

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Воронежский государственный
университет инженерных технологий»

На правах рукописи

Попов Михаил Иванович

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ
ИССЛЕДОВАНИИ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ СВОБОДНОЙ
КОНВЕКЦИИ В КОНДУКТИВНО-ЛАМИНАРНОМ
РЕЖИМЕ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Научный руководитель:
д.т.н., проф. Ряжских В.И.

Воронеж, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ	9
1.1. Математическое описание свободной конвекции	9
1.2. Запись основных уравнений в переменных функция тока – вихрь	13
1.3. Типы постановок граничных условий на смоченной и свободной поверхностях	15
1.4. Подходы к решению задач свободной конвекции	19
1.4.1. Точные и приближенные аналитические методы	20
1.4.2. Численное интегрирование	27
1.5. Реализация вычислений	37
1.6. Выводы, цель и задачи исследования	40
2. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА.	42
2.1. Формулировка задачи и вывод основных уравнений	42
2.2. Решение задачи методом конечного интегрального синус- преобразования Фурье	46
2.3. Анализ решения	53
2.4. Решение задачи в прямоугольнике	57
2.5. Стационарная постановка	59
2.6. Выводы	62
3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКАХ	63
3.1. Стационарная постановка	63
3.1.1. Постановка задачи и построение численной схемы	63
3.1.2. Вычисление нормы оператора перехода и оптимального итерационного шага	66
3.1.3. Вычисление погрешности аппроксимации уравнения разностной схемой	72

3.1.4.	Устойчивость и сходимость	73
3.2.	Нестационарная постановка.	76
3.2.1.	Постановка задачи и построение численной схемы	76
3.2.2.	Вычисление нормы оператора перехода и оптимального временного шага	79
3.2.3.	Вычисление погрешности аппроксимации уравнения разностной схемой	83
3.2.4.	Устойчивость и сходимость	84
3.3.	Улучшение решения на границе	85
3.4.	Решение задачи в прямоугольнике	88
3.5.	Выводы	93
4.	Сравнение аналитического и численного подходов.	95
4.1.	Стационарная постановка	95
4.2.	Нестационарная постановка	97
4.3.	Выводы	99
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
	ЛИТЕРАТУРА	101
	ПРИЛОЖЕНИЕ	109

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Исследование явлений переноса в технических системах предметного назначения, таких как охладительные контуры тепловыделяющих элементов в атомной энергетике, резервуары хранения сжиженных газов в криогенной технике, производственные реакторы химического и пищевого производства при термической обработке жидких субстанций напрямую связано с моделированием свободной конвекции как одного из основных механизмов переноса тепла и массы. Наибольший интерес в этой связи представляет моделирование кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции во внутренних задачах, так как чувствительность современной контрольно-измерительной аппаратуры не позволяет с достаточной степенью точности определять гидротермические характеристики процесса. Таким образом, вычислительный эксперимент является основным источником выявления закономерностей. Существует два подхода к решению данной проблемы. При первом из них используется полная система уравнений Обербека-Буссинеска при малых числах Грасгофа, но в силу остающейся нелинейности уравнений, анализ такой модели затруднен. Во втором, уравнения линеаризуются за счет пренебрежения конвективными слагаемыми, что отвечает физическому смыслу для очень медленных течений. Преимущества такого подхода в линейности получаемых уравнений, что позволяет применять классический математический аппарат для их решения. В рамках этих представлений математическая формализация внутренних задач кондуктивного режима свободной конвекции приводит к краевым задачам для уравнений в частных производных четвертого порядка относительно функции тока, которые по постановкам аналогичны задачам теории пластин и оболочек. К настоящему времени данный подход уже позволил получить ряд точных решений задач о свободной конвекции у бесконечной вертикальной стенки, в плоском

вертикальном канале, и в прямоугольной камере с отношением высоты к ширине намного больше единицы, а также приближенные аналитические решения для ряда внутренних задач кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции. Однако остается неясным насколько полученные решения соответствуют реальным процессам.

Диссертационная работа выполнялась в соответствии с планом научно-исследовательских работ Воронежского государственного университета инженерных технологий по теме «Дифференциальные и интегральные уравнения математических моделей естественных и прикладных наук» (№ г. р. 0020543).

Цель работы: разработка аналитических и численных методов исследования математической модели кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в замкнутых объемах на основе интегральных преобразований и конечно-разностных схем.

Для достижения цели поставлены **задачи:**

1) проанализировать математическую модель внутренней задачи свободной конвекции для кондуктивно-ламинарного режима, основанную на линеаризации уравнений Обербека-Буссинеска;

2) на примере прямоугольной области получить приближенное аналитическое решение задачи в нестационарной постановке;

3) разработать конечно-разностные схемы численного интегрирования для стационарной и нестационарной постановок в прямоугольных областях, методами функционального анализа показать их устойчивость и сходимости к точному решению задачи;

4) разработать комплекс предметно-ориентированных программ, реализующих решения задач, и с их помощью провести вычислительные эксперименты по определению стационарных и нестационарных гидродинамических полей;

5) на основании данных вычислительных экспериментов сравнить численные и аналитические решения, выявить наиболее эффективные подходы к решению.

Методы исследования. В ходе выполнения исследования были использованы методы математического моделирования явлений переноса, теоретической гидродинамики, теории дифференциальных уравнений математической физики, функционального анализа, вычислительной математики и программирования.

Тематика работы соответствует пункту 2 “Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей”, пункту 3 “Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий”, пункту 4 “Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента” паспорта специальности 05.13.18 – “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”.

Достоверность и обоснованность полученных результатов основывается на использовании законов явлений тепломассопереноса, на проведении вычислительных экспериментов и сравнительном анализе с классическими данными.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие результаты характеризующиеся новизной:

1. Приближенное аналитическое решение задачи нестационарной кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в прямоугольной области, позволяющее описывать возникновение и развитие течения, которое отличается от известных возможностью идентификации основных гидротермических характеристик в явном виде.

2. Явная итерационная и полунявная двухслойная конечно-разностные схемы численного интегрирования соответственно стационарных и

нестационарных постановок задач кондуктивно-ламинарной свободной конвекции с модификацией способа весового перераспределения невязки по смоченной поверхности, что позволяет упростить процедуру вычисления за счет снижения размерности сеточных уравнений.

3. Теоретические оценки способа дискретизации области интегрирования, обеспечивающие условия сходимости и устойчивости вычислительной процедуры, отличающиеся возможностью рационального выбора дискретных шагов интегрирования с наибольшей скоростью сходимости.

4. Структура предметно-ориентированного программного комплекса, отличающаяся комбинированием численного и приближенного аналитического подходов, позволяющая оптимизировать вычислительный процесс.

Практическая значимость состоит в разработке предметно-ориентированного программного комплекса, который позволяет рассчитывать гидротермические характеристики даже на грубых сетках с достаточной степенью точности, имеет высокую скорость сходимости и устойчив, что существенно рационализирует проведение вычислительных экспериментов.

Реализация и внедрение результатов. Результаты диссертационного исследования используются в учебном процессе ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» при чтении курса «Математическое моделирование» для демонстрации применения эффективных численных схем в анализе явлений переноса.

Апробация. Результаты диссертационной работы докладывались на научных конференциях и семинарах. Среди них «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2011), V международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2011), IV международная конференция для молодых математиков по

дифференциальным уравнениям и их приложениям, посвященная Я. Б. Лопатинскому (Донецк, 2012), «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXIII и XXIV» (Воронеж, 2012, 2013).

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 3 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, в том числе зарегистрированная программа для ЭВМ. В работах, опубликованных в соавторстве и приведенных ниже, лично соискателем предложены: в [1] – построение конечно-разностной схемы, получение теоретических оценок для выбора оптимального итерационного шага, разработка программы для вычислительного эксперимента, реализация и анализ вычислительного эксперимента, [2] – разработка численной схемы, доказательство ее сходимости и устойчивости, реализация и анализ вычислительного эксперимента, теоретическое обоснование метода перераспределения невязки, [4] – вывод уравнений деформации, выбор вспомогательных параметров, [5] – организация и проведение вычислительной процедуры, [6] – расчет гидродинамических полей, [8] – обобщение задачи на прямоугольную область, [9] – реализация метода конечного интегрального синус-преобразования Фурье, способы определения неизвестных коэффициентов.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка литературы и приложения. Материал изложен на 116 страницах и содержит 25 рисунков и 8 таблиц.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

1.1. Математическое описание свободной конвекции

Гравитационной конвекцией называется гидродинамическое явление, возникающее в поле всемирного тяготения, в связи с неодинаковой плотностью разных частей жидкости. Гидродинамическая сторона процесса проявляется в том, что частицы жидкости движутся не в пустом пространстве, а среди других подобных частиц, поэтому каждая частица при своем движении занимает место каких-либо других частиц, отодвинутых ею в сторону [1].

Причиной различия в плотности обычно являются различия в температуре или в составе, в частности в концентрации растворенных в жидкости примесей. Наиболее изученной формой гравитационной конвекции является температурная (тепловая) конвекция. Конвекция называется свободной, если те напряжения (в том числе нормальное давление), которые испытывает жидкость на ее границах, не совершают механической работы, т.е. если все границы жидкости неподвижны.

Первым исследователем, который научно подошел к явлениям тепловой конвекции был М. В. Ломоносов. Он первым правильно объяснил основной механизм метеорологических явлений. Систематическое исследование свободной конвекции началось с работ Дж. Томсона (1888), Б. Бенара (1900), Л. Прандтля (1904) и Л. Рэлея (1916). Математическая формализация явлений переноса впервые была описана Обербеком (1879) и Буссинеском (1903) независимо друг от друга [2]. Их описание основывается на фундаментальных уравнениях Навье-Стокса в напряжениях, конкретизируемых реологическими уравнениями состояния, связывающих напряжения и тензор скоростей деформации.

Для большинства жидкостей справедлив закон линейным образом связывающий напряжение и скорость деформации среды. Такие жидкости называют ньютоновскими, а коэффициент пропорциональности μ – динамической вязкостью. В этом случае уравнения Навье-Стокса без учета объемной вязкости в силу небольших скоростей течения векторном виде классическую запись [3]:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \bar{v} + \rho \bar{g}, \quad (1.1)$$

которая естественным образом замыкается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0, \quad (1.2)$$

где \bar{v}, \bar{g} – векторы скорости и ускорения силы тяжести; ρ – плотность среды; p – давление; τ – текущее время; ∇, Δ – дифференциальные операторы "набла" и Лапласа. Уравнения (1.1) и (1.2) дополняются уравнением переноса теплоты без учета диссипации энергии из-за низких скоростей течения

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + \bar{v} \nabla t \right) = \lambda \Delta t, \quad (1.3)$$

в котором t – локальная температура; c_p, λ – массовая теплоемкость и теплопроводность жидкости.

Во многих случаях представляет интерес исследование конвекции, протекающей в условиях, когда сжимаемость среды несущественна. В этих условиях исходная система (1.1)–(1.3) существенно упрощается. Соответствующие приближенные уравнения называют уравнениями свободной конвекции в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \bar{v} + g \beta t \bar{e}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \bar{v} \nabla t = a \Delta t, \quad (1.5)$$

$$\text{div} \bar{v} = 0, \quad (1.6)$$

где ρ_0 - плотность среды в невозмущенном состоянии; a , $\nu = \mu / \rho_0$, β - коэффициенты температуропроводности, кинематической вязкости и объемного расширения жидкости; \bar{e} - единичный вектор, направленный противоположно вектору ускорения силы тяжести.

Основным моментом в приближении Буссинеска является предположение о том, что вызванные неоднородностью температуры отклонение плотности от среднего значения настолько мало, что им можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения движения, где оно учитывается лишь в члене с подъемной силой.

При небольших размерах тела, нарушающего тепловое равновесие, по сравнению с объемом окружающей его жидкости используется другой подход. В этом случае область теплового и гидродинамического возмущения локализуется около рассматриваемого тела, а вне этого пограничного слоя жидкость можно считать неподвижной [4,5]. Наличие тонкого пограничного слоя, впервые открытого Людвигом Прандтлем в 1904 году, позволило упростить систему уравнений (1.1)–(1.3), воспользовавшись стандартными приближениями пограничного слоя [6,7], которые обобщены на случай криволинейной смоченной границы в [8] путем кусочно-гладкой аппроксимации:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta g (t - t_0) \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \left(\frac{\lambda}{\rho c_p} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2},$$

где u, v - компоненты вектора скорости, t_0 - характерная температура системы, φ - текущий угол между нормалью поверхности и вектором ускорения силы тяжести. При $\varphi = 0$ Польшаузенем [9] показана корректность такого подхода для описания свободноконвективного течения около

полуограниченной вертикальной пластины при мгновенном изменении температуры стенки до постоянного значения, превышающего, например, температуру жидкости в объеме t_0 . Такой подход при моделировании свободноконвективных течений в замкнутых областях на примере вертикального цилиндра и сферы применен в [10,11].

Уравнения Навье-Стокса, составляющие основу уравнений свободной конвекции, обладают рядом специфических особенностей, одной из которых является пространственно-эллиптический характер решений [12], обусловленный влиянием вязкости во всем поле течения. Поэтому для их решения используются методы типичные для эллиптических уравнений. В отличие от уравнений пограничного слоя при этом требуется постановка граничных условий на всех границах рассматриваемой области. Кроме того, система уравнений Навье-Стокса нелинейная. Эта нелинейность, типичная для системы гидродинамического типа, обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества движения. Уравнения конвекции в приближении Обербека-Буссинеска отличаются своей спецификой ввиду значительного взаимного влияния полей течения и температуры. В связи с этим нестационарность течения, обусловленная его неустойчивостью, обнаруживается для такого класса течений при меньших значениях гидродинамических критериев (например, числа Рейнольдса), чем в случае течения изотермической жидкости.

Общие уравнения Навье-Стокса наиболее точно описывают гидротермическую обстановку, но не обладают инвариантностью в отличие от уравнений Обербека-Буссинеска. Для каждой конкретной среды необходимо знание зависимостей теплофизических параметров от температуры, что, собственно говоря, требует заново формулировки и записи уравнений и поиска новых методов решения. Уравнения Обербека-Буссинеска, несмотря на универсальность, справедливы при достаточно небольших изменениях теплофизических параметров, т.е. фактически для неинтенсивных гидродинамических режимов и малых температурных

градиентов. Использование погранслоного подхода теряет свою эффективность в замкнутых областях течения конечного размера.

Определяющим критерием гидродинамических режимов свободной конвекции является число Грасгофа Gr . В [13] указаны режимы свободной конвекции – кондуктивный ($Gr \leq 10^2$), ламинарный ($10^2 \leq Gr \leq 10^6$), переходный ($10^6 \leq Gr \leq 10^9$) и развитый турбулентный ($Gr > 10^9$). Кондуктивный режим характеризуется структурой температурного поля близкой к температурному полю теплопроводности. При этом абсолютные значения скоростей жидкости очень малы, то есть жидкость практически покоится. Ламинарный режим характеризуется гидродинамическим полем с одним вихрем, тепловое поле по своей структуре остается близкой к кондуктивному режиму. Для переходного режима характерно образование дополнительных гидродинамических вихрей и существенное отличие поля температур по сравнению с ламинарным режимом. При турбулентном режиме гидродинамические поля представлены счетным количеством мелких вихрей, которые динамически меняют свое пространственное положение, а температурное поле принимает однородный характер в ядре течения, резко изменяясь в так называемом пристеночном турбулентном пограничном слое. Зарождение турбулентности зависит от величины возмущений в потоке. Чем меньше возмущений, тем при большем числе Gr сохраняется ламинарное движение [14].

1.2. Запись основных уравнений в переменных функция тока – вихрь.

Математическая формализация задачи свободной конвекции Обербека-Буссинеска наиболее универсальна и инвариантна к теплофизическим характеристикам и апробирована при решении многих прикладных проблем в различных предметных областях (криогенная техника, энергетика, пищевая и химическая технология, ракетно-космическая и авиационная техника и

т.д.), поэтому при анализе свободноконвективных течений естественно опираться именно на нее.

Запись уравнений Обербека-Буссинеска в переменных скорость, давление и температура вызывает ряд трудностей для аналитического и численного решения, главная из которых - наличие неизвестного давления в уравнениях, что приводит к необходимости его нахождения из уравнения (1.13) через поле скоростей. Исключение такой взаимной редукции между скоростью и давлением возможно с переходом к переменным Гельмгольца [15], если воспользоваться известным фактом из векторного анализа [16]

$$\text{rot}(\text{grad } f) \equiv 0, \quad (1.7)$$

где f - некоторая скалярная функция, тогда применение rot к обеим частям уравнения (1.4) даст

$$\text{rot}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}\right) + \text{rot}[(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}] = \text{rot}\left(-\frac{1}{\rho_0}\nabla p\right) + \text{rot}(\nu\Delta\bar{v}) + \text{rot}(g\beta t\bar{e}). \quad (1.8)$$

Так как $\text{rot}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\text{rot } \bar{v})$, $\text{rot}[(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}] = \frac{1}{2}\text{rot}(\text{grad } \bar{v}^2) - \text{rot}(\bar{v} \times \text{rot } \bar{v})$,

а $\text{rot}(\text{grad } \bar{v}^2) = 0$ в силу (1.7) и

$$\text{rot}(\bar{v} \times \text{rot } \bar{v}) = (\bar{v} \cdot \nabla)\text{rot } \bar{v} - (\text{rot } \bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} + \bar{v} \text{div rot } \bar{v} - \text{rot div } \bar{v},$$

то с учетом того, что $\text{div } \bar{v} = 0$ и $\text{div rot } \bar{v} = 0$, после введения $\bar{\omega} = \text{rot } \bar{v}$ окончательно получаем $\text{rot}[(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}] = -(\bar{v} \cdot \nabla)\bar{\omega} + (\bar{\omega} \cdot \nabla)\bar{v}$.

Далее обычно используется соотношение $\Delta\bar{v} = -\text{rot rot } \bar{v} = -\text{rot } \bar{\omega}$,

тогда $\text{rot}(\nu\Delta\bar{v}) = -\nu\bar{v} \text{div } \bar{\omega} + \nu\Delta\bar{\omega}$ и, кроме того,

$$\text{rot}(g\beta t\bar{e}) = \beta t g \text{rot } \bar{e} + g\beta(\nabla t \times \bar{e}).$$

В итоге (1.8) принимает окончательный вид

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau} - (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{\omega} + (\bar{\omega} \cdot \nabla)\bar{v} = \nu\Delta\bar{\omega} + \beta g \nabla t \times \bar{e} \quad (1.9)$$

так как $\text{rot } \bar{e} \equiv 0$.

Обычно вводится функция $\bar{\psi}$ в виде

$$\bar{v} = \text{rot } \bar{\psi},$$

которая в литературе обычно называется векторным потенциалом [17]. Такое введение функции $\bar{\psi}$ правомочно, так как $\text{div } \bar{v} = \text{div rot } \bar{\psi} = 0$, поэтому для отыскания связи между $\bar{\psi}$ и $\bar{\omega}$ вычисляют [18] $\text{rot } \bar{v} = \text{rot rot } \bar{\psi}$, откуда получают, что

$$\bar{\omega} = \nabla \text{div } \bar{\psi} - \Delta \bar{\psi} \quad (1.10)$$

Часто выбирают в качестве $\Delta \bar{\psi} = -\bar{\omega}$ [19], тогда

$$\nabla(\text{div } \bar{\psi}) = \text{rot rot } \bar{\psi} + \Delta \bar{\psi} = \text{rot } \bar{v} - \bar{\omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega} = 0$$

и вместо (1.10) записывают $\Delta \bar{\psi} = -\bar{\omega}$.

Таким образом, формулировка уравнений Обербека-Буссинеска в реальных переменных (1.4)–(1.6) записывается в переменных Гельмгольца следующим образом

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau} - (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{\omega} + (\bar{\omega} \cdot \nabla) \bar{v} = \nu \Delta \bar{\omega} - \beta g \nabla t \times \bar{e}, \quad (1.11)$$

$$\Delta \bar{\psi} = -\bar{\omega}, \quad (1.12)$$

$$\bar{v} = \text{rot } \bar{\psi}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \bar{v} \nabla t = a \Delta t. \quad (1.14)$$

Заметим, что давления p в приведенной системе уже нет.

1.3. Типы постановок граничных условий на смоченной и свободной поверхностях

Для решения конкретной задачи к дифференциальным уравнениям необходимо присоединить математические формулировки частных особенностей изучаемого объекта – краевые условия, которые включают в себя граничные, а для нестационарной задачи еще и начальные условия [20–22]. Краевые условия должны быть проверены на достаточность, непротиворечивость и отсутствие избыточности. Задачи свободной

конвекции делятся на внешние и внутренние [13, 23]. Задача внутренняя – если среда находится в объеме конечных размеров, который ограничен смоченными или (и) свободными границами, иначе задача внешняя. Наибольший интерес представляет проблема внутренней свободной конвекции. В этом случае реальная задача в области Ω описывается решениями дифференциальных уравнений, которые находятся при условиях, заданных в начальный момент времени и на границе Γ области Ω .

Обычно во внутренних задачах свободной конвекции граница Γ может представляться как составная, т.е. $\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_C$, где Γ_T, Γ_C - смоченная и свободная поверхности, которые в общем случае могут быть проницаемыми.

Для скоростного континуума на Γ_T , как правило, задается условие "прилипания" жидкости [13]: если граница в выбранной системе координат неподвижна

$$v_n|_{\Gamma_T} = v_\tau|_{\Gamma_T} = 0 \quad (1.15)$$

или

$$v_n|_{\Gamma_T} = u_n, \quad v_\tau|_{\Gamma_T} = u_\tau, \quad (1.16)$$

если граница движется, где v_n, v_τ - нормальная и касательная составляющие скорости на Γ_T ; u_n, u_τ - нормальная и касательная компоненты скорости границы. На поверхности раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей (жидкости и плотного газа) естественны условия прилипания (1.15) или (1.16). Кроме того, скорость должна удовлетворять кинематическому

$$v_n|_{\Gamma_C} = 0 \quad (1.17)$$

и динамическому (баланс касательных напряжений) условиям

$$\mu^{(1)} \frac{\partial v_\tau^{(1)}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_C} = \mu^{(2)} \frac{\partial v_\tau^{(2)}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_C}, \quad (1.18)$$

где $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ - динамическая вязкость контактирующих сред; $v_\tau^{(1)}, v_\tau^{(2)}$ - их касательные компоненты скорости на Γ_C . Условия (1.17) и (1.18) являются

условиями на свободной поверхности. В частности, если $\mu^{(1)} \gg \mu^{(2)}$, то из (1.18) очевидным образом следует упрощенное условие

$$\left. \frac{\partial v_\tau}{\partial n} \right|_{\Gamma_c} = 0, \quad (1.19)$$

которое физически означает пренебрежение силами трения жидкости на свободной границе.

Для однозначного определения давления добавляется требование [25]

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0, \quad \forall \tau : \tau \in [0, \tau_k]$$

или задается значение давления в одной точке [26].

Для симметричных областей, в которых ищется решение задач свободной конвекции, дополнительно могут быть заданы условия на линиях симметрии в виде равенства нулю нормальной к оси симметрии компоненты скорости и условия типа (1.19).

В зависимости от типа задачи температура на Γ может быть задана либо в явном виде, как известная непрерывная функция пространства и времени (граничные условия первого рода), либо величиной теплового потока (граничные условия второго рода), либо некоторым соотношением, связывающим значения температурного напора с величиной теплового потока (граничные условия третьего рода) [27].

Для системы уравнений в переменных векторный потенциал – вихрь (1.11)-(1.14) постановка задачи осложняется формулировкой граничных условий для составляющих векторного потенциала и вихря. Общая постановка для областей с гладкой границей приведена в работе [28]. В [29] рассмотрен случай многосвязных областей. На Γ_T в силу (1.15) имеем

$$\psi|_{\Gamma_T} = const, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\Gamma_T} = 0, \quad (1.20)$$

причем константу допустимо выбирать любой, например, равной нулю. Следует отметить, что первое из них применяют в качестве условия для

функции тока, второе же служит для вычисления на Γ значений завихренности. Условия (1.20) эффективно использовались в работах [30,31]. В силу (1.15) и (1.18) на Γ_c получают следующие условия для функции тока и вихря:

$$\psi|_{\Gamma_c} = const = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} \right|_{\Gamma_c} = \left. \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial n} \right|_{\Gamma_c}, \quad (1.21)$$

$$\mu^{(1)} \omega^{(1)}|_{\Gamma_c} = \mu^{(2)} \omega^{(2)}|_{\Gamma_c}. \quad (1.22)$$

С помощью соотношений (1.21) обычно строят приближенные формулы, которые позволяют с учетом зависимости (1.22) выразить $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ в явном виде. Если жидкость граничит с газом, плотность которого мала (вязкость мала), то

$$\psi|_{\Gamma_c} = \omega|_{\Gamma_c} = 0. \quad (1.23)$$

На линиях симметрии

$$\psi|_{\Gamma_s} = \left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \right|_{\Gamma_s} = 0, \quad (1.24)$$

где Γ_s – линия симметрии, ξ – кривизна границы.

Для нестационарных задач к граничным условиям добавляются начальные условия (распределения по координатам температуры, скорости, давления или векторного потенциала и вихря) в момент времени $\tau = 0$.

Анализ постановки краевых условий показывает, что в переменных температура-скорость-давление основной сложностью является постановка условий для скалярного поля давления, а в переменных вихрь – функция тока проблема с постановкой граничных условий переносится на вихрь. Существующие постановки в явном виде для давления и вихря физически не обоснованы. Поэтому в каждой конкретной задаче свободной конвекции каждый исследователь эту проблему решает по-своему.

1.4. Подходы к решению задач свободной конвекции

В настоящее время существует три подхода к решению физических задач: экспериментальный, теоретический (аналитический) и численный.

Главенствующую позицию занимает эксперимент, он служит критерием адекватности предлагаемых гипотез. Однако возникает ряд трудностей при его реализации, поскольку без внесения возмущений не удастся снять измерения в исследуемых гидротермических полях, а бесконтактные методы чрезвычайно сложны и неоднозначны для математической интерпретации. Задачей эксперимента являются измерения полей температуры и скорости. Обычно эти измерения классифицируют на локальные, полевые и интегральные [32].

Аналитические методы позволяют получить точное выражение закономерностей анализируемых явлений. Эффективные методы разработаны для широкого класса линейных задач. В случае нелинейности возникают значительные математические трудности, преодоление которых связано, как правило, с дополнительными предположениями о параметрах течения.

Вычислительный эксперимент по сравнению с натурным значительно дешевле и доступнее, его подготовка и проведение требуют меньшего времени, его легко переделывать, он дает более подробную информацию [33]. Кроме того, в ходе вычислительного эксперимента выявляются границы применимости математической модели, которые позволяют прогнозировать эксперимент в естественных условиях [34]. Вычислительный эксперимент не может заменить полностью натурный эксперимент, поэтому выход из этого положения состоит в их разумном сочетании [35]. В табл.1.1. представлено сравнение экспериментального, теоретического и вычислительного подходов

Поскольку экспериментальный путь получения закономерностей явлений переноса при свободной конвекции практически исчерпал себя для

современного уровня развития техники и технологии проведения опытов, рассмотрим более подробно аналитический и численный подходы.

