на правах рукописи

Лылов Евгений Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор, Баев Александр Дмитриевич
Официальные оппоненты:	Батаронов Игорь Леонидович, доктор физико–математических наук, профессор, Воронежский государственный технический университет, кафедра высшей математики и физико–математического моделирования, заведующий
	Жуков Михаил Юрьевич, доктор физико–математических наук, профессор, Южный Федеральный Университет, кафедра вычислительной математики и математической физики, заведующий
Ведущая организация:	Национальный исследовательский Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (г. Саратов)

Защита состоится 13 мая 2015 года в 11.30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный университет" по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Воронежского государственного университета: http://www.science.vsu.ru/

Автореферат разослан "   " марта 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Шабров Сергей Александрович

Актуальность темы. В последние десятилетия возрастает актуальность моделирования и исследований процессов в науке и технических приложениях, имеющих характер сетей, прежде всего в тех областях, где такая особенность обусловлена геометрическими свойствами исследуемых объектов. Прежде всего это заметно в бурно развивающихся приложениях нанотехнологий, где субатомный характер технологических задач предполагает кардинально новые подходы в моделировании процессов и явлений, проходящих в линейных фрагментах изучаемого объекта. Это только одно из возможных приложений математических моделей, которые используют формализмы эволюционных систем с локализованными особенностями на геометрических графах.

Группа математиков, работавших под руководством профессора Ю.В. Покорного, создала качественную теорию краевых задач второго порядка на геометрическом графе. К настоящему времени для уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами, рассматриваемых на геометрических графах, изучен вопрос о разрешимости задачи с краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля при условиях трансмиссии во внутренних вершинах графа, вопрос о структуре спектра, получен аналог осцилляционной теоремы Штурма, установлен аналог формулы Даламбера. Начато исследование задач на графе, когда коэффициенты и правая часть не только не являются непрерывными, но и могут иметь особенности типа дельта-функций и их производных. Здесь можно отметить работы следующих авторов: Ю.В. Покорного, А.П. Хромова, В.В. Провоторова, А.В. Боровских, О.М. Пенкина, В.Л. Прядиева, В.А. Юрко, Ali-Mehmeti F., Nicaise S., Rannacher R., Roth J.P. и других.

Однако, остается актуальной задача построения конкретных математических моделей, реализуемых в виде начально-краевых задач на геометрических графах, а также смежные вопросы построения и анализа приближенных решений. Актуальность диссертационной работы обусловлена необходимостью развивать имеющиеся и разрабатывать новые подходы для анализа математических моделей малых деформаций и вынужденных колебаний на геометрическом графе, численные методы и алгоритмы определения классических решений.

Цели и задачи исследования. Разработка новых качественных и приближенных методов исследования процессов с локализованными особенностями на геометрическом графе. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

— вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями;

— доказательство корректности рассматриваемых математических моделей на геометрическом графе;

— изучение возможности применения метода Фурье;

— разработка численных методов для нахождения приближенного решения математических моделей с локализованными особенностями на геометрическом графе;

— разработка программного комплекса для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, реализуемых в виде начально-краевых задач на геометрическом графе.

Методы исследования. Разработанные в диссертации методы исследования математических моделей основаны на теории математического моделирования, теории построения и обоснования метода конечных элементов для уравнений с распределенными параметрами на графе, теории графов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и численные методы исследования математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями, численные методы и комплексы программ:

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

2. Доказательство корректности математических моделей на геометрическом графе.

3. Доказательство возможности применения метода Фурье для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами.

4. Разработка эффективных численных методов решения рассматриваемых математических моделей на геометрическом графе (адаптация метода конечных элементов для математических моделей и оценка сходимости приближенного решения к точному);

5. Разработка программного комплекса для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

— новый подход для анализа математических моделей, реализуемых в виде начально-краевых задач на геометрических графах;

— доказательство корректности математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями. Отметим, что рассматриваемые математические модели имеют локализованные особенности не только во внутренних вершинах, но на ребрах графа, что приводит к трудностям, вызванными не только топологией сети, но потерей гладкости решения во внутренних точках ребер.

— адаптация метода конечных элементов к рассматриваемым моделям;

— доказательство оценки близости приближенного решения, найденного с помощью адаптированного метода конечных элементов, к точному на геометрическом графе;

— комплекс программ для решения задач на геометрическом графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость математических моделей и методов исследования, предложенных в диссертационной работе, заключается в расширении множества известных моделей подобного типа в направлении использования пространств классических решений соответствующих начально-краевых задач и могут быть использованы в теоретических исследованиях начально-краевых задач для дифференциальных систем с локализованными особенностями.

Разработаны эффективные численные методы для программного комплекса, позволяющего найти приближенные решения рассматриваемых математических моделей. Получены оценки близости приближенного решения, найденного с помощью адаптированного метода конечных элементов, к точному на геометрическом графе. Представлены результаты тестирования численных методов на основе тестовых задач.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, область исследования соответствует п.1 "Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений", п.2 "Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей", п.4 "Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента".

