На правах рукописи

Новикова Ольга Викторовна

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОБЛАДАЮЩЕГО ПАРОЙ ЛАКСА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2014

Работа выполнена в Северо-Кавказском федеральном университете

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент **Редькина Татьяна Валентиновна**.

Официальные оппоненты: **Боровских Алексей Владиславович**, доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, кафедра дифференциальных уравнений, профессор;

Бжихатлов Хачим Гидович, кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, кафедра математического анализа и теории функций, доцент.

Ведущая организация: Южный федеральный университет.

Защита диссертации состоится 24 марта 2015 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл.,1, ауд. 335

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2726

Автореферат разослан « » января 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие физические задачи о нелинейных волнах описываются математическими моделями, представляющими нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, имеющие специальные частные решения – солитоны, локализованные в пространстве и во времени. Решение такого рода задач является предметом исследования теории солитонов.

Среди нелинейных дифференциальных уравнений солитонного типа выделяется класс уравнений, обладающих операторной структурой Лакса. Достоинством этих уравнений является возможность применения всего арсенала математических приёмов, способов анализа и методов эффективного исследования, позволяющих, в частности, точно вычислять бесконечные серии их частных решений. К ним относятся метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), преобразования Бэклунда, метод Хироты, построение точных решений в виде бегущих волн, автомодельных решений, наличие свойства Пенлеве и др. Такое колоссальное разнообразие методов исследования этих уравнений дает возможность выяснить новые принципиальные вопросы при рассмотрении современных научных проблем. Поэтому исследование такого рода уравнений и поиски методов отыскания их частных решений представляют большую практическую ценность и значимость.

Значительное место в теории солитонов отводится комплексным нелинейным уравнениям. Нелинейное уравнение типа Шрёдингера исследовалось в работах Борзых А.В., Есмахановой К.Р., Хасанова А.Б., Рейимберганова А.А.. Следует отметить работы Сидорова С.В., Шишмарёва И.А., Цуцуми М., Комарова М.В. по исследованию комплексного уравнения Ландау-Гинзбурга.

Математическая теория солитонов имеет огромные перспективы в различных физических приложениях. Для неё характерны все признаки, присущие актуальному научному направлению нашего столетия: проводятся конференции по данной проблеме, растет число исследователей и специалистов в этой области и их публикаций. Уже перечисленных аргументов достаточно, чтобы под-

черкнуть актуальность и значимость выбранной темы диссертационной работы.

Цель работы. Целью данной работы является исследование, нахождение точных решений комплексного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных $\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip\left(p^2 + \overline{p}^2\right) = 0$.

Методы исследования. В диссертации использованы методы солитонной математики, такие как нахождение точных решений в виде бегущих волн, методы Хироты, Пенлеве, построение автомодельных решений.

Научная новизна. Все полученные результаты, включенные в диссертационную работу, являются новыми. Новизна результатов состоит в том, что для исследуемого уравнения:

1. Получена операторная коммутационная структура в виде уравнения Лакса.
2. Построены точные решения в виде бегущих волн.
3. Найдены точные решения с помощью метода Хироты.
4. Доказано обладание свойством Пенлеве, найдены решения с полюсными особенностями.
5. Построены автомодельные решения в виде формальных рядов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер, вносит вклад в развитие получения решений нелинейных уравнений в частных производных. Результаты диссертации представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих парой Лакса, и могут использоваться в содержании специальных курсов для студентов и аспирантов физико-математического факультета. Данные результаты расширяют область возможностей в изучении нелинейных проблем и могут послужить основой для разработки новых методов исследований трудноразрешимых задач.

Достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы следует из выполненной проверки полученных решений.