Табл. 1.1. Сравнение подходов.

Подход	Преимущества	Недостатки
Экспериментальный	Получение наиболее близких к реальности результатов	1. Сложное оборудование 2. Проблемы моделирования 3. Коррекция измеренных значений 4. Сложность измерений 5. Высокая стоимость
Теоретический	Получение "чистой" информации общего характера, обычно в виде формул	Ограничен простыми геометрическими конфигурациями и физическими моделями
Численный	1. Нет ограничений, связанных с линейностью 2. Описание сложных физических процессов 3. Описание эволюции процесса во времени	1. Погрешность округления 2. Проблема задания граничных условий 3. Стоимость ЭВМ

1.4.1. Точные и приближенные аналитические методы

Количество задач свободной конвекции, для которых удалось получить точное аналитическое решение, очень невелико, и ограничено оно, прежде всего геометрией области. Одним из таких примеров является свободная конвекция у вертикальной бесконечной пластины [36]. Уравнения Обербека-Буссинеска в предположении ламинарности течения упрощены до вида:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta\theta, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (1.26)$$

где $\theta = T - T_\infty$, $\beta = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$ с граничными условиями

$$u(y, \tau) = 0, \quad \theta(y, \tau) = 0, \quad \tau < 0; \quad (1.27)$$

$$u(\infty, \tau) = 0, \quad \theta(\infty, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0; \quad (1.28)$$

$$u(0, \tau) = 0, \quad \theta(0, \tau) = F(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (1.29)$$

или

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial y} = G(\tau), \quad (1.30)$$

где τ – время; y – координата, перпендикулярная плоскости; u – скорость жидкости, параллельная плоскости; ν, ρ, k, β – кинематическая вязкость, плотность, температуропроводность и коэффициент объемного расширения жидкости; T, T_∞ – локальная и на бесконечности температуры жидкости; $F(\tau), G(\tau)$ – заданные функции. Система (1.25)–(1.30) в силу ее линейности решена методом одностороннего преобразования Лапласа с применением интеграла Дюамеля [37]. В результате получено следующее решение

$$\theta(y, \tau) = \int_0^\tau F(\tau - t) \frac{\partial \Theta(y, t)}{\partial t} dt;$$

$$\theta(y, \tau) = \int_0^\tau G(\tau - t) \frac{\partial \bar{\theta}(y, t)}{\partial t} dt;$$

$$u(y, \tau) = \int_0^\tau F(\tau - t) \frac{\partial U(y, t)}{\partial t} dt;$$

$$u(y, \tau) = \int_0^\tau G(\tau - t) \frac{\partial \bar{u}(y, t)}{\partial t} dt,$$

где $\Theta(y, t), U(y, t)$ и $\bar{\theta}(y, t), \bar{u}(y, t)$ – соответствуют решениям задачи, когда задана на стенке температура и тепловой поток соответственно. Для случая мгновенного изменения температуры стенки до θ_0 результаты решения представлены на рис. 1.2. Аналогичное решение получено в [38].

В случае вертикальной полуограниченной пластины задача становится двумерной, но даже в стационарном случае точное решение задачи уже невозможно. Уравнения переноса импульса и энергии примут вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \beta g (T - T_\infty), \quad (1.31)$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (1.32)$$

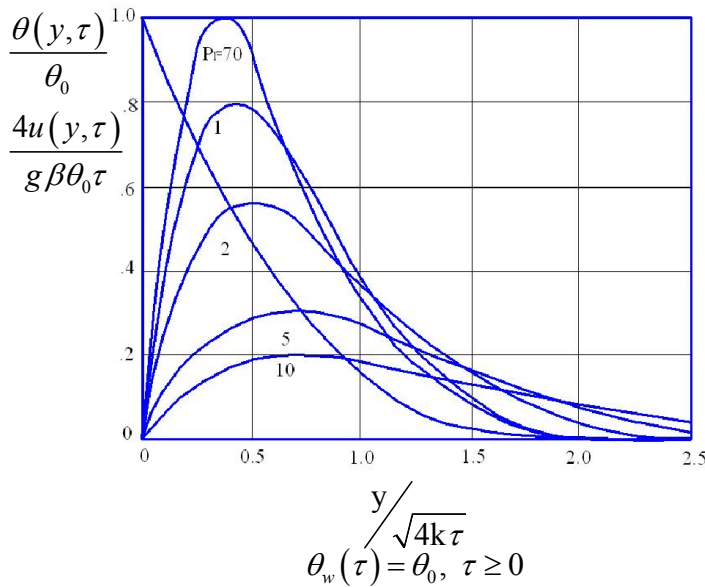
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (1.33)$$

с граничными условиями:

$$\text{при } y=0 \quad v_x=0, \quad v_y=0, \quad T=T_w, \quad (1.34)$$

$$\text{при } y=\infty \quad v_x=0, \quad T=T_\infty. \quad (1.35)$$

Впервые приближенное решение такой задачи предложил Польшаузен



[23] путем введения локального числа Грасгофа и автомодельной переменной

$$Gr_x = \frac{\beta g x^3 (T_w - T_\infty)}{\nu^2},$$

$$\xi = \frac{y}{x} \left(\frac{1}{4} Gr_x \right)^{1/4},$$

с помощью которых зависимые переменные, т.е. функция тока и

Рис. 1.2 Безразмерные профили температуры компоненты вектора скоростей, и скорости для различных чисел Прандтля могут быть представлены в виде

$$\psi = 4\nu \left(\frac{1}{4} Gr_x \right)^{1/4} \varphi(x); \quad v_x = \left[\frac{\beta g (T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right] 4\nu x^{1/2} \varphi';$$

$$v_y = \nu x^{-1/4} \left[\frac{\beta g (T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4} (\xi \varphi' - 3\varphi),$$

где неизвестная функция φ определяется из системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''' + 3\varphi\varphi' - 2\varphi^3 + \theta = 0, \quad (1.36)$$

$$\theta'' + 3Pr\varphi\theta' = 0 \quad (1.37)$$

с граничными условиями

$$\text{при } \xi = 0 \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 1, \quad (1.38)$$

$$\text{при } \xi = \infty \quad \varphi' = 0, \quad \theta = 0, \quad (1.39)$$

причем $\theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$.

Система (1.36)-(1.39) решена Острахом численно. Распределение

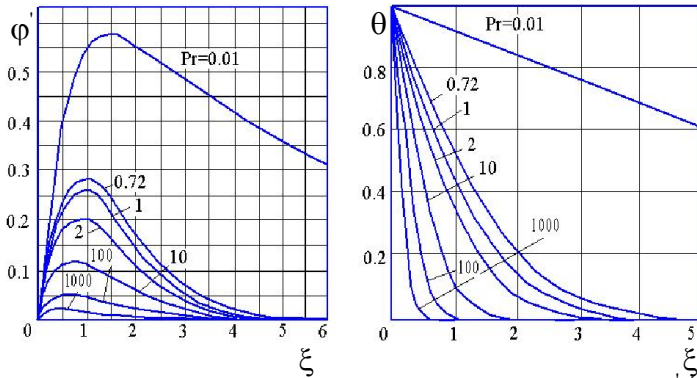


Рис. 1.3 Зависимость относительной скорости φ (а) и температуры θ (б) от безразмерного комплекса

$$\xi = \frac{y}{x} \left(\frac{1}{4} Gr_x \right)$$

относительной скорости

$$\varphi' = v_x x / 2\nu (Gr_x)^{1/2} \quad \text{в}$$

зависимости от безразмерной

координаты и температуры θ

приведено на рис. 1.3. Из

анализа следует выражение для

локального числа Нуссельта

$$Nu_x = B (Gr_x Pr)^{0,25}, \quad \text{где}$$

$$B = const.$$

Значительная часть исследований по свободной конвекции посвящена математическим моделям в приближении пограничного слоя. Теоретической основой этого направления служат условия описывающие модели в приближении пограничного слоя. Для ламинарного и турбулентного пограничных слоев используются полуэмпирические выражения для скорости и температуры, например, для случая нагрева со стороны дна и стенок цилиндрического сосуда [39] эти зависимости соответственно таковы:

$$u(r) = u_1 \left(\frac{r}{\delta} \right) \left(1 - \frac{r}{\delta} \right)^2;$$

$$\theta(r) = \theta_w \left[1 - \frac{r}{\delta} \right]^2;$$

$$u(r) = u_1 \left(\frac{r}{\delta} \right)^{1/7} \left(1 - \frac{r}{\delta} \right)^4;$$

Толщина пограничного слоя δ и характерная скорость u_1 определяются из дифференциальных уравнений в [40]. В некоторых работах [41]

предполагается, что прогретый слой перемешан, а в работах [39, 42] перемешан и характеризуется некоторым безразмерным “автомодельным” профилем температур. При этом система допущений следующая: тепловой поток к стенке постоянен во времени и однороден по координатам; тепло- и массообмен на поверхности раздела фаз отсутствует, ускорение в осевом направлении постоянно; среднemasсовая температура жидкости не изменяется; влиянием выбора начала пограничного условия пренебрегается. При указанных допущениях получена зависимость для поля температур в случае ламинарного и турбулентного пограничных слоев. Для многих задач естественной конвекции характерной особенностью является наличие устойчивой температурной стратификации, когда температура жидкости вдали от стенок, то есть на внешней границе свободно-конвективного пограничного слоя увеличивается с высотой [43]. Такая ситуация наиболее типична для конвекции в емкостях в вертикальных прослойках и других внутренних задачах конвекции. Исходя из этого, в этой работе принимается допущение, что избыточная температура в пограничном слое существенно медленнее изменяется по высоте, чем температура в ядре. Изложенный подход позволяет с помощью простых соотношений выразить характеристики свободно-конвективного пограничного слоя через стратификацию в ядре и получить аналитическое решение для ряда классов внутренних задач. В работе [44] показано, что при достаточно большом времени прогрева устанавливается квазистационарный режим конвекции, при котором картина течения не меняется, а температура жидкости растет во всех точках с одинаковым темпом. Уравнение энергии и граничные условия для рассматриваемого случая имеют следующий безразмерный вид:

$$r \frac{\partial \theta'}{\partial Fo} + \frac{\partial}{\partial r}(ru\theta') + \frac{\partial}{\partial z}(rv\theta') = r \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta'}{\partial r} \right), \quad (1.40)$$

$$\left. \frac{\partial \theta'}{\partial r} \right|_{r=1} = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (1.41)$$

где $\theta' = (T - T_0)\lambda/qL$; T_0 – начальная температура среды; q – плотность теплового потока; L – характерный размер области D ; r, z – текущие цилиндрические координаты; Fo – число Фурье.

Интегрирование уравнения энергии по объему дает:

$$\int_0^1 r v \theta' dr = \int_0^1 r \frac{\partial \theta'}{\partial z} dr. \quad (1.42)$$

В итоге получено решение задачи (1.40) - (1.42)

$$\theta_1 = e^{-y} \cos y, \quad v_1 = e^{-y} \sin y, \quad \theta_1 = \theta \cdot C^{-1}, \quad v_1 = v \cdot 2\alpha^2 Ra^{-1} C,$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{4} Ra A \right)^{1/4}, \quad y = \alpha x,$$

где параметр C определяется из граничного условия для температуры на стенке; Ra – число Релея; $A = \int_0^\infty v \theta dx$ и C соответственно равно λ^{-1} .

Качественное совпадение результатов расчетов с численными решениями уравнений Обербека-Буссинеска не позволяет сделать окончательные выводы об адекватности такого подхода. Несмотря на корректность физических представлений, положенных в основу такого подхода, вопрос о границе применимости упрощенных уравнений пограничного слоя остается открытым.

Сравнительно недавно появился новый метод получения приближенных аналитических решений для ряда различных типов нелинейных уравнений, включая обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные уравнения. Метод получил название homotopy analysis method (НАМ) или метод анализа гомотопии, поскольку центральным его объектом является гомотопия, переводящая заданное начальное приближение в искомое решение. Теоретическое обоснование применения этого метода дано в [45], а его сущность заключается в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$N[u(\bar{x}, t)] = 0, \quad (1.43)$$

где N – нелинейный оператор, \bar{x} – пространственный координатный вектор, t – время, $u(\bar{x}, t)$ – неизвестная функция. Обозначим за $u_0(\bar{x}, t)$ начальное приближение точного решения $u(\bar{x}, t)$, $h \neq 0$ – вспомогательный параметр, $H(\bar{x}, t) \neq 0$ – вспомогательную функцию, L – вспомогательный линейный оператор, такой что

$$L[f(\bar{x}, t)] = 0, \quad \text{когда} \quad f(\bar{x}, t) = 0. \quad (1.44)$$

Строится гомотопия:

$$\Gamma[\phi, u_0, h, q] = (1 - q)L[\phi(\bar{x}, t, q) - u_0(\bar{x}, t)] - qhH(\bar{x}, t)N[\phi(\bar{x}, t, q)],$$

где q – параметр вложения, $\phi(\bar{x}, t, q)$ – непрерывная функция, зависящая от \bar{x}, t, q . Приравнивая гомотопию к 0, получим, так называемое, уравнение деформации нулевого порядка.

$$(1 - q)L[\phi(\bar{x}, t, q) - u_0(\bar{x}, t)] = qhH(\bar{x}, t)N[\phi(\bar{x}, t, q)] \quad (1.45)$$

При $q = 0$ уравнение примет вид

$$L[\phi(\bar{x}, t, 0) - u_0(\bar{x}, t)] = 0,$$

или с учетом (1.44)

$$\phi(\bar{x}, t, 0) = u_0(\bar{x}, t).$$

Поскольку $H(\bar{x}, t) \neq 0$ и $h \neq 0$, то при $q = 1$ $N[\phi(\bar{x}, t, 1)] = 0$, т. е.

$$\phi(\bar{x}, t, 1) = u(\bar{x}, t). \quad (1.46)$$

Таким образом, при возрастании параметра вложения q от 0 до 1, $\phi(\bar{x}, t, q)$ непрерывно изменяется от начального приближения $u_0(\bar{x}, t)$ до точного решения $u(\bar{x}, t)$ исходного уравнения (1.43).

Далее $\phi(\bar{x}, t, q)$ разлагается в ряд Тейлора относительно q в окрестности нуля

$$\phi(\bar{x}, t, q) = u_0(\bar{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t)q^m, \quad (1.47)$$

где

$$u_m(\bar{x}, t) = \frac{u_0^{[m]}(\bar{x}, t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(\bar{x}, t, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}.$$

Начальное приближение, вспомогательные линейный оператор, параметр и функция выбираются таким образом, что:

- 1) решение $\phi(\bar{x}, t, q)$ уравнения деформации нулевого порядка (1.45) существует для всех $q \in [0; 1]$,
- 2) производная деформации $u_0^{[m]}(\bar{x}, t)$ существует для $m = 1, 2, \dots, +\infty$,
- 3) ряд (1.47) сходится при $q = 1$.

Тогда, учитывая (1.46), решение исходного уравнения представляется в виде ряда

$$u(\bar{x}, t) = u_0(\bar{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t).$$

Неизвестные функции $u_m(\bar{x}, t)$ находятся из уравнений деформации m -го порядка, которые получаются дифференцированием по q уравнения (1.45), затем делением на $m!$ и положением $q = 0$.

С момента появления метода анализа гомотопии в 2003 году все больше исследователей успешно применяло его к различным нелинейным задачам в науке и технике [46-52], таким как вязкие потоки неньютоновских жидкостей, нелинейная теплопередача, нелинейные уравнения мелкой воды, нелинейные волны, тепловые гидравлические сети, течения в пограничном слое по простирающейся поверхности с всасыванием и впрыскиванием.

1.4.2. Численное интегрирование

Основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой – прикладная математика, а технической – ЭВМ [53].

Современная трактовка вычислительного эксперимента такова – это эксперимент над математической моделью объекта на ЭВМ, который состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие ее параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах явления, описываемого математической моделью [54,55]. При этом вычислительный эксперимент

играет ту же роль, что и натурный, при исследованиях новых гипотез, которые почти всегда имеют математическую формулировку.

При проведении вычислительного эксперимента необходимо убедиться в его полезности, особенно в случаях, когда провести натурные исследования затруднительно или невозможно. Остановимся подробнее на преимуществах численного решения по сравнению с соответствующим экспериментальным исследованием [56].

Низкая стоимость. Наиболее важным преимуществом численного решения является его небольшая стоимость. В большинстве случаев стоимость затраченного машинного времени на много порядков ниже стоимости соответствующего экспериментального исследования. Значение этого фактора возрастает с увеличением масштабов и усложнением требующего изучения физического процесса.

Скорость. Численное исследование можно провести очень быстро. Конструктор имеет возможность меньше, чем за день, просчитать сотни вариантов и выбрать оптимальную конструкцию, в то время как соответствующее экспериментальное исследование заняло бы очень много времени.

Полнота информации. Численное решение задачи дает подробную и полную информацию. С его помощью можно найти значения всех имеющихся переменных (таких, как скорость, давление, температура, концентрация, интенсивность турбулентности) во всей области решения. В отличие от эксперимента для расчета доступна практически вся исследуемая область и отсутствуют возмущения процесса, вносимые датчиками при экспериментальном исследовании. Очевидно, что ни в одном экспериментальном исследовании невозможно измерить распределения всех переменных во всей исследуемой области. Поэтому, даже если проводится экспериментальное исследование, большие значения для дополнения экспериментальной информации имеют результаты численного решения.

Возможность математического моделирования реальных условий. Численное уравнение можно получить для реальных условий исследуемого процесса, что далеко не всегда возможно при экспериментальном исследовании. Возможность моделирования идеальных условий. Если с помощью численного решения изучаются закономерности физического процесса, а не сложные инженерные задачи, можно сконцентрировать внимание на нескольких существенных параметрах этого процесса и исключить все несущественные явления. При этом можно моделировать многие идеализированные условия, например двухмерность, постоянство плотности, адиабатическую поверхность или бесконечно быструю реакцию. При экспериментальном исследовании даже с помощью довольно тщательного эксперимента не всегда можно достичь таких идеализированных условий.

Недостатки численного решения. Численное решение дает количественное выражение закономерностей, присущих математической модели. Напротив, с помощью экспериментального исследования наблюдается сама действительность. Таким образом, полезность расчета ограничена обоснованностью математической модели. Следует заметить, что результат численного решения зависит как от численного метода, так и от математической модели. Если используемая математическая модель не соответствует изучаемому явлению, то с помощью даже очень хорошей численной методики можно получить не нужные результаты.

Для обсуждения недостатков численного исследования полезно разбить все практические проблемы на две группы.

Группа А: проблемы, для которых математическая модель достаточно обоснована (например, теплопроводность, ламинарные течения, простые турбулентные пограничные слои).

Группа В: проблемы, для которых обоснованные математические модели пока не разработаны (например, сложные турбулентные течения,

течения некоторых неньютоновских жидкостей, образование окиси азота при турбулентном горении, некоторые двухфазные течения).

Конечно, ответ на вопрос, в какую группу попадет данная проблема, будет зависеть от того, какую математическую модель мы считаем обоснованной.

Недостатки для группы А. Можно утверждать, что для большинства проблем группы А численное решение имеет очень большие преимущества перед экспериментальным исследованием. Однако если цель исследования очень узкая (например, надо определить падение давления в сложных аппаратах), численное решение может быть не дешевле, чем эксперимент. Для задач, включающих сложную геометрию, сильные нелинейности, значительное изменение свойств жидкости и т. д., получение численного решения может оказаться трудным и чрезмерно дорогостоящим, а то и невозможным. Наконец, если математическая постановка задачи допускает более одного решения, трудно определить, соответствуют ли результаты расчета действительности.

Недостатки для группы Б. Проблемы этой группы разделяют все недостатки проблем группы А. Дополнительно к ним здесь неясно, в какой мере численные результаты согласуются с действительностью. В этих случаях требуется экспериментальное обоснование результатов численного исследования.

Вычислительный эксперимент включает следующие этапы [57]:

1. Выбор физической модели. На этом этапе следует сочетать физические особенности поставленной задачи с реализацией алгоритма в соответствующих программах, чтобы не потерять полноту исследования и оптимизировать вычислительный процесс. Пристальное внимание необходимо уделить вопросам точности. Считается, что математическая точность в 2-4 раза должна превосходить физическую.

2. Выбор системы уравнений. На данном этапе идет построение математической модели. Численное интегрирование уравнений движения

вязкой жидкости осуществляется либо в естественных переменных – компоненты скорости, давление, либо в переменных функция тока – вихрь.

3. Математическая формулировка задачи. Завершающий этап построения математической модели, на котором дифференциальные уравнения дополняются начальными и граничными условиями.

4. Приведение задачи к безразмерному виду. Для описания широкого класса подобных физических процессов, поставленную задачу решают в безразмерном виде. Для этого выбирают единицы обезразмеривания (масштабные множители), в качестве которых используют характерные для данной задачи величины.

5. Выбор метода решения. На этом этапе конструируется вычислительная схема. Выбор конечно-разностной схемы и метода решения полученных систем алгебраических уравнений определяется, прежде всего, устойчивостью и сходимостью схемы к решению исходной задачи. Последующими критериями является скорость вычислительного процесса и погрешность аппроксимации.

6. Формулировка цели исследования. На этом этапе затрагивается вопрос об обработке полученных результатов. Метод сеток, например, позволяет вычислить значения функций лишь в узлах сетки. По найденным значениям необходимо оценить локальные и интегральные характеристики решения.

7. Подготовка задачи к программированию. Этот этап связан с разработкой алгоритма решения и написанием программы. Здесь необходимо оптимизировать программный код с целью минимизации затрат оперативной памяти ЭВМ и времени вычисления.

8. Разработка алгоритма решения задачи. Алгоритм решения должен быть наглядным, простым в реализации и удобным для внесения изменений. Структурно задача должна разбиваться на части, самостоятельно перерабатывающие данные.

9. Запись алгоритма на алгоритмическом языке. На данном этапе следует обратить внимание не только на выбор языка или среды программирования, но и грамотность при написании программы с целью упрощения ее отладки и понимания другими программистами.

10. Отладка программы. Отладка программы – один из наиболее трудоемких этапов программирования. Синтаксические ошибки, связанные с неправильным использованием конструкций языка, исправляется гораздо легче, нежели семантические, допущенные в реализации алгоритма.

11. Доводка алгоритма и программы. Отметим, что в ходе отладки, как правило, возникают новые идеи, воплощение которых приводит к изменениям не только в программе, но и в алгоритме.

12. Численное исследование. При достижении полной уверенности в правильности работы программы переходят к серии расчетов. В результате первых экспериментов выделяются качественные характеристики решения, по которым можно судить о соответствии физическому смыслу, и намечаются области более подробных исследований. Дальнейшие расчеты устанавливают количественные соотношения, позволяющие сравниться с известными данными.

Для данного уравнения в частных производных данной конечно-разностной сетки конечно-разностный аналог этого уравнения может быть построен разными методами [25]: разложением функции в ряд Тейлора; интерполяцией функций полиномами; интегральным методом и методом контрольного объема. Первые три подхода строят разностные схемы, обращаясь только к математическим средствам, а физические законы применяются лишь при выводе самих аппроксимируемых уравнений. В этом смысле эти способы построения являются формальными. При использовании метода контрольных объемов разностная схема строится на основе физических законов явлений переноса, следствием которых является рассматриваемое уравнение в частных производных. Сначала эти законы формулируются словесно для некоторого контрольного объема,

окружающего узел разностной сетки, а потом записываются математически с учетом дискретной сетки. Описанная процедура во многом похожа на ту, с помощью которой уравнения в частных производных выводятся из физических законов, не проводится лишь переход к пределу при стягивании контрольного объема в точку.

Ключевым моментом в использовании конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений является устойчивость полученной схемы, которая определяется изменением погрешности в процессе вычисления. В [58] предложена классификация устойчивости разностных схем:

1. Если полная погрешность округления растет (не растет), то разностная схема называется сильно неустойчивой (устойчивой).

2. Если отдельная погрешность округления растет (не растет), то разностная схема называется слабо неустойчивой (устойчивой).

Обычно изучают лишь слабую устойчивость, так как для ее анализа можно использовать метод разложения в ряд Фурье, называемый методом Неймана [59].

При реализации вычислительного эксперимента в кондуктивном режиме, чаще всего используется полунявная схема, т.е. когда уравнение для функции тока интегрируется по неявной схеме, а уравнение для вихря и температуры – по явной [60]. Одной из первых модифицированных простых явных схем являлась схема с разностями против потока (с донорными ячейками) [61]:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n - (u\varphi)_{i+\frac{1}{2},j}^n + (u\varphi)_{i-\frac{1}{2},j}^n - (v\varphi)_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (v\varphi)_{i,j-\frac{1}{2}}^n + a^2 \Delta t \left(\frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right),$$

где

$$(u\varphi)_{i+\frac{1}{2},j}^n = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot \varphi_{i,j}^n \cdot \Delta t / \Delta x & \text{при } u_{i+\frac{1}{2},j}^n > 0; \\ u_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot \varphi_{i+1,j}^n \cdot \Delta t / \Delta x & \text{при } u_{i+\frac{1}{2},j}^n \leq 0; \end{cases}$$

$$(v\varphi)_{i+\frac{1}{2},j}^n = \begin{cases} v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot \varphi_{i,j}^n \cdot \Delta t / \Delta y & \text{при } v_{i,j+\frac{1}{2}}^n > 0, \\ v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot \varphi_{i,j+1}^n \cdot \Delta t / \Delta y & \text{при } v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \leq 0, \end{cases}$$

схема вперед по времени – центральная по пространству [62, 63]. Чтобы применить данную схему к уравнению переноса, необходимо предварительно представить ее в консервативной форме.

Схема Лейта [61,64] предполагает трехслойность по временной сетке, а для двумерного переноса вихря часто применяется схема Аранавы. Эти схемы различных порядков аппроксимации обладают тем преимуществом, что при переходе с одного слоя на следующий требуется простой пересчет. Однако условие устойчивости данных схем является весьма ограниченным и для ряда задач приходится использовать слишком малый шаг по времени.

Неявные схемы [65,66]

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} + u^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^{n+1} + v^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^{n+1} = \nu \Delta \omega^{n+1},$$

$$\Delta \Psi^{n+1} = -\omega^{n+1}$$

обладают менее жесткими ограничениями на величину τ , однако сложны при реализации, т.к. требуют обращения блочно трехдиагональных матриц. При неявной аппроксимации уравнения переноса с диффузией возмущения вихря в одной точке мгновенно распространяются на всю область.

Успешно применяются неявные схемы метода переменных направлений и схемы расщепления [67,68].

