

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи

Курбатов Александр Витальевич

**ДИСТАНЦИОННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ
ДВИЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ
ЗОНДИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ
ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ**

Специальность 01.04.03 — радиофизика

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор Трифонов А.П.

Воронеж — 2015

Оглавление

Введение	3
1 Оценка параметров движения цели в условиях априорной параметрической неопределенности	13
1.1 Влияние медленных флуктуаций цели на эффективность оценок	13
1.2 Влияние быстрых флуктуаций цели на эффективность оценок	50
1.3 Основные результаты и выводы	76
2 Квазиправдоподобные оценки параметров движения	78
2.1 Свойства квазиправдоподобных оценок в условиях высокой апостериорной точности	78
2.2 Пороговые свойства квазиправдоподобных оценок	106
2.3 Основные результаты и выводы	135
3 Квазиоптимальные оценки параметров движения по лазерным измерениям дальности	136
3.1 Квазиоптимальные оценки в условиях высокой априорной точности и их свойства	136
3.2 Пороговые свойства квазиоптимальных оценок	153
3.3 Квазиоптимальные оценки дальности и скорости	164
3.4 Статистическое моделирование алгоритма квазиоптимальных оценок дальности и скорости	181
3.5 Основные результаты и выводы	200
Заключение	202
Литература	205

Введение

Актуальность темы исследования. Появившаяся в последнее время возможность формирования сверхкоротких лазерных импульсов позволяет производить измерение радиальных параметров движения с высокой разрешающей способностью. Одновременно имеется возможность создания детекторов, реагирующих на каждый отдельный квант света [29]. Наконец, современные компьютерные технологии позволяют реализовывать сложные алгоритмы в реальном времени. Тем самым появляются условия для увеличения точности устройств, производящих оптические измерения. В связи с этим возникает задача нахождения предельно возможной точности измерений, иными словами, задача нахождения характеристик эффективных оценок, а также исследование различных алгоритмов с целью нахождения условий, при которых эти алгоритмы близки к эффективным. Эта задача актуальна, поскольку область применения оптических измерений весьма обширна и продолжает расширяться.

Перечислим ряд областей применения оптических локаторов:

- ✓ измерение дальности и угловых координат движущихся целей: кораблей, самолетов, космических объектов [111] и т.д., построение объемных моделей сложных объектов;
- ✓ высокоточные измерения скоростей перемещения целей, а также потоков жидкостей и газов [40, 41, 42];
- ✓ получение некоординатной информации о целях: параметрах поверхности (шероховатости, кривизны), параметров вибрации и движения вокруг центра масс, изображений и др. [66];
- ✓ высокоточное наведение систем оружия;
- ✓ обеспечение стыковки космических аппаратов, посадки самолетов, судовождения (лазерные навигационные системы) [60, 80];
- ✓ элементы технического зрения в автоматических и роботизированных системах (системы измерения дальности, формирования изображения, селекции и распознавания целей и др.) [66];
- ✓ измерение параметров окружающей среды, включая атмосферу, а также контроль ее загрязнения продуктами хозяйственной деятельности человека [39, 40, 41, 42, 51, 68].

Отметим также ряд принципиальных особенностей лазерной локации.

- ✓ Когерентность и малая длина волны излучения лазеров позволяют создавать источники излучения с узкой диаграммой направленности. Вследствие этого стало возможным высокоточное измерение углового положения цели.
- ✓ Распространение волн оптического диапазона в газообразных и жидких средах сопровождается их значительным рассеянием, что необходимо учитывать при построении математических моделей оптических сигналов.
- ✓ Создание преднамеренных помех для оптической локации возможно, но сложнее, чем для радиолокации.

Основой работы систем оптической локации, навигации и связи является обработка принимаемых оптических сигналов с целью определения местоположения объекта (дальности и направления на него), его скорости, ускорения и т. п. Уже сам оптический сигнал в силу его квантово-механической природы следует описывать в статистических терминах. Особенно заметно это обстоятельство проявляется при описании слабых оптических сигналов. Такой сигнал представляет собой смесь полезного сигнала и шума, которая в данной диссертации считается аддитивной. Оптический сигнал в виде потока фотонов поступает на вход фотодетектора, в результате чего на его выходе образуется поток фотоэлектронов. При весьма широких предположениях [29, 66, 102] поток фотоэлектронов подчиняется распределению Пуассона. Если источником оптического сигнала является тепловое излучение (например, пожар), то более адекватной моделью статистики фотоэлектронов является [4] отрицательное биномиальное распределение; но в случае, когда длительность времени измерения превышает время когерентности [36], оно также переходит в пуассоновское. В любом случае образующийся поток фотоэлектронов является статистическим. Кроме того, полезный сигнал, формирующийся в результате прохождения через неоднородности атмосферы и отражения посылаемого сигнала от цели, искажается в значительной мере случайным образом. Таким образом, задача обработки оптических сигналов является статистической задачей и ее естественно решать в рамках статистической радиофизики.

Приведем краткий обзор имеющейся литературы по теме диссертации. Общим математическим вопросам теории вероятностей посвящены книги [19, 25, 31, 98, 99], математической статистики — книги [13, 30, 48, 53, 56], а теории случайных процессов — книги [15, 18, 38, 52, 76, 84, 85, 98, 114]. В частности, изложение в книгах [25, 33, 56] ориентировано на приложения в радиофизике. Особо отметим книги [11, 12, 81, 84, 113], где подробно излагается теория пуассоновского и отрицательного биномиального распределений, марковских и пуассоновских случайных процессов, решение уравнения Фокера–Планка–Колмогорова, широко используемые в оптической локации.

Обсуждение разных моделей шумов можно найти в книгах [3, 22, 81, 101]. Постановка и решение задач обнаружения сигнала и оценки его параметров обсуждаются в книгах [17, 22, 55, 67, 83, 85, 115]. Здесь же проводится расчет характеристик обнаружения и оценки параметров сигнала для случая простых моделей шума (аддитивных гауссовских: белого узкополосного, окрашенного) и детерминированных сигналов. В книгах [55, 83], кроме того, приводится подробный расчет характеристик обнаружения сигнала и оценки его параметров с учётом аномальных ошибок.

Решению задач обнаружения сигнала и оценки его параметров в условиях параметрической априорной неопределенности посвящены книги [22, 55, 86, 87, 101, 103].

Основы теории обработки стохастических сигналов изложены в книгах [37, 79, 88, 110]. Именно такими являются сигналы в задачах оптической локации.

Круг задач, в решении которых применяются импульсы разной физической природы (радио, напряжения, оптических и т.д.), описан в [35, 45, 69]. Здесь же предлагаются способы автоматизации методов использования импульсов и описание соответствующих технических приспособлений.

Книги [10, 43, 62, 71, 117] посвящены исследованию устойчивых методов обнаружения сигналов и оценки их параметров: непараметрических, робастных, рассчитанных на тяжелые хвосты и др.; обсуждается характер сходимости оценок.

Смежные вопросы к задачам статистической радиофизики обсуждаются в книгах [7, 17, 50, 101]: классификация сигналов [7, 101], особенности проведения дискретизации сигналов [50, 101], принципы работы согласованных и гребенчатых фильтров [101], помехоустойчивое кодиро-

вание [7, 101], особенности разных типов модуляций и их области применения [7, 17, 50, 101], описание различных каналов связи, включая космические и квантово-механические [7].

Перейдем к обсуждению литературы, посвященной обработке оптических сигналов.

В книгах [8, 9, 21, 23, 26, 28, 77, 97, 111, 120, 121] рассматриваются вопросы технического устройства систем оптической связи и локации, проводится классификация технических устройств. В частности, в [9, 28, 97, 120] обсуждается устройство полупроводниковых лазерных приборов; в [8, 21, 23, 26, 121] описывается устройство локаторов, формирование сигналов, диаграмм направленности, особенности распространение света.

В книгах [39, 40, 41, 42, 51, 68] описываются структурные схемы и классификация оптических систем, используемых в метеорологическом оптическом лазерном исследовании атмосферы, приводятся характеристики рассеяния и распространения света в атмосфере, в том числе с учетом турбулентностей, погодообразующих и загрязняющих факторов, обсуждается отражение света от земли и морской поверхности, особое внимание уделяется энергетическим, поляризационным и статистическим характеристикам света. В [51] описываются методы математического моделирования распространения и рассеяния света в атмосфере. В [39] приводится решение задачи измерения ветра различными способами.

Книги [47, 54, 102] посвящены основам квантовой теории статистических оценок. В частности, в них приводится квантовая формулировка статистических характеристик оптических полей. В [54, 102] излагаются основы квантовой статистики электромагнитного поля и основы приема оптических сигналов. В [54] приводятся вероятностные характеристики полей различных типов излучателей. Особо отметим, что в [102] описываются принципиальные квантовые ограничения, накладываемые на точность связи.

В книгах [21, 23, 39, 51, 54, 60, 97, 102, 105, 106, 120] обсуждаются задачи статистической обработки оптических сигналов: обнаружение сигналов, оценка параметров, оптимальная фильтрация, потенциальная точность оценок, проводится математическое описание оптических полей. В частности, в [23, 39, 60] решается задача оценки скорости по доплеровскому сдвигу и по измерениям дальности. Во всех этих книгах отмечается, что учет квантовомеханической природы света обязателен при его статистическом описании, а следовательно, при построении оп-

тимальных алгоритмов обработки.

В книгах [73, 121] обсуждаются вопросы формирования и фильтрации пространственных оптических изображений, описываются особенности оптических изображений — регулярность и зернистость, приводится анализ различных видов спектра. В [121] также проводится классификация оптических сигналов по частоте, мощности и другим физическим характеристикам; обсуждается распространение света с позиций геометрической оптики.

В книгах [3, 40, 51, 97, 120] проводится классификация различных типов неатмосферных шумов и помех. В частности, в [3] описывается воздействие шумовых флуктуаций на оптические генераторы.

В книге [66] обсуждается применение метода максимального правдоподобия для задачи различения оптических сигналов с расчетом характеристик точности.

В [58, 59] рассматриваются задачи оценки параметров сигналов для различных математических моделей сигнала и шума, включая пуассоновские. В [58] для оптического сигнала рассмотрена задача оценки временного положения, рассчитывается ее дисперсия. В [59] рассматриваются задачи оценки параметров сигнала, достаточно подробно рассматривается задача оценки временного положения, рассчитывается ее дисперсия. Тем не менее отметим, что в книгах [58, 59, 60] нет оценок ускорения, не рассматривается модель параметрической априорной неопределенности, отсутствует качественный анализ сложности реализации метода максимального правдоподобия, не обсуждаются методы, позволяющие упростить техническую реализацию приемника.

Статистическим характеристикам различных алгоритмов оценок параметров движения при использовании для зондирования последовательностью оптических импульсов посвящены работы [65, 90, 91, 93, 96].

В [93] рассмотрен случай отсутствия неинформативных параметров. Найдены дисперсии оценок дальности, скорости и ускорения в предположениях, что остальные параметры известны, либо неизвестен какой-то один, либо неизвестны все три; проведено качественное сравнение этих дисперсий. Коэффициенты корреляции не выписывались, но наличие информационной матрицы Фишера в принципе позволяет найти и их. Работа [90] является более ранним вариантом [93], где рассматриваются только оценки дальности и скорости.

В [91] рассмотрен случай наличия неинформативных параметров, причем последовательность принимаемых импульсов предполагается быстро

флуктуирующей (изложение ведется не в терминах неинформативных параметров, а в терминах изменения формы интенсивности отдельных импульсов). Изучен вопрос об увеличении дисперсий оценок дальности и скорости (оценка ускорения не рассматривается), а также коэффициента корреляции за счет наличия неинформативных параметров. Рассмотрен случай, когда медленно флуктуирующая последовательность обрабатывается как быстро флуктуирующая. Проведено сравнение со случаем отсутствия неинформативных параметров. Обсуждаются три конкретных примера форм интенсивности отдельного импульса посылаемого сигнала.

В [96] рассмотрен случай наличия неинформативных параметров, причем последовательность принимаемых импульсов может быть как медленно, так и быстро флуктуирующей. Но в качестве информативных параметров взяты временное положение и период следования. Таким образом, ускорение в качестве информативного параметра не рассматривается. Рассмотрен пример одиночного импульса с передним и задним фронтами экспоненциальной формы.

В диссертации [65] получены характеристики совместно-эффективных оценок дальности, скорости и ускорения, но (в отличие от настоящей диссертации) в предположении, что форма интенсивности принимаемого сигнала известна. Кроме того, синтезирован алгоритм и рассчитаны характеристики квазиправдоподобных оценок дальности и скорости, но (в отличие от настоящей диссертации) без ускорения. Квазиоптимальный алгоритм в [65] не рассматривался, а также не рассматривалась задача оценок параметров движения в условиях параметрической априорной неопределенности.

Основной целью работы является статистическое исследование нескольких близких к эффективным алгоритмов оценки параметров движения при оптическом зондировании цели, а также сравнение между собой их характеристик точности и сложности аппаратной реализации. Более детально эта цель сводится к следующему.

- ✓ Нахождение характеристик совместно-эффективных оценок дальности, скорости и ускорения в условиях параметрической априорной неопределенности.
- ✓ Исследование метода максимального правдоподобия в условиях медленных и быстрых флуктуаций цели.

- ✓ Применение квазиправдоподобного алгоритма и расчет его характеристик.
- ✓ Синтез квазиоптимального алгоритма и расчет его характеристик.
- ✓ Исследование влияния аномальных ошибок (пороговых явлений) на точность квазиправдоподобных и квазиоптимальных оценок.
- ✓ Проверка теоретических выводов и нахождение границ их применимости с помощью статистического моделирования.
- ✓ Проведение качественного сравнения сложности аппаратурной реализации исследуемых алгоритмов.

Научная новизна.

- ✓ Получены асимптотические аналитические выражения для характеристик совместно-эффективных оценок параметров движения (дальности, скорости и ускорения) в условиях параметрической априорной неопределенности.
- ✓ Найдены асимптотические характеристики оценок максимального правдоподобия параметров движения в условиях параметрической априорной неопределенности как в случае медленных, так и быстрых флуктуаций.
- ✓ Синтезированы новые квазиправдоподобный и квазиоптимальный алгоритмы оценки параметров движения. Найдены характеристики синтезированных алгоритмов, включая пороговые.
- ✓ Показано, что для того чтобы характеристики точности оценок как алгоритма максимального правдоподобия в условиях быстрых флуктуаций, так и квазиоптимального алгоритма при условии совпадения форм интенсивностей ожидаемого и принимаемого сигналов и интенсивностей ожидаемого и принимаемого шумов, были близки к эффективным, необходимо обеспечивать большие значения отношения сигнал-шум для каждого импульса последовательности; а для достижения близости характеристик точности оценок максимального правдоподобия в условиях медленных флуктуаций, а также квазиправдоподобных оценок, к эффективным, необходимо обеспечить большие значения отношения сигнал-шум для последовательности импульсов в целом.

Перечисленные результаты в отличие от известных ранее учитывают параметрическую априорную неопределенность.

Теоретическая и практическая ценность. Установлено, что в условиях параметрической неопределенности оценка максимального правдоподобия является из рассматриваемых наиболее точной, но и наиболее сложно аппаратно реализуемой, а квазиоптимальная оценка — наименее точной, но наиболее просто аппаратно реализуемой. Полученные в работе характеристики позволяют сделать обоснованный выбор между предлагаемыми алгоритмами оценки параметров движения, исходя из априорной информации и требований к точности и сложности аппаратной реализации. Найдены простые достаточные условия, накладываемые на форму интенсивности принимаемого и ожидаемого сигналов, гарантирующие состоятельность оценок. Разработан алгоритм статистического моделирования, позволяющий получать характеристики оценок. Результаты работы могут быть использованы для обработки измерений дальности высокоточными лазерными дальномерами с целью получения дополнительной информации о скорости и ускорении цели.

Внедрение научных результатов. Работа над диссертацией проводилась в рамках научно-исследовательской тематики кафедры радиофизики Воронежского госуниверситета и была поддержана грантами РФФИ (проекты №13-01-97504 и №13-08-06735), а также грантами федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы № 14.В37.25.2102 по теме “Разработка радиолокационных методов дистанционного зондирования и мониторинга морской поверхности и ледовой обстановки для обеспечения безопасности разработки новых энергоэффективных северных морских месторождений углеводородов и их добычи”, № 14.В37.25.2032 по теме “Разработка статистических методов обработки и анализа сверхширокополосных сигналов и полей при наличии случайных искажений в условиях комплексной априорной неопределенности” и № 14.В37.25.2015 по теме “Разработка методов статистического анализа нестационарных случайных процессов в условиях параметрической неопределенности при скачкообразно-плавном изменении их статистических характеристик”. Полученные результаты внедрены в научно-исследовательской и учебной работе на кафедре радиофизики Воронежского государственного университета.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту.

- ✓ Характеристики точности совместно-эффективной оценки, а также

структура и характеристики точности максимально правдоподобного, квазиправдоподобного и квазиоптимального алгоритмов.

- ✓ Обоснование асимптотической эффективности алгоритма максимального правдоподобия при любом количестве неизвестных неинформативных регулярных параметров для рассматриваемых моделей сигналов.
- ✓ Условия, при которых квазиправдоподобная и квазиоптимальная оценки являются асимптотически эффективными и состоятельными.
- ✓ Границы применимости квазиоптимального метода оценки посредством статистического моделирования.
- ✓ Рекомендации по выбору алгоритма оценки параметров движения, исходя из априорной информации, отношения сигнал-шум и требований к сложности аппаратной реализации.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов подтверждается корректным использованием общетеоретических положений статистической радиофизики, а также теории вероятностей и математической статистики, результатами статистического моделирования на ЭВМ и совпадением результатов диссертации с известными в ряде частных случаев.

Апробация работы. Основные положения диссертации были представлены в виде докладов и обсуждались на XV, XVII, XVIII, XIX, XX Международных научно-технических конференциях “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж, 2009, 2011, 2012, 2013, 2014 и XV Международной научно-технической конференции “Кибернетика и высокие технологии 21 века”, Воронеж, 2010.

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133], из них работы [127, 128, 130, 131, 133] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций, а остальные — в сборниках трудов конференций. В работах, опубликованных в соавторстве, лично соискателю принадлежат конкретизация решения поставленных теоретических задач, проведение рассуждений, выполнение аналитических и численных расчетов, анализ и интерпретация результатов, а также статистическое моделирование на ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 131 названий, а также 38 рисунков.

Содержание работы. Во введении обсуждаются постановка задачи, актуальность темы и основные характеристики работы.

В первой главе произведен расчет характеристик эффективных оценок дальности, скорости и ускорения в условиях параметрической априорной неопределенности, вызванной быстрыми и медленными флуктуациями цели. Также произведен расчет характеристик оценок максимального правдоподобия в тех же априорных условиях. Показано, что оценки максимального правдоподобия являются асимптотически эффективными с ростом отношения сигнал-шум для любого конечного числа неизвестных регулярных неинформативных параметров.

Во второй главе рассмотрен квазиправдоподобный метод оценки дальности, скорости и ускорения. Рассчитаны характеристики квазиправдоподобных оценок с учетом пороговых явлений. Сформулированы условия, накладываемые на форму интенсивности принимаемых и ожидаемых импульсов, при которых оценки параметров движения являются состоятельными. Показано, что использование квазиправдоподобной оценки позволяет упростить техническую реализацию приемника по сравнению с приемником, осуществляющим оценку максимального правдоподобия в условиях параметрической априорной неопределенности.

В третьей главе изучено применение квазиоптимального метода к оценке дальности, скорости и ускорения. Произведен расчет характеристик точности квазиоптимальных оценок с учетом пороговых явлений. Показано, что характеристики точности квазиоптимальной оценки совпадают с характеристиками точности квазиправдоподобной оценки в условиях отсутствия пороговых явлений. При этом квазиоптимальная оценка проигрывает квазиправдоподобной в пороговой области. Кроме того, продемонстрировано, что квазиоптимальная оценка является наиболее просто технически реализуемой из всех рассмотренных. Приведены результаты статистического моделирования квазиоптимального алгоритма оценки дальности и скорости. Они показали границы справедливости предположений, использованных при расчете характеристик точности квазиоптимальной оценки, и подтвердили полученные результаты в области применимости допущенных предположений.

В заключении подводятся итог, кратко формулируются основные результаты и выводы.

Глава 1

Оценка параметров движения цели в условиях априорной параметрической неопределенности

1.1 Влияние медленных флуктуаций цели на эффективность оценок

Последовательности оптических импульсов широко используются [21, 23, 37, 102] в системах оптической локации. В связи с этим актуально исследование оптимальных и близких к оптимальным методов обработки последовательностей оптических импульсов.

В [93, 94] проведен синтез алгоритма обработки принимаемой последовательности оптических импульсов и расчет характеристик оценок параметров движения — дальности, скорости и ускорения — в условиях полной априорной определенности. В этих работах форма интенсивности принимаемой последовательности считалась априори известной, отсутствовали неинформативные параметры, не учитывались флуктуации цели и трудности аппаратурной реализации алгоритмов.

Однако в реальных условиях флуктуации цели, а также физические эффекты, сопровождающие рассеяние и распространение света в различных средах, приводят к тому, что форма интенсивности отдельных оптических импульсов может зависеть от конечного числа неизвестных неинформативных параметров, в оценке которых нет необходимости [87, 107]. Хотя в оценке неинформативных параметров нет необходимости, их наличие влияет на точность оценки информативных параметров, в качестве которых выступают дальность, скорость и ускорение.

В этой главе обсуждаются потери точности совместно-эффективных оценок дальности, скорости и ускорения цели, в условиях априорной

неопределенности, связанной с наличием конечного числа неизвестных неинформативных параметров у рассеянной последовательности оптических импульсов. Устанавливается, что оценки, полученные на основе алгоритма максимального правдоподобия, являются асимптотически эффективными.

В настоящем параграфе рассматривается задача расчета характеристик эффективных оценок параметров движения медленно флуктуирующей цели.

Положим, что излучается последовательность оптических импульсов с интенсивностью

$$s_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}(t - (k - \mu)\vartheta - \lambda), \quad (1.1.1)$$

где $\hat{s}(t)$ — функция, описывающая интенсивность отдельного оптического импульса, λ — временное положение, ϑ — период повторения импульсов. Параметр μ определяет точку последовательности, с которой связано временное положение λ . Так, при $\mu = 0$ величина λ определяет временное положение первого импульса, при $\mu = (N - 1)/2$ — временное положение середины последовательности (1.1.1), а при $\mu = N - 1$ — временное положение последнего импульса последовательности.

Полезный сигнал возникает в результате рассеяния последовательности оптических импульсов (1.1.1) объектом, обладающим дальностью R_0 и радиальной скоростью V_0 и ускорением A_0 . Будем считать, что форма интенсивности рассеянного сигнала известна лишь с точностью до некоторого конечного числа неинформативных параметров, причем значения неинформативных параметров не меняются от импульса к импульсу. Таким образом, интенсивность рассеянной последовательности импульсов имеет вид [23, 37, 93]

$$s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_0). \quad (1.1.2)$$

Здесь функция $s_0(t, \vec{l}_0)$ описывает форму интенсивности одного рассеянного оптического импульса последовательности (1.1.2) и, в общем случае, отличается от $\hat{s}(t)$ в (1.1.1), \vec{l}_0 — вектор неинформативных параметров, c — скорость света. Причем предполагается, что наблюдения ведутся в

земных условиях, так что

$$|V_0| \ll c, \quad N\vartheta|A_0| \ll c. \quad (1.1.3)$$

Здесь и далее индексом ноль отмечены истинные значения неизвестных параметров рассеянной последовательности оптических импульсов с интенсивностью (1.1.2).

Сигнал с интенсивностью (1.1.2) наблюдается на отрезке времени $[0, T]$ на фоне оптического шума с постоянной интенсивностью ν . Следовательно, обработке доступна реализация $\pi(t)$ пуассоновского процесса с интенсивностью

$$\beta(t, \vec{l}) = s(t, \vec{l}) + \nu. \quad (1.1.4)$$

Чтобы определить влияние параметрической априорной неопределенности на точность совместно-эффективных оценок параметров движения, рассчитаем характеристики совместно-эффективных оценок параметров рассеянного сигнала.

Будем рассматривать регулярный случай [43, 87], когда интенсивности $s_0(t, \vec{l})$ отдельных оптических импульсов дифференцируемы по t и по всем параметрам $l_i, i = 1, \dots, p$. Будем также считать, что интервал наблюдения $[0, T]$ больше длительности всей последовательности оптических импульсов, т. е. $T > N\vartheta$, а величина скважности последовательности не менее двух, так что отдельные импульсы не перекрываются.

Выпишем функцию неопределенности [102]

$$H(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \int_0^T \ln(1+s(t, \vec{l}_1)/\nu) \ln(1+s(t, \vec{l}_2)/\nu) (s(t, \vec{l}_0)+\nu) dt. \quad (1.1.5)$$

Известно [102], что информационная матрица Фишера выражается через функцию неопределенности по формуле

$$\hat{\mathbf{I}} = \left[\frac{\partial^2 H(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \Big|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_0, \vec{l}_2 = \vec{l}_0} \right]_{i,j=1,\dots,p}. \quad (1.1.6)$$

Как показано в [102], корреляционная матрица \mathbf{K} совместно-эффективных оценок имеет вид

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{I}}^{-1}. \quad (1.1.7)$$

Применим описанный вывод корреляционной матрицы (1.1.7) для случая, когда сигнал возникает в результате отражения последовательности оптических импульсов от объекта, находящегося на расстоянии R_0 и движущегося со скоростью V_0 и ускорением A_0 . Как уже отмечалось выше,

в этом случае рассеянный сигнал имеет вид (1.1.2). Будем считать, что параметры R , V , A и \vec{l} неизвестны.

Представление (1.1.5) для функции неопределенности в рассматриваемом случае приобретает вид

$$H(R_1, V_1, A_1, \vec{l}_1; R_2, V_2, A_2, \vec{l}_2) = \int_0^T (\nu + s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0)) \times \\ \times \ln(1 + s(t, R_1, V_1, A_1, \vec{l}_1)/\nu) \ln(1 + s(t, R_2, V_2, A_2, \vec{l}_2)/\nu) dt.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение (1.1.2) и учитывая условие на скважность, получаем

$$H(R_1, V_1, A_1, \vec{l}_1; R_2, V_2, A_2, \vec{l}_2) = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T (\nu + s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_0)) \times \\ \times \ln(1 + s_0(t - 2R_1/c - (k - \mu)(1 + 2V_1/c)\vartheta - A_1(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_1)/\nu) \times \\ \times \ln(1 + s_0(t - 2R_2/c - (k - \mu)(1 + 2V_2/c)\vartheta - A_2(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_2)/\nu) dt. \quad (1.1.8)$$

В рассматриваемом случае информационная матрица Фишера (1.1.6) в подробной записи приобретает вид

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial \vec{l}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial \vec{l}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial \vec{l}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{l}_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{l}_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{l}_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2} \end{pmatrix}.$$

Здесь частные производные вычислены в точке $R_1 = R_2 = R_0$, $V_1 = V_2 = V_0$, $A_1 = A_2 = A_0$, $\vec{l}_1 = \vec{l}_2 = \vec{l}_0$; индекс 0 соответствует истинному значению параметров рассеянного сигнала; $\frac{\partial^2 H}{\partial \vec{l}_1 \partial R_2}$ означает вектор-столбец из частных производных по компонентам вектора-строки \vec{l}_1 ; $\frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial \vec{l}_2}$ — вектор-строку из частных производных по компонентам вектора-столбца $\vec{l}_2 = \vec{l}_2^T$; а $\frac{\partial^2 H}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2}$ — квадратную матрицу, состоящую из вторых частных производных $\frac{\partial^2 H}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}}$, причем частные производные по компонентам вектора-столбца \vec{l}_2 расположены по строкам, а частные производные по компонентам вектора-строки \vec{l}_1 — по столбцам.

Представим матрицу $\widehat{\mathbf{I}}$ в блочном виде:

$$\widehat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}^T,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial R_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial V_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial A_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial \overleftarrow{l}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial \overleftarrow{l}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial \overleftarrow{l}_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial A_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial \overleftarrow{l}_2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку вектор \overrightarrow{l}_1 имеет размерность p , матрица \mathbf{B} имеет размер $3 \times p$, матрица $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$ имеет размер $p \times 3$, а матрица $\mathbf{D} - p \times p$.

Введем обозначения:

$$\alpha = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(t; \overrightarrow{l}_0)} \left(\frac{\partial s_0(t; \overrightarrow{l}_0)}{\partial t} \right)^2 dt, \quad (1.1.9)$$

$$\beta_i = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(t; \overrightarrow{l}_0)} \left(\frac{\partial s_0(t; \overrightarrow{l}_0)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s_0(t; \overrightarrow{l})}{\partial l_i} \right) \Big|_{\overleftarrow{l} = \overleftarrow{l}_0} dt,$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_p) = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(t; \overrightarrow{l}_0)} \left(\frac{\partial s_0(t; \overrightarrow{l}_0)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s_0(t; \overleftarrow{l})}{\partial \overleftarrow{l}} \right) \Big|_{\overleftarrow{l} = \overleftarrow{l}_0} dt, \quad (1.1.10)$$

$$\gamma_{ij} = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(t; \overrightarrow{l}_0)} \frac{\partial s_0(t; \overleftarrow{l})}{\partial l_i} \Big|_{\overleftarrow{l} = \overleftarrow{l}_0} \frac{\partial s_0(t; \overleftarrow{l})}{\partial l_j} \Big|_{\overleftarrow{l} = \overleftarrow{l}_0} dt, \quad (1.1.11)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p} = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(t; \overrightarrow{l}_0)} \left(\frac{\partial s_0(t; \overleftarrow{l})}{\partial \overleftarrow{l}} \right) \Big|_{\overleftarrow{l} = \overleftarrow{l}_0} \left(\frac{\partial s_0(t; \overleftarrow{l})}{\partial \overleftarrow{l}} \right) \Big|_{\overleftarrow{l} = \overleftarrow{l}_0} dt. \quad (1.1.12)$$

Введем также обозначения

$$M_\nu = M_\nu(\mu) = \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^\nu, \quad (1.1.13)$$

$$r_2 = r_2(\mu) = -\frac{M_1}{\sqrt{M_0 M_2}}, \quad (1.1.14)$$

$$r_3 = r_3(\mu) = -\frac{M_3}{\sqrt{M_2 M_4}}, \quad (1.1.15)$$

$$r_4 = r_4(\mu) = -\frac{M_2}{\sqrt{M_0 M_4}}. \quad (1.1.16)$$

Лемма 1.1.1. Пусть $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, причем

$$\gamma \leq \alpha \leq \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\gamma + \delta}{2} \leq \beta \leq \delta.$$

Тогда

$$M_\alpha M_\beta \leq M_\gamma M_\delta.$$

В частности,

$$\begin{aligned} M_1^2 &\leq M_0 M_2, & M_2^2 &\leq M_0 M_4, & M_3^2 &\leq M_2 M_4, \\ M_1 M_3 &\leq M_0 M_4, & M_2 M_3 &\leq M_1 M_4. \end{aligned}$$

Тем самым

$$|r_2| \leq 1, \quad |r_3| \leq 1, \quad |r_4| \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства типа $M_1^2 \leq M_0 M_2$ легко вывести из неравенства Буняковского–Коши–Шварца [44], согласно которому

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} y_k^2 \right).$$

Достаточно положить $x_k = 1$, $y_k = k - \mu$. Тогда получим $\left| \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) \right|^2 \leq N \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2$.

Рассмотрим общий случай. Положим $z_i = (i - \mu)^\nu$. С учетом этого сокращения нужное неравенство приобретает вид

$$\left(\sum_i z_i^\alpha \right) \left(\sum_j z_j^\beta \right) \leq \left(\sum_i z_i^\gamma \right) \left(\sum_j z_j^\delta \right).$$

После раскрытия скобок выражения $z_i^\alpha z_i^\beta$ и $z_i^\gamma z_i^\delta$, содержащие произведения двух совпадающих z_i , сокращаются. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$z_i^\alpha z_j^\beta + z_j^\alpha z_i^\beta \leq z_i^\gamma z_j^\delta + z_j^\gamma z_i^\delta.$$

Разделим последнее неравенство на $z_i^{\frac{\alpha+\beta}{2}} z_j^{\frac{\alpha+\beta}{2}} = z_i^{\frac{\gamma+\delta}{2}} z_j^{\frac{\gamma+\delta}{2}}$ и введем обозначения $x = \frac{z_j}{z_i}$, $u = \frac{\beta-\alpha}{2}$, $v = \frac{\delta-\gamma}{2}$. В результате неравенство примет вид

$$x^u + x^{-u} \leq x^v + x^{-v}.$$

Заметим, что $v \geq u$. Без ограничения общности можно считать, что $x = \frac{z_j}{z_i} > 1$. При фиксированном x рассмотрим функцию $f(u) = x^u + x^{-u}$. Из ее производной $f'(u) = (x^u - x^{-u}) \ln x$ видно, что она возрастает. Это и означает наличие нужного неравенства. \square

Из формулы (1.1.8) с учетом обозначений (1.1.13) в результате стандартных вычислений имеем: для компонент матрицы **A**

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial R_2} &= \frac{4}{c^2} \alpha \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{4}{c^2} M_0 \alpha, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial V_2} &= \frac{4}{c^2} \alpha \vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) = \frac{4}{c^2} \alpha \vartheta M_1, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial R_2} &= \frac{4}{c^2} \alpha \vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) = \frac{4}{c^2} \alpha \vartheta M_1, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial V_2} &= \frac{4}{c^2} \alpha \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 = \frac{4}{c^2} \alpha \vartheta^2 M_2, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial A_2} &= \frac{2}{c^2} \alpha \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 = \frac{2}{c^2} \alpha \vartheta^2 M_2, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial A_2} &= \frac{2}{c^2} \alpha \vartheta^3 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^3 = \frac{2}{c^2} \alpha \vartheta^3 M_3, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial A_2} &= \frac{1}{c^2} \alpha \vartheta^4 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^4 = \frac{1}{c^2} \alpha \vartheta^4 M_4,\end{aligned}$$

для компонент матрицы **B**

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial \overleftarrow{l}_2} &= -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta} M_0 = -\frac{2}{c} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p) M_0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial \overleftarrow{l}_2} &= -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta} \vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) = -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta} \vartheta M_1 = -\frac{2}{c} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p) \vartheta M_1, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial \overleftarrow{l}_2} &= -\frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 = -\frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \vartheta^2 M_2 = -\frac{1}{c} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p) \vartheta^2 M_2,\end{aligned}$$

для компонент матрицы **C** = **B**^T

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial R_2} &= -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta}^T \sum_{k=0}^{N-1} 1 = -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta}^T M_0 = -\frac{2}{c} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p)^T M_0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial V_2} &= -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta}^T \vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) = -\frac{2}{c} \boldsymbol{\beta}^T \vartheta M_1 = -\frac{2}{c} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p)^T \vartheta M_1, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial A_2} &= -\frac{1}{c} \boldsymbol{\beta}^T \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 = -\frac{1}{c} \boldsymbol{\beta}^T \vartheta^2 M_2 = -\frac{1}{c} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p)^T \vartheta^2 M_2,\end{aligned}$$

для матрицы **D**

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_1 \partial \overleftarrow{l}_2} = N\boldsymbol{\gamma} = N(\gamma_{ij})_{i,j=1,\dots,p}.$$

Таким образом, матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} приобретают следующий вид

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha}{c^2} \begin{pmatrix} 4M_0 & 4\vartheta M_1 & 2\vartheta^2 M_2 \\ 4\vartheta M_1 & 4\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 \\ 2\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 & \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix}, \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 2M_0 \\ 2\vartheta M_1 \\ \vartheta^2 M_2 \end{pmatrix} (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p), \quad (1.1.18)$$

$$\mathbf{C} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_p \end{pmatrix} (2M_0 \ 2\vartheta M_1 \ \vartheta^2 M_2), \quad (1.1.19)$$

$$\mathbf{D} = N (\gamma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p}, \quad (1.1.20)$$

где γ_{ij} определены по формуле (1.1.11).

Как было показано выше, корреляционная матрица совместно-эффективных оценок определяется по формуле (1.1.7). Неизвестные параметры \vec{l}_0 предполагаются неинформативными, поэтому нет необходимости определять все элементы корреляционной матрицы (1.1.7). Достаточно найти элементы, характеризующие потенциальную точность оценок дальности, скорости и ускорения. Они располагаются на пересечении первых трех строк и первых трех столбцов матрицы (1.1.7), т.е. в том месте, где в матрице $\hat{\mathbf{I}}$ находится блок \mathbf{A} . Обозначим этот блок матрицы \mathbf{K} размера 3×3 символом $\mathbf{K}(\vec{l}_0)$.

Блок $\mathbf{K}(\vec{l}_0)$ имеет смысл корреляционной матрицы совместно-эффективной оценки параметров R , V и A при наличии неинформативных параметров \vec{l}_0 . Таким образом, он состоит из следующих величин:

$$\mathbf{K}(\vec{l}_0) = \begin{pmatrix} \frac{D(R|\cdot)}{\sqrt{D(V|\cdot)D(R|\cdot)}R(V,R|\cdot)} & \frac{\sqrt{D(R|\cdot)D(V|\cdot)}R(R,V|\cdot)}{D(V|\cdot)} & \frac{\sqrt{D(R|\cdot)D(A|\cdot)}R(R,A|\cdot)}{\sqrt{D(A|\cdot)D(A|\cdot)}R(V,A|\cdot)} \\ \frac{\sqrt{D(V|\cdot)D(R|\cdot)}R(V,R|\cdot)}{\sqrt{D(A|\cdot)D(R|\cdot)}R(A,R|\cdot)} & \frac{\sqrt{D(A|\cdot)D(V|\cdot)}R(A,V|\cdot)}{D(A|\cdot)} & \end{pmatrix}. \quad (1.1.21)$$

Здесь точка после черты в обозначениях типа $D(R|\cdot)$ для дисперсий и $R(R,A|\cdot)$ для коэффициентов корреляции означает набор R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0 всех имеющихся параметров.

Для нахождения $\mathbf{K}(\vec{l}_0)$ воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1.1.2 (формула Фробениуса, [27, с. 57]). Пусть квадратная матрица M разбита на блоки:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

и пусть матрицы M и D невырождены, причем известна матрица D^{-1} . Тогда матрицу, обратную к M , можно найти по формуле:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} F^{-1} & -F^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CF^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CF^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix},$$

где $F = A - BD^{-1}C$.

Согласно лемме 1.1.2 матрица $\mathbf{K}(\vec{l}_0)$ равна матрице $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$. Будем предполагать, что матрица \mathbf{D} (1.1.20) невырождена, что физически соответствует линейной независимости неинформативных параметров друг от друга. Введем обозначение для элементов матрицы Δ , обратной к $(\gamma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p}$:

$$(\gamma_{ij})^{-1} = (D_{ij}^{(-1)}) = (\Delta_{ij})_{i,j=1,\dots,p}.$$

Отсюда с учетом равенства $\mathbf{D} = N (\gamma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p}$ имеем

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{N} (\Delta_{ij})_{i,j=1,\dots,p} = \frac{1}{M_0} (\Delta_{ij})_{i,j=1,\dots,p}.$$

Выпишем матрицу

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$$

и найдем обратную к ней. Вспомним вид (1.1.17) матрицы \mathbf{A} и, используя представления (1.1.18), (1.1.19) и (1.1.20), вычислим $\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$:

$$\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} = \frac{\alpha\rho_p}{c^2M_0} \begin{pmatrix} 4M_0^2 & 4\vartheta M_0M_1 & 2\vartheta^2 M_0M_2 \\ 4\vartheta M_0M_1 & 4\vartheta^2 M_1^2 & 2\vartheta^3 M_1M_2 \\ 2\vartheta^2 M_0M_2 & 2\vartheta^3 M_1M_2 & \vartheta^4 M_2^2 \end{pmatrix}, \quad (1.1.22)$$

где

$$\rho_p = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \beta_i \Delta_{ij} \beta_j. \quad (1.1.23)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} &= \\
&= \frac{\alpha}{c^2} \begin{pmatrix} 4M_0 - 4\rho_p M_0 & 4\vartheta M_1 - 4\vartheta\rho_p M_1 & 2\vartheta^2 M_2 - 2\vartheta^2\rho_p M_2 \\ 4\vartheta M_1 - 4\vartheta\rho_p M_1 & 4\vartheta^2 M_2 - 4\vartheta^2\rho_p \frac{M_1^2}{M_0} & 2\vartheta^3 M_3 - 2\vartheta^3\rho_p \frac{M_1 M_2}{M_0} \\ 2\vartheta^2 M_2 - 2\vartheta^2\rho_p M_2 & 2\vartheta^3 M_3 - 2\vartheta^3\rho_p \frac{M_1 M_2}{M_0} & \vartheta^4 M_4 - \vartheta^4\rho_p \frac{M_2^2}{M_0} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\alpha}{c^2} \begin{pmatrix} 4(1 - \rho_p)M_0 & 4\vartheta(1 - \rho_p)M_1 & 2\vartheta^2(1 - \rho_p)M_2 \\ 4\vartheta(1 - \rho_p)M_1 & 4\vartheta^2 \left(M_2 - \frac{\rho_p M_1^2}{M_0} \right) & 2\vartheta^3 \left(M_3 - \frac{\rho_p M_1 M_2}{M_0} \right) \\ 2\vartheta^2(1 - \rho_p)M_2 & 2\vartheta^3 \left(M_3 - \frac{\rho_p M_1 M_2}{M_0} \right) & \vartheta^4 \left(M_4 - \frac{\rho_p M_2^2}{M_0} \right) \end{pmatrix}. \quad (1.1.24)
\end{aligned}$$

В результате вычислений [20, 24] получаем [127]

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\vec{l}_0) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} = \\
&= \frac{c^2}{\alpha} \frac{1}{((2M_1 M_3 + M_0 M_4)M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \frac{(M_0 M_4 + 2\rho_p M_1 M_3)M_2 - M_0 M_3^2 - \rho_p M_1^2 M_4 - \rho_p M_2^3}{4(1 - \rho_p)M_0} & \frac{1}{4\vartheta} (M_2 M_3 - M_1 M_4) & \frac{1}{2\vartheta^2} (M_1 M_3 - M_2^2) \\ \frac{1}{4\vartheta} (M_2 M_3 - M_1 M_4) & \frac{1}{4\vartheta^2} (M_0 M_4 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3} (M_1 M_2 - M_0 M_3) \\ \frac{1}{2\vartheta^2} (M_1 M_3 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3} (M_1 M_2 - M_0 M_3) & \frac{1}{\vartheta^4} (M_0 M_2 - M_1^2) \end{pmatrix}. \quad (1.1.25)
\end{aligned}$$

В случае $\rho_p = 0$ (отсутствие неинформативных параметров) матрица \mathbf{K} (1.1.25) совпадает с известной из литературы [93] матрицей

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1} &= \frac{c^2}{\alpha} \frac{1}{((2M_1 M_3 + M_0 M_4)M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} (M_2 M_4 - M_3^2) & \frac{1}{4\vartheta} (M_2 M_3 - M_1 M_4) & \frac{1}{2\vartheta^2} (M_1 M_3 - M_2^2) \\ \frac{1}{4\vartheta} (M_2 M_3 - M_1 M_4) & \frac{1}{4\vartheta^2} (M_0 M_4 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3} (M_1 M_2 - M_0 M_3) \\ \frac{1}{2\vartheta^2} (M_1 M_3 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3} (M_1 M_2 - M_0 M_3) & \frac{1}{\vartheta^4} (M_0 M_2 - M_1^2) \end{pmatrix}. \quad (1.1.26)
\end{aligned}$$

В случае $\mu = (N - 1)/2$ эти формулы приобретают вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\vec{l}_0) &= \frac{c^2}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{3(3N^2 - 7) - 20(N^2 - 1)\rho_p}{4N(4(N^2 - 4) + 3(7 - 3N^2)\rho_p)} & 0 & -\frac{30(1 - 2\rho_p)}{N\vartheta^2(4(N^2 - 4) + 3(7 - 3N^2)\rho_p)} \\ 0 & \frac{3}{(N^3 - N)\vartheta^2} & 0 \\ -\frac{30(1 - 2\rho_p)}{N\vartheta^2(4(N^2 - 4) + 3(7 - 3N^2)\rho_p)} & 0 & \frac{720(1 - \rho_p)}{N(N^2 - 1)\vartheta^4(4(N^2 - 4) + 3(7 - 3N^2)\rho_p)} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K} &= \frac{c^2}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{21 - 9N^2}{64N - 16N^3} & 0 & -\frac{15}{2(N^3 - 4N)\vartheta^2} \\ 0 & \frac{3}{(N^3 - N)\vartheta^2} & 0 \\ -\frac{15}{2(N^3 - 4N)\vartheta^2} & 0 & \frac{180}{(N^5 - 5N^3 + 4N)\vartheta^4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

А в случае $\mu = 0$ —

$$\mathbf{K}(\vec{l}_0) = \frac{c^2}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{-\frac{60}{N+2} + \frac{1}{1-\rho_p} + 8 + \frac{24}{N+1}}{4N} & \frac{9-18N}{2\vartheta N^3 + 6\vartheta N^2 + 4\vartheta N} & \frac{15}{N(N^2+3N+2)\vartheta^2} \\ \frac{9-18N}{2\vartheta N^3 + 6\vartheta N^2 + 4\vartheta N} & \frac{3(16N^2-30N+11)}{(N^5-5N^3+4N)\vartheta^2} & -\frac{90}{N(N+1)(N^2-4)\vartheta^3} \\ \frac{15}{N(N^2+3N+2)\vartheta^2} & -\frac{90}{N(N+1)(N^2-4)\vartheta^3} & \frac{180}{(N^5-5N^3+4N)\vartheta^4} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \frac{c^2}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{9(N-1)N+6}{4N(N+1)(N+2)} & \frac{9-18N}{2\vartheta N^3 + 6\vartheta N^2 + 4\vartheta N} & \frac{15}{N(N^2+3N+2)\vartheta^2} \\ \frac{9-18N}{2\vartheta N^3 + 6\vartheta N^2 + 4\vartheta N} & \frac{3(16N^2-30N+11)}{(N^5-5N^3+4N)\vartheta^2} & -\frac{90}{N(N+1)(N^2-4)\vartheta^3} \\ \frac{15}{N(N^2+3N+2)\vartheta^2} & -\frac{90}{N(N+1)(N^2-4)\vartheta^3} & \frac{180}{(N^5-5N^3+4N)\vartheta^4} \end{pmatrix}.$$

Напомним (см. формулу (1.1.21)), что диагональные элементы матрицы $\mathbf{K}(\vec{l}_0)$ совпадают с дисперсиями совместно-эффективных оценок, а внедиагональные — с их ковариациями. Исходя из этого, выпишем выражения для дисперсий и коэффициентов корреляции оценок параметров движения.

Из формулы (1.1.25) получаем представление для дисперсий совместно-эффективных оценок параметров движения в условиях медленных флуктуаций:

$$D(R|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{c^2}{\alpha} \frac{(M_0 M_4 + 2\rho_p M_1 M_3) M_2 - M_0 M_3^2 - \rho_p M_1^2 M_4 - \rho_p M_2^3}{4(1-\rho_p) M_0 ((2M_1 M_3 + M_0 M_4) M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)},$$

$$D(V|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{c^2}{\alpha} \frac{1}{4\vartheta^2} \frac{M_0 M_4 - M_2^2}{((2M_1 M_3 + M_0 M_4) M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)},$$

$$D(A|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{c^2}{\alpha} \frac{1}{\vartheta^4} \frac{M_0 M_2 - M_1^2}{((2M_1 M_3 + M_0 M_4) M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)},$$

и для коэффициентов корреляции совместно-эффективных оценок параметров движения в условиях медленных флуктуаций:

$$R(R, V|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{M_2 M_3 - M_1 M_4}{\sqrt{\frac{(M_0 M_4 + 2\rho_p M_1 M_3) M_2 - M_0 M_3^2 - \rho_p M_1^2 M_4 - \rho_p M_2^3}{(1-\rho_p) M_0}} \sqrt{(M_0 M_4 - M_2^2)}},$$

$$R(R, A|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{M_1 M_3 - M_2^2}{\sqrt{\frac{(M_0 M_4 + 2\rho_p M_1 M_3) M_2 - M_0 M_3^2 - \rho_p M_1^2 M_4 - \rho_p M_2^3}{(1-\rho_p) M_0}} \sqrt{(M_0 M_2 - M_1^2)}},$$

$$R(V, A|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{M_1 M_2 - M_0 M_3}{\sqrt{M_0 M_4 - M_2^2} \sqrt{(M_0 M_2 - M_1^2)}}.$$

Вид дисперсий и коэффициентов корреляции совместно-эффективных оценок при условии отсутствия неинформативных параметров получается в результате подстановки $\rho_p = 0$ в выписанные выше формулы:

$$\begin{aligned}
D(R|R_0, V_0, A_0) &= \frac{c^2}{\alpha} \frac{M_2 M_4 - M_3^2}{4((2M_1 M_3 + M_0 M_4)M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)}, \\
D(V|R_0, V_0, A_0) &= \frac{c^2}{\alpha} \frac{M_0 M_4 - M_2^2}{4\vartheta^2((2M_1 M_3 + M_0 M_4)M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)}, \\
D(A|R_0, V_0, A_0) &= \frac{c^2}{\alpha} \frac{M_0 M_2 - M_1^2}{\vartheta^4((2M_1 M_3 + M_0 M_4)M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4)}, \\
R(R, V|R_0, V_0, A_0) &= \frac{M_2 M_3 - M_1 M_4}{\sqrt{(M_2 M_4 - M_3^2)(M_0 M_4 - M_2^2)}}, \\
R(R, A|R_0, V_0, A_0) &= \frac{M_1 M_3 - M_2^2}{\sqrt{(M_2 M_4 - M_3^2)(M_0 M_2 - M_1^2)}}, \\
R(V, A|R_0, V_0, A_0) &= \frac{M_1 M_2 - M_0 M_3}{\sqrt{(M_0 M_4 - M_2^2)(M_0 M_2 - M_1^2)}}.
\end{aligned}$$

Обозначим через χ отношения дисперсий и коэффициентов корреляции в случае наличия неинформативных параметров к случаю их отсутствия. Например,

$$\begin{aligned}
\chi(R|R_0, V_0, A_0) &= \frac{D(R|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0)}{D(R|R_0, V_0, A_0)}, \\
\chi(R, V|R_0, V_0, A_0) &= \frac{R(R, V|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0)}{R(R, V|R_0, V_0, A_0)}, \\
\chi(R, A|R_0, V_0, A_0) &= \frac{R(R, A|R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0)}{R(R, A|R_0, V_0, A_0)}.
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

Величина χ характеризует потери точности совместно-эффективных оценок, появляющиеся вследствие параметрической априорной неопределенности в виде медленных флуктуаций. Из предыдущих формул имеем

$$\begin{aligned}
\chi(R|R_0, V_0, A_0) &= \frac{(M_0 M_4 + 2\rho_p M_1 M_3)M_2 - M_0 M_3^2 - \rho_p M_1^2 M_4 - \rho_p M_2^3}{(1 - \rho_p)M_0(M_2 M_4 - M_3^2)} = \\
&= \frac{1 - r_3^2 - \rho_p(r_2^2 + r_4^2 + 2r_2 r_3 r_4)}{(1 - \rho_p)(1 - r_3^2)},
\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

$$\chi(V|R_0, V_0, A_0) = 1, \tag{1.1.29}$$

$$\chi(A|R_0, V_0, A_0) = 1. \tag{1.1.30}$$

где r_2 , r_3 и r_4 определены формулами (1.1.14), (1.1.15) и (1.1.16).

Подчеркнем, что при совместной оценке всех трех параметров движения — дальности, скорости и ускорения — наличие неинформативных параметров влияет лишь на точность оценки дальности.

Обсудим зависимость параметров χ от μ . С целью сокращения формул выразим нетривиальные параметры через $\varkappa = \frac{N-1}{2} - \mu$:

$$\begin{aligned}\chi(R|R_0, V_0, A_0) &= \frac{(5\rho_p - 9)N^4 + 2(-36(\rho_p - 1)\varkappa^2 - 5(\rho_p - 3)N^2 + 72\varkappa^2(10\varkappa^2 - 1)(\rho_p - 1) + 5\rho_p - 21)}{3(3N^4 - 10N^2 + 240\varkappa^4 - 24(N^2 + 1)\varkappa^2 + 7)(\rho_p - 1)}, \\ \chi(R, V|R_0, V_0, A_0) &= \sqrt{\frac{(9N^4 - 6(12\varkappa^2 + 5)N^2 + 720\varkappa^4 - 72\varkappa^2 + 21)(\rho_p - 1)}{(5\rho_p - 9)N^4 + 2(-36(\rho_p - 1)\varkappa^2 - 5(\rho_p - 3)N^2 + 72\varkappa^2(10\varkappa^2 - 1)(\rho_p - 1) + 5\rho_p - 21)}}, \\ \chi(R, A|R_0, V_0, A_0) &= \sqrt{\frac{(9N^4 - 6(12\varkappa^2 + 5)N^2 + 720\varkappa^4 - 72\varkappa^2 + 21)(\rho_p - 1)}{(5\rho_p - 9)N^4 + 2(-36(\rho_p - 1)\varkappa^2 - 5(\rho_p - 3)N^2 + 72\varkappa^2(10\varkappa^2 - 1)(\rho_p - 1) + 5\rho_p - 21)}}.\end{aligned}$$

Посмотрим на графики этих зависимостей, см. рис. 1.1.1. Далее найдем локальные максимумы и минимумы.

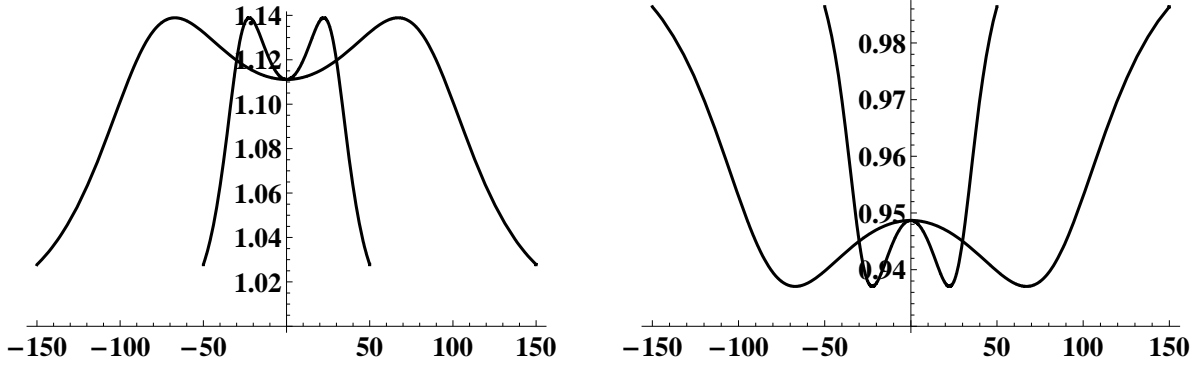


Рис. 1.1.1: Зависимость $\chi(R|R_0, V_0, A_0)$ (слева) и $\chi(R, V|R_0, V_0, A_0) = \chi(R, A|R_0, V_0, A_0)$ (справа) от \varkappa при $N = 100$ и $N = 300$, $\rho_p = 0.2$

Величина $\chi(R|R_0, V_0, A_0)$ достигает максимума в точках (не зависящих от ρ_p)

$$\varkappa = \pm \frac{\sqrt{N^2 + 1}}{2\sqrt{5}} \quad \text{или} \quad \mu = \frac{N-1}{2} \mp \frac{\sqrt{N^2 + 1}}{2\sqrt{5}}.$$

Это максимальное значение равно

$$\chi(R|R_0, V_0, A_0)|_{\max} = \frac{(9 - 4\rho_p)N^2 + \rho_p - 6}{3(3N^2 - 2)(1 - \rho_p)}.$$

Локальный минимум достигается при $\varkappa = 0$ или $\mu = \frac{N-1}{2}$, он равен

$$\chi(R|R_0, V_0, A_0)|_{\text{loc min}} = \frac{(9 - 5\rho_p)N^2 + 5\rho_p - 21}{3(3N^2 - 7)(1 - \rho_p)}.$$

Глобальный минимум достигается в точках $\varkappa = \pm \frac{N-1}{2}$ или $\mu = 0$ и $\mu = N - 1$, он равен

$$\chi(R|R_0, V_0, A_0)|_{\min} = \frac{-4\rho_p + N(12\rho_p + N(9 - 8\rho_p) - 9) + 6}{3(3(N-1)N + 2)(1 - \rho_p)}.$$

Как видим, величина $\chi(R|R_0, V_0, A_0)$ зависит от параметра μ , определяющего точку последовательности, с которой связано ее временное положение. Изменение значения параметра μ не приводит к необходимости изменения алгоритмов формирования и приема используемой последовательности импульсов, а только к несущественному изменению математического описания сигнала. При появлении параметрической априорной неопределенности желательно, чтобы ухудшение характеристик точности было наименьшим, а следовательно, $\chi(R|R_0, V_0, A_0)$ было минимальным. Поэтому представляет особый интерес значение μ , при котором достигается минимальное значение $\chi(R|R_0, V_0, A_0)$.

Формула (1.1.24) позволяет также найти характеристики отдельных оценок дальности, скорости и ускорения при наличии конечного числа произвольных неинформативных параметров. Для этого в матрице $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ (1.1.24) достаточно удалить строки и столбцы, соответствующие априори известным информативным параметрам, сократив ее размерность до числа неизвестных информативных параметров. Если отсутствуют неинформативные параметры, то в имеющихся формулах следует положить $\rho_p = 0$. Приведем соответствующие результаты (вычисления приведены в статье [127]; в случае $\rho_p = 0$ они совпадают с результатами [90, 93]). Обозначения в приводимых ниже формулах аналогичны использовавшимся выше: например, $D(R|R_0, V_0, \vec{l}_0)$ есть дисперсия совместно-эффективной оценки параметра R , а $R(R, V|R_0, V_0, \vec{l}_0)$ — коэффициент корреляции совместно-эффективных оценок R и V при условии, что неизвестны значения параметров R_0, V_0 , а значение параметра A_0 известно, оценка параметров производится в условиях медленных флуктуаций, при этом $D(R|R_0, V_0)$ есть дисперсия совместно-эффективной оценки параметра R при условии неизвестного значения скорости, а $R(R, V|R_0, V_0)$ — коэффициент корреляции совместно-эффективных оценок R и V в условиях отсутствия априорной параметрической неопределенности и при известном значении ускорения. Величина χ является отношением дисперсий в случае наличия неинформативных параметров к случаю их отсутствия, см. формулу (1.1.27). Напомним, что M_ν определяются формулой (1.1.13), r_k — формулами (1.1.14)–(1.1.16),

α — формулой (1.1.9), а ρ_p — формулой (1.1.23). Итак, имеем

$$D(R|R_0, V_0, \vec{l}_0) = \frac{c^2}{4\alpha} \frac{M_0 M_2 - \rho_p M_1^2}{(1 - \rho_p) M_0 (M_0 M_2 - M_1^2)},$$

$$D(V|R_0, V_0, \vec{l}_0) = \frac{c^2}{4\alpha \vartheta^2} \frac{M_0}{M_0 M_2 - M_1^2},$$

$$R(R, V|R_0, V_0, \vec{l}_0) = -\sqrt{\frac{M_1^2(1 - \rho_p)}{M_0 M_2 - \rho_p M_1^2}},$$

$$D(R|R_0, V_0) = \frac{c^2}{4\alpha} \frac{M_2}{M_0 M_2 - M_1^2},$$

$$D(V|R_0, V_0) = \frac{c^2}{4\alpha \vartheta^2} \frac{M_0}{M_0 M_2 - M_1^2},$$

$$R(R, V|R_0, V_0) = -r_2 = -\frac{M_1}{\sqrt{M_0 M_2}},$$

$$\chi(R|R_0, V_0) = \frac{D(R|R_0, V_0, \vec{l}_0)}{D(R|R_0, V_0)} = \frac{M_0 M_2 - \rho_p M_1^2}{(1 - \rho_p) M_0 M_2}, \quad (1.1.31)$$

$$\chi(V|R_0, V_0) = \frac{D(V|R_0, V_0, \vec{l}_0)}{D(V|R_0, V_0)} = 1, \quad (1.1.32)$$

$$D(R|R_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{c^2}{4\alpha} \frac{M_0 M_4 - \rho_p M_2^2}{(1 - \rho_p) M_0 (M_0 M_4 - M_2^2)},$$

$$D(A|R_0, A_0, \vec{l}_0) = \frac{c^2}{\alpha \vartheta^4} \frac{M_0}{M_0 M_4 - M_2^2},$$

$$R(R, A|R_0, A_0, \vec{l}_0) = -\sqrt{\frac{M_2^2(1 - \rho_p)}{M_0 M_4 - \rho_p M_2^2}},$$

$$D(R|R_0, A_0) = \frac{c^2}{4\alpha} \frac{M_4}{M_0 M_4 - M_2^2},$$

$$D(A|R_0, A_0) = \frac{c^2}{\alpha \vartheta^4} \frac{M_0}{M_0 M_4 - M_2^2},$$

$$R(R, A|R_0, A_0) = -r_4 = -\frac{M_2}{\sqrt{M_0 M_4}},$$

$$\chi(R|R_0, A_0) = \frac{D(R|R_0, A_0, \vec{l}_0)}{D(R|R_0, A_0)} = \frac{M_0 M_4 - \rho_p M_2^2}{(1 - \rho_p) M_0 M_4}, \quad (1.1.33)$$

$$\chi(A|R_0, A_0) = \frac{D(A|R_0, A_0, \vec{l}_0)}{D(A|R_0, A_0)} = 1, \quad (1.1.34)$$

$$\begin{aligned}
D(V|V_0, A_0, \vec{l}_0) &= \frac{c^2}{4\alpha\vartheta^2} \frac{M_0M_4 - \rho_p M_2^2}{((M_0M_4 + 2\rho_p M_1M_3)M_2 - M_0M_3^2 - \rho_p M_1^2M_4 - \rho_p M_2^3)}, \\
D(A|V_0, A_0, \vec{l}_0) &= \frac{c^2}{\alpha\vartheta^4} \frac{M_0M_2 - \rho_p M_1^2}{((M_0M_4 + 2\rho_p M_1M_3)M_2 - M_0M_3^2 - \rho_p M_1^2M_4 - \rho_p M_2^3)}, \\
R(V, A|V_0, A_0, \vec{l}_0) &= -(M_0M_3 - \rho_p M_1M_2) \sqrt{\frac{1}{(M_0M_4 - \rho_p M_2^2)(M_0M_2 - \rho_p M_1^2)}}, \\
D(V|V_0, A_0) &= \frac{c^2}{4\alpha\vartheta^2} \frac{M_4}{M_2M_4 - M_3^2}, \\
D(A|V_0, A_0) &= \frac{c^2}{\alpha\vartheta^4} \frac{M_2}{M_2M_4 - M_3^2}, \\
R(V, A|V_0, A_0) &= -r_3 = -\frac{M_3}{\sqrt{M_2M_4}}, \\
\chi(V|V_0, A_0) &= \frac{D(V|V_0, A_0, \vec{l}_0)}{D(V|V_0, A_0)} = \\
&= \frac{M_0M_4 - \rho_p M_2^2}{((M_0M_4 + 2\rho_p M_1M_3)M_2 - M_0M_3^2 - \rho_p M_1^2M_4 - \rho_p M_2^3)} \frac{M_2M_4 - M_3^2}{M_4}, \\
&\quad (1.1.35) \\
\chi(A|V_0, A_0) &= \frac{D(A|V_0, A_0, \vec{l}_0)}{D(A|V_0, A_0)} = \\
&= \frac{M_0M_2 - \rho_p M_1^2}{((M_0M_4 + 2\rho_p M_1M_3)M_2 - M_0M_3^2 - \rho_p M_1^2M_4 - \rho_p M_2^3)} \frac{M_2M_4 - M_3^2}{M_2}, \\
&\quad (1.1.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(R|R_0, \vec{l}_0) &= \frac{c^2}{4\alpha} \frac{1}{M_0(1 - \rho_p)}, \\
D(R|R_0) &= \frac{c^2}{4\alpha} \frac{1}{M_0}, \\
\chi(R|R_0) &= \frac{D(R|R_0, \vec{l}_0)}{D(R|R_0)} = \frac{1}{1 - \rho_p}, \\
&\quad (1.1.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(V|V_0, \vec{l}_0) &= \frac{c^2}{4\alpha\vartheta^2} \frac{1}{M_2 - \rho_p \frac{M_1^2}{M_0}}, \\
D(V|V_0) &= \frac{c^2}{4\alpha\vartheta^2} \frac{1}{M_2}, \\
\chi(V|V_0) &= \frac{D(V|V_0, \vec{l}_0)}{D(V|V_0)} = \frac{1}{1 - \rho_p \frac{M_1^2}{M_0M_2}}, \\
&\quad (1.1.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(A|A_0, \vec{l}_0) &= \frac{\alpha\vartheta^4}{c^2} \left(M_4 - \rho_p \frac{M_2^2}{M_0} \right), \\
D(A|A_0) &= \frac{c^2}{\alpha\vartheta^4} \frac{1}{M_4}, \\
\chi(A|A_0) &= \frac{D(A|A_0, \vec{l}_0)}{D(A|A_0)} = \frac{1}{1 - \rho_p \frac{M_2^2}{M_0 M_4}}. \tag{1.1.39}
\end{aligned}$$

Теорема 1.1.3. Каждая из величин (1.1.28), (1.1.31), (1.1.33), (1.1.38) и (1.1.39) не превосходит

$$\frac{1}{1 - \rho_p}.$$

Замечание 1. Для величин (1.1.35) и (1.1.36) теорема 1.1.3 не верна, поскольку при $\mu = (N - 1)/2$ эти величины тождественно равны 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для величины (1.1.28) имеем

$$\begin{aligned}
\chi(R|R_0, V_0, A_0) &= \frac{1 - r_3^2 - \rho_p(r_2^2 + r_4^2 + 2r_2r_3r_4)}{(1 - \rho_p)(1 - r_3^2)} \leq \\
&\leq \frac{1 - r_3^2}{(1 - \rho_p)(1 - r_3^2)} = \frac{1}{1 - \rho_p}.
\end{aligned}$$

Для величины (1.1.31)

$$\chi(R|R_0, V_0) = \frac{M_0 M_2 - \rho_p M_1^2}{(1 - \rho_p) M_0 M_2} \leq \frac{M_0 M_2}{(1 - \rho_p) M_0 M_2} = \frac{1}{1 - \rho_p}.$$

Доказательство для величины (1.1.33) проводится аналогично.

Рассмотрим случай (1.1.38). Имеем (в силу леммы 1.1.1)

$$\chi(V|V_0) = \frac{1}{1 - \rho_p \frac{M_1^2}{M_0 M_2}} = \frac{1}{1 - \rho_p r_2^2} \leq \frac{1}{1 - \rho_p}.$$

Случай (1.1.39) разбирается аналогично. \square

Выше было показано, что характеристики точности оценок дальности, скорости и ускорения в условия параметрической неопределенности могут быть описаны в терминах единственной величины ρ_p , определяемой формулой (1.1.23). Поэтому важно иметь для нее явное описание.

Введем вспомогательные обозначения:

$$\tilde{R}_{ij} = \tilde{R}_{ij}(\vec{l}_0) = \frac{\Delta_{ij}}{\sqrt{\Delta_{ii} \Delta_{jj}}}, \tag{1.1.40}$$

где Δ_{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице $(\gamma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p}$. Они имеют смысл коэффициентов корреляции совместно-эффективных оценок неинформативных параметров l_i и l_j при оценке всех неинформативных параметров \vec{l} при условии, что значения R_0 , V_0 и A_0 информативных параметров известны. Действительно матрица $\mathbf{D} = N(\gamma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,p}$ является блоком информационной матрицы Фишера, соответствующей параметрам \vec{l} . Поэтому если вычислить матрицу Фишера при условии, что значения параметров R_0 , V_0 и A_0 известны, то получим в точности матрицу \mathbf{D} . Поскольку корреляционная матрица совместных оценок есть обратная матрица к матрице Фишера, то величины $\frac{1}{N}\Delta_{ij}$ есть ковариации между оценками параметров l_i и l_j , а $\frac{1}{N}\Delta_{ii}$ и $\frac{1}{N}\Delta_{jj}$ — дисперсии этих оценок.

