информационные технологии моделирования и управления.— 2007. — № 5. — С. 537–541.
- [23] Конарев М.В. Сеточные методы решения краевых задач на геометрических графах/ М.В. Конарев // Вестник Воронеж. института высоких технологий. — 2007. — Т. 1, №2-1. — С. 133–136.
- [24] Кулаев Р.Ч. К вопросу о геометрической кратности собственных значений краевой задачи на графе/ Р.Ч. Кулаев // Владикавказский математический журнал.— 2008. — Т. 10, №3. — С. 23–28.
- [25] Кулаев Р.Ч. О корректности параболической задачи на графе / Р.Ч. Кулаев // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.— 2010. — №1. — С. 8–12.
- [26] Лазарев К.П. Разрешимость краевой задачи для разнопорядкового дифференциального уравнения на геометрическом графе /К.П. Лазарев, Т.В. Белоглазова// Математические заметки.— 2006. — Т. 80, №1.— С. 60–68.
- [27] Лутц Марк Программирование на Python/ Пер. с англ. — 4-е изд. — Спб.: Символ-Плюс, 2011.— Т. 1. — 992 с.
- [28] Лылов Е.В. Достаточные условия применимости метода Фурье к математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Научно-технический журнал "Теория и техника радиосвязи". — 2012. — №3.— С. 122–125.
- [29] Лылов Е.В. Математическая модель малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Взаимодействие математики и физики: новые перспективы: материалы Всероссийской молодежной научной школы. — Воронеж: ИПЦ "Научная книга".— 2012. — С. 3–4.

- [30] Лылов Е.В. Метод Фурье для математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов // Научно-аналитический журнал "Научная перспектива". — 2012. — С. 88–91.
- [31] Лылов Е.В. О достаточных условиях применимости метода Фурье к математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXIII". — Воронеж. — 2012. — С. 110.
- [32] Лылов Е.В. О математической модели вынужденных колебаний сетки из струн / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. [ППТУММ-2012]: материалы V Междунар. конф. — 2012. — С. 180–181.
- [33] Лылов Е.В. О методе Фурье для математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики, информатики и механики: сборник трудов международной конферен. — Воронеж, 26-28 ноября 2012 г. — 2012- Ч.1. — С. 49–50.
- [34] Лылов Е.В. Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов для математических модели на геометрическом графе / Е.В. Лылов, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXV". — 2014. — С. 132–133.
- [35] Мартынова Ю.В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе/ Ю.В. Мартынова // Вестник Башкирского ун-та — 2011. — Т. 16, №1. — С. 4–10.

- [36] Махинова О.А. Разностные схемы граничных задач для дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на графе / О.А. Махинова, В.В. Провоторов, Л.Н. Баркова // Актуальные проблемы математики и информатики. Труды математического факультета. — 2010. - №1. — С. 63–89.
- [37] Пенкин О.М. О краевой задаче на графе / О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный // Дифференц. уравнения.— 1988. — Т. 24, №4. — С. 701–703.
- [38] Подгорный С.А. Анализ точности метода конечных элементов / С.А. Подгорный, В.С. Косачев, Е.П. Кошевой, А.А. Схаляхов // Новые технологии, 2013. — №4. — С. 31–38.
- [39] Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. // — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.
- [40] Покорный Ю.В. Дифференциал Стильеса в импульсных задачах с разрывными решениями / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров, М.Б. Давыдова // Доклады РАН.—2005. — Т. 428, №5. — С. 595–597.
- [41] Покорный Ю.В. Об интегрировании в вариационных неравенствах на пространственных сетях / Ю.В. Покорный, И.Ю. Покорная, В.Л. Прядиев, Н.Н. Рябцева // Математические заметки. — 2007. — Т.81, №6. — С. 904–911.
- [42] Покорный Ю.В. Об уравнениях на пространственных сетях / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев // Успехи матем. наук. — 1994. — Т.49, № 4. — С. 140.
- [43] Покорный Ю.В. О дифференциалах Стильеса на геометрических графах / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, Ж.И. Бахтина // Доклады РАН. —2008. — Т. 423, №4. — С. 452–454.