Схема метода переменных направлений для параболического уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0,$$

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = -a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad A_2 = -a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

имеет вид

$$\frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j}{\tau} + \frac{1}{2} \left(A_1 \varphi^{j+\frac{1}{2}} + A_2 \varphi^j \right) = 0,$$

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{1}{2} \left(A_1 \varphi^{j+\frac{1}{2}} + A_2 \varphi^{j+1} \right) = 0$$

(τ – шаг по времени). Высокий порядок аппроксимации в сочетании с безусловной устойчивостью позволяет получать хорошие результаты. К сожалению, при многокомпонентном разбиении оператора A , метод переменных направлений оказывается непригодным. Возникают проблемы, связанные с его устойчивостью. Кроме того для ортогональных криволинейных систем координат не всегда выполняются условия коммутруемости и эрмитовости операторов уравнений, с дополнительным требованием положительной определенности. Этим и объясняется отсутствие в литературе конкретных реализаций для, например, постановок задач в сферической и цилиндрической системе координат. Возможность применения методов многокомпонентного расщепления в некоммутируемом случае рассмотрена в [69].

В дальнейшем появились принципиально новые классы методов, к которым относятся различные варианты схемы расщепления или дробных шагов [70]. Фундаментальное свойство разностных схем, а именно, свойство аппроксимации на решение исходного уравнения здесь нарушается. Возникает необходимость отойти от классического понятия аппроксимации и заменить его более слабым понятием суммарной аппроксимации. Это привело к появлению аддитивных разностных схем. Такие методы имеют более широкие возможности для построения устойчивых вычислительных алгоритмов, которые практически ориентированы на простую (расщепленную) модель. Погрешность аппроксимации общего алгоритма

определяется как сумма невязок упрощенных алгоритмов (суммарная аппроксимация). Идея расщепления связанная с пересчетом давления лежит в основе метода частиц в ячейках [71], согласно которому вначале рассчитывается промежуточное поле скоростей из уравнения движения без учета давления

$$\frac{\bar{V}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{V}^n}{\tau} + (\bar{V}^n \cdot \nabla) \bar{V}^n = \nu \cdot \Delta \bar{V}^n,$$

затем это поле подправляется с учетом градиента давления

$$\bar{V}^{n+1} = \bar{V}^{n+\frac{1}{2}} - \tau \nabla p,$$

где p – стационарное решение уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \operatorname{div} \bar{V}^{n+\frac{1}{2}} = \tau \Delta p.$$

В работе [72] предложена, а в [26] использована схема дробных шагов, основанная на проекционном методе, в котором идея расщепления метода частиц в ячейках излагается в проекционной формулировке:

$$\frac{\bar{V}^* - \bar{V}^n}{\tau} + (\bar{V}^* \cdot \nabla) \bar{V}^* = \nu \Delta \bar{V}^*,$$

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \bar{V}^*,$$

$$\frac{\bar{V}^{n+1} - \bar{V}^*}{\tau} + \nabla p^{n+1} = 0.$$

В отличие от схем расщепления, используемых в указанных методах, в работе [63] была применена явная схема расщепления по физическим факторам, состоящая из трех этапов:

$$\frac{\bar{V}^* - \bar{V}^n}{\tau} = -(\bar{V}^n \cdot \nabla) \bar{V}^n + \nu \Delta \bar{V}^n + \bar{f},$$

$$\Delta p = -\frac{1}{\tau} \operatorname{div} \bar{V}^*,$$

$$\frac{\bar{V}^{n+1} - \bar{V}^*}{\tau} = -\nabla p.$$

В [73] на основе метода расщепления по физическим процессам предлагается численный метод исследования конвективных движений жидкости, обладающий свойством энергетической нейтральности поля скоростей. Расщепление на два этапа (конвективный и диффузионный переносы) проводится в уравнениях конвекции, записанных физических переменных. Этап конвекции реализуется для скорости, а на этапе диффузии осуществляется переход к новым искомым функциям (вихрь и функция тока), что позволяет исключить расчет градиента давления для определения поля скоростей и обеспечить соленидальность вектора скорости. Проведена проверка метода на известной задаче о свободной конвекции в квадратной полости при подогреве сбоку.

В последние годы одним из наиболее эффективных численных методов решения краевых задач стал метод конечных элементов [74-78]. Широкое использование этого метода в значительной мере объясняется простой физической интерпретацией основных его вычислительных операций, наличием компьютерных программ, обеспечивающих высокую степень автоматизации трудоемких операций составления и решения систем вариационно-разностных уравнений. Среди достоинств метода конечных элементов выделяется также его исключительная индифферентность в отношении геометрии рассматриваемой области, краевых условий задачи, законов изменения свойств среды и внешних воздействий на область.

1.5. Реализация вычислений

Еще сравнительно недавно при реализации вычислительного эксперимента перед исследователем возникали трудности связанные с наличием мощных суперкомпьютеров для вычислений, а также с необходимостью вникать во все тонкости программирования. В настоящее время обе эти проблемы решены: первая – за счет появления многоядерных

ПК, вторая – благодаря широкому внедрению систем компьютерной алгебры (СКА).

В конце XX столетия на стыке математики и информатики зародилось фундаментальное научное направление – компьютерная алгебра (математика). Ее можно определить как совокупность теоретических, алгоритмических, аппаратных и программных средств, предназначенных для эффективного решения на компьютерной технике всех видов математических задач, включая символьные преобразования и вычисления с высокой степенью визуализации всех видов вычислений.

Основное назначение СКА – работа с математическими выражениями в символьной форме [79]. Базовые типы данных СКА: числа и математические выражения. Числа: короткие и длинные целые (одинарной и кратной точности), рациональные, комплексные, алгебраические числа. Алгебраическое число задается своим минимальным многочленом, а иногда для его задания требуется указать интервал на прямой или область в комплексной плоскости, где содержится единственный корень данного многочлена. Математические выражения: арифметика, функции, уравнения, производные, интегралы, векторы, матрицы, тензоры. Кроме того, в компьютерной алгебре рассматриваются такие объекты, как: функциональные, дифференциальные поля, допускающие показательные, логарифмические, тригонометрические функции; матричные кольца и другие.

СКА работают следующим образом:

- математические объекты (алгебраические выражения, ряды, уравнения, векторы, матрицы и др.) и указания, что с ними делать, задаются пользователем на входном языке системы в виде символьных выражений;
- интерпретатор анализирует и переводит символьные выражения во внутреннее представление;
- символьный процессор системы выполняет требуемые преобразования или вычисления и выдает ответ в математической нотации.

Выделяют СКА общего назначения и специализированные. Самые известные из первой группы: Derive, Mathematica, Maple, Macsyma и ее потомок Maxima, Scratchpad и ее потомок Axiom, Reduce, MuPAD, Mathcad, MATLAB, Sage, SMath Studio, Yacas, Scientific WorkPlace, Kalamaris. Системы второй группы: GAP (теория групп), Cadabra (тензорная алгебра), KANT (алгебра и теория чисел), Singular (полиномиальные вычисления с акцентом на нужды коммутативной алгебры, алгебраическая геометрия), Calc3D (для работы с 3D матрицами, векторами, комплексными числами), GRTensorII (дифференциальная геометрия). Лидерами являются Mathematica и Maple – мощные системы с собственными ядрами, оснащенные развитым пользовательским интерфейсом и обладающие разнообразными графическими и редакторскими возможностями. По сравнению с СКА Mathematica Maple по мнению ряда авторов [80,81] обладает более дружелюбным интерфейсом и имеет более развитые инструментальные средства.

Система Maple была создана группой ученых, занимающихся символьными вычислениями (The Symbolic Group), организованной Кейтом Геддом (Keith Geddes) и Гастоном Гонэ (Gaston Gonnet) в 1980 году в канадском университете Waterloo. Вначале она была реализована на больших компьютерах и прошла долгий путь апробации, вобрав в свое ядро и библиотеки большую часть математических функций и правил их преобразований, выработанных математикой за столетия развития [82].

Входной язык Maple является интерпретирующим языком сверхвысокого уровня, ориентированным на решение математических задач практически любой сложности в диалоговом режиме. Он служит для задания входных данных для последующей их обработки. Язык имеет большое число заранее определенных математических и графических функций, а также обширную библиотеку дополнительных функций, подключаемую по мере необходимости. Встроенный Maple-язык программирования считается одним

из самых лучших и мощных языков программирования математических задач. Его классифицируют, как язык процедурного программирования.

1.6. Выводы, цель и задачи исследования

1. Свободная конвекция является одним из основных механизмов переноса тепла и массы в технических системах предметного назначения. Наибольший интерес в этой связи представляет моделирование кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции во внутренних задачах, так как именно в замкнутых объемах реализуется большинство важных процессов в химической и пищевой промышленности, в энергетике, в ракетно-космической и криогенной технике.

2. В основе модельных представлений свободноконвективного движения жидких сред лежит гипотеза Обербека-Буссинеска о существенном влиянии на картину течения изменения от температуры только плотности среды, которая позволила модифицировать уравнения Навье-Стокса, включив в них в явном виде движущую силу переноса - локальный температурный напор.

3. Модель Обербека-Буссинеска в виде сопряженной существенно нелинейной системы уравнений в частных производных смешанного эллиптического-параболического типа до сих пор вызывает трудности при ее анализе по причине отсутствия доказательства единственности решения в общем виде с различными граничными условиями. Поэтому получены лишь единичные приближенные решения и то только внешних задач, например, решение Польгаузена, лежащее в основе практически всех теоретических оценок при анализе теплообмена вблизи вертикальных поверхностей.

4. Основным инструментом выяснения закономерностей при свободной конвекции остается вычислительный эксперимент, так как чувствительность современной контрольно-измерительной аппаратуры не

позволяет с достаточной степенью точности определять гидротермические характеристики процесса.

5. В последнее время интенсивное развитие получили системы компьютерной алгебры, обладающие широким спектром возможностей для решения математических задач и визуализации полученных результатов. По этой причине отпадает необходимость использовать универсальные языки программирования. Оптимизированные алгоритмы, заложенные в ядре СКА, позволяют не только упростить организацию расчетов, но и обеспечить их максимальную скорость.

На основе этих выводов сформулированы цель и задачи диссертационного исследования.

ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

2.1. Формулировка задачи и вывод основных уравнений

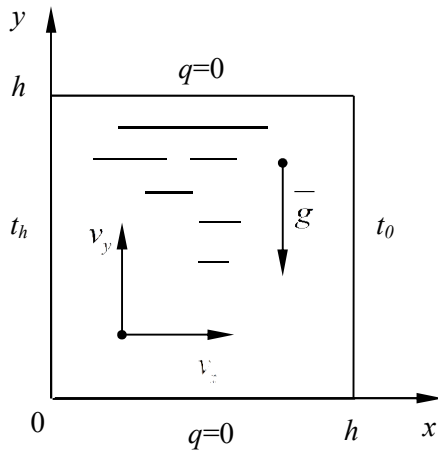


Рис. 2.1. Расчетная схема

Пусть имеется квадратная плоская область (рис. 2.1), полностью заполненная вязкой несжимаемой жидкостью, в начальный момент находящейся в состоянии покоя с температурой t_0 . Далее, например, температура левой стороны области скачком изменяется до температуры t_h , при этом верхнее и нижнее основания теплоизолированы, т.е. тепловой поток отсутствует $q=0$, а температура правой стенки остаётся равной первоначальной температуре жидкости ($t_h > t_0$).

В соответствии с выбранной системой координат уравнения Обербека–Буссинеска примут следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \beta g t,$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

В кондуктивно-ламинарном режиме конвективные слагаемые нивелируются вследствие малых скоростей $v_x \approx 0, v_y \approx 0$. Поэтому в приближении Стокса

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \beta g t, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (2.4)$$

Приведем систему (2.1)-(2.4) к безразмерному виду для сокращения числа параметров, от которых будет зависеть гидротермическая обстановка, путем введения масштабов для зависимых и независимых переменных.

Введем безразмерные величины $\theta = \frac{\tau}{\bar{\tau}}$, $X = \frac{x}{h}$, $Y = \frac{y}{h}$, $V_x = \frac{v_x}{\bar{v}}$, $V_y = \frac{v_y}{\bar{v}}$,

$$P = \frac{p}{\bar{p}}, T = \frac{t - t_0}{t_h - t_0}.$$

Уравнение (2.1) перепишем в виде

$$\frac{\bar{v}}{\bar{\tau}} \frac{\partial (v_x/\bar{v})}{\partial (\tau/\bar{\tau})} = -\frac{1}{\rho h} \frac{\bar{p}}{\bar{p}} \frac{\partial (p/\bar{p})}{\partial (x/h)} + \nu \frac{\bar{v}}{h^2} \left(\frac{\partial^2 (v_x/\bar{v})}{\partial (x/h)^2} + \frac{\partial^2 (v_x/\bar{v})}{\partial (y/h)^2} \right)$$

или

$$\frac{\bar{v}}{\bar{\tau}} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho h} \frac{\bar{p}}{\bar{p}} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \frac{\bar{v}}{h^2} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho h} \frac{\bar{p}}{\bar{p}} \frac{\bar{\tau}}{\bar{v}} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \frac{\bar{\tau}}{h^2} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \right).$$

Определим характерные скорость, давление и время из уравнений

$$\nu \frac{\bar{\tau}}{h^2} = 1, \frac{1}{\rho h} \frac{\bar{p}}{\bar{p}} \frac{\bar{\tau}}{\bar{v}} = 1, \frac{\bar{v}}{h} = 1. \text{ Получим } \bar{\tau} = \frac{h^2}{\nu}, \bar{v} = \frac{\nu}{h}, \bar{p} = \rho \frac{\nu^2}{h^2}. \text{ Тогда}$$

уравнение (2.1) в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2}. \quad (2.5)$$

Аналогично поступим с уравнением (2.2)

$$\frac{\partial V_y}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\bar{p}}{h} \frac{\bar{\tau}}{\bar{v}} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \frac{\bar{\tau}}{h^2} \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} \right) - \frac{\bar{\tau}}{\bar{v}} \beta g t,$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} - \frac{h^3}{\nu^2} \beta g t.$$

$$\frac{h^3}{\nu^2} \beta g \frac{t-t_0}{t_h-t_0} (t_h-t_0) = \text{Gr} T,$$

где $\text{Gr} = \frac{h^3}{\nu^2} \beta g (t_h-t_0)$ - число Грасгофа. Уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial V_y}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} - \text{Gr} T. \quad (2.6)$$

Чтобы избавиться от давления сначала продифференцируем уравнение (2.5) по Y

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^3 V_x}{\partial X^2 \partial Y} + \frac{\partial^3 V_x}{\partial Y^3}, \quad (2.7)$$

а уравнение (2.6) по X

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} \right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial Y \partial X} + \frac{\partial^3 V_y}{\partial X^3} + \frac{\partial^3 V_y}{\partial Y^2 \partial X} - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}, \quad (2.8)$$

а затем вычтем из уравнения (2.8) уравнение (2.7), получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^3 V_y}{\partial X^3} + \frac{\partial^3 V_y}{\partial Y^2 \partial X} - \frac{\partial^3 V_x}{\partial X^2 \partial Y} - \frac{\partial^3 V_x}{\partial Y^3} - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}.$$

Обозначим через $\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y}$ - безразмерный вихрь, тогда

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}, \quad (2.9)$$

Уравнение неразрывности (2.4) в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0.$$

Введем функцию тока Ψ так, чтобы оно удовлетворялось автоматически, $V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}$, $V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}$. Тогда $\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}$.

Перепишем уравнение (2.9) через функцию тока.

$$-\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) = -\frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} - 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Y^2} - \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial X}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} - (-\text{Gr}) \frac{\partial T}{\partial X}.$$

Введем переменную $\Phi = -\frac{\Psi}{\text{Gr}}$ и получим уравнение, не содержащее параметр Gr

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} - \frac{\partial T}{\partial X}. \quad (2.10)$$

Перепишем уравнение (2.3) в безразмерных переменных

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \frac{\partial \left(\frac{t-t_0}{t_h-t_0} \right)}{\partial (\tau/\bar{\tau})} = \frac{a}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{t-t_0}{t_h-t_0} \right)}{\partial (x/h)^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{t-t_0}{t_h-t_0} \right)}{\partial (y/h)^2} \right)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{a\bar{\tau}}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right)$$

С учетом $\frac{a\bar{\tau}}{h^2} = \frac{a}{h^2} \frac{h^2}{\nu} = \frac{a}{\nu} = \frac{1}{\text{Pr}}$, где Pr – число Прандтля, уравнение примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right). \quad (2.11)$$

Поскольку в начальный момент жидкость находилась в состоянии покоя и имела всюду одинаковую температуру t_0 , то начальные условия для температуры и функции тока таковы:

$$\Phi(X, Y, 0) = 0, \quad (2.12)$$

$t(x, y, 0) = t_0$, поэтому

$$T(X, Y, 0) = \frac{t_0 - t_0}{t_h - t_0} = 0. \quad (2.13)$$

Далее, т.к. температура левой стороны области скачком изменяется до температуры t_h , а температура правой стенки остаётся равной первоначальной температуре жидкости t_0 , граничные условия для температуры примут вид $t(0, y, \tau) = t_h$, $t(1, y, \tau) = t_0$, т.е.

$$T(0, Y, \theta) = \frac{t_h - t_0}{t_h - t_0} = 1, \quad T(1, Y, \theta) = \frac{t_0 - t_0}{t_h - t_0} = 0. \quad (2.14)$$

Условие непротекания жидкости через границу выражается уравнением

$$\Phi(0, Y, \theta) = \Phi(1, Y, \theta) = \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, 1, \theta) = 0, \quad (2.15)$$

а условие прилипания

$$\frac{\partial \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0, \theta)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, 1, \theta)}{\partial Y} = 0. \quad (2.16)$$

Итак, система уравнений (2.1)–(2.4) путем обезразмеривания и перехода к переменным «вихрь-функция тока», свелась к несопряженной системе уравнений (2.10) и (2.11) с начальными условиями (2.12)–(2.13) и граничными условиями (2.14)–(2.16).

2.2. Решение задачи методом конечного интегрального синус преобразования Фурье

Поскольку система уравнений (2.10) – (2.16) носит несопряженный характер, она декомпозируется на две последовательно решаемые задачи:

тепловую – (2.11), (2.13), (2.14), и гидродинамическую – (2.10), (2.12), (2.15), (2.16).

Решение тепловой задачи известно [9]

$$T(X, Y, \theta) = 1 - X + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin[(1-X)\pi p] \exp\left(-\frac{\pi^2 p^2}{Pr} \theta\right), \quad (2.17)$$

и поэтому сосредоточим основное внимание на гидродинамической, имея в виду (2.17).

Применим к системе (2.10), (2.12), (2.15), (2.16) конечное интегральное синус-преобразование Фурье [83] по переменной X :

$$\mathcal{F}_X[\Phi(X, Y, \theta)] = \int_0^1 \Phi(X, Y, \theta) \sin(\lambda X) dX = \Phi_X(\lambda, Y, \theta), \quad (2.18)$$

причем λ находится из характеристического уравнения $\sin(\lambda) = 0$.

Вычислим вначале $\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X}$:

$$\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X} = -1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos[(1-X)\pi p] \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}).$$

Запишем уравнение (2.1) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right] + \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] \right\} &= \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right] + \mathcal{F}_X \left[2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} \right] + \\ &+ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} \right] - \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Идентифицируем преобразования в (2.7):

$$\mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right] = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^2} \sin(\lambda X) dX = -\lambda^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta);$$

$$\mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \mathcal{F}_X[\Phi(X, Y, \theta)] = \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2};$$

$$\mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right] = \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^4} \sin(\lambda X) dX =$$

$$= -\lambda \cos \lambda \frac{\partial^2 \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X^2} + \lambda \frac{\partial^2 \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X^2} + \lambda^4 \Phi_x(\lambda, Y, \theta);$$

$$\mathcal{F}_x \left[2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right] = -2\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi_x(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2};$$

$$\mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} \right] = \frac{\partial^4}{\partial Y^4} \mathcal{F}_x [\Phi] = \frac{\partial^4 \Phi_x(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right] &= \int_0^1 \left\{ -1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos[(1-X)\pi p] \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}) \right\} \sin(\lambda X) dX = \\ &= \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1) - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}). \end{aligned}$$

Обозначим через

$$A(Y, \theta) = \frac{\partial^2 \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X^2}, \quad B(Y, \theta) = \frac{\partial^2 \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X^2}, \quad (2.20)$$

неизвестные функции, выражающие касательные напряжения на правой и левой границах области, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\lambda^2 \Phi_x(\lambda, Y, \theta) + \frac{\partial^2 \Phi_x(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2} \right] &= \lambda \cos \lambda + A(Y, \theta) + \lambda B(Y, \theta) + \\ &+ \lambda^4 \Phi_x(\lambda, Y, \theta) - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi_x(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_x(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4} - \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1) + \\ &+ 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp[-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\Phi_x(\lambda, Y, 0) = 0, \quad (2.22)$$

$$\Phi_x(\lambda, 0, \theta) = \Phi_x(\lambda, 1, \theta) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \Phi_x(\lambda, 0, \theta)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi_x(\lambda, 1, \theta)}{\partial Y} = 0. \quad (2.24)$$

Вновь применим к системе (2.21)–(2.24) конечное интегральное синус-преобразование Фурье, но по Y

$$\mathcal{F}_Y [\Phi_x(\lambda, Y, \theta)] = \int_0^1 \Phi_x(\lambda, Y, \theta) \sin(\mu Y) dY = \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta), \quad (2.25)$$

причем μ находится из характеристического уравнения $\sin(\mu) = 0$. Тогда

(2.19) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ -\lambda^2 \mathcal{F}_Y [\Phi_X(\lambda, Y, \theta)] + \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2} \right] \right\} = & -\lambda \cos \lambda \mathcal{F}_Y [A(Y, \theta)] + \\ & + \lambda \mathcal{F}_Y [B(Y, \theta)] + \lambda^4 \mathcal{F}_Y [\Phi_X(\lambda, Y, \theta)] - 2\lambda^2 \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2} \right] + \\ & + \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^4 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4} \right] - \mathcal{F}_Y \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Идентифицируем преобразования в (2.26):

$$\mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2} \right] = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2} \sin(\mu Y) dY = -\mu^2 \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta);$$

$$\mathcal{F}_Y [A(Y, \theta)] = A_Y(\mu, \theta); \quad \mathcal{F}_Y [B(Y, \theta)] = B_Y(\mu, \theta);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^4 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4} \right] &= \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4} \sin(\mu Y) dY = \\ &= -\mu \cos \mu \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 1, \theta)}{\partial X^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 0, \theta)}{\partial X^2} + \mu^4 \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Y \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right] \right\} &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1) - \right. \\ &\left. - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp\left(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{\text{Pr}}\right) \right\} \sin(\mu Y) dY = \\ &= -\frac{1}{\mu} (\cos \mu - 1) \left\{ \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1) - \right. \\ &\left. - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp\left(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{\text{Pr}}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим неизвестные функции

$$C(\lambda, \theta) = \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 1, \theta)}{\partial Y^2}, \quad D(\lambda, \theta) = \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 0, \theta)}{\partial Y^2}. \quad (2.27)$$

В изображениях система (2.10), (2.12), (2.15), (2.16) после упрощения примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta)}{\partial \theta} + (\lambda^2 + \mu^2) \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta) = \\ & = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} \left[\lambda \cos \lambda A_Y(\mu, \theta) - \lambda B_Y(\mu, \theta) + \mu \cos \mu C(\lambda, \theta) - \mu D(\lambda, \theta) \right] - \\ & \quad - \mathcal{F}_Y \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\Phi_{XY}(\lambda, \mu, 0) = 0. \quad (2.29)$$

Решив задачу Коши для (2.28)–(2.29), получим выражение для изображения:

$$\begin{aligned} \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta) = \exp \left[-\theta(\lambda^2 + \mu^2) \right] \int_0^\theta \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} \left[\lambda \cos \lambda A_Y(\mu, z) - \right. \\ \left. - \lambda B_Y(\mu, z) + \mu \cos \mu C(\lambda, z) - \mu D(\lambda, z) - \right. \\ \left. - \mathcal{F}_Y \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X} \right] \right\} \right] \exp \left[-z(\lambda^2 + \mu^2) \right] dz. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Последовательно применив обратные преобразования Фурье, получим:

$$\Phi(X, Y, \theta) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \sin(\lambda_n X) \sin(\mu_m Y), \quad (2.31)$$

где $\lambda_n = \pi n$ и $\mu_m = \pi m$.

В решение (2.30) входят интегралы от неизвестных функций (2.20) и (2.27)

$$\begin{aligned} & \int_0^\theta A_Y(\mu, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz, \int_0^\theta B_Y(\mu, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz, \\ & \int_0^\theta C(\lambda, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz, \int_0^\theta D(\lambda, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для вычисления этих интегралов рассмотрим следующие подходы. Первый базируется на гипотезе о приближении значения интеграла к стационарному состоянию по экспоненциальному закону при $\theta \rightarrow \infty$. Второй основан на приближенном вычислении интегралов по формулам трапеции и Симпсона.

Для определения коэффициентов принята гипотеза о представлении интегралов в виде:

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta A_Y(\mu, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz &= \tilde{A}(\mu, \theta) \int_0^\theta \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz, \\
\int_0^\theta B_Y(\mu, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz &= \tilde{B}(\mu, \theta) \int_0^\theta \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz, \\
\int_0^\theta C(\lambda, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz &= \tilde{C}(\lambda, \theta) \int_0^\theta \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz, \\
\int_0^\theta D(\lambda, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz &= \tilde{D}(\lambda, \theta) \int_0^\theta \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Тогда выражение для изображения примет вид

$$\begin{aligned}
\Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta) &= \frac{1 - \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)]}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} (\lambda \cos \lambda \tilde{A} - \lambda \tilde{B} + \\
&\quad + \mu \cos \mu \tilde{C} - \mu \tilde{D}) - \varphi(\lambda, \mu, \theta), \quad (2.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda, \mu, \theta) &= \frac{\cos \mu - 1}{\mu(\lambda^2 + \mu^2)} \left\| \frac{(\cos \lambda - 1) \{1 - \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)]\}}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2)} + \right. \\
+ 2 \Pr \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p &\left. \frac{[\cos \lambda - \cos(\pi p)] \{ \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{\Pr}) - \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)] \}}{(\pi^2 p^2 - \lambda^2) [\pi^2 p^2 - \Pr(\lambda^2 + \mu^2)]} \right\| \quad (2.35)
\end{aligned}$$

В каждый фиксированный момент времени θ , для определенных значений λ и μ , выражения для интегралов (2.33) представляют собой постоянные и вычисляются из системы линейных уравнений составленной по граничному условию (2.16) на градиент функции. Частные производные функции тока по пространственным переменным имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X} &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \cos(\lambda_n X) \sin(\mu_m Y), \\
\frac{\partial \Phi(X, Y, \theta)}{\partial Y} &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \sin(\lambda_n X) \cos(\mu_m Y).
\end{aligned}$$

Подставляя данные выражения в граничные условия (2.4) получим:

$$4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \cos(\lambda_n) \sin(\mu_m Y) = 0,$$

$$4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \sin(\mu_m Y) = 0,$$

$$4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \cos(\mu_m) \sin(\lambda_n X) = 0,$$

$$4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \sin(\lambda_n X) = 0.$$

Ряд, составленный из синусов $\sin(\lambda_n X)$, при любом X равен нулю только при равенстве нулю всех коэффициентов ряда. Аналогично, ряд, составленный из синусов $\sin(\mu_m Y)$, при любом Y равен нулю только при равенстве нулю всех коэффициентов ряда. Поэтому для частичных сумм ряда составляем систему линейных уравнений, которая в общем виде записана следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^K \lambda_n \frac{1 - \exp[-\theta(\lambda_n^2 + \mu_m^2)]}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} (\lambda_n \cos \lambda_n \tilde{A}_m - \\ \quad - \lambda_n \tilde{B}_m + \mu_m \cos \mu_m \tilde{C}_n + \mu_m \tilde{D}_n - \varphi_{nm}) = 0, \\ \sum_{n=1}^K \lambda_n \cos \lambda_n \frac{1 - \exp[-\theta(\lambda_n^2 + \mu_m^2)]}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} (\lambda_n \cos \lambda_n \tilde{A}_m - \\ \quad - \lambda_n \tilde{B}_m + \mu_m \cos \mu_m \tilde{C}_n + \mu_m \tilde{D}_n - \varphi_{nm}) = 0, \\ \sum_{m=1}^K \mu_m \frac{1 - \exp[-\theta(\lambda_n^2 + \mu_m^2)]}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} (\lambda_n \cos \lambda_n \tilde{A}_m - \\ \quad - \lambda_n \tilde{B}_m + \mu_m \cos \mu_m \tilde{C}_n + \mu_m \tilde{D}_n - \varphi_{nm}) = 0, \\ \sum_{m=1}^K \mu_m \cos \mu_m \frac{1 - \exp[-\theta(\lambda_n^2 + \mu_m^2)]}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2} (\lambda_n \cos \lambda_n \tilde{A}_m - \\ \quad - \lambda_n \tilde{B}_m + \mu_m \cos \mu_m \tilde{C}_n + \mu_m \tilde{D}_n - \varphi_{nm}) = 0. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Здесь $\varphi_{nm} = \varphi(\lambda, \mu, \theta)$ при $\lambda_n = \pi n$ и $\mu_m = \pi m$. Каждое выражение системы (2.36) представляет собой систему K линейных уравнений. Решив эту систему, найдем значения коэффициентов и, подставив их в (2.34), получим с

учетом (2.31) выражение функции тока в каждый фиксированный момент времени.

