На правах рукописи

Завьялова Антонина Владимировна

Включения с сюръективными операторами и их приложения

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2014

Работа выполнена в Воронежском государственном педагогическом университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,

доцент **Гельман Борис Данилович.**

Официальные оппоненты: Арутюнов Арам Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет дружбы народов, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, заведующий кафедрой;

Семенов Михаил Евгеньевич,

доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", кафедра теоретической гидрометеорологии, профессор.

Ведущая организация: Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина.

Защита состоится "15" апреля 2014 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д212.038.22 при ВФГБОУ ВПО "Воронежский государственный университет"по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл. 1, ауд. 335.

С диссертации можно ознакомится в научной библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан "   " февраля 2014 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

ЮГлих

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В конце XX века многозначный анализ и теория дифференциальных включений начали бурно развиваться в связи с развитием теории оптимального управления, теории игр, негладкого анализа и других разделов современной математики.

Исследование различных классов нелинейных задач, построение и изучение разрешимости адекватных им классов операторных уравнений и включений традиционно включается в нелинейный функциональный анализ. При изучении вопросов, связанных с разрешимостью нелинейных уравнений и включений, важную роль играют качественные методы, в частности, теоремы о неподвижной точке.

Современная теория неподвижных точек вполне непрерывных многозначных отображений была построена на работах С. Какутани, С. Эйленберга и Д. Монтгормери, А. Гранаса, Л. Гурневича, А.Д. Мышкиса, Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, В.В. Обуховского и многих других.

Обобщением понятия неподвижной точки является решение операторного включения вида $f(x) \in F(x)$, где f - однозначное отображение, F - многозначное отображение.

В 1997 году появилась работа B. Ricceri, посвященная изучению уравнений вида $A(x) = f(x)$, где A - линейный непрерывный сюръективный оператор, f - компактное однозначное отображение. В этой работе не только была доказана разрешимость таких уравнений, но и изучена топологическая размерность множества решений.

Результаты работы B. Ricceri были обобщены Б.Д. Гельманом. Он изучал уравнения в случае, когда A - замкнутый линейный оператор.

Настоящая работа посвящена изучению операторных включений вида $A(x) \in F(x)$, где A - линейный сюръективный оператор, F - многозначное отображение с выпуклыми компактными образами, действующими в банаховых пространствах.

В первой части изучаются операторные включения в случае, когда многозначное отображение F является вполне непрерывным. Полученные результаты применяются к изучению вырожденных дифференциальных включений вида $A(x') \in F(t, x)$, где A - линейный сюръективный оператор, F - многозначное компактное отображение.

Вторая часть работы посвящена вопросам разрешимости операторных включений вида $A(x) \in F(x)$ в случае, когда многозначное отображение F является уплотняющим относительно оператора A.

Рассмотрению этих вопросов и посвящена данная работа.

Цель работы.

Целью данной работы является изучение разрешимости и свойств множества решений операторных включений, у которых главная часть является линейным сюръективным оператором и приложение полученных результатов к изучению разрешимости новых классов вырожденных дифференциальных включений и управляемых систем.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Отметим основные результаты:

1. Доказаны теоремы о разрешимости и размерности множества решений операторных включений, у которых главная часть является замкнутым линейным сюръективным оператором, а многозначное возмущение вполне непрерывно относительно этой главной части.

2. Рассмотрены приложения доказанных теорем к разрешимости вырожденных дифференциальных включений в банаховых пространствах, у которых вырождение задается замкнутым линейным сюръективным оператором.

3. Изучена проблема существования решений управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями.

4. Доказаны теоремы о разрешимости и размерности множества решений операторных включений, у которых главная часть является непрерывным линейным сюръективным оператором, а многозначное возмущение является уплотняющим относительно главной части. Рассмотрены приложения полученных теорем для изучения одного класса вырожденных дифференциальных включений.

Методы исследования.

В работе использованы методы функционального анализа, теории многозначных отображений и дифференциальных включений.

Теоретическая и практическая ценность.

Данная работа носит теоретический характер. Представленные в ней результаты могут быть использованы при изучении новых классов операторных и дифференциальных включений, задач управления.

Апробация работы.