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2013 г.), на конференциях "Современные методы теории краевых задач" на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения" (Воронеж, 2012–14 гг.), на семинарах профессора А.Д. Баева (2012–14 гг.), семинарах профессора М.И. Каменского (2012–2014 гг.), семинарах доцентов С.А. Шаброва и М.Б. Зверевой (2012–2014 гг.).

Публикации. Все результаты, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные автором лично.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, библиографического списка из 70 наименований, и приложения, в котором приводятся тексты разработанных программ, написанных на Python. Работа изложена на 140 страницах, содержит 37 рисунков и 1 таблицу.

Основное содержание работы.

Во введении обоснована актуальность работы, формулируется цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов.

В первой главе приводятся основные положения и понятия. Пусть Γ — геометрическая сеть из $\Re^n$, реализованная в виде открытого геометрического графа. Если ребра сети допускают достаточно гладкую параметризацию и не имеют самопересечений, можно считать их прямолинейными интервалами (не включая в них внутренние узлы). Тем самым удобно считать, что Γ состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов $\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, (i = 1, 2, ..., N)$, называемыми ребрами, и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначим через $I(\Gamma)$, а каждую его точку назовем внутренней вершиной графа Γ. Концы интервалов γ_i, не включенные в $I(\Gamma)$, назовем граничными вершинами, их множество обозначим через $\partial\Gamma$, т.е. $\partial\Gamma = \{b_i, i = 1, 2, \ldots, r\}$. Объединение всех ребер обозначим через $R(\Gamma)$. Тем самым, $\Gamma = R(\Gamma) \cup I(\Gamma)$. Ребра графа Γ предполагаются занумерованными произвольно, их набор $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ вместе с $I(\Gamma)$ определяет Γ. На ребрах графа Γ зададим ориентацию в зависимости от наблюдаемого процесса.

Определение 1. *Скалярной функцией $z(x)$ на графе Γ будем называть обычное отображение $z : \Gamma \to R$.*

Всюду далее для заданной на $R(\Gamma)$ функции $z(x)$ ее сужение на ребро γ_i обозначим через $z_i(x)$.

На графе Γ рассмотрим следующую математическую модель:

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu') + u\frac{dQ}{d\Gamma} = \frac{dF}{d\Gamma}, \\ u(x)|_{\partial\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где производную по Γ будем понимать в следующем смысле:

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu') = \begin{cases} (pu')', x \in R(\Gamma), \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{a_k \in I(\Gamma)} (-1)^{\mu_i(a_k)} p_i(a_k) u_i(a_k), a_k \in I(\Gamma), \end{cases}$$

где $\mu_i(a_k)$ — число, заданное следующим образом:

$$\mu_i(a_k) = \begin{cases} 1, \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана "к" вершине } a_k, \\ 0, \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана "от" вершины } a_k. \end{cases}$$

В рассматриваемой модели (1) $p(x)$ определяет силу натяжения в точке x графа Γ, Q'_Γ определяет распределение упругой реакции внешней среды на графе Γ, а F'_Γ отвечает за плотность внешней нагрузки. Будем предполагать, что функции p, Q, F ограниченной на Γ вариации, непрерывны в точках $\partial\Gamma$, причем $\inf\limits_{R(\Gamma)} p > 0$. Пусть, более того, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации.

Решение рассматриваемой модели (1) будем искать в классе E — абсолютно-непрерывных на Γ функций $u(x)$, производная которых $u'(x)$ является на каждом ребре функцией ограниченной вариации.

В первой главе приводится вариационное обоснование математической модели (1).

Доказано, что математическая модель (1) на графе Γ корректна.

Во второй главе изучается математическая модель малых вынужденных колебаний сетки из струн с локализованными особенностями:

$$\begin{cases} M'_\Gamma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\Gamma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u(x,t)Q'_\Gamma(x) + f(x,t), \\ u(x,t)|_{\partial\Gamma} = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), x \in \Gamma, \\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x), x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2}$$

где $t > 0$, $M(x)$ - распределение масс на графе Γ, $p(x)$ определяет силу натяжения в точке x графа Γ, Q'_Γ определяет распределение упругой реакции внешней среды на графе Γ, а $f(x,t)$ - внешняя сила, приложенная в точке $x \in \Gamma$ в момент времени t, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ - начальное отклонение от положения равновесия и начальная скорость системы соответственно.

В математической модели (2) предполагаем, что функции $p(x)$, $Q(x)$ ограниченной на Γ вариации, $\inf p(x) > 0$, $f(x,t)$ непрерывна по совокупности переменных. Пусть, более того, функция $Q(x)$ не убывает на каждом ребре в смысле ориентации.

Решение модели (2) ищем в классе E — абсолютно-непрерывных функций $u(x,t)$ на множестве $\Gamma\times[0,T]$, производная которых $u'_x(x,t)$ при каждом фиксированном t является σ—абсолютно-непрерывной и при каждом фиксированном x производные u'_t и u''_{tt} непрерывны.