2.3. Анализ решения

На основе принятой гипотезы, проанализируем поведение неизвестных функций, входящих в выражения (2.33).

В табл. 2.1 приведены расчеты значений неизвестных функций в момент времени $\theta = 0.01$ при $K = 11$ и $\text{Pr} = 1$, для удобства результаты округлены до первых 3 значащих цифр.

Табл. 2.1. Расчет значений неизвестных функций.

$n \vee m$	\tilde{A}	\tilde{B}	\tilde{C}	\tilde{D}
1	–	–	–	–
2	0	0	–	–
3	–	–	0.0024	0.0024
4	0	0	–	–
5	–	–	0.0085	0.0085
6	0	0	–	–
7	–	–	0.0138	0.0138
8	0	0	–	–
9	–	–	0.0181	0.0181
10	0	0	–	–
11	–	–	0.0220	0.0220

Из таблицы видно, что значения неизвестных коэффициентов \tilde{C} и \tilde{D} совпадают, а четные значения \tilde{A} и \tilde{B} равны нулю. Вычислительный эксперимент показал, что такими свойствами обладают коэффициенты не зависимо от θ , K и Pr .

Перепишем выражение для изображения функции тока (2.34) с учетом равенства \tilde{C} и \tilde{D} .

$$\Phi_{xy}(\lambda, \mu, \theta) = \frac{1 - \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)]}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} [\lambda \cos \lambda \tilde{A} - \lambda \tilde{B} +$$

$$+\mu\tilde{C}(\cos\mu-1)]-\varphi(\lambda,\mu,\theta). \quad (2.37)$$

При четных m , очевидно, $\cos\mu=1$ и по формуле (2.35) $\varphi(\lambda,\mu,\theta)=0$.

Так как четные значения \tilde{A} и \tilde{B} равны нулю, то все слагаемые при четных m равны нулю, т.е.

$$\Phi(X,Y,\theta)=4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\Phi_{XY}(\lambda_n,\mu_m,\theta)\sin(\lambda_n X)\sin(\mu_m Y). \quad (2.38)$$

Представление функции тока в виде (2.38) с учетом (2.37) существенно облегчает расчеты.

На рис. 2.2 – 2.4 приведены графики зависимости коэффициентов от индексов m и n для количества слагаемых 21×21 , в момент времени $\theta=0.1$. По горизонтальной оси отложены номера, а по вертикальной – значения коэффициентов.

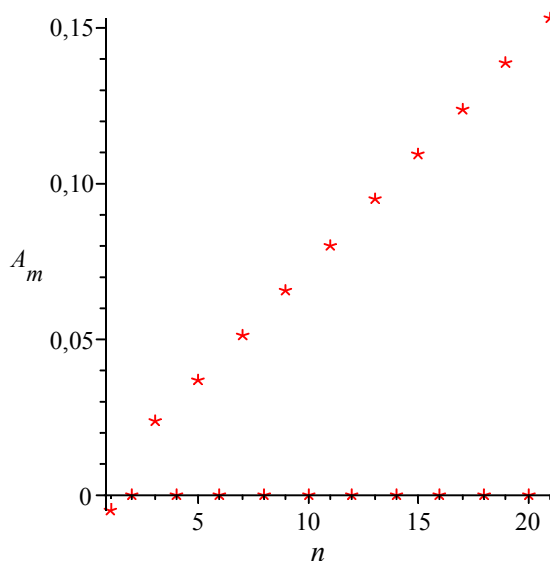


Рис. 2.2. График коэффициентов \tilde{A}_m

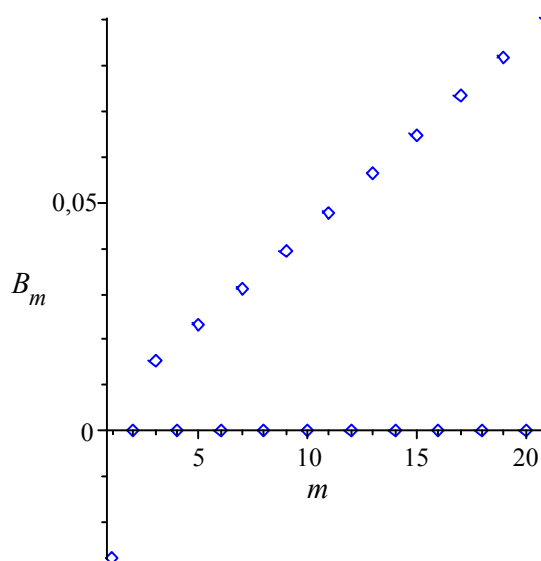


Рис. 2.3 График коэффициентов \tilde{B}_m

По рисункам можно заключить, что для нечетных номеров, начиная с 3-го, зависимость коэффициентов линейная. То же можно сказать и о четных номерах коэффициентов \tilde{C}_n , начиная с 4-го. Это означает, что функцию тока можно представить в виде двух сумм по четным и нечетным индексам.

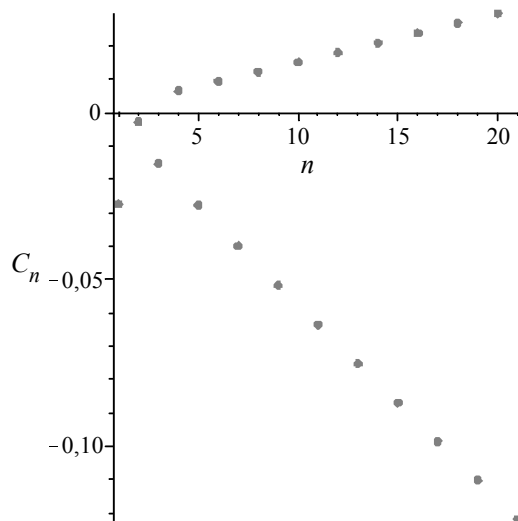


Рис. 2.4. График коэффициентов \tilde{C}_n

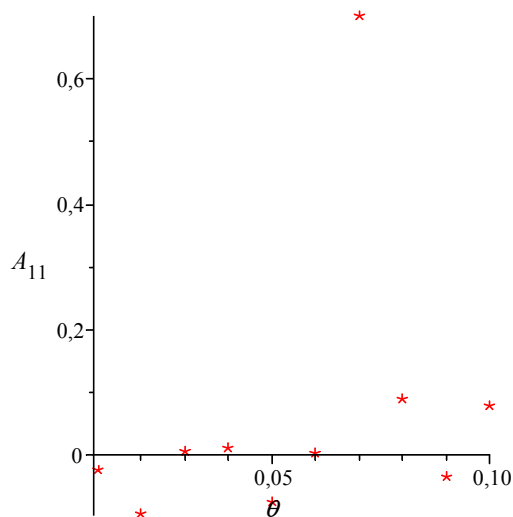


Рис. 2.5. График коэффициентов \tilde{C}_n

На рис. 2.5 – 2.7 изображены значения коэффициентов в разные моменты времени при $m = n = 11$, для количества слагаемых 21×21 . Горизонтальная ось – время, вертикальная – значения коэффициентов.

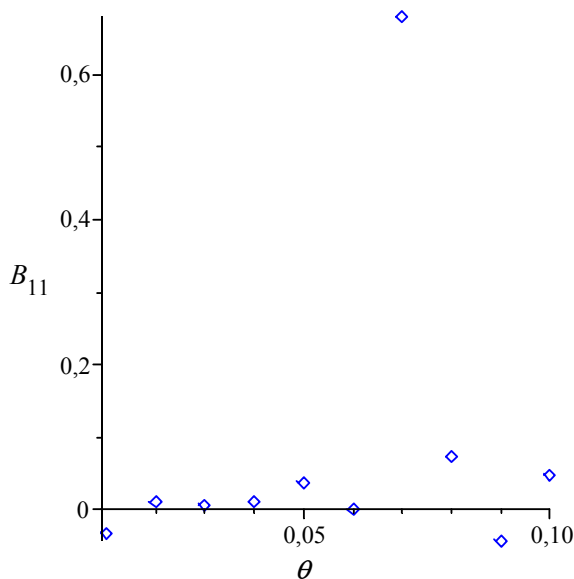


Рис. 2.6 График коэффициентов \tilde{B}_m

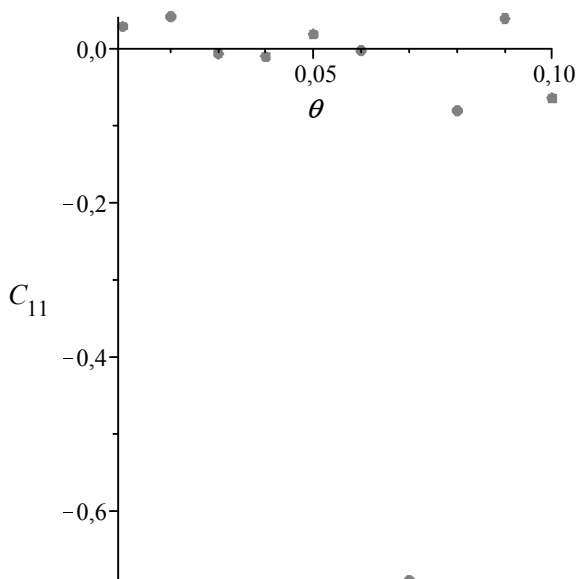


Рис. 2.7. График коэффициентов \tilde{C}_n

Из графиков видно, что коэффициенты сложным образом зависят от времени. Заметим, что коэффициенты с одинаковыми индексами – величины одного порядка.

На рис. 2.8 изображен график функции тока и ее профиля в сечении плоскостью $Y = 0.5$ в момент времени $\theta = 0.01$, для количества слагаемых 35×35 и числа $Pr = 1$.

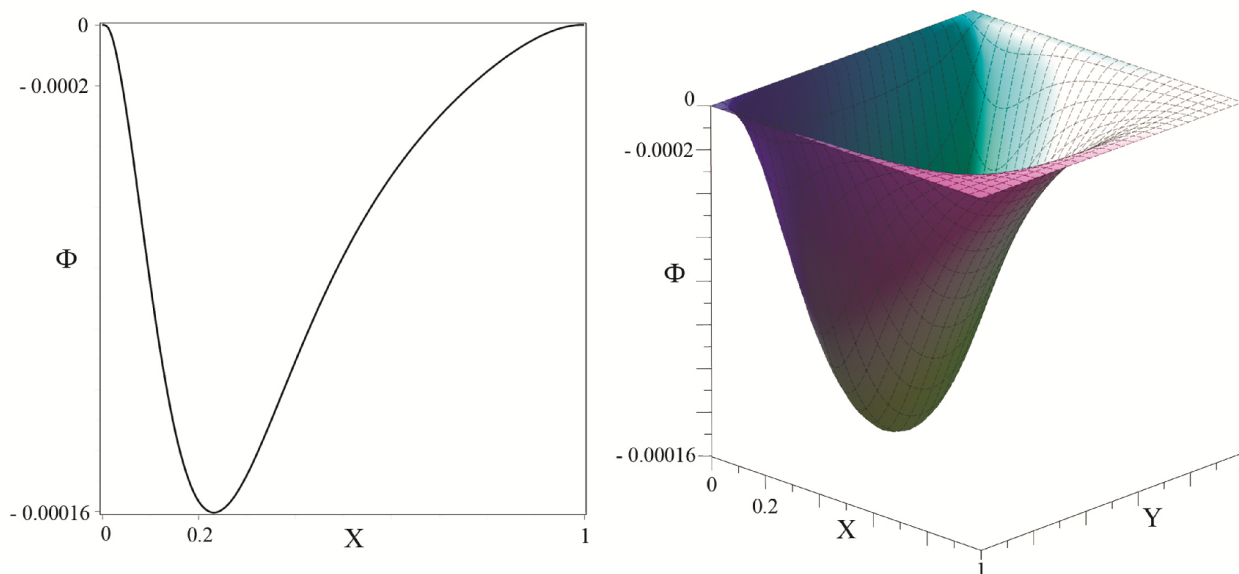


Рис. 2.8. График функции тока (слева) и ее профиля в срединном сечении (справа).

Для приближенного вычисления интегралов (2.32) воспользуемся формулой трапеции. Применим ее, например, к первому интегралу (2.32)

$$\int_0^{\theta} A_Y(\mu, z) \exp[(z - \theta)(\lambda^2 + \mu^2)] dz = \frac{\theta}{2} \{ A_Y(\mu, 0) \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)] + A_Y(\mu, \theta) \}.$$

Как уже говорилось, в каждый фиксированный момент времени θ , для определенных значений λ и μ , выражения для интегралов представляют собой постоянные и вычисляются из системы линейных уравнений составленной по граничному условию (2.4) на градиент функции.

Для отыскания $A_Y(\mu, 0)$ продифференцируем по θ граничные условия (2.16), и, применяя правило Лейбница [84], получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_0^{\theta} A_Y(\mu, \theta) \exp[(z - \theta)(\lambda^2 + \mu^2)] dz \right\} = \\ = -(\lambda^2 + \mu^2) \int_0^{\theta} A_Y(\mu, \theta) \exp[(z - \theta)(\lambda^2 + \mu^2)] dz + A_Y(\mu, \theta). \end{aligned}$$

Аналогично поступим и другими интегралами (2.32). При $\theta = 0$ получим систему уравнений, аналогичную (2.24) относительно

коэффициентов $A_m = A_Y(\mu_m, 0)$, $B_m = B_Y(\mu_m, 0)$, $C_n = C(\lambda_n, 0)$, $D_n = D(\lambda_n, 0)$.

Решив ее, и подставив результат в (2.27), найдем $A_Y(\mu, \theta)$ из системы уравнений аналогичной (2.36) в любой момент времени.

Для уточнения значений интегралов (2.32) воспользуемся формулами более высокого порядка точности. Например, формулой Симпсона:

$$\int_0^{\theta} A_Y(\mu, z) \exp[(z - \theta)(\lambda^2 + \mu^2)] dz = \frac{\theta}{6} \left\{ A_Y(\mu, 0) \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)] + \right. \\ \left. + 4A_Y(\mu, \frac{\theta}{2}) \exp[-\frac{\theta}{2}(\lambda^2 + \mu^2)] + A_Y(\mu, \theta) \right\}.$$

Однако для достижения достаточной степени точности требуются очень большие объемы вычислений промежуточных значений, поэтому первый способ вычисления на основании принятой гипотезы о виде интегралов (2.33) остается предпочтительнее.

2.4. Решение задачи в прямоугольнике

Рассмотрим систему уравнений (2.10), (2.12) и (2.17) с граничными условиями

$$\Phi(0, Y, \theta) = \Phi(1, Y, \theta) = \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, \xi, \theta) = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0, \theta)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, \xi, \theta)}{\partial Y} = 0, \quad (2.40)$$

где ξ - отношение сторон прямоугольника $[0, 1] \times [0, \xi]$.

Применим к этой системе конечное интегральное синус-преобразование Фурье по переменной X (2.18). Легко видеть, что все выкладки касательно переменной X полностью совпадают с аналогичными для случая квадратной области.

Вновь применим конечное интегральное синус-преобразование Фурье, но по Y

$$\mathcal{F}_Y[\Phi_X(\lambda, Y, \theta)] = \int_0^\xi \Phi_X(\lambda, Y, \theta) \sin\left(\frac{\mu}{\xi} Y\right) dY = \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta), \quad (2.41)$$

причем μ находится из характеристического уравнения $\sin\left(\frac{\mu}{\xi}\right) = 0$.

Идентифицируем преобразования:

$$\mathcal{F}_Y\left[\frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2}\right] = \int_0^\xi \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^2} \sin\left(\frac{\mu}{\xi} Y\right) dY = -\frac{\mu^2}{\xi^2} \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta);$$

$$\mathcal{F}_Y[A(Y, \theta)] = A_Y(\mu, \theta); \quad \mathcal{F}_Y[B(Y, \theta)] = B_Y(\mu, \theta);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Y\left[\frac{\partial^4 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4}\right] &= \int_0^\xi \frac{\partial^4 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4} \sin\left(\frac{\mu}{\xi} Y\right) dY = \\ &= -\frac{\mu}{\xi} \cos\frac{\mu}{\xi} \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, \xi, \theta)}{\partial X^2} + \frac{\mu}{\xi} \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 0, \theta)}{\partial X^2} + \frac{\mu^4}{\xi^4} \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Y\left\{\mathcal{F}_X\left[\frac{\partial T}{\partial X}\right]\right\} &= \int_0^\xi \left\{\frac{1}{\lambda}(\cos \lambda - 1) - \right. \\ &\left. - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda[\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp\left(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{\text{Pr}}\right)\right\} \sin\left(\frac{\mu}{\xi} Y\right) dY = \\ &= -\frac{\xi}{\mu} \left(\cos \frac{\mu}{\xi} - 1\right) \left\{\frac{1}{\lambda}(\cos \lambda - 1) - \right. \\ &\left. - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda[\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp\left(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{\text{Pr}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Обозначим неизвестные функции

$$C(\lambda, \theta) = \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, \xi, \theta)}{\partial Y^2}, \quad D(\lambda, \theta) = \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 0, \theta)}{\partial Y^2}. \quad (2.42)$$

В изображениях система (2.10), (2.12), (2.17), (2.39), (2.40) после упрощения примет вид:

$$\frac{\partial \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta)}{\partial \theta} + \left(\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\xi^2}\right) \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\xi^2}} \left[\lambda \cos \lambda A_Y(\mu, \theta) - \lambda B_Y(\mu, \theta) + \frac{\mu}{\xi} \cos \frac{\mu}{\xi} C(\lambda, \theta) - \frac{\mu}{\xi} D(\lambda, \theta) \right] -$$

$$- \mathcal{F}_Y \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X} \right] \right\}, \quad (2.43)$$

$$\Phi_{XY}(\lambda, \mu, 0) = 0. \quad (2.44)$$

Решив задачу Коши для (2.43)–(2.44), получим выражение для изображения:

$$\Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta) = \exp \left[-\theta \left(\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\xi^2} \right) \right] \int_0^\theta \frac{1}{\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\xi^2}} \left[\lambda \cos \lambda A_Y(\mu, z) - \right.$$

$$\left. - \lambda B_Y(\mu, z) + \frac{\mu}{\xi} \cos \frac{\mu}{\xi} C(\lambda, z) - \frac{\mu}{\xi} D(\lambda, z) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{F}_Y \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X} \right] \right\} \right] \exp \left[-z \left(\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\xi^2} \right) \right] dz. \quad (2.45)$$

Последовательно применив обратные преобразования Фурье, получим:

$$\Phi(X, Y, \theta) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \sin(\lambda_n X) \sin\left(\frac{\mu_m}{\xi} Y\right), \quad (2.46)$$

где $\lambda_n = \pi n$ и $\mu_m = \pi m$. Интегралы от неизвестных функций вычисляются аналогично случаю квадратной области.

2.5. Стационарная постановка

Математическая формализация задачи о стационарном плоском конвективном движении вязкой жидкости в квадратной области при однородном подогреве сбоку в условиях рассматриваемой модели сводится неоднородному бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial Y^4} = -1 \quad (2.47)$$

с граничными условиями

$$\Phi(0, Y) = \Phi(1, Y) = \Phi(X, 0) = \Phi(X, 1) = 0, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, 1)}{\partial Y} = 0, \quad (2.49)$$

где $\Phi(X, Y)$ – функция тока, X, Y – декартовы координаты.

Аналогично нестационарной постановке, приближенное аналитическое решение данной краевой задачи получено Слюсаревым М.И. в [85]. Двукратным применением конечного интегрального синус преобразования Фурье краевая задача (2.47)-(2.49) сводилась к алгебраическому уравнению относительно изображения $\Phi_{XY}(\lambda, \mu)$.

$$-\mu(\tilde{N} \cos \mu - D) + \mu^4 \Phi_{XY} + 2\lambda^2 \mu^2 \Phi_{XY} + \lambda^4 \Phi_{XY} - \\ -\lambda(A \cos \lambda - B) = -\frac{1}{\lambda \mu} (\cos \lambda - 1)(\cos \mu - 1).$$

Далее в работе предполагалось равенство коэффициентов $A = B$ и $C = D$. Отказавшись от этого равенства, получим структуру решения в виде:

$$\Phi(X, Y) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)} [\lambda_n (A_m \cos \lambda_n - B_m) + \mu_m (C_n \cos \mu_m - D_n) - \\ - \frac{(\cos \lambda_n - 1)(\cos \mu_m - 1)}{\lambda_n \mu_m}] \sin(\lambda_n X) \sin(\mu_m Y) \quad (2.50)$$

Неизвестные коэффициенты находятся из системы линейных уравнений аналогичной (2.36), составленной по граничному условию на градиент функции тока.

Анализ решения показал равенство всех коэффициентов между собой, т.е. $A_m = B_m = C_n = D_n$ при $m = n$.

На рис. 2.9 изображен график функции тока v и ее профиль в срединном сечении. Соответствующее поле скоростей показано на рисунке 2.10.

В табл. 2.2 отражена зависимость минимального значения функции тока Φ_{\min} от числа слагаемых ряда K^2 . Мы видим, что с увеличением числа

слагаемых максимальное по модулю значение функции тока практически не меняется, поэтому в расчетах можно ограничиться небольшим числом слагаемых для обеспечения заданной точности решения.

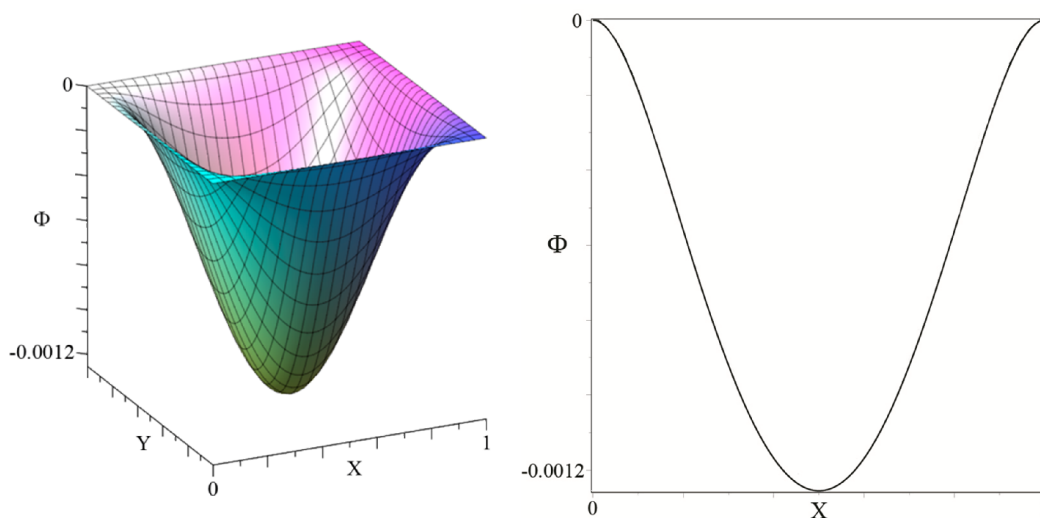


Рис. 2.9. График функции тока (слева) и ее профиля в срединном сечении (справа).

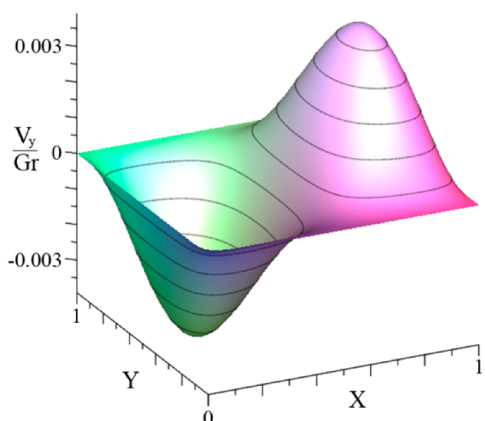


Рис. 2.10. Поле скоростей.

Минимальное значение, высчитанное при $K = 201$, равно $-1.256 \cdot 10^{-3}$. Полученные результаты согласуются с приближенными решениями С.П. Тимошенко [86] и С. Канторовича, для которых Φ_{\min} соответственно $-1.26 \cdot 10^{-3}$ и $-1.29 \cdot 10^{-3}$.

Табл. 2.2. Зависимость минимума функции тока от числа слагаемых.

K	Φ_{\min}	K	Φ_{\min}
11	-0.001088	61	-0.001232
21	-0.001168	71	-0.001237
31	-0.001200	81	-0.001240
41	-0.001215	91	-0.001243
51	-0.001225	101	-0.001245

2.6. Выводы

1. Уравнения Обербека-Буссинеска в приближении Стокса путем обезразмеривания и перехода к переменным «вихрь-функция тока», может быть сведена к несопряженной системе двух уравнений.

2. Двойным применением конечного интегрального синус преобразования Фурье по пространственным переменным получены приближенные аналитические решения нестационарной задачи Стокса в квадратной и прямоугольной областях в виде двойного ряда с представлением коэффициентов в интегральной форме.

3. Предложены два подхода к определению интегральных коэффициентов. Первый базируется на гипотезе о приближении значения интеграла к стационарному состоянию по экспоненциальному закону при $\theta \rightarrow \infty$. Второй основан на приближенном вычислении интегралов по формулам трапеции и Симпсона.