Материалы диссертации докладывались на международных научных конференциях "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (Воронеж, ПМТУММ-2012)"; "Воронежская зимняя школа С.Г. Крейна - 2012"; на Воронежских зимних математических школах (ВЗМШ-2011, ВЗМШ-2013)"; на

XXIII Воронежской весенней математической школе "Современные методы теории краевых задач"(Воронеж, 2012г.); на Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – VI. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2013); на научных конференциях в Воронежском государственном педагогическом университете. Результаты диссертации докладывались на семинаре проф. Обуховского В.В. (ВГПУ, 2013).

Публикации по теме диссертации.

Результаты диссертации опубликованы в 8 работах: [1] - [8]. Работы [1], [2], [3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных опубликованных работ [1] -[3] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на пункты и подпункты, и списка литературы, содержащего 41 наименование. Объем работы составляет 84 страницы текста.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дается краткий обзор литературы по теме диссертации и излагаются основные результаты.

Первая глава является вспомогательной, она содержит сведения из теории многозначных отображений и дифференциальных включений, необходимые в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам существования и свойствам множества решений операторных включений вида

$$A(x) \in F(x), \tag{2.1}$$

где A – замкнутый линейный сюръективный оператор, F – многозначное компактное относительно оператора A возмущение. Рассматриваются приложения полученных теорем для изучения вырожденных дифференциальных включений и одного класса управляемых систем.

Результаты этой главы опубликованы в статьях [1], [4], [5] [6], [7],

В **пункте 2.1** изучается разрешимость операторных включений и свойств множества решений включений вида $A(x) \in F(x)$, где $A(x)$ – замкнутый линейный оператор, $F(x)$ – многозначное отображение.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор.

2.1.1 Определение. *Число*

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} \left(\frac{inf\{||x|| \ \mid \ x \in E_1, A(x) = y\}}{||y||}\right)$$

называется **нормой** *многозначного отображения* A^{-1}.

Известно, что при сделанных предположениях $||A^{-1}|| < \infty$.

Пусть X – подмножество пространства E_1, $F : X \to Kv(E_2)$ – многозначное отображение.

Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x). \tag{2.1}$$

Обозначим $N(A, F)$ множество решений включения (2.1).

Пусть $x_0 \in D(A) \subset E_1$ некоторая точка, $B_R[x_0]$ замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to Kv(E_2)$ — вполне непрерывное многозначное отображение.

2.1.5 Теорема. *Если существует такое число $k > ||A^{-1}||$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leq \frac{R}{k},$$

то множество $N(A, F) \neq \emptyset$.

2.1.8 Следствие. *Пусть вполне непрерывное многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующему условию: существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство:*

$$\max_{u \in F(x)} ||u|| \leq c||x|| + d.$$

Пусть размерность $dim(Ker(A)) \geq 1$.
Если

$$c < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то множество $N(A, F) \neq \emptyset$ и неограничено.

В **пункте 2.2** доказанные теоремы применяются к исследованию вопросов существования локальных решений задачи Коши для одного класса вырожденных дифференциальных включений.

Пусть $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – линейный замкнутый сюръективный оператор, $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0. Пусть многозначное отображение $F : [0, T] \times B_R[x_0] \longrightarrow Kv(E_2)$ вполне непрерывно.

Рассмотрим следующую задачу:

$$A(x') \in F(t, x), \tag{2.4}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{2.5}$$

2.2.1 Определение. Решением задачи (2.4), (2.5) *на промежутке* $[0,l]$, *где* $0 < l \leq T$, *называется абсолютно непрерывная функция* $x(t)$ *такая, что* $A(x'(t)) \in F(t, x(t))$ *для п.в.* $t \in [0,l]$, *и* $A(x(0)) = A(x_0)$.

Обозначим $\sum(x_0, [0,l])$ - множество решений задачи $(2.4), (2.5)$ на промежутке $[0,l]$.

2.2.2 Теорема. *При сделанных предположениях найдется такое число* $l_0 > 0$, *что* $\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset$.

В **пункте 2.3** теоремы, полученные в пунктах 2.1 и 2.2, применяются к изучению топологической размерности множества локальных решений вырожденных дифференциальных включений.

2.3.9 Теорема. *Пусть подпространство* $KerA$ *является дополняемым в пространстве* E_1. *Если* $dim(KerA) \geq 1$, *то существует такое число* $l_0 > 0$, *что*

$$\sum(x_0, [0, l_0]) \neq \emptyset \ \ \text{и} \ \ dim(\sum(x_0, [0, l_0])) = \infty.$$

Пункт 2.4 посвящен изучению управляемых систем, заданных вырожденными дифференциальными уравнениями.