Отметим очевидное следствие формулы (1.1.40):

$$\tilde{R}_{ii} = 1.$$

Числа

$$R_{ti} = R_{ti}(\vec{l}_0) = -\frac{B_{i1}}{\sqrt{A_{11} \cdot D_{ii}}} = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha \cdot \gamma_{ii}}} \quad (1.1.41)$$

имеют смысл коэффициентов корреляции между совместно-эффективными оценками дальности R или, что равносильно, временного положения и параметра l_i при условии, что все остальные параметры известны. В самом деле, из полной информационной матрицы Фишера $\hat{\mathbf{I}}$ можно получить информационную матрицу Фишера для оценок параметров R и l_i при условии, что остальные параметры известны. Вырезая из информационной матрицы Фишера соответствующий блок, получаем

$$\hat{\mathbf{I}}_{\lambda l_i} = \begin{pmatrix} A_{11} & B_{i1} \\ B_{i1} & D_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{c^2}N & -\frac{2}{c}N\beta_i \\ -\frac{2}{c}N\beta_i & N\gamma_{ii} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{c^2} & -\frac{2}{c}\beta_i \\ -\frac{2}{c}\beta_i & \gamma_{ii} \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу:

$$(\hat{\mathbf{I}}_{\lambda l_i})^{-1} = \frac{1}{N^2(\frac{\alpha}{c^2}\gamma_{ii} - \frac{4}{c^2}\beta_i^2)} \begin{pmatrix} \gamma_{ii} & \frac{2}{c}\beta_i \\ \frac{2}{c}\beta_i & \frac{\alpha}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Из этой формулы видно, что ковариация равна $\frac{1}{N^2(\frac{\alpha}{c^2}\gamma_{ii} - \frac{4}{c^2}\beta_i^2)}\frac{2}{c}\beta_i$, а дисперсии равны $\frac{1}{N^2(\frac{\alpha}{c^2}\gamma_{ii} - \frac{4}{c^2}\beta_i^2)}\gamma_{ii}$ и $\frac{1}{N^2(\frac{\alpha}{c^2}\gamma_{ii} - \frac{4}{c^2}\beta_i^2)}\frac{\alpha}{c^2}$ соответственно. Таким образом, для коэффициента корреляции получаем представление (1.1.41).

Наконец, числа

$$\varkappa_i^2 = \varkappa_i^2(\vec{l}_0) = \Delta_{ii}\gamma_{ii}$$

представляют собой отношение дисперсии оценки параметра l_i при условии, что неизвестны остальные неинформативные параметры, но известны параметры движения R , V и A , и дисперсии оценки того же параметра l_i при условии, что известны все параметры, кроме l_i , как информативные, так и неинформативные. Действительно, как отмечалось выше, $\frac{1}{N}\Delta_{ii}$ есть дисперсия оценки параметра l_i при условии, что остальные неинформативные параметры неизвестны, но известны параметры R , V и A . Чтобы рассчитать дисперсию оценки параметра l_i при условии, что все остальные параметры (т. е. прочие неинформативные параметры, а также R , V и A) известны, рассмотрим блок размера 1×1 информационной матрицы Фишера, соответствующий такой оценке. Он состоит из единственного числа $N\gamma_{ii}$, а обратная к нему матрица состоит из числа $\frac{1}{N\gamma_{ii}}$, имеющего смысл нужной дисперсии. Отсюда — доказываемая формула.

Используя введенные обозначения, преобразуем формулу (1.1.23) к виду

$$\rho_p = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p R_{ti} \tilde{R}_{ij} R_{tj} \varkappa_i \varkappa_j. \quad (1.1.42)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \rho_p &= A^{-1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p B_i \Delta_{ij} B_j = \\ &= A^{-1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p R_{ti} \sqrt{A \cdot D_{ii}} \tilde{R}_{ij} \sqrt{\Delta_{ii} \Delta_{jj}} R_{tj} \sqrt{A \cdot D_{jj}} = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p R_{ti} \sqrt{D_{ii}} \tilde{R}_{ij} \sqrt{\Delta_{ii} \Delta_{jj}} R_{tj} \sqrt{D_{jj}} = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p R_{ti} \tilde{R}_{ij} R_{tj} \sqrt{\Delta_{ii} \gamma_{ii}} \sqrt{\Delta_{jj} \gamma_{jj}} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p R_{ti} \tilde{R}_{ij} R_{tj} \varkappa_i \varkappa_j. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее случаи $p = 1, 2, 3$.

При $p = 1$ (случай одного неинформативного параметра) имеем $\Delta_{ii} = 1/\gamma_{ii}$, откуда

$$\varkappa_1 = 1.$$

Подставляя это равенство и формулу $\tilde{R}_{11} = 1$ в (1.1.42), получаем

$$\rho_1 = R_{t1}^2.$$

При $p = 2$ (случай двух неинформативных параметров) в силу правила вычисления обратной матрицы имеем

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}} \times \begin{pmatrix} \Delta_{22} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{11} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\varkappa_1^2 = \Delta_{11}\gamma_{11} = \frac{\gamma_{11}\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}} = \frac{R_{11}R_{22}}{R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}} = \frac{1}{1 - R_{12}^2},$$

где

$$R_{ij} = -\frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{\gamma_{ii}\gamma_{jj}}}.$$

И аналогично

$$\varkappa_2^2 = \frac{1}{1 - R_{12}^2}.$$

Подставляя в формулу (1.1.42), получаем

$$\rho_2 = R_{t_1}^2 \varkappa_1^2 + R_{t_2}^2 \varkappa_2^2 + 2R_{t_1}R_{t_2}R_{12}\varkappa_1\varkappa_2 = \frac{R_{t_1}^2 + R_{t_2}^2 + 2R_{t_1}R_{t_2}R_{12}}{1 - R_{12}^2}.$$

При $p = 3$ (случай трех неинформативных параметров) в силу правила вычисления обратной матрицы имеем

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{11}\Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{13}\Delta_{22}\Delta_{31} + \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{31} + \Delta_{13}\Delta_{21}\Delta_{32} - \Delta_{11}\Delta_{23}\Delta_{32} - \Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{33}} \times \begin{pmatrix} \Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{23}\Delta_{32} & \Delta_{13}\Delta_{32} - \Delta_{12}\Delta_{33} & \Delta_{12}\Delta_{23} - \Delta_{13}\Delta_{22} \\ \Delta_{23}\Delta_{31} - \Delta_{21}\Delta_{33} & \Delta_{11}\Delta_{33} - \Delta_{13}\Delta_{31} & \Delta_{13}\Delta_{21} - \Delta_{11}\Delta_{23} \\ \Delta_{21}\Delta_{32} - \Delta_{22}\Delta_{31} & \Delta_{12}\Delta_{31} - \Delta_{11}\Delta_{32} & \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varkappa_1^2 &= \Delta_{11}\gamma_{11} = \\ &= \frac{\gamma_{11}(\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}^2)}{\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{13}\gamma_{22}\gamma_{31} + \gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31} + \gamma_{13}\gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_{11}\gamma_{23}\gamma_{32} - \gamma_{12}\gamma_{21}\gamma_{33}} = \\ &= \frac{R_{11}(R_{22}R_{33} - R_{23}^2)}{R_{11}R_{22}R_{33} - R_{13}R_{22}R_{31} + R_{12}R_{23}R_{31} + R_{13}R_{21}R_{32} - R_{11}R_{23}R_{32} - R_{12}R_{21}R_{33}} = \\ &= \frac{1 - R_{23}^2}{1 - 2R_{12}R_{23}R_{13} - R_{12}^2 - R_{13}^2 - R_{23}^2}, \end{aligned}$$

где

$$R_{ij} = -\frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{\gamma_{ii}\gamma_{jj}}}$$

— коэффициент корреляции между совместно-эффективными оценками параметров l_i и l_j при условии, что все остальные параметры известны.

В силу симметрии имеем

$$\begin{aligned}\varkappa_2^2 &= \frac{1 - R_{13}^2}{1 - 2R_{12}R_{23}R_{31} - R_{13}^2 - R_{23}^2 - R_{12}^2}, \\ \varkappa_3^2 &= \frac{1 - R_{12}^2}{1 - 2R_{12}R_{23}R_{31} - R_{13}^2 - R_{23}^2 - R_{12}^2}.\end{aligned}$$

Подставляя в формулу (1.1.42), получаем

$$\begin{aligned}\rho_3 &= R_{t1}^2 \varkappa_1^2 + R_{t2}^2 \varkappa_2^2 + R_{t3}^2 \varkappa_3^2 + \\ &+ 2R_{t1}R_{t2}R_{12}\varkappa_1\varkappa_2 + 2R_{t1}R_{t3}R_{13}\varkappa_1\varkappa_3 + 2R_{t2}R_{t3}R_{23}\varkappa_2\varkappa_3 = \\ &= \frac{1}{1 - 2R_{12}R_{23}R_{13} - R_{13}^2 - R_{23}^2 - R_{12}^2} \times \\ &\times \left(R_{t1}^2(1 - R_{23}^2) + R_{t2}^2(1 - R_{13}^2) + R_{t3}^2(1 - R_{12}^2) + \right. \\ &+ 2R_{t1}R_{t2}R_{12}\sqrt{(1 - R_{23}^2)(1 - R_{13}^2)} + \\ &+ 2R_{t1}R_{t3}R_{13}\sqrt{(1 - R_{23}^2)(1 - R_{12}^2)} + \\ &\left. + 2R_{t2}R_{t3}R_{23}\sqrt{(1 - R_{12}^2)(1 - R_{13}^2)} \right).\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}\rho_3 &= \frac{1}{1 - 2R_{12}R_{23}R_{13} - R_{13}^2 - R_{23}^2 - R_{12}^2} \times \\ &\times \left(R_{t1}^2(1 - R_{23}^2) + R_{t2}^2(1 - R_{13}^2) + R_{t3}^2(1 - R_{12}^2) + \right. \\ &+ 2R_{t1}R_{t2}(R_{12} + R_{23}R_{13}) + \\ &+ 2R_{t1}R_{t3}(R_{13} + R_{23}R_{12}) + \\ &\left. + 2R_{t2}R_{t3}(R_{23} + R_{12}R_{13}) \right).\end{aligned}$$

В качестве примера найдем проигрыш в точности совместно-эффективных оценок параметров движения, когда форма интенсивности одного оптического импульса последовательности (1.1.2) описывается выра-

жением

$$s(t, \vec{l}) = a \left\{ \eta(t) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\Delta}\right) \right] - \eta(t - \tau) \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{\Delta}\right) \right] \right\}, \quad (1.1.43)$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$\vec{l} = (a, \tau, \Delta),$$

где τ — длительность возрастающей части импульса, Δ характеризует длительность фронта импульса, a — амплитудный множитель. При оценке параметров движения цели с использованием последовательности импульсов вида (1.1.43) каждый импульс имеет до 3 неинформативных параметров ($p \leq 3$) — a , τ и Δ . Отметим, что импульс (1.1.43) можно представить в виде

$$s(t, \vec{l}) = af\left(\frac{t}{\Delta}, \frac{\Delta}{\tau}\right),$$

где

$$f(x, y) = \eta(x) [1 - \exp(-x)] - \eta\left(x - \frac{1}{y}\right) \left[1 - \exp\left(-\left(x - \frac{1}{y}\right)\right) \right].$$

График интенсивности импульса $f(x, y)$ показан на рис. 1.1.2.

Форму интенсивности, близкую к (1.1.43), имеет короткий оптический импульс в результате его уширения при распространении в рассеивающей среде [21].

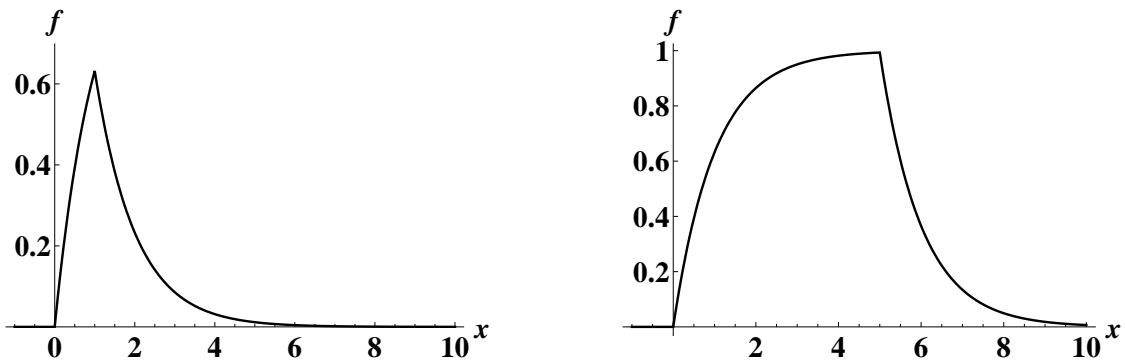


Рис. 1.1.2: График интенсивности импульса $f(x, y)$ при различных значениях параметра $y = \Delta/\tau$. Слева: $y = 1$; справа: $y = \frac{1}{5}$

Проигрыш в точности оценки дальности вследствие наличия неинформативных параметров определяется величиной (1.1.28). В силу теоремы 1.1.3, как правило, наибольшим является проигрыш в точности оценки дальности, который характеризуется величиной $(1 - \rho_p)^{-1}$ (1.1.37). Приведем графики этой величины для некоторых характерных случаев.

На рис. 1.1.3 приведена зависимость проигрыша $\chi_R(R|R_0) = (1 - \rho_p)^{-1}$ (1.1.37) в точности оценки от параметра $y = \Delta/\tau$, характеризующего отношение длительности фронта импульса к длительности импульса, для различных наборов неинформативных параметров при $q = a/\nu = 1$. Кривая 1 иллюстрирует проигрыш в точности оценки, когда неинформативным является параметр a . Как видно, наличие неинформативного параметра a не ухудшает характеристик совместно-эффективных оценок параметров движения. Кривые 2 и 3 иллюстрируют проигрыш в точности оценки, когда неинформативным является один параметр, соответственно, τ или Δ ; 4 — a и τ ; 5 — a и Δ ; 6 — τ и Δ ; 7 — все три параметра a , τ и Δ .

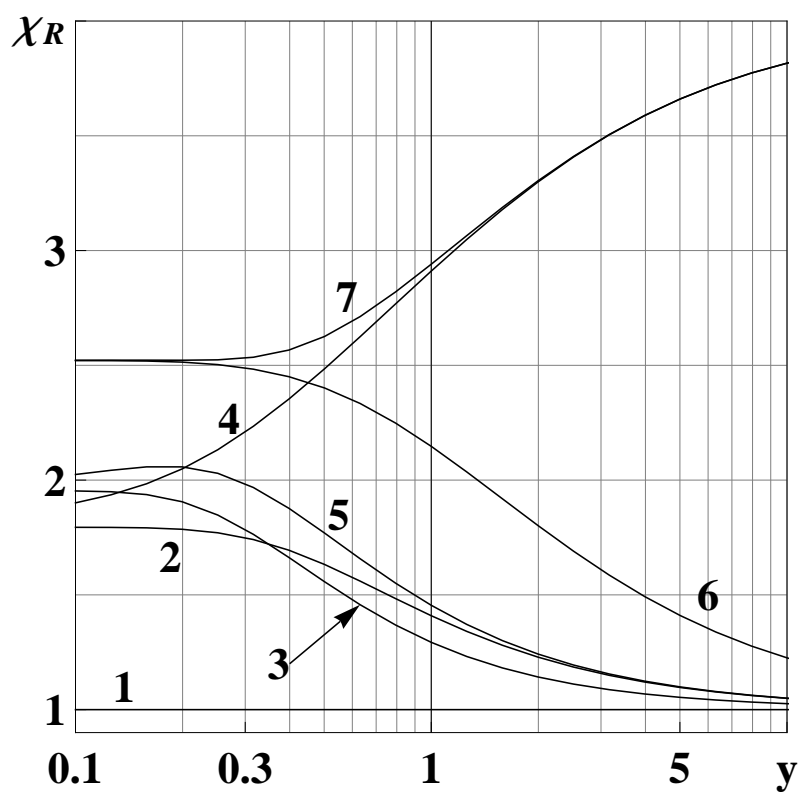
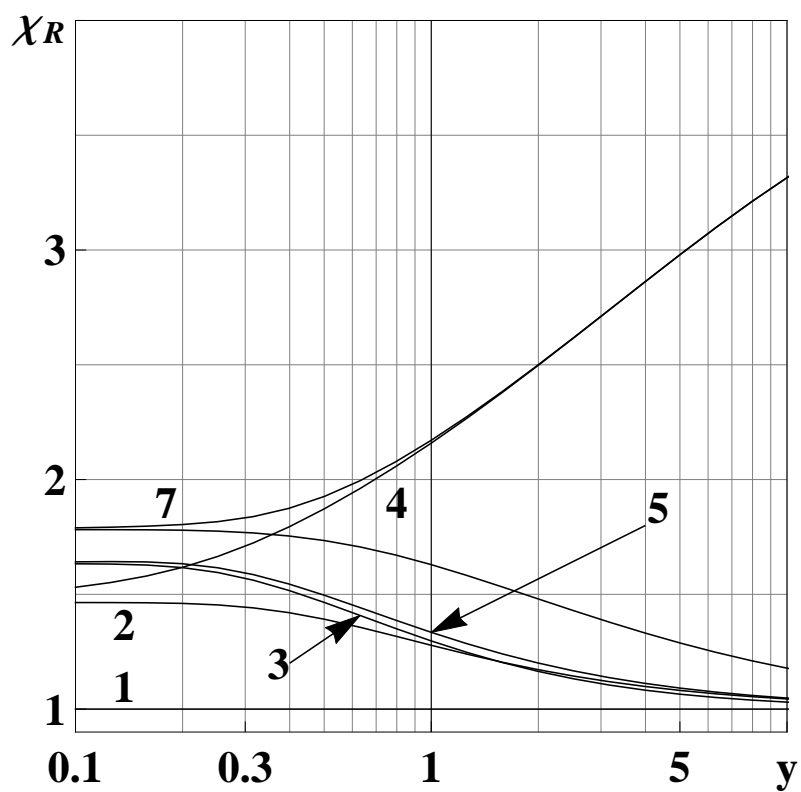
На рис. 1.1.4 приведена зависимость проигрыша $\chi_R(R|R_0) = (1 - \rho_p)^{-1}$ (1.1.37) в точности оценки от параметра $y = \Delta/\tau$, характеризующего отношение длительности фронта импульса к длительности импульса, для различных наборов неинформативных параметров при $q = a/\nu = 10$. Обозначения кривых на рис. 1.1.4 соответствуют приведенным на рис. 1.1.3.

На рис. 1.1.5 приведена зависимость проигрыша $\chi_R(R|R_0) = (1 - \rho_p)^{-1}$ (1.1.37) в точности оценки от параметра $y = \Delta/\tau$ для некоторых наборов неинформативных параметров при различных значениях параметра q . Кривые 1, 2, 3 иллюстрируют проигрыш в точности оценки, когда неинформативным является параметр Δ , при значениях параметра $q = a/\nu = 0.1, 1, 10$ соответственно. Кривые 4, 5, 6 — когда неинформативными являются параметры a и τ , при значениях параметра $q = a/\nu = 0.1, 1, 10$. Кривые 7, 8, 9 — когда неинформативными являются a , τ и Δ , при значениях параметра $q = a/\nu = 0.1, 1, 10$.

Сопоставление кривых на рис. 1.1.3, 1.1.4 и 1.1.5 позволяет определить влияние наличия различных неинформативных параметров импульса (1.1.43) на точность совместно-эффективных оценок параметров движения при быстрых флуктуациях цели. Из рис. 1.1.3, 1.1.4 и 1.1.5 видно, что с увеличением параметра y проигрыш из-за наличия некоторых неинформативных параметров ($\{\tau\}$, $\{\Delta\}$, $\{a, \Delta\}$, $\{\tau, \Delta\}$) уменьшается, а из-за некоторых наборов ($\{a, \tau\}$ и $\{a, \tau, \Delta\}$) — растет вплоть до значения 4.

Согласно рис. 1.1.3, 1.1.4 и 1.1.5, наличие неинформативных параметров у импульса (1.1.43) может привести к увеличению дисперсий совместно-эффективных оценок параметров движения цели в 4 раза.

На рис. 1.1.6 приведена зависимость проигрыша $\chi_R(R|R_0) = (1 - \rho_p)^{-1}$ (1.1.37) в точности оценки от параметра q для различных наборов неинформативных параметров при $y = 1$. Обозначения кривых на рис. 1.1.6 соответствуют приведенным на рис. 1.1.3. Согласно рис. 1.1.6 проигрыш в точности оценки параметров движения вследствие наличия неинформативных параметров несколько уменьшается с ростом отношения сигнал-фон q .

Рис. 1.1.3: Зависимость χ_R от y при $q = 1$ Рис. 1.1.4: Зависимость χ_R от y при $q = 10$

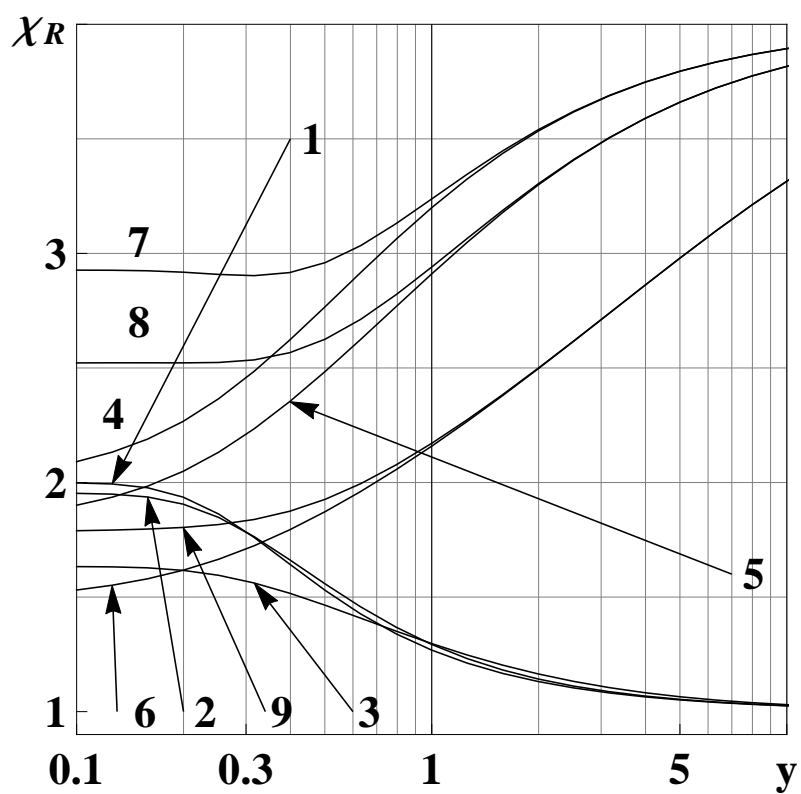


Рис. 1.1.5: Зависимость χ_R от y при $q = 0.1, 1, 10$

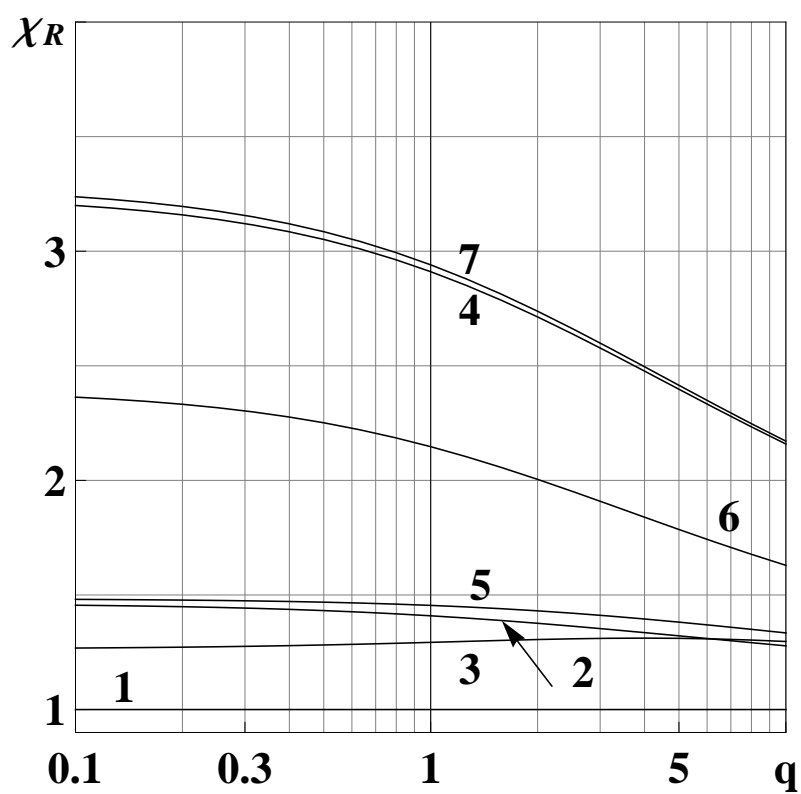


Рис. 1.1.6: Зависимость χ_R от q при $y = 1$

Покажем, что применение метода максимального правдоподобия [55] приводит к асимптотически эффективным оценкам параметров движения, точность которых исследована выше. Как и выше, с целью упрощения выкладок при выводе общих формул будем считать, что набор параметров l_i , $i = 1, \dots, p$, включает как информативные, так и неинформативные. Будем искать положение максимума по $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_p)$ логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП)

$$L(\vec{l}) = \ln \lambda(s(t, \vec{l})) = \int_0^T \ln(1 + s(t, \vec{l})/\nu) d\pi(t) - \int_0^T s(t, \vec{l}) dt. \quad (1.1.44)$$

Таким образом, в соответствии с методом максимального правдоподобия в качестве оценки параметра \vec{l} будем использовать величину

$$\widehat{\vec{l}} = \arg \sup_{\vec{l}} L(\vec{l}). \quad (1.1.45)$$

Сигнальной функцией называют математическое ожидание логарифма ФОП (1.1.44) в предположении, что принимаемая реализация $\pi(t)$ соответствует истинному значению параметра \vec{l}_0 . Сигнальную функцию обозначают символом $\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})$. В силу [12, формула (3.7.4)] математическое ожидание первого интеграла в (1.1.44) в предположении, что обрабатываемый сигнал $\pi(t)$ имеет интенсивность $s(t, \vec{l}_0) + \nu$, соответствующую значению параметра \vec{l}_0 , равно

$$\int_0^T \ln(1 + s(t, \vec{l})/\nu) (s(t, \vec{l}_0) + \nu) dt.$$

Второй интеграл в (1.1.44) случайной величиной не является. Поэтому для сигнальной функции получаем представление

$$\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) = \int_0^T \ln(1 + s(t, \vec{l})/\nu) (s(t, \vec{l}_0) + \nu) dt - \int_0^T s(t, \vec{l}) dt. \quad (1.1.46)$$

Шумовой функцией называют функцию $\widehat{N}(\vec{l})$, определяемую из соотношения

$$L(\vec{l}) = \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) + \widehat{N}(\vec{l}).$$

Вычисляется шумовая функция по формуле

$$\widehat{N}(\vec{l}) = L(\vec{l}) - \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}). \quad (1.1.47)$$

Иными словами, $\widehat{N}(\vec{l})$ есть отклонение логарифма ФОП от его математического ожидания. Подставляя в эту формулу имеющиеся представления (1.1.44) и (1.1.46) для $L(\vec{l})$ и $\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})$, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{N}(\vec{l}) &= L(\vec{l}) - \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) = \\ &= \int_0^T \ln(1 + s(t, \vec{l})/\nu) (\pi'(t) - s(t, \vec{l}_0) - \nu) dt.\end{aligned}\quad (1.1.48)$$

Отметим, что поскольку сигнальная функция является математическим ожиданием логарифма ФОП, а шумовая — разностью логарифма ФОП и сигнальной функции (формула (1.1.47)), математическое ожидание шумовой функции равно нулю.

В силу [12, формула (3.7.27)] и формулы (1.1.48) для корреляционной функции шумовой функции имеем

$$\begin{aligned}B_{SN}(\vec{l}_1, \vec{l}_2) &= \langle \widehat{N}(\vec{l}_1) \widehat{N}(\vec{l}_2) \rangle = \\ &= \nu \int_0^T \ln(1 + s(t, \vec{l}_1)/\nu) \ln(1 + s(t, \vec{l}_2)/\nu) (1 + s(t, \vec{l}_0)/\nu) dt.\end{aligned}\quad (1.1.49)$$

Лемма 1.1.4. *Справедливо тождество ($\vec{l} = (l_1, \dots, l_p)$ — векторный параметр)*

$$\left. \frac{\partial^2 \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right|_{\vec{l}=\vec{l}_0} = - \left. \frac{\partial^2 H(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \right|_{\vec{l}_1, \vec{l}_2=\vec{l}_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сводится к непосредственным вычислениям. \square

Таким образом, для информационной матрицы Фишера получаем представление

$$\widehat{\mathbf{I}} = \left[\left. \frac{\partial^2 H(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \right|_{\vec{l}_1, \vec{l}_2=\vec{l}_0} \right]_{i,j=1,\dots,p} = \left[\left. - \frac{\partial^2 \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right|_{\vec{l}=\vec{l}_0} \right]_{i,j=1,\dots,p}.\quad (1.1.50)$$

Найдем положение максимума логарифма ФОП (1.1.44), которое используется в качестве оценки (1.1.45).

Положим

$$m_S = \max_{\vec{l}} \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) = \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_0), \quad \sigma_{SN}^2 = \langle (\widehat{N}(\vec{l}_0))^2 \rangle,$$

где символ $\langle \cdot \rangle$ означает математическое ожидание, $\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})$ — сигнальная функция (1.1.46), $\widehat{N}(\vec{l}_0)$ — шумовая функция (1.1.48). Введем в рас-

смотрение параметр отношение сигнал-шум (ОСШ) [55]

$$z_S = \frac{m_S}{\sigma_{SN}} = \frac{\max_{\vec{l}} \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\sqrt{\langle (\widehat{N}(\vec{l}_0))^2 \rangle}}$$

и обратную к нему величину

$$\varepsilon = \frac{1}{z_S}.$$

Если ОСШ велико, то ε мало.

Чтобы воспользоваться методом малого параметра, рассмотрим нормированные сигнальную и шумовую функции по формулам

$$S(\vec{l}_0, \vec{l}) = \frac{1}{m_S} \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}), \quad N(\vec{l}) = \frac{1}{\sigma_{SN}} \widehat{N}(\vec{l}).$$

Таким образом, максимум по \vec{l} нормированной сигнальной функции $S(\vec{l}_0, \vec{l})$ равен 1, а дисперсия нормированной шумовой функции $N(\vec{l})$ также равна 1.

Логарифм ФОП выражается через нормированные функции по формуле

$$\begin{aligned} L(\vec{l}) &= \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) + \widehat{N}(\vec{l}) = m_S S(\vec{l}_0, \vec{l}) + \sigma_{SN} N(\vec{l}) = \\ &= m_S [S(\vec{l}_0, \vec{l}) + \varepsilon N(\vec{l})]. \end{aligned}$$

Поскольку m_S является константой, вместо максимума $L(\vec{l})$ можно искать максимум нормированного логарифма ФОП

$$M(\vec{l}) = S(\vec{l}_0, \vec{l}) + \varepsilon N(\vec{l}). \quad (1.1.51)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{I} = \frac{1}{m_S} \left[\frac{\partial^2 H(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \Big|_{\vec{l}_1, \vec{l}_2 = \vec{l}_0} \right]_{i,j=1,\dots,p} = \left[-\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\vec{l} = \vec{l}_0} \right]_{i,j=1,\dots,p}.$$

Пусть сигнал зависит от вектора неизвестных параметров \vec{l} , а \vec{l}_0 — вектор, состоящий из истинных значений параметров входного сигнала. Будем искать оценку $\widehat{\vec{l}}$ значения \vec{l}_0 , исходя из условия максимума нормированного логарифма ФОП (1.1.51). В точке максимума все частные

производные этой функции должны обращаться в ноль. Найдем $\widehat{\vec{l}}$ из уравнений правдоподобия [12, с. 41]

$$\left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} + \varepsilon \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\widehat{\vec{l}}} = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.1.52)$$

При фиксированной принятой реализации $\pi(t)$ функции S и N можно считать заданными. Очевидно, решение $\widehat{\vec{l}}$ уравнения (1.1.52) является функцией параметра ε . Напомним, что рассматривается регулярный случай. Поэтому функции S и N дифференцируемы, следовательно, следует ожидать, что и зависимость $\widehat{\vec{l}}$ от ε также дифференцируема. Таким образом, зависимость $\widehat{\vec{l}}$ от ε можно представить в виде

$$\widehat{\vec{l}} = \vec{l}_0 + \varepsilon \vec{l}_1 + \vec{o}(\varepsilon).$$

В этом выражении каждая координата вектора $\vec{o}(\varepsilon)$ — величина большего порядка малости, чем ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условимся координаты вектора \vec{l}_1 обозначать $l_{1\alpha}$, и соответственно l_α — для вектора \vec{l} .

Выражение, стоящее в левой части каждого из уравнений (1.1.52), разложим по формуле Тейлора по степеням \vec{l}_1 до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} + \varepsilon \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} + \\ & + \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial^2 N(\vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} (\varepsilon l_{1\alpha} + o(\varepsilon)) = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и оставим только члены порядка ε :

$$\left[\frac{\partial S(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} + \varepsilon \left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} l_{1\alpha} + o(\varepsilon) = 0.$$

В силу единственности разложения в ряд Тейлора коэффициенты при одинаковых степенях ε равны:

$$\left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} = 0, \quad (1.1.53)$$

$$\left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} + \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} l_{1\alpha} = 0. \quad (1.1.54)$$

Здесь каждая строка представляет собой p уравнений, соответствующих различным $i = 1, 2, \dots, p$.

Первое уравнение (1.1.53) выполняется автоматически, что показывают прямые вычисления. Выражение $-\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} l_{1\alpha}$ из второго уравнения (1.1.54) представляет собой операцию умножения вектора с координатами $l_{1\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, p$, на матрицу

$$\mathbf{I} = \left(- \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0} \right)_{i,\alpha=1,\dots,p}.$$

Набор чисел $\left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0}$, $i = 1, \dots, p$, — случайный вектор. Таким образом, равенство (1.1.54) является системой линейных уравнений со случайным свободным членом. Его решением является вектор

$$\vec{l}_1 = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{n}, \quad (1.1.55)$$

где \mathbf{n} — вектор с координатами $\left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_0}$, $i = 1, \dots, p$. Следовательно, для вектора $\widehat{\vec{l}}$, представляющего собой оценку максимального правдоподобия параметров рассеянного сигнала, получаем представление

$$\widehat{\vec{l}} = \vec{l}_0 + \varepsilon \mathbf{I}^{-1} \mathbf{n},$$

где векторная случайная величина \mathbf{n} состоит из координат

$$n_i = \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_0} = \frac{1}{\sigma_{SN}} \int_0^T \frac{\partial s(t, \vec{l})}{\partial l_i} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_0} \frac{\pi'(t) - s(t, \vec{l}_0) - \nu}{s(t, \vec{l}_0) + \nu} dt. \quad (1.1.56)$$

Перейдем к вычислению корреляционной матрицы совместных оценок. Из формулы (1.1.56) и [12, формула (3.7.27)] видно, что случайные величины n_i имеют нулевое математическое ожидание. Поэтому их линейные комбинации — координаты вектора $\mathbf{I}^{-1} \mathbf{n}$ — также имеют нулевые математические ожидания. Тем самым, смещение вектора $\widehat{\vec{l}}$ относительно \vec{l}_0 равно нулю, т.е. \vec{l}_0 является математическим ожиданием вектора $\widehat{\vec{l}}$. Рассчитаем элементы корреляционной матрицы \mathbf{K} оценок $\widehat{\vec{l}}$, а $\widehat{\vec{l}} - \vec{l}_0 = \varepsilon \vec{l}_1$. В силу формулы (1.1.55) для элементов матрицы \mathbf{K} имеем

$$K_{\alpha\beta} = \varepsilon^2 \langle l_{1\alpha} l_{1\beta} \rangle = \varepsilon^2 \left\langle \left(\sum_{\gamma=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} n_\gamma \right) \left(\sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} n_\delta \right) \right\rangle,$$

где $\frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega}$ — элементы матрицы, обратной к \mathbf{I} , а угловые скобки $\langle \cdot \rangle$ означают математическое ожидание. Продолжим вычисления:

$$K_{\alpha\beta} = \varepsilon^2 \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} \langle n_\gamma n_\delta \rangle. \quad (1.1.57)$$

Введем сокращенные обозначения (см. формулу (1.1.56), определяющую n_i)

$$\pi'_0(t) = \pi'(t) - s(t, \vec{l}_0) - \nu, \quad s(t) = s(t, \vec{l}_0), \quad s_i(t) = \left. \frac{\partial s(t, \vec{l})}{\partial l_i} \right|_{\vec{l}=\vec{l}_0}.$$

Тогда определение (1.1.56) n_i переписется в виде

$$n_i = \frac{1}{\sigma_{SN}} \int_0^T \frac{s_i(t)}{s(t) + \nu} \pi'_0(t) dt.$$

Займемся вычислением $\langle n_\gamma n_\delta \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle n_\gamma n_\delta \rangle &= \frac{1}{\sigma_{SN}^2} \left\langle \left(\int_0^T \frac{s_\gamma(t)}{s(t) + \nu} \pi'_0(t) dt \right) \left(\int_0^T \frac{s_\delta(t)}{s(t) + \nu} \pi'_0(t) dt \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sigma_{SN}^2} \int_0^T \frac{s_\gamma(t)}{s(t) + \nu} \frac{s_\delta(t)}{s(t) + \nu} (s(t) + \nu) dt = \frac{1}{\sigma_{SN}^2} \widehat{I}_{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Или с учетом того, что $\mathbf{I} = \frac{1}{m_S} \widehat{\mathbf{I}}$,

$$\langle n_\gamma n_\delta \rangle = \frac{m_S}{\sigma_{SN}^2} I_{\gamma\delta}.$$

Подставляя этот результат в формулу (1.1.57), получаем

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \varepsilon^2 \frac{m_S}{\sigma_{SN}^2} \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} I_{\gamma\delta} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} = \varepsilon^2 \frac{m_S}{\sigma_{SN}^2} \sum_{\delta=1}^p \mathbf{1}_{\alpha\delta} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} = \varepsilon^2 \frac{m_S}{\sigma_{SN}^2} \frac{A_{\alpha\beta}}{\Omega} = \\ &= \left(\frac{\sigma_{SN}^2}{m_S} \right)^2 \frac{m_S}{\sigma_{SN}^2} \frac{A_{\alpha\beta}}{\Omega} = \frac{1}{m_S} \frac{A_{\alpha\beta}}{\Omega}. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что $\frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega}$ — элементы матрицы, обратной к \mathbf{I} , и учитывая, что $\widehat{\mathbf{I}} = m_S \mathbf{I}$, получаем, что $\frac{1}{m_S} \frac{A_{\alpha\beta}}{\Omega}$ — элементы матрицы, обратной к $\widehat{\mathbf{I}}$. Итак, окончательно имеем

$$\mathbf{K} = \widehat{\mathbf{I}}^{-1}. \quad (1.1.58)$$

В силу формулы (1.1.50) это равенство можно также переписать в виде

$$\mathbf{K} = \left[\frac{\partial^2 H(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \Big|_{\vec{l}_1, \vec{l}_2 = \vec{l}_0} \right]_{i,j=1,\dots,p}^{-1}.$$

Заметим, что формула (1.1.58) совпадает с формулой (1.1.7) для корреляционной матрицы совместно-эффективных оценок. Подчеркнем, что равенство (1.1.58) является приближенным ввиду использования при ее выводе метода малого параметра, и его точность повышается с уменьшением параметра ε , что эквивалентно росту ОСШ. Таким образом, оценки максимального правдоподобия являются асимптотически эффективными с ростом ОСШ.

Выведем конкретную формулу, позволяющую вычислять ОСШ. Поскольку оценки являются несмещенными, из формулы (1.1.46) имеем

$$\begin{aligned} m_S &= \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_0) = \\ &= \int_0^T \ln(1 + s(t, \vec{l}_0)/\nu) (s(t, \vec{l}_0) + \nu) dt - \int_0^T s(t, \vec{l}_0) dt = \\ &= N \left(\int_0^T \ln(1 + s_0(t, \vec{l}_0)/\nu) (s_0(t, \vec{l}_0) + \nu) dt - \int_0^T s_0(t, \vec{l}_0) dt \right). \end{aligned}$$

В силу формулы (1.1.49) имеем

$$\sigma_{SN}^2 = B_N(\vec{l}_0, \vec{l}_0) = N\nu \int_0^T \ln^2(1 + s_0(t, \vec{l}_0)/\nu) (1 + s_0(t, \vec{l}_0)/\nu) dt.$$

Следовательно,

$$z_S = \frac{m_S}{\sigma_{SN}} = \sqrt{N\nu} \frac{\int_0^T \ln[1 + s_0(t, \vec{l}_0)/\nu] [1 + s_0(t, \vec{l}_0)/\nu] dt - \frac{1}{\nu} \int_0^T s_0(t, \vec{l}_0) dt}{\sqrt{\int_0^T \ln^2[1 + s_0(t, \vec{l}_0)/\nu] [1 + s_0(t, \vec{l}_0)/\nu] dt}}.$$

Представим функцию $s_0(t, \vec{l}_0)$ в виде

$$s_0(t, \vec{l}_0) = a f_0(t/\tau, \vec{l}_0).$$

Будем считать, что в этом представлении функция $f_0(x, \vec{l}_0)$ нормирована [6]:

$$\max f_0(x, \vec{l}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0^2(x, \vec{l}_0) dx = 1.$$

(Подразумевается, что τ может увеличиваться только в тех пределах, пока не нарушаются ограничения на скважность и пока вся последовательность импульсов уместится в отрезке $[0, T]$.) Тогда выражение для z_S можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
z_S &= \sqrt{N\nu} \frac{\int_0^T \ln[1 + qf_0(t/\tau, \vec{l}_0)] [1 + qf_0(t/\tau, \vec{l}_0)] dt - q \int_0^T f_0(t/\tau, \vec{l}_0) dt}{\sqrt{\int_0^T \ln^2[1 + qf_0(t/\tau, \vec{l}_0)] [1 + qf_0(t/\tau, \vec{l}_0)] dt}} = \\
&= \sqrt{N\nu\tau} \frac{\int_0^{T/\tau} \ln[1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] [1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] dx - q \int_0^{T/\tau} f_0(x, \vec{l}_0) dx}{\sqrt{\int_0^{T/\tau} \ln^2[1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] [1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] dx}} = \quad (1.1.59) \\
&= \sqrt{N\nu\tau} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] [1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] dx - q \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, \vec{l}_0) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2[1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] [1 + qf_0(x, \vec{l}_0)] dx}},
\end{aligned}$$

где $q = a/\nu$.

В следующей теореме исследуется зависимость ОСШ от параметров a , ν и τ и, в частности, описывается несколько способов увеличения ОСШ. (а) Увеличения ОСШ можно добиться путем увеличения амплитуды a (при фиксированных уровне шума ν и длительности импульса τ). (б) При уменьшении уровня шума ν (при фиксированных амплитуде a и длительности импульса τ) ОСШ стремится к константе. (с) При фиксированных амплитуде a и уровне шума ν можно увеличить ОСШ путем увеличения длительности импульса τ . (д) Напротив, при увеличении уровня шума ν (при фиксированных амплитуде a и длительности импульса τ) ОСШ стремится к нулю.

Теорема 1.1.5. Пусть значение векторного параметра \vec{l}_0 фиксировано. Пусть функция $f_0(x, \vec{l}_0)$ непрерывна, неотрицательна, имеет компактный носитель и хотя бы в одной точке отлична от нуля. (а) Если ν и τ постоянны, то $z_S \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$. (б) Если a и τ постоянны, то $z_S \rightarrow \sqrt{N\tau a \int_0^{+\infty} f_0(x, \vec{l}_0) dx}$ при $\nu \rightarrow 0$. (д) Если a и τ постоянны, то $z_S \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать для $f_0(x, \vec{l}_0)$ сокращенное обозначение $f_0(x)$.

Докажем утверждения (а) и (б). Разделим числитель представления

(1.1.59) на q , а знаменатель — на \sqrt{q} :

$$\begin{aligned} z_S &= \sqrt{N\nu\tau q} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x)] [1/q + f_0(x)] dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2[1 + qf_0(x)] [1/q + f_0(x)] dx}} = \\ &= \sqrt{N\tau a} \frac{\int_0^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln[1+qf_0(x)]}{q} dx - \int_0^{+\infty} f_0(x) dx}{\sqrt{\int_0^{+\infty} \ln^2[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2[1+qf_0(x)]}{q} dx}}. \end{aligned}$$

При $q \rightarrow \infty$ это выражение по порядку роста эквивалентно выражению

$$\sqrt{N\tau a} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}}, \quad (1.1.60)$$

поскольку интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln[1+qf_0(x)]}{q} dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^2[1+qf_0(x)]}{q} dx$ стремятся к нулю из-за того, что логарифм растет медленнее любой степени q , а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx$ является константой и поэтому представляет собой величину меньшего порядка малости, чем растущий интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx$. Чтобы завершить доказательство, покажем, что

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}} \rightarrow \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx}$$

при $q \rightarrow \infty$.

Обозначим через M максимальное значение функции $f_0(x)$. Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x \geq 0 : f_0(x) > 0\}.$$

Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество

$$\Omega_\varepsilon = \{x \geq 0 : f_0(x) > \varepsilon\}.$$

Очевидно, $\cup_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon = \Omega$. Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f_0(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f_0(x) dx.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} \ln[1 + q\varepsilon] f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{\Omega} \ln^2[1 + qM] f_0(x) dx}} &\leq \\ &\leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}} \leq \\ &\leq \frac{\int_{\Omega} \ln[1 + qM] f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{\Omega_\varepsilon} \ln^2[1 + q\varepsilon] f_0(x) dx}}. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \frac{\ln[1 + q\varepsilon]}{\ln[1 + qM]} \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{\Omega} f_0(x) dx}} &\leq \\ &\leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2[1 + qf_0(x)] f_0(x) dx}} \leq \\ &\leq \frac{\ln[1 + qM]}{\ln[1 + q\varepsilon]} \frac{\int_{\Omega} f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{\Omega_\varepsilon} f_0(x) dx}}. \end{aligned}$$

Остается показать, что

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\ln[1 + q\varepsilon]}{\ln[1 + qM]} = 1.$$

Действительно, выражение

$$1 - \frac{\ln[1 + q\varepsilon]}{\ln[1 + qM]} = \frac{\ln[1 + qM] - \ln[1 + q\varepsilon]}{\ln[1 + qM]} = \frac{\ln \frac{1+qM}{1+q\varepsilon}}{\ln[1 + qM]} = \frac{\ln \frac{M+\frac{1}{q}}{\varepsilon+\frac{1}{q}}}{\ln[1 + qM]}$$

стремится к нулю поскольку числитель справа стремится к константе, а знаменатель растет.

Утверждение (с) непосредственно следует из (1.1.59).

Докажем утверждение (d). Подставим в формулу (1.1.59) $q = a/\nu$:

$$z_S = \sqrt{N\nu\tau} \frac{\int_0^{+\infty} \ln\left[1 + \frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0)\right] \left[1 + \frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0)\right] dx - \frac{a}{\nu} \int_0^{+\infty} f_0(x, \vec{l}_0) dx}{\sqrt{\int_0^{+\infty} \ln^2\left[1 + \frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0)\right] \left[1 + \frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0)\right] dx}}.$$

При больших ν (и, следовательно, малых $q = a/\nu$) это можно приближенно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 z_S &= \sqrt{N\nu\tau} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0) [1 + \frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0)] dx - \frac{a}{\nu} \int_0^{+\infty} f_0(x, \vec{l}_0) dx}{\sqrt{\int_0^{+\infty} [\frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0)]^2 [1 + \frac{a}{\nu} f_0(x, \vec{l}_0)] dx}} = \\
 &= \sqrt{N\nu\tau} \frac{(\frac{a}{\nu})^2 \int_0^{+\infty} [f_0(x, \vec{l}_0)]^2 dx}{\frac{a}{\nu} \sqrt{\int_0^{+\infty} [f_0(x, \vec{l}_0)]^2 dx}} = \\
 &= \sqrt{N\nu\tau} \frac{a}{\nu} \sqrt{\int_0^{+\infty} [f_0(x, \vec{l}_0)]^2 dx} = \\
 &= \sqrt{\frac{aN\tau}{\nu}} \sqrt{\int_0^{+\infty} [f_0(x, \vec{l}_0)]^2 dx} \rightarrow 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Полученные выражения для характеристик совместно-эффективных оценок могут быть использованы для расчета характеристик асимптотически эффективных оценок параметров движения в условиях высокой апостериорной точности. В частности, их можно использовать для расчета характеристик совместных оценок максимального правдоподобия [37, 43, 102], если отношение сигнал-шум (1.1.59) для всей последовательности импульсов с интенсивностью (1.1.2) достаточно велико.

Использование метода максимального правдоподобия в предложенном выше виде подразумевает формирование логарифма ФОП (1.1.44) как функции $3+p$ переменных, где p — количество неинформативных параметров. Для поиска положения максимума функции $3+p$ переменных требуется выработка $3+p$ значений по принимаемой реализации. Так, например, если в модели принимаемого сигнала присутствует 2 неинформативных параметра и производится оценка дальности, скорости и ускорения, а поиск положения максимума логарифма ФОП проводится по 10 значениям каждого параметра, то, согласно методу максимального правдоподобия, необходимо рассчитать 10^5 значений логарифма ФОП и найти наибольший из них. Очевидно, это довольно большой объем вычислений для не слишком сложной модели параметрической неопределенности, и для его осуществления потребуются либо значительные затраты времени, либо мощный компьютер с возможностями параллельных вычислений.

1.2 Влияние быстрых флуктуаций цели на эффективность оценок

На зависимость интенсивности рассеянной последовательности оптических импульсов от неинформативных параметров оказывает влияние характер флуктуаций цели. При медленных флуктуациях цели значения неинформативных параметров \vec{l}_0 одинаковы для всех импульсов последовательности. При быстрых флуктуациях цели — значения неинформативных параметров \vec{l}_{0k} разные у различных импульсов. В настоящем параграфе обсуждается эффективность оценок дальности, скорости и ускорения цели при наличии у рассеянной последовательности оптических импульсов конечного числа произвольных неинформативных параметров в условиях, когда цель является быстро флуктуирующей.

Положим, что излучается последовательность оптических импульсов с интенсивностью (1.1.1), а форма интенсивности рассеянного сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) &= \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_{0k}), \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

где $s_0(t, \vec{l}_{0k})$ — функция, описывающая форму одного рассеянного оптического импульса, причем предполагается выполненным условие (1.1.3), а \vec{l}_{0k} — набор неинформативных параметров для k -го импульса. В дальнейшем также будут использоваться представления

$$s(t, R, V, A, \vec{L}) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(\tilde{t}_k, \vec{l}_k), \quad s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{t}_k &= t - 2R/c - (k - \mu)\vartheta(1 + 2V/c) - A(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \\ \tilde{t}_{0k} &= t - 2R_0/c - (k - \mu)\vartheta(1 + 2V_0/c) - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что отличие от задачи, рассмотренной в § 1.1, заключается в том, что значения параметров разные для различных импульсов последовательности. Вектор

$$\vec{l}_k = (l_{k1}, l_{k2}, \dots, l_{kp})$$

состоит из p неинформативных параметров, неизвестных в силу влияния флуктуаций цели и среды распространения. В формуле (1.2.1) и далее первый индекс ноль у набора неинформативных параметров $\vec{l}_{0k} = (l_{0k1}, l_{0k2}, \dots, l_{0kp})$ означает, что речь идет об истинных значениях неизвестных параметров рассеянной последовательности оптических импульсов. В случае, когда вектор \vec{l}_{0k} не зависит от k , т. е. форма интенсивности у всех импульсов последовательности одинакова, последовательность импульсов (1.1.2) принято называть медленно флуктуирующей. Если же вектор \vec{l}_{0k} меняется с изменением k , последовательность импульсов (1.2.1) принято называть быстро флуктуирующей. Физическая необходимость рассмотрения быстро флуктуирующих последовательностей связана с тем, что за время, проходящее между посылкой отдельных импульсов последовательности, параметры одиночного импульса могут существенно меняться вследствие флуктуации цели. Полный набор неинформативных параметров \vec{l}_k , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, будем записывать в виде $\vec{L} = (\vec{l}_0, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{N-1})$ или подробнее

$$\vec{L} = (l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0p}; l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1p}; \dots; l_{N-11}, l_{N-12}, \dots, l_{N-1p}).$$

Рассматриваемый случай отличается от ситуации, связанной с сигналом (1.1.2), уже тем, что число (скалярных) неинформативных параметров теперь не p , а $P = Np$.

Будем интерпретировать сигнал (1.2.1) как обобщение сигнала (1.1.2), в котором набор неинформативных параметров \vec{l}_0 представлен \vec{L}_0 . Иными словами, будем считать, что k -ый импульс с интенсивностью $s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_{0k})$ формально зависит от полного набора параметров \vec{L} , хотя фактически, как видно из формулы (1.2.1), он зависит лишь от части \vec{l}_k этих параметров.

Предположим, что сигнал с интенсивностью (1.2.1) наблюдается в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне оптического шума с интенсивностью ν . Следовательно, обработке доступна реализация пуассоновского процесса с интенсивностью

$$\beta(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) = s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) + \nu.$$

Как и в § 1.1, чтобы определить влияние параметрической априорной неопределенности в условиях быстрых флуктуаций на точность совместно-эффективных оценок параметров движения, рассчитаем характеристики совместно-эффективных оценок параметров рассеянного сигнала.

Будем, как и раньше, рассматривать регулярный случай [43, 87], когда интенсивности $s_0(t, \vec{l}_k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, отдельных оптических импульсов дифференцируемы по t и по всем параметрам l_{ki} , $i = 1, \dots, p$. Будем также считать, что интервал наблюдения больше длительности всей последовательности оптических импульсов, т. е. $T > N\vartheta$, а величина скважности последовательности (даже состоящей из импульсов с разными значениями параметров) не менее двух, так что отдельные импульсы не перекрываются. Наконец, будем предполагать, что выполнены условия (1.1.3).

В рассматриваемом случае функция неопределенности [102] приобретает вид

$$\begin{aligned} H(R_1, V_1, A_1, \vec{L}_1; R_2, V_2, A_2, \vec{L}_2) = \\ = \int_0^T \ln(1 + s(t, R_1, V_1, A_1, \vec{L}_1)/\nu) \ln(1 + s(t, R_2, V_2, A_2, \vec{L}_2)/\nu) \times \\ \times (s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) + \nu) dt. \end{aligned}$$

Или подробнее (учитывая условия на скважность)

$$\begin{aligned} H(R_1, V_1, A_1, \vec{L}_1; R_2, V_2, A_2, \vec{L}_2) = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln \left[1 + s_0(t - 2R_1/c - (k - \mu)(1 + 2V_1/c)\vartheta - A_1(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_{1k})/\nu \right] \times \\ \times \ln \left[1 + s_0(t - 2R_2/c - (k - \mu)(1 + 2V_2/c)\vartheta - A_2(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_{2k})/\nu \right] \times \\ \times \left[s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \vec{l}_{0k}) + \nu \right] dt. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Поэтому в соответствии с соотношением (1.1.6) информационная матрица Фишера принимает вид

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial \vec{L}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial \vec{L}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial \vec{L}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{L}_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{L}_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{L}_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{L}_1 \partial \vec{L}_2} \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Здесь частные производные вычислены в точке $R_1 = R_2 = R_0$, $V_1 = V_2 = V_0$, $A_1 = A_2 = A_0$, $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \vec{L}_0$; \vec{L} — вектор-строка, а $\vec{L} = \vec{L}^T$ —

вектор-столбец. Следовательно, корреляционная матрица \mathbf{K} совместно-эффективных оценок имеет вид

$$\mathbf{K} = \widehat{\mathbf{I}}^{-1}, \quad (1.2.4)$$

где матрица $\widehat{\mathbf{I}}$ задается формулой (1.2.3).

Матрицу $\widehat{\mathbf{I}}$ (1.2.3) удобно представить в блочном виде:

$$\widehat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}^T,$$

где (соглашение о смысле направлений стрелок над символами в производных описывалось на с. 16)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial R_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial V_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial A_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial \overleftarrow{L}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial \overleftarrow{L}_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial \overleftarrow{L}_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{L}_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{L}_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{L}_1 \partial A_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{L}_1 \partial \overleftarrow{L}_2} \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что поскольку вектор \overrightarrow{L}_1 имеет размерность $P = Np$, матрица \mathbf{B} имеет размер $3 \times P$ и состоит из блоков \mathbf{B}_k , $k = 0, \dots, N-1$, размера $3 \times p$, матрица $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$ имеет размер $P \times 3$, а матрица \mathbf{D} имеет размер $P \times P$ и имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00} & \dots & \mathbf{D}_{0N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{N-10} & \dots & \mathbf{D}_{N-1N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \dots & \gamma_{0N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N-10} & \dots & \gamma_{N-1N-1} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{D}_{km} = \gamma_{km} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial l_{1k1} \partial l_{2m1}} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial l_{1k1} \partial l_{2mp}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial l_{1kp} \partial l_{2m1}} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial l_{1kp} \partial l_{2mp}} \end{pmatrix}.$$

Поскольку функция H (1.2.2) состоит из N слагаемых, причем в k -ое слагаемое входят неинформативные параметры \overrightarrow{l}_k , соответствующие только k -му импульсу, то для пар параметров l_{1ki} и l_{2mj} с $k \neq m$ частные производные $\frac{\partial^2 H}{\partial l_{1ki} \partial l_{2mj}}$ равны нулю. Это означает, что матрица \mathbf{D} является блочно-диагональной; диагональные блоки будем сокращенно обозначать $\mathbf{D}_k = \gamma_k$.

В результате непосредственных вычислений получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial R_2} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{c^2} \alpha_k, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial V_2} &= \frac{4}{c^2} \vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) \alpha_k, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial A_2} &= \frac{2}{c^2} \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 \alpha_k, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial V_2} &= \frac{4}{c^2} \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 \alpha_k, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial A_2} &= \frac{2}{c^2} \vartheta^3 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^3 \alpha_k, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial A_2} &= \frac{1}{c^2} \vartheta^4 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^4 \alpha_k, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial R_1 \partial \overleftarrow{l}_{2k}} &= -\frac{2}{c} \beta_k = -\frac{2}{c} (\beta_{1k} \ \beta_{2k} \ \dots \ \beta_{pk}), \\
\frac{\partial^2 H}{\partial V_1 \partial \overleftarrow{l}_{2k}} &= -\frac{2}{c} \vartheta (k - \mu) \beta_k = -\frac{2}{c} \vartheta (k - \mu) (\beta_{1k} \ \beta_{2k} \ \dots \ \beta_{pk}), \\
\frac{\partial^2 H}{\partial A_1 \partial \overleftarrow{l}_{2k}} &= -\frac{1}{c} \vartheta^2 (k - \mu)^2 \beta_k = -\frac{1}{c} \vartheta^2 (k - \mu)^2 (\beta_{1k} \ \beta_{2k} \ \dots \ \beta_{pk}), \\
\frac{\partial^2 H}{\partial \overrightarrow{l}_{1k} \partial \overleftarrow{l}_{2k}} &= (\gamma^{ki \ kj})_{i,j=1,\dots,p}.
\end{aligned}$$

Здесь используются обозначения

$$\alpha_k = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(\tilde{t}_{0k}; \overrightarrow{l}_{0k})} \left(\frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \overrightarrow{l}_{0k})}{\partial t} \right)^2 dt, \quad (1.2.5)$$

$$\beta_{ki} = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(\tilde{t}_{0k}; \overrightarrow{l}_{0k})} \left(\frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \overrightarrow{l}_{0k})}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \overrightarrow{l}_k)}{\partial l_{ki}} \right) \Big|_{\overrightarrow{l}_k = \overrightarrow{l}_{0k}} dt,$$

$$\beta_k = (\beta_{k1} \ \beta_{k2} \ \dots \ \beta_{kp}) = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(\tilde{t}_{0k}; \overrightarrow{l}_{0k})} \left(\frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \overrightarrow{l}_{0k})}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \overleftarrow{l}_k)}{\partial \overleftarrow{l}_k} \right) \Big|_{\overleftarrow{l}_k = \overleftarrow{l}_{0k}} dt, \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ki kj} &= \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(\tilde{t}_{0k}; \vec{l}_{0k})} \frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \vec{l}_k)}{\partial l_{kj}} \Big|_{\vec{l}_k = \vec{l}_{0k}} \frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \overleftarrow{l}_k)}{\partial l_{ki}} \Big|_{\overleftarrow{l}_k = \overleftarrow{l}_{0k}} dt, \\ \boldsymbol{\gamma}_k &= (\gamma_{ki kj})_{i,j=1,2,\dots,p} = \int_0^T \frac{1}{\nu + s_0(\tilde{t}_{0k}; \vec{l}_{0k})} \left(\frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} \right) \Big|_{\vec{l}_k = \vec{l}_{0k}} \left(\frac{\partial s_0(\tilde{t}_{0k}; \overleftarrow{l}_k)}{\partial \overleftarrow{l}_k} \right) \Big|_{\overleftarrow{l}_k = \overleftarrow{l}_{0k}} dt, \\ \tilde{t}_{0k} &= t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Окончательно получаем, что матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B}_k , \mathbf{D}_k приобретают следующий вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \begin{pmatrix} 4 & 4\vartheta(k - \mu) & 2\vartheta^2(k - \mu)^2 \\ 4\vartheta(k - \mu) & 4\vartheta^2(k - \mu)^2 & 2\vartheta^3(k - \mu)^3 \\ 2\vartheta^2(k - \mu)^2 & 2\vartheta^3(k - \mu)^3 & \vartheta^4(k - \mu)^4 \end{pmatrix}, \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{B}_k = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 2\vartheta(k - \mu) \\ \vartheta^2(k - \mu)^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_k = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 2\vartheta(k - \mu) \\ \vartheta^2(k - \mu)^2 \end{pmatrix} (\beta_{1k} \ \dots \ \beta_{pk}), \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{D}_k = \boldsymbol{\gamma}_k = (\gamma_{ki kj})_{i,j=1,2,\dots,p}. \quad (1.2.10)$$

Для корреляционной матрицы совместно-эффективных оценок параметров R , V и A при наличии неинформативных параметров \vec{L}_0 остается справедливой формула (1.1.21), т.е. элементы, расположенные на пересечении первых трех строк и первых трех столбцов матрицы \mathbf{K} (1.1.58), соответствующие матрице \mathbf{A} , характеризуют потенциальную точность оценок дальности, скорости и ускорения. Соответствующий блок размера 3×3 матрицы \mathbf{K} обозначим символом $\mathbf{K}(\vec{L}_0)$. При этом при нахождении $\mathbf{K}(\vec{L}_0)$ можно вновь применять формулу Фробениуса (лемма 1.1.2): $\mathbf{K}(\vec{L}_0) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$.

Введем обозначение для элементов матрицы Δ_k , обратной к матрице $\mathbf{D}_k = \boldsymbol{\gamma}_k = (\gamma_{ki kj})_{i,j=1,2,\dots,p}$:

$$(\gamma_{ki kj})^{-1} = \left(D_{ki kj}^{(-1)} \right) = (\Delta_{ki kj})_{i,j=1,\dots,p}.$$

Введем также обозначение

$$\rho_{pk} = \frac{1}{\alpha_k} \boldsymbol{\beta}_k \Delta_k \boldsymbol{\beta}_k^T = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \beta_{ki} \Delta_{ki kj} \beta_{kj}, \quad (1.2.11)$$

являющееся аналогом величины (1.1.23) для медленно флуктуирующей последовательности.

Вычислим матрицу $\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$. Имеем (в силу блочной диагональности матрицы \mathbf{D}^{-1})

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_k \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2\vartheta(k-\mu) \\ \vartheta^2(k-\mu)^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_k \Delta_k \boldsymbol{\beta}_k^T \begin{pmatrix} 2 & 2\vartheta(k-\mu) & \vartheta^2(k-\mu)^2 \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\alpha_k \rho_{pk}}{c^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2\vartheta(k-\mu) \\ \vartheta^2(k-\mu)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2\vartheta(k-\mu) & \vartheta^2(k-\mu)^2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \rho_{pk} \begin{pmatrix} 4 & 4\vartheta(k-\mu) & 2\vartheta^2(k-\mu)^2 \\ 4\vartheta(k-\mu) & 4\vartheta^2(k-\mu)^2 & 2\vartheta^3(k-\mu)^3 \\ 2\vartheta^2(k-\mu)^2 & 2\vartheta^3(k-\mu)^3 & \vartheta^4(k-\mu)^4 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Аналогичная формула (1.1.22) из § 1.1 для случая медленно флуктуирующей последовательности отличается от формулы (1.2.12) для быстро флуктуирующей последовательности. Это различие можно объяснить следующим.

Положим, что последовательность (1.2.1) является медленно флуктуирующей. Это значит, что значения параметров \vec{l}_{0k} от импульса к импульсу не меняются, т.е. не зависят от k . Но эту последовательность можно одновременно рассматривать и как быстро флуктуирующую (у которой параметры всех импульсов оказались одинаковыми, но этот факт приемнику неизвестен). Подчеркнем, что при рассмотрении последовательности как медленно флуктуирующей она описывается $3+p$ параметрами, а при рассмотрении той же последовательности как быстро флуктуирующей она описывается уже $3+Np$ параметрами, причем неинформативные $P = Np$ параметров могут меняться независимо друг от друга.

При условии, что значения параметров \vec{l}_{0k} не зависят от k , величины α_k из (1.2.5) не зависят от k и совпадают с величиной α из (1.1.9), величины $\boldsymbol{\beta}_k$ из (1.2.6) не зависят от k и совпадают с величиной $\boldsymbol{\beta}$ из (1.1.10), а величины $\boldsymbol{\gamma}_k$ из (1.2.7) не зависят от k и совпадают с величиной $\boldsymbol{\gamma}$ из (1.1.12). Поэтому все величины ρ_{pk} (1.2.11) одинаковы и совпадают с величиной ρ_p (1.1.23). Следовательно, матрицы \mathbf{B} (1.1.18) и \mathbf{D} (1.1.20)

выражаются через \mathbf{B}_k (1.2.9) и \mathbf{D}_k (1.2.10) по формулам

$$\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_k, \quad \mathbf{D} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{D}_k = N\mathbf{D}_k.$$

В этих формулах \mathbf{D}_k не зависит от k , но \mathbf{B}_k зависит от k , см. формулу (1.2.9). Поэтому представления для $\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ через единые переменные \mathbf{B}_k , \mathbf{D}_k и \mathbf{C}_k :

$$\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_k \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k \quad \text{для (1.2.12),}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{B}_k \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{D}_k \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{C}_k \right) \quad \text{для (1.1.22)}$$

невозможно преобразовать друг в друга. Различие в этом месте приводит к существенным различиям и в формулах для $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ и \mathbf{K} .

Окончательно из (1.2.8) и (1.2.12) получаем

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} = \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (1 - \rho_{pk}) \begin{pmatrix} 4 & 4\vartheta(k - \mu) & 2\vartheta^2(k - \mu)^2 \\ 4\vartheta(k - \mu) & 4\vartheta^2(k - \mu)^2 & 2\vartheta^3(k - \mu)^3 \\ 2\vartheta^2(k - \mu)^2 & 2\vartheta^3(k - \mu)^3 & \vartheta^4(k - \mu)^4 \end{pmatrix}.$$

Еще раз отметим, что эта формула отличается от аналогичной формулы (1.1.24) для случая медленно флуктуирующей последовательности.