Апробация работы. Результаты исследований прошли апробацию на II Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2010); на Воронежских весенних математических школах «Понтря-

гинские чтения – XXII, – XXV» (Воронеж, 2011, 2014); на международных научных конференциях: «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 2010, 2013); «Современные вопросы науки – XXI век» (Тамбов, 2011), «Ломоносов – 2014» (Москва); докладывались на 55-й (2010), 56-й (2011), 57-й (2012) научно-методических конференциях «Университетская наука – региону» в Ставропольском государственном университете, II ежегодной научно-практической конференции Северо-Кавказского федерального университета (2014); обсуждались на научных семинарах кафедры математического анализа СКФУ и кафедры естественнонаучных дисциплин филиала Московского государственного университета приборостроения и информатики в г. Ставрополе.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [12]. В совместных работах [4], [7], [9], [10], [11] постановка задач и корректировка текста принадлежат Т.В. Редькиной, а основные результаты и их доказательства принадлежат автору диссертационной работы. Работы [1], [2], [7], [9] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из содержания, введения, двух глав, разбитых на параграфы (некоторые разбиты на пункты), заключения и списка литературы, включающего 170 наименований. Общий объем работы составляет 146 страниц текста, включая 2 рисунка и 9 таблиц.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертации, изложено её краткое содержание и основные результаты.

Первая глава представляет собой теоретическую часть диссертации. В ней представлена история развития науки о солитонах, вспомогательные сведения об операторных структурах, приводящим к интегрируемым уравнениям, а также методы нахождения точных решений, применяемые в работе к исследуемому уравнению.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию комплексного нели-

нейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip\left(p^2 + \overline{p}^2\right) = 0, \tag{1}$$

Основные результаты исследования.

- **Построение пары Лакса**

ТЕОРЕМА 1. *Нелинейное комплексное уравнение (1) эквивалентно уравнению Лакса* $L_t = [L, A]$ *с дифференциальными операторами вида:*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} -\overline{p} & p \\ p & \overline{p} \end{pmatrix},$$

$$A = 2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2i \begin{pmatrix} -\overline{p} & p \\ p & \overline{p} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + i \begin{pmatrix} -\overline{p}_x & -p^2 - \overline{p}^2 + p_x \\ p^2 + \overline{p}^2 + p_x & \overline{p}_x \end{pmatrix}.$$

- **Построение точных решений**

ТЕОРЕМА 2. *Комплексное нелинейное уравнение в частных производных (1) имеет частные решения в виде бегущих волн:*

$$\begin{aligned} p_1(x,t) &= sh\left(\alpha x - \left(4 + \alpha^2\right)t + \delta\right) + ich\left(\alpha x - \left(4 + \alpha^2\right)t + \delta\right), \\ p_2(x,t) &= ch\left(\alpha x + \left(4 - \alpha^2\right)t + \delta\right) + ish\left(\alpha x + \left(4 - \alpha^2\right)t + \delta\right), \end{aligned} \quad \alpha, \delta - const.$$

ТЕОРЕМА 3. *Комплексное нелинейное уравнение в частных производных (1) имеет точные решения, полученные методом Хироты, в виде:*

$$p_1(x,t) = (i \pm 1)\left(c + be^{\alpha(x \mp \alpha t)}\right),$$

$$p_2(x,t) = \frac{\alpha^2\left(c(i \pm 1) + be^{\alpha(x \pm \alpha t)}(i \mp 1)\right)}{8cb + \alpha^2 e^{\alpha(x \pm \alpha t)}}, \quad \alpha, b, c - const.$$

- **Тест на свойство Пенлеве**

ТЕОРЕМА 4. *Нелинейное комплексное дифференциальное уравнение (1) обладает свойством Пенлеве и имеет три типа решений в виде рядов Лорана:*

- *с полюсом первого порядка:*

$$p_1(x,t) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(t)\xi^n + i\sum_{n=-1}^{\infty} b_n(t)\xi^n, \quad \xi = x - \varsigma(t),$$

где $\varsigma(t),\ a_2(t),\ b_{-1}(t)$ *– произвольные функции;*

$$a_{-1}(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + b_{-1}^2}, \qquad a_0(t) = \frac{1}{2}\varsigma' b_{-1}, \qquad a_1(t) = \frac{b_{-1}'}{6} \pm \frac{(\varsigma')^2}{12}\sqrt{\frac{1}{2} + b_{-1}^2},$$

$$b_0(t)=\pm\frac{1}{2}\varsigma'\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2},\quad b_1(t)=\frac{(\varsigma')^2}{12}b_{-1}\pm\frac{b_{-1}'b_{-1}}{6\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2}},\quad b_2=\pm\frac{a_2}{b_{-1}}\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2}-\frac{\varsigma''}{16b_{-1}},$$