4. Проведен анализ интегральных коэффициентов, позволивший установить ряд свойств полученного приближенного аналитического решения.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКАХ

3.1. Стационарная постановка

3.1.1. Постановка задачи и построение численной схемы

Математическая формализация задачи о стационарном плоском конвективном движении вязкой жидкости в квадратной области при однородном подогреве сбоку в условиях рассматриваемой модели сводится неоднородному бигармоническому уравнению [87]

$$\frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial Y^4} = -1 \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\Phi(0, Y) = \Phi(1, Y) = \Phi(X, 0) = \Phi(X, 1) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, 1)}{\partial Y} = 0, \quad (3.3)$$

где $\Phi(X, Y)$ – функция тока, X, Y – декартовы координаты.

Применим процедуру установления. Предположим зависимость функции тока от фиктивного времени θ . Прибавим к правой части уравнения (3.1) производную по фиктивному времени $\frac{\partial \Phi(X, Y, \theta)}{\partial \theta}$, и добавим начальное

условие равенства нулю функции тока в начальный момент времени.

Известно, что решение системы

$$\frac{\partial \Phi(X, Y, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial Y^4} = -1 \quad (3.4)$$

$$\Phi(X, Y, 0) = 0, \quad (3.5)$$

$$\Phi(0, Y, \theta) = \Phi(1, Y, \theta) = \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, 1, \theta) = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial\Phi(0,Y,\theta)}{\partial X} = \frac{\partial\Phi(1,Y,\theta)}{\partial X} = \frac{\partial\Phi(X,0,\theta)}{\partial Y} = \frac{\partial\Phi(X,1,\theta)}{\partial Y} = 0, \quad (3.7)$$

сходится к решению системы при $\theta \rightarrow \infty$ [83].

Для построения конечно-разностной схемы временной отрезок разделен на равные промежутки $\Delta\theta$. В каждый момент времени $k\Delta\theta$, $k=1,\dots$ область решения \bar{D} системы заменена сеткой с шагами ΔX , ΔY , $\bar{w}_{\Delta X, \Delta Y} = \{(X_i, Y_j) = (i\Delta X, j\Delta Y)\}$ $i=0,\dots,n, j=0,\dots,m$. Вместо функции непрерывного аргумента на \bar{D} рассматривается функция дискретного аргумента $\Phi(X_i, Y_j, \theta_k)_{\Delta X, \Delta Y, \Delta\theta}$, которая обозначается $\Phi_{i,j}^k$. Выбор разбиения осуществлен таким образом, чтобы в него попадали точки границы области и центр области.

Конечно-разностную аппроксимацию производной $\frac{\partial\Phi(X,Y,\theta)}{\partial\theta}$ в произвольном узле (i,j) получим применением конечно-разностного оператора первого порядка

$$T\Phi = \frac{\partial\Phi(X,Y,\theta)}{\partial\theta} \Big|_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k}{\Delta\theta} + O(\Delta\theta). \quad (3.8)$$

Для построения конечно-разностного аналога частных производных $\partial^4\Phi(X,Y,\theta)/\partial X^4$ и $\partial^4\Phi(X,Y,\theta)/\partial Y^4$ используем центрально-разностный оператор 2-го порядка примененный дважды по соответствующей переменной [110]:

$$B_{\Delta 1}\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i+2,j}^k - 4\Phi_{i+1,j}^k + 6\Phi_{i,j}^k - 4\Phi_{i-1,j}^k + \Phi_{i-2,j}^k}{(\Delta X)^4} + O[(\Delta X)^2], \quad (3.9)$$

$$B_{\Delta 3}\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial Y^4} \Big|_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j+2}^k - 4\Phi_{i,j+1}^k + 6\Phi_{i,j}^k - 4\Phi_{i,j-1}^k + \Phi_{i,j-2}^k}{(\Delta Y)^4} + O[(\Delta Y)^2]. \quad (3.10)$$

Аппроксимацию смешанной производной получим с помощью пятиточечного приближения второй производной [108] по X и по Y

$$B_{\Delta 2}\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial X^2\partial Y^2} \Big|_{i,j,k} = \frac{1}{144(\Delta X)^2(\Delta Y)^2} \left[(\Phi_{i+2,j+2}^k - 16\Phi_{i+2,j+1}^k + 30\Phi_{i+2,j}^k - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -16\Phi_{i+2,j-1}^k + \Phi_{i+2,j-2}^k) - 16(\Phi_{i+1,j+2}^k - 16\Phi_{i+1,j+1}^k + 30\Phi_{i+1,j}^k - 16\Phi_{i+1,j-1}^k + \\
& + \Phi_{i+1,j-2}^k) + 30(\Phi_{i,j+2}^k - 16\Phi_{i,j+1}^k + 30\Phi_{i,j}^k - 16\Phi_{i,j-1}^k + \Phi_{i,j-2}^k) - \\
& 16(\Phi_{i-1,j+2}^k - 16\Phi_{i-1,j+1}^k + 30\Phi_{i-1,j}^k - 16\Phi_{i-1,j-1}^k + \Phi_{i-1,j-2}^k) + \\
& (\Phi_{i-2,j+2}^k - 16\Phi_{i-2,j+1}^k + 30\Phi_{i-2,j}^k - 16\Phi_{i-2,j-1}^k + \Phi_{i-2,j-2}^k) + O[(\Delta X)^2(\Delta Y)^2] \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Обозначим $B_{\Delta}\Phi = B_{\Delta_1}\Phi + 2B_{\Delta_2}\Phi + B_{\Delta_3}\Phi$. Заменяя в уравнении (3.4) частные производные конечно-разностными аналогами, а известную функцию ее сужением на узлы сетки и отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости, получим уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k}{\Delta\theta} + \frac{\Phi_{i+2,j}^k - 4\Phi_{i+1,j}^k + 6\Phi_{i,j}^k - 4\Phi_{i-1,j}^k + \Phi_{i-2,j}^k}{(\Delta X)^4} + \\
& + \frac{1}{72(\Delta X)^2(\Delta Y)^2} \left[(\Phi_{i+2,j+2}^k - 16\Phi_{i+2,j+1}^k + 30\Phi_{i+2,j}^k - \right. \\
& - 16\Phi_{i+2,j-1}^k + \Phi_{i+2,j-2}^k) - 16(\Phi_{i+1,j+2}^k - 16\Phi_{i+1,j+1}^k + 30\Phi_{i+1,j}^k - 16\Phi_{i+1,j-1}^k + \\
& + \Phi_{i+1,j-2}^k) + 30(\Phi_{i,j+2}^k - 16\Phi_{i,j+1}^k + 30\Phi_{i,j}^k - 16\Phi_{i,j-1}^k + \Phi_{i,j-2}^k) - \\
& 16(\Phi_{i-1,j+2}^k - 16\Phi_{i-1,j+1}^k + 30\Phi_{i-1,j}^k - 16\Phi_{i-1,j-1}^k + \Phi_{i-1,j-2}^k) + \\
& \left. (\Phi_{i-2,j+2}^k - 16\Phi_{i-2,j+1}^k + 30\Phi_{i-2,j}^k - 16\Phi_{i-2,j-1}^k + \Phi_{i-2,j-2}^k) \right] + \\
& + \frac{\Phi_{i,j+2}^k - 4\Phi_{i,j+1}^k + 6\Phi_{i,j}^k - 4\Phi_{i,j-1}^k + \Phi_{i,j-2}^k}{(\Delta Y)^4} = -1 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Начальное условие (3.5) на сетке приобретет вид

$$\Phi_{i,j}^0 = 0, \quad i, j = \overline{0, n}. \quad (3.13)$$

Дискретный аналог граничных условий, накладываемых на саму функцию, получим сужением условий (3.6) на граничные узлы сетки

$$\Phi_{0,j}^k = \Phi_{n,j}^k = \Phi_{i,0}^k = \Phi_{i,n}^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n}. \quad (3.14)$$

Аналог граничных условий, накладываемых на частные производные первого порядка (3.7), находим из соотношения для конечно-разностного аналога первой производной.

$$\frac{\Phi_{1,j}^k - \Phi_{0,j}^k}{\Delta X} = \frac{\Phi_{n,j}^k - \Phi_{n-1,j}^k}{\Delta X} = \frac{\Phi_{i,1}^k - \Phi_{i,0}^k}{\Delta Y} = \frac{\Phi_{i,n}^k - \Phi_{i,n-1}^k}{\Delta Y} = 0, \quad i, j = \overline{1, n-1}.$$

Учитывая (3.14), имеем

$$\Phi_{1,j}^k = \Phi_{n-1,j}^k = \Phi_{i,1}^k = \Phi_{i,n-1}^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n-1}. \quad (3.15)$$

Таким образом, аналогом непрерывной задачи (3.4)–(3.7) является конечно-разностная схема (3.12)–(3.15).

Схема (3.12)–(3.15) является маршевой итерационной схемой, каноническая форма которой [88]

$$\frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\Delta \theta} + B_{\Delta} \Phi_k = -1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \Phi_0 = 0. \quad (3.16)$$

Для дальнейшего анализа на множестве сеточных функций $\{u(X_i, Y_j)_{\Delta X, \Delta Y}\}$ вводится Гильбертово пространство $H_{\Delta X, \Delta Y}$, которое для каждого разбиения представляет собой вещественное пространство $(n+1) \times (m+1)$ - мерных векторов, с требованием выполнения граничных условий (3.14)–(3.15) для каждой функции из $H_{\Delta X, \Delta Y}$ и с заданием скалярного произведения в виде [89]

$$(u, v) = \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=2}^{m-2} u_{i,j} v_{i,j} \Delta X \Delta Y$$

и следующих норм

$$\|u\|_1 = \max_{i,j} |u_{i,j}|, \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=2}^{m-2} u_{i,j}^2 \Delta X \Delta Y \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

Нормы выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие согласования норм, при $\Delta X, \Delta Y \rightarrow 0$ $\|\cdot\|_1$ переходит в обычную норму в пространстве $C(\overline{D})$, а $\|\cdot\|_2$ в обычную норму в пространстве $L_2(\overline{D})$ [90]. В случае отсутствия индекса у норм в выражениях можно использовать обе.

3.1.2. Вычисление нормы оператора перехода и оптимального итерационного шага

На равномерных сетках $\Delta X = \Delta Y = h$ и $\Delta \theta = \tau$ введем конечномерное гильбертово пространство H_h и рассмотрим в нем оператор $B = h^4 B_h$ не зависящий явно от h .

Для дальнейших рассуждений нам потребуются следующие вспомогательные теоремы о свойствах операторов действующих в конечномерных гильбертовых пространствах[91]

Теорема 1. *Если A и B самосопряженные операторы, а α, β - вещественные числа, то оператор $\alpha A + \beta B$ самосопряженный.*

Теорема 2. *Если A и B положительно-определенные операторы, то оператор $c_1 A + c_2 B$ положительно определен при $c_1 > 0, c_2 > 0$.*

Теорема 3. *Если оператор A положительно определен, то оператор A^{-1} тоже положительно определен.*

Теорема 4. *Если A и B положительно-определенные операторы, то все собственные значения оператора BA положительны.*

Теорема 5. *Если A и B перестановочные положительно-определенные операторы, то AB положительно определенный оператор.*

Докажем следующее свойство оператора B .

Теорема 6. *Оператор B положительно-определенный.*

Доказательство. Поскольку $B = B_1 + 2B_2 + B_3$ и согласно теореме 1, линейная комбинация положительно-определенных операторов с положительными коэффициентами положительно определена, достаточно показать лишь положительную определенность операторов B_1, B_2, B_3 .

Матрица B_1 представляет собой блочную квазидиагональную матрицу, каждый блок которой симметричная пятидиагональная матрица

$$B_1(n) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителя пятидиагональной матрицы

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

сводится к решению системы разностных уравнений [92]:

$$A_n - A_{n-1} + a_2^2 A_{n-3} - a_2^4 A_{n-4} + a_1 B_{n-1} - a_1 a_2 B_{n-2} = 0,$$

$$B_n + a_2 B_{n-1} - a_1 A_{n-1} = 0.$$

Здесь $A_k = \Delta(k)$, а $B_{k-1} = \Delta(1, 2 / k)$ – минор, получаемый из определителя $\Delta(k)$ вычеркиванием первой строки и второго столбца. Исключая B_{n-1} и B_{n-2} из первого уравнения получим характеристическое уравнение

$$z^5 + (a_2 - 1)z^4 + (a_1^2 - a_2)z^3 + a_2(a_1^2 - a_2)z^2 + a_2^3(1 - a_2)z - a_2^5 = 0.$$

При $a_1 = -4/6$, $a_2 = 1/6$ все корни равны $\lambda_k = 1/6, k = 1..6$, поэтому

$$\begin{aligned} \det[B_1(n)] &= 6^n A_n = 6^n (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 n^3 + C_5 n^4) \left(\frac{1}{6}\right)^n = \\ &= (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 n^3 + C_5 n^4), \end{aligned}$$

причем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 определяются из начальных условий

$$B_1(0) = 1, B_1(1) = 6, B_1(2) = 20, B_1(3) = 50, B_1(4) = 105. \quad \text{Вычислив постоянные,}$$

получим $\det[B_1(n)] = 1 + \frac{7}{3}n + \frac{23}{12}n^2 + \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{12}n^4$. Поскольку $\det[B_1(n)] > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_1(n)$ удовлетворяет критерию Сильвестра. Матрица B_3 симметрична и в другом ортогональном базисе при замене i на j совпадает с матрицей B_1 , то есть B_3 и B_1 подобны, поэтому B_3 положительно определен. Матрица B_2 представляет собой произведение положительно определенных квазидиагональной и квазипятидиагональной матриц. В силу перестановочности этого произведения согласно теореме 5, оно положительно определено. Таким образом, оператор B положительно определенный. ■

Учитывая граничные условия (3.14) – (3.15), рассмотрим спектральную задачу для оператора B в квадрате со стороной $l = 1 - 2h$.

$$Bu - \lambda u = 0, \quad u_{k,j} = u_{i,k} = 0, \quad k = 0, n, \quad i, j = \overline{0, n}$$

Решение задачи будем искать в виде $u(x, y) = \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$, где α и β подлежат определению [109]. Тогда

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} &= \sin[\alpha(x+h)] \sin(\beta y) + \sin[\alpha(x-h)] \sin(\beta y) = \\ &= 2 \cos(\alpha h) \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i+2,j} + u_{i-2,j} &= \sin[\alpha(x+2h)] \sin(\beta y) + \sin[\alpha(x-2h)] \sin(\beta y) = \\ &= 2 \cos(2\alpha h) \sin(\alpha x) \sin(\beta y). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} + u_{i,j-1} &= \sin(\alpha x) \sin[\beta(y+h)] + \sin(\alpha x) \sin[\beta(y-h)] = \\ &= 2 \cos(\beta h) \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i,j+2} + u_{i,j-2} &= \sin(\alpha x) \sin[\beta(y+2h)] + \sin(\alpha x) \sin[\beta(y-2h)] = \\ &= 2 \cos(2\beta h) \sin(\alpha x) \sin(\beta y). \end{aligned}$$

Подставляя найденные соотношения в (3.9) – (3.11), получим

$$\begin{aligned} \lambda &= 2[\cos(2\alpha h) + \cos(2\beta h)] - 8[\cos(\alpha h) + \cos(\beta h)] + 12 + \\ &+ \frac{[\cos(2\alpha h) - 16\cos(\alpha h) + 15][\cos(2\beta h) - 16\cos(\beta h) + 15]}{18}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Значение параметров α и β выберем так, чтобы функция

$u(x, y) = \sin(\alpha x)\sin(\beta y)$ удовлетворяла граничным условиям задачи. При $x = 0$ или $y = 0$ граничное условие выполняется автоматически. При $x = l$ $\sin(\alpha l) = 0$, при $y = l$ $\sin(\beta l) = 0$, откуда $\alpha_m = \frac{m\pi}{l}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{l}$.

Поскольку оператор B положительно определен, все собственные значения его положительны. Нетрудно увидеть, что максимум выражения достигается при $\cos(2\alpha h) = 1, \cos(2\beta h) = 1$ и $\cos(\alpha h) = -1, \cos(\beta h) = -1$, т.е.

при $\alpha h = \frac{\pi}{2}, \beta h = \frac{\pi}{2}$, а минимум равен 0. Таким образом

$0 < \lambda_{\min} = \lambda_{1,1} < \lambda_{1,2} < \dots < \lambda_{n-1,n-1} = \lambda_{\max} < \frac{800}{9}$. показал те же результаты. В

таблице 1 приведены расчеты границ спектра по формуле (3.18) и методами оптимизации Maple по формулам $\lambda_{\max} = \sup_{\|u\|=1} (B, u)$, $\lambda_{\min} = \inf_{\|u\|=1} (B, u)$. Анализ расчетов показал идентичность полученных результатов.

Табл.3.1. Расчет границ спектра оператора B .

Размерность сетки	Аналитический расчет		Расчет методами Maple	
	λ_{\min}	λ_{\max}	λ_{\min}	λ_{\max}
11×11	0.09389	81.25439	0.2	81.5391
15×15	0.01868	85.41863	0.046718	85.5
21×21	0.0037	87.331	0.01	87.358
25×25	0.00166	87.8432	0.004672	87.8581

Перепишем схему (3.16) в виде

$$\Phi_{k+1} = S\Phi_k - \tau, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \Phi_0 = 0,$$

где

$$S = E - \tau B_n \tag{3.19}$$

– оператор перехода. Отметим, что S – самосопряженный оператор, как линейная комбинация самосопряженных операторов.

Норма оператора перехода вычисляется по формуле

$$\|S\|_3 = \max_k |\mu_k|,$$

где μ_k – собственные значения, тогда из (3.19) следует

$$\mu_k = 1 - \frac{\tau}{h^4} \lambda_k,$$

где λ_k – собственные значения оператора B , что дает возможность сформулировать задачу минимакса [89]

$$\|S\|_3 = \min_{\tau > 0} \max_k \left| 1 - \frac{\tau}{h^4} \lambda_k \right|.$$

Лемма 1. Если $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$, $\tau > 0$, то

$$\min_{\tau > 0} \max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} |1 - \tau \lambda| = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \rho_0, \quad \tau = \tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}.$$

Согласно лемме 1

$$\|S\| = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \rho_0, \quad \tau = \tau_0 = \frac{2h^4}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}. \quad (3.20)$$

Табл. 3.2. Расчет входных параметров.

Размерность сетки	h	$\ S\ $	τ_0	Сходимость
11×11	0.1	0.9977	$2.4586 \cdot 10^{-6}$	сходится
11×11	0.1		$2.47 \cdot 10^{-6}$	расходится
15×15	1/14	0.99956	$6.0935 \cdot 10^{-7}$	сходится
15×15	1/14		$6.1 \cdot 10^{-7}$	расходится
21×21	0.05	0.999915	$1.431 \cdot 10^{-7}$	сходится
21×21	0.05		$1.44 \cdot 10^{-7}$	расходится
25×25	1/24	0.99996	$6.862 \cdot 10^{-8}$	сходится
25×25	1/24		$6.9 \cdot 10^{-8}$	расходится

Таким образом, мы получили не только выражение для нормы оператора перехода, но и значение оптимального итерационного шага. В

таблице 3.2 приведены расчеты входных параметров задачи (3.16) и показана сходимость схемы при отклонении от оптимального шага.

3.1.3. Вычисление погрешности аппроксимации уравнения разностной схемой

Рассмотрим уравнение (3.12) в операторной форме

$$Tu + B_h u = -1. \quad (3.21)$$

Для оценки его точности образуем разность $z = u - v$, где u - решение задачи (3.9) – (3.12), а v – решение задачи (3.4) – (3.7) [88]. Подставляя $u = z + v$ в (3.21) получим для z задачу

$$\begin{aligned} Tu + B_h u &= T(z + v) + B_h(z + v) = \\ &= (T + B_h)z + (T + B_h)v = -1, \quad (T + B_h)z = -\varepsilon. \end{aligned}$$

во внутренних узлах сетки и для z выполнены граничные условия (3.13)–(3.15), где $\varepsilon = (T + B_h)v + 1$ – погрешность аппроксимации задачи (3.4)–(3.7)

схемой (3.12)–(3.15). Так как $\frac{\partial v}{\partial \tau} + \Delta^2 v + 1 = 0$, то

$$\varepsilon = (T + B_h)v + 1 - \frac{\partial v}{\partial \tau} + \Delta^2 v - 1 = (T + B_h)v - \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \Delta^2 v\right).$$

Вычислим погрешность аппроксимации почленно, используя разложение по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в окрестности i, j, k - того узла:

$$B_{h1}v(X, Y, \theta) - \frac{\partial^4 v(X, Y, \theta)}{\partial X^4} = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^6 v}{\partial X^6} [h(i + \eta), ih, k\tau], \quad 0 < \eta < 1;$$

$$B_{h3}v(X, Y, \theta) - \frac{\partial^4 v(X, Y, \theta)}{\partial Y^4} = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^6 v}{\partial Y^6} [ih, h(j + \sigma), k\tau], \quad 0 < \sigma < 1;$$

$$B_{h2}v(X, Y, \tau) - \frac{\partial^4 v(X, Y, \theta)}{\partial X^2 \partial Y^2} = \frac{17h^4}{756} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial Y^8} [(i + \eta)h, hj, k\tau] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^8} [ih, h(j + \sigma), k\tau] \Big\} - \frac{34h^4}{189} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial X^7 \partial Y} [(i + \eta)h, h(j + \sigma), k\tau] + \right. \\
& + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^7 \partial X} [(i + \eta)h, h(j + \sigma), k\tau] \Big\} - \frac{167h^4}{270} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial X^6 \partial Y^2} [(i + \eta)h, h(j + \sigma), k\tau] + \right. \\
& + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^6 \partial X^2} [(i + \eta)h, h(j + \sigma), k\tau] \Big\} - \frac{34h^4}{27} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial X^5 \partial Y^3} [(i + \eta)h, h(j + \sigma), k\tau] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^5 \partial X^3} [(i + \eta)h, h(j + \sigma), k\tau] \Big\} + \\
& \quad \frac{85h^4}{54} \frac{\partial^8 v}{\partial X^4 \partial Y^4} [(i + \eta)h, h(j + \sigma), k\tau], \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < \sigma < 1; \\
Tv(X, Y, \theta) - \frac{\partial v(X, Y, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} [ih, jh, \tau(k + \rho)], \quad 0 < \rho < 1.
\end{aligned}$$

Чтобы выразить погрешность, обозначим

$$\begin{aligned}
M_1 &= \max_{(X, Y, \theta) \in \tilde{G} \times [0, +\infty]} \left| \frac{\partial^6 v(X, Y, \theta)}{\partial X^6} \right|, \quad M_2 = \max_{(X, Y, \theta) \in \tilde{G} \times [0, +\infty]} \left| \frac{\partial^6 v(X, Y, \theta)}{\partial Y^6} \right|; \\
M_3 &= \min_{(X, Y, \theta) \in \tilde{G} \times [0, +\infty]} \left| \frac{\partial^{m+n} v(X, Y, \theta)}{\partial X^m \partial Y^n} \right|, \quad m, n = 1, 3, 5, 7, \quad m + n = 8; \\
M_4 &= \max_{(X, Y, \theta) \in \tilde{G} \times [0, +\infty]} \left| \frac{\partial^{m+n} v(X, Y, \theta)}{\partial X^m \partial Y^n} \right|, \quad m, n = 2, 4, 6, 8, \quad m + n = 8; \\
M &= \max_{(x, y, \tau) \in \tilde{G} \times [0, +\infty]} \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(X, Y, \theta)}{\partial \theta^2} \right|.
\end{aligned}$$

В силу симметрии оператора $M_1 = M_2$, обозначим $\tilde{M}_1 = M_1/3$, $\tilde{M}_2 = (5398/945)M_4 - (1088/189)M_3$. В результате получим оценку

$$|\varepsilon| \leq M\tau + \tilde{M}_1 h^2 + \tilde{M}_2 h^4.$$

С учетом (3.20), обозначив $\tilde{M} = \frac{2M}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} + \tilde{M}_2$, получим:

$$|\varepsilon| \leq \tilde{M}_1 h^2 + \tilde{M} h^4. \quad (3.22)$$

3.2.4. Устойчивость и сходимость

Чтобы доказать устойчивость схемы (3.16) воспользуемся теоремой [89], адаптированной к рассматриваемой задаче.

Теорема 7. *Для устойчивости схемы (3.17) достаточно, чтобы выполнялось условие для разрешающего оператора $T_{n,j} = S_{n-1}S_{n-2}\dots S_j$:*

$$\|T_{n,j}\| \leq M \quad \forall 0 \leq j \leq n.$$

при этом верна априорная оценка

$$\|\Phi_{k+1}\| \leq M \left(\|\Phi_0\| + \sum_{j=0}^k \tau \|C_j^{-1} \varphi_j\| \right).$$

Здесь $C = E$, $\varphi_j = -1$.

Поскольку оператор перехода схемы (3.17) постоянный с нормой меньшей единицы, очевидно неравенство:

$$\|T_{n,j}\| \leq \|S\| = \rho_0 \quad \forall 0 \leq j \leq n.$$

Таким образом, схема (3.16) устойчива и выполняется оценка

$$\|\Phi_{k+1}\| \leq (k+1)\rho_0\tau.$$

Далее рассматривается стационарное разностное уравнение, полученное из уравнения (3.16) отбрасыванием разностного аналога производной по фиктивному времени, в операторной форме

$$B_h u = -1. \tag{3.23}$$

Пусть u решение уравнения (3.23). Поскольку схема (3.16) точно аппроксимирует уравнение (3.23) на его решении, разность $z_k = \Phi_k - u$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + B_h z_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad z_0 = -u.$$

Решая его относительно z_{k+1} , получим $z_{k+1} = S z_k$. Используя рекурсию, получим $z_{k+1} = S^k z_0$, а поскольку $\|S\| < 1$ для любой размерности сетки, схема (3.16) сходится к решению стационарной задачи. Действительно

$$\|\Phi_k - u\| = \|z_k\| = \|S^k z_0\| \leq \|S^k\| \cdot \|z_0\| \leq \|S\|^k \|z_0\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Количество шагов k для обеспечения точности $\tilde{\varepsilon}$ приближения к стационарному решению $\|z_k\| \leq \tilde{\varepsilon} \|z_0\|$ определяется формулой:

$$k > \frac{\ln(1/\tilde{\varepsilon})}{\ln(1/\|S\|)},$$

в которой $\ln(1/\|S\|)$ - скорость сходимости. Поскольку погрешность аппроксимации задана неравенством (3.22), то и точность приближения к стационарному решению $\tilde{\varepsilon} = O(h^2)$. В таблице 3 приведены расчеты количества шагов для обеспечения точности $\tilde{\varepsilon} = h^2$ и максимального по модулю значения искомой функции Φ_h^k .

Табл. 3.3. Расчет количества итераций.