Следуя [96], введем обозначения (отметим отличие от аналогичного обозначения (1.1.13) для случая медленно флуктуирующей последовательности)

$$\widetilde{M}_\nu = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (1 - \rho_{pk}) (k - \mu)^\nu. \quad (1.2.13)$$

Используя его, можно написать, что

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 4\widetilde{M}_0 & 4\vartheta\widetilde{M}_1 & 2\vartheta^2\widetilde{M}_2 \\ 4\vartheta\widetilde{M}_1 & 4\vartheta^2\widetilde{M}_2 & 2\vartheta^3\widetilde{M}_3 \\ 2\vartheta^2\widetilde{M}_2 & 2\vartheta^3\widetilde{M}_3 & \vartheta^4\widetilde{M}_4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathbf{K}(\vec{L}_0) = \frac{c^2}{((2\widetilde{M}_1\widetilde{M}_3 + \widetilde{M}_0\widetilde{M}_4)\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_2^3 - \widetilde{M}_0\widetilde{M}_3^2 - \widetilde{M}_1^2\widetilde{M}_4)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\widetilde{M}_2\widetilde{M}_4 - \widetilde{M}_3^2) & \frac{1}{4\vartheta}(\widetilde{M}_2\widetilde{M}_3 - \widetilde{M}_1\widetilde{M}_4) & \frac{1}{2\vartheta^2}(\widetilde{M}_1\widetilde{M}_3 - \widetilde{M}_2^2) \\ \frac{1}{4\vartheta}(\widetilde{M}_2\widetilde{M}_3 - \widetilde{M}_1\widetilde{M}_4) & \frac{1}{4\vartheta^2}(\widetilde{M}_0\widetilde{M}_4 - \widetilde{M}_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_0\widetilde{M}_3) \\ \frac{1}{2\vartheta^2}(\widetilde{M}_1\widetilde{M}_3 - \widetilde{M}_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_0\widetilde{M}_3) & \frac{1}{\vartheta^4}(\widetilde{M}_0\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_1^2) \end{pmatrix}. \quad (1.2.14)$$

Сравним эту формулу с формулой (1.1.25). Здесь существенное отличие элементов K_{11} связано с существенным различием матриц $\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}$, отмеченным выше.

В случае, когда неинформативные параметры отсутствуют, величины α_k (1.2.5) не зависят от k и совпадают с α (1.1.9), а величины ρ_{pk} (1.2.11) превращаются в нули. Поэтому числа \widetilde{M}_ν (1.2.13) превращаются в числа αM_ν (1.1.13), а матрица $\mathbf{K}(\vec{L}_0)$ (1.2.14) — в матрицу \mathbf{K} (1.1.26). Таким образом, проигрыш в точности оценки дальности, скорости и ускорения вследствие наличия неинформативных параметров в условиях быстрых флуктуаций характеризуется величинами

$$\chi(R|R_0, V_0, A_0) = \frac{D(R|R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)}{D(R|R_0, V_0, A_0)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\widetilde{M}_2\widetilde{M}_4 - \widetilde{M}_3^2}{M_2M_4 - M_3^2} \times$$

$$\times \frac{(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4}{(2\widetilde{M}_1\widetilde{M}_3 + \widetilde{M}_0\widetilde{M}_4)\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_2^3 - \widetilde{M}_0\widetilde{M}_3^2 - \widetilde{M}_1^2\widetilde{M}_4},$$

$$\chi(V|R_0, V_0, A_0) = \frac{D(V|R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)}{D(V|R_0, V_0, A_0)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\widetilde{M}_0\widetilde{M}_4 - \widetilde{M}_2^2}{M_0M_4 - M_2^2} \times$$

$$\times \frac{(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4}{(2\widetilde{M}_1\widetilde{M}_3 + \widetilde{M}_0\widetilde{M}_4)\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_2^3 - \widetilde{M}_0\widetilde{M}_3^2 - \widetilde{M}_1^2\widetilde{M}_4},$$

$$\chi(A|R_0, V_0, A_0) = \frac{D(A|R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)}{D(A|R_0, V_0, A_0)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\widetilde{M}_0\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_1^2}{M_0M_2 - M_1^2} \times$$

$$\times \frac{(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4}{(2\widetilde{M}_1\widetilde{M}_3 + \widetilde{M}_0\widetilde{M}_4)\widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_2^3 - \widetilde{M}_0\widetilde{M}_3^2 - \widetilde{M}_1^2\widetilde{M}_4}.$$

Полученные выражения существенно упрощаются, если истинные значения неинформативных параметров одинаковы для всех импульсов последовательности (1.2.1). Последнее предположение означает, что последовательность является медленно флуктуирующей, но обрабатывается

как быстро флуктуирующая. Теперь величины α_k (1.2.5) не зависят от k и совпадает с α (1.1.9), а величины ρ_{pk} (1.2.11) одинаковы и совпадают с ρ_p (1.1.23). Поэтому числа \widetilde{M}_ν (1.2.13) превращаются в числа $\alpha(1-\rho_p)M_\nu$, см. (1.1.13), а выражения для проигрыша в точности оценок принимают вид

$$\begin{aligned}\chi(R|R_0, V_0, A_0) &= (1 - \rho_p)^{-1}, \\ \chi(V|R_0, V_0, A_0) &= (1 - \rho_p)^{-1}, \\ \chi(A|R_0, V_0, A_0) &= (1 - \rho_p)^{-1}.\end{aligned}\tag{1.2.15}$$

Внешне функции (1.2.15) совпадают с функцией (1.1.37), хотя и имеют другой смысл. Поэтому исследование зависимостей (1.2.15) от параметров во многом повторяет исследование зависимости от параметров величины (1.1.37). В частности, для импульса (1.1.43) рис. 1.1.3 описывает зависимость проигрышей (1.2.15) в точности оценки от параметра $y = \Delta/\tau$, характеризующего отношение длительности фронта импульса к длительности импульса, для различных наборов неинформативных параметров при $q = a/\nu = 1$; рис. 1.1.4 — ту же зависимость проигрышей χ (1.2.15) в точности оценки от параметра $y = \Delta/\tau$ для различных наборов неинформативных параметров при $q = 10$; рис. 1.1.4 — ту же зависимость проигрышей χ (1.2.15) в точности оценки от параметра $y = \Delta/\tau$ для различных наборов неинформативных параметров при $q = a/\nu = 0.1, 1, 10$; рис. 1.1.6 — зависимость проигрышей (1.2.15) в точности оценки от параметра q для различных наборов неинформативных параметров при $y = 1$.

Покажем, что применение метода максимального правдоподобия в случае быстро флуктуирующей последовательности приводит к асимптотически эффективным оценкам параметров движения. Будем искать положение максимума по R, V, A и \vec{L} логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП)

$$\begin{aligned}L(R, V, A, \vec{L}) &= \int_0^T \ln(1 + s(t, R, V, A, \vec{L})/\nu) d\pi(t) - \\ &\quad - \int_0^T s(t, R, V, A, \vec{L}) dt.\end{aligned}\tag{1.2.16}$$

Согласно методу максимального правдоподобия в качестве оценки параметров R, V, A и \vec{L} будем использовать

$$(\widehat{R}, \widehat{V}, \widehat{A}, \widehat{\vec{L}}) = \arg \sup_{R, V, A, \vec{L}} L(R, V, A, \vec{L}).\tag{1.2.17}$$

Выпишем представление для сигнальной функции — математического ожидания логарифма ФОП:

$$\begin{aligned} \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) &= \\ &= \int_0^T \ln(1 + s(t, R, V, A, \vec{L})/\nu) (s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) + \nu) dt - \\ &\quad - \int_0^T s(t, R, V, A, \vec{L}) dt, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

и для шумовой функции:

$$\begin{aligned} \widehat{N}(R, V, A, \vec{L}) &= L(R, V, A, \vec{L}) - \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) = \\ &= \int_0^T \ln(1 + s(t, R, V, A, \vec{L})/\nu) (\pi'(t) - s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) - \nu) dt. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

В рассматриваемых условиях остается справедливой лемма 1.1.4 (и, следовательно, формула (1.1.50)), которая приобретает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 H(R_1, V_1, A_1, \vec{L}_1; R_2, V_2, A_2, \vec{L}_2)}{\partial l_1 \partial l_2} \right|_{R_1, R_2=R_0; V_1, V_2=V_0; A_1, A_2=A_0; \vec{L}_1, \vec{L}_2=\vec{L}_0} &= \\ = - \left. \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial l_3 \partial l_4} \right|_{R=R_0; V=V_0; A=A_0; \vec{L}=\vec{L}_0}, \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

где l_1 — одна из переменных R_1, V_1, A_1 или l_{1ki} ; l_2 — одна из переменных R_2, V_2, A_2 или l_{2mj} ; l_3 и l_4 — одни из переменных R, V, A или l_{ki} ; $k, m = 1, \dots, N-1$; $i, j = 1, \dots, p$.

Заметим, что, как показывают вычисления, частные производные сигнальной функции $\widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})$ (1.2.18) по переменным R, V, A и \vec{L} равны нулю в точке $(R, V, A, \vec{L}) = (R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)$. Поэтому оценка максимального правдоподобия является несмещенной, т.е. максимум сигнальной функции достигается в точке $(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)$. Положим

$$\begin{aligned} m_S &= \max_{R, V, A, \vec{L}} \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) = \\ &= \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0), \\ \sigma_{SN}^2 &= \langle (\widehat{N}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0))^2 \rangle, \end{aligned}$$

где символ $\langle \cdot \rangle$ означает математическое ожидание.

В силу определения (1.2.18) имеем

$$\begin{aligned} m_S &= \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) = \\ &= \int_0^T \ln(1 + s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)/\nu) (s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) + \nu) dt - \\ &\quad - \int_0^T s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) dt. \end{aligned}$$

В силу [12, формула (3.7.27)] для корреляционной функции шумовой функции имеем

$$\begin{aligned} B_N(R_1, V_1, A_1, \vec{L}_1; R_2, V_2, A_2, \vec{L}_2) &= \\ &= \langle N(R_1, V_1, A_1, \vec{L}_1) N(R_2, V_2, A_2, \vec{L}_2) \rangle = \\ &= \nu \int_0^T \ln(1 + s(t, R_1, V_1, A_1, \vec{L}_1)/\nu) \times \\ &\quad \times \ln(1 + s(t, R_2, V_2, A_2, \vec{L}_2)/\nu) (1 + s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)/\nu) dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для дисперсии шумовой функции

$$\begin{aligned} \sigma_{SN}^2 &= B_N(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) = \\ &= \nu \int_0^T \ln^2(1 + s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)/\nu) (1 + s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)/\nu) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим отношение сигнал-шум (ОСШ) для всей импульсной последовательности

$$z_S = \frac{m_S}{\sigma_{SN}}$$

и обратную к нему величину

$$\varepsilon = \frac{1}{z_S}.$$

Чтобы воспользоваться методом малого параметра, рассмотрим нормированные сигнальную и шумовую функции по формулам

$$\begin{aligned} S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) &= \frac{1}{m_S} \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}), \\ N(R, V, A, \vec{L}) &= \frac{1}{\sigma_{SN}} \widehat{N}(R, V, A, \vec{L}). \end{aligned}$$

Максимальное значение по параметру \vec{L} нормированной сигнальной функции $S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})$ равно 1, а дисперсия нормированной шумовой функции $N(R, V, A, \vec{L})$ также равна 1.

Используя нормированные функции, логарифм ФОП можно представить в виде

$$\begin{aligned} L(R, V, A, \vec{L}) &= \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) + \widehat{N}(R, V, A, \vec{L}) = \\ &= m_S S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) + \sigma_{SN} N(R, V, A, \vec{L}) = \\ &= m_S [S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) + \varepsilon N(R, V, A, \vec{L})]. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Представим также сигнальную (1.2.18) и шумовую (1.2.19) функции в виде слагаемых (это можно сделать в силу условия на скважность)

$$\begin{aligned} \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{S}_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k), \\ \widehat{N}(R, V, A, \vec{L}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{N}_k(R, V, A, \vec{l}_k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{S}_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k) &= \\ &= \int_0^T \ln(1 + s_0(\tilde{t}_k, \vec{l}_k)/\nu) (s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}) + \nu) dt - \int_0^T s_0(\tilde{t}_k, \vec{l}_k) dt, \\ \widehat{N}_k(R, V, A, \vec{l}_k) &= \int_0^T \ln(1 + s_0(\tilde{t}_k, \vec{l}_k)/\nu) (\pi'(t) - s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}) - \nu) dt. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение величины

$$\begin{aligned} m_{Sk} &= \int_0^T \ln(1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) (s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}) + \nu) dt - \int_0^T s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}) dt, \\ \sigma_{SNk}^2 &= \nu \int_0^T \ln^2(1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) (1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) dt. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

В силу формулы (1.2.1) и условия на скважность имеем

$$m_S = \sum_{k=0}^{N-1} m_{Sk}, \quad \sigma_{SN}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_{SNk}^2.$$

Рассмотрим отношения сигнал-шум (ОСШ) для отдельных импульсов:

$$z_{Sk} = \frac{m_{Sk}}{\sigma_{SNk}}$$

и обратные к ним величины

$$\varepsilon_k = \frac{1}{z_{Sk}}.$$

Отметим, что если все m_{Sk} и, соответственно, все σ_{SNk} равны между собой, то $m_{Sk} = m_S/N$, $\sigma_{SNk}^2 = \sigma_{SN}^2/N$, но $\sigma_{SNk} = \sigma_{SN}/\sqrt{N}$. Так что ε_k имеет в \sqrt{N} раз больший порядок, чем ε .

Отдельные слагаемые логарифма ФОП можно представить в виде

$$\begin{aligned} L_k(R, V, A, \vec{L}) &= \widehat{S}_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k) + \widehat{N}_k(R, V, A, \vec{L}) = \\ &= m_{Sk} S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{L}) + \sigma_{SNk} N_k(R, V, A, \vec{l}_k) = \\ &= m_{Sk} [S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k) + \varepsilon_k N_k(R, V, A, \vec{l}_k)], \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

где нормированные величины определяются по формулам

$$\begin{aligned} S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{L}) &= \frac{1}{m_{Sk}} \widehat{S}_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k), \\ N_k(R, V, A, \vec{l}_k) &= \frac{1}{\sigma_{SNk}} \widehat{N}_k(R, V, A, \vec{l}_k). \end{aligned}$$

Здесь максимум по переменным \vec{l}_k , входящим в \vec{L} , нормированной сигнальной функции $S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{L})$ равен 1, а дисперсия нормированной шумовой функции $N_k(R, V, A, \vec{l}_k)$ также равна 1.

Будем искать оценку $(\widehat{R}, \widehat{V}, \widehat{A}, \widehat{\vec{L}})$ вектора $(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0)$, как точку максимума логарифма ФОП, см. (1.2.17). В точке максимума все частные производные логарифма ФОП должны обращаться в ноль. Отсюда

получаем уравнения правдоподобия:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial L(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{L})=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})} &= 0, \\ \left[\frac{\partial L(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{L})=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})} &= 0, \\ \left[\frac{\partial L(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{L})=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})} &= 0, \\ \left[\frac{\partial L(R, V, A, \vec{L})}{\partial \vec{l}_k} \right]_{(R, V, A, \vec{L})=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})} &= 0. \end{aligned}$$

В первые три уравнения правдоподобия подставим представление (1.2.21), а в четвертое — представление (1.2.23):

$$\left[\frac{\partial S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R} + \varepsilon \frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{L})=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})} = 0, \quad (1.2.24)$$

$$\left[\frac{\partial S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V} + \varepsilon \frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{L})=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})} = 0, \quad (1.2.25)$$

$$\left[\frac{\partial S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A} + \varepsilon \frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{L})=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})} = 0, \quad (1.2.26)$$

$$\left[\frac{\partial S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} + \varepsilon_k \frac{\partial N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k)=(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{l}}_k)} = 0. \quad (1.2.27)$$

При фиксированной принятой реализации $\pi(t)$ функции S , S_k и N , N_k можно считать заданными. Очевидно, решение $(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})$ рассматриваемых уравнений правдоподобия является функцией параметров ε и ε_k . Будем искать зависимость $(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A}, \widehat{\vec{L}})$ в виде

$$\begin{aligned} \hat{R} &= R_0 + \varepsilon R_1 + o(\varepsilon), \\ \hat{V} &= V_0 + \varepsilon V_1 + o(\varepsilon), \\ \hat{A} &= A_0 + \varepsilon A_1 + o(\varepsilon), \\ \widehat{\vec{L}} &= (\widehat{l}_0, \dots, \widehat{l}_{N-1}), \\ \widehat{\vec{l}}_k &= \vec{l}_{0k} + \varepsilon_k \vec{l}_{1k} + \vec{o}(\varepsilon_k). \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Условимся координаты вектора \vec{l}_{1k} обозначать $l_{1k\alpha}$. Выражения, стоящие в левых частях каждого из уравнений (1.2.24)–(1.2.27), разложим по фор-

муле Тейлора до членов первого порядка. В результате уравнение (1.2.24) примет вид

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R} + \varepsilon \frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R^2} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} (\varepsilon R_1 + o(\varepsilon)) + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial V} + \varepsilon \frac{\partial^2 N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} (\varepsilon V_1 + o(\varepsilon)) + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial A} + \varepsilon \frac{\partial^2 N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} (\varepsilon A_1 + o(\varepsilon)) + \\
& + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial l_{1k\alpha}} + \varepsilon \frac{\partial^2 N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial l_{1k\alpha}} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} \times \\
& \quad \times (\varepsilon_k l_{1k\alpha} + o(\varepsilon_k)) = 0.
\end{aligned}$$

Отбросим члены, имеющие порядок, меньший ε и ε_k :

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R} + \varepsilon \frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R^2} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} \varepsilon R_1 + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} \varepsilon V_1 + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} \varepsilon A_1 + \\
& + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial l_{1k\alpha}} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \right) l_{1k\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε (а не ε_k):

$$\left[\frac{\partial S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} = 0, \quad (1.2.29)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R^2} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} R_1 + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} V_1 + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} A_1 + \\
& + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial l_{1k\alpha}} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{L}_0)} \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \right) l_{1k\alpha} = 0. \quad (1.2.30)
\end{aligned}$$

Аналогично преобразуем уравнения (1.2.25) и (1.2.26).

Преобразуем уравнение (1.2.27):

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} + \varepsilon_k \frac{\partial N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial R} + \varepsilon_k \frac{\partial^2 N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} (\varepsilon R_1 + o(\varepsilon)) + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial V} + \varepsilon_k \frac{\partial^2 N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} (\varepsilon V_1 + o(\varepsilon)) + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial A} + \varepsilon_k \frac{\partial^2 N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} (\varepsilon A_1 + o(\varepsilon)) + \\
& + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial l_{1k\alpha}} + \varepsilon_k \frac{\partial^2 N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial l_{1k\alpha}} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} \times \\
& \quad \times (\varepsilon_k l_{1k\alpha} + o(\varepsilon_k)) = 0.
\end{aligned}$$

Отбросим члены, имеющие порядок, меньший ε и ε_k :

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} + \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \right) \frac{\partial N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} \varepsilon R_1 + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} \varepsilon V_1 + \\
& + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} \varepsilon A_1 + \\
& + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial l_{1k\alpha}} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_k) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{l}_{0k})} \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \right) l_{1k\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$\left[\frac{\partial S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_k)=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{0k})} = 0, \quad (1.2.31)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \right) \frac{\partial N_k(R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_k)=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{0k})} + \\ & + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial R} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_k)=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{0k})} R_1 + \\ & + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial V} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_k)=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{0k})} V_1 + \\ & + \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial A} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_k)=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{0k})} A_1 + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S_k(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_k \partial l_{1k\alpha}} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_k)=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{0k})} \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} \right) l_{1k\alpha} = 0. \quad (1.2.32) \end{aligned}$$

Как показывают вычисления, первые уравнения (1.2.29)–(1.2.31) в каждом комплекте выполняются. Обозначим через \mathbf{n}_0 вектор

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R,V,A,\vec{L})=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{L}_0)} \\ \left[\frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \right]_{(R,V,A,\vec{L})=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{L}_0)} \\ \left[\frac{\partial N(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \right]_{(R,V,A,\vec{L})=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{L}_0)} \\ \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \left[\frac{\partial N_0(R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_0)=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{00})} \\ \dots \\ \left(\frac{\varepsilon_{N-1}}{\varepsilon} \right) \left[\frac{\partial N_{N-1}(R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1}} \right]_{(R,V,A,\vec{l}_{N-1})=(\widehat{R}_0,\widehat{V}_0,\widehat{A}_0,\widehat{l}_{0N-1})} \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся уравнения (1.2.30)–(1.2.32) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{I}_0 \begin{pmatrix} R_1 \\ V_1 \\ A_1 \\ \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \overleftarrow{l}_{10} \\ \dots \\ \left(\frac{\varepsilon_{N-1}}{\varepsilon} \right) \overleftarrow{l}_{1N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{n}_0, \quad (1.2.33)$$

где \mathbf{I}_0 — блочная матрица

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{B}_0^T,$$

состоящая из блоков

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R^2} & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial V} & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial A} \\ \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial R} & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V^2} & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial A} \\ \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial R} & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial V} & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A^2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_0 &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial l_0} & \dots & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial l_{N-1}} \\ \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial l_0} & \dots & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial l_{N-1}} \\ \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial l_0} & \dots & \frac{\partial^2 S(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial l_{N-1}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_0 &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial l_0 \partial R} & \frac{\partial^2 S_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial l_0 \partial V} & \frac{\partial^2 S_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial l_0 \partial A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 S_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial l_{N-1} \partial R} & \frac{\partial^2 S_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial l_{N-1} \partial V} & \frac{\partial^2 S_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial l_{N-1} \partial A} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_0 &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_0; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial l_0 \partial l_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 S_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial l_{N-1} \partial l_{N-1}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где во всех элементах выполнена подстановка $(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{L}}_0)$.

Решением уравнения (1.2.33), очевидно, является вектор

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ V_1 \\ A_1 \\ \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \overleftarrow{l}_{10} \\ \dots \\ \left(\frac{\varepsilon_{N-1}}{\varepsilon} \right) \overleftarrow{l}_{1N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_0^{-1} \mathbf{n}_0.$$

Отсюда и из (1.2.28) для вектора $(\widehat{R}, \widehat{V}, \widehat{A}, \widehat{\vec{L}})$, представляющего собой оценку максимального правдоподобия параметров рассеянного сигнала, получаем представление

$$\begin{pmatrix} \widehat{R} \\ \widehat{V} \\ \widehat{A} \\ \widehat{\vec{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \\ A_0 \\ \overleftarrow{L}_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \mathbf{I}_0^{-1} \mathbf{n}_0.$$

Из этой формулы, в частности, видно, что оценка является несмещенной.

Преобразуем последнюю формулу так, чтобы элементы матрицы \mathbf{I}_0 были выражены через ненормированную сигнальную функцию (1.2.18), а вектор \mathbf{n}_0 был заменен ненормированным вектором

$$\widehat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \\ \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \\ \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \\ \frac{\partial \widehat{N}_0(R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0} \end{array} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{L}}_0)} \\ \dots \\ \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \widehat{N}_{N-1}(R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1}} \end{array} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_{N-1}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{l}}_{0N-1})} \end{pmatrix}.$$

В силу формул

$$S = \frac{1}{m_S} \widehat{S}, \quad S_k = \frac{1}{m_{S_k}} \widehat{S}_k; \quad N = \frac{1}{\sigma_{SN}} \widehat{N}, \quad N_k = \frac{1}{\sigma_{SNk}} \widehat{N}_k$$

имеем¹⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= -\frac{1}{m_S} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R^2} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial A} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V^2} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial A} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A^2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_0 &= -\frac{1}{m_S} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial \vec{l}_0} & \dots & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial \vec{l}_{N-1}} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial \vec{l}_0} & \dots & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial \vec{l}_{N-1}} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial \vec{l}_0} & \dots & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial \vec{l}_{N-1}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_0 &= -\left(\frac{1}{m_{S_0}} \quad \dots \quad \frac{1}{m_{S_{N-1}}} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{00}; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0 \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{00}; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0 \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{00}; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0 \partial A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial A} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_0 &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{m_{S_0}} \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{00}; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0 \partial \vec{l}_0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m_{S_{N-1}}} \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial \vec{l}_{N-1}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где во всех элементах выполнена подстановка $(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{L}}_0)$,

¹⁾ Матрица \mathbf{C}_0 записана в виде произведения матриц, поскольку при обычной записи она не умещается в строку.

а также

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{SN}} \left[\frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{L}}_0)} \\ \frac{1}{\sigma_{SN}} \left[\frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{L}}_0)} \\ \frac{1}{\sigma_{SN}} \left[\frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \right]_{(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{L}}_0)} \\ \frac{1}{\sigma_{N_0}} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \left[\frac{\partial \widehat{N}_0(R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_0) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{l}}_{00})} \\ \dots \\ \frac{1}{\sigma_{N_{N-1}}} \left(\frac{\varepsilon_{N-1}}{\varepsilon} \right) \left[\frac{\partial \widehat{N}_{N-1}(R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1}} \right]_{(R, V, A, \vec{l}_{N-1}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{l}}_{0, N-1})} \end{pmatrix}.$$

В уравнениях (1.2.33) умножим первые три строки на m_S , а последующие строки — на $m_{S_0}, \dots, m_{S_{N-1}}$ соответственно. Уравнения при этом заменятся на эквивалентные, а матрицы, входящие в уравнения (1.2.33), примут вид

$$\mathbf{A} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R^2} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial A} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V^2} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial A} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial \vec{l}_0} & \dots & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial R \partial \vec{l}_{N-1}} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial \vec{l}_0} & \dots & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial V \partial \vec{l}_{N-1}} \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial \vec{l}_0} & \dots & \frac{\partial^2 \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0; R, V, A, \vec{L})}{\partial A \partial \vec{l}_{N-1}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_0 \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_0 \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_0 \partial A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial R} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial V} & \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0k}; R, V, A, \vec{l}_k)}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial A} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{S}_0(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{00}; R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0 \partial \vec{l}_0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 \widehat{S}_{N-1}(R_0, V_0, A_0, \vec{l}_{0, N-1}; R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1} \partial \vec{l}_{N-1}} \end{pmatrix},$$

а также

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{m_S}{\sigma_{SN}} \left[\frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \right] \\ \frac{m_S}{\sigma_{SN}} \left[\frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \right] \\ \frac{m_S}{\sigma_{SN}} \left[\frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \right] \\ \frac{m_{S0}}{\sigma_{N0}} \left(\begin{array}{c} \varepsilon_0 \\ \varepsilon \end{array} \right) \left[\frac{\partial \widehat{N}_0(R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0} \right] \\ \dots \\ \frac{m_{SN-1}}{\sigma_{NN-1}} \left(\begin{array}{c} \varepsilon_{N-1} \\ \varepsilon \end{array} \right) \left[\frac{\partial \widehat{N}_{N-1}(R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1}} \right] \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \\ \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \\ \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \\ \frac{\partial \widehat{N}_0(R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0} \\ \dots \\ \frac{\partial \widehat{N}_{N-1}(R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1}} \end{pmatrix},$$

где во всех элементах выполнена подстановка $(R, V, A, \vec{L}) = (\widehat{R}_0, \widehat{V}_0, \widehat{A}_0, \widehat{\vec{L}}_0)$. При этом матричное уравнение (1.2.33) примет вид

$$\widehat{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} R_1 \\ V_1 \\ A_1 \\ \left(\begin{array}{c} \varepsilon_0 \\ \varepsilon \end{array} \right) \overleftarrow{l}_{10} \\ \dots \\ \left(\begin{array}{c} \varepsilon_{N-1} \\ \varepsilon \end{array} \right) \overleftarrow{l}_{1N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \widehat{\mathbf{n}},$$

где

$$\widehat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial R} \\ \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial V} \\ \frac{\partial \widehat{N}(R, V, A, \vec{L})}{\partial A} \\ \frac{\partial \widehat{N}_0(R, V, A, \vec{l}_0)}{\partial \vec{l}_0} \\ \dots \\ \frac{\partial \widehat{N}_{N-1}(R, V, A, \vec{l}_{N-1})}{\partial \vec{l}_{N-1}} \end{pmatrix}. \quad (1.2.34)$$

Решая это уравнение, получаем

$$\begin{pmatrix} \varepsilon R_1 \\ \varepsilon V_1 \\ \varepsilon A_1 \\ \varepsilon_0 \overleftarrow{l}_{10} \\ \dots \\ \varepsilon_{N-1} \overleftarrow{l}_{1N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{I}^{-1} \widehat{\mathbf{n}}.$$

Подставляя этот результат в формулы (1.2.28), окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} \widehat{R} \\ \widehat{V} \\ \widehat{A} \\ \widehat{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \\ A_0 \\ \overleftarrow{L}_0 \end{pmatrix} + \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \widehat{\mathbf{n}}. \quad (1.2.35)$$

Отметим, что в силу формул (1.2.20) матрица $\widehat{\mathbf{I}}$ совпадает с матрицей Фишера (1.2.3).

Перейдем к вычислению корреляционной матрицы совместных оценок (1.2.35), получаемых на основе метода максимального правдоподобия (1.2.17). Введем обозначения

$$\widehat{\vec{l}} = \begin{pmatrix} \widehat{R} \\ \widehat{V} \\ \widehat{A} \\ \widehat{L} \end{pmatrix}, \quad \vec{l}_0 = \begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \\ A_0 \\ \overleftarrow{L}_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{l}_1 = \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \widehat{\mathbf{n}}.$$

Координаты этих векторов будем единообразно обозначать символами l_α , $l_{0\alpha}$ и $l_{1\alpha}$ соответственно.

Из определения (1.2.19) шумовой функции $\widehat{N}(R, V, A, \overleftarrow{L})$ и [12, формула (3.7.27)] видно, что координаты случайного вектора $\widehat{\mathbf{n}}$ (1.2.34) имеют нулевое математическое ожидание. Поэтому и координаты вектора $\widehat{\mathbf{I}}^{-1} \widehat{\mathbf{n}}$, являющиеся их линейными комбинациями, также имеют нулевые математические ожидания. Тем самым, смещение вектора $\widehat{\vec{l}}$ относительно \vec{l}_0 равно нулю, т.е. \vec{l}_0 является математическим ожиданием вектора $\widehat{\vec{l}}$. Рассчитаем элементы корреляционной матрицы \mathbf{K} . В силу формулы (1.2.35) имеем

$$K_{\alpha\beta} = \langle l_{1\alpha} l_{1\beta} \rangle = \left\langle \left(\sum_{\gamma=1}^{Np+3} \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} \hat{n}_\gamma \right) \left(\sum_{\delta=1}^{Np+3} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} \hat{n}_\delta \right) \right\rangle,$$

где $\frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega}$ — элементы матрицы, обратной к $\widehat{\mathbf{I}}$, \hat{n}_γ — координаты вектора $\widehat{\mathbf{n}}$ (1.2.34), а угловые скобки $\langle \cdot \rangle$ означают математическое ожидание. Продолжим вычисления:

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{Np+3} \sum_{\delta=1}^{Np+3} \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} \langle \hat{n}_\gamma \hat{n}_\delta \rangle. \quad (1.2.36)$$

Введем сокращенные обозначения

$$\begin{aligned}\pi'_0(t) &= \pi'(t) - s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0) - \nu, \\ s(t) &= s(t, R_0, V_0, A_0, \vec{L}_0), \\ s_\alpha(t) &= \left. \frac{\partial s(t, R, V, A, \vec{L})}{\partial l_\alpha} \right|_{\vec{l}=\vec{l}_0}.\end{aligned}$$

Тогда в силу определения (1.2.19) координаты \hat{n}_α вектора $\hat{\mathbf{n}}$ переписутся в виде

$$\hat{n}_\alpha = \int_0^T \frac{s_\alpha(t)}{s(t) + \nu} \pi'_0(t) dt.$$

Займемся вычислением $\langle \hat{n}_\gamma \hat{n}_\delta \rangle$. Имеем (здесь использованы [12, формула (3.7.27)] и определение матрицы $\hat{\mathbf{I}} = (\hat{I}_{\gamma\delta})$)

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}_\gamma \hat{n}_\delta \rangle &= \left\langle \left(\int_0^T \frac{s_\gamma(t)}{s(t) + \nu} \pi'_0(t) dt \right) \left(\int_0^T \frac{s_\delta(t)}{s(t) + \nu} \pi'_0(t) dt \right) \right\rangle = \\ &= \int_0^T \frac{s_\gamma(t)}{s(t) + \nu} \frac{s_\delta(t)}{s(t) + \nu} (s(t) + \nu) dt = \hat{I}_{\gamma\delta}.\end{aligned}$$

Подставляя этот результат в формулу (1.2.36), получаем

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} \hat{I}_{\gamma\delta} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} = \sum_{\delta=1}^p \mathbf{1}_{\alpha\delta} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} = \frac{A_{\alpha\beta}}{\Omega}.$$

Вспоминая, что $\frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega}$ — элементы матрицы, обратной к $\hat{\mathbf{I}}$, окончательно получаем

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{I}}^{-1}. \quad (1.2.37)$$

В силу формулы (1.2.20) это равенство можно также переписать в виде

$$\mathbf{K} = \left[\left. \frac{\partial^2 H(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \right|_{\vec{l}_1, \vec{l}_2 = \vec{l}_0} \right]_{i,j=1,\dots,p}^{-1}.$$

Заметим, что формула (1.2.37) совпадает с формулой (1.1.7) для корреляционной матрицы совместно-эффективных оценок. Тем самым показано, что оценки, получаемые на основе метода максимального правдоподобия, являются асимптотически (т.е. при малых ε и ε_k) эффективными.

Подчеркнем еще раз, что равенство (1.2.37) является приближенным ввиду использования при ее выводе метода малого параметра, и его точность повышается с уменьшением параметров ε и ε_k , что эквивалентно

росту ОСШ. Поскольку порядок величины ε_k в \sqrt{N} раз больше порядка величины ε , можно считать, что единственным ограничением является малость ε_k , что эквивалентно большому значению ОСШ для одного импульса $z_{Sk} = 1/\varepsilon_k$. Обсудим условия большого значения $z_{Sk} = \frac{m_{Sk}}{\sigma_{SNk}}$. В силу формул (1.2.22)

$$\begin{aligned} z_{Sk} &= \frac{\int_0^T \ln(1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) (s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}) + \nu) dt - \int_0^T s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}) dt}{\nu \int_0^T \ln^2(1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) (1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) dt} = \\ &= \sqrt{\nu} \frac{\int_0^T \ln(1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) (1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) dt - \frac{1}{\nu} \int_0^T s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k}) dt}{\sqrt{\int_0^T \ln^2(1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) (1 + s_0(\tilde{t}_{0k}, \vec{l}_{0k})/\nu) dt}} = \\ &= \sqrt{\nu} \frac{\int_0^T \ln(1 + s_0(t, \vec{l}_{0k})/\nu) (1 + s_0(t, \vec{l}_{0k})/\nu) dt - \frac{1}{\nu} \int_0^T s_0(t, \vec{l}_{0k}) dt}{\sqrt{\int_0^T \ln^2(1 + s_0(t, \vec{l}_{0k})/\nu) (1 + s_0(t, \vec{l}_{0k})/\nu) dt}}. \end{aligned}$$

Представим функцию $s_0(t, \vec{l}_{0k})$ в виде

$$s_0(t, \vec{l}_{0k}) = a f_0(t/\tau, \vec{l}_{0k}).$$

(Подразумевается, что τ может увеличиваться только в тех пределах, пока не нарушаются ограничения на скважность и пока вся последовательность импульсов уместится в отрезке $[0, T]$.) Тогда выражение для z_{Sk} можно переписать в виде

$$\begin{aligned} z_{Sk} &= \sqrt{\nu} \frac{\int_0^T \ln[1 + q f_0(t/\tau, \vec{l}_{0k})] [1 + q f_0(t/\tau, \vec{l}_{0k})] dt - q \int_0^T f_0(t/\tau, \vec{l}_{0k}) dt}{\sqrt{\int_0^T \ln^2[1 + q f_0(t/\tau, \vec{l}_{0k})] [1 + q f_0(t/\tau, \vec{l}_{0k})] dt}} = \\ &= \sqrt{\nu\tau} \frac{\int_0^{T/\tau} \ln[1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] [1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] dx - q \int_0^{T/\tau} f_0(x, \vec{l}_{0k}) dx}{\sqrt{\int_0^{T/\tau} \ln^2[1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] [1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] dx}} = \\ &= \sqrt{\nu\tau} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] [1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] dx - q \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, \vec{l}_{0k}) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2[1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] [1 + q f_0(x, \vec{l}_{0k})] dx}}, \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

где $q = a/\nu$. По сути последнее выражение только множителем \sqrt{N} отличается от аналогичного выражения (1.1.59). Поэтому справедлив следующий аналог теоремы 1.1.5.

Теорема 1.2.6. Пусть значение векторного параметра \vec{l}_0 фиксировано. Пусть функция $f_0(x, \vec{l}_0)$ непрерывна, неотрицательна, имеет компактный носитель и хотя бы в одной точке отлична от нуля. (а) Если ν и τ постоянны, то $z_{Sk} \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$. (б) Если a и τ постоянны, то $z_{Sk} \rightarrow \sqrt{\tau a \int_0^{+\infty} f_0(x, \vec{l}_0) dx}$ при $\nu \rightarrow 0$. (с) Если a и ν постоянны, то $z_{Sk} \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. (д) Если a и τ постоянны, то $z_{Sk} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

В качестве примера приведем ОСШ z_{Sk} для нормированного прямоугольного импульса

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем

$$z_S = \frac{m_S}{\sigma_{SN}} = \sqrt{\nu\tau} \frac{(1+q) \ln(1+q) - q}{\sqrt{(1+q) \ln(1+q)}}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 1.2.7.

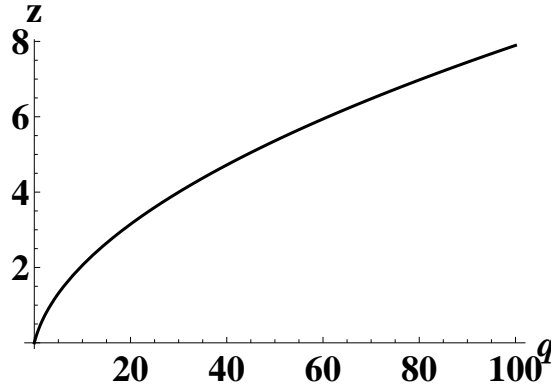


Рис. 1.2.7: Зависимость z_S от q при $\nu\tau = 1$

Полученные выражения для характеристик совместно-эффективных оценок могут быть использованы для расчета характеристик асимптотически эффективных оценок параметров движения в условиях высокой апостериорной точности при наличии быстрых флуктуаций. В частности, их можно использовать для расчета характеристик совместных оценок максимального правдоподобия [37, 43, 102], если все отношения сигнал-шум (1.2.38) достаточно большие. Это приводит к тому, что в условиях быстрых флуктуаций необходимо, чтобы были большими отношения сигнал-шум для всех импульсов в отдельности, а не как в случае

медленных флуктуаций отношение сигнал-шум (1.1.59) для всей последовательности импульсов. Во-первых, это делает невозможным добиться большого отношения сигнал-шум в условиях быстрых флуктуаций путем увеличения количества импульсов, во-вторых, необходимо чтобы все импульсы обладали достаточной энергией по отдельности.

Использование метода максимального правдоподобия в предложенном выше виде подразумевает формирование логарифма ФОП как функции $3 + Nr$ переменных, где p — количество неинформативных параметров. Для поиска положения максимума функции нескольких переменных требуется построение многоканального приемника, осуществляющего обработку принимаемой реализации по всем параметрам, причем в случае наличия в модели быстрых флуктуаций сложность аппаратной реализации приемника увеличится существенно даже по сравнению с приемником максимального правдоподобия, осуществляющим обработку в условиях медленных флуктуаций. Так, например, если в модели принимаемого сигнала присутствует 2 неинформативных параметра, используется всего $N = 3$ импульса, а поиск положения максимума логарифма ФОП проводится по 10 значениям каждого параметра, то, согласно методу максимального правдоподобия, необходимо рассчитать 10^9 значений логарифма ФОП и найти наибольший из них. Очевидно, это довольно большой объем вычислений и для его осуществления потребуются либо значительные затраты времени, либо мощный компьютер с возможностями параллельных вычислений.

1.3 Основные результаты и выводы

1. Найдены общие выражения для характеристик совместно-эффективных оценок дальности, скорости и ускорения медленно и быстро флуктуирующих целей при наличии конечного числа произвольных неинформативных параметров. Исследовано влияние наличия неинформативных параметров на точность оценок.

2. При совместной оценке дальности, скорости и ускорения медленно флуктуирующей цели характеристики совместно-эффективных оценок скорости и ускорения инвариантны к наличию конечного числа произвольных неинформативных параметров. Наличие неинформативных параметров может привести лишь к снижению точности совместно-эффективной оценки дальности. При отдельной оценке параметров движения возможно снижение точности оценок в условиях априорной параметри-

ческой неопределенности.

3. При совместной оценке дальности, скорости и ускорения быстро флуктуирующей цели точность совместно-эффективных оценок в общем случае снижается вследствие наличия неинформативных параметров. В частности, при обработке медленно флуктуирующей последовательности как быстро флуктуирующей относительные потери в точности оценок вследствие наличия неинформативных параметров одинаковы для всех трех параметров движения.

4. Показано, что оценки максимального правдоподобия параметров движения при наличии конечного числа произвольных регулярных неинформативных параметров, как в условиях медленных флуктуаций, так и в условиях быстрых флуктуаций, являются асимптотически эффективными, т.е. приближаются по точности к эффективным с ростом соответствующего отношения сигнал-шум.

5. При медленных флуктуациях цели необходимо обеспечить большое значение отношения сигнал-шум для всей последовательности оптических импульсов. Больших значений отношения сигнал-шум в условиях медленных флуктуаций можно добиться увеличением количества используемых импульсов в зондирующей последовательности, увеличением амплитуды импульсов при фиксированном уровне шума или увеличением длительности импульсов при фиксированной амплитуде.

6. Чтобы обеспечить асимптотическую эффективность оценок максимального правдоподобия в условиях быстрых флуктуаций необходимо иметь большие значения отношения сигнал-шум для каждого отдельного импульса принимаемой последовательности. Поэтому увеличить требуемое отношение сигнал-шум посредством увеличения количества импульсов в этом случае невозможно. Большие отношения сигнал-шум для отдельных импульсов в условиях быстрых флуктуаций можно обеспечить посредством увеличения амплитуды каждого импульса при фиксированном уровне шума, а также посредством увеличения длительности импульсов при фиксированной амплитуде.

7. Наличие параметрической неопределенности приводит к необходимости усложнения аппаратной реализации устройства, осуществляющего обработку принимаемой реализации в соответствии с методом максимального правдоподобия, по сравнению с приемником, осуществляющим оценку максимального правдоподобия в условиях отсутствия параметрической априорной неопределенности.

Глава 2

Квазиправдоподобные оценки параметров движения

2.1 Свойства квазиправдоподобных оценок в условиях высокой апостериорной точности

Как было показано в главе 1, техническая реализация приемника, осуществляющего обработку принимаемой смеси сигнала и шума в соответствии с методом максимального правдоподобия (в случае медленных флуктуаций) подразумевает нахождение положения максимума функции $3 + p$ переменных, где p — число неинформативных параметров. Упростить аппаратную реализацию приемника можно, воспользовавшись квазиправдоподобным методом оценки, позволяющим обойтись без оценки неинформативных параметров и тем самым находить положение максимума функции лишь 3 переменных. Кроме того, квазиправдоподобный метод позволяет производить обработку принимаемой реализации в случае, когда форма интенсивности принимаемого полезного сигнала известна лишь приближенно. Естественно, происходит некоторая потеря точности оценок параметров движения по сравнению с точностью оценок максимального правдоподобия.

Квазиправдоподобный метод можно использовать в качестве альтернативы методу максимального правдоподобия в условиях априорной параметрической неопределенности, рассмотренной в главе 1; в этом случае форму импульса $s_1(t)$ естественно задавать путем выбора конкретных значений неинформативных параметров импульса $s_0(t, \vec{l})$ в (1.1.2).

Предположим, что принимаемый (обрабатываемый) сигнал является результатом рассеяния последовательности оптических импульсов (1.1.1) объектом, находящимся на дальности R_0 и обладающего радиальными

скоростью V_0 и ускорением A_0 . В этом случае интенсивность принимаемого сигнала имеет вид [23, 93]

$$\begin{aligned} s(t, \vec{l}_0) &= s(t, R_0, V_0, A_0) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где интенсивность $s_0(t)$ принимаемого импульса в общем случае отличается от интенсивности $\hat{s}(t)$ в зондирующем сигнале (1.1.1). Здесь через R_0 , V_0 и A_0 обозначены истинные значения неизвестных параметров R , V и A . Как и ранее, предполагается выполненным условие (1.1.3), а также что интервал наблюдения $[0, T]$ больше длительности всей последовательности оптических импульсов, т.е. $T > N\vartheta$, причем величина скважности последовательности не менее двух, так что отдельные импульсы не перекрываются.

Идея метода квазиправдоподобной оценки состоит в том, что для синтеза алгоритма оценки используется не форма интенсивности сигнала, совпадающая с неизвестной априори $s(t, \vec{l}_0)$, а некоторая предполагаемая (ожидаемая) форма интенсивности, в общем случае отличающаяся от $s(t, \vec{l}_0)$:

$$\begin{aligned} s_{1N}(t, \vec{l}) &= s_{1N}(t, R, V, A) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_1(t - 2R/c - (k - \mu)(1 + 2V/c)\vartheta - A(k - \mu)^2\vartheta^2/c). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Здесь $\vec{l} = (R, V, A)$ — вектор дальности, скорости и ускорения, которые требуется оценить, $s_1(t)$ — предполагаемая форма интенсивности отдельного импульса рассеянного сигнала, $s_{1N}(t)$ — предположительная форма рассеянного сигнала, то есть форма последовательности импульсов, на которую настраивается приемник.

Предположим, что рассеянный сигнал с интенсивностью (2.1.1) наблюдается на фоне оптического шума, представляющего собой стационарный пуассоновский процесс с интенсивностью ν . В результате, доступный для обработки принимаемый сигнал $\pi(t)$ представляет собой реализацию пуассоновского процесса с интенсивностью $\beta(t, \vec{l}) = s(t, \vec{l}) + \nu$, где значение векторного параметра $\vec{l} = (R, V, A)$ подлежит оценке, а величина ν , возможно, неизвестна. Синтез приемника проводится для

предполагаемого сигнала с интенсивностью $\beta_1(t, \vec{l}) = s_{1N}(t, \vec{l}) + \nu_1$ где ν_1 — предполагаемая интенсивность оптического шума.

Если бы форма интенсивности принимаемого сигнала $s(t, \vec{l})$ и интенсивность шума ν были априори известны, то для оценки параметра \vec{l} можно было бы воспользоваться методом максимального правдоподобия [55], см. также гл. 1. Для этого следовало бы взять в качестве оценки вектора \vec{l} положение наибольшего максимума логарифма ФОП [94, формула (3)], как это было сделано в главе 1.

В рассматриваемом случае приемник вместо логарифма ФОП формирует решающую статистику [93, 128]

$$L(\vec{l}) = \int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l})/\nu_1) d\pi(t) - \int_0^T s_{1N}(t, \vec{l}) dt. \quad (2.1.3)$$

Здесь $\vec{l} = (R, V, A)$.

В качестве квазиправдоподобной оценки параметров движения, по аналогии с оценкой максимального правдоподобия, используется положение наибольшего максимума решающей статистики

$$\widehat{\vec{l}} = (\widehat{R}, \widehat{V}, \widehat{A}) = \arg \sup_{(R, V, A)} L(R, V, A). \quad (2.1.4)$$

Очевидно, в случае совпадения форм интенсивностей принимаемого сигнала (2.1.1) и ожидаемого сигнала (2.1.2), а также совпадения истинной интенсивности оптического шума с предполагаемой, решающая статистика (2.1.3) совпадает с логарифмом функционала отношения правдоподобия (1.1.44). В этом случае квазиправдоподобная оценка переходит в оценку максимального правдоподобия.

Чтобы найти характеристики квазиправдоподобной оценки, представим решающую статистику в виде суммы сигнальной и шумовой функций, а также некоторой константы [55]

$$L(\vec{l}) = S(\vec{l}_0, \vec{l}) + N(\vec{l}) + C. \quad (2.1.5)$$

Сигнальная функция в формуле (2.1.5) определяется из соотношения $S(\vec{l}_0, \vec{l}) = \langle L(\vec{l}_0) \rangle - C$, где символом $\langle \cdot \rangle$ обозначено условное математическое ожидание в предположении, что принимаемая реализация $\pi(t)$ соответствует значению \vec{l}_0 параметра \vec{l} . Величина C является условным математическим ожиданием решающей статистики в условиях отсутствия полезного сигнала в принимаемой реализации, и определяется

выражением

$$C = \nu \int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l})/\nu_1) dt - \int_0^T s_{1N}(t, \vec{l}) dt. \quad (2.1.6)$$

Поскольку параметры $\vec{l} = (R, V, A)$ являются неэнергетическими, величина C не зависит от оцениваемых параметров R, V и A .

Повторяя рассуждения при выводе формулы (1.1.46) и учитывая формулу (2.1.6), получаем формулу для сигнальной функции (2.1.5)

$$\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) = \int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l})/\nu_1) s(t, \vec{l}_0) dt. \quad (2.1.7)$$

Шумовой функцией называют функцию, описывающую отклонение решающей статистики (2.1.5) от ее математического ожидания. В силу определения шумовую функцию можно вычислять по формуле

$$\widehat{N}(\vec{l}) = L(\vec{l}) - \langle L(\vec{l}) \rangle = L(\vec{l}) - \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) - C. \quad (2.1.8)$$

Подставляя в эту формулу имеющиеся представления для $L(\vec{l})$ (2.1.3), $\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})$ (2.1.7) и C (2.1.6), получаем

$$\widehat{N}(\vec{l}) = \int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l})/\nu_1) (\pi'(t) - s(t, \vec{l}_0) - \nu) dt. \quad (2.1.9)$$

Отметим, что поскольку сигнальная функция является математическим ожиданием решающей статистики, а шумовая — разностью решающей статистики и сигнальной функцией, математическое ожидание шумовой функции равно нулю. Корреляционная функция шумовой функции определяется выражением

$$\begin{aligned} B_{SN}(\vec{l}_1, \vec{l}_2) &= \langle \widehat{N}(\vec{l}_1) \widehat{N}(\vec{l}_2) \rangle = \\ &= \left\langle \left[\int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l}_1)/\nu_1) \pi'_*(t) dt \right] \left[\int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l}_2)/\nu_1) \pi'_*(t) dt \right] \right\rangle, \end{aligned}$$

где

$$\pi'_*(t) = \pi'(t) - s(t, \vec{l}_0) - \nu.$$

В силу [12, формула (3.7.27)] для корреляционной функции имеем

$$B_{SN}(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \int_0^T \ln[1 + s_{1N}(t, \vec{l}_1)/\nu_1] \ln[1 + s_{1N}(t, \vec{l}_2)/\nu_1] [s(t, \vec{l}_0) + \nu] dt. \quad (2.1.10)$$

Будем рассматривать регулярный случай [43, 87], когда интенсивности $s_0(t)$ и $s_1(t)$ отдельных оптических импульсов дифференцируемы.

Положим

$$m_S = \max_{\vec{l}} \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) = \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#),$$

$$\sigma_{SN}^2 = \langle (\widehat{N}(\vec{l}_\#))^2 \rangle = B_{SN}(\vec{l}_\#, \vec{l}_\#),$$

где через $\vec{l}_\# = (R_\#, V_\#, A_\#)$ обозначено положение наибольшего максимума сигнальной функции:

$$\vec{l}_\# = \arg \sup_{\vec{l}} \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}).$$

Поскольку константа C не зависит от R , V и A , при нахождении положения максимума она в дальнейшем учитываться не будет.

Предполагается, что сигнальная функция имеет один ярко выраженный максимум. Введем в рассмотрение отношение сигнал-шум [55]

$$z_S = \frac{m_S}{\sigma_{SN}} = \frac{\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#)}{\sqrt{\langle B_{SN}(\vec{l}_\#, \vec{l}_\#) \rangle}} \quad (2.1.11)$$

и обратную к нему величину

$$\varepsilon = \frac{1}{z_S}.$$

Определим нормированные сигнальную и шумовую функции следующим образом

$$S(\vec{l}_0, \vec{l}) = \frac{1}{m_S} \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}), \quad N(\vec{l}) = \frac{1}{\sigma_{SN}} \widehat{N}(\vec{l}). \quad (2.1.12)$$

Решающая статистика (2.1.5) выражается через них по формуле

$$L(\vec{l}) = \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) + \widehat{N}(\vec{l}) = m_S S(\vec{l}_0, \vec{l}) + \sigma_{SN} N(\vec{l}) =$$

$$= m_S \left(S(\vec{l}_0, \vec{l}) + \varepsilon N(\vec{l}) \right).$$

Вместо положения максимума $L(\vec{l})$ можно искать максимум нормированной решающей статистики

$$M(\vec{l}) = S(\vec{l}_0, \vec{l}) + \varepsilon N(\vec{l}). \quad (2.1.13)$$

Нормированные функции обладают свойствами

$$\max_{\vec{l}} S(\vec{l}_0, \vec{l}) = S(\vec{l}_0, \vec{l}_\#) = 1, \quad \langle N^2(\vec{l}_\#) \rangle = 1.$$

Для анализа точности квазиправдоподобных оценок введем в рассмотрение квазиинформационную матрицу

$$\hat{\mathbf{I}} = \left[-\frac{\partial^2 \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} \right]_{i,j=1,\dots,p}, \quad (2.1.14)$$

где $\vec{l}_\#$ — точка, в которой сигнальная функция достигает максимума. В этом параграфе полагаем, что у решающей статистики имеется только один ярко выраженный максимум.

В дальнейшем нам понадобится следующий аналог леммы 1.1.4.

Лемма 2.1.7.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} = & - \int_0^T \frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{(s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_j} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} dt + \\ & + \int_0^T \left(\frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1} \right) \frac{\partial^2 s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} dt. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сводится к непосредственным вычислениям. \square

В настоящем параграфе будем считать, что отношение сигнал-шум (2.1.11) достаточно велико, так что квазиправдоподобная оценка обладает высокой апостериорной точностью [55]. Будем искать оценку $\widehat{\vec{l}}$ значения \vec{l}_0 , как положения наибольшего максимума (нормированной) решающей статистики (2.1.13). В точке максимума все частные производные этой функции должны обращаться в ноль. Уравнения правдоподобия

$$\left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} + \varepsilon \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\widehat{\vec{l}}} = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.1.16)$$

будем использовать в качестве уравнений для нахождения $\widehat{\vec{l}}$. При фиксированной реализации $\pi(t)$ функции S и N можно также считать заданными. Очевидно, решение $\widehat{\vec{l}}$ уравнений (2.1.16) является функцией параметра ε . Предположим, что имеет место регулярный случай [87], то есть функции S и N дифференцируемы. Искать решение уравнений будем в виде ряда по ε : зависимость $\widehat{\vec{l}}$ от ε будем искать в виде

$$\widehat{\vec{l}} = \vec{l}_\# + \varepsilon \vec{l}_1 + \vec{o}(\varepsilon).$$

В этом выражении каждая координата вектора $\vec{\sigma}(\varepsilon)$ — величина большего порядка малости, чем ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условимся координаты вектора \vec{l}_1 обозначать $l_{1\alpha}$ и, соответственно, l_α — для вектора \vec{l} .

Выражение, стоящее в левой части каждого из уравнений (2.1.16), разложим по формуле Тейлора по степеням ε до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} + \varepsilon \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} + \\ & + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial^2 N(\vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} l_{1\alpha} + o(\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и оставим только члены порядка ε :

$$\left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} + \varepsilon \left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} l_{1\alpha} + o(\varepsilon) = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$\left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} = 0, \quad (2.1.17)$$

$$\left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} + \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} l_{1\alpha} = 0. \quad (2.1.18)$$

Здесь каждая строка представляет собой p уравнений, соответствующих различным $i = 1, 2, \dots, p$.

Уравнение (2.1.17) выполняется, поскольку $\vec{l}_\#$ — точка максимума. Выражение $\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} l_{1\alpha}$ в уравнении (2.1.18) представляет собой операцию умножения вектора \vec{l}_1 , имеющего координаты $l_{1\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, p$, на матрицу (взятую со знаком минус)

$$\mathbf{I} = \left(- \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_\alpha} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} \right)_{i,\alpha=1,\dots,p}.$$

Набор чисел $\left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#}$, $i = 1, \dots, p$, является случайным вектором. Таким образом, равенство (2.1.18) является системой линейных уравнений. Его решением является вектор

$$\vec{l}_1 = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{n}, \quad (2.1.19)$$

где \mathbf{n} — вектор с координатами $\left. \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right|_{\vec{l}=\vec{l}_\#}$, $i = 1, \dots, p$. Таким образом, для вектора $\widehat{\vec{l}}$, представляющего собой квазиправдоподобную оценку параметров рассеянного сигнала, получаем представление

$$\widehat{\vec{l}} = \vec{l}_\# + \varepsilon \mathbf{I}^{-1} \mathbf{n}, \quad (2.1.20)$$

где векторная случайная величина \mathbf{n} (в силу формул (2.1.9) и (2.1.12)) состоит из координат

$$n_i = \left. \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \right|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} = \frac{1}{\sigma_{SN}} \int_0^T \left. \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i} \right|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} \frac{\pi'(t) - s(t, \vec{l}_0) - \nu}{s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1} dt. \quad (2.1.21)$$

Из формулы (2.1.21), [12, формула (3.7.27)] и известной формулы $\langle \pi'(t) - s(t, \vec{l}_0) - \nu \rangle = 0$ для математического ожидания пуассоновского распределения видно, что случайные величины n_i имеют нулевое математическое ожидание. Следовательно, их линейные комбинации — координаты вектора $\mathbf{I}^{-1} \mathbf{n}$ — также имеют нулевые математические ожидания. Тем самым, $\vec{l}_\#$ является математическим ожиданием вектора $\widehat{\vec{l}}$.

В силу формул (2.1.10) и (2.1.12) для корреляционной функции нормированной шумовой функции $N(\vec{l})$ имеем представление

$$\frac{1}{\sigma_{SN}^2} \int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l}_1)/\nu_1) \ln(1 + s_{1N}(t, \vec{l}_2)/\nu_1) (s(t, \vec{l}_0) + \nu) dt. \quad (2.1.22)$$

Рассчитаем элементы корреляционной матрицы \mathbf{K} случайного вектора $\widehat{\vec{l}}$. В силу формулы (2.1.19) имеем

$$K_{\alpha\beta} \approx \varepsilon^2 \langle l_{1\alpha} l_{1\beta} \rangle = \varepsilon^2 \left\langle \left(\sum_{\gamma=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} n_\gamma \right) \left(\sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} n_\delta \right) \right\rangle,$$

где $\frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega}$ — элементы матрицы, обратной к \mathbf{I} ($A_{\beta\delta}$ — алгебраические дополнения к элементам этой матрицы, а Ω — ее определитель). Продолжим вычисления:

$$K_{\alpha\beta} = \varepsilon^2 \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} \langle n_\gamma n_\delta \rangle. \quad (2.1.23)$$

Вычислим $\langle n_\gamma n_\delta \rangle$. Поскольку $n_i = \frac{\partial N(\vec{l})}{\partial l_i} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#}$, имеем

$$\begin{aligned} \langle n_\gamma n_\delta \rangle &= B_{\gamma\delta} = \\ &= \frac{1}{\sigma_{SN}^2} \int_0^T \frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{(s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_\gamma} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_\delta} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} dt, \end{aligned}$$

что совпадает с первым слагаемым соответствующего элемента (2.1.15) квазиинформационной матрицы. Рассмотрим матрицу

$$\widehat{\mathbf{I}}^0 = \left[\int_0^T \frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{(s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_j} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} dt \right]_{i,j=1,\dots,p}, \quad (2.1.24)$$

которую назовем укороченной ненормированной квазиинформационной матрицей.

Обратим внимание, что укороченная матрица состоит из вторых частных производных корреляционной функции (2.1.22).

Отметим представление для ненормированной квазиинформационной матрицы $\widehat{\mathbf{I}}$ (2.1.14):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{I}} &= \left[\int_0^T \frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{(s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_j} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T \frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1} \frac{\partial^2 s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} dt \right]_{i,j=1,\dots,p}. \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Рассмотрим также нормированную укороченную квазиинформационную матрицу $\mathbf{I}^0 = \frac{1}{m_S} \widehat{\mathbf{I}}^0$.

В терминах \mathbf{I}^0 и $\widehat{\mathbf{I}}^0$ предыдущие вычисления можно продолжить так:

$$\langle n_\gamma n_\delta \rangle = \frac{1}{\sigma_{SN}^2} B_{\gamma\delta} = \frac{1}{\sigma_{SN}^2} (\widehat{\mathbf{I}}^0)_{\gamma\delta} = \frac{m_S}{\sigma_{SN}^2} (\mathbf{I}^0)_{\gamma\delta}.$$

Подставляя этот результат в формулу (2.1.23), получаем

$$K_{\alpha\beta} = \varepsilon^2 \frac{m_S}{\sigma_{SN}^2} \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} (\mathbf{I}^0)_{\gamma\delta} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega} = \frac{1}{m_S} \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\delta=1}^p \frac{A_{\alpha\gamma}}{\Omega} (\mathbf{I}^0)_{\gamma\delta} \frac{A_{\beta\delta}}{\Omega}.$$

Таким образом, приходим к следующей формуле для корреляционной матрицы [55]

$$\mathbf{K} = \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \widehat{\mathbf{I}}^0 \widehat{\mathbf{I}}^{-1}. \quad (2.1.26)$$

Напомним, что рассеянный сигнал имеет вид (2.1.1), а приемник настроен на сигнал (2.1.2), который при значениях параметров, соответствующих точке максимума сигнальной функции (2.1.7), имеет вид

$$\begin{aligned} s_{1N}(t, \vec{l}_{\#}) &= s_{1N}(t, R_{\#}, V_{\#}, A_{\#}) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_1(t - 2R_{\#}/c - (k - \mu)(1 + 2V_{\#}/c)\vartheta - A_{\#}(k - \mu)^2\vartheta^2/c). \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Информативными параметрами сигнала являются параметры движения: дальность R , скорость V и ускорение A . Количество параметров сигнала $p = 3$, значит, корреляционная матрица \mathbf{K} имеет размер 3×3 .