остальные коэффициенты определяются рекуррентными формулами:

$$a_{n+2}=\frac{-4}{n^4+6n^3+5n^2-12n}\Bigg(2b_{-1}\left(n^2+3n+4+16b_{-1}^2\right)\sum_{j=0}^{n+1}a_{n+1-j}b_j-$$

$$-16b_{-1}^2a_{-1}\sum_{k=0}^{n+1}\left(a_ka_{n+1-k}+b_kb_{n+1-k}\right)-\left(n^2+3n\right)a_{-1}\sum_{k=0}^{n+1}\left(3a_ka_{n+1-k}-b_kb_{n+1-k}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left(8b_ja_{-1}b_{-1}-a_j\left[n^2+3n+8b_{-1}^2\right]\right)\sum_{k=0}^{n-j}\left(a_ka_{n-j-k}-b_kb_{n-j-k}\right)+$$

$$+2a_{-1}b_{-1}\left[(n+1)a_{n+1}\varsigma'-a_n'\right]-\frac{1}{4}\left(n^2+3n+8b_{-1}^2\right)\left[(n+1)b_{n+1}\varsigma'-b_n'\right]\Bigg),$$

$$b_{n+2}=\frac{4}{n^4+6n^3+5n^2-12n}\Bigg(2a_{-1}\left(n^2+3n-4-16b_{-1}^2\right)\sum_{j=0}^{n+1}a_{n+1-j}b_j+$$

$$+16a_{-1}^2b_{-1}\sum_{k=0}^{n+1}\left(a_ka_{n+1-k}+b_kb_{n+1-k}\right)-\left(n^2+3n\right)b_{-1}\sum_{k=0}^{n+1}\left(a_ka_{n+1-k}-3b_kb_{n+1-k}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left(8a_ja_{-1}b_{-1}+b_j\left[n^2+3n-8a_{-1}^2\right]\right)\sum_{k=0}^{n-j}\left(a_ka_{n-j-k}-b_kb_{n-j-k}\right)+$$

$$+2a_{-1}b_{-1}\left[(n+1)b_{n+1}\varsigma'-b_n'\right]+\frac{1}{4}\left(n^2+3n-8a_{-1}^2\right)\left[(n+1)a_{n+1}\varsigma'-a_n'\right]\Bigg).$$

– *комплекснозначная функция с мнимой аналитической частью и действительной частью с полюсом первого порядка:*

$$p_2(x,t)=\sum_{n=-1}^{\infty}a_n(t)\xi^n+i\sum_{n=0}^{\infty}b_n(t)\xi^n,\quad \xi=x-\varsigma(t),$$

– *комплекснозначная функция с аналитической действительной частью и мнимой частью с полюсом первого порядка:*

$$p_3(x,t)=i\sum_{n=-1}^{\infty}a_n(t)\xi^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(t)\xi^n,\quad \xi=x-\varsigma(t),$$

где коэффициенты для второго и третьего случаев определяются следующим образом:

$\varsigma(t)$, $a_3(t)$, $b_2(t)$ – *произвольные функции;*

$$a_{-1}(t)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad a_0(t)=0,\qquad a_1(t)=\pm\frac{(\varsigma')^2}{12\sqrt{2}},\qquad a_2(t)=\pm\frac{\varsigma''}{8\sqrt{2}},$$

$$b_0(t)=\pm\frac{\varsigma'}{2\sqrt{2}},\qquad b_1(t)=0,\qquad b_3(t)=\pm\frac{\varsigma'\varsigma''}{12\sqrt{2}},$$

остальные коэффициенты определяются рекуррентно:

$$b_{n+2}=\frac{1}{n^2+3n}\left(8a_{-1}\sum_{j=0}^{n+1}a_jb_{n+1-j}-a_n'+(n+1)a_{n+1}\varsigma'+4\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n-j}\left(a_ka_{n-j-k}-b_kb_{n-j-k}\right)\right),$$

$$a_{n+2}=\frac{1}{n^2+3n-4}\left(4a_{-1}\sum_{j=0}^{n+1}\left(3a_ja_{n+1-j}-b_jb_{n+1-j}\right)-b_n'+\right.$$
$$\left.+(n+1)b_{n+1}\varsigma'+4\sum_{j=0}^{n}a_j\sum_{k=0}^{n-j}\left(a_ka_{n-j-k}-b_kb_{n-j-k}\right)\right).$$