- [44] Покорный Ю.В. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б.Зверева, С.А. Шабров // — М.: Физматлит, 2009.— 192 с.
- [45] Покорный Ю.В. Метод дифференциала Стилтеса в моделировании нерегулярной системы на геометрическом графе / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, Ж.И. Бахтина // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1117–1125.
- [46] Провоторов В.В. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе / В.В. Провоторов, А.С. Волкова // — Воронеж: Научная книга, 2014. — 187 с.
- [47] Прядиев В.Л. Рекуррентная формула для размерности пространства решений задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе / В.Л. Прядиев // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика.Физика — 2011. — Т. 24, №17. — С. 141–149.
- [48] Сакс С. Теория интеграла. —М.: ИЛ, 1949; пер. с англ.: Saks S. Theory of integral. 2nd edition. — С. 127–129.
- [49] Ткаченко А.А. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стилтеса / А.А. Ткаченко, С.А. Шабров // Известия Саратовского университета.Новая серия.Серия: Математика, механика. — 2007. — Т. 7, №2. — С. 36-39.
- [50] Шабров С.А. Адаптация метода конечных элементов для математических моделей на геометрическом графе / С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы". — Воронеж, 2013. — С. 275–277.
- [51] Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — №1. — С. 232–250.

- [52] Шустикова У.И. Сходимость метода конечных элементов для одного класса сингулярно возмущенных краевых задач / У.И. Шустикова // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. Сборник трудов VI международной конференции. — 2013. — С. 279–280.
- [53] Юрко В.А. О восстановлении дифференциальных операторов высших порядков на компактных графах / В.А. Юрко // Доклады РАН.—2008. — Т. 419, №5. — С. 604–608. — 2013. — С. 279–280.
- [54] Ali-Mehmeti F. Nonlinear waves in networks // Math. research, 1994. — V. 80.
- [55] Belov J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks. Journal of differential equation, 1988. — V. 72. — P. 316–337.
- [56] Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. — V. 78.— P. 1–96.
- [57] Dekoninck B. The eigenvalue problem for networks of beams / B. Dekoninck, S. Nicaise // Linear Algebra and its Applications, 2000.— V. 314, №1–3— P. 165–189.
- [58] Dosly O.A. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales / O.A. Dosly, S. Hilger // J. Comp. Appl. Math, 141 (2002).— P. 147–158.
- [59] Farhloul M. A refined mixed finite—element method for the stationary Navier Stokes equations with mixed boundary conditions / M. Farhloul, S. Nicaise, L. Paquet L. // IMA J. of Numerical Analysis, 2008.— V. 28, №1— P. 25.
- [60] Kosachev V.S. Using rounding function in problems of finite-element analysis/ V.S. Kosachev, E.P. Koshevoi, S.A. Podgorny // Studies in mathematical science. 2012.— V. 4, №2.— P. 17–24.
- [61] Kuchment P. Quantum graphs some basic structures / P. Kuchment // Waves in Randon media, 14 (2004).— P. 107–128.

- [62] Lagnese J.E. Modelling analysis and control of dynamic elastic multilink structures / Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G. // Boston: Birkhauser, 1994.
- [63] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network // Lect. Notes Math. V. 787. — Berlin: Springer, 1980. — P. 219–234.
- [64] Nicaise S. Relationship between the lower frequency spectrum of plates and network of beams / S.Nicaise, O. Penkin // Math. Mech. Appl.Sai.—2000. — V. 23. — P. 1389–1399.
- [65] Pokornyi Yu.V. An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem / Yu.V.Pokornyi, M.B. Zvereva, S.A. Shabrov, A.S. Ishenko // Mathematical Notes. — 2007. — V.82, № 3-4.— P. 518–521.
- [66] Pokornyi Yu.V. Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation with Generalized Coefficients / Yu.V.Pokornyi, S.A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences.— 2004.— V.119, № 6.— P. 769–787.
- [67] Rannacher R. Methods for numerical flow simulation. Institute of Applied Mathematics, University of Heidelberg, Germany, 2007. — P. 1–58.
- [68] Roth J.-P. Spectre du laplacien sur un graphe // C.R.Acad.Sc. — Paris, 1983. — V. 296. — P. 783–795.
- [69] Roth J.-P. Le spectre du laplacien sur un graphe // Lect. Notes Math. Springer-Verlag, 1984. — P. 521–539.
- [70] Sweigart A. Core Python Applications Programming. Third Edition, 2012. — 888 p.