Введем сокращенные обозначения (см. также ниже (2.2.28))

$$\begin{aligned} \tilde{t}_k &= t - 2R/c - (k - \mu)(1 + 2V/c)\vartheta - A(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \\ \tilde{t}_{0k} &= t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \\ \tilde{t}_{\#k} &= t - 2R_{\#}/c - (k - \mu)(1 + 2V_{\#}/c)\vartheta - A_{\#}(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \\ \Delta_k &= 2(R_{\#} - R_0)/c + 2(k - \mu)\vartheta(V_{\#} - V_0)/c + (k - \mu)^2\vartheta^2(A_{\#} - A_0)/c. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Отметим, что

$$\tilde{t}_{0k} = \tilde{t}_{\#k} + \Delta_k,$$

а сигналы (2.1.1) и (2.1.27) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} s(t, \vec{l}_0) &= s(t, R_0, V_0, A_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(\tilde{t}_{\#k} + \Delta_k), \\ s_{1N}(t, \vec{l}_{\#}) &= s_{1N}(t, R_{\#}, V_{\#}, A_{\#}) = \sum_{k=0}^{N-1} s_1(\tilde{t}_{\#k}). \end{aligned}$$

Вычислим матрицу $\widehat{\mathbf{I}}^0$, исходя из формулы (2.1.24). Введем для этого дополнительные сокращенные обозначения

$$\alpha_k^0 = \int_0^T \frac{s_0(t + \Delta_k) + \nu}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \left[\frac{\partial s_1(t)}{\partial t} \right]^2 dt, \quad (2.1.29)$$

$$\widehat{M}_n^0 = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^0 (k - \mu)^n. \quad (2.1.30)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial R} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} &= -\frac{2}{c} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial t}, \\
\frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial V} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} &= -\frac{2\vartheta}{c} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial t}, \\
\frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial A} \Big|_{\vec{l}=\vec{l}_\#} &= -\frac{\vartheta^2}{c} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.1.31}$$

Предполагая, что скважность достаточно велика и поэтому носители отдельных импульсов $s_0(\tilde{t}_{0k})$ и $s_1(\tilde{t}_{\#k})$ последовательностей с разными номерами k не пересекаются, для интегралов, входящих в (2.1.24), имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{(s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l}_\#)}{\partial l_i} \frac{\partial s_{1N}(t, \vec{l}_\#)}{\partial l_j} dt = \\
&= \int_0^T \frac{\nu + \sum_{n=0}^{N-1} s_0(\tilde{t}_{\#n} + \Delta_n)}{(\nu_1 + \sum_{r=0}^{N-1} s_1(\tilde{t}_{\#r}))^2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial l_i} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{\#m})}{\partial l_j} \right) dt = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \frac{s_0(\tilde{t}_{\#k} + \Delta_k) + \nu}{(s_1(\tilde{t}_{\#k}) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial l_i} \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial l_j} dt = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \frac{s_0(t + \Delta_k) + \nu}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_1(t)}{\partial t} \frac{\partial s_1(t)}{\partial t} \frac{\partial \tilde{t}_{\#k}}{\partial l_i} \frac{\partial \tilde{t}_{\#k}}{\partial l_j} dt = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial \tilde{t}_{\#k}}{\partial l_i} \frac{\partial \tilde{t}_{\#k}}{\partial l_j} \int_0^T \frac{s_0(t + \Delta_k) + \nu}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_1(t)}{\partial t} \frac{\partial s_1(t)}{\partial t} dt = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial \tilde{t}_{\#k}}{\partial l_i} \frac{\partial \tilde{t}_{\#k}}{\partial l_j} \alpha_k^0.
\end{aligned}$$

С учетом этой формулы получаем

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mathbf{I}}^0)_{RR} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{c^2} \alpha_k^0 = \frac{4}{c^2} \widehat{M}^0_0, \\
(\widehat{\mathbf{I}}^0)_{RV} &= \frac{4\vartheta}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) \alpha_k^0 = \frac{4}{c^2} \vartheta \widehat{M}^0_1, \\
(\widehat{\mathbf{I}}^0)_{RA} &= \frac{2\vartheta^2}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 \alpha_k^0 = \frac{2}{c^2} \vartheta^2 \widehat{M}^0_2, \\
(\widehat{\mathbf{I}}^0)_{VV} &= \frac{4\vartheta^2}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 \alpha_k^0 = \frac{4}{c^2} \vartheta^2 \widehat{M}^0_2, \\
(\widehat{\mathbf{I}}^0)_{VA} &= \frac{2\vartheta^3}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^3 \alpha_k^0 = \frac{2}{c^2} \vartheta^3 \widehat{M}^0_3, \\
(\widehat{\mathbf{I}}^0)_{AA} &= \frac{\vartheta^4}{c^2} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^4 \alpha_k^0 = \frac{1}{c^2} \vartheta^4 \widehat{M}^0_4.
\end{aligned}$$

Тем самым матрица $\widehat{\mathbf{I}}^0$ имеет следующий вид

$$\widehat{\mathbf{I}}^0 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 4\widehat{M}^0_0 & 4\vartheta\widehat{M}^0_1 & 2\vartheta^2\widehat{M}^0_2 \\ 4\vartheta\widehat{M}^0_1 & 4\vartheta^2\widehat{M}^0_2 & 2\vartheta^3\widehat{M}^0_3 \\ 2\vartheta^2\widehat{M}^0_2 & 2\vartheta^3\widehat{M}^0_3 & \vartheta^4\widehat{M}^0_4 \end{pmatrix}. \quad (2.1.32)$$

Ненормированную квазиинформационную матрицу будем находить, используя формулу (2.1.14). Отметим, что поскольку носители сигналов в последовательности не пересекаются,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left(\frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{s_{1N}(t, \vec{l}_{\#}) + \nu_1} \right) \frac{\partial^2 s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\vec{l} = \vec{l}_{\#}} dt = \\
&= \int_0^T \left(\frac{\nu + \sum_{n=0}^{N-1} s_0(\tilde{t}_{\#n} + \Delta_n)}{\nu_1 + \sum_{r=0}^{N-1} s_1(\tilde{t}_{\#r})} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial l_i \partial l_j} dt = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \left(\frac{s_0(\tilde{t}_{\#k} + \Delta_k) + \nu}{s_1(\tilde{t}_{\#k}) + \nu_1} \right) \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_{\#k})}{\partial l_i \partial l_j} dt.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial R^2} &= \frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial R \partial V} &= \frac{4\vartheta}{c^2} (k - \mu) \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial R \partial A} &= \frac{2\vartheta^2}{c^2} (k - \mu)^2 \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial V^2} &= \frac{4\vartheta^2}{c^2} (k - \mu)^2 \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial V \partial A} &= \frac{2\vartheta^3}{c^2} (k - \mu)^3 \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial A^2} &= \frac{\vartheta^4}{c^2} (k - \mu)^4 \frac{\partial^2 s_1(\tilde{t}_k)}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу

$$\widehat{\mathbf{I}}^- = \widehat{\mathbf{I}}^0 - \widehat{\mathbf{I}}.$$

В силу (2.1.24) и (2.1.25) имеем представление

$$\widehat{\mathbf{I}}^- = \int_0^T \left(\frac{s(t, \vec{l}_0) + \nu}{s_{1N}(t, \vec{l}_\#) + \nu_1} \frac{\partial^2 s_{1N}(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\vec{l} = \vec{l}_\#} dt \right)_{i,j=1,\dots,p}.$$

Введем сокращенные обозначения (Δ_k определено формулой (2.1.28))

$$\begin{aligned}
\alpha_k^- &= \int_0^T \left(\frac{s_0(t + \Delta_k) + \nu}{s_1(t) + \nu_1} \right) \frac{\partial^2 s_1(t)}{\partial t^2} dt = \\
&= \int_0^T \frac{(s_0(t + \Delta_k) + \nu) \frac{\partial s_1(t)}{\partial t} - (s_1(t) + \nu_1) \frac{\partial s_0(t + \Delta_k)}{\partial t}}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \frac{\partial s_1(t)}{\partial t} dt, \\
\widehat{M}_n^- &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^- (k - \mu)^n.
\end{aligned}$$

Используя эти обозначения, для матрицы $\widehat{\mathbf{I}}^- = \widehat{\mathbf{I}}^0 - \widehat{\mathbf{I}}$ получаем представление

$$\widehat{\mathbf{I}}^- = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 4\widehat{M}_0^- & 4\vartheta\widehat{M}_1^- & 2\vartheta^2\widehat{M}_2^- \\ 4\vartheta\widehat{M}_1^- & 4\vartheta^2\widehat{M}_2^- & 2\vartheta^3\widehat{M}_3^- \\ 2\vartheta^2\widehat{M}_2^- & 2\vartheta^3\widehat{M}_3^- & \vartheta^4\widehat{M}_4^- \end{pmatrix}.$$

Отсюда для $\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{\mathbf{I}}^0 - \widehat{\mathbf{I}}^-$ имеем

$$\widehat{\mathbf{I}} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 4(\widehat{M}_0^0 - \widehat{M}_0^-) & 4\vartheta(\widehat{M}_1^0 - \widehat{M}_1^-) & 2\vartheta^2(\widehat{M}_2^0 - \widehat{M}_2^-) \\ 4\vartheta(\widehat{M}_1^0 - \widehat{M}_1^-) & 4\vartheta^2(\widehat{M}_2^0 - \widehat{M}_2^-) & 2\vartheta^3(\widehat{M}_3^0 - \widehat{M}_3^-) \\ 2\vartheta^2(\widehat{M}_2^0 - \widehat{M}_2^-) & 2\vartheta^3(\widehat{M}_3^0 - \widehat{M}_3^-) & \vartheta^4(\widehat{M}_4^0 - \widehat{M}_4^-) \end{pmatrix}.$$

Для сокращения обозначений и согласования с [91] введем обозначения

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \alpha_k^0 - \alpha_k^-, \\ \widehat{M}_k &= \widehat{M}_k^0 - \widehat{M}_k^-.\end{aligned}$$

Отметим, что $\alpha_k = \alpha_k^0 - \alpha_k^-$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \alpha_k^0 - \alpha_k^- = \int_0^T \frac{s_0(t + \Delta_k) + \nu}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \left(\frac{ds_1(t)}{dt} \right)^2 dt - \\ &- \int_0^T \frac{(s_0(t + \Delta_k) + \nu) \frac{ds_1(t)}{dt} - (s_1(t) + \nu_1) \frac{ds_0(t + \Delta_k)}{dt}}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \frac{ds_1(t)}{dt} dt = \quad (2.1.33) \\ &= \int_0^T \frac{1}{s_1(t) + \nu_1} \frac{ds_0(t + \Delta_k)}{dt} \frac{ds_1(t)}{dt} dt.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем представление

$$\widehat{M}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (k - \mu)^n, \quad (2.1.34)$$

которое приводит к представлению $\widehat{\mathbf{I}}$ в виде

$$\widehat{\mathbf{I}} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 4\widehat{M}_0 & 4\vartheta\widehat{M}_1 & 2\vartheta^2\widehat{M}_2 \\ 4\vartheta\widehat{M}_1 & 4\vartheta^2\widehat{M}_2 & 2\vartheta^3\widehat{M}_3 \\ 2\vartheta^2\widehat{M}_2 & 2\vartheta^3\widehat{M}_3 & \vartheta^4\widehat{M}_4 \end{pmatrix}. \quad (2.1.35)$$

Напомним, что матрица $\widehat{\mathbf{I}}$ входит в выражение (2.1.26) для корреляционной матрицы \mathbf{K} .

Таким образом, дисперсии и корреляции квазиправдоподобных оценок в общем случае можно получить из (2.1.26), куда следует подставить (2.1.32) и (2.1.35). Для этого необходимо обращать и перемножать матрицы размером 3×3 , что может потребовать громоздких выкладок. Кроме того, определение величин $R_{\#}$, $V_{\#}$ и $A_{\#}$ требует численного решения системы трансцендентных уравнений $\left[\partial S(\vec{l}_0, \vec{l}) / \partial l_i \right]_{\vec{l} = \vec{l}_{\#}} = 0$, $i = 1, 2, 3$ [55]. Смещения квазиправдоподобных оценок параметров сигнала (2.1.20) имеют вид

$$\begin{aligned}b(R) &= \langle \widehat{R} - R_0 \rangle = R_{\#} - R_0, & b(V) &= \langle \widehat{V} - V_0 \rangle = V_{\#} - V_0, \\ b(A) &= \langle \widehat{A} - A_0 \rangle = A_{\#} - A_0,\end{aligned}$$

и в общем случае не равны нулю. Более того, поскольку смещения оценок не зависят от отношения сигнал-шум, а определяются формой интенсивности принимаемого $s(t, \vec{l})$ и ожидаемого $s_1(t, \vec{l})$ сигналов, в общем случае квазиправдоподобные оценки не состоятельны [55]. Сопоставление результатов расчета по формуле (2.1.26) с корреляционной матрицей оценок максимального правдоподобия, полученной в главе 1, позволяет найти потери в точности квазиправдоподобных оценок дальности, скорости и ускорения по сравнению с точностью оценок максимального правдоподобия.

Приведем некоторые условия, при выполнении которых точка максимума аргумента $\vec{l}_\# = (R_\#, V_\#, A_\#)$ сигнальной функции (2.1.7) совпадает с точкой истинных значений параметров $\vec{l}_0 = (R_0, V_0, A_0)$ рассеянного сигнала $s(t, \vec{l}_0)$ (2.1.1), т.е. оценка является состоятельной и несмещенной.

С учетом формул (2.1.1) и (2.1.2) представление (2.1.7) для сигнальной функции приобретает вид

$$\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln(1 + s_1(t - 2R/c - (k - \mu)(1 + 2V/c)\vartheta - A(k - \mu)^2\vartheta^2/c)/\nu_1 \times \\ \times (s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta - A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c) + \nu) dt.$$

Введем сокращенное обозначение (ср. с Δ_k в (2.1.28))

$$\delta_k = 2(R - R_0)/c + 2(k - \mu)\vartheta(V - V_0)/c + (k - \mu)^2\vartheta^2(A - A_0)/c.$$

Тогда после линейной замены переменных можно написать, что

$$\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-T}^T \ln(1 + s_1(t - \delta_k)/\nu_1) (s_0(t) + \nu) dt. \quad (2.1.36)$$

Напомним, что точка экстремума в отсутствии шума находится из условий (2.1.17):

$$\left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} = 0.$$

Распишем эти условия подробно, имея в виду, что параметров три:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial R} \right]_{\vec{R}=\vec{R}_\#, \vec{V}=\vec{V}_\#, \vec{A}=\vec{A}_\#} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{c} \int_{-T}^T \frac{s_1'(t - \Delta_k)}{s_1(t - \Delta_k) + \nu_1} (s_0(t) + \nu) dt, \\ \left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial V} \right]_{\vec{R}=\vec{R}_\#, \vec{V}=\vec{V}_\#, \vec{A}=\vec{A}_\#} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k - \mu)\vartheta}{c} \int_{-T}^T \frac{s_1'(t - \Delta_k)}{s_1(t - \Delta_k) + \nu_1} (s_0(t) + \nu) dt, \\ \left[\frac{\partial S(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial A} \right]_{\vec{R}=\vec{R}_\#, \vec{V}=\vec{V}_\#, \vec{A}=\vec{A}_\#} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k - \mu)^2 \vartheta^2}{c} \int_{-T}^T \frac{s_1'(t - \Delta_k)}{s_1(t - \Delta_k) + \nu_1} (s_0(t) + \nu) dt, \end{aligned}$$

где Δ_k определено формулой (2.1.28).

Поскольку функции $s_0(t)$ и $s_1(t - \delta_k)$ вне отрезка $[-T, T]$ практически равны нулю, в формуле (2.1.36) и аналогичных ей можно считать, что интеграл берется по интервалу $(-\infty, \infty)$. Это предположение упростит некоторые из дальнейших выкладок.

Заметим, что если максимум по δ одного слагаемого

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + s_1(t - \delta)/\nu_1) (s_0(t) + \nu) dt$$

из формулы (2.1.36) достигается при $\delta = 0$, то максимум всей сигнальной функции (2.1.36) достигается при $R = R_0$, $V = V_0$ и $A = A_0$. Это означает, что оценка является несмещенной. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + s_1(t - \delta)/\nu_1) \nu dt$$

не зависит от δ , это условие равносильно тому, что максимум по δ функции

$$G(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + s_1(t - \delta)/\nu_1) s_0(t) dt \quad (2.1.37)$$

достигается при $\delta = 0$. Выясним, когда это свойство имеет место.

Начнем с общих наблюдений. По физическому смыслу (интенсивность пуассоновского процесса) $s_0(t) \geq 0$ и $s_1(t) \geq 0$.

Рассмотрим функцию

$$r(t) = \ln(1 + s_1(t)/\nu_1). \quad (2.1.38)$$

Используя ее, представление (2.1.37) можно переписать в виде

$$G(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t - \delta) s_0(t) dt. \quad (2.1.39)$$

Лемма 2.1.8. Функция $r(t)$ неотрицательна там, где $s_1(t)$ неотрицательна; равна нулю, где $s_1(t)$ равна нулю и монотонна на тех интервалах, где $s_1(t)$ монотонна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из формулы (2.1.38). \square

Пример 1. В [91] приводится условие на $s_0(t)$ и $s_1(t)$, заключающееся в четности $s_0(t)$ и $s_1(t)$. Утверждения подобного сорта доказываются в теоремах 2.1.9 и 2.1.10. Покажем, что при отсутствии четности обеих функций максимум может достигаться не в точке \vec{t}_0 . Возьмем $s_0(t) = \exp(-|t|)$, а

$$r(t) = \begin{cases} b(a-t), & \text{если } 0 < t < a, \\ a(b+t), & \text{если } -b < t < 0, \\ 0, & \text{в прочих случаях.} \end{cases}$$

На рис. 2.1.1 показаны графики $s_0(t)$, $r(t)$ и их свертки. Видно, что экстремум свертки достигается не в нуле.

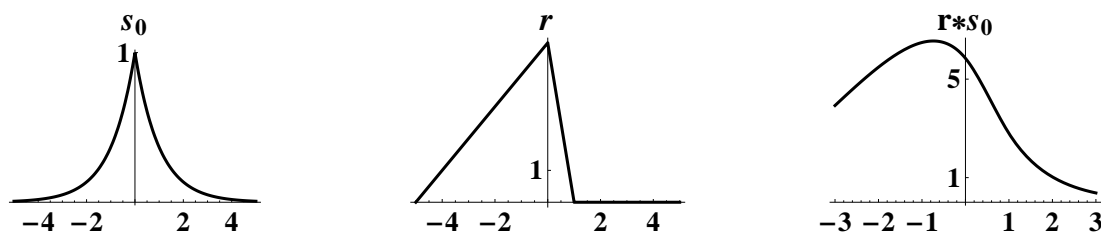


Рис. 2.1.1: Графики r , $s_1(t)$ и их свертки $(r * s_0)(t)$ из примера 1 при $a = -5$ и $b = 1$

В теореме 2.1.9 будем предполагать (это почти очевидное необходимое условие достижения максимума G в точке $\delta = 0$), что максимумы $s_0(t)$ и $s_1(t)$ находятся в одной и той же точке. Без ограничения общности будем считать, что это точка $t = 0$.

Теорема 2.1.9. Пусть функции $s_0(t)$ и $s_1(t)$ являются четными и убывают на $(0, +\infty)$. Тогда максимум функции (2.1.37) достигается в нуле, и тем самым квазиравдоподобная оценка (2.1.4) является несмещенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначением (2.1.38) (функция $r(t)$ неотрицательная, четная и убывает на $(0, +\infty)$). В предположении, что $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
G(0) - G(\delta) &= \int_0^{+\infty} (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt = \\
&= \int_{-\infty}^0 (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt + \int_0^{\delta/2} (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt + \\
&+ \int_{\delta/2}^{\delta} (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt + \int_{\delta}^{+\infty} (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt = \\
&= \int_{-\infty}^0 (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt + \int_{\delta}^{+\infty} (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt + \\
&+ \int_{\delta/2}^{\delta} (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt + \int_0^{\delta/2} (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt = \\
&= \int_{-\infty}^0 (r(t) - r(t - \delta)) s_0(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (r(t + \delta) - r(t)) s_0(t + \delta) dt + \\
&+ \int_0^{\delta/2} (r(t + \delta/2) - r(t - \delta/2)) s_0(t + \delta/2) dt + \int_{-\delta/2}^0 (r(t + \delta/2) - r(t - \delta/2)) s_0(t + \delta/2) dt = \\
&= \int_0^{+\infty} (r(-t) - r(-t - \delta)) s_0(-t) dt + \int_0^{+\infty} (r(t + \delta) - r(t)) s_0(t + \delta) dt + \\
&+ \int_0^{\delta/2} (r(t + \delta/2) - r(t - \delta/2)) s_0(t + \delta/2) dt + \int_0^{\delta/2} (r(-t + \delta/2) - r(-t - \delta/2)) s_0(-t + \delta/2) dt = \\
&= \int_0^{+\infty} (r(t) - r(t + \delta)) s_0(t) dt + \int_0^{+\infty} (r(t + \delta) - r(t)) s_0(t + \delta) dt + \\
&+ \int_0^{\delta/2} (r(t + \delta/2) - r(t - \delta/2)) s_0(t + \delta/2) dt + \int_0^{\delta/2} (r(t - \delta/2) - r(t + \delta/2)) s_0(t - \delta/2) dt = \\
&= \int_0^{+\infty} (r(t) - r(t + \delta)) (s_0(t) - s_0(t + \delta)) dt + \\
&+ \int_0^{\delta/2} (r(t + \delta/2) - r(t - \delta/2)) (s_0(t + \delta/2) - s_0(t - \delta/2)) dt.
\end{aligned}$$

Оба интеграла неотрицательны в силу убывания $r(t)$ и $s_0(t)$.

В силу симметрии случай $\delta < 0$ сводится к рассмотренному. \square

Теорема 2.1.10. Пусть функции $s_0(t)$ и $s_1(t)$ являются четными. Тогда $G'(0) = 0$ (но это не значит, что в точке $\delta = 0$ у функции G максимум, может быть и минимум, см. рис. 2.1.2.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (2.1.39), где $r(t)$ задано формулой (2.1.38), видно, что функция G — четная. А у четной функции $G'(0) = 0$. \square

Рассмотрим общие формулы в частном случае, когда математическое ожидание оценок совпадает с истинными значениями параметров (т. е.

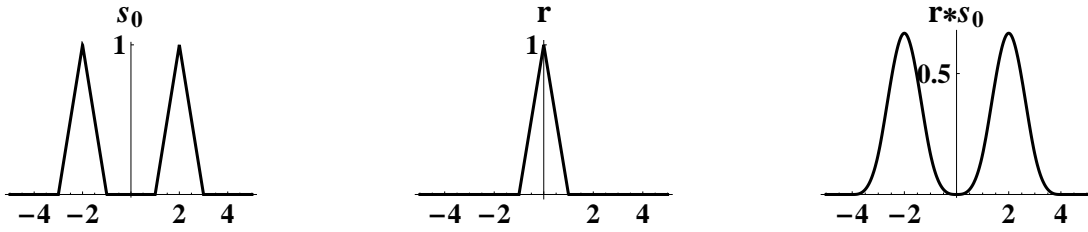


Рис. 2.1.2: Графики четных $r(t)$, $s_1(t)$, для которых их свертка $(r * s_0)(t)$ при $\delta = 0$ имеет минимум, а не максимум

оценки являются несмещенными):

$$\vec{l}_{\#} = \vec{l}_0.$$

В частности, покажем, что при таком предположении корреляционную матрицу удастся представить в виде, позволяющем сравнить ее с аналогичной матрицей для случая оценок максимального правдоподобия, являющихся асимптотически эффективными.

В случае несмещенной оценки числа Δ_k (2.1.28) превращаются в нули. Поэтому величины α_k^0 (2.1.29) становятся независимыми от k и приобретают вид

$$\alpha^0 = \int_0^T \frac{s_0(t) + \nu}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \left(\frac{d s_1(t)}{dt} \right)^2 dt, \quad (2.1.40)$$

а числа (2.1.30) превращаются в числа

$$\widehat{M}_n^0 = \alpha^0 M_n,$$

где M_n задаются формулой (1.1.13). Поэтому матрица (2.1.32) приобретает вид

$$\widehat{\mathbf{I}}^0 = \frac{\alpha^0}{c^2} \begin{pmatrix} 4M_0 & 4\vartheta M_1 & 2\vartheta^2 M_2 \\ 4\vartheta M_1 & 4\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 \\ 2\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 & \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом числа α_k (2.1.33) превращаются в число

$$\alpha = \int_0^T \frac{1}{s_1(t) + \nu_1} \frac{d s_0(t)}{dt} \frac{d s_1(t)}{dt} dt, \quad (2.1.41)$$

а числа (2.1.34) превращаются в числа

$$\widehat{M}_n = \alpha M_n,$$

где M_n задаются формулой (1.1.13). Поэтому матрица (2.1.35) приобретает вид

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\alpha}{c^2} \begin{pmatrix} 4M_0 & 4\vartheta M_1 & 2\vartheta^2 M_2 \\ 4\vartheta M_1 & 4\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 \\ 2\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 & \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix}.$$

Окончательно из формулы (2.1.26) имеем

$$\mathbf{K} = c^2 \frac{\alpha^0}{\alpha^2} \frac{1}{((2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4)} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(M_2M_4 - M_3^2) & \frac{1}{4\vartheta}(M_2M_3 - M_1M_4) & \frac{1}{2\vartheta^2}(M_1M_3 - M_2^2) \\ \frac{1}{4\vartheta}(M_2M_3 - M_1M_4) & \frac{1}{4\vartheta^2}(M_0M_4 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(M_1M_2 - M_0M_3) \\ \frac{1}{2\vartheta^2}(M_1M_3 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(M_1M_2 - M_0M_3) & \frac{1}{\vartheta^4}(M_0M_2 - M_1^2) \end{pmatrix}. \quad (2.1.42)$$

Если сравнивать этот результат с формулой (1.1.26)

$$\mathbf{K} = \frac{c^2}{\hat{\alpha}} \frac{1}{((2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4)} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(M_2M_4 - M_3^2) & \frac{1}{4\vartheta}(M_2M_3 - M_1M_4) & \frac{1}{2\vartheta^2}(M_1M_3 - M_2^2) \\ \frac{1}{4\vartheta}(M_2M_3 - M_1M_4) & \frac{1}{4\vartheta^2}(M_0M_4 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(M_1M_2 - M_0M_3) \\ \frac{1}{2\vartheta^2}(M_1M_3 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(M_1M_2 - M_0M_3) & \frac{1}{\vartheta^4}(M_0M_2 - M_1^2) \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{\alpha} = \int_0^T \frac{1}{s_0(t) + \nu} \left(\frac{ds_0(t)}{dt} \right)^2 dt,$$

для случаям $s_0(t) = s_1(t)$, что соответствует оценке максимального правдоподобия и $\nu = \nu_1$, то видно, что отличие только в коэффициентах α^0/α^2 и $1/\hat{\alpha}$. Таким образом, отношение соответствующих дисперсий и корреляций квазиправдоподобной состоятельной оценки и оценки максимального правдоподобия является одним и тем же для всех оцениваемых параметров движения (дальности, скорости и ускорения) и имеет вид

$$\chi = \frac{D^*}{D} = \frac{\hat{\alpha}\alpha^0}{\alpha^2}.$$

Здесь D^* — дисперсия квазиправдоподобной оценки одного из параметров R , V или A , а D — дисперсия оценки максимального правдоподобия того же параметра.

Для анализа величины χ удобно перейти к безразмерным переменным. Представим сигналы в виде

$$\begin{aligned} s_0(t) &= a_0 f_0(t), \\ s_1(t) &= a_1 f_1(t), \end{aligned}$$

где символом a_0 обозначен максимум сигнала $s_0(t)$, символом a_1 — максимум сигнала $s_1(t)$; таким образом, максимумы функций $f_0(t)$ и $f_1(t)$ равны единице. Введем безразмерные величины, имеющие смысл отношений интенсивностей сигнал-фон

$$q_0 = \frac{a_0}{\nu}, \quad q_1 = \frac{a_1}{\nu_1}.$$

В этих обозначениях отношение χ соответствующих дисперсий и корреляций состоятельной квазиправдоподобной оценки и оценки максимального правдоподобия принимает вид

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{D^*}{D} = \frac{\hat{\alpha}\alpha^0}{\alpha^2} = \\ &= \frac{\left(\int_0^T \frac{1}{(s_0(t)+\nu)} \left(\frac{ds_0(t)}{dt} \right)^2 dt \right) \left(\int_0^T \frac{s_0(t)+\nu}{(s_1(t)+\nu_1)^2} \left(\frac{ds_1(t)}{dt} \right)^2 dt \right)}{\left(\int_0^T \frac{1}{s_1(t)+\nu_1} \frac{ds_0(t)}{dt} \frac{ds_1(t)}{dt} dt \right)^2} = \\ &= \frac{\left(\int_0^T \frac{1}{1+\frac{s_0(t)}{\nu}} \left(\frac{ds_0(t)}{dt} \right)^2 dt \right) \left(\int_0^T \frac{1+\frac{s_0(t)}{\nu}}{(1+\frac{s_1(t)}{\nu_1})^2} \left(\frac{ds_1(t)}{dt} \right)^2 dt \right)}{\left(\int_0^T \frac{1}{1+\frac{s_1(t)}{\nu_1}} \frac{ds_0(t)}{dt} \frac{ds_1(t)}{dt} dt \right)^2} = \tag{2.1.43} \\ &= \frac{\left(\int_0^T \frac{1}{1+q_0 f_0(t)} \left(\frac{df_0(t)}{dt} \right)^2 dt \right) \left(\int_0^T \frac{1+q_0 f_0(t)}{(1+q_1 f_1(t))^2} \left(\frac{df_1(t)}{dt} \right)^2 dt \right)}{\left(\int_0^T \frac{1}{1+q_1 f_1(t)} \frac{df_0(t)}{dt} \frac{df_1(t)}{dt} dt \right)^2}. \end{aligned}$$

Замечание 2. Рассмотрим функции

$$g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1+q_0 f_0(t)}} \frac{df_0(t)}{dt}, \quad g_1(t) = \frac{\sqrt{1+q_0 f_0(t)}}{1+q_1 f_1(t)} \frac{df_1(t)}{dt}.$$

Выражая (2.1.43) через эти функции, получаем

$$\chi = \frac{\int_0^T g_0^2(t) dt \int_0^T g_1^2(t) dt}{\left(\int_0^T g_0(t) g_1(t) dt \right)^2}.$$

Отсюда в силу неравенства Буняковского–Коши–Шварца следует, что $\chi \geq 1$ и $\chi = 1$ лишь, когда $g_0(t)$ и $g_1(t)$ пропорциональны.

Конкретизируем (2.1.43) для случая слабых оптических импульсов, когда $a_0 \ll \nu$ и $a_1 \ll \nu_1$. Для этого перейдем в (2.1.43) к пределу при $q_0 \rightarrow 0$ и $q_1 \rightarrow 0$. В результате получим

$$\chi(q_0 \rightarrow 0, q_1 \rightarrow 0) = \frac{\left(\int_0^T \left(\frac{df_0(t)}{dt} \right)^2 dt \right) \left(\int_0^T \left(\frac{df_1(t)}{dt} \right)^2 dt \right)}{\left(\int_0^T \frac{df_0(t)}{dt} \frac{df_1(t)}{dt} dt \right)^2}. \quad (2.1.44)$$

Из (2.1.44) видно, что проигрыш в точности оценки для слабых оптических импульсов не зависит от отличия значений их максимальных интенсивностей a_0 и a_1 . Приведем примеры расчета проигрыша в точности квазиправдоподобной оценки для конкретных форм интенсивностей оптических импульсов.

В случае сигналов $f_0(t) = \exp(-|t|)$ и $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$ для зависимости χ от q и ζ можно указать явную формулу при $q_0 = q_1 = q$:

$$\begin{aligned} \chi(q, \zeta) &= \frac{(-q)^{\frac{1}{\zeta}+1} (\nu \ln(1+q) - 1)}{\left(B_{-q} \left(1 + \frac{1}{\zeta}, 0 \right) \right)^2} \times \\ &\times \left[\zeta \left(-\frac{1}{\nu} \right)^{\frac{1}{\zeta}} (\nu^2 \ln(1+q) + 1 - \nu) - (1 + \zeta) \nu B_{-q} \left(2 + \frac{1}{\zeta}, 0 \right) \right], \end{aligned}$$

где неполная B -функция [34] определяется соотношением

$$B_z(a, b) = \int_0^z t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

Кроме того, для этого случая удастся вывести явную формулу при $\zeta = 1$:

$$\begin{aligned} \chi(q_0, q_1) &= q_1^3 (q_1 + 1) (q_0 - \ln(q_0 + 1)) \times \\ &\times \frac{q_1 (q_0 (q_1 + 2) - q_1) - (q_1 + 1) (2q_0 - q_1) \ln(q_1 + 1)}{q_0^2 (q_1 (2q_0 + (q_1 - 1)q_1) + (q_1 + 1) (q_0 (q_1 - 2) - (q_1 - 1)q_1) \ln(q_1 + 1))^2}. \end{aligned}$$

Удастся также выразить χ через все три аргумента q_0 , q_1 и ζ помощью гипергеометрической функции [34] ${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}$, где ис-

пользуется сокращенное обозначение $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$:

$$\begin{aligned} \chi(q_0, q_1, \zeta) = & -q_1^2(q_1+1)(\zeta+1)^2(2\zeta+1)(q_0 - \ln(q_0+1)) \times \\ & \times \left(q_0 q_1^2(q_1+1)(\zeta+1) {}_2F_1\left(1, 2 + \frac{1}{\zeta}; 3 + \frac{1}{\zeta}; -q_1\right) - \right. \\ & \left. - (2\zeta+1)(q_1(q_0 q_1 - 1) + (q_1+1)\ln(q_1+1)) \right) \times \\ & \times \left[q_0^2 \zeta \left(q_0(q_1+1) q_1^2(2\zeta+1) {}_2F_1\left(1, 1 + \frac{1}{\zeta}; 2 + \frac{1}{\zeta}; -q_1\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (q_1-1)(\zeta+1) \left[q_0 q_1^2(q_1+1)(\zeta+1) {}_2F_1\left(1, 2 + \frac{1}{\zeta}; 3 + \frac{1}{\zeta}; -q_1\right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (2\zeta+1)(q_0 q_1^2 - q_1 + q_1 \ln\left(\frac{1}{q_1} + 1\right) + q_1 \ln(q_1) + \ln(q_1+1)) \right] \right) \right]^2 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Для сигналов $f_0(t) = \exp(-|t|)$ и $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$ вычисления по формуле (2.1.44) приводят к выражению

$$\chi(q_0 = q_1 = 0) = \frac{(\zeta+1)^2}{4\zeta}.$$

Для сигналов $f_0(t) = \exp(-t^2)$ и $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$ вычисления по формуле (2.1.44) приводят к выражению

$$\chi(q_0 = q_1 = 0) = \frac{(\zeta+1)^6}{64\zeta^3}.$$

Для сигналов $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ и $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$ вычисления по формуле (2.1.44) приводят к выражению

$$\chi(q_0 = q_1 = 0) = \frac{(\zeta^2+1)^3}{8\zeta^3}.$$

На приводимых ниже рисунках показаны результаты вычислений по формуле (2.1.43) и ее частным случаям.

На рис. 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5 и 2.1.6 показана зависимость $\chi(q_1)$ при различных q_0 и ζ . При $\zeta = 1$ наименьшие значения χ принимает для сигналов, состоящих из импульсов $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ и $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$, а наибольшее — для сигналов, состоящих из импульсов $f_0(t) = \exp(-t^2)$ и $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$. На этих рисунках также видно, что чем ближе q_0 и q_1 друг к другу, тем меньше χ . Увеличение (уменьшение) ζ приводит к эффекту, похожему на значительное увеличение (уменьшение) q_0 в том

смысле, что минимумы графиков сдвигаются в соответствующую сторону.

На рис. 2.1.7, 2.1.8, 2.1.9 и 2.1.10 показана зависимость $\chi(\zeta)$ при различных $q = q_0 = q_1$. На рис. 2.1.7 предполагается, что интенсивность одного импульса рассеянного сигнала совпадает с формой импульсов сигнала, на который настроен приемник, а на остальных рисунках — что они разные. Видно, что если сигналы не совпадают, то минимум, как правило, достигается не при $\zeta = 1$.

Из рис. 2.1.7 также видно, что наименьшая потеря точности наблюдается при использовании импульсов $f_0(t) = \exp(-|t|)$, а наибольшая — импульсов $f_0(t) = \exp(-t^2)$. Из рис. 2.1.8 видно, что для рассеянного сигнала, состоящего из импульсов $f_0(t) = \exp(-|t|)$, настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$ приводит к меньшей потере точности, чем настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$.

Из рис. 2.1.9 видно, что для рассеянного сигнала, состоящего из импульсов $f_0(t) = \exp(-t^2)$, настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$ приводит к меньшей потере точности, чем на настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$ при ζ , близких к 1; но при ζ , далеких от единицы, наблюдается противоположный эффект. Из рис. 2.1.9 также видно, что при ζ , далеких от 1, настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$ приводит к меньшей потере точности, чем даже настройка на импульсы $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$, совпадающие по форме с рассеянными $f_0(t) = \exp(-t^2)$ с точностью до длительности.

Из рис. 2.1.10 видно, что для рассеянного сигнала, состоящего из импульсов $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$, при ζ , далеких от 1, настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$ приводит к меньшей потере точности, чем на любые другие, в том числе — на импульсы $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$, совпадающие по форме с рассеянными $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ с точностью до длительности. При этом при любых ζ и больших q настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$ приводит к меньшей потере точности, чем настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$. Но при ζ , близких к 1, и малых q настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$ приводит к меньшей потере точности, чем настройка приемника на импульсы $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$.

Как и следует ожидать, на всех рисунках $\chi = 1$ при $\zeta = 1$ и $q_1 = q_0$.

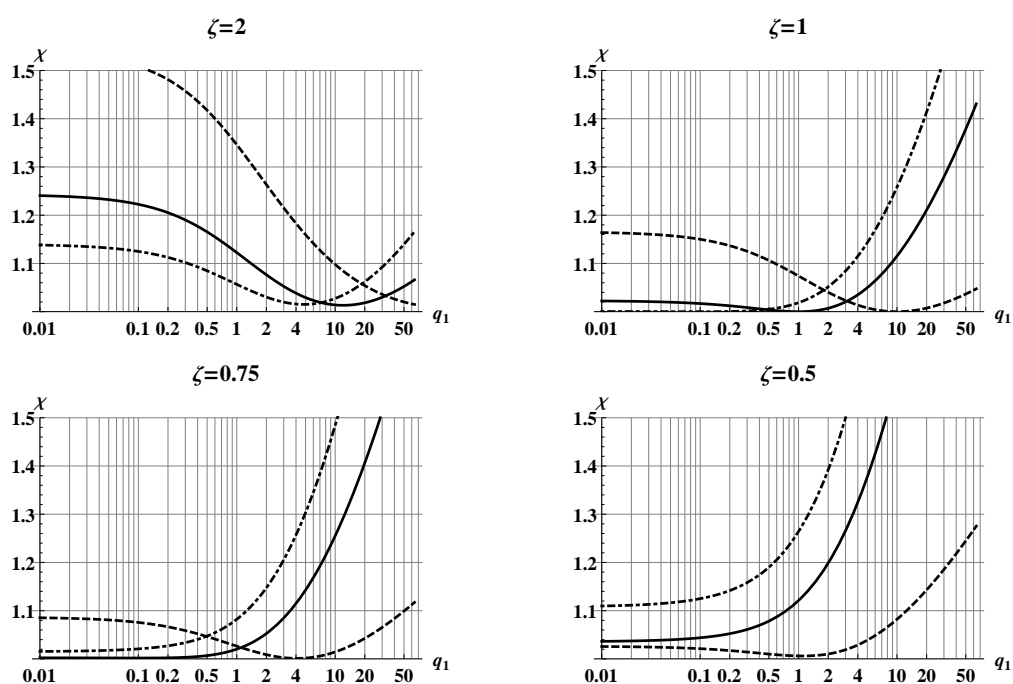


Рис. 2.1.3: График зависимости $\chi(q_1)$ при различных q_0 и ζ для сигналов $f_0(t) = \exp(-|t|)$ и $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$. Сплошная линия соответствует $q_0 = 1$, пунктирная — $q_0 = 10$, штрих-пунктирная — $q_0 = 0.1$

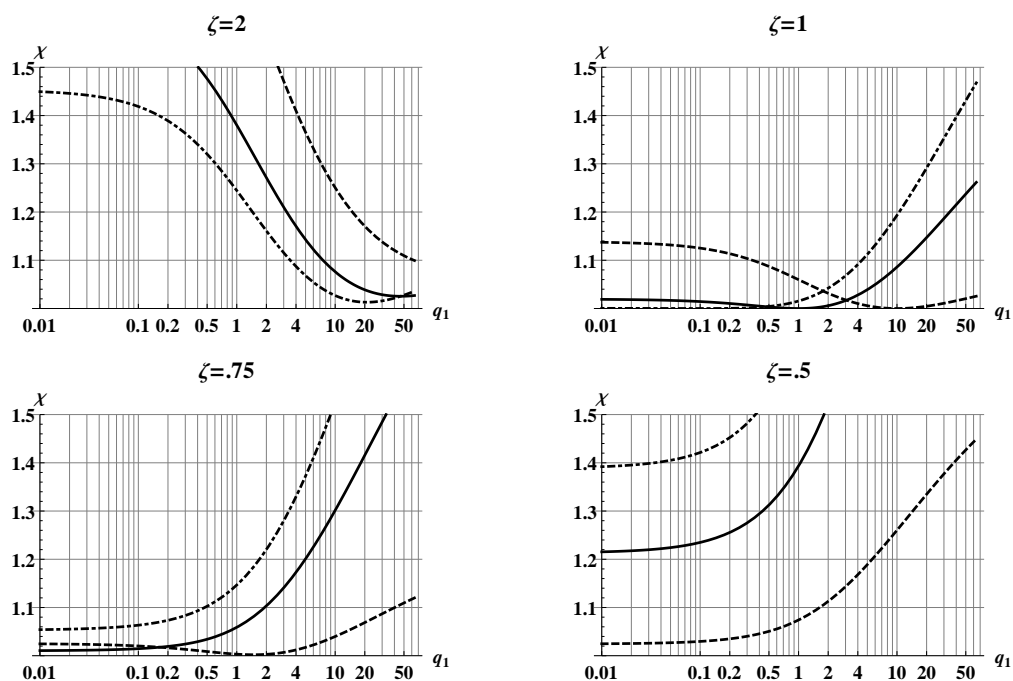


Рис. 2.1.4: График зависимости $\chi(q_1)$ при различных q_0 и ζ для сигналов $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ и $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$. Сплошная линия соответствует $q_0 = 1$, пунктирная — $q_0 = 10$, штрих-пунктирная — $q_0 = 0.1$

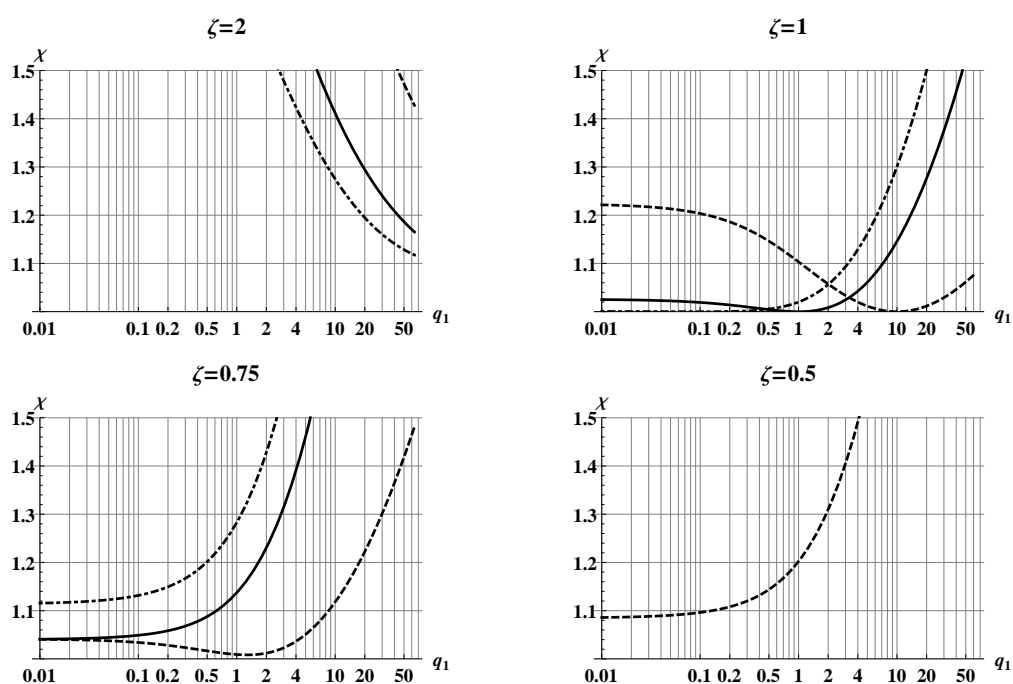


Рис. 2.1.5: График зависимости $\chi(q_1)$ при различных q_0 и ζ для сигналов $f_0(t) = \exp(-t^2)$ и $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$. Сплошная линия соответствует $q_0 = 1$, пунктирная — $q_0 = 10$, штрих-пунктирная — $q_0 = 0.1$

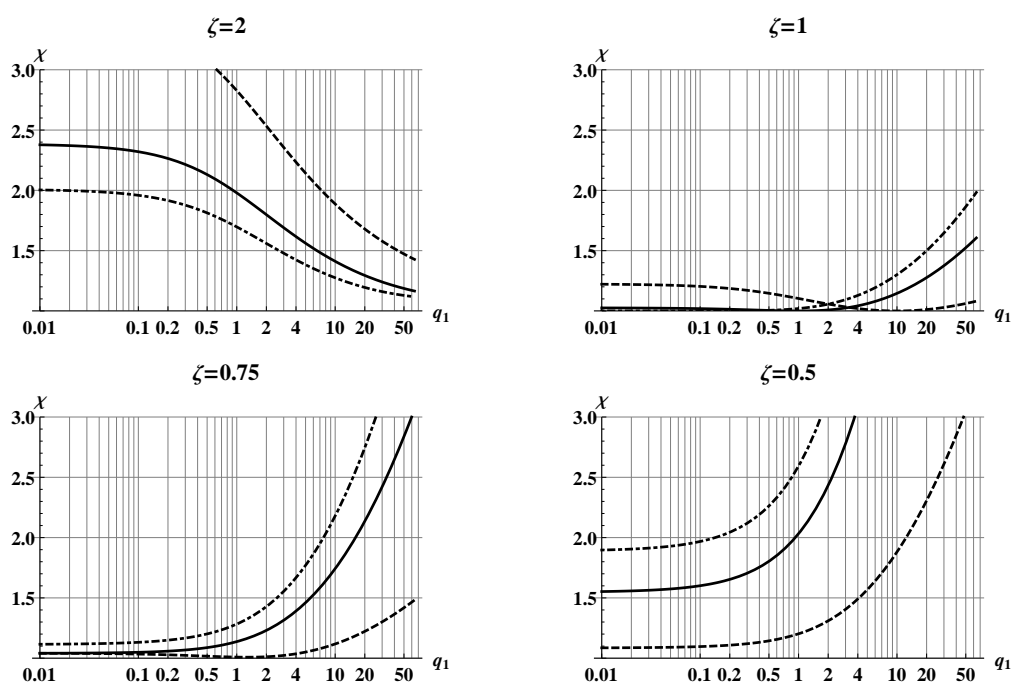


Рис. 2.1.6: Повторение рис. 2.1.5 другом масштабе: график зависимости $\chi(q_1)$ при различных q_0 и ζ для сигналов $f_0(t) = \exp(-t^2)$ и $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$. Сплошная линия соответствует $q_0 = 1$, пунктирная — $q_0 = 10$, штрих-пунктирная — $q_0 = 0.1$

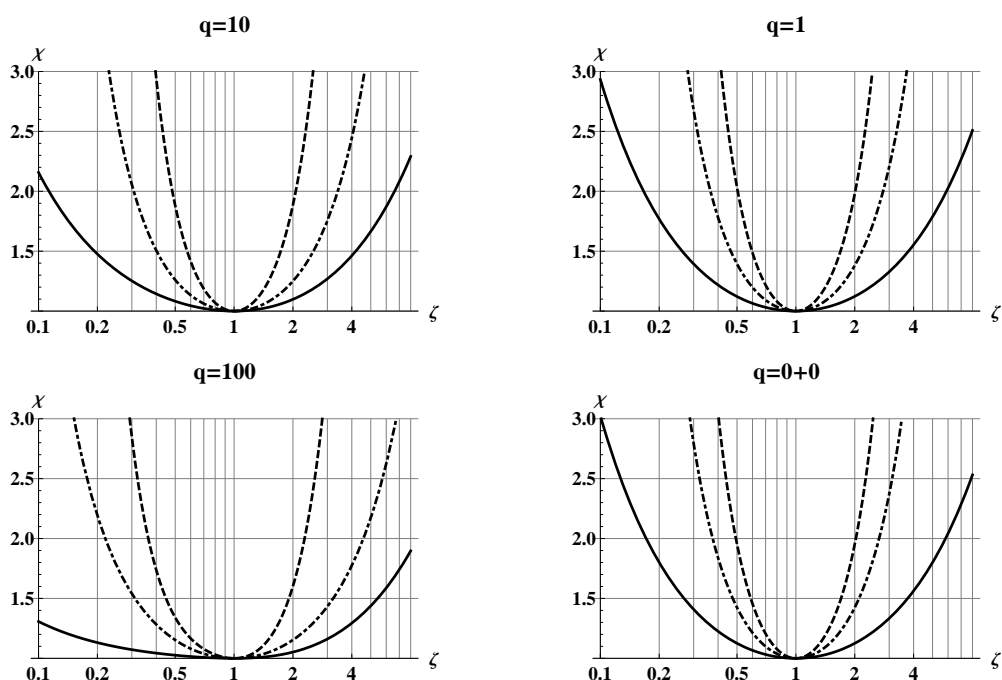


Рис. 2.1.7: График зависимости $\chi(\zeta)$ при различных $q = q_0 = q_1$. Сплошная линия соответствует $f_0(t) = \exp(-|t|)$ и $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$, пунктирная — $f_0(t) = \exp(-t^2)$ и $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$, штрих-пунктирная — $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ и $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$. Последний график совпадает с приведенным в [91]

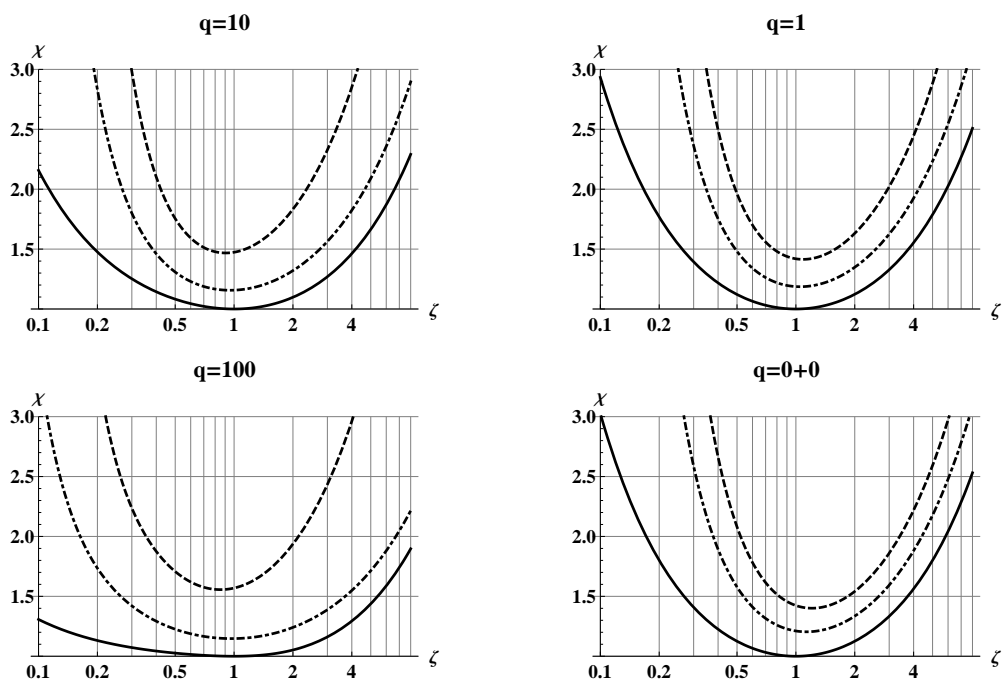


Рис. 2.1.8: График зависимости $\chi(\zeta)$ при $f_0(t) = \exp(-|t|)$ и различных $q = q_0 = q_1$. Сплошная линия соответствует $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$, пунктирная — $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$, штрих-пунктирная — $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$

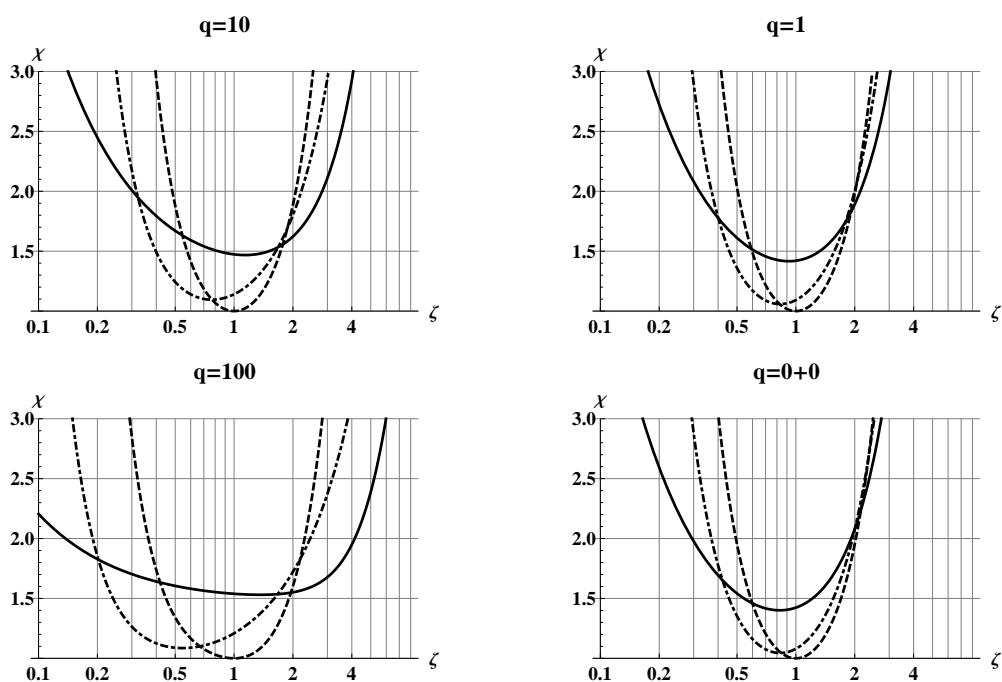


Рис. 2.1.9: График зависимости $\chi(\zeta)$ при $f_0(t) = \exp(-t^2)$ и различных $q = q_0 = q_1$. Сплошная линия соответствует $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$, пунктирная — $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$, штрих-пунктирная — $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$

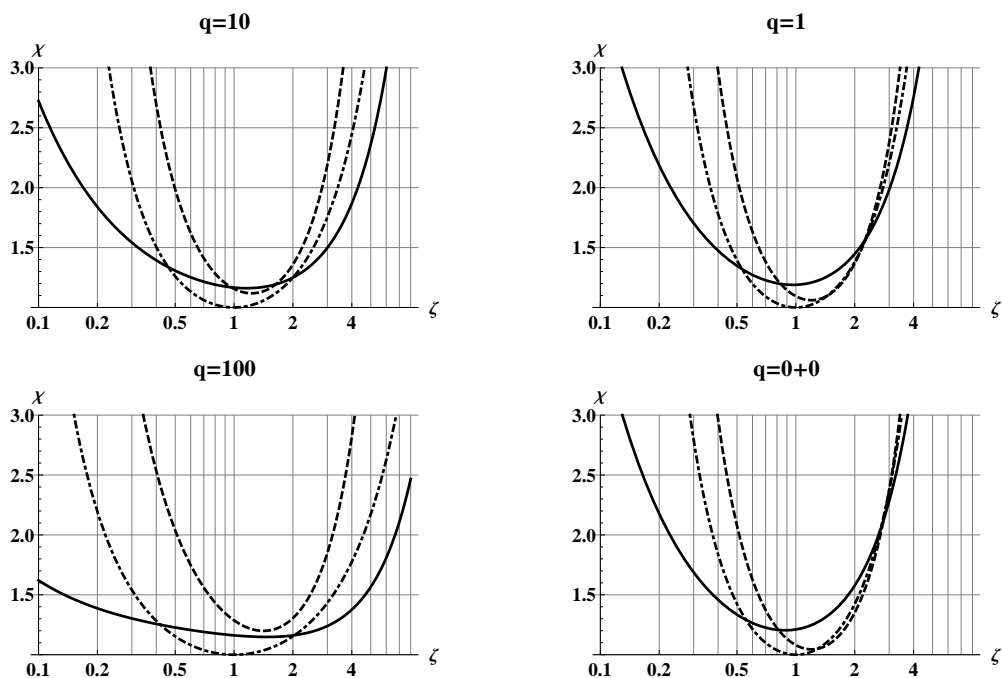


Рис. 2.1.10: График зависимости $\chi(\zeta)$ при $f_0(t) = \frac{1}{1+t^2}$ и различных $q = q_0 = q_1$. Сплошная линия соответствует $f_1(t) = \exp(-|\zeta t|)$, пунктирная — $f_1(t) = \exp(-(\zeta t)^2)$, штрих-пунктирная — $f_1(t) = \frac{1}{1+(\zeta t)^2}$

2.2 Пороговые свойства квазиправдоподобных оценок

В условиях малых ОСШ или в условиях больших априорных интервалов возможных значений параметров необходимо учитывать влияние аномальных ошибок на точность оценок параметров движения [55]. В терминах квазиправдоподобной оценки (в частности, оценки максимального правдоподобия) аномальные ошибки появляются в случае, когда наибольший максимум решающей статистики вызван не наличием рассеянного сигнала, а реализацией шума. В настоящем параграфе обсуждаются характеристики квазиправдоподобных оценок в условиях, когда влияние аномальных ошибок является существенным.

Как и в § 2.1 будем считать, что принимаемый сигнал является результатом рассеяния последовательности оптических импульсов (1.1.1) объектом, находящимся на дальности R_0 и обладающего скоростью V_0 и ускорением A_0 , а интенсивность принимаемого сигнала имеет вид (2.1.1). Как и ранее, предполагается, что условие (1.1.3) выполнено, а интервал наблюдения $[0, T]$ больше длительности всей последовательности оптических импульсов, т.е. $T > N\vartheta$, причем величина скважности последовательности не менее двух, так что отдельные импульсы не перекрываются.

Доступный для обработки сигнал $\pi(t)$ представляет собой реализацию пуассоновского процесса с интенсивностью

$$\beta(t, R_0, A_0, V_0) = s(t, R_0, V_0, A_0) + \nu,$$

где $s(t, R_0, V_0, A_0)$ задается формулой (2.1.1), ν — интенсивность оптического шума, а параметры R_0 , V_0 и A_0 подлежат оценке. Так как форма интенсивности $s_0(t)$ и, возможно, интенсивность шума ν могут быть неизвестны, то синтез алгоритма оценки проводится для сигнала с интенсивностью

$$\beta_1(t, R_0, A_0, V_0) = s_{1N}(t, R_0, V_0, A_0) + \nu_1,$$

где $s_{1N}(t, R_0, V_0, A_0)$ задается формулой (2.1.2), ν_1 — предполагаемая интенсивность оптического шума.

Будем считать, что возможные значения дальности R_0 , скорости V_0 и ускорения A_0 лежат соответственно в априорных интервалах

$$[R_{\min}, R_{\max}], \quad [V_{\min}, V_{\max}], \quad [A_{\min}, A_{\max}].$$

Причем возможные значения дальности R_0 , скорости V_0 и ускорения A_0 независимы и априорно обладают равномерным распределением в этих

интервалах. Таким образом, значение векторного параметра движения $\vec{l}_0 = (R_0, V_0, A_0)$ лежит в априорной области (параллелепипеде) $\mathbf{W} = [\vec{l}_{\min}, \vec{l}_{\max}]$ и равномерно распределено в нем. Здесь

$$\begin{aligned}\vec{l}_{\min} &= (R_{\min}, V_{\min}, A_{\min}), \\ \vec{l}_{\max} &= (R_{\max}, V_{\max}, A_{\max}).\end{aligned}$$

Перейдем к обсуждению понятия аномальных ошибок. Как и раньше, обозначим символом $\widehat{\vec{l}}$ точку абсолютного максимума решающей статистики (2.1.3), т. е. оценку величины $\vec{l}_0 = (R_0, V_0, A_0)$.

Для удобства введем несколько сокращенных обозначений:

$$\begin{aligned}\Delta R_{pr} &= R_{\max} - R_{\min}, & R_{pr} &= \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}, & \Delta R_0 &= R_0 - R_{pr}, \\ \Delta V_{pr} &= V_{\max} - V_{\min}, & V_{pr} &= \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2}, & \Delta V_0 &= V_0 - V_{pr}, \\ \Delta A_{pr} &= A_{\max} - A_{\min}, & A_{pr} &= \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2}, & \Delta A_0 &= A_0 - A_{pr}.\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

Если ОСШ z_S (2.1.11) достаточно велико, то квазиправдоподобные оценки являются надежными [55], их характеристики найдены в § 2.1, [125, 128]. Однако, если ОСШ не слишком велико, а размеры априорной области \mathbf{W} существенно больше протяженности центрального пика сигнальной функции (2.1.7), то возможно появление аномальных ошибок [55]. В результате возникают пороговые эффекты, которые приводят к заметному ухудшению точности квазиправдоподобных оценок.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено неравенство

$$\Delta R_{pr} < c\vartheta/2.$$

В этом случае сигнальная функция (2.1.36) при фиксированном значении $\vec{l}_0 = (R_0, V_0, A_0)$ имеет лишь один ярко выраженный максимум. Напомним, что положение наибольшего максимума сигнальной функции обозначается через $\vec{l}_{\#} = (R_{\#}, V_{\#}, A_{\#})$. Пусть ΔR , ΔV и ΔA — длительности (протяженности) сигнальной функции (2.1.7) по соответствующим аргументам. Тогда по определению

$$\begin{aligned}S(R_0, V_0, A_0, R_{\#} \pm \Delta R, V_{\#}, A_{\#}) &\simeq S(R_0, V_0, A_0, R_{\#}, V_{\#} \pm \Delta V, A_{\#}) \simeq \\ &\simeq S(R_0, V_0, A_0, R_{\#}, V_{\#}, A_{\#} \pm \Delta A) \simeq 0.\end{aligned}$$

Очевидно, что выбор значений величин ΔR , ΔV и ΔA неоднозначен. Однако, если априорная область \mathbf{W} возможных значений дальности,

скорости и ускорения содержит много элементов разрешения, так что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\Delta R \ll \Delta R_{pr}, \quad \Delta V \ll \Delta V_{pr}, \quad \Delta A \ll \Delta A_{pr}, \quad (2.2.2)$$

то неоднозначность в выборе значений величин ΔR , ΔV и ΔA не играет существенной роли.

Обозначим через

$$\mathbf{W}_{SN} = \{[R_{\#} - \Delta R, R_{\#} + \Delta R], [V_{\#} - \Delta V, V_{\#} + \Delta V], [A_{\#} - \Delta A, A_{\#} + \Delta A]\}$$

подобласть априорной области \mathbf{W} возможных значений дальности, скорости и ускорения, в которой центральный пик сигнальной функции (2.1.7) существенно отличен от нуля. Ошибку $\widehat{\vec{l}} - \vec{l}_0$ называют нормальной, а соответствующую оценку надежной, если выполняется условие

$$(\widehat{R}, \widehat{V}, \widehat{A}) \in \mathbf{W}_{SN}. \quad (2.2.3)$$

Область \mathbf{W}_{SN} называют сигнальной.

Аномальной ошибкой называют ситуацию, когда оценка $(\widehat{R}, \widehat{V}, \widehat{A})$ не принадлежит \mathbf{W}_{SN} , т.е. лежит вне центрального пика сигнальной функции. Соответствующую ей область называют шумовой областью, обозначим ее через \mathbf{W}_N . Величина $(\Delta R, \Delta V, \Delta A)$ выбирается, исходя из длительности сигнальной функции.

В сигнальной области \mathbf{W}_{SN} решающую статистику можно представить в виде суммы сигнальной и шумовой функций и константы C :

$$L(R, V, A) = \widehat{S}(R_0, V_0, A_0, R, V, A) + \widehat{N}(R, V, A) + C.$$

В шумовой области \mathbf{W}_N сигнальная функция равна нулю, и решающая статистика принимает вид

$$L(R, V, A) = \widehat{N}(R, V, A) + C.$$

Введем в рассмотрение вероятность надежной оценки [87]

$$P_0 = P[|\widehat{R} - R_0| < \Delta R, |\widehat{V} - V_0| < \Delta V, |\widehat{A} - A_0| < \Delta A]$$

или

$$P_0 = P[(\widehat{R}, \widehat{V}, \widehat{A}) \in \mathbf{W}_{SN}]. \quad (2.2.4)$$

Вероятность надежной оценки используется для описания пороговых свойств квазиправдоподобной оценки (2.1.4). Как мы увидим ниже, приближенное значение вероятности надежной оценки (2.2.4) удастся найти,

если допустима гауссовская аппроксимация распределения решающей статистики (2.1.3). Распределение решающей статистики (2.1.3) можно аппроксимировать гауссовским распределением, если выполняется условие [12]

$$N\nu \min(\tau, \tau_1) \gg 1, \quad (2.2.5)$$

где τ и τ_1 — эквивалентные длительности импульсов принимаемого $s(t)$ и ожидаемого $s_1(t)$ сигналов соответственно.

Поскольку квазиправдоподобный метод подразумевает нахождение оценки по положению абсолютного максимума решающей статистики (2.1.3), то вероятность надежной оценки можно эквивалентно определить как

$$P_0 = P(H_{SN} > H_N), \quad (2.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} H_{SN} &= \sup L(R, V, A), & (R, V, A) \in \mathbf{W}_{SN}, \\ H_N &= \sup L(R, V, A) = \sup \hat{N}(R, V, A), & (R, V, A) \in \mathbf{W}_N. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Другими словами, вероятность (2.2.6) есть вероятность того, что абсолютный максимум суммы сигнальной $\hat{S}(R_0, V_0, A_0, R, V, A)$ и шумовой $\hat{N}(R, V, A)$ функций в сигнальной области \mathbf{W}_{SN} больше, чем любой из выбросов шумовой функции $\hat{N}(R, V, A)$ в шумовой области \mathbf{W}_N .

Так как корреляционная функция шумовой функции, определяемая соотношением (2.1.10), при $|R_1 - R_2| \geq \Delta R$, $|V_1 - V_2| \geq \Delta V$, $|A_1 - A_2| \geq \Delta A$, практически обращается в ноль, то для случая, когда распределение $\hat{N}(\vec{l})$ является гауссовским и выполнено неравенство (2.2.2), можно считать, что величины H_{SN} и H_N статистически независимы [87] и поэтому (2.2.6) принимает вид

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} F_N(H) dF_{SN}(H), \quad (2.2.8)$$

где $F_N(H)$ — функция распределения случайной величины H_N , а $F_{SN}(H)$ — функция распределения случайной величины H_{SN} . Обозначая через $W_{SN}(H)$ и $W_N(H)$ плотности вероятностей величин H_{SN} и H_N , равенство (2.2.8) можно переписать в виде

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) F_N(H) dH = \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) \int_{-\infty}^H W_N(t) dt dH. \quad (2.2.9)$$

Чтобы воспользоваться формулой (2.2.9), вычислим плотность вероятности $W_{SN}(H)$ наибольшего максимума H_{SN} решающей статистики в сигнальной области \mathbf{W}_{SN} и функцию распределения $F_N(H)$ наибольшего максимума решающей статистики в шумовой области \mathbf{W}_N .

Рассмотрим случай, когда наибольший максимум решающей статистики лежит в сигнальной области \mathbf{W}_{SN} . Обозначим сокращенно через m_S математическое ожидание $\hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#)$ решающей статистики $L(\vec{l}_\#)$. Поскольку решающая статистика отличается от шумовой функции на постоянное слагаемое (сигнальную функцию), они имеют одну и ту же дисперсию. Из формулы (2.1.10) следует, что дисперсия σ_{SN}^2 решающей статистики $L(\vec{l}_\#)$ равна

$$\sigma_{SN}^2 = B_{SN}(\vec{l}_\#, \vec{l}_\#) = \nu \int_0^T \ln^2(1 + s_{1N}(t; \vec{l}_\#)/\nu_1)(1 + s(t; \vec{l})/\nu) dt. \quad (2.2.10)$$

Воспользуемся представлением

$$L(\vec{l}) = \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}) + \hat{N}(\vec{l})$$

для решающей статистики. Раскладывая в ряд Тейлора в окрестности точки $\vec{l}_\#$ до членов второго порядка малости включительно, выражение для наибольшего максимума (соглашение о смысле направлений стрелок над символами в производных описывалось на с. 16)

$$\begin{aligned} H_{SN} \approx & \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#) + \hat{N}(\vec{l}_\#) + \left[\frac{\partial \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial \vec{l}} + \frac{\partial \hat{N}(\vec{l})}{\partial \vec{l}} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} (\overleftarrow{\vec{l}} - \overleftarrow{\vec{l}_\#}) + \\ & + \frac{1}{2} (\overleftarrow{\vec{l}} - \overleftarrow{\vec{l}_\#}) \left[\frac{\partial^2 \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial \vec{l} \partial \vec{l}} + \frac{\partial^2 \hat{N}(\vec{l})}{\partial \vec{l} \partial \vec{l}} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} (\overleftarrow{\vec{l}} - \overleftarrow{\vec{l}_\#}). \end{aligned}$$

Напомним, что в силу формулы (2.1.17) $\left[\frac{\partial \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial \vec{l}} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} = 0$. С учетом этого преобразуем предыдущее приближенное представление к виду

$$\begin{aligned} H_{SN} \approx & \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#) + \hat{N}(\vec{l}_\#) + \left[\frac{\partial \hat{N}(\vec{l})}{\partial \vec{l}} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} (\overleftarrow{\vec{l}} - \overleftarrow{\vec{l}_\#}) + \\ & + \frac{1}{2} (\overleftarrow{\vec{l}} - \overleftarrow{\vec{l}_\#}) \left[\frac{\partial^2 \hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l})}{\partial \vec{l} \partial \vec{l}} \right]_{\vec{l}=\vec{l}_\#} (\overleftarrow{\vec{l}} - \overleftarrow{\vec{l}_\#}). \end{aligned}$$

При этом величина $\widehat{\overleftarrow{l}} - \overleftarrow{l}_\#$ определяется согласно (2.1.19) из выражения

$$\widehat{\overleftarrow{l}} - \overleftarrow{l}_\# = - \left[\frac{\partial^2 \widehat{S}(\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l} \partial \overleftarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}^{-1} \left[\frac{\partial \widehat{N}(\overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}.$$

Приведем вывод этой формулы. Напомним, что нормированные сигнальная и шумовая функции определены по формулам (2.1.12). Кроме того, вводилось обозначение $\varepsilon = 1/z_S = \sigma_{SN}/m_S$. Имеем

$$\widehat{\overleftarrow{l}} - \overleftarrow{l}_\# \approx \varepsilon \overleftarrow{l}_1,$$

а в силу формулы (2.1.19) —

$$\overleftarrow{l}_1 = - \left[\frac{\partial^2 S(\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l} \partial \overleftarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}^{-1} \left[\frac{dN(\overrightarrow{l})}{d\overrightarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \widehat{\overleftarrow{l}} - \overleftarrow{l}_\# &\approx \varepsilon \overleftarrow{l}_1 = -\varepsilon \left[\frac{\partial^2 S(\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l} \partial \overleftarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}^{-1} \left[\frac{\partial N(\overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#} = \\ &= -\varepsilon \left[\frac{1}{m_S} \frac{\partial^2 \widehat{S}(\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l} \partial \overleftarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}^{-1} \left[\frac{1}{\sigma_{SN}} \frac{\partial \widehat{N}(\overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#} = \\ &= - \left[\frac{\partial^2 \widehat{S}(\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l} \partial \overleftarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}^{-1} \left[\frac{\partial \widehat{N}(\overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}. \end{aligned}$$

Это позволяет выражение для H_{SN} переписать в виде

$$H_{SN} = \widehat{S}(\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l}_\#) + \widehat{N}(\overrightarrow{l}_\#) + \alpha_\rho = L(\overrightarrow{l}_\#) + \alpha_\rho, \quad (2.2.11)$$

где

$$\alpha_\rho = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \widehat{N}(\overrightarrow{l})}{\partial \overleftarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#} \left[\frac{\partial^2 \widehat{S}(\overrightarrow{l}_0, \overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l} \partial \overleftarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}^{-1} \left[\frac{\partial \widehat{N}(\overrightarrow{l})}{\partial \overrightarrow{l}} \right]_{\overrightarrow{l}=\overrightarrow{l}_\#}.$$

Из соотношения (2.2.11) видим, что при увеличении отношения сигнал-шум, а следовательно, при уменьшении α_ρ плотность вероятности случайной величины H_{SN} сходится к плотности вероятности случайной величины $L(\overrightarrow{l}_\#)$. Выше математическое ожидание решающей статистики $L(\overrightarrow{l}_\#)$ было обозначено через m_S , а дисперсия — через σ_{SN}^2 . В этих обозначениях для плотности вероятности решающей статистики $L(\overrightarrow{l}_\#)$

и совпадающей с ней плотности вероятности случайной величины H_{SN} имеем представление

$$W_{SN}(H) = \frac{1}{\sigma_{SN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H - m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right]. \quad (2.2.12)$$

Перейдем к шумовой области \mathbf{W}_N . Решающая статистика $L(\vec{l})$ здесь также имеет асимптотически гауссовское распределение. Корреляционная функция шумовой функции немного отличается от (2.1.10):

$$B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \nu \int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t; \vec{l}_1)/\nu_1) \ln(1 + s_{1N}(t; \vec{l}_2)/\nu_1) dt. \quad (2.2.13)$$

Здесь слагаемое, содержащее $s(t; \vec{l}_0)$, исчезло из-за того, что \vec{l}_1 и \vec{l}_2 отстоят от \vec{l}_0 настолько далеко, что интеграл

$$\int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t; \vec{l}_1)/\nu_1) \ln(1 + s_{1N}(t; \vec{l}_2)/\nu_1) s(t; \vec{l}_0) dt$$

практически обращается в ноль и им можно пренебречь. Из формулы (2.2.13) видно, что дисперсия шумовой функции равна

$$\sigma_N^2 = B_N(\vec{l}, \vec{l}) = \nu \int_0^T \ln^2(1 + s_{1N}(t; \vec{l})/\nu_1) dt. \quad (2.2.14)$$

Напомним, что случайную величину H_N можно определить по формуле (2.2.7). Согласно (2.2.13) при выполнении (2.2.5) шумовая функция $\hat{N}(R, V, A)$ в (2.2.7) приближенно представляет собой гауссовское однородное поле. Следовательно, $F_N(H)$ является функцией распределения величины наибольшего максимума гауссовского однородного случайного поля в шумовой области \mathbf{W}_N . Поскольку длительность каждого импульса предполагаемой последовательности (2.1.2) ограничена, то корреляционная функция (2.2.13) стремится к нулю при $|R_1 - R_2| \rightarrow \infty$, $|V_1 - V_2| \rightarrow \infty$, $|A_1 - A_2| \rightarrow \infty$. Поэтому можно считать, что с увеличением H распределение числа выбросов реализации поля $\hat{N}(R, V, A)$ в шумовой области \mathbf{W}_N за уровень H сходится к закону Пуассона [76]. Следовательно, для больших, но конечных H можно записать [76, 87] $F_N(H) \approx \exp[-\Pi(H)]$. Здесь $\Pi(H)$ среднее число выбросов реализации гауссовского однородного случайного поля с корреляционной функцией (2.2.13) за уровень H в шумовой области \mathbf{W}_N . Если же выполняется (2.2.2), то приближенно $\Pi(H)$ — среднее число выбросов во всей

априорной области \mathbf{W} возможных значений дальности, скорости и ускорения.