- **Поиск автомодельных решений**

ЛЕММА 1. *Нелинейное комплексное уравнение (1) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка*

$$\begin{aligned}&-k(k+1)^2g+(k+1)^2g'\xi+4(k+1)(k+7)g^2\xi^{k+2}+24(k+1)gg'\xi^{k+3}-\\&-4(k+3)(k+3+(k+1)(3k+7))g\xi^{2k+2}-4(k+3)(11k+25)g'\xi^{2k+3}+\\&+48(k+3)(g^3-g'')\xi^{2k+4}+16(6g^2g'-g''')\xi^{2k+5}=0,\end{aligned}\qquad(2)$$

где $\xi=(x^{-2}t)^{\frac{1}{k+1}}$, $k\neq-1$ *– свободный параметр.*

ЛЕММА 2. *Решение дифференциального уравнения (2) в виде ряда*

$$g=\sum_{n=N}^{\infty}a_n\xi^n,$$

где $a_n-const$, *имеет полюсные особенности в двух случаях:*

$$1)\ g=\sum_{n=-1}^{\infty}a_n\xi^n,\ \text{когда}\ k<-1,\qquad(3)$$

$$2)\ g=\sum_{n=-k-2}^{\infty}a_n\xi^n,\ \text{когда}\ k>-1.\qquad(4)$$

ЛЕММА 3. *В уравнении (2) параметр k может принимать только целые значения,* $k\neq-1$.

ЛЕММА 4. *Уравнение (2) имеет решение в виде ряда g (3), в котором значение коэффициентов определятся в соответствии с таблицей 1.*

Таблица 1 – Значения коэффициентов ряда g (3)

<table>
<tr><td colspan="4">Значения коэффициентов ряда для любого $k \in Z$, $k \le -2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_{-1} = \pm\frac{1}{2}(k+1)$</td><td colspan="2">$a_{-1} = 0$</td></tr>
<tr><td>k – нечетное</td><td>k – четное</td><td>k – нечетное</td><td>k –четное</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">коэффициенты между
a_{-1} и a_{-k-2}
равны нулю</td><td>коэффициенты до
$a_{-\frac{k+3}{2}}$
равны нулю</td><td rowspan="3">коэффициенты до
a_{-k-2}
равны нулю</td></tr>
<tr><td>$a_{-\frac{k+3}{2}} - своб.$</td></tr>
<tr><td>коэффициенты между
$a_{-\frac{k+3}{2}}$ и a_{-k-2}
равны нулю</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_{-k-2} = -\frac{k+1}{12}$</td><td colspan="2">$a_{-k-2} - свободный\ \ коэффициент$</td></tr>
<tr><td>коэффициенты между
a_{-k-2} и $a_{-\frac{3k+5}{2}}$
равны нулю</td><td rowspan="3">коэффициенты между
a_{-k-2} и a_{-2k-3}
равны нулю</td><td>коэффициенты между
a_{-k-2} и $a_{-\frac{3k+5}{2}}$
равны нулю</td><td rowspan="3">коэффициенты между
a_{-k-2} и a_{-2k-2}
равны нулю</td></tr>
<tr><td>$a_{-\frac{3k+5}{2}} - своб.$</td><td>$a_{-\frac{3k+5}{2}} - своб.$</td></tr>
<tr><td>коэффициенты между
$a_{-\frac{3k+5}{2}}$ и a_{-2k-3}
равны нулю</td><td rowspan="2">коэффициенты между
$a_{-\frac{3k+5}{2}}$ и a_{-2k-2}
равны нулю</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a_{-2k-3} - свободный\ \ коэффициент$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">последующие коэффициенты
определяются по формуле (5),
($m \ge 0$)</td><td colspan="2">последующие коэффициенты
определяются по формуле (6),
($m \ge 0$)</td></tr>
</table>

ЛЕММА 5. *Уравнение (2) имеет решение в виде формального ряда g (4), в котором значение коэффициентов определятся в соответствии с таблицей 2.*