Приложение А

Приложения

А.1 Текст программы Program1.py.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

import math
import scipy.integrate as spint
import copy
import pylab
import multiprocessing from matplotlib
import mlab from decimal import *

# Исходные параметры модели
import Data1 as Data1
R=Data1.R
Mxi=Data1.Mxi
xii=Data1.xii
fs=Data1.fs
qs=Data1.qs
fsa=Data1.fsa
qsa=Data1.qsa
p=Data1.p
Q=Data1.Q
```

```

f=Data1.f

# Задание количества точек разбиения ребер графа
VV=True
while VV:
    try:
        N=input("Введите N ")
        if (not(N>0)) or N!=int(N):
            print "Число должно быть натуральным"
        else:
            VV=not(N>0)
    except:
        print "Некорректное число"

# Выбор представления результатов

print "Вы хотите построить график приближенного решения
или получить
таблицу значений? "
print "1 - график"
print "2 - таблица"
Change=1
VV=True
while VV:
    try:
        Change=input("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
    except:
        Change=1
    VV=not(Change==1 or Change==2)

L=R*(N-1)+1
x=[]

```

```

# Массив диагональных элементов матрицы A
A=[]
A+=[0.0 for i in xrange(0,L)]

# Одномерный массив элементов, находящихся над и под главной
диагональю матрицы
Bsup=[]
Bsup+=[0.0 for i in xrange(0,L-1)]

ff=[]
ff+=[0.0 for i in xrange(0,L)]

# Вычисление коэффициентов системы
for k in range(R):
    for m in range(1,N):
        c,d = spint.quad(lambda x: p(x,k+1), (m-1.0)/N, (m+1.0)/N)
        A[k*(N-1)+m-1]+=c*(N**2)
        c,d=spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*(1.0*N*x-m+1)**2,\
(m-1.0)/N, (1.0*m)/N)
        A[k*(N-1)+m-1]+=c
        c,d=spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*(1.0*N*x-m-1)**2,\
(1.0*m)/N, (m+1.0)/N)
        A[k*(N-1)+m-1]+=c
        for j in range(Mxi):
            if (xii[k][j]>=(m-1.0)/N) and \
(xii[k][j] <=(m*1.0)/N):\
                A[k*(N-1)+m-1]+=qs[k][j]*\
                (1.0*N*xii[k][j]-m+1)**2
            elif (xii[k][j]>=(m*1.0)/N) and \
(xii[k][j] <=(m+1.0)/N):
                A[k*(N-1)+m-1]+=qs[k][j]*\

```

```

        (1.0*N*xii[k][j]-m-1)**2
c,d=spint.quad(lambda x:f(x,k+1)*\
(1.0*N*x-m+1),\
(m-1.0)/N,1.0*m/N)
ff[k*(N-1)+m-1]+=c
c,d=spint.quad(lambda x:f(x,k+1)*(m+1-1.0*N*x),\
1.0*m/N,(m+1.0)/N)
ff[k*(N-1)+m-1]+=c
for jj in range(Mxi):
    if (xii[k][jj]>=(m-1.0)/N) and \
(xii[k][jj] <(m*1.0)/N):
        ff[k*(N-1)+m-1]+=fs[k][jj]*\
(1.0*N*xii[k][jj]-m+1)
for jj in range(Mxi):
    if (xii[k][jj]<=(m+1.0)/N) and \
(xii[k][jj] >=(m*1.0)/N):
        ff[k*(N-1)+m-1]+=fs[k][jj]*\
(m+1-1.0*N*xii[k][jj])
for m in range(1,N-1):
c,d=spint.quad(lambda x:p(x,k+1),(1.0*m)/N,(m+1.0)/N)
Bsup[k*(N-2)+m-1]+=-c*N**2
c,d=spint.quad(lambda x:Q(x,k+1)*\
(1.0*N*x-m)*(m+1-1.0*N*x),\
(1.0*m)/N,1.0*(m+1)/N)
Bsup[k*(N-2)+m-1]+=c
for j in range(Mxi):
    if (xii[k][j]>=(m-1.0)/N) and \
(xii[k][j] <=(m*1.0)/N):
        Bsup[k*(N-2)+m-1]+=qs[k][j]*\
(1.0*N*xii[k][j]-m+1)*\
(1.0*N*xii[k][j]-m)
c,d = spint.quad(lambda x: p(x,k+1),\

```