Используя [76], для среднего числа выбросов поля с корреляционной функцией (2.2.13) в области \mathbf{W} , получаем выражение

$$\Pi(H) = \frac{\xi}{4\pi^2 \sigma_N^2} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_N^2}\right), \quad (2.2.15)$$

где

$$\xi = Q \sqrt{\frac{1}{\sigma_N^6} \det \left\| \frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2} \right\|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_2}}}. \quad (2.2.16)$$

Здесь

$$Q = (R_{\max} - R_{\min})(V_{\max} - V_{\min})(A_{\max} - A_{\min})$$

— трехмерный евклидов объем априорной области $\mathbf{W} = [\vec{l}_{\min}, \vec{l}_{\max}]$. Величина ξ представляет собой приведенный объем [87] возможных значений неизвестных дальности, скорости и ускорения, который определяет число некоррелированных значений случайного поля $\hat{N}(R, V, A)$ в области \mathbf{W} .

Используя (2.2.15), для функции распределения абсолютного максимума помеховой составляющей H_N при больших H/σ_N при выполнении (2.2.2) получаем выражение [83, с. 27] и [94, формула (33)]

$$F_N(H) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{\xi}{(2\pi)^2 \sigma_N^2} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_N^2}\right)\right], & H \geq \sigma_N \sqrt{2}, \\ 0, & H < \sigma_N \sqrt{2}, \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Подставим представление (2.2.12) в (2.2.9):

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{SN}(H) F_N(H) dH = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{SN} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H - m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] F_N(H) dH.$$

Чтобы подставить сюда представление (2.2.17), которое справедливо только при больших H/σ_N , представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$P_0 = \int_{-\infty}^{m_S/2} \frac{1}{\sigma_{SN} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H - m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] F_N(H) dH + \\ + \int_{m_S/2}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_{SN} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H - m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] F_N(H) dH.$$

Оценим первый интеграл (под интегралом стоит неотрицательная функция, поэтому модуль не нужен; в оценке используется неравенство $0 \leq F_N(H) \leq 1$):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{m_S/2} \frac{1}{\sigma_{SN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H-m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] F_N(H) dH \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{m_S/2} \frac{1}{\sigma_{SN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H-m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] dH = \int_{-\infty}^{m_S/2-m_S} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.2.18) \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{m_S \rightarrow +\infty} (m_S/2 - m_S) = -\lim_{m_S \rightarrow +\infty} m_S/2 = -\infty$. Поэтому первый интеграл с увеличением m_S стремится к нулю и на значение $P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) F_N(H) dH$ существенного влияния не оказывает. В оставшийся второй интеграл

$$\int_{m_S/2}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{SN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H-m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] F_N(H) dH$$

входят значения $F_N(H)$ только при $H \in [m_S/2, \infty)$ или, что равносильно, только при $\frac{H}{\sigma_N} \in [\frac{m_S}{2\sigma_N}, \infty)$, т. е. только при больших H . Таким образом, если число $\frac{m_S}{2\sigma_N} = \frac{\hat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_{\#})}{2\sqrt{\langle (\hat{N}(\vec{l}_{\#}))^2 \rangle}}$ велико (в частности, $m_S/2 > \sigma_N\sqrt{2}$), то

$$\begin{aligned} P_0 & \approx \int_{m_S/2}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{SN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H-m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] F_N(H) dH \approx \\ & \approx \int_{\sigma_N\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{SN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H-m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] \exp\left[-\frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{H^2}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_N^2}\right)\right] dH. \end{aligned}$$

(Здесь интеграл $\int_{\sigma_N\sqrt{2}}^{m_S/2} \frac{1}{\sigma_{SN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H-m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2}\right] \exp\left[-\frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{H^2}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_N^2}\right)\right] dH$ мал по тем же соображениям, что и интеграл (2.2.18).)

Помимо m_S , σ_{SN}^2 (2.2.10), σ_N^2 (2.2.14), $z_S = \frac{m_S}{\sigma_{SN}}$, ξ (2.2.16) введем обозначения

$$z_N = \frac{m_S}{\sigma_N}, \quad \varkappa^2 = \frac{\sigma_N^2}{\sigma_{SN}^2}.$$

Для них справедливы представления (выражение ξ через интегралы будет получено позже, см. формулу (2.2.30))

$$\begin{aligned} m_S &= \widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#) = \int_0^T \ln(1 + s_{1N}(t; \vec{l}_\#)/\nu_1) s(t; \vec{l}_0) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln(1 + s_1(t)/\nu_1) s_0(t + \Delta_k) dt \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

$$\sigma_{SN}^2 = B_{SN}(\vec{l}_\#, \vec{l}_\#) = \nu \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) (1 + s_0(t + \Delta_k)/\nu) dt, \quad (2.2.20)$$

$$\sigma_N^2 = B_N(\vec{l}_\#, \vec{l}_\#) = \nu N \int_0^T \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) dt, \quad (2.2.21)$$

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{m_S}{\sigma_{SN}} = \frac{\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#)}{\sqrt{B_{SN}(\vec{l}_\#, \vec{l}_\#)}} = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln(1 + s_1(t)/\nu_1) s_0(t + \Delta_k) dt}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) (s_0(t + \Delta_k) + \nu) dt}}, \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$z_N = \frac{m_S}{\sigma_N} = \frac{\widehat{S}(\vec{l}_0, \vec{l}_\#)}{\sqrt{B_N(\vec{l}_\#, \vec{l}_\#)}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln(1 + s_1(t)/\nu_1) s_0(t + \Delta_k) dt}{\sqrt{\nu N \int_0^T \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) dt}}, \quad (2.2.23)$$

$$\varkappa^2 = \frac{\sigma_N^2}{\sigma_{SN}^2} = \frac{N \int_0^T \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) dt}{\sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) s_0(t + \Delta_k)/\nu dt}, \quad (2.2.24)$$

где Δ_k определено формулой (2.1.28).

После замены переменных $y = H/\sigma_{SN}$ получаем

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varkappa\sqrt{2}}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(y - z_S)^2}{2} - \frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{y^2}{\varkappa^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\varkappa^2}\right)\right] dy.$$

Для удобства дальнейших вычислений эту формулу перепишем в виде

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y - z_S)^2}{2} - \frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{y^2}{\varkappa^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\varkappa^2}\right)\right] dy. \quad (2.2.25)$$

Разница между двумя последними интегралами мала по тем же соображениям, что и интеграл (2.2.18). Точность формулы (2.2.25) улучшается с ростом ξ и z_S [87].

Формула (2.2.25) для вероятности P_0 надежной оценки довольно громоздка и расчет по ней возможен только численными методами. Поэтому приведем простую верхнюю границу для вероятности аномальных ошибок.

Поскольку вторая производная функции $\exp(-u)$ положительна, она является выпуклой вниз; следовательно, ее график лежит выше касательной $y = 1 - u$; иными словами, $\exp(-u) \geq 1 - u$. Подставляя в это неравенство $u = \frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{y^2}{\varkappa^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\varkappa^2}\right)$, получаем

$$\exp\left[-\frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{y^2}{\varkappa^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\varkappa^2}\right)\right] \geq 1 - \frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{y^2}{\varkappa^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\varkappa^2}\right).$$

Подставим этот результат в формулу (2.2.25):

$$P_0 \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y - z_S)^2}{2}\right] \left[1 - \frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{y^2}{\varkappa^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\varkappa^2}\right)\right] dy.$$

Вычислим получившиеся интегралы:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(y - z_S)^2}{2}\right] dy = \sqrt{2\pi}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{\varkappa}\right)^2 \exp\left[-\frac{(y - z_S)^2}{2}\right] \exp\left[-\frac{y^2}{2\varkappa^2}\right] dy = \\ & = \sqrt{2\pi} \frac{(z_S^2 + 1)\varkappa^3 + \varkappa}{(\varkappa^2 + 1)^{5/2}} \exp\left[-\frac{z_S^2}{2(\varkappa^2 + 1)}\right]. \end{aligned}$$

Подставим результат в предыдущую формулу:

$$P_0 \geq 1 - \frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{(z_S^2 + 1)\varkappa^3 + \varkappa}{(\varkappa^2 + 1)^{5/2}} \exp\left[-\frac{z_S^2}{2(\varkappa^2 + 1)}\right]. \quad (2.2.26)$$

При $\varkappa = 1$ эта формула приобретает вид

$$P_0 \geq 1 - \frac{\xi}{16\sqrt{2\pi^2}} (z_S^2 + 2) \exp\left[-\frac{z_S^2}{4}\right]. \quad (2.2.27)$$

Поскольку вывод неравенства (2.2.26) был основан на замене функции $\exp(-u)$ ее первым многочленом Тейлора $y = 1 - u$, неравенства (2.2.26)

и (2.2.27) близки к равенствам. Порядок точности подобных формул обычно равен следующему слагаемому ряда Тейлора, который в нашем случае есть

$$\left(\frac{\xi}{(2\pi)^2}\right)^2 \cdot \frac{\varkappa\left((z_S^4 + 6z_S^2 + 3)\varkappa^4 + 12(z_S^2 + 1)\varkappa^2 + 12\right)}{(\varkappa^2 + 2)^{9/2}} \exp\left[-\frac{z_S^2}{\varkappa^2 + 2}\right].$$

Видно, что эта величина мала, если мало $\xi^2 \exp(-z_S^2/2)$.

Наконец, вычислим величину ξ (2.2.16). Введем в дополнение к (2.1.28) сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{1k} &= t - 2R_1/c - (k - \mu)(1 + 2V_1/c)\vartheta - A_1(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \\ \tilde{t}_{2k} &= t - 2R_2/c - (k - \mu)(1 + 2V_2/c)\vartheta - A_2(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

В этих обозначениях сигналы приобретают вид

$$\begin{aligned} s_{1N}(t, \vec{l}) &= s_{1N}(t, R, V, A) = \sum_{k=0}^{N-1} s_1(\tilde{t}_k), \\ s(t, \vec{l}_1) &= s(t, R_1, V_1, A_1) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(\tilde{t}_{1k}), \\ s(t, \vec{l}_2) &= s(t, R_2, V_2, A_2) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(\tilde{t}_{2k}). \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Воспользуемся представлением (2.2.13) для $B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$. Подставим в него выражение (2.2.29), где \tilde{t}_k определено формулой (2.1.28). Имеем (здесь l_{1i} и l_{2j} означают любые из переменных R_1, V_1 и A_1 или R_2, V_2 и A_2 соответственно)

$$\frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} = \frac{\nu}{\nu_1^2} \int_0^T \frac{\frac{\partial s_{1N}(t; \vec{l}_1)}{\partial l_{1i}}}{1 + s_{1N}(t; \vec{l}_1)/\nu_1} \cdot \frac{\frac{\partial s_{1N}(t; \vec{l}_2)}{\partial l_{2j}}}{1 + s_{1N}(t; \vec{l}_2)/\nu_1} dt =$$

(в силу условий на скважность и формулы $s_{1N}(t, \vec{l}) = s_{1N}(t, R, V, A) = \sum_{k=0}^{N-1} s_1(\tilde{t}_k)$ можно продолжить так:)

$$= \frac{\nu}{\nu_1^2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \frac{\frac{\partial s_1(\tilde{t}_{1k})}{\partial l_{1i}}}{1 + s_1(\tilde{t}_{1k})/\nu_1} \cdot \frac{\frac{\partial s_1(\tilde{t}_{2k})}{\partial l_{2j}}}{1 + s_1(\tilde{t}_{2k})/\nu_1} dt.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \Big|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_2} = \frac{\nu}{\nu_1^2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \frac{\frac{\partial s_1(\tilde{t}_{2k})}{\partial l_{2i}} \frac{\partial s_1(\tilde{t}_{2k})}{\partial l_{2j}}}{(1 + s_1(\tilde{t}_{2k})/\nu_1)^2} dt.$$

После вычисления частных производных получаем представление для матрицы:

$$\left\| \frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2} \Big|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_2} \right\| = \frac{\nu}{\nu_1^2} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \frac{4}{c^2} & \frac{4\vartheta(k-\mu)}{c^2} & \frac{2\vartheta^2(k-\mu)^2}{c^2} \\ \frac{4\vartheta(k-\mu)}{2\vartheta^2(k-\mu)^2} & \frac{4\vartheta^2(k-\mu)^2}{2\vartheta^3(k-\mu)^3} & \frac{2\vartheta^3(k-\mu)^3}{\vartheta^4(k-\mu)^4} \\ \frac{2\vartheta^2(k-\mu)^2}{c^2} & \frac{2\vartheta^3(k-\mu)^3}{c^2} & \frac{\vartheta^4(k-\mu)^4}{c^2} \end{pmatrix} \int_0^T \left(\frac{\frac{ds_1(t)}{dt}}{1 + s_1(t)/\nu_1} \right)^2 dt.$$

После громоздких вычислений (которые здесь не приводятся) эта формула приобретает вид¹⁾

$$\det \left\| \frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2} \Big|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_2} \right\| = \frac{\vartheta^6}{c^6} \left(\frac{N^9}{135} - \frac{2N^7}{45} + \frac{N^5}{15} - \frac{4N^3}{135} \right) \left[\frac{\nu}{\nu_1^2} \int_0^T \left(\frac{\frac{ds_1(t)}{dt}}{1 + s_1(t)/\nu_1} \right)^2 dt \right]^3.$$

Отсюда получаем представление для ξ (2.2.16):

$$\xi = \frac{Q\vartheta^3}{\sigma_N^3 c^3 \nu_1^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}} \left[\nu \int_0^T \left(\frac{\frac{ds_1(t)}{dt}}{1 + s_1(t)/\nu_1} \right)^2 dt \right]^{3/2}, \quad (2.2.30)$$

где

$$Q = (R_{\max} - R_{\min})(V_{\max} - V_{\min})(A_{\max} - A_{\min}).$$

Приведем выражения для характеристик точности оценок параметров движения с учетом наличия аномальных ошибок. Основными характеристиками точности оценок будем считать смещения и рассеяния. Дисперсии используются в качестве характеристик точности оценок для нескольких частных случаев, главным образом, при условии несмещенности оценок.

Смещение и рассеяние оценок $\widehat{\vec{l}}$ с учетом аномальных ошибок в силу

¹⁾ Отметим, что одно из представлений этого определителя $(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4$ совпадает с формулой для d_N из [94] при условии, что $M_0 = 1$, что является косвенным подтверждением правильности вычислений.

формулы полной вероятности определяются выражениями

$$\begin{aligned}
b(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0), \\
B(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 B_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) B_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0), \\
b(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 b_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) b_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0), \\
B(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 B_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) B_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0), \\
b(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 b_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) b_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0), \\
B(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 B_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) B_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0).
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Здесь $b_0(\widehat{\cdot}|\cdot_0)$ и $B_0(\widehat{\cdot}|\cdot_0)$ — смещение и рассеяние оценки в условиях отсутствия аномальных ошибок, $b_a(\widehat{\cdot}|\cdot_0)$ и $B_a(\widehat{\cdot}|\cdot_0)$ — смещение и дисперсия оценки при наличии только аномальных ошибок.

Рассмотрим сначала характеристики оценки дальности R при условии, что произошла аномальная ошибка. Поскольку шумовая функция $\widehat{N}(R, V, A)$ является однородным случайным полем, то положение наибольшего максимума шумовой функции распределено равномерно на отрезке $[R_{\min}, R_{\max}]$ и не зависит от распределений V и A . Иными словами, плотность вероятности оценки дальности R при условии аномальной ошибки задается формулой (ΔR_{pr} определено формулой (2.2.1))

$$W_a(\widehat{R}) = \frac{1}{\Delta R_{pr}}, \quad R_{\min} < \widehat{R} < R_{\max}.$$

Поэтому при условии аномальной ошибки смещение, дисперсия и рассеяние задаются формулами

$$\begin{aligned}
b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= b_a(\widehat{R}|R_0) = R_{pr} - R_0, \\
D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= D_a(\widehat{R}|R_0) = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} (\widehat{R} - R_{pr})^2 W_a(\widehat{R}) d\widehat{R} = \\
&= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} (\widehat{R} - R_{pr})^2 \frac{1}{\Delta R_{pr}} d\widehat{R} = \Delta R_{pr}^2 / 12, \\
B_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= D_a(\widehat{R}|R_0) + b_a^2(\widehat{R}|R_0) = \Delta R_{pr}^2 / 12 + (R_{pr} - R_0)^2.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом для оценок скорости и ускорения при условии

аномальной ошибки получаем

$$\begin{aligned}
b_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= V_{pr} - V_0, \\
D_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= \Delta V_{pr}^2/12, \\
B_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= \Delta V_{pr}^2/12 + (V_{pr} - V_0)^2, \\
b_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= A_{pr} - A_0, \\
D_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= \Delta A_{pr}^2/12, \\
B_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= \Delta A_{pr}^2/12 + (A_{pr} - A_0)^2.
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

В условиях надежной оценки имеем

$$\begin{aligned}
b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= R_{\#} - R_0, \\
b_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= V_{\#} - V_0, \\
b_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= A_{\#} - A_0,
\end{aligned}$$

где $(R_{\#}, V_{\#}, A_{\#})$ — точка максимума решающей статистики (2.1.7). Отсюда с учетом (2.2.31) получаем выражения для условного смещения с учетом аномальных ошибок:

$$\begin{aligned}
b(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= P_0(R_{\#} - R_0) + (1 - P_0)(R_{pr} - R_0) = P_0R_{\#} + (1 - P_0)R_{pr} - R_0, \\
b(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= P_0(V_{\#} - V_0) + (1 - P_0)(V_{pr} - V_0) = P_0V_{\#} + (1 - P_0)V_{pr} - V_0, \\
b(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= P_0(A_{\#} - A_0) + (1 - P_0)(A_{pr} - A_0) = P_0A_{\#} + (1 - P_0)A_{pr} - A_0.
\end{aligned}$$

Для расчета безусловных смещений усредним эти величины по $R_0 \in [R_{\min}; R_{\max}]$, $V_0 \in [V_{\min}; V_{\max}]$ и $A_0 \in [A_{\min}; A_{\max}]$. Найдем, к примеру, среднее значение величины R_0 . Поскольку распределение дальности R_0 является равномерным в соответствующем интервале, то математическое ожидание величины R_0 равно R_{pr} (2.2.1). Отсюда видно, что среднее значение $b_a(\widehat{R})$ величины $b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = R_{pr} - R_0$ равно нулю. Поэтому для безусловного смещения дальности получаем

$$b(\widehat{R}) = P_0b_0(\widehat{R}) + (1 - P_0)b_a(\widehat{R}) = P_0(R_{\#} - R_{pr}).$$

Аналогично для безусловных смещений скорости и ускорения имеем

$$\begin{aligned}
b(\widehat{V}) &= P_0b_0(\widehat{V}) + (1 - P_0)b_a(\widehat{V}) = P_0(V_{\#} - V_{pr}), \\
b(\widehat{A}) &= P_0b_0(\widehat{A}) + (1 - P_0)b_a(\widehat{A}) = P_0(A_{\#} - A_{pr}).
\end{aligned}$$

В частном случае несмещенных оценок ($R_{\#} = R_0$, $V_{\#} = V_0$ и $A_{\#} = A_0$) эти формулы приобретают вид

$$b(\widehat{R}) = 0, \quad b(\widehat{V}) = 0, \quad b(\widehat{A}) = 0.$$

Перейдем к выводу формул для условных дисперсий. Напомним, что дисперсии надежных оценок равны диагональным элементам корреляционной матрицы \mathbf{K} (2.1.26) совместно-эффективных оценок. При этом величины, входящие в формулу (2.1.26), задаются соответственно формулами: $\widehat{\mathbf{I}}$ (2.1.35), α_k (2.1.33), \widehat{M}_n (2.1.34), $\widehat{\mathbf{I}}^0$ (2.1.32), α_k^0 (2.1.29), \widehat{M}_n^0 (2.1.30). Подчеркнем, что величины α_k и α_k^0 зависят от Δ_k (2.1.28) и тем самым от чисел $R_{\#} - R_0$, $V_{\#} - V_0$ и $A_{\#} - A_0$. Таким образом, дисперсия получается условной. Тем самым, мы получаем алгоритм для нахождения условных дисперсий $D_0(\widehat{R}|R_0)$, $D_0(\widehat{V}|V_0)$ и $D_0(\widehat{A}|A_0)$ надежных оценок.

Выражения для диагональных элементов корреляционной матрицы \mathbf{K} (2.1.26), соответствующие дисперсиям надежных оценок, имеют вид

$$\begin{aligned} D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = & \frac{c^2}{4} \left(\widehat{M}_0^0 \widehat{M}_3^4 - 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_3^3 - 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_2 \widehat{M}_3^3 + 3\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_2^2 \widehat{M}_3^2 + \right. \\ & + 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_4 \widehat{M}_3^2 - 2\widehat{M}_0^0 \widehat{M}_2 \widehat{M}_4 \widehat{M}_3^2 + 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_2^2 \widehat{M}_4 \widehat{M}_3 \\ & + \widehat{M}_4^0 (\widehat{M}_2^2 - \widehat{M}_1 \widehat{M}_3)^2 + \widehat{M}_2^0 \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_4^2 + \widehat{M}_0^0 \widehat{M}_2^2 \widehat{M}_4^2 - 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_2 \widehat{M}_4^2 - \\ & - 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_2^3 \widehat{M}_4 - 2\widehat{M}_3^0 (\widehat{M}_2^2 - \widehat{M}_1 \widehat{M}_3) (\widehat{M}_2 \widehat{M}_3 - \widehat{M}_1 \widehat{M}_4) \left. \right) \times \\ & \times (\widehat{M}_0 \widehat{M}_3^2 + \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_4 + \widehat{M}_2^3 - \widehat{M}_2 (\widehat{M}_0 \widehat{M}_4 + 2\widehat{M}_1 \widehat{M}_3))^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) = & \frac{c^2}{4\vartheta^2} \left(\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_2^4 - 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_3 \widehat{M}_2^3 + \widehat{M}_0^0 \widehat{M}_3^2 \widehat{M}_2^2 + 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_3 \widehat{M}_2^2 - \right. \\ & - 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_4 \widehat{M}_2^2 + 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_4 \widehat{M}_2^2 - 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_3^2 \widehat{M}_2 - \\ & - 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_4 \widehat{M}_2 + 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_3 \widehat{M}_4 \widehat{M}_2 - 2\widehat{M}_0^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_3 \widehat{M}_4 \widehat{M}_2 + \\ & + \widehat{M}_4^0 (\widehat{M}_1 \widehat{M}_2 - \widehat{M}_0 \widehat{M}_3)^2 + \widehat{M}_2^0 \widehat{M}_0^2 \widehat{M}_4^2 + \widehat{M}_0^0 \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_4^2 - 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_4^2 + \\ & + 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_3 \widehat{M}_4 - 2\widehat{M}_3^0 (\widehat{M}_1 \widehat{M}_2 - \widehat{M}_0 \widehat{M}_3) (\widehat{M}_2^2 - \widehat{M}_0 \widehat{M}_4) \left. \right) \times \\ & \times (-\widehat{M}_2 (\widehat{M}_0 \widehat{M}_4 + 2\widehat{M}_1 \widehat{M}_3) + \widehat{M}_0 \widehat{M}_3^2 + \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_4 + \widehat{M}_2^3)^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) = & \frac{c^2}{\vartheta^4} \left(\widehat{M}_0^0 \widehat{M}_2^4 - 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_2^3 - 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_2^3 + 3\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_2^2 + \right. \\ & + 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_3 \widehat{M}_2^2 - 2\widehat{M}_0^0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_3 \widehat{M}_2^2 + 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_3 \widehat{M}_2 + \\ & + \widehat{M}_4^0 (\widehat{M}_1^2 - \widehat{M}_0 \widehat{M}_2)^2 + \widehat{M}_2^0 \widehat{M}_0^2 \widehat{M}_3^2 + \widehat{M}_0^0 \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_3^2 - 2\widehat{M}_1^0 \widehat{M}_0 \widehat{M}_1 \widehat{M}_3^2 - \\ & - 2\widehat{M}_2^0 \widehat{M}_1^3 \widehat{M}_3 - 2\widehat{M}_3^0 (\widehat{M}_1^2 - \widehat{M}_0 \widehat{M}_2) (\widehat{M}_1 \widehat{M}_2 - \widehat{M}_0 \widehat{M}_3) \left. \right) \times \\ & \times (-\widehat{M}_2 (\widehat{M}_0 \widehat{M}_4 + 2\widehat{M}_1 \widehat{M}_3) + \widehat{M}_0 \widehat{M}_3^2 + \widehat{M}_1^2 \widehat{M}_4 + \widehat{M}_2^3)^{-2}. \end{aligned}$$

В частном случае, когда оценка несмещенная (математически это соответствует тому, что $R_{\#} = R_0$, $V_{\#} = V_0$, $A_{\#} = A_0$; а значит, $\Delta_k = 0$; поэтому α_k и α_k^0 не зависят от k ; ниже они обозначены через α и α^0) выражения для дисперсий с учетом только надежной оценки принимают вид

$$\begin{aligned} D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{\alpha^0}{4\alpha^2} \frac{M_2 M_4 - M_3^2}{(2M_1 M_3 + M_0 M_4) M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4}, \\ D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{\alpha^0}{4\vartheta^2 \alpha^2} \frac{M_0 M_4 - M_2^2}{(2M_1 M_3 + M_0 M_4) M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4}, \\ D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{\alpha^0}{\vartheta^4 \alpha^2} \frac{M_0 M_2 - M_1^2}{(2M_1 M_3 + M_0 M_4) M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4}, \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

где M_n определено формулой (1.1.13) со с. 17. Подставляя в эти формулы определения M_n и упрощая, получаем следующие выражения для дисперсий:

$$\begin{aligned} D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{\alpha^0}{4\alpha^2} \frac{3}{N(N^4 - 5N^2 + 4)} \left(4(15\mu^4 + 30\mu^3 + 21\mu^2 + 6\mu + 1) + 3N^4 - \right. \\ &\quad \left. - 12(2\mu + 1)N^3 + (84\mu^2 + 84\mu + 17)N^2 - 12(10\mu^3 + 15\mu^2 + 7\mu + 1)N \right), \\ D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{\alpha^0}{4\vartheta^2 \alpha^2} \frac{12(60\mu^2 + 60\mu + 16N^2 - 30(2\mu + 1)N + 11)}{N(N^4 - 5N^2 + 4)}, \\ D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{\alpha^0}{\vartheta^4 \alpha^2} \frac{180}{N(N^4 - 5N^2 + 4)}. \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

Отметим, что дисперсии (2.2.33) и (2.2.34) одновременно являются безусловными, поскольку они не зависят от R_0 , V_0 и A_0 . Дисперсии при условии аномальной ошибки приведены в формуле (2.2.32).

Перейдем к нахождению условных дисперсий с учетом аномальных ошибок. Рассмотрим случай оценки R . Из формул

$$\begin{aligned} B(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= D(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + b^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0), \\ B_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + b_0^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0), \\ B_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + b_a^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0). \end{aligned}$$

с учетом формул (2.2.31) имеем

$$\begin{aligned}
D(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= B(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) - b^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = \\
&= P_0 B_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) B_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) - \\
&- (P_0 b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0))^2 = \\
&= P_0 (D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + b_0^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0)) + \\
&+ (1 - P_0) (D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + b_a^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0)) - \\
&- P_0^2 b_0^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) - P_0(1 - P_0) b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) - \\
&- (1 - P_0)^2 b_a^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = \\
&= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&+ P_0 b_0^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) - P_0^2 b_0^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&+ (1 - P_0) b_a^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) - (1 - P_0)^2 b_a^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&- P_0(1 - P_0) b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = \\
&= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&+ P_0(1 - P_0) b_0^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + P_0(1 - P_0) b_a^2(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&- P_0(1 - P_0) b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = \\
&= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&+ P_0(1 - P_0) (b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) - b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0))^2 =
\end{aligned}$$

(с учетом формул $b_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = R_{\#} - R_0$ и $b_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = R_{pr} - R_0$ последнее выражение можно переписать так:)

$$\begin{aligned}
&= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&+ P_0(1 - P_0) (R_{\#} - R_{pr})^2.
\end{aligned}$$

Аналогично выводятся формулы для условных дисперсий оценок скорости и ускорения с учетом аномальных ошибок. Итак, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
D(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + P_0(1 - P_0) (R_{\#} - R_{pr})^2, \\
D(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + P_0(1 - P_0) (V_{\#} - V_{pr})^2, \\
D(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + P_0(1 - P_0) (A_{\#} - A_{pr})^2.
\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Подразумевается, что сюда надо подставить представления (2.2.32) и (2.2.33).

Теперь легко получить выражения для условных рассеяний:

$$\begin{aligned}
B(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + \\
&\quad + R_0^2 + R_{pr}^2 + P_0(R_{\#}^2 - R_{pr}^2) - 2R_0(P_0(R_{\#} - R_{pr}) + R_{pr}), \\
B(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + \\
&\quad + V_0^2 + V_{pr}^2 + P_0(V_{\#}^2 - V_{pr}^2) - 2V_0(P_0(V_{\#} - V_{pr}) + V_{pr}), \\
B(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + \\
&\quad + A_0^2 + A_{pr}^2 + P_0(A_{\#}^2 - A_{pr}^2) - 2A_0(P_0(A_{\#} - A_{pr}) + A_{pr}).
\end{aligned}$$

В частном случае несмещенных оценок ($R_{\#} = R_0$, $V_{\#} = V_0$ и $A_{\#} = A_0$) эти формулы приобретают вид

$$\begin{aligned}
D(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + P_0(1 - P_0)(R_{pr} - R_0)^2, \\
D(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + P_0(1 - P_0)(V_{pr} - V_0)^2, \\
D(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + P_0(1 - P_0)(A_{pr} - A_0)^2, \\
b(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= (1 - P_0)(R_{pr} - R_0), \\
b(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= (1 - P_0)(V_{pr} - V_0), \\
b(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= (1 - P_0)(A_{pr} - A_0), \\
B(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0)(R_{pr} - R_0)^2, \\
B(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0)(V_{pr} - V_0)^2, \\
B(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= P_0 D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) D_a(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0)(A_{pr} - A_0)^2.
\end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Формула (2.2.36) позволяет найти в явном виде безусловные рассеяния. Рассчитаем, к примеру, $B(\widehat{R})$. Для это усредним $B(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0)$ по $R_0 \in [R_{\min}; R_{\max}]$, $V_0 \in [V_{\min}; V_{\max}]$ и $A_0 \in [A_{\min}; A_{\max}]$. Слагаемые $P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0)$ и $(1 - P_0) D_a(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) = \Delta R_{pr}^2/12$ (см. формулу (2.2.32)) от R_0 , V_0 и A_0 не зависят. Поэтому усреднять их не нужно. Усредним третье слагаемое. Поскольку распределение дальности R_0 является равномерным в $[R_{\min}; R_{\max}]$, имеем

$$\begin{aligned}
\langle (R_{pr} - R_0)^2 \rangle &= \frac{1}{\Delta R_{pr}} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} (R_{pr} - R_0)^2 dR_0 = \\
&= \frac{1}{\Delta R_{pr}} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} - R_0 \right)^2 dR_0 = \frac{1}{\Delta R_{pr}} \frac{(R_{\max} - R_{\min})^3}{12} = \frac{\Delta R_{pr}^2}{12}.
\end{aligned}$$

Аналогично усредняем рассеяния скорости и ускорения. Окончательно

для безусловных рассеяний получаем

$$\begin{aligned} B(\widehat{R}) &= \langle (\widehat{R} - R_0)^2 \rangle = P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) \Delta R_{pr}^2 / 6, \\ B(\widehat{V}) &= \langle (\widehat{V} - V_0)^2 \rangle = P_0 D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) \Delta V_{pr}^2 / 6, \\ B(\widehat{A}) &= \langle (\widehat{A} - A_0)^2 \rangle = P_0 D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) + (1 - P_0) \Delta A_{pr}^2 / 6, \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

где дисперсии $D_0(\cdot)$ определяются из формулы (2.2.33) (напомним, что они являются безусловными), а

$$\Delta R_{pr} = R_{\max} - R_{\min}, \quad \Delta V_{pr} = V_{\max} - V_{\min}, \quad \Delta A_{pr} = A_{\max} - A_{\min}.$$

Обсудим, что произойдет, если приемник в точности настроен на форму интенсивности рассеянного сигнала, то есть $s_1(t) = s_0(t)$, и $\nu_1 = \nu$. В таком случае квазиправдоподобная оценка переходит в оценку максимального правдоподобия. Поскольку оценка максимального правдоподобия является несмещенной, имеем $(R_{\#}, V_{\#}, A_{\#}) = (R_0, V_0, A_0)$.

Интенсивность рассеянного и ожидаемого сигналов принимает вид

$$\begin{aligned} s(t, \vec{l}) &= s(t, R, V, A) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t - 2R/c - (k - \mu)(1 + 2V/c)\vartheta - A(k - \mu)^2\vartheta^2/c). \end{aligned}$$

Тогда, как уже отмечалось при выводе формулы (2.1.42),

$$\widehat{M}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (k - \mu)^n = \hat{\alpha} M_n, \quad \widehat{M}_n^0 = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^0 (k - \mu)^n = \hat{\alpha} M_n,$$

где, как обычно, M_n задано формулой (1.1.13), а

$$\hat{\alpha} = \int_0^T \frac{1}{s_0(t) + \nu} \left[\frac{d s_0(t)}{dt} \right]^2 dt.$$

Выражения (2.2.19), (2.2.21) и (2.2.20) для основных параметров принимают вид:

$$\begin{aligned} m_S &= N \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + s_0(t)/\nu) s_0(t) dt, \\ \sigma_N^2 &= \nu N \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + s_0(t)/\nu) dt, \\ \sigma_{SN}^2 &= \nu N \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + s_0(t)/\nu) (1 + s_0(t)/\nu) dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\varkappa^2 &= \frac{\sigma_N^2}{\sigma_{SN}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + s_0(t)/\nu) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + s_0(t)/\nu) (1 + s_0(t)/\nu) dt}, \\ z_S &= \frac{m_S}{\sigma_{SN}} = \frac{\sqrt{N} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + s_0(t)/\nu) s_0(t) dt}{\sqrt{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + s_0(t)/\nu) (1 + s_0(t)/\nu) dt}.\end{aligned}$$

Представление (2.2.30) для ξ остается почти прежним

$$\xi = \frac{Q}{\sigma_N^3 c^3} \frac{\vartheta^3 N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}} \left[\frac{1}{\nu} \int_0^T \left(\frac{\frac{ds_0(t)}{dt}}{1 + s_0(t)/\nu} \right)^2 dt \right]^{3/2},$$

где

$$Q = (R_{\max} - R_{\min})(V_{\max} - V_{\min})(A_{\max} - A_{\min}).$$

Неравенство (2.2.26) для оценки максимального правдоподобия остается внешне прежними (единица в обозначении $P_{\alpha 1}$ означает, что это вероятность для оценки максимального правдоподобия):

$$P_{a1} \approx \frac{\xi_1}{(2\pi)^2} \frac{(z_{S1}^2 + 1)\varkappa_1^3 + \varkappa_1}{(\varkappa_1^2 + 1)^{5/2}} \exp\left[-\frac{z_{S1}^2}{2(\varkappa_1^2 + 1)}\right]. \quad (2.2.38)$$

В формулах (2.2.34) для дисперсий с учетом только надежной оценки изменится только коэффициент:

$$\begin{aligned}D_0(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{1}{4\alpha} \frac{3}{N(N^4 - 5N^2 + 4)} \left(4(15\mu^4 + 30\mu^3 + 21\mu^2 + 6\mu + 1) + 3N^4 - \right. \\ &\quad \left. - 12(2\mu + 1)N^3 + (84\mu^2 + 84\mu + 17)N^2 - 12(10\mu^3 + 15\mu^2 + 7\mu + 1)N \right), \\ D_0(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{1}{4\vartheta^2\alpha} \frac{12(60\mu^2 + 60\mu + 16N^2 - 30(2\mu + 1)N + 11)}{N(N^4 - 5N^2 + 4)}, \\ D_0(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) &= c^2 \frac{1}{\vartheta^4\alpha} \frac{180}{N(N^4 - 5N^2 + 4)}.\end{aligned}$$

Дисперсии с учетом только аномальных ошибок задаются прежними формулами (2.2.32). Также не изменится внешний вид формул (2.2.36), но при этом величина P_0 (2.2.25) в них будет иметь другое значение.

Вычислим отношение

$$\gamma = \frac{P_a}{P_{a1}}$$

двух вероятностей аномальных ошибок для двух случаев: квазиправдоподобной несмещенной оценки, см. (2.2.26),

$$P_a \approx \frac{\xi}{(2\pi)^2} \frac{(z_S^2 + 1)\varkappa^3 + \varkappa}{(\varkappa^2 + 1)^{5/2}} \exp\left[-\frac{z_S^2}{2(\varkappa^2 + 1)}\right],$$

и (ее частного случая) оценки максимального правдоподобия (см. (2.2.38))

$$P_{a1} \approx \frac{\xi_1}{(2\pi)^2} \frac{(z_{S1}^2 + 1)\varkappa_1^3 + \varkappa_1}{(\varkappa_1^2 + 1)^{5/2}} \exp\left[-\frac{z_{S1}^2}{2(\varkappa_1^2 + 1)}\right].$$

Имеем

$$\gamma = \frac{P_a}{P_{a1}} = \frac{\xi}{\xi_1} \frac{(z_S^2 + 1)\varkappa^3 + \varkappa}{(z_{S1}^2 + 1)\varkappa_1^3 + \varkappa_1} \frac{(\varkappa_1^2 + 1)^{5/2}}{(\varkappa^2 + 1)^{5/2}} \exp\left[\frac{z_{S1}^2}{2(\varkappa_1^2 + 1)} - \frac{z_S^2}{2(\varkappa^2 + 1)}\right]. \quad (2.2.39)$$

Величина γ показывает, во сколько раз возрастает вероятность аномальной ошибки вследствие отклонения формы интенсивности предполагаемого сигнала $s_1(t)$, для которого синтезирован алгоритм квазиправдоподобной оценки, от формы интенсивности принимаемого сигнала $s_0(t)$.

Рассмотрим численные примеры, для которых конкретизируем выше изложенные выкладки.

Согласно теореме 2.1.9, если форма интенсивности рассеянного $s_0(t)$ и ожидаемого $s_1(t)$ сигналов является гауссовской или лоренцевской:

$$s(t) = a \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right], \quad s(t) = a \left[1 + \left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)^2\right]^{-1},$$

то квазиправдоподобные оценки дальности, скорости и ускорения являются состоятельными и несмещенными. Здесь параметры подобраны так, чтобы τ совпадало с эквивалентной длительностью

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt / [\max s(t)]^2$$

сигнала.

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда

$$s_0(t) = a_0 \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right], \quad s_1(t) = a_1 \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{\tau_1}\right)^2\right]. \quad (2.2.40)$$

или

$$s_0(t) = a_0 \left[1 + \left(\frac{\pi t}{2\tau_0}\right)^2\right]^{-1}, \quad s_1(t) = a_1 \left[1 + \left(\frac{\pi t}{2\tau_1}\right)^2\right]^{-1}. \quad (2.2.41)$$

Рассчитаем величины α^0 , α , $\hat{\alpha}$, \varkappa^2 , z_S^2 и ξ .

Перейдем к безразмерным переменным. Представим сигналы в виде

$$s_0(t) = a_0 f_0(t/\tau_0), \quad s_1(t) = a_1 f_1(t/\tau_1),$$

где символом a_0 обозначен максимум сигнала s_0 , а символом a_1 — максимум сигнала s_1 (тем самым максимумы функций $f_0(t)$ и $f_1(t)$ равны

единице). Введем безразмерные величины (отношение сигнал-фон и время, нормированное на длительность)

$$q_0 = \frac{a_0}{\nu}, \quad q_1 = \frac{a_1}{\nu_1}, \quad x = \frac{t}{\tau_1}, \quad \eta = \frac{\tau_1}{\tau_0}.$$

Параметры τ_0 и τ_1 выберем так, чтобы энергия сигнала была единичной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(x) dx = 1.$$

Для сигналов Гаусса и Лоренца это условие приводит к формулам

$$f(x) = \exp\left[-\frac{\pi}{2}x^2\right], \quad f(x) = \left[1 + \left(\frac{\pi x}{2}\right)^2\right]^{-1},$$

что согласуется с формулами (2.2.40) и (2.2.41).

В этих обозначениях

$$s_0(t) = q_0\nu f_0(\eta x), \quad s_1(t) = q_1\nu_1 f_1(x).$$

При этом основные величины для характеристик квазиравдоподобной несмещенной оценки примут вид

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \frac{q_1^2\nu}{\tau_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + q_0 f_0(\eta x)}{(1 + q_1 f_1(x))^2} \left(f_1'(x)\right)^2 dx, \\ \alpha &= \frac{q_0 q_1 \nu}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + q_1 f_1(x)} f_0'(\eta x) f_1'(x) dx, \\ \hat{\alpha} &= \frac{q_0^2 \nu}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + q_0 f_0(x)} \left(f_0'(x)\right)^2 dx, \\ \sigma_N^2 &= \nu N \tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_1 f_1(x)) dx, \\ \sigma_{SN}^2 &= \nu N \tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_1 f_1(x)) (1 + q_0 f_0(\eta x)) dt, \\ \varkappa^2 &= \frac{\sigma_N^2}{\sigma_{SN}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_1 f_1(x)) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_1 f_1(x)) (1 + q_0 f_0(\eta x)) dx}, \\ z_S^2 &= \frac{m_S^2}{\sigma_{SN}^2} = \frac{q_0^2 \nu N \tau_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + q_1 f_1(x)) f_0(\eta x) dx\right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_1 f_1(x)) (1 + q_0 f_0(\eta x)) dx}, \\ \xi &= \frac{Q\vartheta^3}{\sigma_N^3 c^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}} \left[\frac{q_1^2 \nu}{\tau_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f_1'(x)}{1 + q_1 f_1(x)}\right)^2 dx \right]^{3/2}. \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

Чтобы получить выражения для тех же величин в случае оценки максимального правдоподобия, надо все индексы 1 у f , q и τ заменить на 0, а также положить η равной единице. Это приведет к формулам

$$\begin{aligned}
\alpha_1^0 &= \alpha_1 = \hat{\alpha}_1 = \frac{q_0^2 \nu}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + q_0 f_0(x)} \left(f_0'(x) \right)^2 dx, \\
\sigma_{N1}^2 &= \nu N \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_0 f_0(x)) dx, \\
\sigma_{SN1}^2 &= \nu N \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_0 f_0(x)) (1 + q_0 f_0(x)) dx, \\
\mathcal{K}_1^2 &= \frac{\sigma_{N1}^2}{\sigma_{SN1}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_0 f_0(x)) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_0 f_0(x)) (1 + q_0 f_0(x)) dx}, \\
z_{S1}^2 &= \frac{m_{S1}^2}{\sigma_{SN1}^2} = \frac{q_0^2 \nu N \tau_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + q_0 f_0(x)) f_0(x) dx \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + q_0 f_0(x)) (1 + q_0 f_0(x)) dx}, \\
\xi_1 &= \frac{Q \vartheta^3}{\sigma_{N1}^3 c^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}} \left[\frac{q_0^2 \nu}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f_0'(x)}{1 + q_0 f_0(x)} \right)^2 dx \right]^{3/2}.
\end{aligned} \tag{2.2.43}$$

Преобразуем формулы (2.2.42) для квазиравдоподобной несмещенной оценки и формулы (2.2.43) для оценки максимального правдоподобия для случая слабых сигналов, т.е. $a_0 \ll \nu$ и $a_1 \ll \nu_1$. С этой целью перейдем в них к пределу при $q_0 \rightarrow 0$ и $q_1 \rightarrow 0$. В результате получим

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= \frac{q_1^2 \nu}{\tau_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_1'(x) \right)^2 dx, \\
\alpha &= \frac{q_0 q_1 \nu}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_0'(\eta x) f_1'(x) dx, \\
\hat{\alpha} &= \frac{q_0^2 \nu}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_0'(x) \right)^2 dx, \\
\sigma_N^2 &= \sigma_{SN}^2 = \nu N q_1^2 \tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(x) dx = \nu N q_1^2 \tau_1, \\
\mathcal{K}^2 &= 1, \\
z_S^2 &= \frac{q_0^2 \nu N \tau_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_0(\eta x) dx \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x))^2 dx}, \\
\xi &= \frac{Q \vartheta^3}{c^3 \tau_1^3} \sqrt{\frac{(N^2 - 4)(N^2 - 1)^2}{2160}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f_1'(x))^2 dx \right]^{3/2},
\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1^0 &= \alpha_1 = \hat{\alpha}_1 = \frac{q_0^2 \nu}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_0'(x) \right)^2 dx, \\
\sigma_{N1}^2 &= \sigma_{SN1}^2 = \nu N q_0^2 \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx = \nu N q_0^2 \tau_0, \\
\kappa_1^2 &= 1, \\
\xi_1 &= \frac{Q \vartheta^3}{c^3 \tau_0^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(f_0'(x) \right)^2 dx \right]^{3/2}.
\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

Уточним эти формулы для конкретных случаев (2.2.40) и (2.2.41).
Проведем вычисления для первой пары (2.2.40):

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= \frac{\pi \nu q_1^2}{2\tau_1}, \\
\alpha &= \frac{\sqrt{2} \pi \nu q_0 q_1 \tau_0 \tau_1}{(\tau_0^2 + \tau_1^2)^{3/2}}, \\
\hat{\alpha} &= \frac{\pi \nu q_0^2}{2\tau_0}, \\
\sigma_N^2 &= \sigma_{SN}^2 = \nu N q_1^2 \tau_1, \\
\kappa^2 &= 1, \\
z_S^2 &= 2\nu N \tau_1, \\
\xi &= \pi^{3/2} Q \left(\frac{1}{2N\tau_1^2} \right)^{3/2} \frac{\vartheta^3}{c^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}}.
\end{aligned}$$

Для второй пары (2.2.41) получаем:

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= \frac{\pi^2 \nu q_1^2}{8\tau_1}, \\
\alpha &= \frac{\pi^2 \nu q_0 q_1 \tau_0 \tau_1}{(\tau_0 + \tau_1)^3}, \\
\hat{\alpha} &= \frac{\pi^2 \nu q_0^2}{8\tau_0}, \\
\sigma_N^2 &= \sigma_{SN}^2 = \nu N q_1^2 \tau_1, \\
\kappa^2 &= 1, \\
z_S^2 &= 4\nu N \tau_1, \\
\xi &= \pi^3 Q \left(\frac{1}{8N\tau_1^2} \right)^{3/2} \frac{\vartheta^3}{c^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}}.
\end{aligned}$$

Для случая слабых оптических импульсов ($q_0 \ll 1$ и $q_1 \ll 1$, $\varkappa = 1$) вероятность аномальной ошибки (см. формулу (2.2.27))

$$P_a \approx \frac{\xi}{16\sqrt{2}\pi^2} (z_S^2 + 2) \exp\left[-\frac{z_S^2}{4}\right]$$

также удается вычислить. Для первой пары (2.2.40):

$$P_a = \frac{Q \exp(-\frac{1}{2}\nu N\tau_1)}{32\sqrt{\pi}} (\nu N\tau_1 + 1) \left(\frac{\nu}{N\tau_1^2}\right)^{3/2} \frac{\vartheta^3}{c^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}}.$$

Для второй пары (2.2.41):

$$P_a = \frac{\pi Q \exp(-\nu N\tau_1)}{256} (2\nu N\tau_1 + 1) \left(\frac{\nu}{N\tau_1^2}\right)^{3/2} \frac{\vartheta^3}{c^3} \frac{N(N^2 - 1)}{12} \sqrt{\frac{N(N^2 - 4)}{15}}.$$

Отношение вероятностей аномальных ошибок P_a для первой и второй пар есть

$$\frac{8 \exp(\frac{1}{2}\nu N\tau_1) (\nu N\tau_1 + 1)}{\pi^{3/2} (2\nu N\tau_1 + 1)}.$$

С ростом $\nu N\tau_1$ эта величина быстро растет (за счет экспоненты): при $\nu N\tau_1 = 10$ она равна 111, а при $\nu N\tau_1 = 20$ — равна 16208. Таким образом, для сигналов Лоренца вероятность аномальных ошибок существенно меньше (при этом, как видно из результата [125], дисперсии от типа сигнала — гауссовского и лоренцовского — зависят не сильно).

Преобразуем формулу (2.2.39) для случая слабых сигналов ($a_0 \ll \nu$ и $a_1 \ll \nu_1$). После подстановки величин (2.2.44) и (2.2.45) в формулу (2.2.39) она упрощается до

$$\gamma = \frac{P_a}{P_{a1}} = \frac{\xi}{\xi_1} \frac{z_S^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} \exp\left[\frac{z_{S1}^2}{4} - \frac{z_S^2}{4}\right].$$

Упростим представление для входящего сюда выражения $\frac{\xi}{\xi_1}$:

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{1}{\eta^3} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1'(x))^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (f_0'(x))^2 dx} \right]^{3/2}.$$

Прочие составляющие формулы (2.2.39) упрощаются мало:

$$\begin{aligned}\frac{z_S^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} &= \frac{q_0^2 \nu N \tau_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_0(\eta x) dx \right)^2 + 2}{q_0^2 \nu N \tau_0 + 2}, \\ \frac{\xi}{\xi_1} \frac{z_S^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} &= \frac{1}{\eta^3} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1'(x))^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (f_0'(x))^2 dx} \right]^{3/2} \frac{q_0^2 \nu N \tau_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_0(\eta x) dx \right)^2 + 2}{q_0^2 \nu N \tau_0 + 2}, \\ \frac{z_{S1}^2}{4} - \frac{z_S^2}{4} &= \frac{1}{4} q_0^2 \nu N \left[\tau_0 - \tau_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_0(\eta x) dx \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Учтем, что $N \gg 1$. В результате получаем

$$\begin{aligned}\frac{\xi}{\xi_1} \frac{z_S^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} &= \frac{1}{\eta^3} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1'(x))^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (f_0'(x))^2 dx} \right]^{3/2} \frac{q_0^2 \nu N \tau_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_0(\eta x) dx \right)^2 + 2}{q_0^2 \nu N \tau_0 + 2}, \\ \frac{z_{S1}^2}{4} - \frac{z_S^2}{4} &= \frac{1}{4} q_0^2 \nu N \tau_0 \left[1 - \eta \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_0(\eta x) dx \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Подставляя эти представления в формулу (2.2.39), получаем для проигрыша в величине вероятности аномальной ошибки выражение

$$\gamma = \frac{1}{\eta^3} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f_1'(x))^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (f_0'(x))^2 dx} \right]^{3/2} \frac{\rho z_{S1}^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} \exp \left[\frac{1}{4} z_{S1}^2 (1 - \rho) \right],$$

где величина

$$\rho = \eta \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_0(\eta x) dx \right)^2$$

имеет смысл квадрата коэффициента корреляции между нормированными формами интенсивностей рассеянного $f_0(\eta x)$ и ожидаемого сигнала $f_1(x)$.

Выпишем формулы для величины γ в двух конкретных случаях — для импульсов с гауссовской и лоренцевской формами интенсивности. Принимаемая и ожидаемая формы интенсивности отличаются только длительностью. Длительность учтена параметром η , так что в обоих случаях $f_0 = f_1$. Поэтому

$$\gamma = \frac{P_a}{P_{a1}} = \frac{1}{\eta^3} \frac{\rho z_{S1}^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} \exp \left[\frac{1}{4} z_{S1}^2 (1 - \rho) \right].$$

Для сигналов с интенсивностями (2.2.40) величина ρ оказывается равной

$$\rho = \eta \left(\sqrt{\frac{2}{1 + \eta^2}} \right)^2 = \frac{2\eta}{1 + \eta^2},$$

а для γ получаем выражение

$$\gamma = \frac{P_a}{P_{a1}} = \frac{1}{\eta^3} \frac{\frac{2\eta}{1+\eta^2} z_{S1}^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} \exp \left[\frac{1}{4} z_{S1}^2 \frac{(1 - \eta)^2}{1 + \eta^2} \right].$$

Для сигналов с интенсивностями (2.2.41) величина ρ оказывается равной

$$\rho = \eta \left(\frac{2}{1 + \eta} \right)^2 = \frac{4\eta}{(1 + \eta)^2},$$

а для γ получаем выражение

$$\gamma = \frac{P_a}{P_{a1}} = \frac{1}{\eta^3} \frac{\frac{4\eta}{(1+\eta)^2} z_{S1}^2 + 2}{z_{S1}^2 + 2} \exp \left[\frac{1}{4} z_{S1}^2 \left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right)^2 \right].$$

Ниже на рис. 2.2.11 и 2.2.12 приведены графики функции $\gamma = \gamma(\eta)$ для гауссовских и лоренцовских сигналов для различных значений z_{S1} . На этих графиках видно, что если длительность τ_1 предполагаемых импульсов несколько больше длительности τ_0 принимаемых импульсов, то вероятность аномальной ошибки может оказаться меньше, чем в случае использования оценки максимального правдоподобия. Это явление имеет следующее объяснение. При увеличении длительности ожидаемых импульсов по отношению к импульсам принимаемым сужается полоса частот шумовой функции. При этом при небольшом различии форм ожидаемого и принимаемого импульсов существенных изменений сигнальной функции может не происходить. Это проявляется в сохранении величины ОСШ на выходе квазиправдоподобного приемника по сравнению с приемником максимального правдоподобия и уменьшении приведенного объема априорной области возможных значений параметров, что приводит к уменьшению вероятности аномальной ошибки при небольшом увеличении длительности ожидаемого сигнала. Однако, при дальнейшем увеличении длительности ожидаемых импульсов вероятность аномальной ошибки увеличивается вследствие уменьшения ОСШ на выходе квазиправдоподобного приемника.

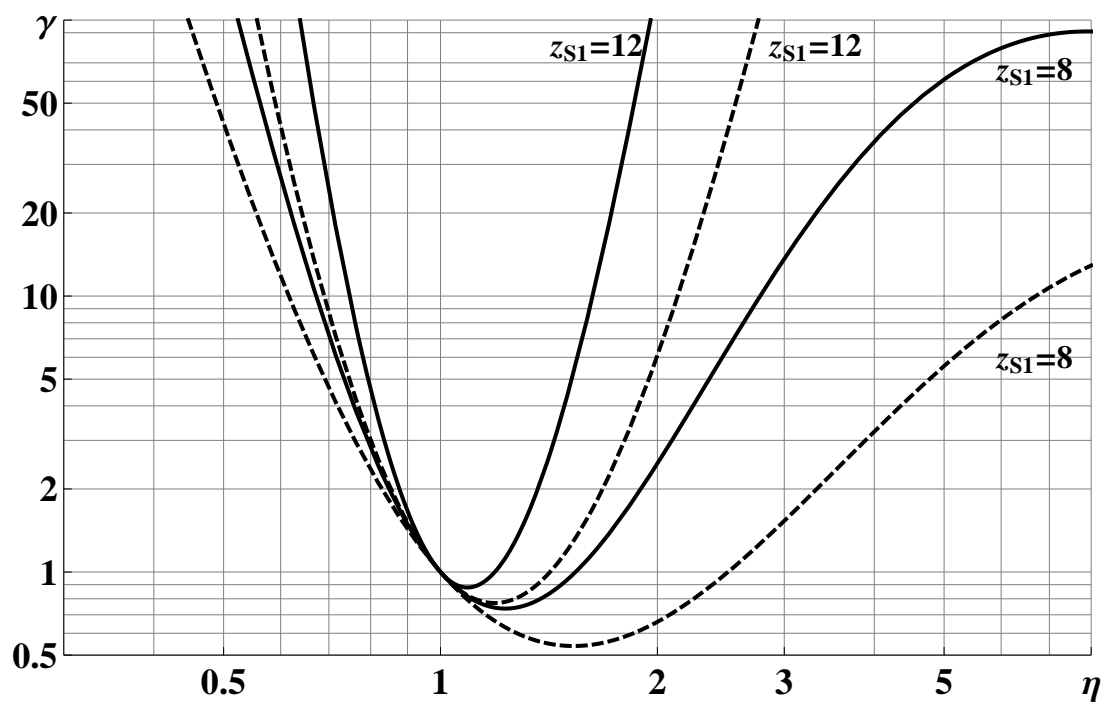


Рис. 2.2.11: График функции $\gamma = \gamma(\eta)$ для значений $z_{S1} = 8$ и $z_{S1} = 12$. Сплошные линии соответствуют гауссовским сигналам f_0 и f_1 , а пунктирные — лоренцевским

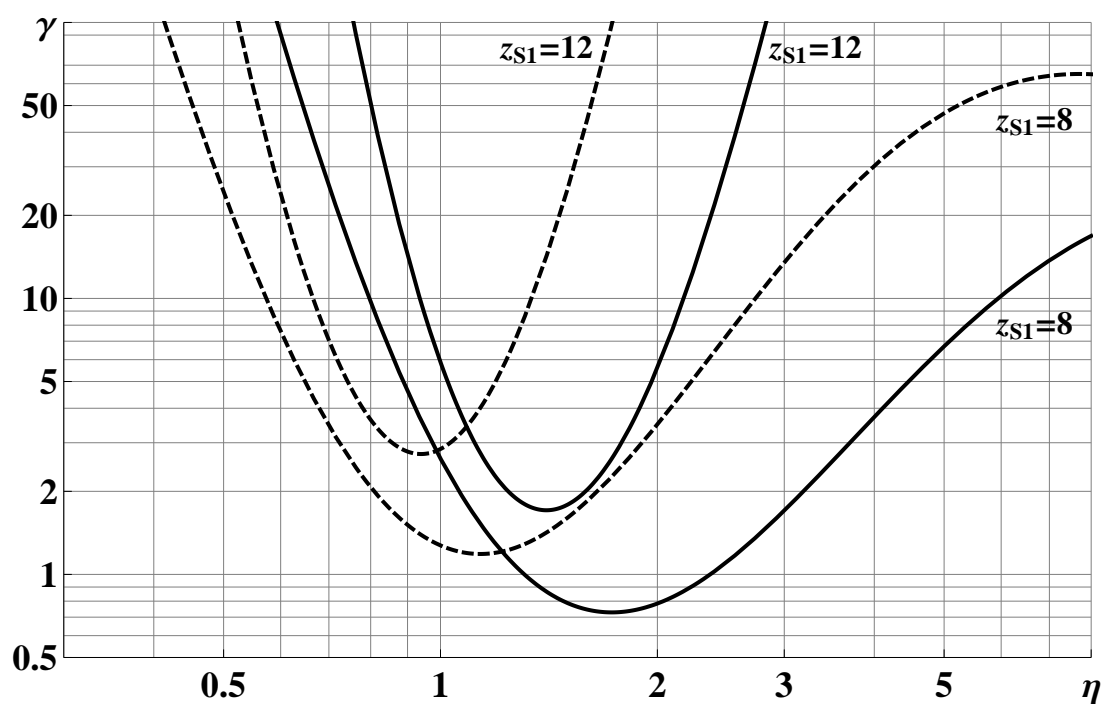


Рис. 2.2.12: График функции $\gamma = \gamma(\eta)$ для значений $z_{S1} = 8$ и $z_{S1} = 12$. Сплошные линии соответствуют f_0 лоренцевскому и f_1 гауссовскому сигналу, а штрихпунктирные — наоборот

2.3 Основные результаты и выводы

1. С учетом аномальных ошибок найдены характеристики предложенного квазиправдоподобного алгоритма оценки, синтезированного для предполагаемой формы интенсивности импульса, в общем случае отличающейся от действительной формы принимаемого импульса.

2. Квазиправдоподобный приемник в условиях априорной параметрической неопределенности не требует определения оценок неинформативных параметров в отличие от приемника, осуществляющего оценку максимального правдоподобия. Это позволяет существенно упростить техническую реализацию приемника. Действительно, в случае медленных флуктуаций при наличии p неинформативных параметров приемник, осуществляющий оценку максимального правдоподобия, производит формирование и поиск положения максимума логарифма функционала отношения правдоподобия как функции $3 + p$ аргументов, в то время как квазиправдоподобный приемник производит поиск положения максимума решающей статистики как функции 3 аргументов.

3. Квазиправдоподобные оценки могут быть несостоятельными. Величина смещения оценок зависит от различия между формами интенсивности предполагаемых и рассеянных импульсов. Получены достаточные условия, накладываемые на форму интенсивности импульсов, которые обеспечивают состоятельность оценки.

4. Вероятность аномальных ошибок быстро возрастает при уменьшении отношения сигнал-шум. Поэтому, задавшись некоторой критической вероятностью аномальных ошибок, удастся рассчитать пороговое значение отношения сигнал-шум, при превышении которого оценку можно считать надежной.

5. При настройке квазиправдоподобного приемника на импульсы несколько большей длительности, чем рассеянные, вероятность аномальной ошибки может оказаться меньше, чем для приемника максимального правдоподобия. Это происходит из-за того, что отношение сигнал-шум на выходе квазиправдоподобного приемника по сравнению с приемником максимального правдоподобия увеличивается несущественно, в то время как происходит уменьшение приведенного объема априорной шумовой области возможных значений параметров, что приводит к уменьшению вероятности аномальной ошибки. При дальнейшем увеличении длительности импульсов вероятность аномальной ошибки увеличивается вследствие уменьшения отношения сигнал-шум.

Глава 3

Квазиоптимальные оценки параметров движения по лазерным измерениям дальности

3.1 Квазиоптимальные оценки в условиях высокой априорной точности и их свойства

В главах 1 и 2 были рассмотрены алгоритмы оценки дальности, скорости и ускорения в условиях априорной неопределенности относительно формы и параметров принимаемых импульсов. Было показано, что эти алгоритмы хотя и являются, как правило, асимптотически эффективными, предполагают построение многоканального приемника — в случае приемника максимального правдоподобия многоканального по дальности, скорости, ускорению и неинформативным параметрам, а в случае квазиправдоподобного приемника — только по параметрам движения. В связи с этим представляет интерес синтез более простых с точки зрения аппаратной реализации алгоритмов оценки дальности, скорости и ускорения. Один из таких алгоритмов предложен ниже.

В настоящей главе обсуждается квазиоптимальный алгоритм оценки параметров движения, позволяющий упростить аппаратную реализацию приемника до одноканального варианта и работающего в условиях априорной неопределенности относительно формы и параметров принимаемых импульсов.

Квазиоптимальный метод состоит в том, что в приемнике проводится оценка не непосредственно параметров движения R , V и A , а времен λ_k прихода отдельных импульсов. После этого рассчитывается оценка интересующих параметров R , V и A . При этом параметры λ_k оцениваются по мере поступления импульсов последовательности. Это позволяет для

их оценки использовать один и тот же канал и тем самым существенно уменьшить количество каналов в приемнике.

Будем, как и ранее, считать, что форма интенсивности рассеянного сигнала имеет вид (2.1.1), а форма интенсивности ожидаемого сигнала имеет вид (2.1.2). Как и ранее, предполагается выполненным условие (1.1.3), а также что интервал наблюдения $[0, T]$ больше длительности всей последовательности оптических импульсов, т.е. $T > N\vartheta$, причем величина скважности последовательности не менее двух, так что отдельные импульсы не перекрываются.

Введем сокращенные обозначения, имеющие смысл временных положений импульсов:

$$\begin{aligned}\lambda_k &= 2R/c + (k - \mu)(1 + 2V/c)\vartheta + A(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \\ \lambda_{0k} &= 2R_0/c + (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta + A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c.\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

В этих обозначениях сигналы (2.1.1) и (2.1.2) принимают вид

$$\begin{aligned}s(t, R_0, V_0, A_0) &= s(t, \vec{l}_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t - \lambda_{0k}), \\ s_{1N}(t, R, V, A) &= s_{1N}(t, \vec{l}) = \sum_{k=0}^{N-1} s_1(t - \lambda_k).\end{aligned}$$

Будем считать, что известны интервалы времени $[t_{k-1}, t_k]$, в которых локализованы сигналы $s_0(t - \lambda_{0k})$ и $s_1(t - \lambda_k)$.