Таблица 2 – Значения коэффициентов ряда g (4)

<table>
<tr><td colspan="3">Значения коэффициентов для любого $k \in Z$, $k \geq 0$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$a_{-k-2} = -\dfrac{k+1}{6}$</td><td>$a_{-k-2} = 0$</td><td>$a_{-k-2} = -\dfrac{k+1}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">коэффициенты между
a_{-k-2} и a_k
равны нулю</td><td>коэффициенты между
a_{-k-2} и a_{-1} равны нулю</td></tr>
<tr><td>a_{-1} – свободный коэффициент</td></tr>
<tr><td>коэффициенты между
a_{-1} и a_k равны нулю</td></tr>
<tr><td colspan="2">a_k – свободный коэффициент</td><td>$a_k = \dfrac{8a_{-1}^2}{k+1}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">последующие коэффициенты определяются по формуле (7), ($m > k$)</td></tr>
</table>

$$a_{m-2k-2} = -\frac{1}{m\left(k(12m-5k+14)+7-4m^2\right)+k(2-5k)+3}\times$$
$$\times\left(\frac{(k+1)^2(m-k)}{4}a_m \pm 6(k+1)\sum_{n=0}^{m-2k-3}(3k+4n+7)a_n a_{m-2k-3-n} + \right.$$
$$+(k+1)\sum_{n=0}^{m-k-2}(k+6n+7)a_n a_{m-k-2-n} \pm (k+1)^2(3m-2k+1)a_{m-k-1} +$$
$$\left. +12\sum_{i=0}^{m-2k-4}a_i \sum_{n=0}^{m-2k-4-i}(k+2n+3)a_n a_{m-2k-4-i-n}\right), \qquad (5)$$

$$a_{m-2k-2} = \frac{1}{m\left(4m(m-3k)+11k^2-2k-1\right)-k\left(3k^2-2k-1\right)}\times$$
$$\times\left[\frac{(k+1)^2}{4}(m-k)a_m + 12\sum_{i=0}^{m-2k-4}a_i \sum_{n=0}^{m-2k-4-i}(k+2n+3)a_n a_{m-2k-4-i-n} + \right.$$
$$\left. +(k+1)\sum_{n=0}^{m-k-2}(k+6n+7)a_n a_{m-k-2-n}\right], \qquad (6)$$

$$a_m = \frac{4}{(k+1)^2(m-k)}\left[\left(m\left(4m(m-3k)+11k^2-2k-1\right)-3k^3+2k^2+k\right)a_{m-2k-2} - \right.$$
$$\left. -(k+1)\sum_{n=-k-2}^{m}(k+6n+7)a_n a_{m-k-2-n} - 12\sum_{i=-k-2}^{m}a_i \sum_{n=-k-2}^{m-k-2-i}(k+2n+3)a_n a_{m-2k-4-i-n}\right], \qquad (7)$$

Проведен дополнительный анализ, при каких параметрах k комбинированная переменная ξ является рациональной (при $k=-2$ и $k=0$) и иррациональной (при $k\le -3$ и $k\ge 1$), и найдены соответствующие решения.

ТЕОРЕМА 5. *Нелинейное комплексное дифференциальное уравнение в частных производных (1) имеет следующие автомодельные решения:*

– ***частные решения при k = –2**:*

$$p_1(x,t)=\frac{(1+i)C\sqrt{t}e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{n+1}}}{2x}+\frac{(1-i)x}{8C\sqrt{t}e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{n+1}}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(4n-2-\frac{x^2}{t}\right)x^{2n}t^{-n}a_n+\frac{4x^2}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}t^{-n}a_n\right)^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{4}\right],$$

$$p_2(x,t)=\frac{(1+i)Cxe^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{n+1}}}{2\sqrt{t}}+\frac{(1-i)\sqrt{t}}{8Cxe^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{n+1}}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(4n+6-\frac{x^2}{t}\right)x^{2n}t^{-n}a_n+\frac{4x^2}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}t^{-n}a_n\right)^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right],$$