```

(1.0*N-1)/N, 1.0)
Bsup[L-R+k-1]+=-c*N**2
c,d = spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*\
(N-1.0*N*x)*(1.0*N*x-N+1),\
(N-1.0)/N, 1.0)
Bsup[L-R+k-1]+=c
for j in range(Mxi):
    if (xii[k][j]>=(N-1.0)/N) and (xii[k][j]<=1.0):
        Bsup[L-R+k-1]+=qs[k][j]*(1.0*N*xii[k][j]-N+1)*\
(N-1.0*N*xii[k][j])
for k in range(R):
    c,d = spint.quad(lambda x: p(x,k+1),(N-1.0)/N,1.0)
    A[R*(N-1)]+=c*(N**2)
    c,d = spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*(1.0*N*x-N+1)**2,\
(N-1.0)/N,1.0)
    A[R*(N-1)]+=c
    for j in range(Mxi):
        if (xii[k][j]>=(N-1.0)/N) and (xii[k][j]<=1.0):
            A[R*(N-1)]+=qs[k][j]*(1.0*N*xii[k][j]-N+1)**2
    c,d = spint.quad(lambda x: f(x,k+1)*(1.0*N*x-N+1),\
(N-1.0)/N,1.0)
    ff[R*(N-1)]+=c
    for jj in range(Mxi):
        if (xii[k][jj]>=(N-1.0)/N) and (xii[k][jj]<=1.0):
            ff[R*(N-1)]+=fs[k][jj]*(1.0*N*xii[k][jj]-N+1)
ff[R*(N-1)]+=fsa[0] A[R*(N-1)]+=qsa[0]
print "Коэффициенты найдены"

# Реализация метода прогонки

xx=[0.0 for i in xrange(L)]
for k in range(1,R+1):

```

```

for m in range(1,N-1):
    ff[(k-1)*(N-1)+m] -= ff[(k-1)*(N-1)+m-1]*\
        Bsup[(k-1)*(N-2)+m-1]/A[(k-1)*(N-1)+m-1]
    A[(k-1)*(N-1)+m] -= Bsup[(k-1)*(N-2)+m-1]*\
        Bsup[(k-1)*(N-2)+m-1]/A[(k-1)*(N-1)+m-1]
ff[R*(N-1)] -= ff[(k-1)*(N-1)+N-2]*\
    Bsup[R*(N-1)+k-1-R]/A[(k-1)*(N-1)+N-2]
A[R*(N-1)] -= Bsup[R*(N-1)+k-1-R]*\
    Bsup[R*(N-1)+k-1-R]/A[(k-1)*(N-1)+N-2]
xx[R*(N-1)] = ff[R*(N-1)]/A[R*(N-1)]
for k in range(R-1,-1,-1):
    ff[k*(N-1)+N-2] -= xx[R*(N-1)]*Bsup[R*(N-1)+k-R]
for k in range(R-1,-1,-1):
    xx[k*(N-1)+N-2] = ff[k*(N-1)+N-2]/A[k*(N-1)+N-2]
    for m in range(N-2,0,-1):
        xx[k*(N-1)+m-1] = (ff[k*(N-1)+m-1] -\
            Bsup[k*(N-2)+m-1]*xx[k*(N-1)+m])/A[k*(N-1)+m-1]
print "Система решена"

# Шаг между точками
dx=1.0/N

# Нахождение приближенного решения
if Change==1:
    xlist=mlab.frange(0, 1, dx)
    def ASol(x,i):
        if x<=1.0/N:
            return N*float(xx[(i-1)*(N-1)])*x
        elif x>=(N-1.0)/N:
            return float(xx[(i-1)*(N-1)+N-2])+\
                (float(xx[R*(N-1)])-float(xx[(i-1)*\
                (N-1)+N-2]))*(1.0*x*N-N+1)

```



```

else:
    for j in range(N):
        if x >= 1.0*(j+1)/N and x < 1.0*(j+2)/N:
            return float(xx[(i-1)*(N-1)+j])+1.0*\
                (float(xx[(i-1)*(N-1)+j+1]-xx[(i-1)*\
                    (N-1)+j]))*N*\
                (1.0*x-1.0*(j+1)/N)

# Вывод приближенного решения в виде графика на каждом ребре
for i in range(R):
    print i+1, "ребро"
    print "x=", "0.0", "y=", "0.0"
    for m in range (N-1):
        print "x=", 1.0*(m+1)/N, "y=", xx[i*(N-1)+m]
    print 'x=1.0', 'y=', xx[R*(N-1)]