В соответствии с квазиоптимальным методом оценки параметров, чтобы оценить временные положения λ_{0k} рассчитывается решающая статистика для каждого импульса

$$L_k(\lambda_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln(1 + s_1(t - \lambda_k)/\nu_1) d\pi(t) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_1(t - \lambda_k) dt. \quad (3.1.2)$$

В качестве оценок временных положений λ_{0k} отдельных импульсов используются положения наибольших максимумов этих решающих статистик

$$\hat{\lambda}_k = \arg \sup L_k(\lambda_k), \quad \lambda_k \in [\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}], \quad (3.1.3)$$

где границы априорного интервала $[\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}]$ возможных значений времени прихода k -го импульса λ_k находятся по формулам

$$\begin{aligned}\Lambda_{k \min} &= \begin{cases} 2R_{\min}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{\min}/c)\vartheta + A_{\min}(k - \mu)^2\vartheta^2/c & \text{при } k > \mu, \\ 2R_{\min}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{\max}/c)\vartheta + A_{\min}(k - \mu)^2\vartheta^2/c & \text{при } k \leq \mu. \end{cases} \\ \Lambda_{k \max} &= \begin{cases} 2R_{\max}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{\max}/c)\vartheta + A_{\max}(k - \mu)^2\vartheta^2/c & \text{при } k > \mu, \\ 2R_{\max}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{\min}/c)\vartheta + A_{\max}(k - \mu)^2\vartheta^2/c & \text{при } k \leq \mu. \end{cases}\end{aligned}\quad (3.1.4)$$

Отметим, что в качестве ожидаемого сигнала для оценки параметра λ_k используется только один импульс, вследствие чего интегрирование в (3.1.2) проводится по интервалу $[t_{k-1}, t_k]$ наблюдения этого k -го импульса. Отметим, что поскольку вне интервала $[t_{k-1}, t_k]$ сигналы $s_0(t - \lambda_{0k})$ и $s_1(t - \lambda_k)$ заведомо равны нулю и поэтому подинтегральные функции тоже равны нулю, промежуток интегрирования можно расширить до всей действительной оси.

Чтобы рассчитать характеристики оценки параметра λ_{0k} , представим решающую статистику (3.1.2) в виде

$$L_k(\lambda_k) = \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k) + \widehat{N}(\lambda_k) + C. \quad (3.1.5)$$

Здесь сигнальная функция $\widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k)$ определяется из соотношения

$$\widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k) = \langle L_k(\lambda_k) \rangle - C,$$

где символом $\langle \cdot \rangle$ обозначено математическое ожидание в предположении, что принимаемая реализация $\pi(t)$ соответствует значению λ_{0k} параметра λ_k пуассоновского процесса с интенсивностью $\beta_k(t) = s_0(t - \lambda_k) + \nu$, а величина C задается выражением

$$C = \nu \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln(1 + s_1(t - \lambda_k)/\nu_1) dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_1(t - \lambda_k) dt,$$

которое определяет математическое ожидание решающей статистики (3.1.5) при отсутствии полезного сигнала. Параметр временного положения λ_k неэнергетический, поэтому величина C не зависит от значения оцениваемого параметра λ_k . Кроме того, так как энергия импульса не зависит от его номера, другими словами, энергии всех импульсов ожидаемой последовательности равны между собой, то величина C не зависит и от k . В соответствии с [12, формула (3.7.4)] для сигнальной функции имеем представление

$$\widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln(1 + s_1(t - \lambda_k)/\nu_1) s_0(t - \lambda_{0k}) dt. \quad (3.1.6)$$

Полагаем, что сигнальная функция имеет лишь один ярко выраженный максимум в точке λ_{0k} .

Шумовая функция $\widehat{N}(\lambda_k)$ есть отклонение решающей статистики от ее математического ожидания. В силу определения имеем

$$\widehat{N}(\lambda_k) = L_k(\lambda_k) - \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k) - C.$$

Математическое ожидание шумовой функции равно нулю. Выражение для шумовой функции можно записать в виде

$$\widehat{N}(\lambda_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln(1 + s_1(t - \lambda_k)/\nu_1) (\pi'(t) - s_0(t - \lambda_{0k})) dt. \quad (3.1.7)$$

В силу [12, формула (3.7.27)] корреляционную функцию шумовой функции можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} B_{kSN}(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}) &= \langle \widehat{N}(\lambda_{1k}) \widehat{N}(\lambda_{2k}) \rangle = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln(1 + s_1(t - \lambda_{1k})/\nu_1) \ln(1 + s_1(t - \lambda_{2k})/\nu_1) (s_0(t - \lambda_{0k}) + \nu) dt. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

В частности, дисперсия случайной величины $L(\lambda_k)$ и ее центрированного варианта $\widehat{N}(\lambda_k)$ равна

$$D(L(\lambda_k)) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln^2(1 + s_1(t - \lambda_k)/\nu_1) (s_0(t - \lambda_{0k}) + \nu) dt. \quad (3.1.9)$$

В настоящем параграфе будем считать, что формы интенсивности принимаемых и ожидаемых импульсов таковы, что положение максимума $\lambda_{k\#}$ сигнальной функции (3.1.6) совпадает с истинным значением временного положения λ_{0k} . Для этого потребуем, чтобы максимумы s_0 и s_1 находились в одной и той же точке t_0 и были выполнены условия теоремы 2.1.9.

Обозначим

$$\begin{aligned} m_{kS} &= \max_{\lambda_k} \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k) = \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_{0k}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + s_1(t)/\nu_1) s_0(t) dt, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{kSN}^2 &= B_{kSN}(\lambda_{0k}, \lambda_{0k}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) (s_0(t) + \nu) dt, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

где символ $\langle \cdot \rangle$ означает математическое ожидание. Введем в рассмотрение отношение сигнал-шум

$$z_{kS} = \frac{m_{kS}}{\sigma_{kSN}} = \frac{\widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_{0k})}{\sqrt{B_{kSN}(\lambda_{0k}, \lambda_{0k})}} \quad (3.1.12)$$

и обратную к нему величину

$$\varepsilon = \frac{1}{z_{kS}}.$$

Определим нормированные сигнальную и шумовую функции по формулам

$$S(\lambda_{0k}, \lambda_k) = \frac{1}{m_{kS}} \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k),$$

$$N(\lambda_k) = \frac{1}{\sigma_{kSN}} \widehat{N}(\lambda_k).$$

Решающая статистика выражается через них по формуле

$$L(\lambda_k) = \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k) + \widehat{N}(\lambda_k) = m_{kS} S(\lambda_{0k}, \lambda_k) + \sigma_{kSN} N(\lambda_k) =$$

$$= m_{kS} (S(\lambda_{0k}, \lambda_k) + \varepsilon N(\lambda_k)).$$

Поскольку коэффициент m_{kS} является константой, вместо положения максимума $L(\lambda_k)$ (3.1.5) можно искать положение максимума нормированной решающей статистики

$$M(\lambda_k) = S(\lambda_{0k}, \lambda_k) + \varepsilon N(\lambda_k). \quad (3.1.13)$$

Нормированные функции обладают следующими свойствами

$$\max_{\lambda_k} S(\lambda_{0k}, \lambda_k) = S(\lambda_{0k}, \lambda_{0k}) = 1,$$

$$\langle N^2(\lambda_{0k}) \rangle = 1.$$

Будем считать, что отношение сигнал-шум (3.1.12) достаточно велико, так что квазиправдоподобная оценка (3.1.3) обладает высокой апостериорной точностью [55].

Напомним, что в качестве оценки $\hat{\lambda}_k$ значения λ_{0k} берется точка максимума (нормированной) решающей статистики (3.1.13). В точке максимума производная этой функции должна обращаться в ноль. Уравнение правдоподобия

$$\left[\frac{dS(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{d\lambda_k} + \varepsilon \frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k} \right]_{\lambda_k = \hat{\lambda}_k} = 0 \quad (3.1.14)$$

будем использовать в качестве уравнения для нахождения $\hat{\lambda}_k$. При фиксированной реализации принятого сигнала $\pi(t)$ функции $S(\lambda_{0k}, \lambda_k)$ и

$N(\lambda_k)$ можно также считать заданными. Очевидно, решение $\hat{\lambda}_k$ уравнения (3.1.14) является функцией параметра ε . Предположим, что функции $S(\lambda_{0k}, \lambda_k)$ и $N(\lambda_k)$ дифференцируемы (такую ситуацию, как отмечалось в предыдущих главах, называют [87] регулярным случаем). Искать решение уравнения будем в виде ряда по степеням ε , а именно, $\hat{\lambda}_k$ будем искать в виде

$$\hat{\lambda}_k = \lambda_{0k} + \varepsilon \lambda_{1k} + o(\varepsilon). \quad (3.1.15)$$

В этой формуле $o(\varepsilon)$ — величина большего порядка малости, чем ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Выражение, стоящее в левой части уравнения (3.1.14), разложим по формуле Тейлора по степеням ε до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{dS(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{d\lambda_k} + \varepsilon \frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} + \\ & + \varepsilon \left[\frac{d^2S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{d\lambda_k^2} + \varepsilon \frac{d^2N(\vec{l})}{d\lambda_k^2} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} \lambda_{1k} + o(\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и оставим только члены порядка ε :

$$\left[\frac{dS(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{d\lambda_k} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} + \varepsilon \left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} + \varepsilon \left[\frac{d^2S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{d\lambda_k^2} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} \lambda_{1k} + o(\varepsilon) = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$\left[\frac{\partial S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} = 0, \quad (3.1.16)$$

$$\left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} + \left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} \lambda_{1k} = 0. \quad (3.1.17)$$

Равенство (3.1.16) выполняется, поскольку λ_{0k} — точка максимума. Из уравнения (3.1.17) получаем

$$\lambda_{1k} = - \frac{\left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}}{\left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}}. \quad (3.1.18)$$

Таким образом, для оценки $\hat{\lambda}_k$ параметра λ_{0k} получаем представление

$$\hat{\lambda}_k = \lambda_{0k} - \frac{\varepsilon \left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}}{\left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2} \right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}}. \quad (3.1.19)$$

Здесь в силу формул (3.1.7) и $N(\lambda_k) = \frac{1}{\sigma_{kSN}} \widehat{N}(\lambda_k)$ числитель допускает представление

$$\begin{aligned}
n &= \left. \frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k} \right|_{\lambda_k=\lambda_{0k}} = \frac{1}{\sigma_{kSN}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left. \frac{ds_1(t-\lambda_k)}{d\lambda_k} \right|_{\lambda_k=\lambda_{0k}} \frac{\pi'(t) - s_0(t-\lambda_{0k}) - \nu}{s_1(t-\lambda_{0k}) + \nu_1} dt = \\
&= -\frac{1}{\sigma_{kSN}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left. \frac{ds_1(t-\lambda_k)}{dt} \right|_{\lambda_k=\lambda_{0k}} \frac{\pi'(t) - s_0(t-\lambda_{0k}) - \nu}{s_1(t-\lambda_{0k}) + \nu_1} dt = \\
&= -\frac{1}{\sigma_{kSN}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds_1}{dt}(t) \frac{\pi'(t) - s_0(t) - \nu}{s_1(t) + \nu_1} dt.
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Из формулы (3.1.20), [12, формула (3.7.27)] и известной формулы $\langle \pi'(t) - s_0(t, \lambda_{0k}) - \nu \rangle = 0$ для математического ожидания пуассоновского распределения видно, что случайная величина n имеет нулевое математическое ожидание. Следовательно, смещение величины $\widehat{\lambda}_k$ относительно λ_{0k} равно нулю в первом приближении.

Рассчитаем вторую частную производную нормированной сигнальной функции в точке истинного значения временного положения λ_{0k} . Для этого воспользуемся формулой (3.1.6). Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} &= - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s_0(t-\lambda_{0k}) + \nu}{s_1(t-\lambda_k) + \nu_1} \frac{ds_1}{dt}(t-\lambda_k) dt, \\
\frac{\partial^2 \widehat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s_0(t-\lambda_{0k}) + \nu}{(s_1(t-\lambda_k) + \nu_1)^2} \left(\frac{ds_1}{dt}(t-\lambda_k) \right)^2 dt - \\
&\quad - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s_0(t-\lambda_{0k}) + \nu}{s_1(t-\lambda_k) + \nu_1} \frac{d^2 s_1}{dt^2}(t-\lambda_k) dt = \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s_0(t-\lambda_{0k}) + \nu}{(s_1(t-\lambda_k) + \nu_1)^2} \left(\frac{d s_1}{dt}(t-\lambda_k) \right)^2 dt + \\
&\quad + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{s_0(t-\lambda_{0k}) + \nu}{s_1(t-\lambda_k) + \nu_1} \right) \frac{ds_1}{dt}(t-\lambda_k) dt = \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{s_1(t-\lambda_k) + \nu_1} \frac{d s_0}{dt}(t-\lambda_{0k}) \frac{ds_1}{dt}(t-\lambda_k) dt, \\
\left. \frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2} \right|_{\lambda_k=\lambda_{0k}} &= \frac{1}{m_{kS}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{s_1(t-\lambda_{0k}) + \nu_1} \frac{d s_0}{dt}(t-\lambda_{0k}) \frac{ds_1}{dt}(t-\lambda_{0k}) dt = \\
&= \frac{1}{m_{kS}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_1(t) + \nu_1} \frac{d s_0}{dt}(t) \frac{ds_1}{dt}(t) dt.
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Здесь пределы интегрирования заменены на бесконечные, поскольку вне небольших интервалов импульсы $s_0(t)$ и $s_1(t)$ равны нулю.

Далее в силу формул (3.1.18), (3.1.20) и (3.1.21) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= -\frac{\left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}}{\left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}} = \frac{\frac{1}{\sigma_k SN} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k}) \frac{\pi'(t) - s_0(t - \lambda_{0k}) - \nu}{s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1} dt}{\frac{1}{m_k S} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1} \frac{ds_0}{dt}(t - \lambda_{0k}) \frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k}) dt} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k}) \frac{\pi'(t) - s_0(t - \lambda_{0k}) - \nu}{s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1} dt}{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1} \frac{ds_0}{dt}(t - \lambda_{0k}) \frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k}) dt}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Напомним, что λ_{1k} равняется $\hat{\lambda}_k$ минус ее математическое ожидание λ_{0k} . Следовательно, дисперсии оценки $\hat{\lambda}_k$ и величины λ_{1k} являются одной и той же величиной.

Выпишем выражение для дисперсии случайной величины $\hat{\lambda}_k$. По определению

$$\begin{aligned} D(\hat{\lambda}_k) &= \varepsilon^2 \left\langle \frac{\left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}}{\left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}} \frac{\left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}}{\left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}} \right\rangle = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}^2} \left\langle \left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} \left[\frac{dN(\lambda_k)}{d\lambda_k}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}} \right\rangle. \end{aligned}$$

В силу формул (3.1.20) и (3.1.21), а также [12, формула (3.7.27)] это можно продолжить так:

$$\begin{aligned} D(\hat{\lambda}_k) &= \frac{\varepsilon^2}{\sigma_k^2 SN} \frac{1}{\left[\frac{\partial^2 S(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s_0(t - \lambda_{0k}) + \nu}{[s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1]^2} \left[\frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k})\right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{\left[\frac{\partial^2 \hat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_k)}{\partial \lambda_k^2}\right]_{\lambda_k=\lambda_{0k}}^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s_0(t - \lambda_{0k}) + \nu}{(s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1)^2} \left[\frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k})\right]^2 dt = \\ &= \frac{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{s_0(t - \lambda_{0k}) + \nu}{(s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1)^2} \left(\frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k})\right)^2 dt}{\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{s_1(t - \lambda_{0k}) + \nu_1} \frac{ds_0}{dt}(t - \lambda_{0k}) \frac{ds_1}{dt}(t - \lambda_{0k}) dt\right]^2}. \end{aligned}$$

Выполняя линейную замену переменных, последнее выражение можно представить в виде

$$D(\hat{\lambda}_k) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_0(t) + \nu}{(s_1(t) + \nu_1)^2} \left(\frac{ds_1(t)}{dt}\right)^2 dt}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_1(t) + \nu_1} \frac{ds_0(t)}{dt} \frac{ds_1(t)}{dt} dt\right)^2} = \frac{\alpha^0}{\alpha^2}, \quad (3.1.23)$$

где используются обозначения (2.1.40) и (2.1.41) из главы 2. Пределы интегрирования здесь вновь заменены на бесконечные, поскольку вне малой окрестности нуля, где сосредоточены импульсы $s_0(t)$ и $s_1(t)$, подынтегральная функция равна нулю.

Как видно из формулы (3.1.23), дисперсия оценки временного положения $D(\hat{\lambda}_k)$ является константой, не зависящей от k .

Отметим, что если $s_1(t) = s_0(t)$ и $\nu_1 = \nu$, то формула (3.1.23) приобретает вид

$$D(\hat{\lambda}_k) = \frac{1}{\alpha_0}, \quad (3.1.24)$$

где

$$\alpha_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_0(t) + \nu} \left[\frac{ds_0(t)}{dt} \right]^2 dt. \quad (3.1.25)$$

Распределение решающей статистики $L_k(\lambda_k)$ можно аппроксимировать гауссовским распределением, если выполняется условие [12]

$$\nu \min(\tau_0, \tau_1) \gg 1, \quad (3.1.26)$$

где τ_0 и τ_1 — эквивалентные длительности импульсов принимаемого $s_0(t)$ и ожидаемого $s_1(t)$ сигналов соответственно, что аналогично формуле (2.2.5).

Поскольку значения оценок $\hat{\lambda}_k$ локализованы в непересекающихся априорных интервалах, то они являются статистически независимыми случайными величинами. Как было сказано выше, оценки $\hat{\lambda}_k$ имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями λ_{0k} и дисперсиями $D(\hat{\lambda}_k)$ (3.1.24). Подчеркнем, что эти распределения являются условными в том смысле, что они справедливы в предположении, что рассеянный сигнал имеет вид (2.1.1), а точнее, справедливы при условии, что информативные параметры имеют значения R_0 , V_0 и A_0 .

Воспользуемся методом максимального правдоподобия для нахождения оценок \hat{R} , \hat{V} и \hat{A} . Будем рассматривать характеристики оценок дальности, скорости и ускорения при условии, что истинные значения времен прихода есть λ_k (3.1.1). Согласно сделанным предположениям (3.1.26) (условная) плотность вероятности случайной величины $\hat{\lambda}_k$ имеет вид

$$f_k(\hat{\lambda}_k | R, V, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\hat{\lambda}_k)}} \exp\left(-\frac{(\hat{\lambda}_k - \lambda_k)^2}{2D(\hat{\lambda}_k)}\right).$$

Совместная условная плотность вероятности (называемая в методе максимального правдоподобия функцией правдоподобия) случайных вели-

чин $\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1}$ записывается в виде

$$f(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\hat{\lambda}_k)}} \exp\left(-\frac{(\hat{\lambda}_k - \lambda_k)^2}{2D(\hat{\lambda}_k)}\right).$$

Логарифм $f(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A)$ (с точностью до постоянного слагаемого) имеет вид

$$W(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\hat{\lambda}_k - \lambda_k)^2}{D(\hat{\lambda}_k)}.$$

Известно, что числа λ_k связаны со значениями параметров движения R , V и A по формуле (3.1.1). С учетом этого логарифм функции правдоподобия может быть записан в виде

$$\begin{aligned} W(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A) &= \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\hat{\lambda}_k - 2R/c - (k - \mu)(1 + 2V/c)\vartheta - A(k - \mu)^2\vartheta^2/c)^2}{D(\hat{\lambda}_k)}. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Согласно методу максимального правдоподобия в качестве оценок \hat{R} , \hat{V} и \hat{A} параметров движения следует взять те значения, при которых функция $W(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A)$ (3.1.27) максимальна. Как известно, в точке максимума должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A)}{\partial R} \Big|_{(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A})} &= 0, \\ \frac{\partial W(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A)}{\partial V} \Big|_{(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A})} &= 0, \\ \frac{\partial W(\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{N-1} | R, V, A)}{\partial A} \Big|_{(\hat{R}, \hat{V}, \hat{A})} &= 0. \end{aligned}$$

После вычисления частных производных эти условия принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\hat{\lambda}_k)} \frac{2}{c} (2\hat{R}/c + (k - \mu)(1 + 2\hat{V}/c)\vartheta + \hat{A}(k - \mu)^2\vartheta^2/c - \hat{\lambda}_k) &= 0, \\ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\hat{\lambda}_k)} \frac{2(k - \mu)\vartheta}{c} (2\hat{R}/c + (k - \mu)(1 + 2\hat{V}/c)\vartheta + \hat{A}(k - \mu)^2\vartheta^2/c - \hat{\lambda}_k) &= 0, \\ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\hat{\lambda}_k)} \frac{(k - \mu)^2\vartheta^2}{c} (2\hat{R}/c + (k - \mu)(1 + 2\hat{V}/c)\vartheta + \hat{A}(k - \mu)^2\vartheta^2/c - \hat{\lambda}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}
& \widehat{R} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{1}{c} + \widehat{V} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{(k-\mu)\vartheta}{c} + \widehat{A} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{(k-\mu)^2\vartheta^2}{c} = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{D(\widehat{\lambda}_k)} \widehat{\lambda}_k - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{D(\widehat{\lambda}_k)} (k-\mu)\vartheta, \\
& \widehat{R} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{(k-\mu)}{c} + \widehat{V} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{(k-\mu)^2\vartheta}{c} + \widehat{A} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{(k-\mu)^3\vartheta^2}{c} = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{(k-\mu)}{c} \widehat{\lambda}_k - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{D(\widehat{\lambda}_k)} (k-\mu)^2\vartheta, \\
& \widehat{R} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{2(k-\mu)^2}{c} + \widehat{V} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{2(k-\mu)^3\vartheta}{c} + \widehat{A} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\widehat{\lambda}_k)} \frac{(k-\mu)^4\vartheta^2}{c} = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\widehat{\lambda}_k)} (k-\mu)^2 \widehat{\lambda}_k - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{D(\widehat{\lambda}_k)} (k-\mu)^3\vartheta.
\end{aligned}$$

Воспользуемся обозначениями (1.1.13). В их терминах предыдущая система выглядит так:

$$\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 4M_0 & 4\vartheta M_1 & 2\vartheta^2 M_2 \\ 4\vartheta M_1 & 4\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 \\ 2\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 & \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{R} \\ \widehat{V} \\ \widehat{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\lambda}_k - 2\vartheta M_1 \\ 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)\widehat{\lambda}_k - 2\vartheta^2 M_2 \\ \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 \widehat{\lambda}_k - \vartheta^3 M_3 \end{pmatrix}. \quad (3.1.28)$$

Как показывают вычисления в “Математике” [24], решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{R} \\ \widehat{V} \\ \widehat{A} \end{pmatrix} = \frac{c}{(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4} \times \\
\times \begin{pmatrix} \frac{(M_2M_4 - M_3^2)\Xi_0 + (M_2M_3 - M_1M_4)\Xi_1 + 2(M_1M_3 - M_2^2)\Xi_2}{4\vartheta^2} \\ \frac{(M_2M_3 - M_1M_4)\Xi_0 + (M_0M_4 - M_2^2)\Xi_1 + 2(M_1M_2 - M_0M_3)\Xi_2}{4\vartheta^3} \\ \frac{(M_1M_3 - M_2^2)\Xi_0 + (M_1M_2 - M_0M_3)\Xi_1 + 2(M_0M_2 - M_1^2)\Xi_2}{2\vartheta^4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \Xi_0 \\ \Xi_1 \\ \Xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\lambda}_k \\ 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)\widehat{\lambda}_k \\ \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 \widehat{\lambda}_k \end{pmatrix}.$$

Преобразуем второй сомножитель:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(M_2 M_4 - M_3^2) \Xi_0 + (M_2 M_3 - M_1 M_4) \Xi_1 + 2(M_1 M_3 - M_2^2) \Xi_2}{4\vartheta^2} \right. \\
& \left. \frac{(M_2 M_3 - M_1 M_4) \Xi_0 + (M_0 M_4 - M_2^2) \Xi_1 + 2(M_1 M_2 - M_0 M_3) \Xi_2}{4\vartheta^3} \right) = \\
& \left(\frac{(M_1 M_3 - M_2^2) \Xi_0 + (M_1 M_2 - M_0 M_3) \Xi_1 + 2(M_0 M_2 - M_1^2) \Xi_2}{2\vartheta^4} \right) = \\
& = \left(\frac{(M_2 M_4 - M_3^2) 2 \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\lambda}_k + (M_2 M_3 - M_1 M_4) 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu) \hat{\lambda}_k + (M_1 M_3 - M_2^2) \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 \hat{\lambda}_k}{2\vartheta^2} \right. \\
& \left. \frac{(M_2 M_3 - M_1 M_4) 2 \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\lambda}_k + (M_0 M_4 - M_2^2) 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu) \hat{\lambda}_k + (M_1 M_2 - M_0 M_3) \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 \hat{\lambda}_k}{2\vartheta^3} \right) = \\
& \left(\frac{(M_1 M_3 - M_2^2) 2 \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\lambda}_k + (M_1 M_2 - M_0 M_3) 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu) \hat{\lambda}_k + (M_0 M_2 - M_1^2) \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 \hat{\lambda}_k}{\vartheta^4} \right) = \\
& = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_2 M_4 - M_3^2) + 2\vartheta(M_2 M_3 - M_1 M_4)(k-\mu) + \vartheta^2(M_1 M_3 - M_2^2)(k-\mu)^2 \right) \hat{\lambda}_k}{2} \right. \\
& \left. \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_2 M_3 - M_1 M_4) + 2\vartheta(M_0 M_4 - M_2^2)(k-\mu) + \vartheta^2(M_1 M_2 - M_0 M_3)(k-\mu)^2 \right) \hat{\lambda}_k}{2\vartheta} \right. \\
& \left. \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_1 M_3 - M_2^2) + 2\vartheta(M_1 M_2 - M_0 M_3)(k-\mu) + \vartheta^2(M_0 M_2 - M_1^2)(k-\mu)^2 \right) \hat{\lambda}_k}{\vartheta^2} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \widehat{R} \\ \widehat{V} \\ \widehat{A} \end{pmatrix} = \frac{c}{(2M_1 M_3 + M_0 M_4) M_2 - M_2^3 - M_0 M_3^2 - M_1^2 M_4} \times \\
& \times \begin{pmatrix} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_2 M_4 - M_3^2) + 2\vartheta(M_2 M_3 - M_1 M_4)(k-\mu) + \vartheta^2(M_1 M_3 - M_2^2)(k-\mu)^2 \right) \hat{\lambda}_k}{2} \\ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_2 M_3 - M_1 M_4) + 2\vartheta(M_0 M_4 - M_2^2)(k-\mu) + \vartheta^2(M_1 M_2 - M_0 M_3)(k-\mu)^2 \right) \hat{\lambda}_k}{2\vartheta} \\ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_1 M_3 - M_2^2) + 2\vartheta(M_1 M_2 - M_0 M_3)(k-\mu) + \vartheta^2(M_0 M_2 - M_1^2)(k-\mu)^2 \right) \hat{\lambda}_k}{\vartheta^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Или

$$\begin{pmatrix} \widehat{R} \\ \widehat{V} \\ \widehat{A} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \delta_{Rk} \\ \delta_{Vk} \\ \delta_{Ak} \end{pmatrix} \hat{\lambda}_k - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.30}$$

где

$$\begin{aligned}\delta_{Rk} &= \frac{c[(M_2M_4 - M_3^2) + (k - \mu)(M_2M_3 - M_1M_4) + (k - \mu)^2(M_1M_3 - M_2^2)]}{2[(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4]}, \\ \delta_{Vk} &= \frac{c[(M_2M_3 - M_1M_4) + (k - \mu)(M_0M_4 - M_2^2) + (k - \mu)^2(M_1M_2 - M_0M_3)]}{2\vartheta[(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4]}, \\ \delta_{Ak} &= \frac{c[(M_1M_3 - M_2^2) + (k - \mu)(M_1M_2 - M_0M_3) + (k - \mu)^2(M_0M_2 - M_1^2)]}{\vartheta^2[(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4]}.\end{aligned}$$

Отметим, что величины δ_{Rk} , δ_{Vk} и δ_{Ak} зависят только от k и μ . Поэтому их достаточно рассчитать один раз. Отметим также полезные формулы

$$\begin{aligned}\delta_{Rk} &= \frac{3c}{2N(N^4 - 5N^2 + 4)} \left(10k^2(6\mu^2 + 6\mu + N^2 - 3(2\mu + 1)N + 2) - \right. \\ &\quad - 2k(-2(15\mu^2 + 11\mu + 3) + 6N^3 - \\ &\quad - (32\mu + 21)N^2 + 3(10\mu^2 + 20\mu + 7)N) + \\ &\quad \left. + (N^2 - 3N + 2)(10\mu^2 + 6\mu + 3N^2 - 3(4\mu + 1)N + 2) \right), \\ \delta_{Vk} &= -\frac{3c}{2\vartheta N(N^4 - 5N^2 + 4)} \left(30k^2(-2\mu + N - 1) + \right. \\ &\quad + k(-60\mu - 32N^2 + 60(\mu + 1)N - 22) + \\ &\quad \left. + (N^2 - 3N + 2)(-10\mu + 6N - 3) \right), \\ \delta_{Ak} &= \frac{30c(6k^2 - 6k(N - 1) + N^2 - 3N + 2)}{\vartheta^2 N(N^4 - 5N^2 + 4)}, \\ \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Rk} &= \frac{c}{2}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Vk} = 0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Ak} = 0, \\ \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Rk}^2 &= \frac{3c^2}{4N(N^4 - 5N^2 + 4)} \left(4(3\mu(\mu + 1)(5\mu(\mu + 1) + 2) + 1) + \right. \\ &\quad + 3N^4 - 12(2\mu + 1)N^3 + (84\mu(\mu + 1) + 17)N^2 - \\ &\quad \left. - 12(2\mu + 1)(5\mu(\mu + 1) + 1)N \right), \\ \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Vk}^2 &= \frac{3c^2(60\mu^2 + 60\mu + 16N^2 - 30(2\mu + 1)N + 11)}{\vartheta^2 N(N^4 - 5N^2 + 4)}, \\ \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Ak}^2 &= \frac{180c^2}{\vartheta^4 N(N^4 - 5N^2 + 4)}.\end{aligned}$$

Реализовать описанный квазиоптимальный алгоритм оценки можно при помощи блок-схемы, показанной на рис. 3.1.1. На вход приемника поступает поток коротких импульсов, который является производной реализации пуассоновского случайного процесса $\pi'(t)$. Поток импульсов проходит через фильтр (“Ф”) с импульсной характеристикой $h(t) = h_0 \ln(1 + s(t^* - t)/\nu)$, где h_0 — коэффициент передачи фильтра, t^* — задержка, причем необходимо $t^* > \tau$, где τ — длительность одного оптического импульса с интенсивностью $s_1(t)$. После фильтра сигнал умножается на функцию

$$\chi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}], \\ 0, & \text{если } t \notin [\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}] \end{cases}$$

последовательно для всех $k = 0, \dots, N - 1$. Блок “Extremum” определяет временное положение наибольшего максимума сигнала на интервале $[\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}]$ (3.1.4) для k -го импульса, поступающего на вход, и вырабатывает последовательность оценок $\hat{\lambda}_k$, “ВУ” — вычислительное устройство, рассчитывающее оценки дальности, скорости и ускорения по формулам (3.1.30).

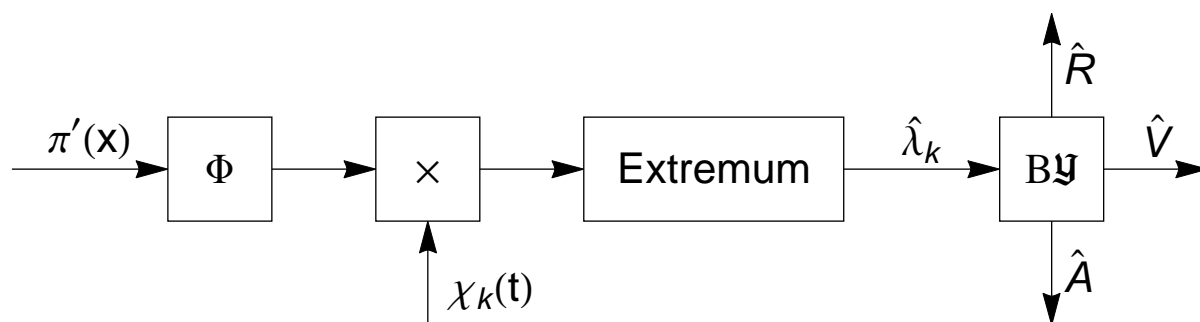


Рис. 3.1.1: Блок-схема квазиоптимального приемника

Из рис. 3.1.1 видно, что аппаратная реализация приемника квазиоптимального алгоритма оценки параметров движения является одноканальной в отличие от приемника максимального правдоподобия и квазиравдоподобного приемника. Напомним, что приемник максимального правдоподобия производит формирование и поиск положения наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия как функции $3 + p$ аргументов, где p — количество неинформативных пара-

метров, а квазиправдоподобный приемник производит поиск положения максимума решающей статистики как функции 3 аргументов.

Найдем математические ожидания оценок \widehat{R} , \widehat{V} и \widehat{A} , описываемых формулой (3.1.29). Согласно этой формуле случайные величины \widehat{R} , \widehat{V} и \widehat{A} являются линейными комбинациями статистически независимых случайных величин $\widehat{\lambda}_k$, имеющих математические ожидания (3.1.1). Случайные величины $\widehat{\lambda}_k$ являются статистически независимыми, поскольку априорные интервалы их возможных значений не пересекаются. Как известно, при построении линейных комбинаций случайных величин тому же самому преобразованию подвергаются их математические ожидания. Поэтому математические ожидания случайных величин \widehat{R} , \widehat{V} и \widehat{A} можно получить, заменяя в формуле (3.1.29) случайные величины $\widehat{\lambda}_k$ их математическими ожиданиями. Чтобы упростить выкладки, усредним не формулу (3.1.29), а равносильную ей систему уравнений (3.1.28), что приводит к замене случайных величин $\widehat{\lambda}_k$ на их математические ожидания λ_{0k} :

$$\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 4M_0 & 4\vartheta M_1 & 2\vartheta^2 M_2 \\ 4\vartheta M_1 & 4\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 \\ 2\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 & \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \widehat{R} \rangle \\ \langle \widehat{V} \rangle \\ \langle \widehat{A} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{0k} - 2\vartheta M_1 \\ 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) \lambda_{0k} - 2\vartheta^2 M_2 \\ \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 \lambda_{0k} - \vartheta^3 M_3 \end{pmatrix}. \quad (3.1.31)$$

(Действительно, каждое из уравнений системы (3.1.28) представляет собой равенство линейных комбинаций некоторых случайных величин. Если в таком равенстве все случайные величины заменить их линейными комбинациями, то равенство сохранится.) Подставим в правую часть этой системы представление (3.1.1). В результате преобразований первой половины правых частей получаем

$$\begin{pmatrix} 2 \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{0k} \\ 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu) \lambda_{0k} \\ \frac{\vartheta^2}{D(\widehat{\lambda}_k)} \sum_{k=0}^{N-1} (k - \mu)^2 \lambda_{0k} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{c} 2 \sum_{k=0}^{N-1} (2R_0/c + (k-\mu)(1+2V_0/c)\vartheta + A_0(k-\mu)^2\vartheta^2/c) \\ 2\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)(2R_0/c + (k-\mu)(1+2V_0/c)\vartheta + A_0(k-\mu)^2\vartheta^2/c) \\ \vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2(2R_0/c + (k-\mu)(1+2V_0/c)\vartheta + A_0(k-\mu)^2\vartheta^2/c) \end{array} \right) = \\
&= \left(\begin{array}{c} 4R_0/c \sum_{k=0}^{N-1} 1 + 2(1+2V_0/c)\vartheta \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu) + 2A_0\vartheta^2/c \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 \\ 4R_0\vartheta/c \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu) + 2(1+2V_0/c)\vartheta^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 + 2A_0\vartheta^3/c \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^3 \\ 2R_0\vartheta^2/c \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^2 + (1+2V_0/c)\vartheta^3 \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^3 + A_0\vartheta^4/c \sum_{k=0}^{N-1} (k-\mu)^4 \end{array} \right) = \\
&= \left(\begin{array}{c} 4R_0M_0/c + 2(1+2V_0/c)\vartheta M_1 + 2A_0\vartheta^2M_2/c \\ 4R_0\vartheta M_1/c + 2(1+2V_0/c)\vartheta^2M_2 + 2A_0\vartheta^3M_3/c \\ 2R_0\vartheta^2M_2/c + (1+2V_0/c)\vartheta^3M_3 + A_0\vartheta^4M_4/c \end{array} \right) = \\
&= R_0/c \begin{pmatrix} 4M_0 \\ 4\vartheta M_1 \\ 2\vartheta^2 M_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\vartheta M_1 \\ 2\vartheta^2 M_2 \\ \vartheta^3 M_3 \end{pmatrix} + V_0/c \begin{pmatrix} 4\vartheta M_1 \\ 4\vartheta^2 M_2 \\ 2\vartheta^3 M_3 \end{pmatrix} + A_0/c \begin{pmatrix} 2\vartheta^2 M_2 \\ 2\vartheta^3 M_3 \\ \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

С учетом этого преобразования систему (3.1.31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 4M_0 & 4\vartheta M_1 & 2\vartheta^2 M_2 \\ 4\vartheta M_1 & 4\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 \\ 2\vartheta^2 M_2 & 2\vartheta^3 M_3 & \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \widehat{R} \rangle \\ \langle \widehat{V} \rangle \\ \langle \widehat{A} \rangle \end{pmatrix} = \\
= R_0/c \begin{pmatrix} 4M_0 \\ 4\vartheta M_1 \\ 2\vartheta^2 M_2 \end{pmatrix} + V_0/c \begin{pmatrix} 4\vartheta M_1 \\ 4\vartheta^2 M_2 \\ 2\vartheta^3 M_3 \end{pmatrix} + A_0/c \begin{pmatrix} 2\vartheta^2 M_2 \\ 2\vartheta^3 M_3 \\ \vartheta^4 M_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Решая последнюю систему, находим выражения для математических ожиданий оценок:

$$\begin{pmatrix} \langle \widehat{R} \rangle \\ \langle \widehat{V} \rangle \\ \langle \widehat{A} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \widehat{R} | R, V, A \rangle \\ \langle \widehat{V} | R, V, A \rangle \\ \langle \widehat{A} | R, V, A \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, квазиоптимальные оценки дальности, скорости и ускорения являются несмещенными.

Рассчитаем дисперсии оценок \widehat{R} , \widehat{V} и \widehat{A} . Имеем

$$\begin{pmatrix} D(\widehat{R}) \\ D(\widehat{V}) \\ D(\widehat{A}) \end{pmatrix} = \left(\frac{c}{(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4} \right)^2 \times \\ \times \begin{pmatrix} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_2M_4 - M_3^2) + 2\vartheta(M_2M_3 - M_1M_4)(k-\mu) + \vartheta^2(M_1M_3 - M_2^2)(k-\mu)^2 \right)^2}{4} \\ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_2M_3 - M_1M_4) + 2\vartheta(M_0M_4 - M_2^2)(k-\mu) + \vartheta^2(M_1M_2 - M_0M_3)(k-\mu)^2 \right)^2}{4\vartheta^2} \\ \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left(2(M_1M_3 - M_2^2) + 2\vartheta(M_1M_2 - M_0M_3)(k-\mu) + \vartheta^2(M_0M_2 - M_1^2)(k-\mu)^2 \right)^2}{\vartheta^4} \end{pmatrix}.$$

После преобразований эта формула приобретает вид

$$\begin{pmatrix} D(\widehat{R}) \\ D(\widehat{V}) \\ D(\widehat{A}) \end{pmatrix} = c^2 D(\widehat{\lambda}_k) \begin{pmatrix} \frac{M_2M_4 - M_3^2}{4 \left((2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4 \right)} \\ \frac{M_0M_4 - M_2^2}{4\vartheta^2 \left((2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4 \right)} \\ \frac{M_0M_2 - M_1^2}{\vartheta^4 \left((2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4 \right)} \end{pmatrix}. \quad (3.1.32)$$

Подчеркнем, что формулы (3.1.32) не зависят от R_0 , V_0 и A_0 и тем самым являются одновременно безусловными.

Для сравнения приведем корреляционную матрицу квазиправдоподобных оценок (2.1.42):

$$\mathbf{K} = c^2 \frac{\alpha^0}{\alpha^2} \frac{1}{(2M_1M_3 + M_0M_4)M_2 - M_2^3 - M_0M_3^2 - M_1^2M_4} \\ \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(M_2M_4 - M_3^2) & \frac{1}{4\vartheta}(M_2M_3 - M_1M_4) & \frac{1}{2\vartheta^2}(M_1M_3 - M_2^2) \\ \frac{1}{4\vartheta}(M_2M_3 - M_1M_4) & \frac{1}{4\vartheta^2}(M_0M_4 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(M_1M_2 - M_0M_3) \\ \frac{1}{2\vartheta^2}(M_1M_3 - M_2^2) & \frac{1}{2\vartheta^3}(M_1M_2 - M_0M_3) & \frac{1}{\vartheta^4}(M_0M_2 - M_1^2) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что с учетом равенства (3.1.24) $D(\widehat{\lambda}_k) = \frac{\alpha^0}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha_0}$ получился тот же самый результат.

Рассмотрим частный случай, когда $s_1(t) = s_0(t)$ и $\nu_1 = \nu$. В этом случае форма импульсов, на которые настроен приемник, совпадает с формой рассеянных импульсов, и квазиправдоподобная оценка переходит в оценку максимального правдоподобия. В этом случае формула для дисперсий оценок параметров R , V и A совпадает с точностью до обозначений с ранее полученной формулой для метода максимального правдоподобия (1.1.26). Как следствие получаем, что в случае $s_1(t) = s_0(t)$ и $\nu_1 = \nu$ квазиоптимальная оценка является асимптотически эффективной.

3.2 Пороговые свойства квазиоптимальных оценок

Как отмечалось в § 2.2, в условиях малых ОСШ и больших априорных интервалов возможных значений параметров необходимо учитывать влияние аномальных ошибок на точность оценок параметров движения [55]. В настоящем параграфе обсуждаются характеристики квазиоптимальных оценок в условиях, когда влияние аномальных ошибок является существенным.

Как и в § 3.1 будем считать, что форма интенсивности рассеянного сигнала имеет вид (2.1.1), а форма интенсивности ожидаемого сигнала имеет вид (2.1.2).

Будем исходить из того, что возможные значения дальности R_0 , скорости V_0 и ускорения A_0 лежат соответственно в априорных интервалах

$$[R_{\min}, R_{\max}], \quad [V_{\min}, V_{\max}], \quad [A_{\min}, A_{\max}].$$

Причем возможные значения дальности R_0 , скорости V_0 и ускорения A_0 независимы и распределены равномерно в этих интервалах.

Формула

$$\lambda_k = 2R/c + (k - \mu)(1 + 2V/c)\vartheta + A(k - \mu)^2\vartheta^2/c$$

позволяет ограничиться поиском времени прихода импульсов λ_k только в априорном интервале

$$\Lambda_k = [\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}], \quad (3.2.1)$$

где $\Lambda_{k \min}$ и $\Lambda_{k \max}$ определены формулой (3.1.4).

Для удобства изложения сразу введем дополнительно к (2.2.1) обозначения для двух часто используемых величин и вычислим их значения:

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda_{k pr} &= \Lambda_{k \max} - \Lambda_{k \min} = \\ &= 2\Delta R_{pr}/c + 2|k - \mu|\Delta V_{pr}\vartheta/c + \Delta A_{pr}(k - \mu)^2\vartheta^2/c, \\ \Lambda_{k pr} &= \frac{\Lambda_{k \max} + \Lambda_{k \min}}{2} = \\ &= 2R_{pr}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{pr}/c)\vartheta + A_{pr}(k - \mu)^2\vartheta^2/c. \end{aligned}$$

Если ОСШ (3.1.12) не слишком велико, а априорный интервал возможных значений временных положений λ_k не слишком мал, так что выполняется неравенство

$$\Delta\Lambda_{prk}/\Delta\lambda_k \gg 1, \quad (3.2.2)$$

где $\Delta\lambda_k$ — длительность (протяженность) сигнального выброса решающей статистики (см.обсуждение ниже), то возможно появление аномальных ошибок [55]. В результате возникают пороговые эффекты, которые приводят к заметному ухудшению точности квазиоптимальных оценок.

На описательном уровне нормальная ошибка вызывается незначительным искажением рассеянного сигнала шумом, в результате чего значение оценки $\hat{\lambda}_k$ отклоняется от своего математического ожидания λ_{0k} на величину, не превосходящую $\Delta\lambda_k$; аномальная ошибка связана с тем, что шум оказывается сильнее сигнала, в результате чего приемник принимает шум за полезный сигнал, что приводит к большой величине ошибки $\hat{\lambda}_k - \lambda_{0k}$. А именно, ошибку $\hat{\lambda}_k - \lambda_{0k}$ называют аномальной, если

$$|\hat{\lambda}_k - \lambda_{0k}| \geq \Delta\lambda_k.$$

В этой формуле $\Delta\lambda_k$ — длительность сигнального выброса решающей статистики, определяемая из соотношения $S_k(\lambda_{0k}, \lambda_{0k} \pm \Delta\lambda_k) \approx 0$ (реально длительность $\Delta\lambda_k$ не зависит от k , так как предполагается, что формы всех импульсов в последовательности одинаковы). Величина $\Delta\lambda_k$ выбирается неоднозначно. Однако, если выполняется условие

$$\Delta\lambda_k \ll \Delta\Lambda_{kpr},$$

то неоднозначность в выборе $\Delta\lambda_k$ не играет существенной роли.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda_{kSN} &= [\lambda_{0k} - \Delta\lambda_k; \lambda_{0k} + \Delta\lambda_k], \\ \Lambda_{kN} &= [\Lambda_{k\min}; \lambda_{0k} - \Delta\lambda_k] \cup [\lambda_{0k} + \Delta\lambda_k; \Lambda_{k\max}]. \end{aligned}$$

Здесь Λ_{kSN} — подобласть априорной области Λ_k возможных значений λ_k , в которой центральный пик сигнальной функции (3.1.6) существенно отличен от нуля. Область Λ_{kSN} называют сигнальной, а область Λ_{kN} — шумовой. Ошибку $\hat{\lambda}_k - \lambda_{0k}$ называют нормальной, а соответствующую оценку надежной, если $\hat{\lambda}_k \in \Lambda_{kSN}$. Ошибку $\hat{\lambda}_k - \lambda_{0k}$ называют аномальной, если $\hat{\lambda}_k \in \Lambda_{kN}$.

Для приводимого ниже анализа пороговых характеристик используется методика, развитая в § 2.2. Поэтому изложение ведется в сокращенной форме.

Введем в рассмотрение вероятность надежной оценки

$$P_{0k} = P(|\hat{\lambda}_k - \lambda_{0k}| < \Delta\lambda_k) = P(\hat{\lambda}_k \in \Lambda_{kSN}).$$

Поскольку квазиоптимальный метод подразумевает нахождение оценки по положению абсолютного максимума, то вероятность надежной оценки можно эквивалентно определить как (ср. с формулой (2.2.6))

$$P_{0k} = P(H_{SN} > H_N). \quad (3.2.3)$$

Здесь H_{SN} — величина абсолютного максимума решающей статистики $L_k(\lambda_k)$ на множестве Λ_{kSN} , а H_N — величина абсолютного максимума $L_k(\lambda_k)$ на множестве Λ_{kN} . Для вероятности надежной оценки из (3.2.3) получаем выражение (ср. с (2.2.8))

$$P_{0k} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) F_N(H) dH = \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) \int_{-\infty}^H W_N(z) dz dH. \quad (3.2.4)$$

Рассуждая как в § 2.2, из формулы (3.2.4) для плотности вероятности решающей статистики $L_k(\lambda_{0k})$ и совпадающей с ней плотности вероятности случайной величины H_{SN} имеем представление (ср. с формулой (2.2.12))

$$W_{SN}(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{kSN}} \exp\left[-\frac{(H - m_k S)^2}{2\sigma_{kSN}^2}\right]. \quad (3.2.5)$$

Здесь $m_k S$ — максимум сигнальной функции $\hat{S}(\lambda_{0k}, \lambda_{0k})$, а σ_{kSN}^2 — дисперсия сигнальной функции.

В области аномальных ошибок Λ_{kN} для дисперсии шумовой функции, она же дисперсия решающей статистики, имеем представление (ср. с (2.2.14))

$$\begin{aligned} \sigma_{kN}^2 &= B_{kN}(\lambda_{1k}, \lambda_{1k}) = \nu \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln^2(1 + s_1(t - \lambda_{1k})/\nu_1) dt = \\ &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + s_1(t)/\nu_1) dt. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Функция распределения абсолютного максимума помеховой составляющей H_N при больших H/σ_{kN} имеет вид [52], [55, с. 152]

$$F_N(H) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_{kN}^2}\right)\right], & H \geq 0, \\ 0, & H < 0. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_k &= \Delta\Lambda_{k\text{pr}} \sqrt{\frac{1}{\sigma_{kN}^2} \frac{\partial^2 B_{kN}(\lambda_{1k}, \lambda_{2k})}{\partial\lambda_{1k}\partial\lambda_{2k}} \Big|_{\lambda_{1k}=\lambda_{2k}}} = \\ &= \Delta\Lambda_{k\text{pr}} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{ds_1(t)}{dt}\right)^2}{(s_1(t)+\nu_1)^2} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1+s_1(t)/\nu_1) dt}}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Подставим представление (3.2.5) в (3.2.4):

$$\begin{aligned} P_{0k} &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) F_N(H) dH = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{kSN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(H-m_k S)^2}{2\sigma_{kSN}^2}\right] F_N(H) dH. \end{aligned}$$

После преобразований (см. вывод формулы (2.2.25)) получаем

$$P_{0k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(y-z_k S)^2}{2} - \frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{y^2}{2\chi^2}\right)\right] dy, \quad (3.2.9)$$

где

$$z_k S = \frac{m_k S}{\sigma_{kSN}}, \quad \chi^2 = \frac{\sigma_{kN}^2}{\sigma_{kSN}^2}.$$

Напомним формулы, задающие основные величины: $m_k S$ (3.1.10), σ_{kSN} (3.1.11), σ_{kN} (3.2.6), ξ_k (3.2.8). Поскольку сигналы $s_0(t)$ и $s_1(t)$ равны нулю вне отрезка $[t_{k-1}, t_k]$, пределы интегрирования во всех этих формулах можно заменить на бесконечные. С учетом обозначения (3.1.1), эти формулы легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned} m_k S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) s_0(t) dt, \\ \sigma_{kN}^2 &= \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) dt, \\ \sigma_{kSN}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) (s_0(t) + \nu) dt, \\ \xi_k &= \Delta\Lambda_{k\text{pr}} d, \end{aligned}$$

$$d^2 = \frac{1}{\sigma_{kN}^2} \frac{\partial^2 B_{kN}(\lambda_{1k} \lambda_{2k})}{\partial \lambda_{1k} \partial \lambda_{2k}} \Big|_{\lambda_{1k}=\lambda_{2k}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{ds_1(t)}{dt}\right)^2}{\left(s_1(t)+\nu_1\right)^2} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) dt}.$$

Отсюда для введенных выше обозначений \varkappa^2 и z_{kS} имеем

$$\varkappa^2 = \frac{\sigma_{kN}^2}{\sigma_{kSN}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) \nu dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) (s_0(t) + \nu) dt},$$

$$z_{kS} = \frac{m_{kS}}{\sigma_{kSN}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) s_0(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) (s_0(t) + \nu) dt}}.$$

Приведем еще одно представление величины P_{0k} (3.2.9). Введем модифицированные переменные \varkappa_1 и z_{1kS} , связанные прежними соотношениями

$$\varkappa^2 = \frac{1}{1 + \varkappa_1^2}, \quad z_{kS} = \varkappa z_{1kS}.$$

Из предыдущих формул для них имеем представления

$$\varkappa_1^2 = \frac{\sigma_{kSN}^2 - \sigma_{kN}^2}{\sigma_{kN}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + s_1(t)/\nu_1\right) s_0(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + s_1(t)/\nu_1\right) \nu dt},$$

$$z_{1kS} = \frac{m_{kS}}{\sigma_{kN}} = \frac{z_{kS}}{\varkappa} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{s_1(t-\Delta_k)}{\nu_1}\right) s_0(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{s_1(t)}{\nu_1}\right) \nu dt}}.$$

Выполняя в (3.2.9) замену $y = \varkappa x$, получаем представление P_{0k} через эти величины:

$$P_{0k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \varkappa_1^2)}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - z_{1kS})^2}{2(1 + \varkappa_1^2)} - \frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] dx. \quad (3.2.10)$$

Рассуждая как в § 2.2, можно получить оценку P_{0k} (ср. с (2.2.26))

$$P_{0k} \geq 1 - \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} \left(\frac{\xi_k}{2\pi}\right) \exp\left[-\frac{z_{kS}^2}{2(\varkappa^2 + 1)}\right]. \quad (3.2.11)$$

При $\varkappa = 1$ эта формула приобретает вид

$$P_{0k} \geq 1 - \frac{\xi_k}{2\sqrt{2}\pi} \exp\left[-\frac{z_{kS}^2}{4}\right]. \quad (3.2.12)$$

Поскольку вывод неравенства (3.2.11) основан на замене функции $\exp(-u)$ ее первым многочленом Тейлора $y = 1 - u$, неравенства (3.2.11) и (3.2.12) близки к равенствам. Порядок точности подобных формул обычно равен следующему слагаемому ряда Тейлора, который в нашем случае есть

$$\frac{\varkappa}{2\sqrt{\varkappa^2 + 2}} \left(\frac{\xi_k}{2\pi} \right)^2 \exp \left[-\frac{z_k^2 S}{(\varkappa^2 + 2)} \right].$$

Видно, что эта величина мала, если мало $\xi_k^2 e^{-z_k^2 S/2}$.

Рассмотрим характеристики (смещение и рассеяние) оценки $\hat{\lambda}_k$ параметра λ_k с учетом аномальных ошибок.

В соответствии с формулой полной вероятности смещение и рассеяние оценки $\hat{\lambda}_k$ с учетом аномальных ошибок определяются выражениями

$$\begin{aligned} b(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) &= \langle \hat{\lambda}_k - \lambda_{0k} \rangle = P_{0k} b_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) + (1 - P_{0k}) b_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}), \\ B(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) &= \langle (\hat{\lambda}_k - \lambda_{0k})^2 \rangle = P_{0k} B_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) + (1 - P_{0k}) B_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Здесь $b_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k})$ и $B_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k})$ — смещение и рассеяние оценки при наличии только нормальных ошибок, а $b_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k})$ и $B_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k})$ — смещение и рассеяние оценки при наличии только аномальных ошибок.

Так как шумовая функция $\hat{N}(\lambda_k)$ является стационарным случайным процессом, то положение наибольшего максимума шумовой функции распределено равномерно на отрезке $[\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}]$. Следовательно, плотность вероятности аномальной ошибки задается формулой

$$w_a(\hat{\lambda}_k) = \frac{1}{\Delta \Lambda_{k pr}}, \quad \Lambda_{k \min} < \hat{\lambda}_k < \Lambda_{k \max}, \quad (3.2.14)$$

где $\Delta \Lambda_{k pr} = \Lambda_{k \max} - \Lambda_{k \min}$.

Напомним, что математическое ожидание нормальной оценки определяется равенством

$$\langle \hat{\lambda}_k \rangle_0 = \lambda_{0k}.$$

При этом дисперсия $D_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k})$ нормальной оценки определяется формулой (3.1.24). Математическое ожидание оценки при наличии только аномальных ошибок и сделанных предположениях равно

$$\begin{aligned} \langle \hat{\lambda}_k | \lambda_{0k} \rangle_a &= \int_{\Lambda_{k \min}}^{\Lambda_{k \max}} \hat{\lambda}_k w_a(\hat{\lambda}_k) d\hat{\lambda}_k = \frac{\Lambda_{k \max} + \Lambda_{k \min}}{2} = \Lambda_{k pr} = \\ &= 2R_{pr}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{pr}/c)\vartheta + A_{pr}(k - \mu)^2 \vartheta^2 / c. \end{aligned}$$

Отсюда математическое ожидание оценки с учетом нормальных и аномальных ошибок равно

$$\tilde{\lambda}_{0k} = \langle \hat{\lambda}_k | \lambda_{0k} \rangle = P_{0k} \lambda_{0k} + (1 - P_{0k}) \Lambda_{kpr}. \quad (3.2.15)$$

Дисперсия оценки при наличии только аномальных ошибок и сделанных предположениях равна

$$\begin{aligned} D_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) &= \int_{\Lambda_{k \min}}^{\Lambda_{k \max}} (\hat{\lambda}_k - \Lambda_{kpr})^2 w_a(\hat{\lambda}_k) d\hat{\lambda}_k = \\ &= \int_{\Lambda_{k \min}}^{\Lambda_{k \max}} (\hat{\lambda}_k - \Lambda_{kpr})^2 \frac{1}{\Delta \Lambda_{kpr}} d\hat{\lambda}_k = \frac{\Delta \Lambda_{kpr}^2}{12}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Из представлений для математических ожиданий получаем, что смещение при наличии только нормальной ошибки равно

$$b_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = 0, \quad (3.2.17)$$

а в условиях только аномальной ошибки —

$$b_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = \Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}. \quad (3.2.18)$$

Усредним эти величины по $\lambda_{0k} \in [\Lambda_{k \min}; \Lambda_{k \max}]$. Поскольку $b_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k})$ является константой, равной нулю, после усреднения получаем

$$b_0(\hat{\lambda}_k) = 0.$$

Чтобы усреднить $b_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = \Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}$, найдем среднее значение величины λ_{0k} . Поскольку распределения расстояния R_0 , скорости V_0 и ускорения A_0 являются равномерными в соответствующих интервалах, то математическое ожидание величины $\lambda_{0k} = 2R_0/c + (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta + A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c$ равно $2R_{pr}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{pr}/c)\vartheta + A_{pr}(k - \mu)^2\vartheta^2/c = \Lambda_{kpr}$. Отсюда видно, что

$$b_a(\hat{\lambda}_k) = 0.$$

Поэтому для условного и безусловного смещений с учетом аномальных ошибок получаем

$$\begin{aligned} b(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) &= P_{0k} b_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) + (1 - P_{0k}) b_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = \\ &= (1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}), \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$$b(\hat{\lambda}_k) = 0. \quad (3.2.20)$$

Из предыдущих формул (3.1.24), (3.2.17), (3.2.16) и (3.2.18) имеем

$$B_0(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) = D_0(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) + b_0^2(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) = \frac{1}{\alpha_0},$$

$$B_a(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) = D_a(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) + b_a^2(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) = \frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + (\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2.$$

Отсюда с учетом формулы (3.2.13) получаем

$$B(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) = P_{0k}\frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k})\left(\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + (\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2\right).$$

Усредняя по λ_{0k} , находим

$$\begin{aligned} B(\hat{\lambda}_k) &= P_{0k}\frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k})\left(\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + \frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12}\right) = \\ &= P_{0k}\frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k})\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{6}. \end{aligned}$$

Для условной и безусловной дисперсий из формул

$$\begin{aligned} D(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) &= B(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) - b^2(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}), \\ D(\hat{\lambda}_k) &= B(\hat{\lambda}_k) - \langle b^2(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) \rangle \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} D(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) &= P_{0k}\frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k})\left(\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + (\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2\right) - \\ &- \left((1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})\right)^2 = \\ &= P_{0k}\frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k})\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + (1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2 - \\ &- (1 - P_{0k})^2(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2 = \\ &= P_{0k}\frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k})\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + P_{0k}(1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$D(\hat{\lambda}_k) = B(\hat{\lambda}_k) = P_{0k}\frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k})\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12}. \quad (3.2.22)$$

Напомним, что приемник, изображенный на рис. 3.1.1, преобразует оценки $\hat{\lambda}_k$ в оценки \hat{R} , \hat{V} и \hat{A} в соответствии с формулами (3.1.30). Получаемые таким образом нормальные оценки \hat{R} , \hat{V} и \hat{A} являются несмещенными при условии, что оценки $\hat{\lambda}_k$ являются несмещенными, а их дисперсии находятся по формулам (3.1.32).

Чтобы получить условные математические ожидания оценок (3.1.30) в условиях возможных аномальных ошибок, надо в формулы (3.1.30) вместо оценок $\hat{\lambda}_k$ подставить их математические ожидания. В результате получим

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{R} | R_0, V_0, A_0 \rangle \\ \langle \hat{V} | R_0, V_0, A_0 \rangle \\ \langle \hat{A} | R_0, V_0, A_0 \rangle \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \delta_{Rk} \\ \delta_{Vk} \\ \delta_{Ak} \end{pmatrix} \langle \hat{\lambda}_k | \lambda_{0k} \rangle - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.23)$$

Вычитая из формулы (3.2.23) тождество (означающее несмещенность нормальных оценок)

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \\ A_0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \delta_{Rk} \\ \delta_{Vk} \\ \delta_{Ak} \end{pmatrix} \lambda_{0k} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и используя формулу (3.2.15), получаем выражение для условных смещений квазиоптимальных оценок

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b(\hat{R} | R_0, V_0, A_0) \\ b(\hat{V} | R_0, V_0, A_0) \\ b(\hat{A} | R_0, V_0, A_0) \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \delta_{Rk} \\ \delta_{Vk} \\ \delta_{Ak} \end{pmatrix} (\langle \hat{\lambda}_k | \lambda_{0k} \rangle - \lambda_{0k}) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \delta_{Rk} \\ \delta_{Vk} \\ \delta_{Ak} \end{pmatrix} (1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}), \end{aligned}$$

откуда с учетом определений $\Lambda_{kpr} = 2R_{pr}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{pr}/c)\vartheta + A_{pr}(k - \mu)^2\vartheta^2/c$ и $\lambda_{0k} = 2R_0/c + (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta + A_0(k - \mu)^2\vartheta^2/c$ получаем

$$b(\hat{l} | R_0, V_0, A_0) = \frac{2}{c}\varphi_{l0}(R_{pr} - R_0) + \frac{2\vartheta}{c}\varphi_{l1}(V_{pr} - V_0) + \frac{\vartheta^2}{c}\varphi_{l2}(A_{pr} - A_0), \quad (3.2.24)$$

где l — один из оцениваемых параметров движения — R , V или A ,

$$\varphi_{lm} = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}(1 - P_{0k})(k - \mu)^m, \quad m = 0, 1, 2. \quad (3.2.25)$$

Таким образом, согласно (3.2.24) квазиоптимальные оценки (3.1.30) при наличии аномальных ошибок являются условно смещенными.

Подставляя в формулу

$$B(\hat{l}|R_0, V_0, A_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 D(\hat{\lambda}_k|R_0, V_0, A_0) + b^2(\hat{l}|R_0, V_0, A_0), \quad (3.2.26)$$

формулы (3.2.21) и (3.2.24), получаем

$$\begin{aligned} B(\hat{l}|R_0, V_0, A_0) = & \frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 P_{0k} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{12} (4\chi_{l0} \Delta R_{pr}^2 + 4\vartheta^2 \chi_{l2} \Delta V_{pr}^2 + \vartheta^4 \chi_{l4} \Delta A_{pr}^2 + \right. \\ & + 8\vartheta \chi_{l1} \Delta R_{pr} \Delta V_{pr} + 4\vartheta^2 \chi_{l2} \Delta R_{pr} \Delta A_{pr} + 4\vartheta^3 \chi_{l3} \Delta V_{pr} \Delta A_{pr}) + \\ & + 4(\psi_{l0} + \varphi_{l0}^2)(R_{pr} - R_0)^2 + 4\vartheta^2(\psi_{l2} + \varphi_{l1}^2)(V_{pr} - V_0)^2 + \vartheta^4(\psi_{l4} + \varphi_{l2}^2)(A_{pr} - A_0)^2 + \\ & + 8\vartheta(\psi_{l1} + \varphi_{l0}\varphi_{l1})(R_{pr} - R_0)(V_{pr} - V_0) + 4\vartheta^3(\psi_{l3} + \varphi_{l0}\varphi_{l2})(R_{pr} - R_0)(A_{pr} - A_0) \\ & \left. + 4\vartheta^3(\psi_{l3} + \varphi_{l1}\varphi_{l2})(V_{pr} - V_0)(A_{pr} - A_0) \right], \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

где

$$\chi_{lm} = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 (1 - P_{0k}) |k - \mu|^m, \quad \psi_{lm} = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 P_{0k} (1 - P_{0k}) (k - \mu)^m, \quad (3.2.28)$$

а φ_{lm} определяется из (3.2.25).

С увеличением ОСШ $z_{kS} = \frac{m_{kS}}{\sigma_{kSN}}$ для одного импульса последовательности (2.1.1) вероятность надежной оценки временного положения оптического импульса (3.2.10) возрастает, т. е. $P_{0k} \rightarrow 1$, а $(1 - P_{0k}) \rightarrow 0$ при $z_{kS} \rightarrow \infty$. Соответственно из (3.2.24) и (3.2.27) при этом имеем

$$b(\hat{R}|R_0, V_0, A_0) \rightarrow 0, \quad b(\hat{V}|R_0, V_0, A_0) \rightarrow 0, \quad b(\hat{A}|R_0, V_0, A_0) \rightarrow 0 \quad (3.2.29)$$

и

$$B(\hat{l}|R_0, V_0, A_0) \rightarrow \frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2, \quad l = R, V, A. \quad (3.2.30)$$

Выполняя суммирование, при больших ОСШ z_{kS} получаем

$$\begin{aligned} B(\hat{R}|R_0, V_0, A_0) &= D_0(\hat{R}), \\ B(\hat{V}|R_0, V_0, A_0) &= D_0(\hat{V}), \\ B(\hat{A}|R_0, V_0, A_0) &= D_0(\hat{A}). \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Здесь $D_0(\hat{R})$, $D_0(\hat{V})$ и $D_0(\hat{A})$ определяются из (3.1.32) и представляют собой дисперсии совместно-эффективных оценок параметров движения.

Следовательно, квазиоптимальные оценки (3.1.30) являются асимптотически (с ростом ОСШ для каждого импульса) условно несмещенными (3.2.29) и совместно-эффективными (3.2.31).

Найдем далее безусловные характеристики квазиоптимальных оценок (3.1.30). Будем считать, что истинные значения R_0 , V_0 и A_0 равномерно распределены в априорной области \mathbf{W} . Усредняя (3.2.24) по равномерно распределенным значениям величин R_0 , V_0 и A_0 , для безусловных смещений получаем

$$\begin{aligned} b(\widehat{R}) &= \langle B(\widehat{R}|R_0, V_0, A_0) \rangle = 0, & b(\widehat{V}) &= \langle B(\widehat{V}|R_0, V_0, A_0) \rangle = 0, \\ b(\widehat{A}) &= \langle B(\widehat{A}|R_0, V_0, A_0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, квазиоптимальные оценки (3.1.30) безусловно несмещенные.

Перейдем к нахождению безусловных рассеяний. Усредняя (3.2.27) по равномерно распределенным значениям величин R_0 , V_0 и A_0 , для безусловных рассеяний квазиоптимальных оценок (3.1.30) находим

$$\begin{aligned} B(\widehat{l}) &= \frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 P_{0k} + \frac{1}{12c^2} \left[4(\chi_{l0} + \varphi_{l0} + \psi_{l0}^2) \Delta R_{pr}^2 + \right. \\ &+ 4\vartheta^2(\chi_{l2} + \varphi_{l2} + \psi_{l2}^2) \Delta V_{pr}^2 + \vartheta^4(\chi_{l4} + \varphi_{l4} + \psi_{l4}^2) \Delta A_{pr}^2 + \\ &\left. + 8\vartheta \chi_{l1} \Delta R_{pr} \Delta V_{pr} + 4\vartheta^2 \chi_{pr} \Delta R_{pr} \Delta A_{pr} + 4\vartheta^3 \chi_{l3} \Delta V_{pr} \Delta A_{pr} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Сопоставляя (2.2.37) и (3.2.32), можно найти потери в точности квазиоптимальных оценок (3.1.30) по сравнению с точностью оценок максимального правдоподобия.