где $a_0=\frac{1}{12}$, a_1 *– свободный, последующие коэффициенты определяются по рекуррентной формуле:*

$$a_{m+2}=-\frac{1}{m\left(7-24(m+2)-4m^2\right)-21}\left(\frac{(m+2)}{4}a_m\mp 6\sum_{n=0}^{m+1}(4n+1)a_na_{m+1-n}-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=0}^{m}(6n+5)a_na_{m-n}\pm(3m+5)a_{m+1}+12\sum_{i=0}^{m}a_i\sum_{n=0}^{m-i}(2n+1)a_na_{m-i-n}\right).$$

$$p_3(x,t)=\frac{(1+i)Ce^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{n+1}}}{2}+\frac{(1-i)}{8tCe^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{n+1}}}\times$$
$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(4n+2-\frac{x^2}{t}\right)x^{2n}t^{-n}a_n+\frac{4x^2}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}t^{-n}a_n\right)^2\right],$$

где a_0 *– свободный,* $a_1=0$, *остальные коэффициенты находятся по рекуррентной формуле:*

$$a_{m+2}=\frac{1}{m\left(4m(m+6)+47\right)+30}\left[\frac{m+2}{4}a_m+12\sum_{i=0}^{m}a_i\sum_{n=0}^{m-i}(2n+1)a_na_{m-i-n}-\sum_{n=0}^{m}(6n+5)a_na_{m-n}\right]$$

– ***решения при целом k ≤ –3:***

$$p_4(x,t)=\frac{(1+i)C\sqrt{t}e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n+1}{k+1}}}}{2x}+\frac{(1-i)x}{8C\sqrt{t}e^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n+1}{k+1}}}}\left[\frac{1}{2t}+\frac{2}{x^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{k+1}\left(\sqrt[-k-1]{x^2t^k}+2\left(\frac{3k+5}{k+1}\right)\sqrt[-k-1]{\frac{x^{2k+4}}{t}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}+$$

$$\left.+\frac{4}{(k+1)^2}\sqrt[-k-1]{\frac{x^{2k+4}}{t}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}na_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}+\sqrt[-k-1]{\frac{x^2}{t}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}\right)^2\right)\right],$$

$$p_5(x,t)=\frac{(1+i)Cxe^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n+1}{k+1}}}}{2\sqrt{t}}+\frac{(1-i)\sqrt{t}}{8Cxe^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n+1}{k+1}}}}\left[-\frac{1}{2t}+\right.$$

$$+\frac{1}{k+1}\left(\sqrt[-k-1]{x^2t^k}-2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\sqrt[-k-1]{\frac{x^{2k+4}}{t}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}+$$

$$\left.+\frac{4}{(k+1)^2}\sqrt[-k-1]{\frac{x^{2k+4}}{t}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}na_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}+\sqrt[-k-1]{\frac{x^2}{t}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}\right)^2\right)\right],$$

где коэффициенты рядов определяются по первому столбцу таблицы 1.

$$p_6=\frac{(1+i)Ce^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n+1}{k+1}}}}{2}+\frac{1-i}{8(k+1)Ce^{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n+1}{k+1}}}}\times$$

$$\times\left[\frac{4}{k+1}\sqrt[-k-1]{\frac{x^{2k+4}}{t}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}na_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}+\sqrt[-k-1]{\frac{x^2}{t}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}\right)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt[-k-1]{x^2t^k}+\frac{2(k+3)}{k+1}\sqrt[-k-1]{\frac{x^{2k+4}}{t}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^2t^{-1}\right)^{-\frac{n}{k+1}}\right],$$

где коэффициенты рядов определяются по второму столбцу таблицы 1.

– ***частные решения при k = 0:***

$$p_7(x,t)=\frac{(1+i)Ce^{\frac{x^2}{6t}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{n+1}}}{2}+\frac{1-i}{2Ce^{\frac{x^2}{6t}+\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{n+1}}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{12}\left(\frac{6t-x^2}{6t^2}+\left(\frac{18t-x^2}{x^4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(tx^{-2}\right)^n\right)+\frac{t}{x^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}na_n\left(tx^{-2}\right)^n+\frac{t}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(tx^{-2}\right)^n\right)^2\right)\right],$$