Размерность сетки	Точность	Количество шагов	$ \Phi_h^k _{\max}$
11×11	0.01	1993	0.000759
15×15	1/196	12067	0.000902
21×21	0.0025	70666	0.00101
25×25	1/576	168129	0.00105

Чтобы показать сходимость решения задачи Коши (3.16) к решению краевой задачи (3.4)–(3.7) воспользуемся теоремой [93], модифицированной под формулировку нашей задачи.

Теорема 8. *Если:*

- 1) *решение краевой задачи (3.4)–(3.7) существует в некотором классе функций,*
- 2) *разностная задача (3.16) аппроксимирует краевую (3.4)–(3.7) на классе решения,*
- 3) *разностная задача (3.16) корректна, то:*

при $h \rightarrow 0$ решение Φ_h разностного уравнения стремится к решению Φ дифференциального уравнения, т.е. $\|\Phi - \Phi_h\|_{H_h} \rightarrow 0$.

Существование и единственность решения краевой задачи (3.4)–(3.7) доказаны. Уравнение (3.16) аппроксимирует (3.4) со вторым порядком (3.22). Начальное (3.5) и граничное условия (3.6) аппроксимируются точно, граничное условие (3.15) аппроксимирует (3.7) с первым порядком точности. В силу определения пространства сеточных функции H_h разностная задача устойчива по граничному условию (3.7), поэтому корректность задачи следует из ее устойчивости по начальным условиям и устойчивости по правой части, которые были доказаны в теореме 7. Таким образом, все условия теоремы 7 выполнены, следовательно, решение разностной задачи (3.16) стремится к решению краевой задачи (3.4)–(3.7) при $h \rightarrow 0$.

На рис. 3.1 изображены функция тока (слева) и ее профиль (справа) в срединном сечении для размерности сетки 25×25 и фиктивного времени $\theta = 0.003$.

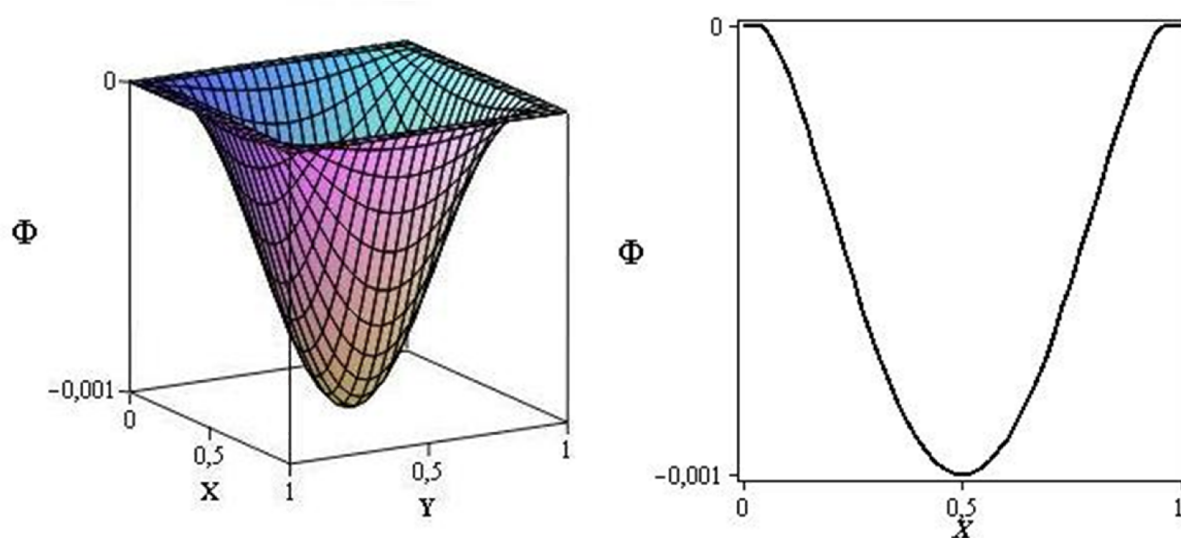


Рис. 3.1. График функции тока (слева) и ее профиля в срединном сечении (справа).

3.2. Нестационарная постановка

3.2.1. Постановка задачи и построение численной схемы

Во второй главе было показано, что система уравнений Обербека-Буссинеска в приближении Стокса трансформируется в нестационарное

неоднородное бигармоническое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^4} + \\ + 2 \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial Y^4} - \frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

с начальным

$$\Phi(X, Y, 0) = 0, \quad (3.27)$$

и граничными

$$\Phi(0, Y, \theta) = \Phi(1, Y, \theta) = \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, 1, \theta) = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0, \theta)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, 1, \theta)}{\partial Y} = 0, \quad (3.29)$$

условиями, где $T(X, \theta)$ – температура, $\Phi(X, Y, \theta)$ – функция тока, Pr – число Прандтля, θ, X, Y – текущие время и декартовы координаты, заданное в замкнутой области $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$.

Тепловое поле, как известно, имеет вид

$$T(X, \theta) = 1 - X + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin[(1 - X)\pi p] \exp\left(-\frac{\pi^2 p^2}{Pr} \theta\right). \quad (3.30)$$

На квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ введем сетку аналогично стационарному случаю. Будем рассматривать сеточные функции и введем гильбертово пространство $H_{\Delta X, \Delta Y}$ с нормами, определенными так же, как и в стационарной задаче (3.17).

Конечно-разностная аппроксимация бигармонического оператора в каждый момент времени задана выражениями (3.9) – (3.11). Разностный аналог вторых производных $\frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial Y^2}$ записан через центрально-разностный оператор 2 порядка по соответствующим переменным.

$$\tilde{N}_{\Delta 1} = \frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^2} \Big| = \frac{\Phi_{i+1, j} - 2\Phi_{i, j} + \Phi_{i-1, j}}{(\Delta X)^2} + O[(\Delta X)^2],$$

$$\tilde{N}_{\Delta 2} = \frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial Y^2} \Big| = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} + O[(\Delta Y)^2].$$

Конечно-разностная аппроксимация производной $\frac{\partial}{\partial \theta}$ представлена оператором первого порядка $A = \frac{\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k}{\Delta \theta}$.

Записывая уравнение (3.26) в дискретном виде и отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости, получена конечно-разностная схема [94]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \theta} \left[\left(\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \right)^{k+1} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \right)^k \right] = \\ & = \left(\frac{\Phi_{i+2,j} - 4\Phi_{i+1,j} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i-2,j}}{(\Delta X)^4} + \right. \\ & \left. + \frac{\Phi_{i,j+2} - 4\Phi_{i,j+1} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}}{(\Delta Y)^4} \right)^k + \\ & + \frac{2}{144(\Delta X)^2(\Delta Y)^2} \left[(\Phi_{i+2,j+2} - 16\Phi_{i+2,j+1} + 30\Phi_{i+2,j} - 16\Phi_{i+2,j-1} + \Phi_{i+2,j-2}) - \right. \\ & - 16(\Phi_{i+1,j+2} - 16\Phi_{i+1,j+1} + 30\Phi_{i+1,j} - 16\Phi_{i+1,j-1} + \Phi_{i+1,j-2}) + \\ & + 30(\Phi_{i,j+2} - 16\Phi_{i,j+1} + 30\Phi_{i,j} - 16\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}) - \\ & - 16(\Phi_{i-1,j+2} - 16\Phi_{i-1,j+1} + 30\Phi_{i-1,j} - 16\Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i-1,j-2}) + \\ & \left. + (\Phi_{i-2,j+2} - 16\Phi_{i-2,j+1} + 30\Phi_{i-2,j} - 16\Phi_{i-2,j-1} + \Phi_{i-2,j-2}) \right]^k + \\ & \left\{ -1 - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos[(1-i\Delta X)\pi p] \exp\left(-k\Delta\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}\right) \right\}. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Начальное условие и граничное условие определены равенствами (3.13) – (3.15).

Таким образом, аналогом непрерывной задачи (3.26)–(3.29) является конечно-разностная схема (3.30), (3.13) – (3.15).

Схема (3.31) является явной по времени (индекс k) и неявной по пространственным переменным, каноническая форма которой

$$C_{\Delta} \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\Delta\theta} + B_{\Delta} \Phi_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \Phi_0 = 0, \quad (3.32)$$

где $-C_{\Delta}$ – линейный оператор, представляющий сумму дискретных аналогов вторых производных по переменным X и Y ; B_{Δ} – конечно-разностная аппроксимация бигармонического оператора; φ_k – конечно-разностный аналог производной температурного поля в момент времени $k\Delta\theta$.

3.2.2. Вычисление нормы оператора перехода и оптимального временного шага

На равномерных сетках $\Delta X = \Delta Y = h$ и $\Delta\theta = \tau$ введем конечномерное гильбертово пространство H_h и рассмотрим в нем операторы $B = h^4 B_h$ и $C = h^2 C_h$ не зависящие явно от h .

Теорема 9. *Оператор C положительно-определенный.*

Доказательство. Поскольку

$$C = C_1 + C_2 = (-\Phi_{i+1,j} + 2\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}) + (-\Phi_{i,j+1} + 2\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}), \quad (3.33)$$

то матрица первого слагаемого C_1 (3.33) является блочной квазидиагональной матрицей, каждый блок которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Поскольку $D_1 = 2$ и $D_2 = 3$, то $D_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом эта матрица, а, следовательно, и матрица

C_1 удовлетворяет критерию Сильвестра, значит, положительно определена.

Матрица второго слагаемого C_2 (3.33) представляет собой блочную квазитрехдиагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} J & -E & \cdots & 0 \\ -E & J & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J \end{pmatrix},$$

где J – диагональная матрица с диагональными элементами равными 2, E – единичная матрица. В другом базисе при замене i на j эта матрица совпадает с матрицей C_1 . Матрицы операторов в разных базисах подобны, поэтому матрица C_2 положительно определена, следовательно, C – положительно-определенный, как сумма положительно определенных операторов. ■

Учитывая граничные условия (3.14) – (3.15), рассмотрим спектральную задачу для оператора C в квадрате со стороной $l = 1 - 2h$.

$$\tilde{N}u - \lambda u = 0, \quad u_{k,j} = u_{i,k} = 0, \quad k = 0, n, \quad i, j = \overline{0, n}$$

Решение задачи будем искать в виде $u(x, y) = \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$, где α и β подлежат определению. Тогда

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} &= \sin[\alpha(x+h)] \sin(\beta y) + \sin[\alpha(x-h)] \sin(\beta y) = \\ &= 2 \cos(\alpha h) \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} + u_{i,j-1} &= \sin(\alpha x) \sin[\alpha(y+h)] + \sin(\alpha x) \sin[\alpha(y-h)] = \\ &= 2 \cos(\beta h) \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \end{aligned}$$

Подставляя найденные соотношения в (3.9) – (3.11), получим

$$\lambda = 2[1 - \cos(\alpha h)] + 2[1 - \cos(\beta h)]. \quad (3.34)$$

Значение параметров α и β выберем так, чтобы функция $u(x, y) = \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$ удовлетворяла граничным условиям задачи. При $x = 0$ или $y = 0$ граничное условие выполняется автоматически. При $x = l$

$\sin(\alpha l) = 0$, при $y = l$ $\sin(\beta l) = 0$, откуда $\alpha = \alpha_p = \frac{p\pi}{l}$, $\beta = \beta_q = \frac{q\pi}{l}$,
 $p, q = \overline{1, n-1}$.

Поскольку оператор C положительно определен, все собственные значения его положительны. Нетрудно увидеть, что максимум выражения достигается при $\cos(2\alpha h) = 1, \cos(2\beta h) = 1$ и $\cos(\alpha h) = -1, \cos(\beta h) = -1$, т.е. при $\alpha h = \frac{\pi}{2}, \beta h = \frac{\pi}{2}$, а минимум равен 0. Таким образом $0 < \lambda_{\min} = \lambda_{1,1} < \lambda_{1,2} < \dots < \lambda_{n-1,n-1} = \lambda_{\max} < 8$.

Задача Коши (3.31) разрешима, т.к. для любого разбиения \bar{w}_h существует обратный оператор C^{-1} , существование которого следует из положительной определенности оператора C . Поэтому схему (3.32) можно представить в виде

$$\Phi_{k+1} = S\Phi_k + \tau f_k, \quad f_k = C^{-1}\varphi_k, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \Phi_0 = 0,$$

где

$$S = E - \tau C_h^{-1} B_h \tag{3.35}$$

– оператор перехода.

Норма оператора перехода вычисляется по формуле

$$\|S\|_3 = \max_k |\mu_k|,$$

где μ_k – собственные значения, тогда из (3.35) следует

$$\mu_k = 1 - \frac{\tau}{h^2} \lambda_k,$$

где λ_k – собственные значения оператора $C^{-1}B$, что дает возможность сформулировать задачу минимакса [109]

$$\|S\|_3 = \min_{\tau > 0} \max_k \left| 1 - \frac{\tau}{h^2} \lambda_k \right|.$$

Из теорем 3 и 4 следует положительность собственных значений оператора $C^{-1}B$, а в силу его конечномерности и конечности спектра, поэтому согласно лемме 1

$$\|S\|_3 = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \rho_0, \quad \tau = \tau_0 = \frac{2h^2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}. \quad (3.36)$$

Таким образом, получено не только значение $\|S\|_3$, но и выражение для оптимального значения шага.

Вычислительный эксперимент показал, что матрица оператора $C^{-1}B$ симметрична, что влечет перестановочность операторов C^{-1} и B . Действительно $C^{-1}B = (C^{-1}B)^* = B^*(C^{-1})^* = BC^{-1}$. Так операторы C^{-1} и B коммутируют, то собственные значения $\lambda_{C^{-1}B}$ оператора $C^{-1}B$ представимы в виде [95]

$$\lambda_{C^{-1}B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_C}, \quad (3.37)$$

где λ_B и λ_C - собственные значения операторов B и C . В таблице 4 приведены расчеты границ спектра оператора $C^{-1}B$ по формулам (3.37), (3.34), (3.18) и методами оптимизации Maple по формулам $\lambda_{\max} = \sup_{\|u=1\|} (C^{-1}B, u)$, $\lambda_{\min} = \inf_{\|u=1\|} (C^{-1}B, u)$. Анализ расчетов показал идентичность полученных результатов.

Табл. 4. Расчет границ спектра оператора $C^{-1}B$.

Размерность сетки	Аналитический расчет		Расчет методами Maple	
	λ_{\min}	λ_{\max}	λ_{\min}	λ_{\max}
11×11	0.3	10.55866	0.6	10.5978
15×15	0.137	10.86239	0.27116	10.874
21×21	0.06	10.99993	0.1	11.00359
25×25	0.04	11.03657	0.05	11.1

В таблице 5 приведены расчеты входных параметров задачи (3.32) и показана сходимость схемы при отклонении от оптимального шага.

Табл. 5. Расчет входных параметров.

Размерность сетки	h	$\ S\ $	τ_0	Сходимость
11×11	0.1	0.9432	0.00184	сходится
11×11	0.1		0.002	расходится
15×15	1/14	0.975	0.000928	сходится
15×15	1/14		0.001	расходится
21×21	0.05	0.988984	0.000452	сходится
21×21	0.05		0.0005	расходится
25×25	1/24	0.9926	0.000313	сходится
25×25	1/24		0.0004	расходится

3.2.3. Вычисление погрешности аппроксимации уравнения разностной схемой

На равномерной сетке вновь рассматриваем уравнение (3.32) в операторной форме

$$AC_h u + B_h u = \varphi. \quad (3.38)$$

Введем разность $z = u - v$, где u – решение задачи (3.32), а v – решение задачи (3.26)–(3.29) [89]. Подставляя $u = z + v$ в (3.38), получим для z задачу во внутренних узлах сетки

$$AC_h u + Bu = AC_h(z + v) + B_h(z + v) = (AC_h + B_h)z + \\ + (AC_h + B_h)v = \varphi, \quad (AC_h + B_h)z = -\varepsilon$$

и для z выполнены начальное (3.13) и граничные условия (3.14)–(3.15), где $\varepsilon = (AC + B)v - \varphi$ – погрешность аппроксимации задачи (3.26)–(3.29)

схемой (3.32). Так как $\frac{\partial}{\partial \theta}(-\Delta v) + \Delta^2 v - \varphi = 0$, где, то

$$\varepsilon = (AC_h + B_h)v - \varphi - \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(-\Delta v) + \Delta^2 v - \varphi \right] = (AC_h + B_h)v - \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(-\Delta v) + \Delta^2 v \right].$$

Погрешность аппроксимации бигармонического оператора вычислена при рассмотрении стационарной задачи:

$$|\varepsilon_B| = \tilde{M}_1 h^2 + \tilde{M}_2 h^4;$$

там же вычислена погрешность аппроксимации оператора A :

$$|\varepsilon_A| = M\tau.$$

Погрешность аппроксимации оператора C

$$|\varepsilon_C| \leq \frac{h^2}{12} \left(\max_{(X,Y,\theta) \in D \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} \right| + \max_{(X,Y,\theta) \in D \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^4 v}{\partial Y^4} \right| \right).$$

Обозначив

$$M_3 = \frac{1}{12} \left(\max_{(X,Y,\theta) \in D \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} \right| + \max_{(X,Y,\theta) \in D \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^4 v}{\partial Y^4} \right| \right),$$

получим оценку погрешности аппроксимации уравнения

$$|\varepsilon| \leq |\varepsilon_A \varepsilon_C| + |\varepsilon_B| \leq MM_3 \tau h^2 + \tilde{M}_1 h^2 + \tilde{M}_2 h^4.$$

Учитывая (3.36) и обозначая

$$\tilde{M}_0 = \frac{2MM_3}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} + M_2,$$

получим

$$|\varepsilon| \leq \tilde{M}_0 h^4 + \tilde{M}_1 h^2. \quad (3.39)$$

3.2.4. Устойчивость и сходимость

Чтобы доказать устойчивость схемы (3.32) воспользуемся теоремой 7.

Поскольку оператор перехода постоянный с нормой меньше единицы, очевидно неравенство:

$$\|T_{n,j}\| \leq \|S\| = \rho_0 \quad \forall 0 \leq j \leq n.$$

Таким образом, схема (3.31) устойчива и выполняется оценка

$$\|\Phi_{k+1}\| \leq \rho_0 \left(\|\Phi_0\| + \sum_{j=0}^k \tau \|f_j\| \right).$$

Далее рассмотрим стационарное разностное уравнение, полученное из уравнения (3.32) отбрасыванием левой части равенства, в операторной форме

$$B_h u = \varphi. \quad (3.40)$$

Пусть u решение уравнения (3.40) и $\varphi_k = \varphi$. Поскольку схема (3.32) точно аппроксимирует уравнение (3.40) на его решении, разность $z_k = \Phi_k - u$ удовлетворяет однородному уравнению

$$C \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + B z_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad z_0 = 0.$$

Решая его относительно z_{k+1} , получим $z_{k+1} = S z_k$. Используя рекурсию, получим $z_{k+1} = S^k z_0$, а поскольку $\|S\| < 1$ для любой размерности сетки, схема (3.32) сходится к решению стационарной задачи. Действительно

$$\|\Phi_k - u\| = \|z_k\| = \|S^k z_0\| \leq \|S^k\| \cdot \|z_0\| \leq \|S\|^k \|z_0\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Чтобы показать сходимость решения задачи Коши (3.32) к решению краевой задачи (3.26)–(3.29) воспользуемся теоремой 8.

Существование и единственность решения краевой задачи (3.26)–(3.29) доказаны. Уравнение (3.32) аппроксимирует (3.26) со вторым порядком (3.39). Начальное (3.27) и граничное условия (3.28) аппроксимируются точно, граничное условие (3.15) аппроксимирует (3.29) с первым порядком точности. В силу определения пространства сеточных функции H_h разностная задача устойчива по граничному условию (3.15), поэтому корректность задачи следует из ее устойчивости по начальным условиям и устойчивости по правой части, которые были доказаны с помощью теоремы 7. Таким образом, все условия теоремы 8 выполнены, следовательно решение разностной задачи (3.32) стремится к решению краевой задачи (3.26)–(3.29) при $h \rightarrow 0$.

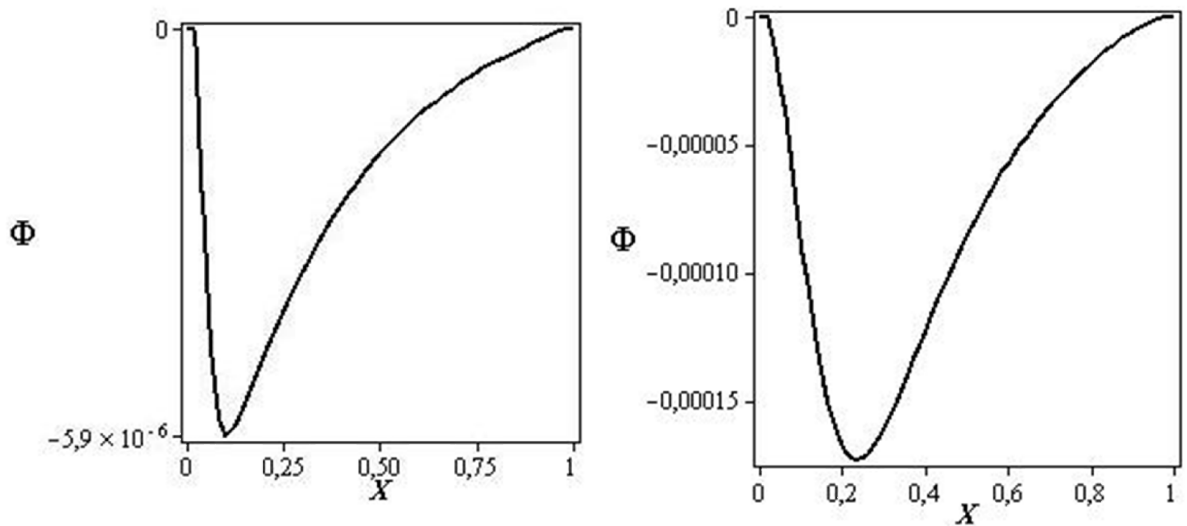


Рис. 3.2. Профили функции тока в срединном сечении в разное время.

На рис. 3.2 изображены профили функции тока в срединном сечении для сетки 51×51 и $Pr = 1$ при $\theta = 0.001$ (слева) и $\theta = 0.01$ справа. Мы видим, что течение начинается у нагретой стенки и распространяется к центру каверны.

3.3. Улучшение решения на границе

На множестве сеточных функций $\{u(X_i, Y_j)_h\}$ введем Гильбертово пространство \tilde{H}_h , отличающиеся от H_h отсутствием условия (3.15) для любой функции из \tilde{H}_h . Нормы на \tilde{H}_h введем аналогично (3.17). Очевидно вложение $H_h \subset \tilde{H}_h$.

Рассмотрим задачи (3.16) и (3.32) в пространстве \tilde{H}_h и добавим граничное условие (3.15). Нетрудно увидеть, что свойства операторов B и C , сохраняются и решение полученных задач совпадает с решением исходных. Граничное условие (3.15) имеет первый порядок аппроксимации, поэтому интерполяция решения разностной задачи на границе недостаточно гладкая. Для получения гладких приближений решения краевой задачи необходима высокая степень измельчения сетки. Это требует значительных по объему вычислений. Однако, существуют и другие методы решения

данной проблемы. Рассмотрим один из них.

Идея основана на пересчете приграничного слоя сеточной функции по разностной схеме аппроксимирующей (3.7) и (3.28) со вторым (или более высоким) порядком и распределения полученной невязки на внутренние узлы сетки. Множество узлов принадлежащих границе определим как нулевой слой, приграничных узлов как первый слой и т.д. в направлении к центральной точке. Разностная аппроксимация производной на левой границе второго порядка имеет вид [108]:

$$\left. \frac{\partial \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X} \right|_{0,j} = \frac{-3\Phi_{0,j} + 4\Phi_{1,j} - \Phi_{2,j}}{2h} + O(h^2).$$

Отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости и, учитывая (3.7) и (3.14), получим

$$\tilde{\Phi}_{1,j} = \frac{1}{4}\Phi_{2,j}. \quad (3.41)$$

Аналогично получим выражения на остальных границах.

Введем вспомогательный оператор $J: \tilde{H}_h \rightarrow \tilde{H}_h$ следующим образом. Значения в приграничных узлах определяются по формуле (3.41), причем невязка определяется как

$$N = \sum_{i,j \in sl_1} \tilde{\Phi}_{i,j} - \Phi_{i,j},$$

здесь sl_1 – первый слой. Распределение невязки может быть равномерным, либо пропорциональным по формуле

$$\tilde{\Phi}_{i,j} = \Phi_{i,j} \left(1 - \frac{N}{S}\right),$$

где S – сумма значений во внутренних узлах.

Для определенности обозначим значения в узлах первого слоя до применения J – a_i , после применения \tilde{a}_i ; во внутренних узлах $c_{i,j}$, среднее значение во внутренних узлах \bar{c} . Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. $\forall a_i \leq 0, \tilde{a}_i \leq 0, c_{i,j} < 0$ если $\tilde{a}_i \leq a_i$ и $\bar{c} \leq 2\tilde{a}_i$, то для $K \geq 3$

$$\sum_{i,j=1}^K c_{i,j}^2 + \sum_{i=1}^{4K+4} a_i^2 \geq \sum_{i,j=1}^K (c_{i,j} - \frac{N}{K^2})^2 + \sum_{i=1}^{4K+4} \tilde{a}_i^2,$$

где

$$\bar{c} = \frac{1}{K^2} \sum_{i,j=1}^K c_{i,j}, \quad N = \sum_{i=1}^{4K+4} (\tilde{a}_i - a_i).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^K c_{i,j}^2 + \sum_{i=1}^{4K+4} a_i^2 - \sum_{i,j=1}^K (c_{i,j} - \frac{N}{K^2})^2 - \sum_{i=1}^{4K+4} \tilde{a}_i^2 = K^2 \bar{c}^2 - K^2 (\bar{c} - \frac{N}{K^2})^2 + \sum_{i=1}^{4K+4} (a_i^2 - \tilde{a}_i^2) = \\ & = K^2 \bar{c}^2 - K^2 \bar{c}^2 + 2\bar{c}N - \frac{N^2}{K^2} - \sum_{i=1}^{4K+4} (\tilde{a}_i^2 - a_i^2) = 2\bar{c}N - \frac{N^2}{K^2} - \sum_{i=1}^{4K+4} (\tilde{a}_i - a_i)(\tilde{a}_i + a_i). \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{c} \leq 2\tilde{a}_i$ и $\tilde{a}_i \leq a_i$

$$\begin{aligned} & 2\bar{c}N - \frac{N^2}{K^2} - \sum_{i=1}^{4K+4} (\tilde{a}_i - a_i)(\tilde{a}_i + a_i) \geq 2\bar{c}N - \\ & - \frac{N^2}{K^2} - \sum_{i=1}^{4K+4} (\tilde{a}_i - a_i)\bar{c} = N\bar{c} - \frac{N^2}{K^2} = N(\bar{c} - \frac{N}{K^2}). \end{aligned}$$

Так как $N \leq 0$, оценим разность $\bar{c} - \frac{N}{K^2}$,

$$\tilde{a}_i - a_i \geq \tilde{a}_i \geq \frac{1}{2}\bar{c},$$

поэтому $N \geq (2K+2)\bar{c}$. Таким образом

$$\bar{c} - \frac{N}{K^2} \leq \bar{c} - \frac{(2K+2)\bar{c}}{K^2} = \bar{c}(1 - \frac{2K+2}{K^2}).$$

Для $K \geq 3$ $\bar{c} - \frac{N}{K^2} < 0$, следовательно

$$\sum_{i,j=1}^K c_{i,j}^2 + \sum_{i=1}^{4K+4} a_i^2 - \sum_{i,j=1}^K (c_{i,j} - \frac{N}{K^2})^2 - \sum_{i=1}^{4K+4} \tilde{a}_i^2 \geq 0. \blacksquare$$

Теорема 10. При равномерном распределении невязки для решений Φ_h выполняются оценки

$$\|J\Phi_h\|_1 \leq \|\Phi_h\|_1, \quad \|J\Phi_h\|_2 \leq \|\Phi_h\|_2. \quad (3.42)$$

Доказательство. Анализ расчетов показал, что во введенных выше обозначениях значения решения Φ_h в узлах удовлетворяют условиям леммы 2. Левое неравенство очевидно. Для доказательства правого воспользуемся леммой 2.

$$\begin{aligned} \|J\Phi_h\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\Phi}_{i,j}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j=1}^K \left(c_{i,j} - \frac{N}{K^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{4K+4} \tilde{a}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} h \leq \left(\sum_{i,j=1}^K c_{i,j}^2 + \sum_{i=1}^{4K+4} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} h = \|\Phi_h\|_2. \blacksquare \end{aligned}$$

Из неравенства (3.42) и теоремы 7 следует устойчивость разностных задач с вспомогательным оператором. Нетрудно видеть, что для данных задач выполнены все условия теоремы 8, что означает сходимость их решений к решениям краевых задач (3.4)–(3.7) и (3.26)–(3.29) при $h \rightarrow 0$.