С увеличением ОСШ $z_k S$ вероятность надежной оценки $P_{0k} \rightarrow 1$ (3.2.9). Соответственно из (3.2.32) при этом имеем

$$B(\widehat{l}) \rightarrow \frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2.$$

Сравнивая этот результат с (3.2.30), видим, что безусловные рассеяния квазиоптимальных оценок (3.1.30) с ростом ОСШ $z_k S$ асимптотически совпадают с безусловными рассеяниями оценок максимального правдоподобия, что подтверждает выводы предыдущего параграфа.

3.3 Квазиоптимальные оценки дальности и скорости

Как известно, метод максимального правдоподобия является асимптотически эффективным. В то же время квазиоптимальный метод проще реализуется, поскольку подразумевает поиск положения максимумов N функций одного аргумента тогда, как алгоритм оценки максимального правдоподобия подразумевает поиск положения максимума функции нескольких аргументов. В связи с этим в настоящем параграфе проводится сравнение характеристик этих двух методов для различных значений параметров. С целью уменьшения выкладок рассматривается упрощенный случай, когда требуется оценить только дальность и скорость.

Предположим, что интенсивность сигнала, рассеянного целью с дальностью R_0 и скоростью V_0 , имеет вид

$$s(t, R_0, V_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t - 2R_0/c - (k - \mu)(1 + 2V_0/c)\vartheta), \quad (3.3.1)$$

при этом интенсивность импульсов принимаемого сигнала и уровень шума ν приемнику известны.

Предположим, что форма $s_0(t)$ одного импульса в посылаемой последовательности (2.1.1) выражается через нормированный импульс $f_0(x)$ по формуле

$$s_0(t) = a f_0(t/\tau).$$

Будем, как и ранее, использовать сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} \Delta R_{pr} &= R_{\max} - R_{\min}, & R_{pr} &= \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}, \\ \Delta V_{pr} &= V_{\max} - V_{\min}, & V_{pr} &= \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2}. \end{aligned}$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} q &= a/\nu, & \mu_S &= a\tau, \\ m_R &= \Delta R_{pr}/c\tau, & m_V &= \vartheta \Delta V_{pr}/c\tau, \\ \beta^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'_0(x)]^2}{1 + q f_0(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Они имеют следующий смысл:

✓ $q = a/\nu$ — отношение сигнал-фон,

- ✓ $\mu_S = a\tau$ — среднее число сигнальных точек для одного импульса,
- ✓ $m_R = \Delta R_{pr}/c\tau$ — количество импульсов с пространственной длиной $c\tau$, которые укладываются в априорном интервале возможных значений дальности — нормированная длина априорного интервала возможных значений дальности,
- ✓ $m_V = \vartheta\Delta V_{pr}/c\tau$ — доля пространственной длины импульса, на которую может переместиться цель за период повторения,
- ✓ $\beta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'_0(x)]^2}{1 + qf_0(x)} dx$ — нормированный параметр α_0 (3.1.25), а именно, $\beta^2 = \alpha_0 \frac{\tau\nu}{a^2}$.

Сначала рассмотрим применение метода максимального правдоподобия для оценки дальности и скорости. Логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) с точностью до несущественных постоянных слагаемых имеет вид

$$L(R, V) = \int_0^T \ln(1 + s(t, R, V)/\nu) d\pi(t).$$

Согласно методу максимального правдоподобия в качестве оценки дальности и скорости используется положение наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) $L(R, V)$:

$$(\hat{R}, \hat{V}) = \arg \sup_{R, V} L(R, V).$$

Таким образом, для нахождения оценки дальности и скорости приемник, реализующий метод максимального правдоподобия, должен отыскать положение наибольшего максимума функции $L(R, V)$ двух переменных. Поскольку характеристики оценок максимального правдоподобия являются асимптотически эффективными, для их нахождения достаточно выписать характеристики эффективных оценок. Рассчитать характеристики совместно эффективных оценок дальности и скорости можно, повторив рассуждения главы 2. Дисперсии надежных оценок (аналоги формул (2.2.33) и (2.2.34)) имеют вид

$$D_0(\hat{R}|R_0, V_0) = \frac{c^2}{4\alpha_0} \frac{M_2}{M_0 M_2 - M_1^2} = \frac{c^2}{4\alpha_0} \frac{12(\mu^2 + \mu) + 4N^2 - 6(2\mu + 1)N + 2}{N(N^2 - 1)},$$

$$D_0(\hat{V}|R_0, V_0) = \frac{c^2}{4\alpha_0 \vartheta^2} \frac{M_0}{M_0 M_2 - M_1^2} = \frac{c^2}{4\alpha_0 \vartheta^2} \frac{12}{N(N^2 - 1)},$$

где

$$\alpha_0 = \int_0^T \frac{1}{s_0(t) + \nu} \left[\frac{d s_0(t)}{dt} \right]^2 dt = \frac{a^2}{\tau \nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[f_0'(x)]^2}{1 + q f_0(x)} dx = \frac{a^2}{\tau \nu} \beta^2.$$

Отметим, что выписанные выше условные дисперсии надежных оценок одновременно являются безусловными, поскольку они не зависят от R_0 и V_0 .

Вероятность надежной оценки в методе максимального правдоподобия задается формулой

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W_{SN}(H) F_N(H) dH, \quad (3.3.3)$$

где смысл $W_{SN}(H)$ и $F_N(H)$ тот же, что и в главе 2. Для плотности вероятности $W_{SN}(H)$ справедлив аналог формулы (2.2.12):

$$W_{SN}(H) = \frac{1}{\sigma_{SN} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(H - m_S)^2}{2\sigma_{SN}^2} \right], \quad (3.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} m_S &= N \int_0^T \ln(1 + s_0(t)/\nu) s_0(t) dt = \mu_S N \int_0^T \ln(1 + q f_0(x)) f_0(x) dx, \\ \sigma_{SN}^2 &= \nu N \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(1 + s_0(t)/\nu) (1 + s_0(t)/\nu) dt = \\ &= \frac{\mu_S}{q} N \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(1 + q f_0(x)) (1 + q f_0(x)) dx. \end{aligned}$$

Функция распределения абсолютного максимума помеховой составляющей H_N при больших H_N/σ_N имеет вид [52], [83, формула (1.62)]

$$F_N(H) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{\xi}{(2\pi)^{3/2}} \frac{H}{\sigma_N} \exp \left(-\frac{H^2}{2\sigma_N^2} \right) \right], & H \geq \sigma_N, \\ 0, & H < \sigma_N, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

где

$$\xi = Q \sqrt{\frac{1}{\sigma_N^4} \det \left\| \frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2} \right\|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_2}},$$

$$B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \nu \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \ln(1 + s_0(t - 2R_1/c - (k - \mu)(1 + 2V_1/c)\vartheta)/\nu) \times$$

$$\times \ln(1 + s_0(t - 2R_2/c - (k - \mu)(1 + 2V_2/c)\vartheta)/\nu) dt,$$

$$\sigma_N^2 = \nu N \int_0^T \ln^2(1 + s_0(t)/\nu) dt = \frac{\mu_S}{q} N \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(1 + qf_0(x)) dx,$$

$$Q = (R_{\max} - R_{\min})(V_{\max} - V_{\min}) = \Delta R_{pr} \Delta V_{pr},$$

$$\vec{l} = (R, V).$$

Вычислим ξ . Имеем

$$\left\| \frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2} \right\|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_2} = \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \frac{4}{c^2} & \frac{4\vartheta(k-\mu)}{c^2} \\ \frac{4\vartheta(k-\mu)}{c^2} & \frac{4\vartheta^2(k-\mu)^2}{c^2} \end{pmatrix} \int_0^T \left(\frac{ds_0(t)}{1 + s_0(t)/\nu} \right)^2 dt.$$

После преобразований эта формула приобретает вид

$$\det \left\| \frac{\partial^2 B_N(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial \vec{l}_1 \partial \vec{l}_2} \right\|_{\vec{l}_1 = \vec{l}_2} = \frac{4\vartheta^2 N^2 (N^2 - 1)}{3c^4} \left[\frac{1}{\nu} \int_0^T \left(\frac{ds_0(t)}{1 + s_0(t)/\nu} \right)^2 dt \right]^2.$$

Отсюда получаем представление для ξ :

$$\xi = \frac{2Q\vartheta N}{\sigma_N^2 c^2 \nu} \sqrt{\frac{N^2 - 1}{3}} \left[\int_0^T \left(\frac{ds_0(t)}{1 + s_0(t)/\nu} \right)^2 dt \right] =$$

$$= \frac{2Q\vartheta a^2 N}{\sigma_N^2 c^2 \nu \tau} \sqrt{\frac{N^2 - 1}{3}} \beta^2 = 2m_R \cdot m_V \cdot q \cdot \mu_S \cdot \beta^2 \cdot N \sqrt{\frac{N^2 - 1}{3}}. \quad (3.3.6)$$

Чтобы вычислить вероятность P_0 надежной оценки, надо подставить (3.3.6) в (3.3.5), а затем (3.3.5) и (3.3.4) — в (3.3.3). Интеграл (3.3.3) и большинство остальных интегралов приходится находить численно.

Как и в § 2.2 для оценок скорости и ускорения при условии аномальной ошибки имеем

$$B_a(\widehat{R}|R_0, V_0) = \Delta R_{pr}^2/12 + (R_{pr} - R_0)^2,$$

$$b_a(\widehat{R}|R_0, V_0) = R_{pr} - R_0,$$

$$B_a(\widehat{V}|R_0, V_0) = \Delta V_{pr}^2/12 + (V_{pr} - V_0)^2,$$

$$b_a(\widehat{V}|R_0, V_0) = V_{pr} - V_0.$$

Для условных дисперсий, смещений и рассеяний оценок скорости и ускорения с учетом аномальных ошибок получаем

$$\begin{aligned}
b(\widehat{R}|R_0, V_0) &= (1 - P_0)(R_{pr} - R_0), \\
b(\widehat{V}|R_0, V_0) &= (1 - P_0)(V_{pr} - V_0), \\
B(\widehat{R}|R_0, V_0) &= P_0 \frac{c^2}{4\alpha_0} \frac{12(\mu^2 + \mu) + 4N^2 - 6(2\mu + 1)N + 2}{N(N^2 - 1)} + \\
&\quad + (1 - P_0)\Delta R_{pr}^2/12 + (1 - P_0)(R_{pr} - R_0)^2, \\
B(\widehat{V}|R_0, V_0) &= P_0 \frac{c^2}{4\alpha_0 v^2} \frac{12}{N(N^2 - 1)} + \\
&\quad + (1 - P_0)\Delta V_{pr}^2/12 + (1 - P_0)(V_{pr} - V_0)^2.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Для безусловных смещений скорости и ускорения имеем

$$b(\widehat{R}) = 0, \quad b(\widehat{V}) = 0.$$

Для безусловных рассеяний и дисперсий получаем

$$\begin{aligned}
B(\widehat{R}) = D(\widehat{R}) &= P_0 D_0(\widehat{R}|R_0, V_0) + (1 - P_0)\Delta R_{pr}^2/6, \\
B(\widehat{V}) = D(\widehat{V}) &= P_0 D_0(\widehat{V}|R_0, V_0) + (1 - P_0)\Delta V_{pr}^2/6.
\end{aligned}$$

Нормированные и удовлетворяющие условию $R_0 = R_{pr}$, $V_0 = V_{pr}$ условные рассеяния оценок максимального правдоподобия имеют вид

$$\begin{aligned}
b_R(R_0, V_0) &= \frac{B(\widehat{R}|R_0, V_0)}{\Delta R_{pr}^2} = \\
&= \frac{P_0}{4m_R^2 q \mu_S \beta^2} \frac{2(6\mu^2 + 6\mu + 2N^2 - 3(2\mu + 1)N + 1)}{N(N^2 - 1)} + \\
&\quad + \frac{1 - P_0}{12},
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$b_V(R_0, V_0) = \frac{B(\widehat{V}|R_0, V_0)}{\Delta V_{pr}^2} = \frac{P_0}{4m_V^2 q \mu_S \beta^2} \frac{12}{N(N^2 - 1)} + \frac{1 - P_0}{12}. \tag{3.3.9}$$

Выпишем также выражения для нормированных условных рассеяний

совместно-эффективных оценок:

$$\begin{aligned} b_R(R_0, V_0) &= \frac{B(\widehat{R}|R_0, V_0)}{\Delta R_{pr}^2} = \\ &= \frac{P_0}{4m_R^2 q \mu_S \beta^2} \frac{2(6\mu^2 + 6\mu + 2N^2 - 3(2\mu + 1)N + 1)}{N(N^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

$$b_V(R_0, V_0) = \frac{B(\widehat{V}|R_0, V_0)}{\Delta V_{pr}^2} = \frac{1}{4m_V^2 q \mu_S \beta^2} \frac{12}{N(N^2 - 1)}. \quad (3.3.11)$$

Они получаются из формул (3.3.8) и (3.3.9) в результате подстановки в них $P_0 = 1$.

Перейдем к рассмотрению квазиоптимального алгоритма. Напомним, что интенсивность рассеянного сигнала задается формулой (3.3.1), а интенсивность шума равна ν , а также, что приемник также настроен на импульсы $s_0(t)$ и шум ν . В таком случае квазиоптимальный алгоритм подразумевает проведение оценки максимального правдоподобия временных положений импульсов. Для этого производится формирование логарифмов ФОП

$$L_k(\lambda_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ln(1 + s_0(t - \lambda_k)/\nu) d\pi(t) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} s_0(t - \lambda_k) dt. \quad (3.3.12)$$

для каждого импульса последовательности (3.1.2). В качестве оценок временных положений λ_{0k} отдельных импульсов используются положения наибольших максимумов логарифмов ФОП (3.3.12).

По оценкам временных положений отдельных импульсов $\hat{\lambda}_k$ рассчитываются оценки дальности и скорости \widehat{R} и \widehat{V} с помощью формул (аналоги формул (3.1.30))

$$\begin{aligned} \widehat{R} &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Rk} \hat{\lambda}_k, \\ \widehat{V} &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Vk} \hat{\lambda}_k - \frac{c}{2}, \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

где

$$\begin{aligned}\delta_{Rk} &= c \frac{M_1(k - \mu) - M_2}{2(M_1^2 - M_0M_2)} = \\ &= \frac{c[k(6\mu - 3N + 3) + (N - 1)(-3\mu + 2N - 1)]}{N(N^2 - 1)}, \quad (3.3.14) \\ \delta_{Vk} &= c \frac{M_1 - M_0(k - \mu)}{2\vartheta(M_1^2 - M_0M_2)} = -\frac{3c(-2k + N - 1)}{\vartheta N(N^2 - 1)}.\end{aligned}$$

Обсудим характеристики точности квазиправдоподобных оценок. Границы априорных интервалов (3.1.4) приобретают вид

$$\begin{aligned}\Lambda_{k \min} &= \begin{cases} 2R_{\min}/c + (k - \mu)[1 + 2V_{\min}/c]\vartheta & \text{при } k > \mu, \\ 2R_{\min}/c + (k - \mu)[1 + 2V_{\max}/c]\vartheta & \text{при } k \leq \mu, \end{cases} \\ \Lambda_{k \max} &= \begin{cases} 2R_{\max}/c + (k - \mu)[1 + 2V_{\max}/c]\vartheta & \text{при } k > \mu, \\ 2R_{\max}/c + (k - \mu)[1 + 2V_{\min}/c]\vartheta & \text{при } k \leq \mu. \end{cases}\end{aligned}$$

При этом середины $\Lambda_{kpr} = (\Lambda_{k \min} + \Lambda_{k \max})/2$ априорных интервалов $\mathbf{\Lambda}_k = [\Lambda_{k \min}, \Lambda_{k \max}]$ находятся по формулам

$$\Lambda_{kpr} = 2R_{pr}/c + (k - \mu)(1 + 2V_{pr}/c)\vartheta, \quad (3.3.15)$$

где

$$R_{pr} = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}, \quad V_{pr} = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2},$$

а длины $\Delta\Lambda_{kpr} = \Lambda_{k \max} - \Lambda_{k \min}$ априорных интервалов возможных значений времен прихода импульсов — по формулам

$$\Delta\Lambda_{kpr} = 2\Delta R_{pr}/c + 2\vartheta|k - \mu|\Delta V_{pr}/c = 2(m_R + m_V|k - \mu|)\tau.$$

Будем предполагать что форма $s_0(t)$ одного импульса в посылаемой последовательности (2.1.1) и форма $s_1(t)$ одного импульса в рассеянной последовательности (2.1.2) совпадают и выражаются через нормированный импульс $f(x)$ по формуле

$$s_0(t) = af_0(t/\tau).$$

Будем также пользоваться безразмерными переменными (3.3.2). В этих обозначениях величины, используемые в формуле (3.2.10) для вероятно-

сти надежной оценки, принимают вид

$$\begin{aligned}
m_{kS} &= \tau\nu \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + qf_0(x)) qf_0(x) dx, \\
\sigma_{kN}^2 &= \tau\nu \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + qf_0(x)) dx, \\
\kappa_1^2 &= q \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + qf_0(x)) f_0(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + qf_0(x)) dx}, \\
z_{1kS} &= \frac{m_{kS}}{\sigma_{kN}} = \sqrt{q\mu_S} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + qf_0(x)) f_0(x) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + qf_0(x)) dx}}, \\
\xi_k &= \Delta\Lambda_{kpr} \frac{q}{\tau} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_0'(x)]^2}{(1 + qf_0(x))^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + qf_0(x)) dx}} = \\
&= 2q\beta(m_R + |k - \mu|m_V) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1 + qf_0(x)) dx \right)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Из формулы (3.2.10) вытекает следующая формула для вероятности аномальной ошибки

$$\begin{aligned}
P_{ak} &= 1 - P_{0k} = 1 - \Phi\left(\frac{z_{1kS}}{\sqrt{1 + \kappa_1^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \kappa_1^2)}} \times \\
&\times \int_0^{+\infty} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \right\} \exp\left[-\frac{(x - z_{1kS})^2}{2(1 + \kappa_1^2)}\right] dx.
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
P_{ak} &= 1 - P_{0k} = \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \kappa_1^2)}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \exp\left[-\frac{(x - z_{1kS})^2}{2(1 + \kappa_1^2)}\right] dx = \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{z_{1kS}}{\sqrt{1 + \kappa_1^2}}\right) + \Phi\left(\frac{z_{1kS}}{\sqrt{1 + \kappa_1^2}}\right) - \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \kappa_1^2)}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \exp\left[-\frac{(x - z_{1kS})^2}{2(1 + \kappa_1^2)}\right] dx = \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{z_{1kS}}{\sqrt{1 + \kappa_1^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \kappa_1^2)}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x - z_{1kS})^2}{2(1 + \kappa_1^2)}\right] dx - \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \kappa_1^2)}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \exp\left[-\frac{(x - z_{1kS})^2}{2(1 + \kappa_1^2)}\right] dx =
\end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{z_{1k} S}{\sqrt{1 + \varkappa_1^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \varkappa_1^2)}} \times \\ \times \int_0^{+\infty} \left\{1 - \exp\left[-\frac{\xi_k}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]\right\} \exp\left[-\frac{(x - z_{1k} S)^2}{2(1 + \varkappa_1^2)}\right] dx.$$

Для условных характеристик оценок временных положений импульсов имеем

$$b_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = 0, \\ B_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = D_0(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = \frac{1}{\alpha_0} = \frac{\nu\tau}{a^2 \int_0^{T/\tau} \frac{1}{1+qf_0(x)} [f'_0(x)]^2 dx}, \\ b_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = \Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}, \\ B_a(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = \frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + (\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2, \quad (3.3.18)$$

$$\langle \hat{\lambda}_k | \lambda_{0k} \rangle = P_{0k} \lambda_{0k} + (1 - P_{0k}) \Lambda_{kpr}, \\ b(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = (1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}), \\ B(\hat{\lambda}_k | \lambda_{0k}) = \frac{P_{0k}}{\alpha_0} + (1 - P_{0k}) \left[\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{12} + (\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2 \right], \quad (3.3.19)$$

При условии, что значения λ_{0k} распределены равномерно внутри своих априорных интервалов, безусловные смещения и рассеяния оценок $\hat{\lambda}_k$ имеют вид

$$b(\hat{\lambda}_k) = 0, \quad B(\hat{\lambda}_k) = \frac{P_{0k}}{\alpha_0} + (1 - P_{0k}) \left[\frac{\Delta\Lambda_{kpr}^2}{6} \right].$$

Для условных смещений оценок \hat{R} и \hat{V} имеем формулы

$$b(\hat{R} | R_0, V_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Rk} (1 - P_{0k}) (\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}), \\ b(\hat{V} | R_0, V_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Vk} (1 - P_{0k}) (\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k}).$$

Или

$$b(\hat{l} | R_0, V_0) = \frac{2}{c} \varphi_{l0} (R_{pr} - R_0) + \frac{2\vartheta}{c} \varphi_{l1} (V_{pr} - V_0), \quad (3.3.20)$$

где l — один из оцениваемых параметров движения — R или V , а

$$\varphi_{Rm} = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Rk} (1 - P_{0k}) (k - \mu)^m, \quad \varphi_{Vm} = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{Vk} (1 - P_{0k}) (k - \mu)^m.$$

Подставляя в аналог (для двух информативных параметров) формулы (3.2.26)

$$B(\hat{l}|R_0, V_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 D(\hat{\lambda}_k|R_0, V_0) + b^2(\hat{l}|R_0, V_0), \quad (3.3.21)$$

формулу (3.2.21)

$$D(\hat{\lambda}_k|\lambda_{0k}) = P_{0k} \frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k}) \frac{\Delta \Lambda_{kpr}^2}{12} + P_{0k}(1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2.$$

и формулу (3.3.20), получаем для условных рассеяний аналог формулы (3.2.27):

$$\begin{aligned} B(\hat{l}|R_0, V_0) &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 D(\hat{\lambda}_k|R_0, V_0) + b^2(\hat{l}|R_0, V_0) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 \left[P_{0k} \frac{1}{\alpha_0} + (1 - P_{0k}) \frac{\Delta \Lambda_{kpr}^2}{12} + P_{0k}(1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2 \right] + \\ &+ \left[\frac{2}{c} \varphi_{l0}(R_{pr} - R_0) + \frac{2\vartheta}{c} \varphi_{l1}(V_{pr} - V_0) \right]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 \frac{P_{0k}}{\alpha_0} + \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 \left[(1 - P_{0k}) \frac{\Delta \Lambda_{kpr}^2}{12} + P_{0k}(1 - P_{0k})(\Lambda_{kpr} - \lambda_{0k})^2 \right] + \\ &+ \left[\frac{2}{c} \varphi_{l0}(R_{pr} - R_0) + \frac{2\vartheta}{c} \varphi_{l1}(V_{pr} - V_0) \right]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 \frac{P_{0k}}{\alpha_0} + \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 \left[(1 - P_{0k}) \frac{1}{12c^2} \left(2\Delta R_{pr} + 2|k - \mu| \Delta V_{pr} \vartheta \right)^2 + \right. \\ &+ \left. P_{0k}(1 - P_{0k}) \left[2(R_{pr} - R_0)/c + (k - \mu)(1 + 2(V_{pr} - V_0)/c) \vartheta \right]^2 \right] + \\ &+ \frac{4}{c^2} \left[\varphi_{l0}(R_{pr} - R_0) + \vartheta \varphi_{l1}(V_{pr} - V_0) \right]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 \frac{P_{0k}}{\alpha_0} + \frac{1}{3c^2} \left[\chi_{l00} \Delta R_{pr}^2 + 2\vartheta \chi_{l01} \Delta R_{pr} \Delta V_{pr} + \vartheta^2 \chi_{l11} \Delta V_{pr}^2 \right] + \\ &+ \frac{4}{c^2} \left[\psi_{l00}(R_{pr} - R_0)^2 + 2\vartheta \psi_{l01}(R_{pr} - R_0)(V_{pr} - V_0) + \vartheta^2 \psi_{l11}(V_{pr} - V_0)^2 \right], \end{aligned}$$

где при $m = 0, 1$

$$\begin{aligned}\chi_{lmn} &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 (1 - P_{0k}) |k - \mu|^{m+n}, \\ \psi_{lmn} &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 P_{0k} (1 - P_{0k}) (k - \mu)^{m+n} + \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk} (1 - P_{0k}) (k - \mu)^m \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk} (1 - P_{0k}) (k - \mu)^n \right).\end{aligned}\quad (3.3.22)$$

В частном случае $R_0 = R_{pr}$, $V_0 = V_{pr}$ эта формула приобретает вид

$$B(\widehat{l}|R_0, V_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 \frac{P_{0k}}{\alpha_0} + \frac{1}{3c^2} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{lk}^2 (1 - P_{0k}) [\Delta R_{pr} + \vartheta |k - \mu| \Delta V_{pr}]^2.\quad (3.3.23)$$

Рассмотрим также нормированные при $R_0 = R_{pr}$, $V_0 = V_{pr}$ условные рассеяния квазиоптимальных оценок

$$b_R(R_0, V_0) = \frac{B(\widehat{R}|R_0, V_0)}{\Delta R_{pr}^2} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\delta}_{Rk}^2 \left[\frac{1 - P_{ak}}{4m_R^2 q \mu_S \beta^2} + \frac{P_{ak}}{12} \left(1 + \frac{m_V}{m_R} |k - \mu| \right)^2 \right],\quad (3.3.24)$$

$$b_V(R_0, V_0) = \frac{B(\widehat{V}|R_0, V_0)}{\Delta V_{pr}^2} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\delta}_{Vk}^2 \left[\frac{1 - P_{ak}}{4m_V^2 q \mu_S \beta^2} + \frac{P_{ak}}{12} \left(\frac{m_R}{m_V} + |k - \mu| \right)^2 \right],\quad (3.3.25)$$

где P_{ak} определено формулой (3.3.17), а $(\tilde{\delta}_{Rk}$ и $\tilde{\delta}_{Vk}$ связаны с величинами (3.3.14) соотношениями $\delta_{Rk} = \frac{c}{2} \tilde{\delta}_{Rk}$ и $\delta_{Vk} = \frac{c}{2\vartheta} \tilde{\delta}_{Vk}$)

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_{Rk} &= \frac{M_1(k - \mu) - M_2}{M_1^2 - M_0 M_2} = \frac{2[k(6\mu - 3N + 3) + (N - 1)(-3\mu + 2N - 1)]}{N(N^2 - 1)}, \\ \tilde{\delta}_{Vk} &= \frac{M_1 - M_0(k - \mu)}{M_1^2 - M_0 M_2} = -\frac{6(-2k + N - 1)}{N(N^2 - 1)}.\end{aligned}$$

На рис. 3.3.2–3.3.6 изображены графики зависимостей нормированных условных рассеяний для квазиоптимальных оценок (формулы (3.3.8) и (3.3.9); сплошные линии), оценок максимального правдоподобия (формулы (3.3.24) и (3.3.25); пунктирные линии), а также совместно-эффективных оценок (формулы (3.3.10) и (3.3.11); штрих-пунктирные линии)

от отношения сигнал-фон q для импульса, форма интенсивности которого задается формулой Гаусса

$$f_0(x) = \exp(-\pi x^2/2).$$

На всех графиках $\mu_S = 100$. Как было показано выше, в области надежных оценок рассеяния для метода максимального правдоподобия и для квазиоптимального метода практически совпадают, а в области возможных аномальных ошибок метод максимального правдоподобия дает существенно лучший результат.

Из сопоставления рис. 3.3.2 с 3.3.5 и 3.3.4 с 3.3.6 видно, что при увеличении числа импульсов N увеличивается точность всех оценок. При этом точность оценок скорости увеличивается гораздо заметнее. Кроме того, пороговое отношение сигнал-фон, ниже которого влияние аномальных ошибок существенно, для оценок максимального правдоподобия уменьшается, а для квазиоптимальной оценки не изменяется.

Из сопоставления рис. 3.3.2 с 3.3.4 и 3.3.5 с 3.3.6, а также 3.3.3 с 3.3.2 видно, что увеличение априорного интервала возможных значений дальности m_R и скорости m_V увеличивает значение порогового отношения сигнал-фон для обеих оценок, но несущественно.

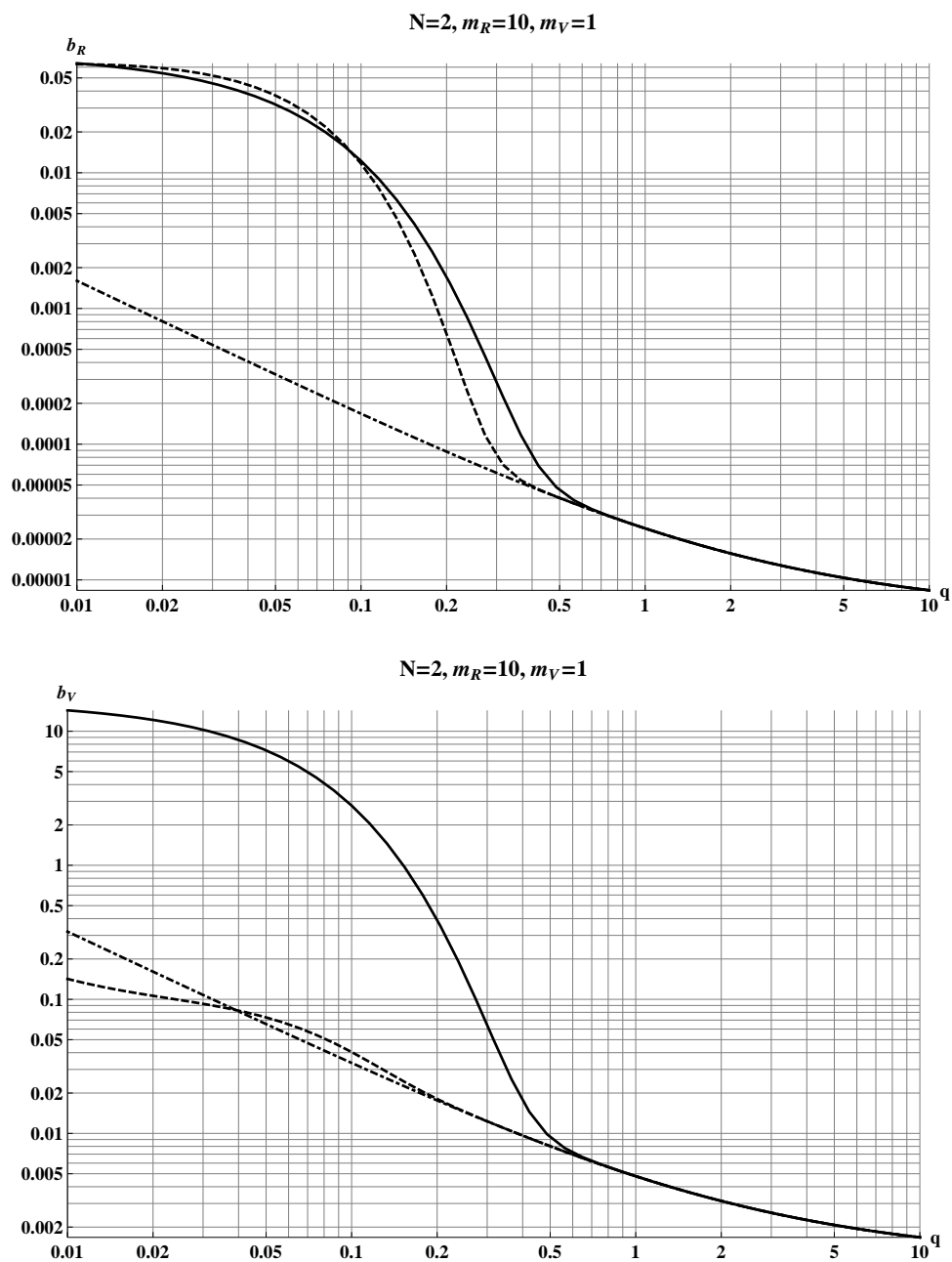


Рис. 3.3.2: Зависимость нормированных рассеяний (3.3.8) и (3.3.9), (3.3.10) и (3.3.11), (3.3.24) и (3.3.25) от q для квазиоптимального метода (сплошная линия), метода максимального правдоподобия (пунктирная линия) и совместно-эффективной оценки (штрих-пунктирная линия)

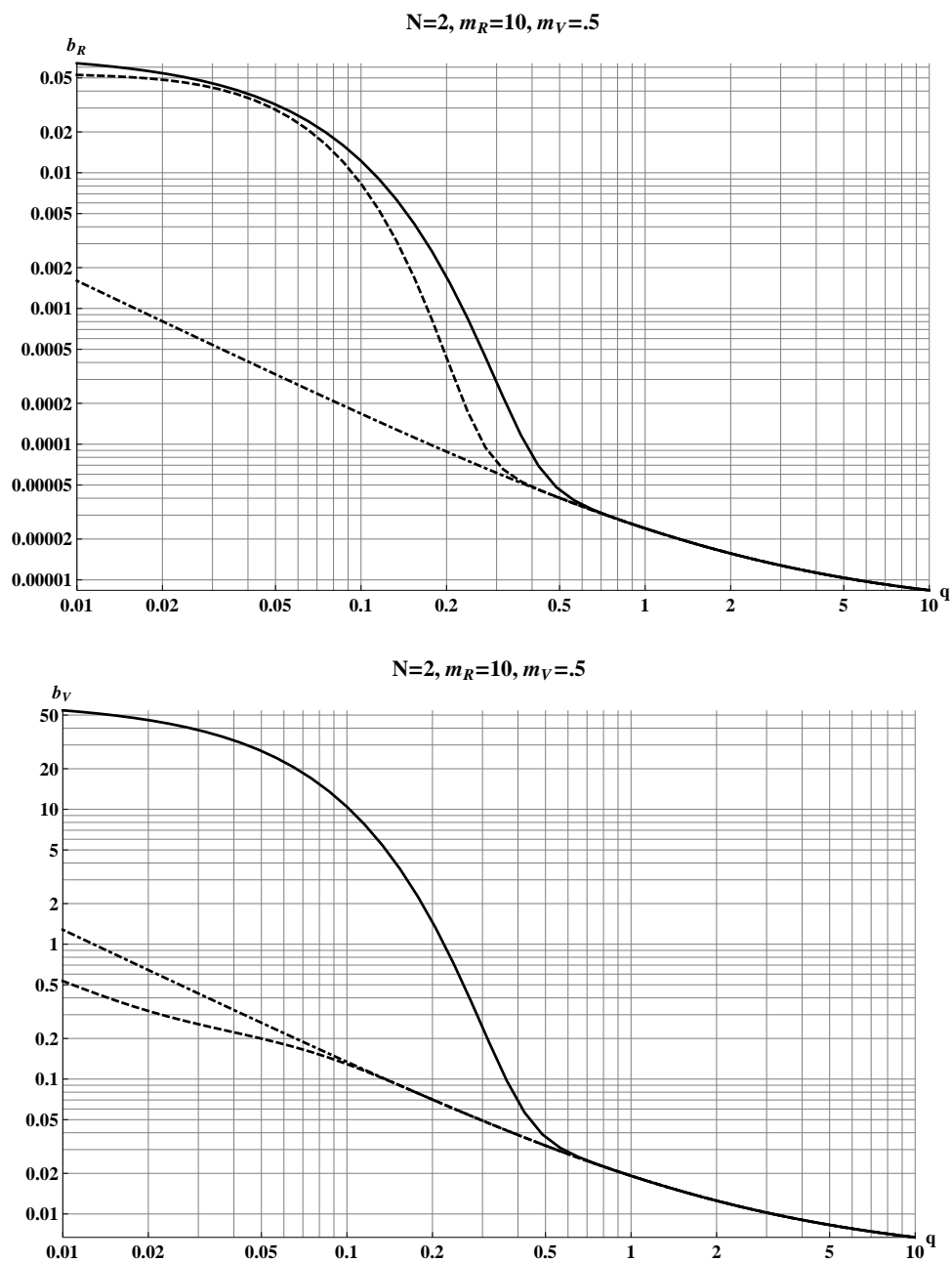


Рис. 3.3.3: Зависимость нормированных рассеяний (3.3.8) и (3.3.9), (3.3.10) и (3.3.11), (3.3.24) и (3.3.25) от q для квазиоптимального метода (сплошная линия), метода максимального правдоподобия (пунктирная линия) и совместно-эффективной оценки (штрих-пунктирная линия)

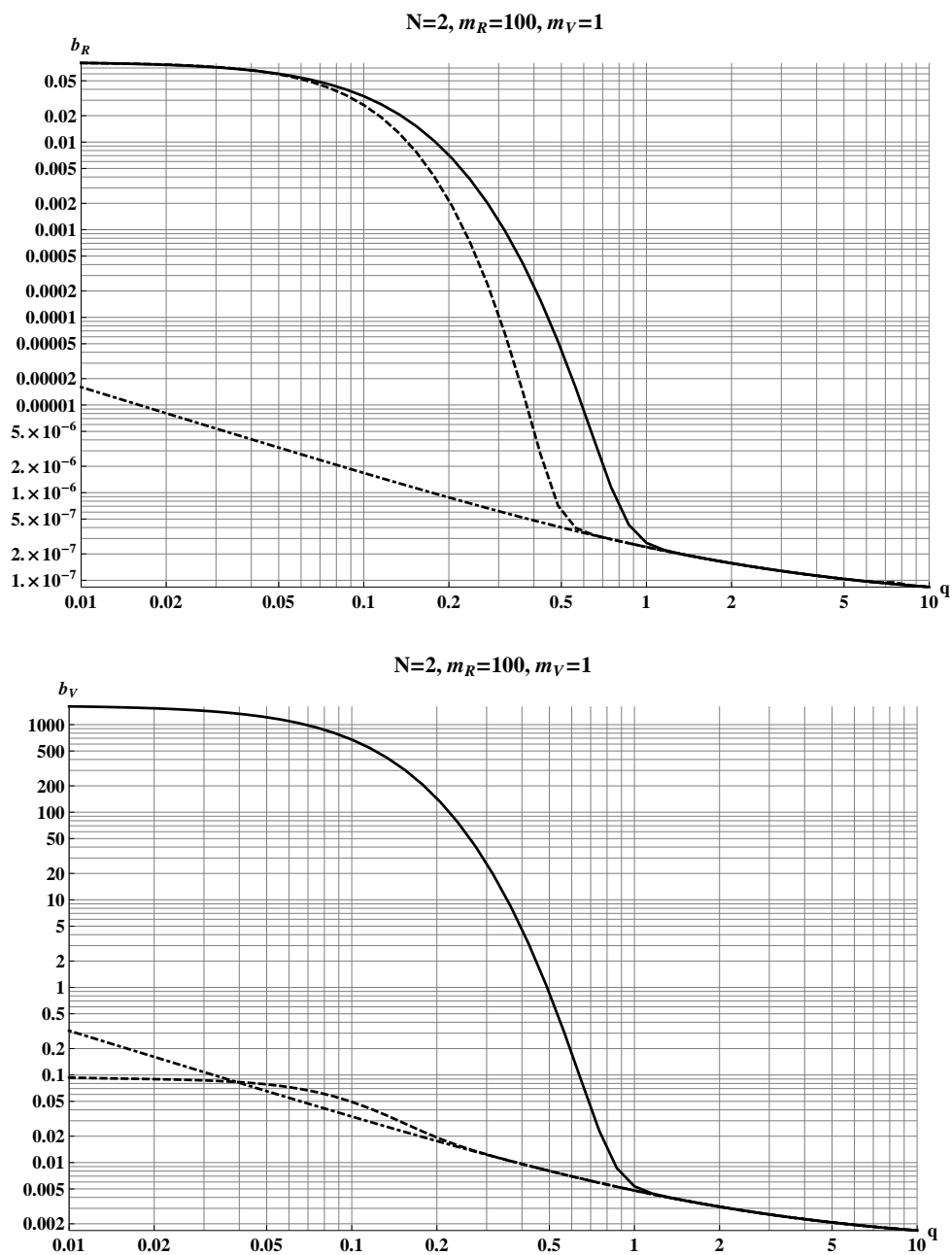


Рис. 3.3.4: Зависимость нормированных рассеяний (3.3.8) и (3.3.9), (3.3.10) и (3.3.11), (3.3.24) и (3.3.25) от q для квазиоптимального метода (сплошная линия), метода максимального правдоподобия (пунктирная линия) и совместно-эффективной оценки (штрих-пунктирная линия)

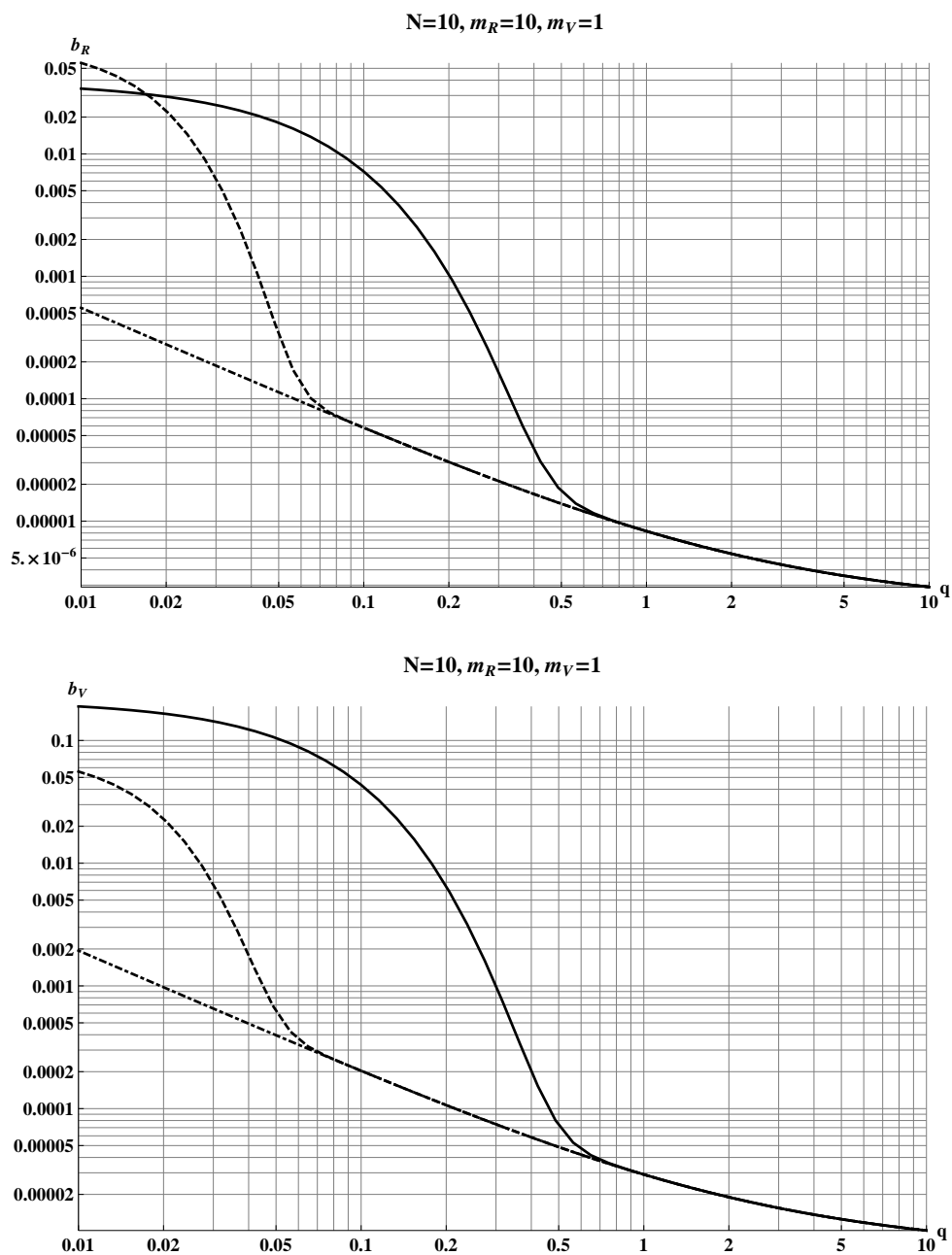


Рис. 3.3.5: Зависимость нормированных рассеяний (3.3.8) и (3.3.9), (3.3.10) и (3.3.11), (3.3.24) и (3.3.25) от q для квазиоптимального метода (сплошная линия), метода максимального правдоподобия (пунктирная линия) и совместно-эффективной оценки (штрих-пунктирная линия)

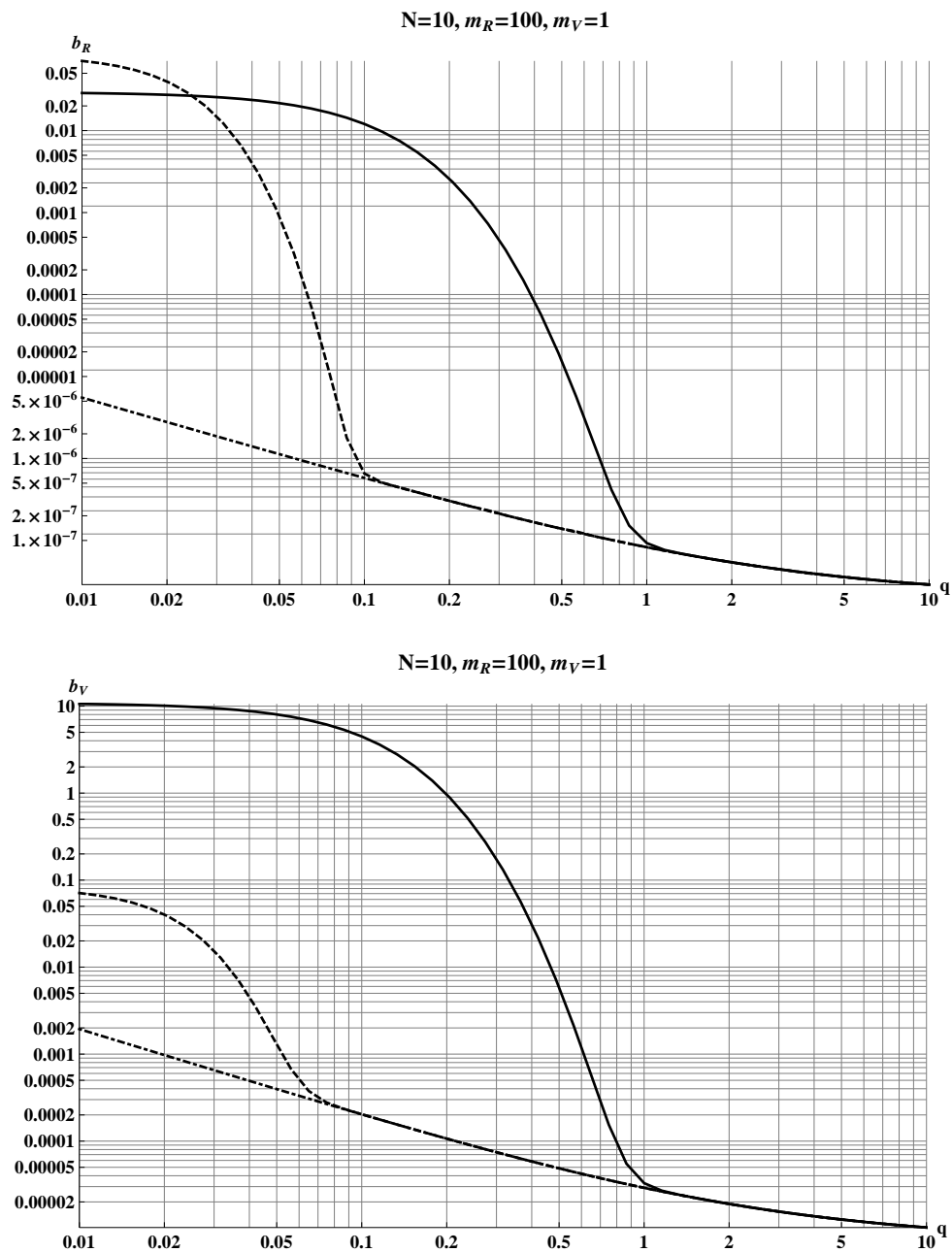


Рис. 3.3.6: Зависимость нормированных рассеяний (3.3.8) и (3.3.9), (3.3.10) и (3.3.11), (3.3.24) и (3.3.25) от q для квазиоптимального метода (сплошная линия), метода максимального правдоподобия (пунктирная линия) и совместно-эффективной оценки (штрих-пунктирная линия)

3.4 Статистическое моделирование алгоритма квазиоптимальных оценок дальности и скорости

Квазиоптимальный метод является асимптотически эффективным при условии совпадения форм интенсивностей принимаемых и ожидаемых импульсов, а также интенсивностей принимаемого и ожидаемого шумов. Тем не менее, некоторые выкладки, связанные с исследованием этого метода, использовали приближенные формулы. В связи с этим в настоящем параграфе приводятся результаты статистического моделирования, позволяющие судить о границах применимости квазиоптимального метода и близости его характеристик к эффективным. По поводу общих принципов статистического моделирования см. [14, 16, 46, 100, 116].

Вначале опишем результаты статистического моделирования оценок времен прихода отдельных импульсов, позволяющие судить о границах применимости полученных характеристик этих оценок.

Чтобы не переписывать заново формулы из § 3.3, сохраним в обозначениях фиктивный индекс k , означающий номер импульса. Рассмотрим сигнал, состоящий из одного импульса:

$$s_0(t - \lambda_{0k}).$$

Для простоты будем считать, что временное положение $\lambda_{0k} = 0$. Также будем считать, что при формировании решающей статистики (3.1.2) априорно известна форма сигнала $s_0(t)$ и уровень шума ν , так что оценки временных положений являются оценками максимального правдоподобия.

В соответствии с формулой (3.3.19) нормированное рассеяние оценки временного положения при условии, что середина априорного интервала совпадает с $\lambda_{0k} = 0$, задается формулой

$$b_\lambda(\lambda_{0k}) = \frac{B(\hat{\lambda}|\lambda_{0k})}{\Delta\Lambda_{kpr}^2} = P_{0k} \frac{\tau^2}{\mu_S q \beta^2 \Delta\Lambda_{kpr}^2} + \frac{1 - P_{0k}}{12}, \quad (3.4.1)$$

где P_{0k} задается формулой (3.2.10), а входящие в нее величины — формулами (3.3.16).

Целью статистического моделирования оценок времен прихода импульсов являлось построение графиков зависимости условного рассеяния $b_\lambda(\lambda_{0k})$ (3.4.1) от параметра $q \in [0.01; 10]$, нормированного с использованием значения $\lambda_{0k} = \Lambda_{kpr} = (\Lambda_{k\min} + \Lambda_{k\max})/2$, при различных значениях

параметра $\Delta\Lambda_{kpr}$, а также μ_S . Величина $b_\lambda(\lambda_{0k})$ находилась как по формуле (3.4.1), так и путем статистического моделирования. Вычисления проводились по следующему алгоритму.

1. Задаются константы μ_S (см. формулу (3.3.2), в большинстве проводившихся экспериментов использовалось значение $\mu_S = 100$), $m_\lambda = \Delta\Lambda_{kpr}/\tau$ (обычно использовались значения -20 и 200 для удобства сравнения с оценками дальности и скорости, в которых $\Delta\Lambda_{kpr}$ имеет такой порядок) и $q \in [0.01; 10]$.

Рассматривается импульс, форма интенсивности которого задается формулой Гаусса

$$f_0(x) = \exp(-\pi x^2/2).$$

Для такого импульса эквивалентная длительность $\int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx$ равна 1. Рассматриваемые сигналы выражаются через f_0 по формуле $s_0(t) = s_1(t) = a f_0(t/\tau)$. Будем пользоваться заменой $x = t/\tau$. Импульс $f_0(x)$ считается пренебрежимо малым вне отрезка $[-2, 2]$, поэтому там его значения заменяются нулями.

Считается, что длина априорного интервала $[\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$ равна $\Delta\Lambda_{kpr}$, а середина $-\Lambda_{kpr} = 0$. Тем самым $[\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}] = [-\Delta\Lambda_{kpr}/2, \Delta\Lambda_{kpr}/2]$.

2. Формулу (3.1.2) для решающей статистики перепишем в виде (второй интеграл, являющийся константой, отброшен):

$$L_k(\lambda_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + q f_0\left(\frac{t - \lambda_k}{\tau}\right)\right) d\pi(t).$$

Или после замены $y = t/\tau$:

$$L_k(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + q f_0(y - h)) d\pi(\tau y),$$

где $h = \lambda_k/\tau$. Или после еще одной замены $x = y - h$:

$$L_k(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + q f_0(x)) d\pi(\tau(x - h)). \quad (3.4.2)$$

Задается шаг дискретизации $\Delta x = 1/25$ изменения переменной x . Интегральной суммой для решающей статистики (3.4.2) является сумма

$$L_k(h) \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ln(1 + q f_0(x_i)) \Delta\pi(\tau(x_i - h)),$$

где $x_i = i \cdot \Delta x$ меняется с шагом Δx . Учитывая, что $f_0(x) = 0$ при $|x| > 2$, а $\Delta x = 1/25$, в этой сумме ненулевыми могут быть только 101 центральных слагаемых, и ее можно заменить на сумму

$$L_k(h) \approx \sum_{i=-50}^{50} \ln(1 + qf_0(x_i)) \Delta\pi(\tau(x_i - h)). \quad (3.4.3)$$

Следовательно, значения $\ln(1 + qf_0(x_i))$ достаточно вычислить для i от -50 до 50 , а значения $\Delta\pi(\tau x_i - h)$ — для x_i из интервала $[-\Lambda_{\max}, -\Lambda_{\min}] = [\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$, в котором изменяется $-h$, расширенного на величину возможного изменения x_i , т.е. для x_i из интервала $[\Lambda_{\min} - 2, \Lambda_{\max} + 2]$.

Вернемся к вычислениям. Формируется массив значений

$$g[i] = \ln(1 + q \cdot f_0(i \cdot \Delta x))$$

функции $\ln(1 + qf_0(x))$, входящей в сумму (3.4.3).

Далее на расширенном априорном интервале $[\Lambda_{\min} - 2, \Lambda_{\max} + 2]$ с шагом Δx формируются значения $input[i]$ пуассоновской случайной величины с интенсивностью $\Delta\pi(\tau x_i)$, соответствующей некоторой принимаемой реализации π , формируемой с помощью генератора случайных чисел. Чтобы вывести формулу для интенсивности $\Delta\pi(\tau x_i)$, заметим, что при увеличении аргумента x в формуле (3.4.2) на величину Δx аргумент принимаемой реализации $\pi(\tau x)$ увеличивается на $\tau \Delta x$. Поэтому соответствующее приращение $\Delta\pi(\tau x)$ представляет собой пуассоновскую случайную величину с интенсивностью

$$(s_0(t) + \nu)\tau\Delta x = (a\tau f_0(x) + \frac{a\tau}{q})\Delta x = (\mu_S f_0(x) + \mu_S/q)\Delta x$$

(подразумевается, что x меняется дискретно и тем самым имеет вид $x = i \cdot \Delta x$). Поэтому в качестве значений $input[i]$ берутся числа

$$(\mu_S f_0(i \cdot \Delta x) + \mu_S/q)\Delta x.$$

Они соответствуют количеству фотоэлектронов принимаемой реализации пуассоновского процесса с интенсивностью $a f_0(x) + \nu$ за нормированное время Δx .

Обратим внимание на то, что индекс i в массиве $g[i]$ меняется в интервале $[-50, 50]$ и обеспечивает изменение аргумента подынтегральной функции решающей статистики в пределах $[-2, 2]$, в то время как индекс i в массиве $input[i]$ меняется в большем интервале $[(\Lambda_{\min} - 2)/\Delta x, (\Lambda_{\max} +$

2)/ Δx] и обеспечивает изменение аргумента x пуассоновского случайного процесса, описывающего принимаемую реализацию, в интервале $[\Lambda_{\min} - 2, \Lambda_{\max} + 2]$.

3. В точках априорного интервала $[\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$ с шагом Δx (это приводит к тому, что сдвиг λ_k/τ меняется дискретно с тем же шагом Δx , что и выше) вычисляется массив значений $L[h]$ логарифма функционала отношения правдоподобия (3.4.2) для реализации пуассоновского случайного процесса $input[i]$, сформированного на предыдущем этапе, по формуле

$$L[h] = \sum_{i=-50}^{50} g[i] \cdot input[i - h].$$

представляющей собой формулу (3.4.3) во введенных обозначениях. Подчеркнем, что в ней значения индекса h меняются в пределах интервала $[\Lambda_{\min}/\Delta x, \Lambda_{\max}/\Delta x]$.

4. Ищется номер h_{\max} максимального значения массива $L[h]$ по h . Номер пересчитывается в безразмерное значение времени прихода:

$$l_{\max} = h_{\max} \cdot \Delta x.$$

5. Эксперимент повторяется $M = 1000$ раз и рассчитывается нормированное рассеяние по формуле (j — номер эксперимента)

$$b_\lambda = \frac{1}{M \Delta \Lambda_{k pr}^2} \sum_{j=0}^{M-1} (l_{\max}[j])^2.$$

6. В результате описанных вычислений для одного значения q получается одна точка на графике зависимости b_λ от q . Затем вычисления повторяются для следующего значения q . Поскольку масштаб на графиках взят логарифмический, на каждом шаге q увеличивается в $\sqrt[16]{10} \approx 1,15478$ раз, а не на некоторую величину Δq (конкретное значение $\sqrt[16]{10}$ выбрано из тех соображений, чтобы на графике присутствовало достаточное количество точек). Начальное значение — $q = 0.01$, конечное значение — $q = 10$.

7. Строятся графики, см. ниже рис. 3.4.7–3.4.12. Для сравнения на графиках также изображаются теоретические рассеяния.

Итак, результаты статистического моделирования приведены на рис. 3.4.7–3.4.12. На них точками изображены графики зависимостей условного нормированного рассеяния (3.4.1) от отношения сигнал-фон q . Сплошной линией изображена теоретическая зависимость для квазиоптималь-

ного метода с учетом аномальной ошибки, пунктирной — для надежной оценки, а точками — показаны результаты моделирования.

Объем M экспериментальной выборки в зависимости от значений параметров q , μ_S и m_R варьировался в интервале от 10^3 до $5 \cdot 10^3$ реализаций. Эти значения M обеспечивают среднеквадратичную погрешность экспериментальных данных в пределах $10 \dots 20\%$.

На рис. 3.4.7 и 3.4.8 среднее число фотоэлектронов на интервале, равном эквивалентной длительности импульса, $\mu_S = 100$. Из рис. 3.4.7 и 3.4.8 видно, что при достаточно большом μ_S легко определить пороговое значение отношения сигнал-фон q , при превышении которого влиянием аномальных ошибок можно пренебречь. При этих условиях (при $\mu_S > 100$) результаты моделирования близки к теоретическим как в области аномальных оценок, так и в области надежных оценок.

Из рис. 3.4.9 видно, что при уменьшении μ_S требуется значительное увеличение уровня сигнал-фон для возможности пренебрежения влиянием аномальных ошибок. Отметим, что при отношениях сигнал-фон, близких к пороговым ($q > 20$), но все еще находящимся в области аномальных ошибок, вероятность аномальной ошибки очень мала, тем не менее влияние аномальной ошибки все еще ощутимо. Поэтому в этой области результаты моделирования близки к теоретическим результатам для надежной оценки.

На рис. 3.4.10–3.4.12 показаны результаты моделирования для очень малых μ_S . Эти значения μ_S соответствуют случаю, когда не выполняются предположения, сделанные при выводе теоретических формул для характеристик оценок. Эти рисунки показывают, что результаты моделирования не соответствуют теоретическим расчетам. Как видим, в области существенного влияния аномальных ошибок ($q < 0,5$) результаты моделирования все же близки к теоретическим, однако это объясняется тем, что как теоретические формулы, так и моделирование описывают равномерное распределение в априорном интервале. Таким образом, моделирование показывает, что пользоваться полученными теоретическими формулами при $\mu_S < 10$ не следует.

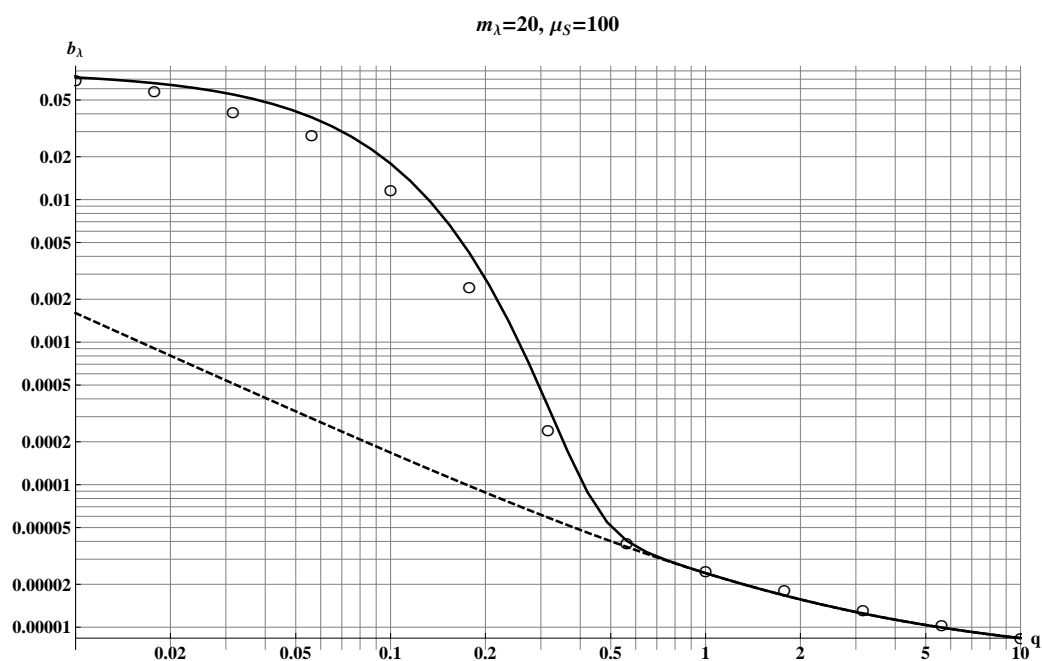


Рис. 3.4.7: Зависимость нормированных рассеяний времен прихода импульса от q , полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формула (3.4.1)), а пунктирной — для совместно-эффективных оценок

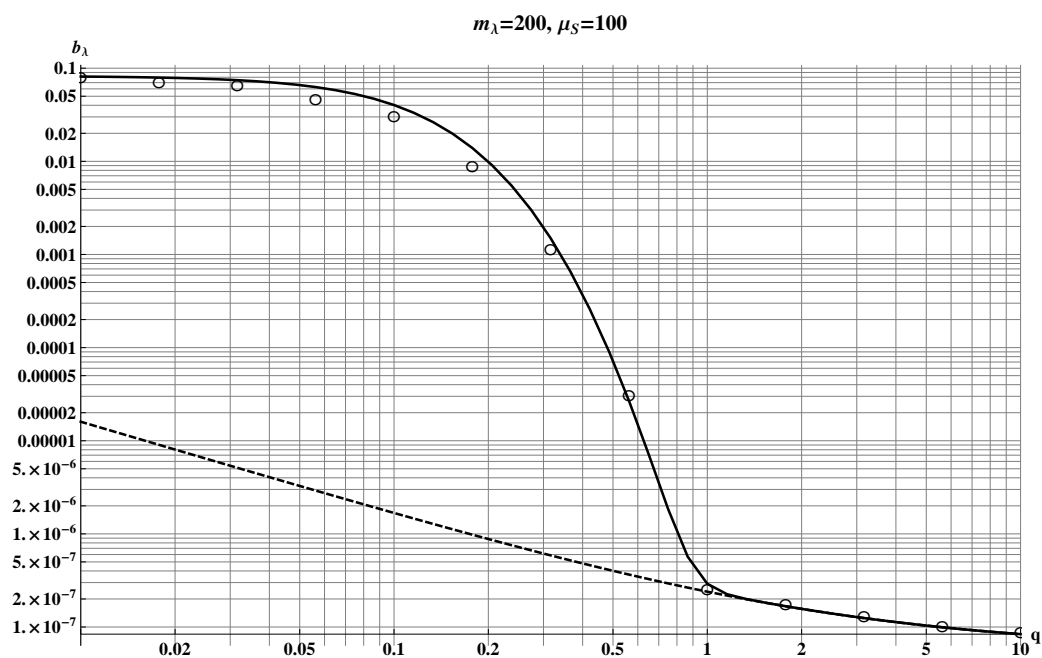


Рис. 3.4.8: Зависимость нормированных рассеяний времен прихода импульса от q , полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формула (3.4.1)), а пунктирной — для совместно-эффективных оценок

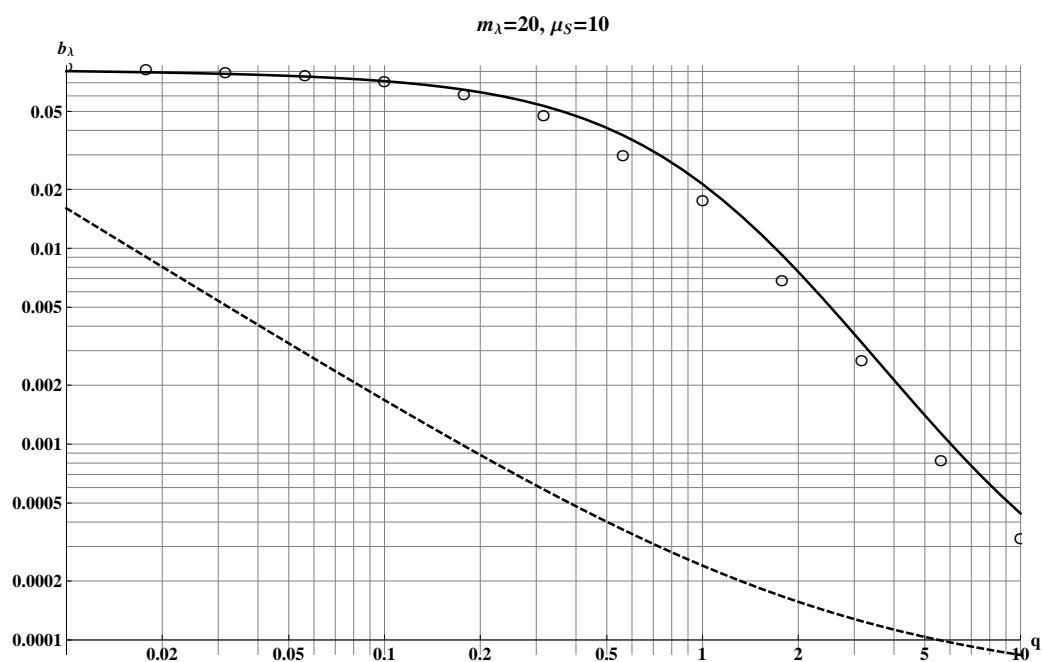


Рис. 3.4.9: Зависимость нормированных рассеяний времен прихода импульса от q , полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формула (3.4.1)), а пунктирной — для совместно-эффективных оценок

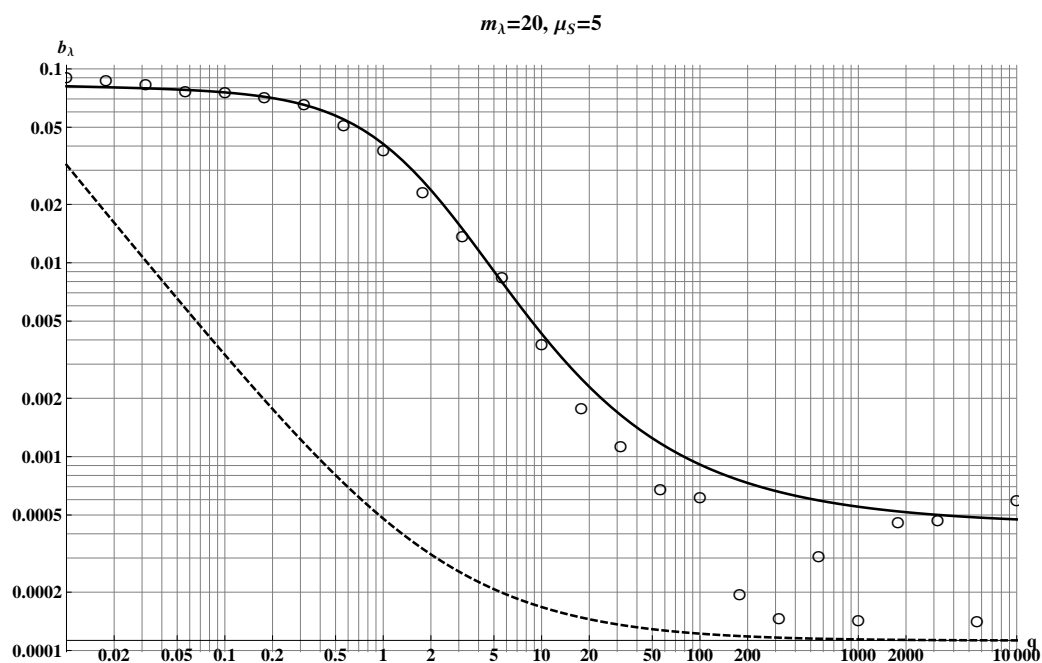


Рис. 3.4.10: Зависимость нормированных рассеяний времен прихода импульса от q , полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формула (3.4.1)), а пунктирной — для совместно-эффективных оценок. Проводилось 1000 экспериментов. Все точки вычислялись при $\Delta x = 1/25$

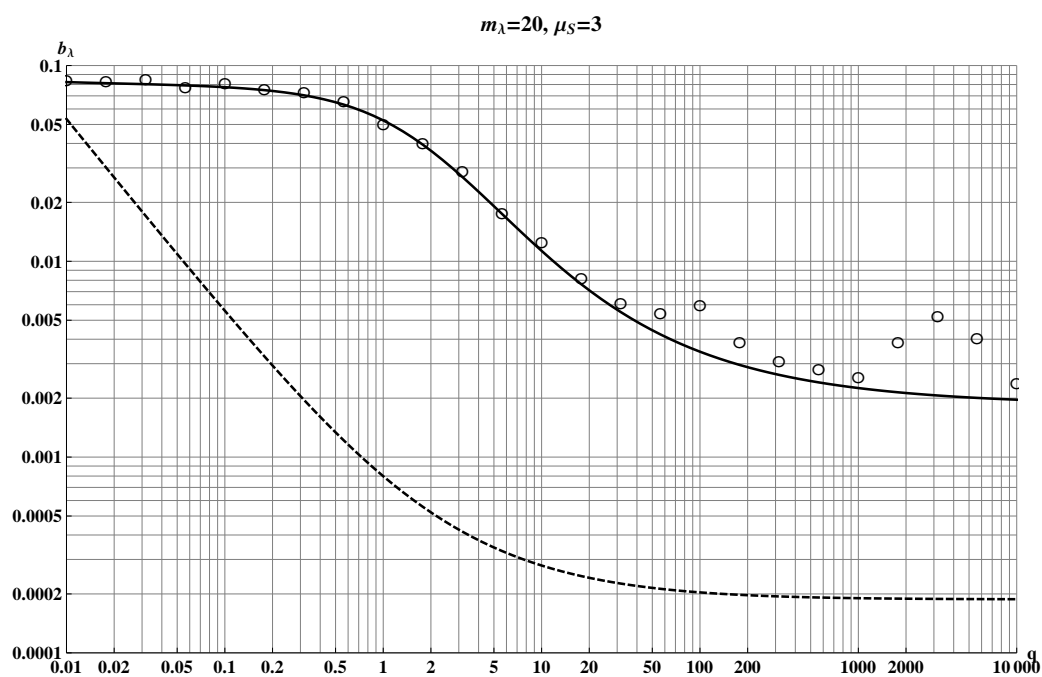


Рис. 3.4.11: Зависимость нормированных рассеяний времен прихода импульса от q , полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формула (3.4.1)), а пунктирной — для совместно-эффективных оценок

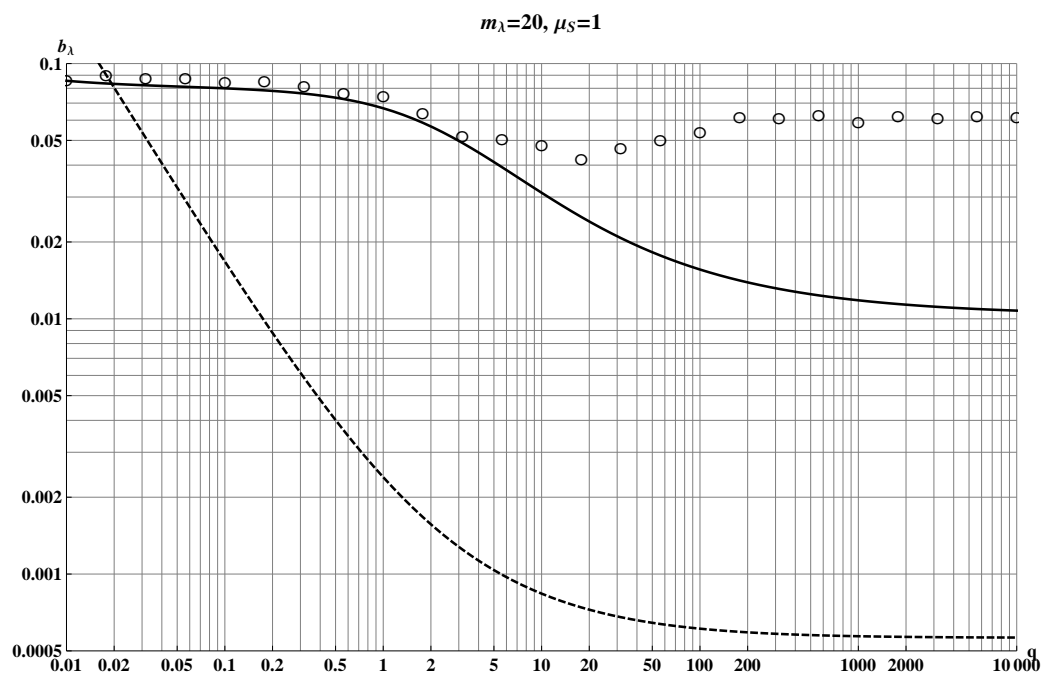


Рис. 3.4.12: Зависимость нормированных рассеяний времен прихода импульса от q , полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формула (3.4.1)), а пунктирной — для совместно-эффективных оценок

Перейдем к описанию статистического моделирования квазиоптимальных оценок дальности и скорости. Целью этого моделирования являлось построение графиков зависимостей нормированных условных рассеяний квазиоптимальных оценок (3.3.24) и (3.3.25) при условии $R_0 = R_{pr}$, $V_0 = V_{pr}$, от параметра $q \in [0.01; 10]$ при различных значениях параметров N , m_R и m_V , а также μ_S . При этом величины b_R и b_V находились как по формулам (3.3.24) и (3.3.25), так и путем статистического моделирования. Вычисления проводились по следующему алгоритму.