# Вывод результатов в виде таблицы значений приближенного решения
elif Change==2:
    for i in range(R):
        print i+1, "ребро"
        for m in range (N-1):
            print "x=", 1.0*m/N, "y=", xx[i*(N-1)+m]
        print 'x=1.0', 'y=', xx[R*(N-1)]

```

A.2 Текст программы Program2.py.

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

import math
import scipy.special
import copy
import scipy.integrate as spint
import copy,time
import pylab from matplotlib
import mlab from numpy
import matrix from numpy
import linalg

#Исходные параметры модели
import Data2 as Data2
R=Data2.R
Mxi=Data2.Mxi
xii=Data2.xii
M=Data2.M
Mxii=Data2.Mxii
Phi0=Data2.Phi0
Phi1=Data2.Phi1
f=Data2.f
ffxii=Data2.ffxii
fsa=Data2.fsa
Q=Data2.Q
qs=Data2.qs
qsa=Data2.qsa
p=Data2.p

# Количество точек разбиения ребер графа
```

```

N = 50

# Задание шага по временной переменной
VV=True
while VV:
    try:
        print "Введите шаг по временной переменной"
        print "рекомендуем между 0.01 и 0.001"
        tau=float(input())
        VV=False
    except:
        print "Некорректное число"
if tau<0.001 or tau>0.01:
    tau=0.005

# Задание количества шагов по временной переменной
print "Введите
количество шагов по временной переменной"
Kol=0
while Kol==0:
    try:
        Kol=int(input())
        if Kol==0:
            print "Нулевое значение недопустимо"
    except:
        print "Некорректное число"

L=R*(N-1)+1
A=[]
A+=[2/(3.0*N) for i in xrange (0,L)]
A[L-1]=R/(3.0*N)

```

```

B=[]
B+=[1/(6.0*N) for i in xrange (0,L)]
x1=[]
x1+=[0.0 for i in xrange (0,L)]
x2=[]
x2+=[0.0 for i in xrange (0,L)]

# Нахождение двух начальных слоев
for k in range(R):
    for m in range(1,N):
        c,d=spint.quad(lambda x: Phi0(x,k+1)*\
            (1.0*N*x-m+1), (m-1.0)/N, (1.0*m)/N)
        x1[k*(N-1)+m-1]+=c
        c,d=spint.quad(lambda x: Phi0(x,k+1)*\
            (m+1-1.0*N*x), (1.0*m)/N, (m+1.0)/N)
        x1[k*(N-1)+m-1]+=c
for k in range(R):
    c,d = spint.quad(lambda x: Phi0(x,k+1)*\
        (1.0*N*x-N+1), (N-1.0)/N, 1.0)
    x1[R*(N-1)]+=c

# Реализация метода прогонки
uu1=[0.0 for i in xrange(L)]
for k in range(1,R+1):
    for m in range(1,N-1):
        x1[(k-1)*(N-1)+m]-=x1[(k-1)*(N-1)+m-1]*\
            B[(k-1)*(N-2)+m-1]/A[(k-1)*(N-1)+m-1]
        A[(k-1)*(N-1)+m]-=B[(k-1)*(N-2)+m-1]*\
            B[(k-1)*(N-2)+m-1]/A[(k-1)*(N-1)+m-1]
    x1[R*(N-1)]-=x1[(k-1)*(N-1)+N-2]*\
        B[R*(N-1)+k-1-R]/A[(k-1)*(N-1)+N-2]
    A[R*(N-1)]-=B[R*(N-1)+k-1-R]*\

```

```

    B[R*(N-1)+k-1-R]/A[(k-1)*(N-1)+N-2]
uu1[R*(N-1)]=x1[R*(N-1)]/A[R*(N-1)]
for k in range(R-1,-1,-1):
    x1[k*(N-1)+N-2]-=uu1[R*(N-1)]*B[R*(N-1)+k-R]
for k in range(R-1,-1,-1):
    uu1[k*(N-1)+N-2]=x1[k*(N-1)+N-2]/A[k*(N-1)+N-2]
    for m in range(N-2,0,-1):
        uu1[k*(N-1)+m-1]=(x1[k*(N-1)+m-1]-B[k*(N-2)+m-1]*\
            uu1[k*(N-1)+m])/A[k*(N-1)+m-1]
for k in range(1,R):
    for m in range(1,N):
        c,d=spint.quad(lambda x: Phi1(x,k+1)*\
            (1.0*N*x-m+1),(m-1.0)/N,(1.0*m)/N)
        x2[k*(N-1)+m-1]+=c
        c,d=spint.quad(lambda x: Phi1(x,k+1)*\
            (m+1-1.0*N*x),(1.0*m)/N,(m+1.0)/N)
        x2[k*(N-1)+m-1]+=c
for k in range(R):
    c,d = spint.quad(lambda x: Phi1(x,k+1)*(1.0*N*x-N+1),\
        (N-1.0)/N,1.0)
    x2[R*(N-1)]+=c

# Реализация метода прогонки
uu2=[0.0 for i in xrange(L)]
for k in range(1,R+1):
    for m in range(1,N-1):
        x2[(k-1)*(N-1)+m]-=x2[(k-1)*(N-1)+m-1]*\
            B[(k-1)*(N-2)+m-1]/A[(k-1)*(N-1)+m-1]
        A[(k-1)*(N-1)+m]-=B[(k-1)*(N-2)+m-1]*\
            B[(k-1)*(N-2)+m-1]/A[(k-1)*(N-1)+m-1]
    x2[R*(N-1)]-=x2[(k-1)*(N-1)+N-2]*\
        B[R*(N-1)+k-1-R]/A[(k-1)*(N-1)+N-2]