В работе изучается сначала абстрактная модель управляемой системы.

Пусть E_1, E_2, E_3 - банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \times E_3 \to E_2$ нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(f_1) f является вполне непрерывным отображением;

(f_2) существуют положительные числа c_1 и d_1 такие, что для любой точки $(x, u) \in E_1 \times E_3$ справедливо неравенство:

$$||f(x,u)|| \leq c_1(||x|| + ||u||) + d_1;$$

(f_3) при каждом фиксированном $x \in E_1$ отображение

$$f_x = f(x, \cdot) : E_3 \to E_2$$

является аффинным отображением.

Пусть $U : E_1 \to K_v(E_3)$ - полунепрерывное сверху многозначное отображение, удовлетворяющее следующему условию:
существуют положительные числа c_2 и d_2 такие, что

$$\max_{u \in U(x)} ||u|| \leq c_2||x|| + d_2 \tag{2.11}$$

для любого $x \in E_1$.

Изучается следующая задача:

$$A(x) = f(x, u), \tag{2.12}$$

$$u \in U(x). \tag{2.13}$$

Задачу (2.12)-(2.13) будем называть задачей управления с обратной связью, а множество $U(x)$ - множеством допустимых управлений для точки $x \in E_1$.
Решением управляемой системы (2.12)-(2.13) будем называть пару (x_*, u_*) такую, что

$$A(x_*) = f(x_*, u_*), \tag{2.14}$$

$$u_* \in U(x_*). \tag{2.15}$$

Точку $x_* \in E_1$ назовем *траекторией управляемой системы*, а $u_* \in E_3$ - соответствующим управлением.

2.4.1 Теорема. *Пусть отображение f удовлетворяет условиям (f_1)–(f_3), многозначное отображение U - полунепрерывно сверху и удовле-*

творяет условию (2.11). Тогда если

$$c_1(1+c_2) < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то множество решений управляемой системы (2.14) - (2.15) непусто.

Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор, $g : [0,T] \times E_1 \times E_3 \to E_2$ – нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(g_1) g является вполне непрерывным;

(g_2) существуют непрерывные функции α и β, определенные на промежутке $[0,T]$ такие, что для любой точки $(t,x,u) \in [0,T] \times E_1 \times E_3$ справедливо неравенство

$$||g(t,x,u)|| \leq \alpha(t)(||x|| + ||u||) + \beta(t). \tag{2.17}$$

(g_3) при любых фиксированных $t \in [0,T]$ и $x \in E_1$ отображение g аффинно по u.

Пусть многозначное отображение $U : C_{([0,T],\, E_1)} \to K_v(C_{([0,T],\, E_3)})$ - полунепрерывно сверху и существуют числа c_2 и d_2 такие, что справедливо неравенство:

$$\max_{u \in U} ||u|| \leq c_2||z|| + d_2 \tag{2.18}$$

для любого $z \in C_{([0,T],\, E_1)}$.

Пусть $x_0 \in D(A)$ - некоторая точка.

Рассматривается следующая задача:

$$(Ax)'(t) = g(t, x(t), u(t)), \tag{2.19}$$

где

$$u(t) \in U(x)(t), \tag{2.20}$$

для любого $t \in [0,\ T]$,

$$A(x_0) = Ax_0. \tag{2.21}$$

2.4.2 Теорема. *Пусть отображение g удовлетворяет условиям (g_1)–(g_3), многозначное отображение U - полунепрерывно сверху и удовлетворяет оценке (2.18). Тогда если*

$$(1 + c_2) \int\limits_0^T \alpha(s) ds < \frac{1}{||A^{-1}||},$$

то задача (2.19)-(2.21) имеет решение.

Третья глава диссертации посвящена изучению многозначных уплотняющих возмущений линейных непрерывных сюръективных операторов. В ней доказываются теоремы о существовании решений включений вида $A(x) \in F(x)$, где A – непрерывный линейный сюръективный оператор, а F – уплотняющее многозначное возмущение A. Полученные теоремы применяются для доказательства существования локальных решений одного класса вырожденных включений в банаховом пространстве. Результаты этой главы опубликованы в [2], [3], [8].