1. Вычисляются константы M_ν (1.1.13):

$$\begin{aligned} M_0 &= N, & M_1 &= N(-1 + N - 2\mu)/2, \\ M_2 &= N(1 + 2N^2 + 6\mu + 6\mu^2 - 3N(1 + 2\mu))/6. \end{aligned}$$

Задаются константы N (используемые значения — 2 и 10), $\mu = 0$ (см. формулу (1.1.1)), μ_S (см. формулу (3.3.2)), обычно используется значение $\mu_S = 100$), m_R (используемые значения — 10 и 100) и m_V (используемые значения — 0,5 и 1), $R_0 = R_{pr} = 0$ и $V_0 = V_{pr} = 0$, и $q \in [0.01; 10]$.

Рассматривается сигнал, для которого форма интенсивности отдельного импульса задается формулой Гаусса

$$f_0(x) = \exp(-\pi x^2/2).$$

Для такого импульса эквивалентная длительность $\int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx$ равна 1. Рассматриваемые сигналы выражаются через f_0 по формуле $s_0(t) = s_1(t) = af_0(t/\tau)$. Будем пользоваться заменой $x = t/\tau$. Импульс $f_0(x)$ считается пренебрежимо малым вне отрезка $[-2, 2]$, поэтому там его значения заменяются нулями.

Нормированная длина априорного интервала оказывается равной

$$m_{k\lambda} = \Delta\Lambda_{kpr}/\tau = 2\Delta R_{pr}/(c\tau) + 2k\Delta V_{pr}\vartheta/(c\tau) = 2m_R + 2k \cdot m_V.$$

Середины и границы нормированных априорных интервалов вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Xi[k] &= \Lambda[k]/\tau = k\vartheta/\tau, \\ \Xi_{\min}[k] &= \Lambda_{\min}[k]/\tau = \Xi[k] - m_R - k \cdot m_V, \\ \Xi_{\max}[k] &= \Lambda_{\max}[k]/\tau = \Xi[k] + m_R + k \cdot m_V. \end{aligned}$$

Для удобства обозначений одновременно рассмотрим центрированный априорный интервал

$$\begin{aligned} [\Xi'_{\min}[k], \Xi'_{\max}[k]] &= [\Xi_{\min}[k] - \Xi[k], \Xi_{\max}[k] - \Xi[k]] = \\ &= [-m_R - k \cdot m_V, m_R + k \cdot m_V]. \end{aligned}$$

2. Задается шаг дискретизации $\Delta x = 1/25$ изменения переменной x . Это приводит к тому, что на интервале наблюдения $[-2, 2]$ импульса $f_0(x)$ создается 101 отсчет. Формируется массив значений функции $\ln(1 + qf_0(x))$, входящей в решающую статистику (3.1.2):

$$g[i] = \ln(1 + q \cdot f_0(i \cdot \Delta x)).$$

Далее для каждого $k = 0, \dots, N - 1$ на расширенном центрированном априорном интервале $[\Xi'_{\min}[k] - 2, \Xi'_{\max}[k] + 2]$ с шагом Δx формируются значения $input[k, i]$ пуассоновской случайной величины с интенсивностью

$$(\mu_S f_0(i \cdot \Delta x) + \mu_S / q) \Delta x.$$

Числа $input[k, i]$ соответствуют количеству фотоэлектронов принимаемой реализации пуассоновского процесса с интенсивностью $af_0(x) + \nu$ за нормированное время Δx .

Обратим внимание на то, что индекс i в массиве $g[i]$ меняется в интервале $[-50, 50]$ и обеспечивает изменение аргумента подынтегральной функции решающей статистики в пределах $[-2, 2]$, в то время как индекс i в массиве $input[k, i]$ меняется в большем интервале $[(\Xi'_{\min}[k] - 2)/\Delta x, (\Xi'_{\max}[k] + 2)/\Delta x]$ и обеспечивает изменение аргумента пуассоновского случайного процесса, описывающего принимаемую реализацию, в расширенном центрированном интервале $[\Xi'_{\min}[k] - 2, \Xi'_{\max}[k] + 2]$.

3. На каждом центрированном интервале наблюдения $[\Xi'_{\min}[k], \Xi'_{\max}[k]]$ вычисляется массив значений логарифма функционала отношения правдоподобия для реализации пуассоновского случайного процесса, сформированного на предыдущем этапе:

$$L[k, h] = \sum_{i=-50}^{50} g[i] \cdot input[k, i - h].$$

Значения индекса h меняются в пределах $[\Xi'_{\min}[k]/\Delta x, \Xi'_{\max}[k]/\Delta x]$. Этот этап соответствует расчету решающей статистики для каждого отдельного импульса по формуле (3.1.2) в нормированных переменных (константа $-\int_{t_{k-1}}^{t_k} s_1(t - \lambda_k) dt$ отброшена).

4. Для каждого k ищется номер $h_{\max}[k]$ максимального значения массива $L[k, h]$ по h . Номер пересчитывается в безразмерное значение времени прихода (прибавление $\Xi[k]$ осуществляет переход от центрированного априорного интервала к обычному):

$$l_{\max}[k] = h_{\max}[k] \cdot \Delta x + \Xi[k].$$

После этого находятся оценки \widehat{R} и \widehat{V} по формулам (3.3.13):

$$\widehat{R} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{M_1 k - M_2}{2(M_1^2 - M_0 M_2)} l_{\max}[k],$$

$$\widehat{V} = \frac{1}{Q} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{M_1 - M_0 k}{2(M_1^2 - M_0 M_2)} l_{\max}[k] - \frac{1}{2},$$

где $Q = \vartheta/\tau$. Отметим, что это оценки не непосредственно дальности и скорости, а нормированных дальности и скорости.

5. Эксперимент повторяется $M \geq 1000$ раз и рассчитываются рассеяния по формулам (j — номер эксперимента)

$$b_R = \frac{1}{M m_R^2} \sum_{j=0}^{M-1} (\widehat{R}[j])^2,$$

$$b_V = \frac{1}{M m_V^2} \sum_{j=0}^{M-1} (\widehat{V}[j])^2.$$

6. В результате описанных вычислений для одного значения q получается по одной точке на графиках зависимости b_R и b_V от q . Затем вычисления повторяются для следующего значения q . На каждом шаге q увеличивается в $\sqrt[16]{10} \approx 1,15478$ раз. Начальное значение — $q = 0.01$, конечное значение — $q = 10$.

7. Строятся графики, см. ниже рис. 3.4.13–3.4.17. На этих же графиках для сравнения изображаются теоретические рассеяния.

Результаты статистического моделирования приведены на графиках ниже. На рис. 3.4.13–3.4.19 изображены графики зависимостей нормированных условных рассеяний от отношения сигнал-фон q . Сплошной линией изображена теоретическая зависимость для квазиоптимального метода с учетом аномальной ошибки, пунктирной — для оценки максимального правдоподобия с учетом аномальной ошибки, штрих-пунктирной — для совместно-эффективной оценки, а точками на графике изображены результаты моделирования.

На рис. 3.4.13–3.4.17 вычисления проводились для $\mu_S = 100$. Как правило, для построения одной точки выполнялось $M = 1000$ экспериментов. Для точек, в которых влияние пороговых эффектов является существенным, число экспериментов увеличивалось до $M = 5000$, чтобы сделать порядок экспериментов, в которых реализуются аномальные ошибки, не меньшим 100.

Из сопоставления рис. 3.4.13 и 3.4.14 видно, что увеличение априорного интервала возможных значений скорости m_V почти не влияет на точности оценок дальности и точность надежных оценок скорости, а влияет только на точность оценок скорости в области аномальных ошибок.

Из сопоставления рис. 3.4.13 и 3.4.16, а также 3.4.15 и 3.4.17 видно, что увеличение количества импульсов в зондирующей последовательности приводит к увеличению точности оценок. Особенно существенно увеличивается точность оценок скорости.

Из сопоставления рис. 3.4.13 и 3.4.15 видно, что увеличение априорного интервала возможных значений дальности m_R не приводит к изменению надежных характеристик. Однако увеличение априорного интервала возможных значений дальности несколько увеличивает область пороговых явлений.

На рис. 3.4.18 и 3.4.19 показаны результаты вычислений при среднем количестве фотоэлектронов в одном принимаемом импульсе $\mu_S = 10$ и $\mu_S = 5$ соответственно. Эти графики демонстрируют границы применимости предположений, на которых основана теория. Как видим, моделирование перестает соответствовать теории уже при среднем количестве фотоэлектронов $\mu_S = 10$. Это же явление наблюдалось в случае оценки временного положения одного импульса. Кроме того видно, что при уменьшении μ_S пороговое значение отношения сигнал-фон увеличивается.

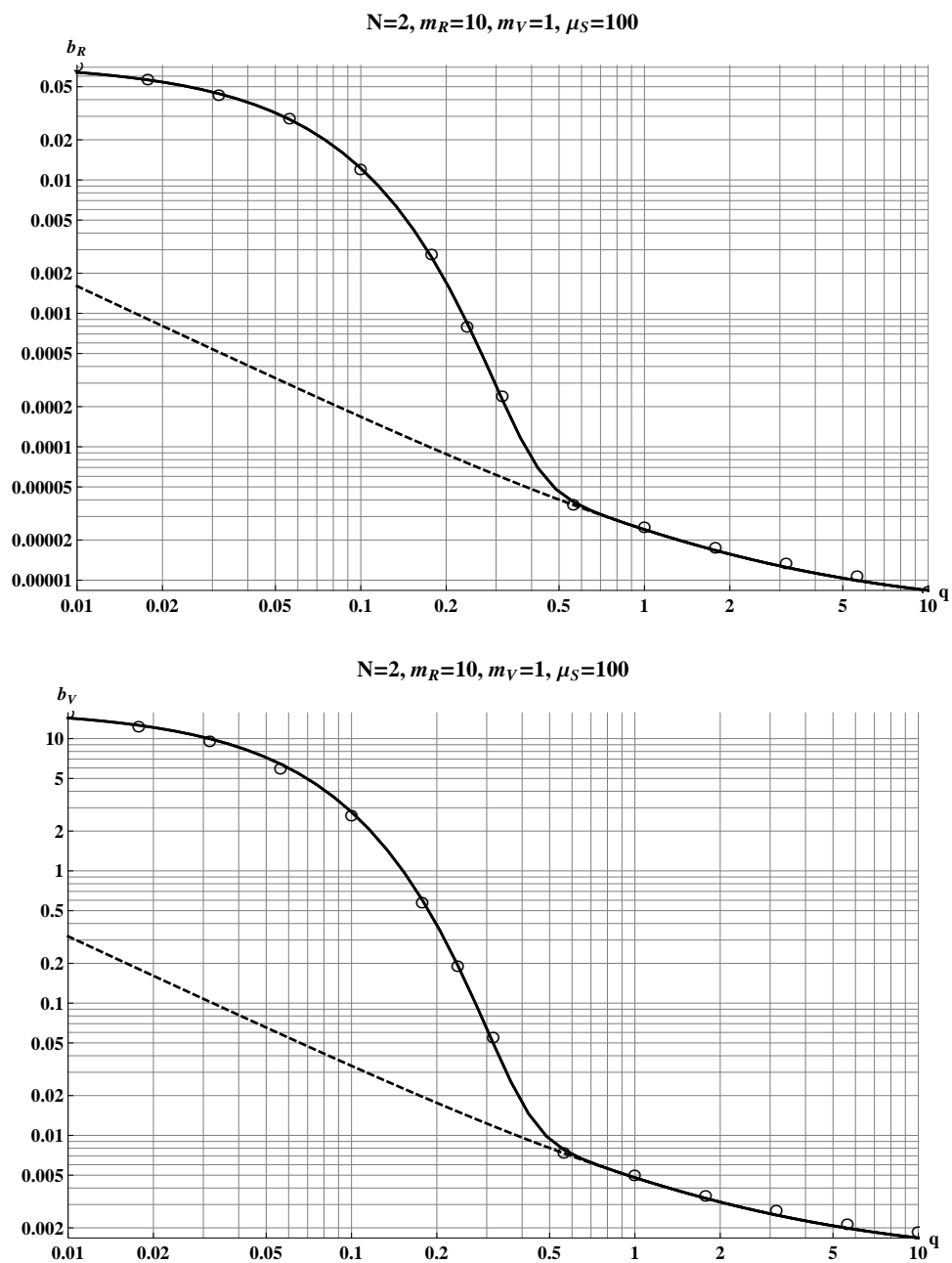


Рис. 3.4.13: Зависимость нормированных рассеяний b_R и b_V от q для квазиоптимального метода, полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формулы (3.3.24) и (3.3.25)), а штрих-пунктирной — для совместно-эффективных оценок

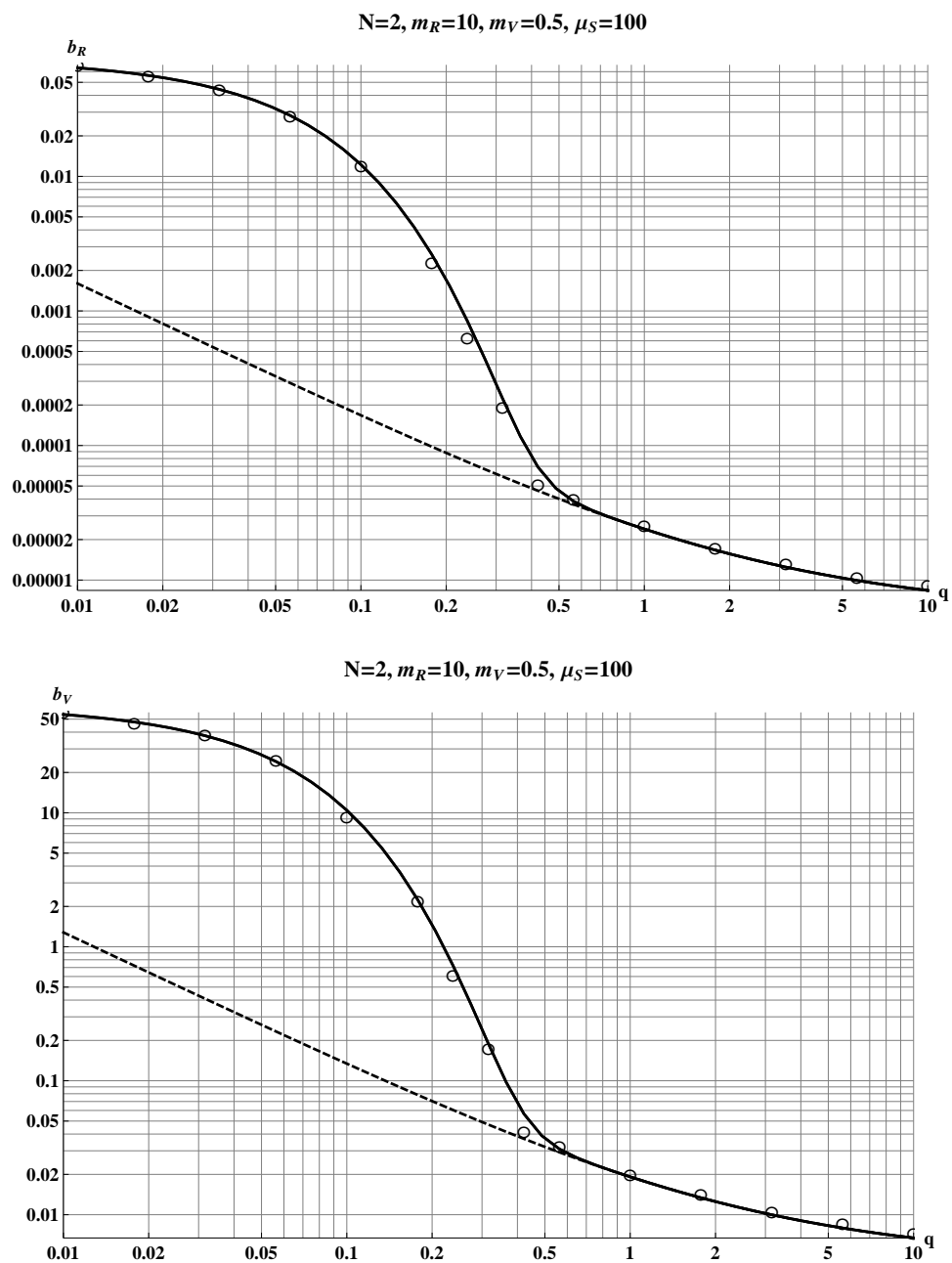


Рис. 3.4.14: Зависимость нормированных рассеяний b_R и b_V от q для квазиоптимального метода, полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формулы (3.3.24) и (3.3.25)), а штрих-пунктирной — для совместно-эффективных оценок

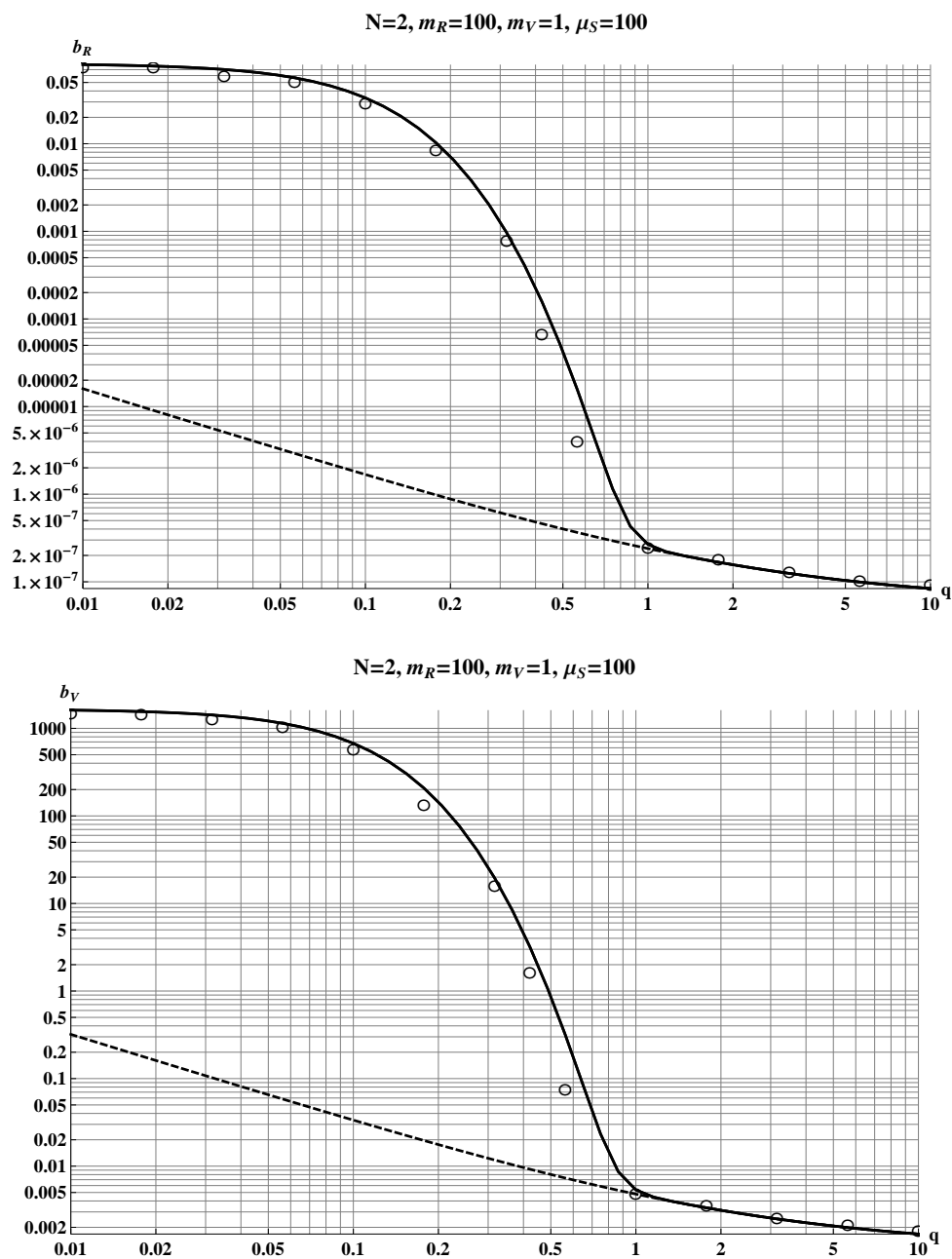


Рис. 3.4.15: Зависимость нормированных рассеяний b_R и b_V от q для квазиоптимального метода, полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формулы (3.3.24) и (3.3.25)), а штрих-пунктирной — для совместно-эффективных оценок

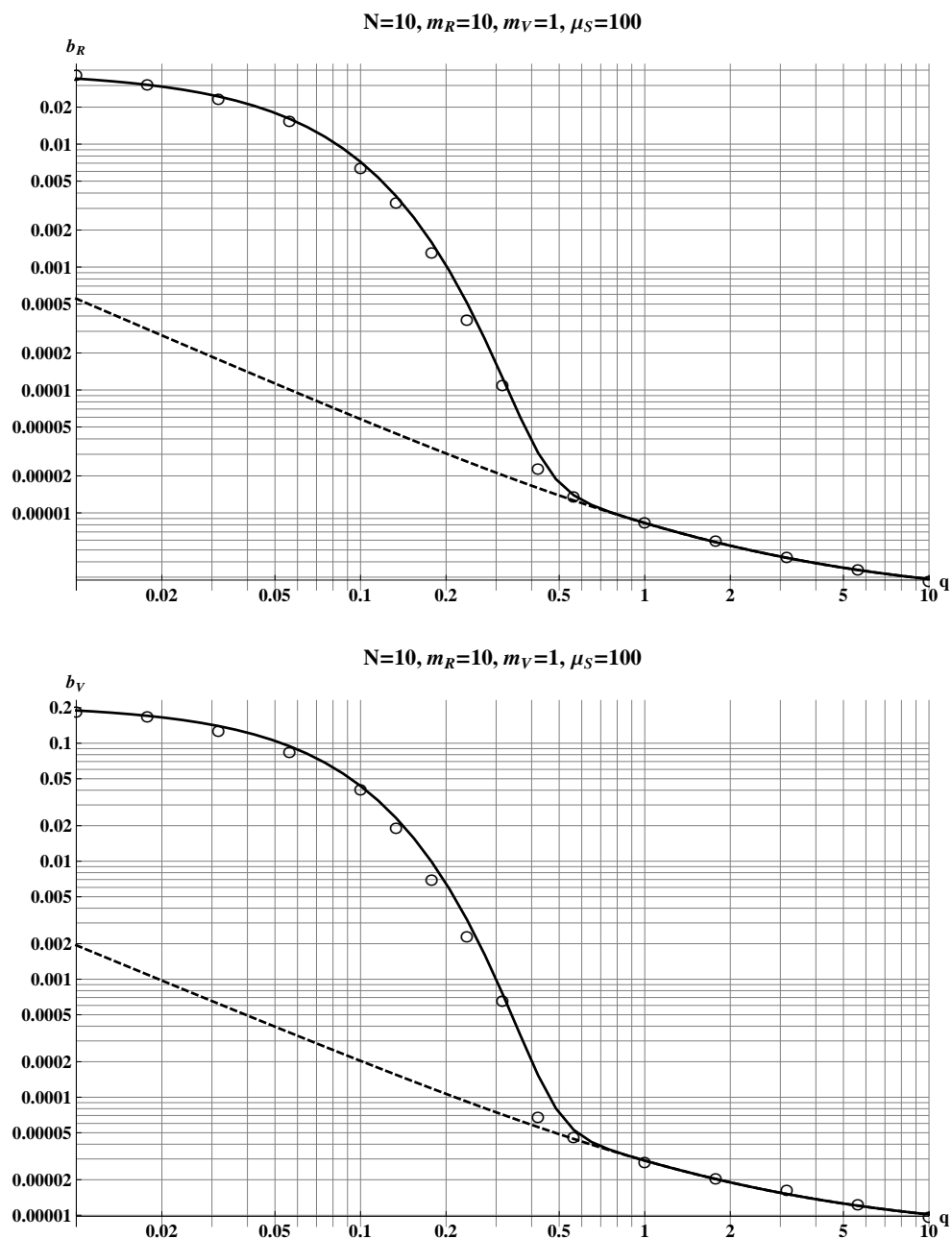


Рис. 3.4.16: Зависимость нормированных рассеяний b_R и b_V от q для квазиоптимального метода, полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формулы (3.3.24) и (3.3.25)), а штрих-пунктирной — для совместно-эффективных оценок

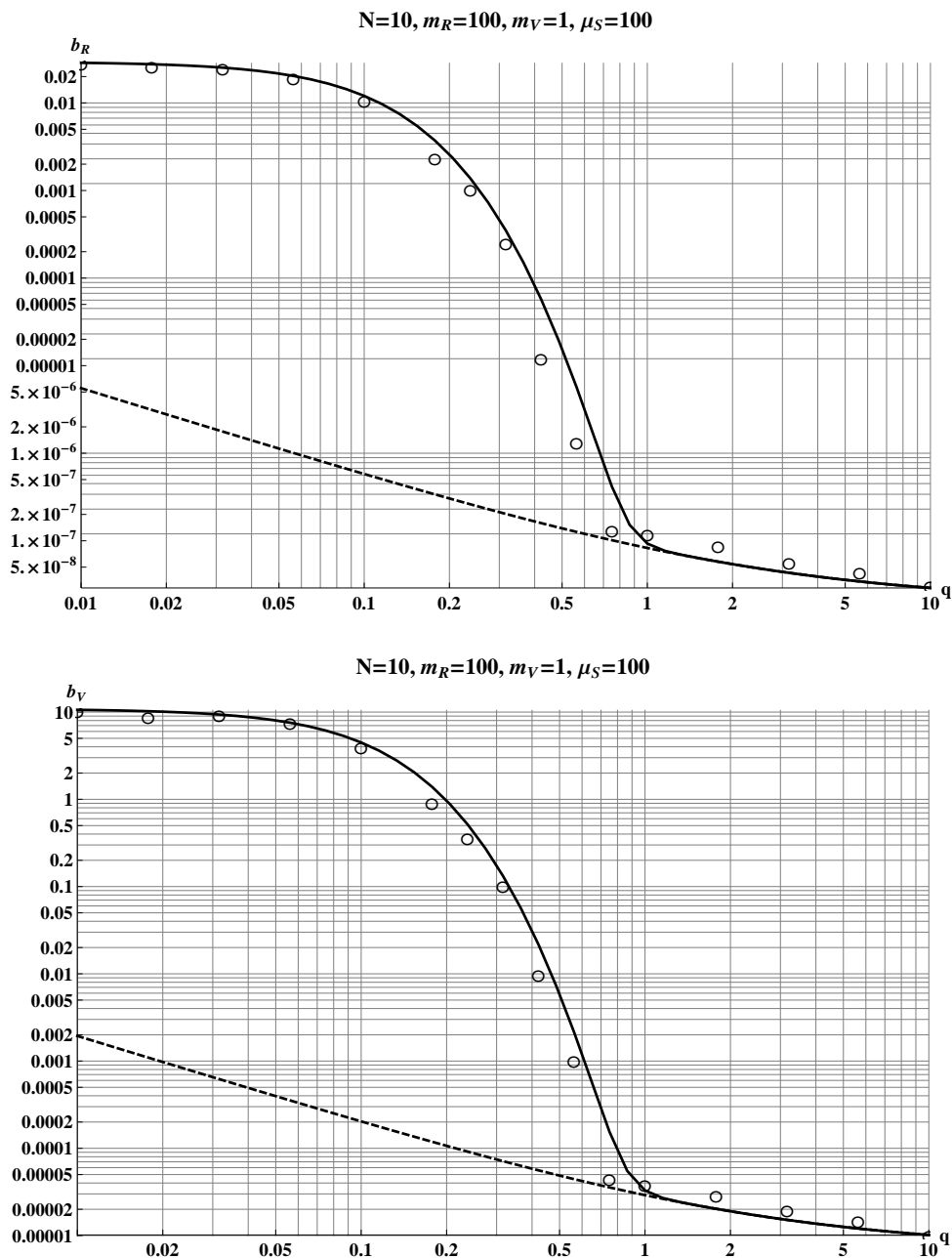


Рис. 3.4.17: Зависимость нормированных рассеяний b_R и b_V от q для квазиоптимального метода, полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формулы (3.3.24) и (3.3.25)), а штрих-пунктирной — для совместно-эффективных оценок

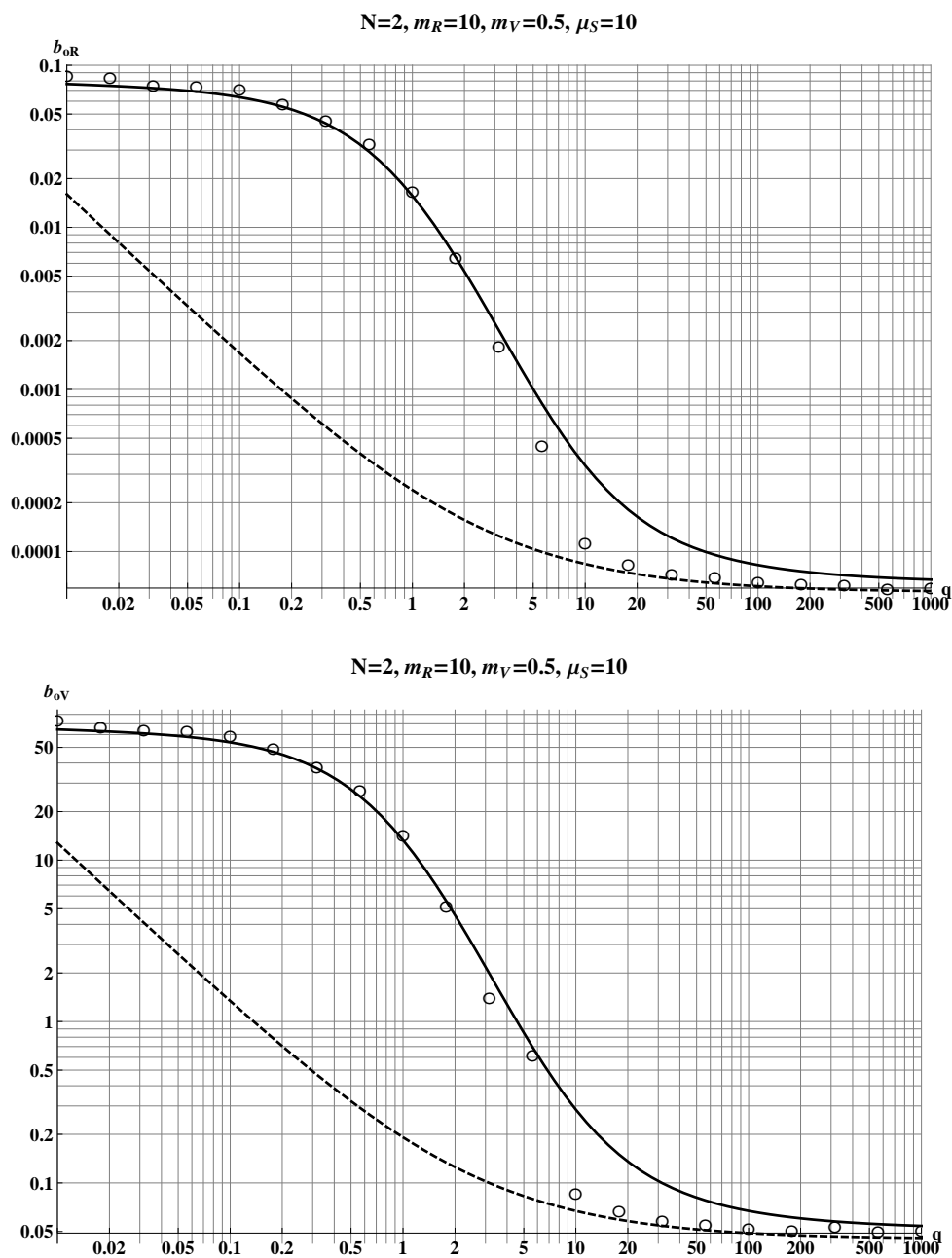


Рис. 3.4.18: Зависимость нормированных рассеяний b_R и b_V от q для квазиоптимального метода, полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формулы (3.3.24) и (3.3.25)), а штрих-пунктирной — для совместно-эффективных оценок

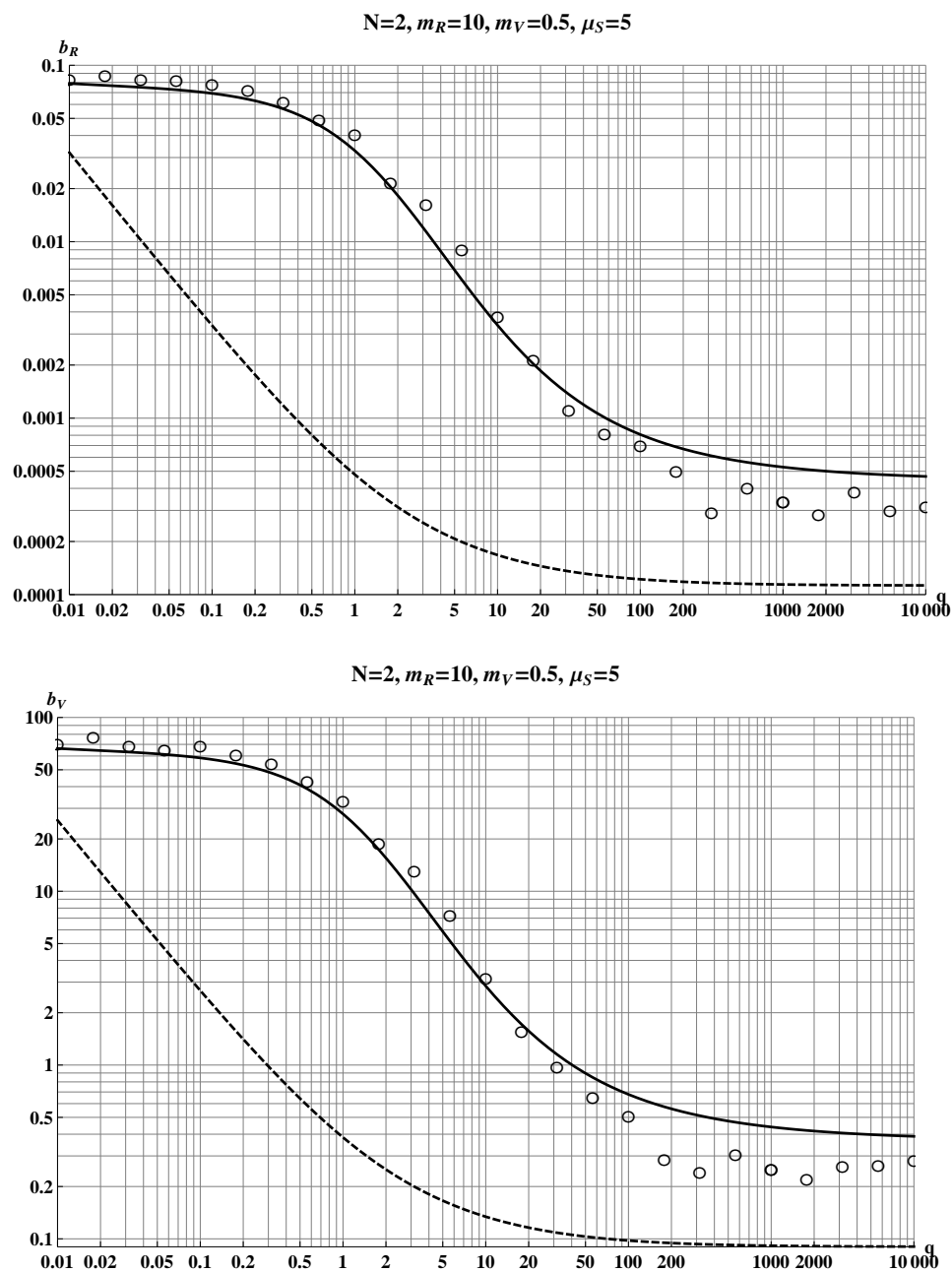


Рис. 3.4.19: Зависимость нормированных рассеяний b_R и b_V от q для квазиоптимального метода, полученная в результате статистического моделирования (кружки). Сплошной линией показаны теоретические зависимости с учетом аномальных ошибок (формулы (3.3.24) и (3.3.25)), а штрих-пунктирной — для совместно-эффективных оценок

3.5 Основные результаты и выводы

1. Предложен квазиоптимальный алгоритм оценки параметров движения на основе оценок временных положений отдельных импульсов рассеянной последовательности. С учетом аномальных ошибок найдены характеристики квазиоптимальных оценок дальности, скорости и ускорения, синтезированных для предполагаемой формы интенсивности импульсов, в общем случае отличающейся от действительной формы принимаемых импульсов. С целью исследования границ применимости квазиоптимального алгоритма проведено статистическое моделирование.

2. Квазиоптимальный алгоритм наиболее просто аппаратно реализуем по сравнению с остальными алгоритмами, рассмотренными в настоящей диссертации, так как для него необходим только один согласованный фильтр, настроенный на форму интенсивности одного импульса последовательности и не требуется применение линий задержки.

3. Результаты моделирования показали, что характеристики квазиоптимальных оценок удовлетворительно описываются теоретическими формулами при среднем количестве не менее 10 фотоэлектронов, принимаемых в течение длительности одного импульса.

4. Показано, что характеристики надежной квазиоптимальной оценки совпадают с характеристиками надежной квазиправдоподобной оценки. Следовательно, потерь точности за счет использования квазиоптимального алгоритма в условиях отсутствия аномальных ошибок не происходит. Поэтому если форма интенсивности принимаемого и ожидаемого импульсов совпадают, квазиоптимальная оценка является асимптотически эффективной.

5. Для того чтобы характеристики точности квазиоптимальных оценок были близки к характеристикам точности эффективных оценок, необходимо обеспечить большие значения отношения сигнал-шум для каждого импульса, а не просто большие значения отношения сигнал-шум для всей последовательности, как это требуется для алгоритма максимального правдоподобия. Поэтому обеспечение высокой апостериорной точности квазиоптимальных оценок предполагает существенно большую энергию полезного сигнала.

6. Квазиоптимальный алгоритм оценки параметров движения можно использовать в существующих высокоточных лазерных дальномерах для обработки результатов измерения с целью получения дополнительной информации о скорости и ускорении цели.

7. При малых отношениях сигнал-шум для отдельных импульсов, то есть в пороговой области, квазиоптимальная оценка по точности может существенно проигрывать оценке максимального правдоподобия.

Заключение

Работа посвящена синтезу и анализу алгоритмов оценок дальности, скорости и ускорения при зондировании последовательностью оптических импульсов. Получены характеристики точности для совместно-эффективных оценок дальности, скорости и ускорения, а также для оценок, полученных на основе алгоритма максимального правдоподобия, квази-правдоподобного и квазиоптимального алгоритмов. Найдены характеристики совместно-эффективных оценок и оценок максимального правдоподобия в условиях параметрической априорной неопределенности как для медленных, так и для быстрых флуктуаций цели. Характеристики точности квазиправдоподобных и квазиоптимальных оценок определены с учетом аномальных ошибок. Для квазиоптимального алгоритма проведено сопоставление теоретических характеристик оценок параметров движения с экспериментальными, полученными на основе статистического моделирования.

Итогом работы стали следующие результаты.

1. Получены общие выражения для характеристик совместно-эффективных оценок дальности, скорости и ускорения медленно и быстро флуктуирующих целей при наличии конечного числа произвольных неинформативных параметров. Показано, что оценки максимального правдоподобия параметров движения в условиях параметрической априорной неопределенности являются асимптотически эффективными для любого конечного числа регулярных неинформативных параметров.

2. С учетом аномальных ошибок найдены выражения для характеристик предложенного квазиправдоподобного алгоритма оценки, синтезированного для предполагаемой формы интенсивности импульса, в общем случае отличающейся от действительной формы принимаемого импульса.

3. Синтезирован квазиоптимальный алгоритм для получения оценок параметров движения на основе оценок временных положений отдельных импульсов рассеянной последовательности. С учетом аномальных ошибок найдены характеристики квазиоптимальных оценок дальности, скорости и ускорения, полученных для формы интенсивности импульсов, в общем случае не совпадающей с действительной формой принимаемых импульсов. Для нахождения границ применимости формул для характеристик квазиоптимального алгоритма проведено статистическое моделирование.

4. Исследована структура приемника, осуществляющего обработку принимаемой реализации методом максимального правдоподобия в условиях параметрической априорной неопределенности.

5. Установлено, что квазиправдоподобная оценка не обязательно является состоятельной и несмещенной, так как формы интенсивностей принимаемого и ожидаемого сигналов могут различаться. Найдены условия, при выполнении которых квазиправдоподобная оценка является состоятельной.

6. Проведено сравнение сложности структуры всех трех исследованных алгоритмов.

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Оценки максимального правдоподобия параметров движения при наличии конечного числа произвольных регулярных неинформативных параметров, как в условиях медленных флуктуаций, так и в условиях быстрых флуктуаций, являются асимптотически эффективными.

2. Для того чтобы характеристики точности оценок алгоритма максимального правдоподобия при медленных флуктуациях были близки к эффективным, необходимо обеспечивать большие значения отношения сигнал-шум, чего можно добиться, например, путем увеличения количества импульсов в последовательности.

3. Для достижения близости характеристик точности оценок максимального правдоподобия к эффективным в условиях быстрых флуктуаций, необходимо обеспечить большие значения отношения сигнал-шум для каждого импульса последовательности, что, очевидно, реализовать увеличением количества импульсов невозможно.

4. Наличие параметрической неопределенности приводит к необходимости усложнения аппаратной реализации устройства, осуществляющего обработку принимаемой реализации в соответствии с методом максимального правдоподобия, по сравнению с приемником, осуществляющим оценку максимального правдоподобия в условиях отсутствия параметрической априорной неопределенности.

5. Квазиправдоподобный приемник в условиях априорной параметрической неопределенности проще аппаратно реализуем, чем приемник, осуществляющий оценку максимального правдоподобия. При этом квазиправдоподобные оценки в общем случае могут быть несостоятельными.

6. Так как достаточные условия состоятельности оценок, накладываемые на форму интенсивности принимаемого и ожидаемого сигналов,

являются довольно простыми, при аппаратурной реализации квазиправдоподобного и квазиоптимального алгоритмов их следует учитывать.

7. Надежная квазиоптимальная оценка обладает такими же характеристиками, что и надежная квазиправдоподобная оценка, но при этом предполагает более простую аппаратурную реализацию. Поэтому в условиях высоких отношений сигнал-шум для каждого импульса последовательности, предпочтительнее использовать квазиоптимальную оценку.

8. В области аномальных ошибок квазиоптимальная оценка может существенно проигрывать в точности квазиправдоподобной оценке.

9. Квазиоптимальный алгоритм можно реализовать на основе обработки результатов последовательных измерений дальности высокоточными лазерными дальномерами, и тем самым получить дополнительную информацию о скорости и ускорении цели.

Полученные результаты имеют достаточно общий характер и могут быть использованы для обоснованного выбора между рассмотренными алгоритмами оценки параметров движения при различных ограничениях, накладываемых на условия приема и обработки сигнала: априорную неопределенность относительно формы сигнала, сложность аппаратурной реализации, требования к точности оценки, возможность использования существующих лазерных дальномеров, осуществляющих последовательные оценки дальности.

Литература

1. Адаптивная оптика / Под ред. Э.А. Витриченко. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
2. Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи / И.Н. Амиантов. — М.: Сов. радио, 1971. — 416 с.
3. Ахманов С.А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
4. Астафуров В.Г. О статистике фотоотсчетов в условиях непуассоновского потока фотоэлектронов / В.Г. Астафуров, Г.Н. Глазов. // Оптика и спектроскопия. — 1987. — Т. 62, № 2. — С. 296-301.
5. Астафуров В.Г. Потенциальная точность измерения скорости ветра когерентно-доплеровским лидаром / В.Г. Астафуров, Н.В. Тюхтева // Оптика атмосферы. — 1989. — Т. 2, № 4. — С. 415-421.
6. Астанин Л.Ю. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений / Л.Ю. Астанин, А.А. Костылев — М.: Радио и связь, 1989. — 192 с.
7. Балакришнан А. Статистическая теория связи и ее приложения / А. Балакришнан. — М.: Мир, 1957. — 260 с.
8. Батраков А.С. Лазерные измерительные системы / А.С. Батраков, М.М. Бутусов, Г.П. Гречко и др. — М.: Радио и связь, 1981. — 456 с.
9. Богданкевич О.В. Полупроводниковые лазеры / О.В. Богданкевич, С.А. Дарзбек, П.Г. Елесев. — М.: Наука, 1976. — 416 с.
10. Богданович В.А. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В.А. Богданович, А.Г. Вострецов. — М.: Физматлит, 2003. — 320 с.

11. Большаков И.А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума / И.А. Большаков. — М.: Сов. радио, 1969. — 464 с.
12. Большаков И.А. Прикладная теория случайных потоков / И.А. Большаков, В.С. Ракошиц. — М.: Сов. радио, 1978. — 248 с.
13. Боровков А.А. Математическая статистика / А.А. Боровков. — М.: Физматлит, 2007. — 704 с.
14. Бусленко Н.П. Метод статистического моделирования / Н.П. Бусленко. — М.: Статистика, 1970. — 112 с.
15. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев — М.: Физматгиз, 2003. — 408 с.
16. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков. — М.: Сов. радио, 1971. — 326 с.
17. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Г. Ван Трис. — М.: Сов. радио. — Т. 1, 1972. — 742 с.; Т. 2, 1975. — 246 с.; Т. 3, 1977. — 664 с.
18. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. — М.: Наука, 1975. — 320 с.
19. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. — М.: Наука, 1998. — 576 с.
20. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
21. Волохатюк В.А. Вопросы оптической локации / В.А. Волохатюк, В.М. Кочетков, Р.Р. Красовский. — М.: Сов. радио, 1971. — 256 с.
22. Вопросы статистической теории радиолокации в 2-х т. / П.А. Бакут и др., под ред. Г.П. Тартаковского. — М.: Сов радио, 1963. Т. 1. — 426 с.; 1964. Т. 2. — 1080 с.
23. Воробьев В.И. Оптическая локация для радиоинженеров / В.И. Воробьев. — М.: Радио и связь, 1983. — 178 с.
24. Воробьев Е.М. Введение в систему “Математика” / Воробьев Е.М. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 262 с.

25. Вудворд Ф.М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации / Ф.М. Вудворд. — М.: Сов. радио, 1955. — 128 с.
26. Гальярди Р.М. Оптическая связь / Р.М. Гальярди, Ш. Карп. — М.: Связь, 1988. — 424 с.
27. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 576 с.
28. Гауэр Дж. Оптические системы связи / Дж. Гауэр. — М.: Радио и связь, 1989. — 500 с.
29. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов / Р. Глаубер. — М.: Мир, 1966. — 452 с.
30. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. — М.: Высшая школа, 1977. — 480 с.
31. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник для университетов / Б.В. Гнеденко. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
32. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006. — 720 с.
33. Горяинов В.Т. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи / В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов. — М.: Сов. радио, 1980. — 544 с.
34. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
35. Грязнов М.И. Измерение параметров импульсов / М.И. Грязнов, М.Л. Гуревич, Ю.А. Рябинин. — М.: Радио и связь, 1991. — 216 с.
36. Гудмен Дж. Статистическая оптика / Дж. Гудмен. — М.: Мир, 1988. — 528 с.
37. Долинин Н.А. Статистические методы в оптической локации / Н.А. Долинин, А.Ф. Терпугов. — Томск: ТГУ, 1982. — 256 с.
38. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы / Дж.Л. Дуб. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. — 606 с.

39. Захаров В.М. Метеорологическая лазерная локация / В.М. Захаров, О.К. Костко. — Л.: Гидрометеиздат, 1977. — 222 с.
40. Зуев В.Е. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере / В.Е. Зуев, М.В. Кабанов. — М.: Сов. радио, 1977. — 368 с.
41. Зуев В.Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере / В.Е. Зуев. — М.: Радио и связь, 1981. — 288 с.
42. Зуев В.Е. Дистанционное оптическое зондирование атмосферы / В.Е. Зуев, В.В. Зуев. — СПб.: Гидрометеиздат, 1992. — 232 с.
43. Ибрагимов И.А. Асимптотическая теория оценивания / И.А. Ибрагимов, Р.З. Хасьминский. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
44. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Часть 1. — М.: Наука, 1982. — 616 с.
45. Исследование объектов с помощью пикосекундных импульсов / Под ред. Глебовича. — М.: Радио и связь, 1984. — 250 с.
46. Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. — М.: Мир, 2001. — 576 с.
47. Клаудер Дж.Р. Основы квантовой оптики / Дж.Р. Клаудер, Э. Сударшан. — М.: Мир, 1970. — 428 с.
48. Колосов А.А. Обнаружение радиосигналов / А.А. Колосов. — М.: Радио и связь, 1989. — 288 с.
49. Кондратович П.А. Алгоритмы обработки сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения при наличии неинформативных параметров / Автореферат дисс. . . . физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГУ, 2012. — 16 с.
50. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости / В.А. Котельников. — М.: Радио и связь, 1956, 1998. — 152 с.
51. Козинцев М.П. Основы импульсной лазерной локации / М.П. Козинцев, В.М. Белов и др. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2006. — 512 с.
52. Крамер Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Лидбеттер. — М.: Мир, 1969. — 398 с.

53. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. — М.: Мир, 1975. — 648 с.
54. Курикша А.А. Квантовая оптика и оптическая локация / А.А. Курикша. — М.: Сов. радио. 1973. — 184 с.
55. Куликов Е.И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е.И. Куликов, А.П. Трифионов. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
56. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов / Е.И. Куликов. — М.: Радио и связь, 1986. — 272 с.
57. Лазерная локация / Под ред. Н.Д. Устинова. — М.: Машиностроение, 1984. — 272 с.
58. Лебедько Е.Г. Теоретические основы преобразования информации в оптико-электронных системах: учебное пособие / Е.Г. Лебедько. — СПб.: НИУ ИТМО, 2012. — 160 с.
59. Лебедько Е.Г. Системы оптической локации, часть 2. Учебное пособие для вузов / Е.Г. Лебедько. — СПб.: НИУ ИТМО, 2012. — 130 с.
60. Лебедько Е.Г. Системы оптической локации, часть 3. Учебное пособие для вузов / Е.Г. Лебедько. — СПб.: НИУ ИТМО, 2013. — 110 с.
61. Лебедько Е.Г. Теория и расчет импульсных и цифровых оптико-электронных систем. / Е.Г. Лебедько, Л.Ф. Порфирьев, Ф.И. Хайтун — Л.: Машиностроение, 1984 — 190 с.
62. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. — М.: Сов. радио, 1969. — 752 с.; Кн. 2, 1975. — 392 с.; Кн. 3, 1976. — 286 с.
63. Лезин Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов / Ю.С. Лезин. — М.: Советское радио, 1978. — 296 с.
64. Леман Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леман. — М.: Наука, 1979. — 408 с.
65. Максимов М.В. Дистанционное определение параметров движения при зондировании последовательностью оптических импульсов / Автореферат дисс. ... физ.-мат. наук. — Воронеж: ВГУ, 2003. — 16 с.

66. Матвеев И.Н. Лазерная локация / И.Н. Матвеев, В.В. Протопопов, И.Н. Троицкий, Н.Д. Устинов. Под ред. Н.Д. Устинова. — М.: Машиностроение, 1984. — 272 с.
67. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи в 2-х т.: Пер. с англ. / Д. Миддлтон. — М.: Сов. радио, 1962. Т. 2. — 832 с.
68. Миронов В.Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере / В.Л. Миронов. — Новосибирск: Наука, 1981. — 242 с.
69. Митяшев Б.Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. / Б.Н. Митяшев — М.: Советское радио, 1962. — 200 с.
70. Мосягин Г.М. Теория оптико-электронных систем. / Г.М. Мосягин, В.Б. Немтинов, Е.Н. Лебедев — М.: Машиностроение, 1990. — 432 с.
71. Мудров В.И. Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. — М.: Радио и связь, 1983. — 304 с.
72. Мусьяков М.П. Оптико-электронные системы ближней дальнометрии / М.П. Мусьяков, И.Д. Миценко. — М.: Радио и связь, 1991 — 168 с.
73. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику / Э. О'Нейл. — М.: Мир, 1966. — 254 с.
74. Орлов В.М. Элементы теории светорассеяния и оптическая локация / В.М. Орлов, И.В. Самохвалов, Г.Г. Матвиенко. — Новосибирск: Наука, 1982. — 226 с.
75. Парфёнов В.И. Обнаружение оптических сигналов при приеме потока фотоэлектронов с неизвестной формой плотности / В.И. Парфёнов, В.С. Кириллов // Компьютерная оптика. — 2012. — Т. 36, № 4. — С. 618–622.
76. Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей / В.И. Питербарг. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 176 с.
77. Росс М. Лазерные приемники / М. Росс. — М.: Мир, 1969. — 520 с.

78. Свиридов К.Н. Технология достижения высокого углового разрешения оптических систем атмосферного видения / К.Н. Свиридов. — М.: Знание, 2005. — 452 с.
79. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю.Г. Сосулин. — М.: Сов. радио, 1978. — 320 с.
80. Старовойтов Е.И. Использование лазерных систем в решении задачи встречи КА на орбите Луны / Е.И. Старовойтов // Авиакосмическое приборостроение. — 2010. — № 11. — С. 12-17.
81. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р.Л. Стратонович. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
82. Теория когерентных изображений / Под ред. Н.Д. Устинова — М.: Радио и связь, 1987 — 264 с.
83. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута — М.: Радио и связь. 1984 — 440 с.
84. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миرون. — М.: Радио и связь, 1977. — 488 с.
85. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
86. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
87. Трифонов А.П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А.П. Трифонов, Ю.С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
88. Трифонов А.П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А.П. Трифонов, Е.П. Нечаев, В.И. Парфенов. — Воронеж: ВГУ, 1991. — 246 с.
89. Трифонов А.П. Эффективность совместной оценки временного положения и периода следования импульсов при наличии неинформативных параметров / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова // Радиотехника и электроника. — 1992. — Т. 37, № 6 — С. 1016–1023.

90. Трифонов А.П. Оценка дальности и скорости при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова // Радиоэлектроника (Известия ВУЗов). — 1993. — Т. 36, № 1 — С. 17–25.
91. Трифонов А.П. Квазиправдоподобная оценка дальности и скорости при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова // Радиоэлектроника (Известия ВУЗов). — 1996. — № 8. — С. 23–30.
92. Трифонов А.П. Оценка периода следования оптических импульсов при наличии неинформативных параметров / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова // Радиоэлектроника (Известия ВУЗов). — 2000. — Т. 43, № 11. — С. 21–28.
93. Трифонов А.П. Оценка дальности, скорости и ускорения при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, М.В. Максимов // Радиотехника. — 2001. — № 4. — С. 99–104.
94. Трифонов А.П. Пороговые характеристики оценок скорости, дальности и ускорения при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, М.В. Максимов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2002. — Т. 45, № 6. — С. 3–12.
95. Трифонов А.П. Квазиоптимальная оценка дальности и скорости по сверхширокополосным измерениям дальности / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, А.В. Кузнецов // Радиоэлектроника (Известия ВУЗов). — 2003. — Т. 6, № 12. — С. 36–47.
96. Трифонов А.П. Эффективность оценки временного положения и периода следования пуассоновских импульсов при наличии неинформативных параметров / Трифонов А.П., Беспалова М.Б., Калистру И.И. // Сборник докладов XIV Международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж, 2008. — Т. 1. — С. 100–111.
97. Трищенко М.А. Фотоприемные устройства и ПЗС. Обнаружение слабых оптических сигналов / М.А. Трищенко. — М.: Радио и связь, 1992. — 400 с.

98. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов / В.Н. Тутубалин. — М.: МГУ, 1992. — 400 с.
99. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. — М.: Мир, 1984. — Т. 1. — 528 с.; Т. 2. — 738 с.
100. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. Х.Д. Икрамова / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
101. Харкевич А.А. Борьба с помехами / А.А. Харкевич. — М.: Наука, 1965. — Изд. 2, испр. — 280 с.
102. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания / К. Хелстром. — М.: Мир, 1979. — 344 с.
103. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. — 432 с.
104. Чернышов В.Н. Лазеры в системах связи. / В.Н Чернышев, А.Г. Шереметьев, В.В Кобзев. — М. Связь, 1966. — 320 с.
105. Шереметьев А.П. Статистическая теория лазерной связи / А.П. Шереметьев. — М.: Связь, 1971. — 264 с.
106. Шереметьев А.П. Лазерная связь / А.П. Шереметьев, Р. Г. Толпарев. — М.: Связь, 1974. — 384 с.
107. Шинаков Ю.С. О построении оценок параметров сигнала при наличии неинформативных параметров / Ю.С. Шинаков. — Радиотехника и электроника, 1974. — Т. 19, № 3. — С. 542–549.
108. Ширман Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос — М.: Радио и связь, 1981. — 416 с.
109. Щербак В.И. Оптимальная оценка оптических сигналов по критерию максимального правдоподобия. / В.И. Щербак // Измерительная техника. — 1987. — №7. — С. 25-27.
110. Bailey N.T.J. The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences / N. T. J. Bailey. — New York: John Wiley & Sons LTD, 1964. — 250 p.

111. Dickey J.O. Lunar laser ranging: A continuing legacy of the Apollo program / J.O. Dickey, P.L. Bender, J.E. Faller et al. // *Science*, 1994. — Vol. 265. — P. 482–490.
112. Gray R.M. Introduction to Statistical Signal Processing / R.M. Gray, L. D. Davisson. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004. — 463 p.
113. Haight F.A. Handbook of the Poisson Distribution / F.A. Haight. — New York: John Wiley & Sons LTD, 1967. — 178 p.
114. Kannan D. An Introduction to Stochastic Processes. Probability and Applied Mathematics / D. Kannan. — New York: Elsevier Science Ltd., 1979. — 312 p.
115. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing. Vol. 1: Estimation theory / S.M. Kay. — New York: Prentice-Hall, 1993. — 596 p.
116. Krauss T. Signal Processing Toolbox for Use with MATLAB: User's Guide. Version 5 / T. Krauss, J. Little, L. Shure. — Massachusetts: The Math Works, Inc., 2001. — 800 p.
117. McNicol D. A Primer of Signal Detection Theory / D. McNicol. — Mahwah–New Jersey–London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2005. — 240 p.
118. Shan Jie, Toth Ch.K. // Topographic Laser Ranging and Scanning: Principles and Processing — London: CRC Press, 2009. — 598 p.
119. Statistical Methods in Control and Signal Processing / ed. Tohru Katayama, Suetō Sugimoto. — New York: Marcel Dekker, Inc., 1997. — 554 p.
120. Trishenkov M.A. Detection of Low-Level Optical Signals Photodetectors, Focal Plane Arrays and Systems. — Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1997. — 458 p.
121. Vanderlust A. Optical Signal Processing / A. Vanderlust. — New York: Wiley-Interscience, 2005. — 632 p.
122. Vaseghi S.V. Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction / S.V. Vaseghi. — New York: John Wiley & Sons LTD, 2000. — 474 p.

123. Трифонов А.П. Влияние неинформативных параметров на точность оценок дальности, скорости и ускорения при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Сборник докладов XV Международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж. — 2009. — Т. 1. — С. 282–290.
124. Трифонов А.П. Эффективность оценки параметров движения быстро флуктуирующей цели при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Сборник докладов XI Международной научно-технической конференции “Кибернетика и высокие технологии XXI века”, Воронеж. — 2010. — Т. 1. — С. 107–117.
125. Трифонов А.П. Квазиправдоподобная оценка дальности, скорости и ускорения при оптическом зондировании цели / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, А.В. Курбатов // Сборник докладов XVII Международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж, 2011. — Т. 1. — С. 45–56.
126. Трифонов А.П. Влияние аномальных ошибок на точность квазиправдоподобных оценок параметров движения при оптическом зондировании цели / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Сборник докладов XVIII Международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж, 2012. — Т. 1. — С. 205–214.
127. Трифонов А.П. Влияние наличия неинформативных параметров на эффективность оценок параметров движения цели при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Радиотехника и электроника. — 2013. — Т. 58, № 12. — С. 1212–1219.
128. Трифонов А.П. Квазиправдоподобная оценка параметров движения при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, А.В. Курбатов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2013. — Т. 56, № 1. — С. 24–33.
129. Трифонов А.П. Характеристики квазиоптимальных оценок параметров движения цели по лазерным измерениям дальности / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Сборник докладов XIX Международной

- научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж, 2013. — Т. 1. — С. 189–199.
130. Трифонов А.П. Оценка параметров движения быстро флуктуирующей цели при зондировании последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2013. — № 2. — С. 24–32.
131. Трифонов А.П. Пороговые характеристики квазиправдоподобных оценок параметров движения при зондировании последовательностью оптических импульсов. / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2014. — № 1. — С. 40–49.
132. Трифонов А.П. Алгоритмы оценки параметров движения при зондировании цели последовательностью оптических импульсов / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Сборник докладов XX Международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж, 2014. — Т. 1. — С. 133–142.
133. Трифонов А.П. Квазиоптимальная оценка параметров движения по лазерным измерениям дальности / А.П. Трифонов, А.В. Курбатов // Известия вузов. Радиофизика. — 2014. — Т. 57, № 4. — С. 319–332.