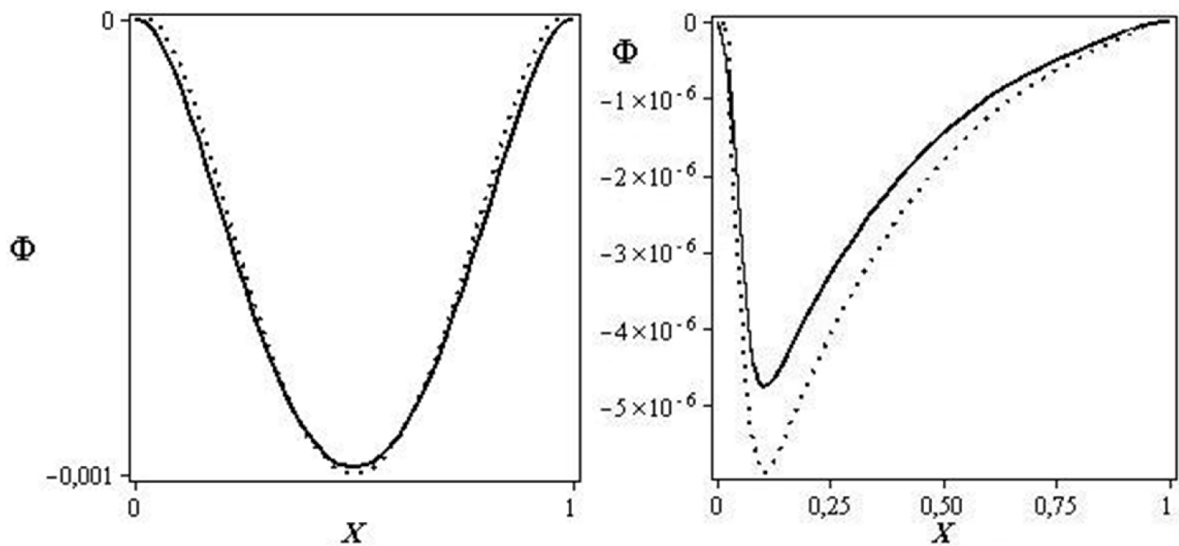


Рис. 3.3. Улучшение границы.

На рис. 3.3 изображены профили функции тока для стационарной (слева) и нестационарной (справа) задачи, сплошная линия – модифицированная с помощью алгоритма весового перераспределения невязки, пунктир – не модифицированная схемы. Из рисунка видно, что модифицированное решение более гладкое, однако максимальное значение меньше, чем у не модифицированного.

3.4. Решение задачи в прямоугольнике

В этом пункте нестационарная задача (3.26)–(3.30) обобщена на случай прямоугольной области. Граничные условия (3.28)–(3.29) принимают вид:

$$\Phi(0, Y, \theta) = \Phi(1, Y, \theta) = \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, \xi, \theta) = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0, \theta)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, \xi, \theta)}{\partial Y} = 0, \quad (3.44)$$

где ξ - отношение сторон прямоугольника $[0, 1] \times [0, \xi]$.

В отличие о квадратной области, в каждый момент времени $k\Delta\theta$, $k=1, \dots$ область решения \bar{D} системы заменена сеткой с шагами ΔX , $\Delta Y = \xi \Delta X$, $\bar{w}_{\Delta X, \xi \Delta X} = \{(X_i, Y_j) = (i\Delta X, j\xi \Delta X)\}$ $i=0, \dots, n$, $j=0, \dots, m$. Аналогично вводится конечномерное гильбертово пространство сеточных функций $H_{\Delta X, \xi \Delta X}$ с нормами, определенными так же, как и в стационарной задаче (3.17). Будем рассматривать равномерные по X и Y сетки с шагами $\Delta X = h$, $Y = \xi h$, пространство сеточных функций обозначим $H_{h\xi}$.

Заменяя в уравнении (3.26) частные производные конечно-разностными аналогами, а известную функцию ее сужением на узлы сетки и отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости, получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta\theta} \left[\left(\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\xi^2} \right)^{k+1} - \right. \\ & \left. - \left(\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\xi^2} \right)^k \right] = \\ & = \left(\frac{\Phi_{i+2,j} - 4\Phi_{i+1,j} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i-2,j}}{(\Delta X)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\Phi_{i,j+2} - 4\Phi_{i,j+1} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}}{\xi^4 (\Delta X)^2} \right)^k + \\ & + \frac{2}{144\xi^2 (\Delta X)^2} \left[(\Phi_{i+2,j+2} - 16\Phi_{i+2,j+1} + 30\Phi_{i+2,j} - 16\Phi_{i+2,j-1} + \Phi_{i+2,j-2}) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -16(\Phi_{i+1,j+2} - 16\Phi_{i+1,j+1} + 30\Phi_{i+1,j} - 16\Phi_{i+1,j-1} + \Phi_{i+1,j-2}) + \\
& + 30(\Phi_{i,j+2} - 16\Phi_{i,j+1} + 30\Phi_{i,j} - 16\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}) - \\
& - 16(\Phi_{i-1,j+2} - 16\Phi_{i-1,j+1} + 30\Phi_{i-1,j} - 16\Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i-1,j-2}) + \\
& + (\Phi_{i-2,j+2} - 16\Phi_{i-2,j+1} + 30\Phi_{i-2,j} - 16\Phi_{i-2,j-1} + \Phi_{i-2,j-2})^k + \\
& + \frac{1}{(\Delta X)^2} \left\{ -1 - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos[(1-i\Delta X)\pi p] \exp\left(-k\Delta\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}\right) \right\}. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Начальное и граничные условия заданы равенствами (3.13) – (3.15).

Таким образом, непрерывная задача (3.26)–(3.27), (3.43) – (3.44) заменена конечно-разностной схемой (3.45), (3.13) – (3.15).

Схема (3.45) является явной по времени (индекс k) и неявной по пространственным переменным, каноническая форма которой

$$C_{h\xi} \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\Delta\theta} + B_{h\xi} \Phi_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \Phi_0 = 0, \quad (3.46)$$

где $-C_{h\xi}$ – линейный оператор, представляющий сумму дискретных аналогов вторых производных по переменным X и Y ; $B_{h\xi}$ – конечно-разностная аппроксимация бигармонического оператора; φ_k – конечно-разностный аналог производной температурного поля в момент времени $k\Delta\theta$.

Рассмотрим операторы $B_\xi = h^4 B_{\xi h}$ и $C_\xi = h^2 C_{h\xi}$ не зависящие явно от h .

Справедливы следующие утверждения, аналогичные теоремам 6 и 9.

Теорема 11. *Операторы B_ξ и C_ξ – положительно-определенные.*

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем 6 и 9,

достаточно заметить лишь, что $B_\xi = B_1 + \frac{2}{\xi^2} B_2 + \frac{1}{\xi^2} B_3$, а $C_\xi = C_1 + \frac{1}{\xi^2} C_2$.

Легко видеть, что для собственных значений операторов B_ξ и C_ξ справедливы следующие соотношения:

$$\lambda_{B_\xi} = 2 \left[\cos(2\alpha h) + \frac{1}{\xi^2} \cos(2\beta\xi h) \right] - 8 \left[\cos(\alpha h) + \frac{1}{\xi^2} \cos(\xi\beta h) \right] + 12 +$$

$$+ \frac{[\cos(2\alpha h) - 16\cos(\alpha h) + 15][\cos(2\beta\xi h) - 16\cos(\beta\xi h) + 15]}{18\xi^2},$$

$$\lambda_{C_\xi} = 2[1 - \cos(\alpha h)] + 2 \left[1 - \frac{1}{\xi^2} \cos(\beta\xi h) \right]. \quad (3.47)$$

Значения параметров определяются $\alpha_m = \frac{m\pi}{l_X}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{l_Y}$, где

$$l_X = 1 - 2h, \text{ а } l_Y = 1 - 2\xi h.$$

Аналогично, собственные значения $\lambda_{C_\xi^{-1}B_\xi}$ оператора $C_\xi^{-1}B_\xi$ представимы в виде

$$\lambda_{C_\xi^{-1}B_\xi} = \frac{\lambda_{B_\xi}}{\lambda_{C_\xi}}. \quad (3.48)$$

Из теорем 3 и 4 следует положительность собственных значений оператора $C_\xi^{-1}B_\xi$, а в силу его конечномерности и конечности спектра, поэтому согласно лемме 1

$$\|S\|_3 = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \rho_0, \quad \tau = \tau_0 = \frac{2h^2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}. \quad (3.49)$$

Нетрудно убедиться, что для погрешности разностной схемы справедлива формула

$$|\varepsilon_\xi| \leq M_0(\xi)h^4 + M_1(\xi)h^2, \quad (3.49)$$

где $M_0(\xi)$ и $M_1(\xi)$ - постоянные, зависящие от ξ .

Чтобы доказать устойчивость схемы (3.46) воспользуемся теоремой 7.

Поскольку оператор перехода постоянный с нормой меньше единицы, очевидно неравенство:

$$\|T_{n,j}\| \leq \|S\| = \rho_0 \quad \forall 0 \leq j \leq n.$$

Таким образом, схема (3.31) устойчива и выполняется оценка

$$\|\Phi_{k+1}\| \leq \rho_0 \left(\|\Phi_0\| + \sum_{j=0}^k \tau \|f_j\| \right).$$

Чтобы показать сходимость решения задачи Коши (3.46) к решению краевой задачи (3.26)–(3.27), (3.43)–(3.44) воспользуемся теоремой 8.

Существование и единственность решения краевой задачи (3.26)–(3.27), (3.43)–(3.44) доказаны. Уравнение (3.46) аппроксимирует (3.26) со вторым порядком (3.49). Начальное (3.27) и граничное условия (3.43) аппроксимируются точно, граничное условие (3.44) аппроксимирует (3.29) с первым порядком точности. В силу определения пространства сеточных функции $H_{h\xi}$ разностная задача устойчива по граничному условию (3.15), поэтому корректность задачи следует из ее устойчивости по начальным условиям и устойчивости по правой части, которые были доказаны с помощью теоремы 7. Таким образом, все условия теоремы 8 выполнены, следовательно решение разностной задачи (3.46) стремится к решению краевой задачи (3.26)–(3.27), (3.43)–(3.44) при $h \rightarrow 0$.

3.5. Выводы

1. Для стационарной постановки путем введения фиктивного времени разработана явная итерационная, а для нестационарной полунеявная двухслойная конечно-разностные схемы численного интегрирования.
2. Методами функционального анализа и линейной алгебры доказана положительная определенность дискретных операторов конечно-разностных схем, получены выражения для собственных значений, определены границы спектра. Получены выражения для норм операторов перехода, определены оптимальный шаг по времени для нестационарной схемы, и итерационный для стационарной, посчитано минимальное количество итераций для обеспечения заданной точности приближения к неявной схеме.

3. Используя разложение по формуле Тейлора в окрестности i, j, k -того узла, вычислены погрешности аппроксимаций краевых задач разностными схемами. Адаптировав классические теоремы к исследуемым задачам, доказаны устойчивость и сходимость полученных схем к точному решению в гильбертовом пространстве сеточных функции.
4. Полученные схемы модифицированы с помощью весового перераспределения невязки по граничному условию "прилипания" на смоченной поверхности в теле процедуры вычисления функции тока вместо необходимости постановки сеточного граничного условия для функции вихря. Доказана правомочность такого подхода.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО И ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Стационарная постановка

Для того чтобы выявить наиболее эффективный подход к решению задачи, проведем сравнительный анализ численного и аналитического решений. Во второй и третьей главе показано, что решение задачи симметрично относительно центра области, поэтому рассмотрим профили функции тока в срединном сечении ($Y=0.5$) на равномерных сетках $\Delta X = \Delta Y = h$.

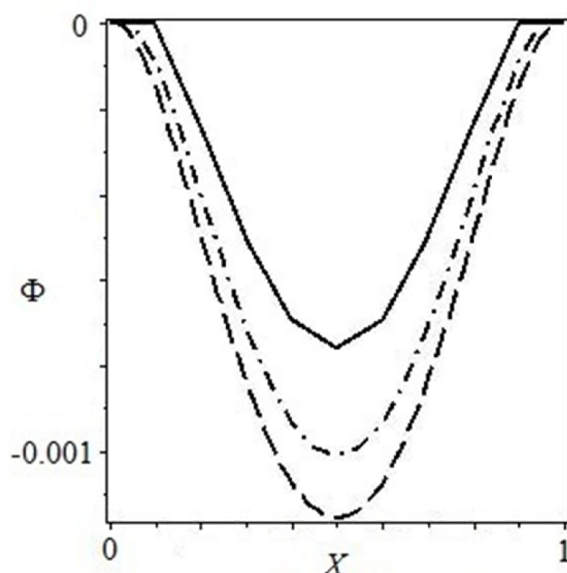


Рис. 4.1. Профили функции тока при изменении сеточного шага.

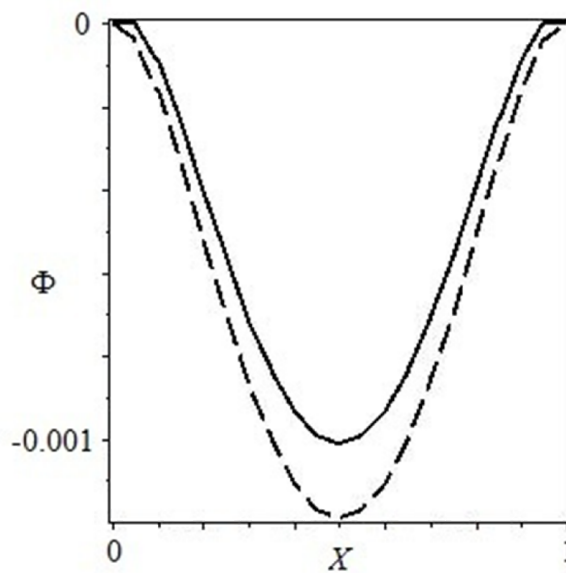


Рис. 4.2. Профили функции тока при различной точности аппроксимации граничных условий.

На рис. 4.1. показано изменение профиля функции тока при уменьшении шага сетки области: $h = 0.1$ – сплошная линия, $h = 0.05$ – штрихпунктир, $h = 0.02$ – штриховая. Как видно, при уменьшении шага сетки значение в центральной точке области сначала резко увеличивается по модулю, а затем практически не меняется, что свидетельствует о быстрой сходимости численной схемы.

На рис. 4.2. сплошной изображены профили при $h = 0.05$: сплошная линия – точность аппроксимации граничных условий $O(h)$, штриховая – точность $O(h^2)$. По рис. 4.1. и 4.2. видно, что решение точности $O(h)$ при $h = 0.02$ практически совпадает с решением точности $O(h^2)$ при $h = 0.05$, что говорит об ускорении сходимости с увеличением точности решения.

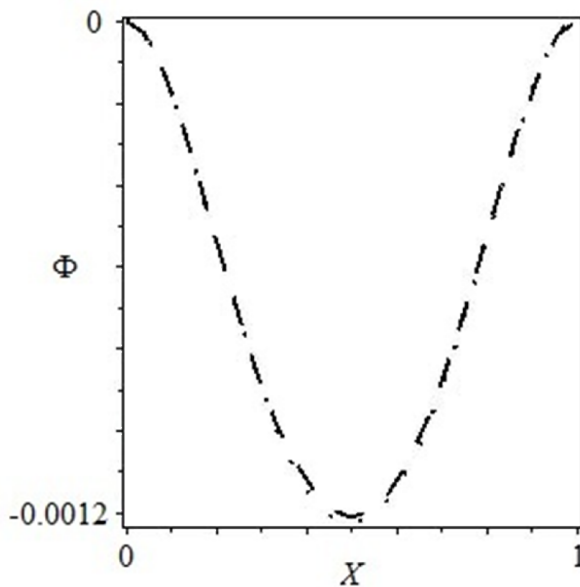


Рис. 4.3. Сравнение численного и аналитического решений

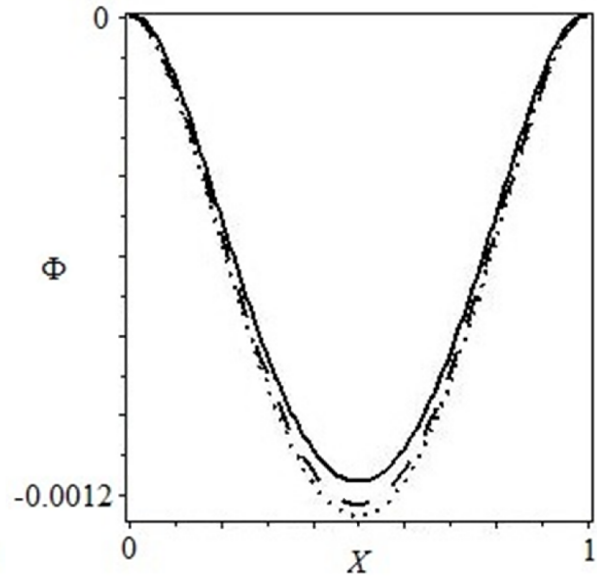


Рис. 4.4. Сравнение аналитических решений.

На рис. 4.3. изображены численное (при $h = 0.04$) – штриховая линия и аналитическое (при $K = 51$) – пунктир решения. Как видно, они незначительно отличаются лишь в центральной точке и приграничных областях, что подтверждает правильность предложенного подхода.

Из рис. 4.4. видно, что значения функции тока практически не меняются при увеличении слагаемых в приближенном аналитическом решении: сплошная линия соответствует индексу суммирования $K = 21$, штриховая – $K = 51$ и пунктир – $K = 201$.

4.2. Нестационарная постановка.

Рассмотрим сначала профили функции тока в срединном сечении на равномерных сетках $\Delta X = \Delta Y = h$ с числом Прандтля $Pr = 1$ и точностью аппроксимации уравнения и граничных условий $O(h^2)$.

На рис. 4.4. показано изменение профиля функции тока при уменьшении шага сетки области при $\theta = 0.01$: $h = 0.1$ – сплошная линия, $h = 0.05$ – штриховая, $h = 0.02$ – штрих-пунктир. Максимальное по модулю значение функции тока ведет себя также как и в стационарном случае, смещаясь к нагретой стенке, то есть течение возникает у границы.

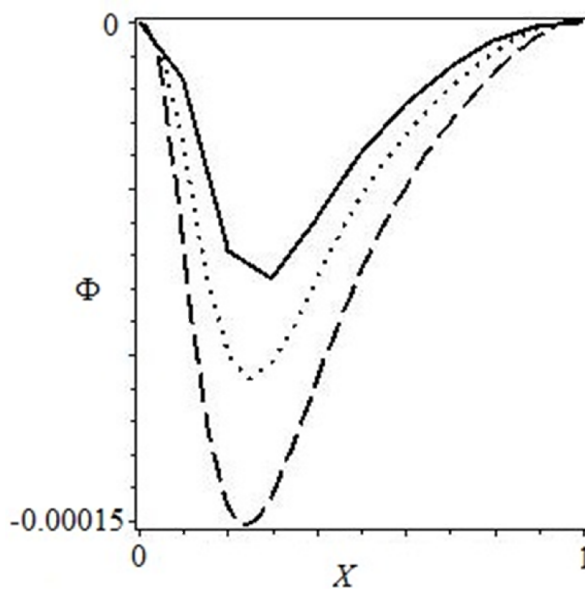


Рис. 4.5. Профили функции тока при изменении сеточного шага.

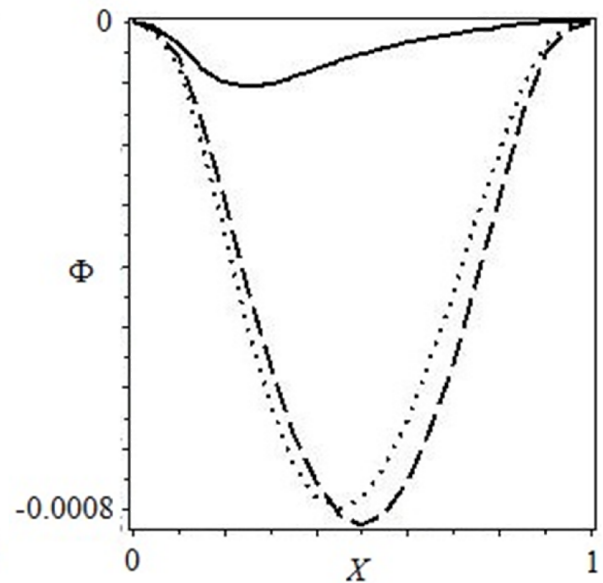


Рис. 4.6. Изменение функции тока во времени.

Рис. 4.6. отражает изменение функции тока во времени при $h = 0.05$: сплошная – время течения $\theta = 0.01$, пунктир – $\theta = 0.1$, штриховая – $\theta = 1$.

Течение развивается, смещаясь к центру области, и постепенно переходит в стационарный режим.

На рис. 4.7. штриховая линия изображает численное решение при $h = 0.02$ и $\theta = 0.01$, а пунктир – аналитическое при $K = 51$ и $\theta = 0.01$. Аналогично стационарному случаю, есть незначительное отличие в точке минимума, а также возле нагретой стенки.

На рис. 4.8. изображена зависимость профиля функции тока от числа Прандтля для аналитического решения при $K = 51$ и $\theta = 0.01$: сплошная – $Pr = 100$, штриховая – $Pr = 1$, пунктир – $Pr = 0.01$. Как видно, с уменьшением числа Прандтля интенсивность течения возрастает, а при очень больших числах возникает инверсия течения.

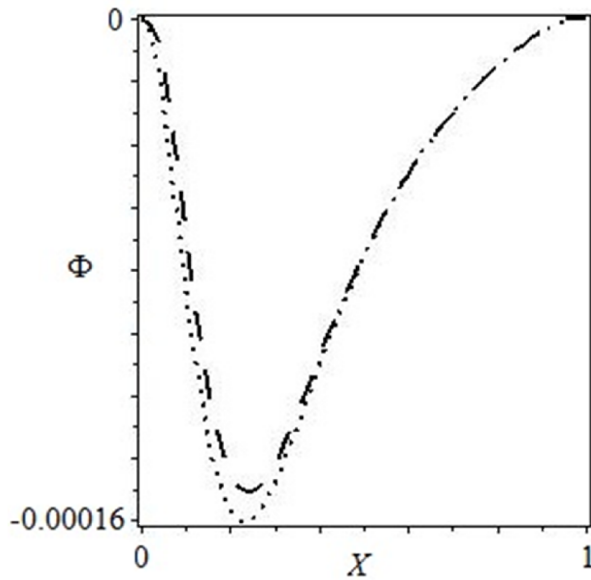


Рис. 4.7. Сравнение численного и аналитического решений.

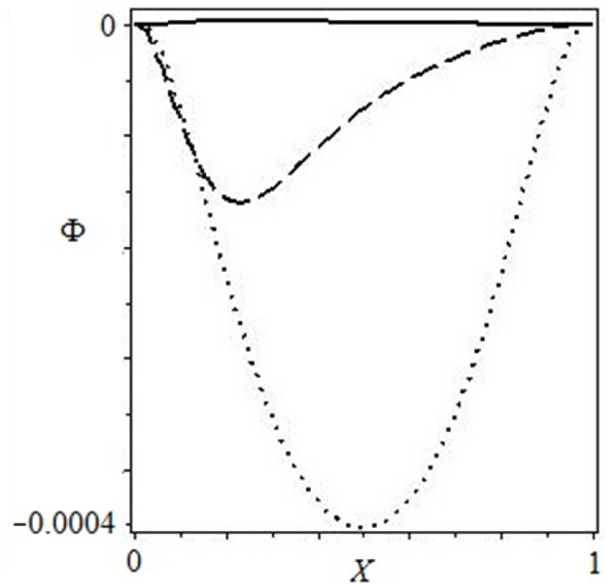


Рис. 4.8. Зависимость аналитического решения от числа Прандтля.

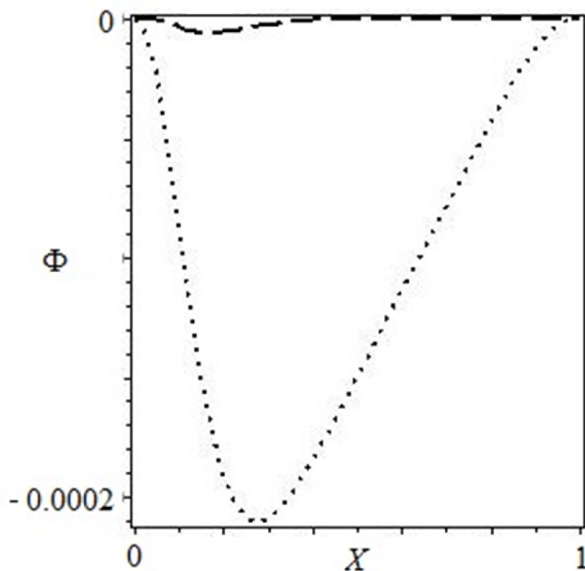


Рис. 4.9. Зависимость численного решения от отношения длины горячей стенки к теплоизолированной ξ .

Рис. 4.9. показывает, что увеличение длины нагретой стенки по отношению к теплоизолированной приводит к повышению интенсивности течения и сокращению времени перехода течения в стационарное состояние: штриховая линия – $\xi = 0.2$, пунктир – $\xi = 5$.