где a_0 – свободный, последующие коэффициенты определяются по рекуррент-

ной формуле:

$$a_m = 4\left[\left(4m^2-1\right)a_{m-2} - \frac{1}{m}\left(\sum_{n=-2}^{m}(6n+7)a_n a_{m-2-n} + 12\sum_{i=-2}^{m}a_i \sum_{n=-2}^{m-2-i}(2n+3)a_n a_{m-4-i-n}\right)\right], \qquad (8)$$

где $a_{-2} = -\frac{1}{6},\ a_{-1} = 0.$

$$p_8(x,t) = \frac{1-i}{8C\left(tx^{-2}\right)^{a_{-1}} e^{\frac{x^2}{4t}+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{n+1}}}\left(\frac{1}{x^2}\left[\frac{4t}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}na_n\left(tx^{-2}\right)^n + \frac{t}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(tx^{-2}\right)^n\right)^2\right) + \right.\right.$$

$$\left. + 2a_{-1}\left(2a_{-1}+1\right) + \left(\frac{2t\left(3+4a_{-1}\right)}{x^2}-1\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(tx^{-2}\right)^n\right] + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}-a_{-1}\right)\Bigg) +$$

$$+ \frac{(1+i)C\left(tx^{-2}\right)^{a_{-1}} e^{\frac{x^2}{4t}+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{n+1}}}{2},$$

где a_{-1} *– свободный коэффициент,* $a_0 = 8a_{-1}^2$*, последующие коэффициенты определяются по рекуррентной формуле (8), в которой* $a_{-2} = -\frac{1}{4}.$

$$p_9 = \frac{(1+i)Ce^{\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{n+1}}}{2} + \frac{1-i}{8xCe^{\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{n+1}}} \times \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{6t}{x^3}-2n\right)a_n\left(tx^{-2}\right)^n + \frac{4t^2}{x^5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(tx^{-2}\right)^n\right)^2\right],$$

где a_0 *– свободный коэффициент, последующие коэффициенты определяются по рекуррентной формуле (8), в которой* $a_{-2} = 0,\ a_{-1} = 0.$

– ***решения при целом*** $k \geq 1$*:*

$$p_{10}(x,t) = \frac{(1+i)Ce^{\frac{x^2}{6t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n+1}{k+1}}}}{2} + \frac{1-i}{8Ce^{\frac{x^2}{6t}+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\xi^{\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n+1}{k+1}}}}}\left[\frac{1}{3t}\left(1-\frac{x^2}{6t}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{k+1}\left(\frac{2(k+3)}{k+1}\sqrt[k+1]{\frac{t}{x^{2k+4}}} + \sqrt[k+1]{\frac{1}{x^2t^k}}\left(1-\frac{4}{3}\sqrt[k+1]{\frac{1}{x^{2k}}}\right)\right)\sum_{n=k}^{\infty}a_n\xi^n +$$

$$\left. + \frac{4}{(k+1)^2}\sqrt[k+1]{\frac{t}{x^{2k+4}}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}na_n\xi^n + \sqrt[k+1]{\frac{t}{x^2}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}a_n\xi^n\right)^2\right)\right],$$

где коэффициенты ряда определяются по первому столбцу таблицы 2.

$$p_{11}(x,t)=\frac{(1+i)C\left(tx^{-2}\right)^{\frac{a_{-1}}{k+1}}e^{\frac{x^2}{4t}+\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n+1}{k+1}}}}{2}+\frac{1-i}{8(k+1)C\left(tx^{-2}\right)^{\frac{a_{-1}}{k+1}}e^{\frac{x^2}{4t}+\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n+1}{k+1}}}}\times$$

$$\times\left[\frac{2a_{-1}\left(k+1+2a_{-1}\right)}{x^2(k+1)}+\frac{(k+1-2a_{-1})}{2t}+\left(\sqrt[k+1]{\frac{1}{t^k}}\left(\sqrt[k+1]{\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}\right)+2\left(\frac{k+3+4a_{-1}}{k+1}\right)\sqrt[k+1]{\frac{t}{x^{2k+4}}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=k}^{\infty}a_n\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n}{k+1}}+\frac{4}{k+1}\sqrt[k+1]{\frac{t}{x^{2k+4}}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}na_n\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n}{k+1}}+\sqrt[k+1]{\frac{t}{x^2}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}a_n\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n}{k+1}}\right)^2\right)\right],$$