В **пункте 3.1** приведены некоторые свойства многозначных уплотняющих отображений. Даны определение ψ-уплотняющего многозначного отображения и теорема о неподвижной точки для ψ-уплотняющего многозначного отображения.

В **пункте 3.2** этой главы даны определения (A, ψ)-уплотняющего многозначного отображения и A-подчиненного оператора.

Пусть E, E_0 - банаховы пространства, $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Рассматривается отображение $\psi_A : P(E) \to \mathbb{R} \cup \infty$, определенное следующим образом:

$$\psi_A(\Omega) = \psi(A(\Omega)).$$

Это отображение ψ_A называется *мерой некомпатности индуцированной оператором* A.

Пусть $D(F)$ ограниченное подмножество в E, $A : E \to E_0$ – линейный непрерывный сюръективный оператор, $F : D(F) \to K_v(E_0)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение.

3.2.1 Определение. *Отображение F называется (A, ψ)-уплотняющим, если для любого множества $Q \subset D(F)$ из неравенства*

$$\psi(F(Q)) \geq \psi_A(Q)$$

вытекает равенство $\psi_A(Q) = 0$.

3.2.3 Определение. *Будем говорить, что* **оператор** B **подчинен оператору** A*, если для любого $x \in E$ справедливо равенство*

$$||A(x)|| \geq ||B(x)||.$$

В работе рассматриваются примеры (A, ψ)-уплотняющих многозначных отображений.

Пусть оператор $B : E \to E_1$ подчинен оператору A, множество X – ограниченное подмножество в E. Пусть $G : X \times E_1 \to K_v(E_0)$ – многозначное полунепрерывное сверху отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in X$ и *любых $y_1, y_2 \in E_1$ справедливо неравенство*

$$h(G(x, y_1), G(x, y_2)) \leq k||y_1 - y_2||;$$

2) для любого $y \in E_1$ многозначное отображение $G(\cdot, y) : X \to K_v(E_0)$ является вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $F : X \to K_v(E_0)$, $F(x) = G(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_0 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ.

3.2.7 Предложение. *При сделанных предположениях многозначное отображение F является (A, χ)-уплотняющим отображением.*

В **пункте 3.3** изучается разрешимость включений с (A, ψ)-уплотняющими многозначными отображениями.

Пусть $A : E \to E_0$ - ограниченный линейный сюръективный оператор. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ. Пусть $x_0 \in E$ - некоторая точка, $B_R[x_0]$- замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to K_v(E_0)$ – многозначное полунепрерывное сверху (A, ψ)-уплотняющее отображение.

Рассмотрим включение

$$A(x) \in F(x), \tag{3.5}$$

$N(A, F)$ - множество решений этого включения.

3.3.1 Теорема. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leq \frac{R}{k},$$

то $N(A, F) \neq \emptyset$.

В **пункте 3.4** теорема 3.3.1 применяется для доказательства теоремы о существовании локальных решений у одного нового класса вырожденных включений в банаховом пространстве.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Завьялова А.В. Об одном классе вырожденных дифференциальных включений/Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1 – С.136-145.

[2] Завьялова А.В. Об уплотняющих многозначных возмущениях линейных сюръективных операторов /Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова// Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2 – С.148-161.

[3] Завьялова А.В. Об одном классе вырожденных дифференциальных включений/Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова// Вестник Тамбовского Университета, Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, Вып. 5 – С.2481-2483.

[4] Завьялова А.В. Об одной теореме о неподвижной точке для многозначных отображений с некомпактными образами/А.В. Завьялова// Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2011. – С.139-140.

[5] Завьялова А.В. О локальных решениях одного класса вырожденных дифференциальных включений/А.В. Завьялова// Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2012: материалы международной конференции/ под ред. В.А. Костина. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2012. – С.67-68.

[6] Завьялова А.В. О задаче Коши для одного класса вырожденных дифференциальных включений/А.В. Завьялова// Современные методы

теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения-XXIII". – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2012. – С.68-69.

[7] Завьялова А.В. Вырожденные дифференциальные включения с сюръективными операторами/А.В. Завьялова// Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): материалы V Международной конференции Воронеж, 11-16 сентября 2012г. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2012. – С.130-132.

[8] Завьялова А.В. Об уравнениях с $(A, \psi)-$уплотняющими отображениями /А.В. Завьялова// Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ 2013. – Воронеж: Изд. ВГУ. – 2013. – С.92-93.

Работы [1], [2], [3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.