```

```

A[R*(N-1)] -= B[R*(N-1)+k-1-R]*\
B[R*(N-1)+k-1-R]/A[(k-1)*(N-1)+N-2]
uu2[R*(N-1)] = x2[R*(N-1)]/A[R*(N-1)]
for k in range(R-1, -1, -1):
    x2[k*(N-1)+N-2] -= uu2[R*(N-1)]*\
    B[R*(N-1)+k-R]
for k in range(R-1, -1, -1):
    uu2[k*(N-1)+N-2] = x2[k*(N-1)+N-2]/A[k*(N-1)+N-2]
    for m in range(N-2, 0, -1):
        uu2[k*(N-1)+m-1] = (x2[k*(N-1)+m-1] - B[k*(N-2)+m-1]*\
        uu2[k*(N-1)+m])/A[k*(N-1)+m-1]
u2 = []
for i in xrange(L):
    u2 += [0.0 for i in xrange(L)]
    u2[i] = uu1[i] + uu2[i]*tau

# Вычисление коэффициентов системы
A = []
A += [0.0 for i in xrange(0, L)]
Asup = []
Asup += [0.0 for i in xrange(0, L-1)]
for k in
range(R):
    for m in range(1, N):
        c, d = spint.quad(lambda x: M(x, k+1)*\
(1.0*N*x-m+1)**2, (m-1.0)/N, (1.0*m)/N)
        A[k*(N-1)+m-1] += c
        c, d = spint.quad(lambda x: M(x, k+1)*\
(m+1-1.0*N*x)**2, (1.0*m)/N, (m+1.0)/N)
        A[k*(N-1)+m-1] += c
        for j in range(Mxi):
            if (xii[k][j] >= (m-1.0)/N) and \
(xii[k][j] <= (m+1.0)/N):
                A[k*(N-1)+m-1] += Mxii[k][j]*\

```

```

        (1.0*N*xii[k][j]-m+1)**2
    elif (xii[k][j]>=(m*1.0)/N) and \
        (xii[k][j] <=(m+1.0)/N):
        A[k*(N-1)+m-1]+=Mxii[k][j]*\
        (1.0*N*xii[k][j]-m-1)**2
for m in range(1,N-1):
    c,d=spint.quad(lambda x: M(x,k+1)*(m+1-1.0*N*x)*\
        (1.0*N*x-m), (1.0*m)/N, (m+1.0)/N)
    Asup[k*(N-2)+m-1]+=c
    for j in range(Mxi):
        if (xii[k][j]>=(m-1.0)/N) and (xii[k][j]<=(m*1.0)/N):
            Asup[k*(N-2)+m-1]+=Mxii[k][j]*\
            (1.0*N*xii[k][j]-m+1)*(m-1.0*N*xii[k][j])
    c,d = spint.quad(lambda x: M(x,k+1)*\
        (N-1.0*N*x)*(1.0*N*x-N+1), (N-1.0)/N, 1.0)
    Asup[L-R+k-1]+=c
    for j in range(Mxi):
        if (xii[k][j]>=(N-1.0)/N) and (xii[k][j]<=1.0):
            Asup[L-R+k-1]+=Mxii[k][j]*\
            (1.0*N*xii[k][j]-N+1)*(N-1.0*N*xii[k][j])
for k in range(R):
    c,d = spint.quad(lambda x: M(x,k+1)*\
        (1.0*N*x-N+1)**2, (N-1.0)/N, 1.0)
    A[R*(N-1)]+=c
    for j in range(Mxi):
        if (xii[k][j]>=(N-1.0)/N) and \
            (xii[k][j]<=1.0):
            A[R*(N-1)]+=Mxii[k][j]*\
            (1.0*N*xii[k][j]-N+1)**2

B=[]
B+=[0.0 for i in xrange (0,L)]
Bsup=[]