где коэффициенты ряда определяются по третьему столбцу таблицы 2.

$$p_{12}(x,t)=\frac{(1+i)Ce^{\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n+1}{k+1}}}}{2}-\frac{1-i}{8(k+1)Ce^{\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(tx^{-2}\right)^{\frac{n+1}{k+1}}}}\left[2\sqrt[k+1]{\frac{1}{x^{k+1}}}\sum_{n=k}^{\infty}na_n\xi^n-\right.$$

$$\left.-\left(\sqrt[k+1]{\frac{1}{x^2t^k}}+\frac{2}{k+1}\sqrt[k+1]{\frac{t}{x^{2k+4}}}\left(\frac{k+3}{k+1}+2\sqrt[k+1]{\frac{t}{x^2}}\sum_{n=k}^{\infty}a_n\xi^n\right)\right)\sum_{n=k}^{\infty}a_n\xi^n\right],$$

где коэффициенты определяются по второму столбцу таблицы 2.

В **заключении** описаны результаты диссертационной работы и перспективы их дальнейшего развития.

Автор выражает благодарность доценту Редькиной Т.В. за научное руководство, проявленное внимание и полезные советы в научном исследовании.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Новикова О.В. Автомодельные решения комплекснозначного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных / О.В. Новикова // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. Научный журнал. – Ставрополь. – 2014 г. – № 1 (40). – С. 13 – 20.

[2] Новикова О.В. Исследование комплекснозначного нелинейного уравнения в частных производных / О.В. Новикова // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. – Калининград: Изд-во БФУ им. И. Канта. – 2012. – Вып. 4. – С. 160 – 166.

[3] Новикова О.В. История развития солитонной математики / О.В. Новикова

// Общественно-экономические и политико-правовые проблемы регионального развития современной России. Сборник научных статей. – Пятигорск: Рекламно-информационное агентство на Кавминводах. – 2010. – С. 214 – 216.

[4] Новикова О.В. Множество решений для нелинейного уравнения в частных производных с комплекснозначными функциями / О.В. Новикова, Т.В. Редькина // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов международной научной конференции (Владикавказ, 19–24 июля 2010 г.). – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. – 2010. – С. 218 – 220.

[5] Новикова О.В. Некоторые автомодельные решения комплекснозначного нелинейного дифференциального уравнения солитонного типа [Электронный ресурс] / О.В. Новикова // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». – Москва: МАКС Пресс, 2014. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

[6] Новикова О.В. Пара Лакса для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных на комплекснозначную функцию / О.В. Новикова // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов международной научной конференции (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.). – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. – 2013. – С. 136 – 137.

[7] Новикова О.В. Построение точных решений в виде бегущих волн для нелинейного уравнения в частных производных второго порядка / О.В. Новикова, Т.В. Редькина // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М: ОПиПМ. – 2010. – Том 17. – Вып. 4.– С. 580.

[8] Новикова О.В. Применение метода Хироты при решении дифференциального уравнения в частных производных / О.В. Новикова // Современные вопросы науки – XXI век: Сборник научных трудов по материалам VII международной научно-практической конференции (29 марта 2011 г.). – Тамбов: Изд-во Тамбовского областного института повышения квалификации работников образования. – 2011. – Вып. 7. – Ч. 1. – С. 102 – 103.

[9] Новикова О.В. Решение с полюсными особенностями для уравнения с

комплекснозначными функциями / О.В. Новикова, Т.В. Редькина // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М: ОПиПМ. – 2010. – Том 17. – Вып. 3. – С. 448 – 449.

[10] Новикова О.В. Свойство Пенлеве для уравнения в частных производных второго порядка / О.В. Новикова, Т.В. Редькина // Тезисы докладов II Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 28 июня – 4 июля 2010). – Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2010. – С. 57 – 58.

[11] Новикова О.В. Частное решение, полученное методом Хироты для нелинейного комплекснозначного уравнения / О.В. Новикова, Т.В. Редькина // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXII». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета. – 2011. – С. 131 – 132.

[12] Новикова О.В. Частный случай автомодельного решения нелинейного уравнения / О.В. Новикова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXV». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга». – 2014. – С. 131 – 132.

Работы [1], [2], [7], [9] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.