4.3. Выводы

1. Более эффективной оказалась конечно-разностная схема повышенного порядка точности. Дополнительные затраты времени и вычислительного ресурса на пересчет значений в приграничных узлах компенсируется увеличением скорости сходимости численной схемы.

2. Увеличение количества слагаемых ряда приближенного аналитического решения практически не влияет на его точность, что свидетельствует о высокой скорости сходимости и позволяет в практических расчетах использовать меньшее число слагаемых.

3. Выявлено явление инверсии гидродинамического поля, т.е. изменение направления течения, в начальный момент времени при больших числах Прандтля $Pr \gg 1$.

4. Сравнительный анализ показал лишь незначительную разницу между численным и приближенным аналитическим решением, которая объясняется как погрешностью аппроксимации исходных уравнений, так и ошибкой счета при вычислительном эксперименте.

5. Сопоставление полученных результатов в стационарной постановке с известными данными показало их согласованность. Полученное минимальное значение функции тока равно $-1.256 \cdot 10^{-3}$, в приближенных решениях по методу Тимошенко и Канторовича соответственно $-1.26 \cdot 10^{-3}$ и $-1.29 \cdot 10^{-3}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Анализ математической модели внутренних задач свободной конвекции в кондуктивно-ламинарном режиме, основанной на линеаризованных уравнениях Обербека-Буссинеска без учета конвективных слагаемых в уравнениях переноса импульса и теплоты, показал ее адекватность, что дает преимущество, заключающееся в возможности использования классических методов при получении аналитических решений, описывающих гидротермическую структуру течений.

2. Получены приближенные аналитические решения в квадратной и прямоугольной областях, согласующиеся как с численными решениями, так и с известными данными.

3. Для стационарной и нестационарной постановок разработаны конечно-разностные схемы численного интегрирования. Методами функционального анализа получены оценки численного решения, определены оптимальные условия сходимости, доказаны устойчивость и сходимость полученных схем к точному решению задачи в гильбертовом пространстве сеточных функции.

4. Разработанный предметно-ориентированный программный комплекс позволяет рассчитывать гидротермические характеристики даже на грубых сетках с достаточной степенью точности, имеет высокую скорость сходимости и устойчив, что существенно рационализирует проведение вычислительных экспериментов.

5. Анализ результатов вычислительных экспериментов позволил установить некоторые закономерности при формировании гидротермической структуры свободноконвективных течений, такие как инверсия поля скоростей в момент образования течения, а также сформировать эффективные подходы к решению подобных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. – 256 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
4. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.
5. Себеси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен и вычислительные методы. – М.: Мир, 1987. – 592 с.
6. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / Под общ ред. В.С. Авдеевского, В.К. Кошкина. – М.: Машиностроение, 1992. – 528 с.
7. Дрейцер Г.А. Теплообмен при свободной конвекции. – М.: Изд-во МАИ, 2002. – 100 с.
8. Oosthuizen P.H. An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis. – Singapore: WCB/McGraw-Hill, 1999. – 620 p.
9. Лыков А.В. Тепломассообмен: (Справочник). – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
10. Hurd S.E., Harper E.Y. Liquid Propellant with Sidewall and Bottom Heating // J. of Spacecraft and Rockets. – 1968. – №. 2. – p. 220.
11. Вебер Н., Поу Р., Бишоп Е., Скэнлэн Д. Теплоотдача свободной конвекцией в замкнутых сферических контейнерах // Тр. америк. об-ва инж.- мех., сер. Теплопередача, 1975. – № 4. – с. 27.
12. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Везеуб и др. – М.: Наука, 1987. – 274 с.

13. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Самакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. В 2-х книгах, кн.1. – М.: Мир, 1991. – 678 с.
14. Дульнев Г. Н. Теория тепло- и массообмена. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 195 с.
15. Batchelor G. K. An introduction to Fluid Dynamics. – CUP, 2000. – 631 p.
16. Борисенко А.И., Таранов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – М.: Высш. школа, 1963. – 262 с.
17. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. – М.: ФМЛ, 1963. – 585 с.
18. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Наука, 1947. – 929 с.
19. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 660 с.
20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
21. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
22. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 352 с.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т.VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2006. – 736 с.
24. Latif M. Jiji. Heat Convection. – N.-Y.: Springer, 2006. – 443 p.
25. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
26. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
27. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Вычислительный эксперимент в конвекции. – Мн.: Университетское, 1988. – 167 с.
28. Hideaki M., Shinichi N. Finite-difference simulation of nonlinear ship waves // J. Fluid Mech. – 1985. – V. 157. – pp. 327-358.

29. Richardson S.M., Gornish A.R.H. Solution of three-dimensional incompressible flow problems // J. Fluid Mech. – 1977. – V. 82. – No. 2. – pp. 309-320.
30. Aziz K., Hellums J.D. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection // Phys. Fluids. – 1967. – V. 10. – No. 2. – pp. 314-324.
31. Mallinson G.D., de Vahl Davis G. Three-dimensional natural convection in a box: a numerical study // J. Fluid Mech. – 1977. – V. 83. – No. 1. – pp. 1-31.
32. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Турбулентная конвекция. – М.: Наука, 1988. – 173 с.
33. Петров А.А. Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1996. – 251 с.
34. Самарский А.А. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
35. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. // Новое в жизни, науке, технике. Сер. Мат. кибернетика. – М.: Знание, 1983. – вып.11. – 64 с.
36. Schetz J.A., Eighern R. Unsteady natural convection in the vicinity of a doubly infinite vertical plate // Transactions of the ASME. J. of Heat Transfer. – 1962. – No. 11. – pp. 334-338.
37. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids – New York: John Wiley and Sons, 2nd edition, 2002. – 527 p.
38. Menold E.R., Kwang-Tzu Yang. Asymptotic solutions for unsteady laminar free convection on a vertical plate // Transactions of the ASME. J. of Appl. Mechanics. – 1962. – No. 3. – pp. 124-126.
39. Hurd S.E., Harper E.Y. Liquid Propellant with Sidewall and Bottom Heating // Journal of Spacecraft and rockets. 1968. №2. P. 220.
40. Чезирэй Р.И. Естественная турбулентная конвекция от вертикальной плоской поверхности//Труды америк. Об-ва инж.- мех., сер. Теплопередача, 1978, №1, С. 11.

41. Бэйли Т., Вандекоппель Р., Скатведт К., Расслоение криогенных компонентов топлива. Расчетные и экспериментальные данные // Двигательные установки ракет на жидком топливе. 1966. С. 130-148.
42. Рудер Д.М. Расслоение жидкости в баке под давлением при нагревании стенок. Инф. Сборник "Военная авиация и ракетная техника", №7, 1963. – С. 200.
43. Протопопов М.В., Черкасов С.Г. Особенности свободно-конвективного пограничного слоя в стратифицированной по температуре среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. №1. С. 27-34.
44. Черкасов С.Г. Квазистационарный режим естественной конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.-1986.-№1.-С. 146-152.
45. Liao S.J. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method. – Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003. – 336 p.
46. Alomari A.K, Noorani M.S.M., Nazar R. The homotopy analysis method for the exact solutions of the K(2,2), Burgers and coupled Burgers equations // Appl. Math. Sci. – 2008. – V. 2. – No. 37-40. – pp. 1963-1977.
47. S. Abbasbandy. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer // Physics Letters A. – 2006. – V.360. – I. 1. – pp. 109-113.
48. He J.-H. An elementary introduction to the homotopy perturbation method // Computers & Mathematics with Applications. – 2009. – V. 57. – Is. 3. – pp. 410-412.
49. Hayat T., Sajid M. On analytic solution for thin film flow of a fourth grade fluid down a vertical cylinder // Physics Letters A. – 2007. – V. 361. – I. 4-5. – pp. 316-322.
50. Sajid M., Hayat T. Comparison of HAM and HPM methods in nonlinear heat conduction and convection equations // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2008. – V. 9. – I. 5. – pp. 2296-2301.

51. Abbasbandy S. The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation // *Physics Letters A.* – 2007. – V. 361. – I. 6. – pp. 478-483.
52. Moghaddam M.M., Ghazizadeh H.R., Mansouri A. Homotopy analysis solution of free convection flow on a horizontal impermeable surface embedded in a saturated porous medium // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2009. – V. 14. – I. 11. – pp. 3833-3843.
53. Дородницын А.А. Информатика: предмет и задачи // *Вестн. АН СССР.* – 1985. – № 2. – с. 85-89.
54. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. – 223 с.
55. Белоцерковский С.М. ЭВМ в науке, авиации, жизни. – М.: Машиностроение, 1993. – 287 с.
56. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 124 с.
57. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1990. – 228 с.
58. O'Brien G.G., Numan M.A., Kaplan S. A study of the numerical solution of partial differential equations // *J. of Math. and Phys.* – 1951. – V. 29. – № 4. – pp. 223–251.
59. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, – 1972. – 418 с.
60. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Вычислительный эксперимент в конвекции. – Мн.: Университетское, 1988. – 167 с.
61. Gentry R.A., Martin R.E., Daly, B.J. An eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems // *J. Comput. Phys.* – 1966. – v. 1. – p. 87 – 118.
62. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
63. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления а применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // *ЖВМ и МФ.* – 1975. – т. 15. – №1. – с. 197 -207.

64. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
65. Калис Х.Э., Цинобер А.Б. Плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости в каналах под влиянием поперечного магнитного поля // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. – 1967. – №8., вып. 2. – с. 16 – 22.
66. Мажорова О.С., Попов Ю.П. Об одном алгоритме численного решения двумерных уравнений Навье-Стокса. – М.: 1979. – 18 с. препринт / АН СССР, ИПМ им. М.В. Келдыша, №37.
67. Формалев В.Ф., Воробьева О.Р. Метод переменных направлений с экстраполяцией численного решения задач теплопроводности и конвективными членами / Вестн. Моск. авиац. ин-та. – 1998. – т.5. – №1. – с. 41 – 48.
68. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / Journ. Soc. Industr. Appl. Math. – 1995. – v. 3. – №1 - P. 28 – 41.
69. Абрашин В.Н. Многокомпонентные итерационные методы переменных направлений // Матем. моделир. – 2000. – т. 12. – №2. – с. 45 – 58.
70. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. – 196 с.
71. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные метод в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – с. 316 – 342.
72. Chorin A.J. Numerical solution of the Navier – Stokes equations // Math. Comput. – 1968. – v. 22. – p. 775 – 762.
73. Воеводин А.Ф., Гончарова О.Н. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции // Матем. моделир. – 2001. – т. 13. – №5. – с. 90 – 96.
74. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов.- М.: Мир, – 1981. – 299 с.

75. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
76. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 350 с.
77. Donea J., Huerta A. Finite Element Methods for Flow Problems. – Wiley, 2003. – 350 p.
78. Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. – Wiley, 2004. – 356 p.
79. Таранчук В.Б. Основные функции систем компьютерной алгебры: пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики. – Минск: БГУ, 2013. – 59 с.
80. Аладьев В.З, Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование и разработка приложений в Maple. – Гродно: ГрГУ; Таллинн: Межд. Акад. Ноосферы, Балт. отд. 2007, 458 с.
81. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 2001. - 528 с.
82. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
83. Sneddon I. Fourier transforms / пер. с англ. Матвеева А. Н.: под ред. Рабиновича Ю. Л. М.: Издательство иностранной литературы, 1955. 668 с.
84. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Ч.1. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1985. 662 с.
85. Слюсарев М. И., Чертов Е. Ю., Рязских В. И. Аналитическое решение первой тестовой задачи свободной конвекции для кондуктивно-ламинарного режима // Вестник Воронежского государственного технического университета 2010. Т.6. № 7. С. 165-167.
86. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. 636 с.

87. Рязских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестник СПбГУ, Сер.10, 2013, вып. 1, С. 52–62.
88. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
89. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. 552 с.
90. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. – М. Наука, 1977. – 440 с.
91. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963, 735 с.
92. Ефимов В.М., Полосьмак В.Г., Резник А.Л. Аналитические и компьютерные алгоритмы обращения ленточных матриц // Автометрия. - Новосибирск, 1985. № 6. С. 103-108.
93. Филиппов А. Ф., Рябенский В. С. Об устойчивости разностных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1956. 171 с.
94. Рязских В.И., Попов М.И. О численном интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в задачах кондуктивной свободной конвекции // Вестник Воронежского государственного технического университета, 2014, т.10, № 1, С. 56–62.
95. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1973. 280 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Аналитический расчет поля функции тока в квадратной каверне

```
restart;

with(LinearAlgebra);

#Ввод основных параметров

Pr := 1; # Число Прандтля
K := 35;
R := 35;
theta := 0.1e-2; # Время

##

A := Matrix(4*K, 4*K); H := Matrix(K, K);
B := Vector(4*K); T := Vector(4*K);

# Расчет коэффициентов системы линейных уравнений для
# нахождения неизвестных коэффициентов

for m to K do
  for n to K do
    if m = n then
      for r to K do A[m, n] :=
        A[m,n]+cos(Pi*r)/(r^2+m^2)*(r^2*(1-exp(-
          Pi^2*theta*(r^2+m^2)))/(Pi^2*(r^2+m^2)))
      end do;
      for r to K do A[m, n+K] := A[m, n+K]-1/(r^2+m^2)*(r^2*(1-
        exp(-Pi^2*theta*(r^2+m^2)))/(Pi^2*(r^2+m^2)))
      end do;
      for r to K do A[K+m, n] := A[K+m,
        n]+cos(Pi*r)^2/(r^2+m^2)*(r^2*(1-exp(-
          Pi^2*theta*(r^2+m^2)))/(Pi^2*(r^2+m^2)))
      end do;
      for r to K do A[K+m, n+K] := A[K+m, n+K] -cos(Pi*r)/(r^2
        +m^2)*(r^2*(1-exp(-Pi^2*theta*(r^2+m^2)))/(Pi^2*(r^2+m^2)))
      end do
    else A[m, n] := 0
    end if;
    A[m, 2*K+n] := n*m*cos(Pi*m)/(n^2+m^2)*((1-exp(-
      theta*Pi^2*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))); A[m, 3*K+n] := -
    n*m/(n^2+m^2)*((1-exp(-theta*Pi^2*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2
      +m^2))); A[K+m, 2*K+n] := n*m*cos(Pi*m)*cos(Pi*n)/(n^2
      +m^2)*((1-exp(-theta*Pi^2*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2)));
    A[K+m, 3*K+n] := -n*m*cos(Pi*n)/(n^2+m^2)*((1-exp(-
      theta*Pi^2*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2)))
  end do;
end do;
```

```

    end do;
end do;

for n to K do
  for m to K do
    A[2*K+n, m] := m*n*cos(Pi*n)/(n^2+m^2)*((1-exp(-
    Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))); A[2*K+n, K+m] := -
    m*n/(n^2+m^2)*((1-exp(-
    Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))); A[3*K+n, m] :=
    m*n*cos(Pi*m)*cos(Pi*n)/(n^2+m^2)*((1-exp(-
    Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))); A[3*K+n, K+m] := -
    m*n*cos(Pi*m)/(n^2+m^2)*((1-exp(-
    Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2)));
    if n = m then
      for r to K do
        A[2*K+n, 2*K+m] := A[2*K+n,
        2*K+m]+cos(Pi*r)/(r^2+n^2)*(r^2*(1-exp(-
        Pi^2*theta*(r^2+n^2)))/(Pi^2*(r^2+n^2)))
      end do;
      for r to K do
        A[2*K+n, 3*K+m] := A[2*K+n, 3*K+m]-1/(r^2+n^2)*(r^2*(1-exp(-
        Pi^2*theta*(r^2+n^2)))/(Pi^2*(r^2+n^2)))
      end do;
      for r to K do
        A[3*K+n, 2*K+m] := A[3*K+n,
        2*K+m]+cos(Pi*r)^2/(r^2+n^2)*(r^2*(1-exp(-
        Pi^2*theta*(r^2+n^2)))/(Pi^2*(r^2+n^2)))
      end do;
      for r to K do
        A[3*K+n, 3*K+m] := A[3*K+n, 3*K+m]-
        cos(Pi*r)/(r^2+n^2)*(r^2*(1-exp(-
        Pi^2*theta*(r^2+n^2)))/(Pi^2*(r^2+n^2)))
      end do
    else A[K+n, K+m] := 0
    end if
  end do
end do;

##

# Расчет вектора свободных членов системы линейных уравнений для
# нахождения неизвестных коэффициентов

for m to K do
W := 0;
  for n to K do
V := 0;
    for p to R do
      if p <> n then
        if p^2 = Pr*(n^2+m^2) then
          V := V+evalf(-(-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*theta/(Pi*(p^2-
          n^2)))
        end if
      end if
    end for
  end for
end for

```

```

        else V := V+evalf((-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*Pr*(exp(-
theta*Pi^2*(p^2-Pr*(n^2+m^2)))-1)/(Pi^3*(p^2-n^2)*(p^2-
Pr*(n^2+m^2))))
    end if
end if
end do;
W := W+evalf(((cos(Pi*n)-1)*(-
1+exp(Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))+2*Pi*n*V)*(cos(P
i*m)-1)*exp(-Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/((n^2+m^2)*Pi^3*m))
end do;
B[m] := evalf(W)
end do;

for m to K do
W := 0;
for n to K do V := 0;
for p to R do
if p <> n then
if p^2 = Pr*(n^2+m^2) then
V := V+evalf(-(-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*theta/(Pi*(p^2-
n^2)))
else V := V+evalf((-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*Pr*(exp(-
theta*Pi^2*(p^2-Pr*(n^2+m^2)))-1)/(Pi^3*(p^2-n^2)*(p^2-
Pr*(n^2+m^2))))
end if
end if
end do;
W := W+evalf(((cos(Pi*n)-1)*(-
1+exp(Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))+2*Pi*n*V)*(cos(P
i*m)-1)*cos(Pi*n)*exp(-
Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/((n^2+m^2)*Pi^3*m))
end do;
B[K+m] := evalf(W)
end do;

for n to K do
W := 0;
for m to K do
V := 0;
for p to R do
if p <> n then
if p^2 = Pr*(n^2+m^2) then
V := V+evalf(-(-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*theta/(Pi*(p^2-
n^2)))
else V := V+evalf((-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*Pr*(exp(-
theta*Pi^2*(p^2-Pr*(n^2+m^2)))-1)/(Pi^3*(p^2-n^2)*(p^2-
Pr*(n^2+m^2))))
end if
end if
end do;
W := W+evalf(((cos(Pi*n)-1)*(-
1+exp(Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))+2*Pi*n*V)*(cos(P
i*m)-1)*exp(-Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/((n^2+m^2)*Pi^3*n))

```

```

end do;
B[2*K+n] := evalf(W)
end do;

for n to K do
W := 0;
for m to K do
V := 0;
for p to R do
if p <> n then
if p^2 = Pr*(n^2+m^2) then V := V+evalf(-(-1)^p*n*(cos(Pi*n)-
cos(Pi*p))*theta/(Pi*(p^2-n^2)))
else V := V+evalf((-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*Pr*(exp(-
theta*Pi^2*(p^2-Pr*(n^2+m^2)))-1)/(Pi^3*(p^2-n^2)*(p^2-
Pr*(n^2+m^2))))
end if
end if
end do;
W := W+evalf(((cos(Pi*n)-1)*(-
1+exp(Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))+2*Pi*n*V)*(cos(P
i*m)-1)*cos(Pi*m)*exp(-
Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/((n^2+m^2)*Pi^3*n))
end do;
B[3*K+n] := evalf(W)
end do;

##

# Нахождение неизвестных коэффициентов путем решения системы
# линейных уравнений

T := LinearSolve(A, B);

##

##### Вычисление функции тока #####

for m to K do
for n to K do V := 0;
for p to R do
if p <> n then
if p^2 = Pr*(n^2+m^2) then
V := V+evalf(-(-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*theta/(Pi*(p^2-
n^2)))
else V := V+evalf((-1)^p*n*(cos(Pi*n)-cos(Pi*p))*Pr*(exp(-
theta*Pi^2*(p^2-Pr*(n^2+m^2)))-1)/(Pi^3*(p^2-n^2)*(p^2-
Pr*(n^2+m^2))))
end if
end if
end do;

```



```

H[m, n] := evalf(((cos(Pi*n)-1)*(-
1+exp(Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2))+2*Pi*n*V)*(-
cos(Pi*m)+1)*exp(-Pi^2*theta*(n^2+m^2))/(m*n*Pi^2))
end do
end do;

F := 0;

for m to K do
for n to K do
F := F+evalf((Pi*n*cos(Pi*n)*T[m]*((1-exp(-
Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2)))-Pi*n*T[K+m]*((1-exp(-
Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2)))+Pi*m*cos(Pi*m)*T[2*K+
n]*((1-exp(-Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2)))-
Pi*m*T[3*K+n]*((1-exp(-
Pi^2*theta*(n^2+m^2)))/(Pi^2*(n^2+m^2)))+H[m,
n])/(Pi^2*(n^2+m^2))*sin(Pi*n*x)*sin(Pi*m*y)
end do
end do;

F := 4*F;

#####

# Построение 3D графика функции тока

plot3d(F, x = 0 .. 1, y = 0 .. 1);

##

```

2. Численный расчет поля функции тока в квадратной каверне

```

restart;
with(CurveFitting);
with(LinearAlgebra);

#Ввод основных параметров

Pr := 1; # Число Прандтля
n := 51; # Размер сетки
p := n-4;
time := 0.1e-2; # Время

##

A := Matrix(n, n);
C := Matrix(p^2, p^2);
u := Vector(p^2);

```

```

# Шаг сетки
`&Delta;x` := 1/(n-1);

# Вычисление шага по времени

F := 2*(1-cos(`&Delta;x`*m*Pi/l))+2*(1-cos(`&Delta;x`*k*Pi/l));
G := 2*(cos(2*`&Delta;x`*m*Pi/l)+cos(2*`&Delta;x`*k*Pi/l))-
  8*(cos(`&Delta;x`*m*Pi/l)+cos(`&Delta;x`*k*Pi/l))+12+(1/18)*
  (cos(2*`&Delta;x`*m*Pi/l)-
  16*cos(`&Delta;x`*m*Pi/l)+15)*(cos(2*`&Delta;x`*k*Pi/l)-
  16*cos(`&Delta;x`*k*Pi/l)+15);
m := p; k := m;
l := 1-2*`&Delta;x`;
Fmax := evalf(F);
Gmax := evalf(G);
m := 1; k := m;
Fmin := evalf(F);
Gmin := evalf(G);
# Шаг по времени
`&Delta;theta;` := 2*`&Delta;x`^2/(Gmin/Fmin+Gmax/Fmax);

##

# Количество временных шагов
H := round(time/`&Delta;theta;`);

##### Расчет поля функции тока #####

Nvp := 0; # Невязка предыдущего слоя

# Построение матрицы линейного оператора

for i to p^2 do
  for j to p^2 do
    if i = j then C[i, j] := -4 else
      if i = j+p or j = i+p then C[i, j] := 1 else
        if i = j+1 or j = i+1 then C[i, j] := 1 end if
      end if
    end if
  end do
end do;

for k from p by p while k < p^2 do
C[k, k+1] := 0; C[k+1, k] := 0 end do;

##

# Основной цикл расчета поля функции тока

for k to H do t := 1;

#Вычисление вектора свободных членов

```

```

for i from 3 to n-2 do
  for j from 3 to n-2 do
    u[t] := evalf(A[i+1, j]-4*A[i, j]+A[i-1, j]+A[i, j+1]+A[i, j-1]+`&Delta;&theta;`*(A[i+2, j]-4*A[i+1, j]+6*A[i, j]-4*A[i-1, j]+A[i-2, j]))/`&Delta;x`^2+(A[i, j+2]-4*A[i, j+1]+6*A[i, j]-4*A[i, j-1]+A[i, j-2])/`&Delta;x`^2+(A[i+2, j+2]-16*A[i+2, j+1]+30*A[i+2, j]-16*A[i+2, j-1]+A[i+2, j-2]-16*(A[i+1, j+2]-16*A[i+1, j+1]+30*A[i+1, j]-16*A[i+1, j-1]+A[i+1, j-2]))+30*(A[i, j+2]-16*A[i, j+1]+30*A[i, j]-16*A[i, j-1]+A[i, j-2])-16*(A[i-1, j+2]-16*A[i-1, j+1]+30*A[i-1, j]-16*A[i-1, j-1]+A[i-1, j-2]))+A[i-2, j+2]-16*A[i-2, j+1]+30*A[i-2, j]-16*A[i-2, j-1]+A[i-2, j-2])/(72*`&Delta;x`^2)-`&Delta;x`^2*(-1-2*(sum((-1)^s*cos((1-`&Delta;x`*(i-1))*Pi*s)*exp(-Pi^2*s^2*`&Delta;&theta;`*k/Pr), s = 1 .. 100))))); t := t+1
  end do
end do;

##

# Расчет вектора значений функции тока путем решения системы
# линейных уравнений

t := 1;
x := LinearSolve(C, u);

##

for i from 3 to n-2 do
  for j from 3 to n-2 do B[i, j] := x[t]; t := t+1 end do
end do;

# Пересчет значений с учетом невязки

Su := 0; # Сумма
Nv := 0; # Невязка

for v from 3 to n-2 do
  A[v, 2] := (1/4)*B[v, 3]; A[v, n-1] := (1/4)*B[v, n-2]; Nv := Nv+A[v, 2]+A[v, n-1]
end do;

for r from 3 to n-2 do
  A[2, r] := (1/4)*B[3, r]; A[n-1, r] := (1/4)*B[n-2, r]; Nv := Nv+A[2, r]+A[n-1, r]
end do;

A[2, 2] := (1/4)*A[3, 2];
A[n-1, 2] := (1/4)*A[n-2, 2];
A[2, n-1] := (1/4)*A[2, n-2];
A[n-1, n-1] := (1/4)*A[n-1, n-2];
Nv := Nv+A[2, 2]+A[n-1, 2]+A[2, n-1]+A[n-1, n-1];

```

```

for v from 3 to n-2 do
  for r from 3 to n-2 do Su := Su+B[v, r] end do
end do;

Pnv := Nv-Nvp;
Q := Pnv/Su;

for v from 3 to n-2 do
  for r from 3 to n-2 do A[v, r] := (1-Q)*B[v, r] end do
end do;

Nvp := Nv

##

end do; # Конец основного цикла

#####

# Построение 2D графика срединного сечения профиля функции тока
for i to n do v[i] := `&Delta;x`*(i-1) end do;

j := (n+1)*(1/2);

for i to n do y[i] := A[i, j] end do;

r := [`$`([v[q], y[q]], q = 1 .. n)];
F(z):=Spline(r, z, degree=2);
plot(F(z), z = 0 .. 1, color = black, thickness = 2, axis[1] =
[gridlines = [10, color = gray]], axis[2] = [gridlines = [10,
color = gray]]);

##

# Построение 3D графика функции тока

C := [];

for i to n do
  C1 := [];
  for j to n do
    x := `&Delta;x`*(i-1); y := (j-1)*`&Delta;x`; C1 := [op(C1),
[x, y, A[i, j]]]
  end do;
C := [op(C), C1]
end do;

with(plots);
surfdata(C, style = PATCHCONTOUR, axes = normal, orientation =
[0, 0], contours = 5, labels = ["X", "Y", "Fi"]);

##

```