```

```

Bsup+=[0.0 for i in xrange (0,L-1)]
for k in range(R):
    for m in range(1,N):
        c,d = spint.quad(lambda x: p(x,k+1), (m-1.0)/N, (m+1.0)/N)
        B[k*(N-1)+m-1]+=c*(N**2)
        c,d=spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*\
            (1.0*N*x-m+1)**2, (m-1.0)/N, (1.0*m)/N)
        B[k*(N-1)+m-1]+=c
        c,d=spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*\
            (1.0*N*x-m-1)**2, (1.0*m)/N, (m+1.0)/N)
        B[k*(N-1)+m-1]+=c
        for j in range(Mxi):
            if (xii[k][j]>=(m-1.0)/N) and \
                (xii[k][j] <=(m*1.0)/N):
                B[k*(N-1)+m-1]+=qs[k][j]*\
                    (1.0*N*xii[k][j]-m+1)**2
            elif (xii[k][j]>=(m*1.0)/N) and \
                (xii[k][j] <=(m+1.0)/N):
                B[k*(N-1)+m-1]+=qs[k][j]*\
                    (1.0*N*xii[k][j]-m-1)**2
    for m in range(1,N-1):
        c,d=spint.quad(lambda x:p(x,k+1),\
            (1.0*m)/N, (m+1.0)/N)
        Bsup[k*(N-2)+m-1]+=-c*N**2
        c,d=spint.quad(lambda x:Q(x,k+1)*\
            (1.0*N*x-m)*(m+1-1.0*N*x), (1.0*m)/N, 1.0*(m+1)/N)
        Bsup[k*(N-2)+m-1]+=c
        for j in range(Mxi):
            if (xii[k][j]>=(m-1.0)/N) and \
                (xii[k][j] <=(m*1.0)/N):
                Bsup[k*(N-2)+m-1]+=qs[k][j]*\
                    (1.0*N*xii[k][j]-m+1)*(1.0*N*xii[k][j]-m)

```



```

c,d = spint.quad(lambda x: p(x,k+1), (1.0*N-1)/N, 1.0)
Bsup[L-R+k-1]+=-c*N**2
c,d = spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*(N-1.0*N*x)*\
(1.0*N*x-N+1), (N-1.0)/N, 1.0)
Bsup[L-R+k-1]+=c
for j in range(Mxi):
    if (xii[k][j]>=(N-1.0)/N) and (xii[k][j]<=1.0):
        Bsup[L-R+k-1]+=qs[k][j]*\
            (1.0*N*xii[k][j]-N+1)*(N-1.0*N*xii[k][j])
for k in range(R):
    c,d = spint.quad(lambda x: p(x,k+1), (N-1.0)/N,1.0)
    B[R*(N-1)]+=c*(N**2)
    c,d = spint.quad(lambda x: Q(x,k+1)*\
(1.0*N*x-N+1)**2, (N-1.0)/N,1.0)
    B[R*(N-1)]+=c
    for j in range(Mxi):
        if (xii[k][j]>=(N-1.0)/N) and (xii[k][j]<=1.0):
            B[R*(N-1)]+=qs[k][j]*\
                (1.0*N*xii[k][j]-N+1)**2
B[R*(N-1)]+=qsa[0]

```

Закончили вычисление коэффициентов системы

Вычисление правой части

dx=1.0/N

xlist=mlab.frange(0, 1, dx)

for j in range(R*Kol+1):

ff=[]

ff+=[0.0 for i in xrange (0,L)]

fff=[]

fff+=[0.0 for i in xrange (0,L)]

for k in range(R):

```

for m in range(1,N):
    c,d=spint.quad(lambda x: f(x,(1.0*j*tau),k+1)*\
(1.0*N*x-m+1),(m-1.0)/N,(1.0*m)/N)
    ff[k*(N-1)+m-1]+=c
    c,d=spint.quad(lambda x: f(x,(1.0*j*tau),k+1)*\
(m+1-1.0*N*x),(1.0*m)/N,(m+1.0)/N)
    ff[k*(N-1)+m-1]+=c
    for jj in range(Mxi):
        if (xii[k][jj]>=(m-1.0)/N) and \
(xii[k][jj]<=(m*1.0)/N):
            ff[k*(N-1)+m-1]+=ffxii[k][jj]*\
(1.0*N*xii[k][jj]-m+1)
        elif (xii[k][jj]>=(m*1.0)/N) and \
(xii[k][jj]<=(m+1.0)/N):
            ff[k*(N-1)+m-1]+=ffxii[k][jj]*\
(m+1.0-1.0*N*xii[k][jj])
for gg in range(R):
    c,d=spint.quad(lambda x: f(x,(1.0*j*tau),gg+1)*\
(1.0*N*x-N+1),(N-1.0)/N,1.0)
    ff[L-1]+=c
for jj in range(Mxi):
    if (xii[k][jj]>=(N-1.0)/N) and (xii[k][jj]<=1.0):
        ff[L-1]+=ffxii[k][jj]*(1.0*N*xii[k][jj]-N+1)

# Решение системы
for i in xrange(R):
    fff[i*(N-1)]=ff[i*(N-1)]-B[i*(N-1)]*u2[i*(N-1)]-\
Bsup[i*(N-1)]*u2[i*(N-1)+1]
    for ij in range(1,N-1):
        fff[i*(N-1)+ij]=ff[i*(N-1)+ij]-Bsup[i*(N-2)+ij-1]*\
u2[i*(N-1)+ij-1]-B[i*(N-1)+ij]*u2[i*(N-1)+ij]-\
Bsup[i*(N-2)+ij]*u2[i*(N-1)+ij+1]

```

```

        fff[i*(N-1)+N-2]=ff[i*(N-1)+N-1]-Bsup[i*(N-2)+N-2]*\
        u2[i*(N-1)+N-3]-B[i*(N-1)+N-2]*u2[i*(N-1)+N-2]-\
        Bsup[R*(N-2)+i]*u2[L-1]
    fff[L-1]=ff[L-1]-B[L-1]*u2[L-1]
    for ij in range(R):
        fff[L-1]-=Bsup[R*(N-2)+ij-1]*u2[ij*(N-1)+N-2]
    Aa=copy.deepcopy(A)
    Aa1=copy.deepcopy(Asup)
    fff1=copy.deepcopy(fff)

# Реализация метода прогонки
    uu3=[0.0 for i in xrange(L)]
    for k in range(1,R+1):
        for m in range(1,N-1):
            fff1[(k-1)*(N-1)+m]-=fff1[(k-1)*(N-1)+m-1]*\
            Aa1[(k-1)*(N-2)+m-1]/Aa[(k-1)*(N-1)+m-1]
            Aa[(k-1)*(N-1)+m]-=Aa1[(k-1)*(N-2)+m-1]*\
            Aa1[(k-1)*(N-2)+m-1]/Aa[(k-1)*(N-1)+m-1]
        fff1[R*(N-1)]-=fff1[(k-1)*(N-1)+N-2]*\
        Aa1[R*(N-1)+k-1-R]/Aa[(k-1)*(N-1)+N-2]
        Aa[R*(N-1)]-=Aa1[R*(N-1)+k-1-R]*\
        Aa1[R*(N-1)+k-1-R]/Aa[(k-1)*(N-1)+N-2]
    uu3[R*(N-1)]=fff1[R*(N-1)]/Aa[R*(N-1)]
    for k in range(R-1,-1,-1):
        fff1[k*(N-1)+N-2]-=uu3[R*(N-1)]*Aa1[R*(N-1)+k-R]
    for k in range(R-1,-1,-1):
        uu3[k*(N-1)+N-2]=fff1[k*(N-1)+N-2]/Aa[k*(N-1)+N-2]
        for m in range(N-2,0,-1):
            uu3[k*(N-1)+m-1]=(fff1[k*(N-1)+m-1]-\
            Aa1[k*(N-2)+m-1]*uu3[k*(N-1)+m])/Aa[k*(N-1)+m-1]
    print "Система решена"

```

```

u3=[]
u3+=[0.0 for i in xrange(L)]
for i in xrange(L):
    u3[i]=2*u2[i]-uu1[i]+uu3[i]*tau**2
uu1=copy.deepcopy(u2)
u2=copy.deepcopy(u3)

# Вычисление приближенного решения модели
def ASol(x,ii):
    if x<=1.0/N:
        return N*(u3[(ii-1)*(N-1)])*x
    elif x>=(N-1.0)/N:
        return u3[L-1]+(u3[(ii-1)*(N-1)+N-2]-\
u3[L-1])*(1.0-x)*N
    else:
        for jj in range(1,N):
            if x>=1.0*jj/N and x<1.0*(jj+1)/N:
                return u3[(ii-1)*(N-1)+jj-1]+1.0*\
(float(u3[(ii-1)*(N-1)+jj]-u3[(ii-1)*\
(N-1)+jj-1]))*(N*1.0*x-1.0*jj)

# Вывод результатов в виде графиков на каждом ребре
for iii in range(R):
    ylist1 = [0.0 for x in xlist]
    ylist2 = [ASol(x,iii+1) for x in xlist]
    ylist3 = [0.025 for x in xlist]
    ylist4 = [-0.025 for x in xlist]
    pylab.plot(xlist, ylist1)
    pylab.plot(xlist, ylist2)
    pylab.plot(xlist, ylist3)
    pylab.plot(xlist, ylist4)
    pylab.show()

```