Доказана единственность решения математической модели (2).

Теорема 1. *Пусть функции $p(x)$, $Q(x)$ абсолютно непрерывны на Γ, $Q'_\Gamma(x) \geq 0$, $M'_\Gamma(x) > 0$, а функция $f(x,t)$ непрерывна по совокупности* *переменных. Тогда математическая модель (2) не может иметь более одного решения, определенного на* $\Gamma \times [0;T]$, *в классе* E.

В третьем параграфе доказано, что при малом изменении начальных условий $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ соответствующее решение математической модели (2) изменяется мало. Таким образом, доказана корректность математической модели (2) на геометрическом графе.

Для дальнейшего удобства на графе Γ введем следующее обозначение $LX = -\frac{d}{d\Gamma}(pX')(x) + Q'_\Gamma(x)X(x)$.

Доказана возможность применения метода Фурье к рассматриваемой модели (2) на графе Γ, а именно доказана.

Теорема 2. *Пусть* $p(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ *— абсолютно непрерывны на* Γ, $p(x)$ *отделена от нуля, функция* $Q(x)$ *- не убывает на* Γ. *Пусть* $\varphi_0(x)$ *и* $\varphi_1(x)$ *- абсолютно непрерывны на* Γ, *производные* $\varphi'_0(x)$ *и* $\varphi'_1(x)$ *имеют конечное на* Γ *изменение; квазипроизводные* $p(x)\varphi'_0(x)$ *и* $p(x)\varphi'_1(x)$ *- абсолютно непрерывны на* Γ; *функции* $\frac{L(\varphi_0)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ *и* $\frac{L(\varphi_1)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ *непрерывны на* Γ; $\frac{L(\varphi_0)(x)}{M'_\Gamma(x)}$ *- абсолютно непрерывна и ее производная имеет конечное изменение на* Γ; $\varphi_0(x)\Big|_{\partial\Gamma} = L\varphi_0\Big|_{\partial\Gamma} = \varphi_1(x)\Big|_{\partial\Gamma} = L\varphi_1\Big|_{\partial\Gamma} = 0$. *Тогда функция*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} sin\sqrt{\lambda_k}t \right),$$

где $\varphi_k(x)$ *- нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению* λ_k, $A_k = \int\limits_\Gamma M'_\Gamma(x)\varphi_k(x)\varphi_0(x)d\Gamma$, $B_k = \int\limits_\Gamma M'_\Gamma(x)\varphi_k(x)\varphi_1(x)d\Gamma$, *является решением математической модели (2). Причем ряд можно дифференцировать почленно по* t *дважды и по* x, σ *также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на* $\Gamma \times [0;T]$.

В третьей главе метод конечных элементов адаптируется для рассматриваемых моделей (1) и (2) на графе Γ. Без ограничения общности рассмотрим адаптацию метода конечных элементов для графа-звезды Γ, где внутренней вершине ставится в соответствие $x = 1$, граничным вершинам ставится в соответствие $x = 0$. Рассмотрим разбиение ребра γ_i графа Γ на неравные части точками $0 = x_0^i < x_1^i < ... < x_{n_i}^i = 1$, $(i = 1, 2, ...N)$. Для i-го ребра построим k-ю базисную функцию $\varphi_{k,i}(x)$

$(k=1,2,...n_i-1, i=1,2,...N)$ так, что $\varphi_{k,i}$ равны нулю везде на Γ, кроме промежутка (x^i_{k-1}, x^i_{k+1}) соответствующего ребра с номером i. При этом $\varphi_{k,i}(x^i_k)=1$. Также определим базисные функции для i-го ребра

$$\varphi_{n_i,i}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x^i_{n_i-1}}{1-x^i_{n_i-1}}, x\in[x^i_{n_i-1},1], i=1,2,...N,\\ 0,\ \text{для остальных } x.\end{cases}$$

Пусть $\varphi_r(x)=\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi_{n_i,i}(x)$, где $r=\sum\limits_{i=1}^{N}n_i-N+1$.

Приближенное решение модели (1) будем искать в виде линейной комбинации функций $v(x)=\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{n_i-1}v_{j,i}\varphi_{j,i}(x)+c\varphi_r(x)$, где $v_{j,i}$ - значения $v(x)$ в точках разбиения x^i_j, c - значение $\varphi_r(x)$ в точке 1. Для нахождения коэффициентов модели $v_{j,i}$, c получаем систему $AV=F$ с трехдиагональной матрицей A размерности $R\cdot(N-1)+1$, где V - вектор-столбец, составленный из неизвестных $v_{j,i}$ и c, F - вектор, составленный из правых частей уравнения.

Введем следующее обозначение $\langle\varphi,\psi\rangle=\int\limits_{\Gamma}p\varphi'\psi'dx+\int\limits_{\Gamma}\varphi\psi dQ$.

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (1), $v(x)$ - приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда справедливо неравенство*

$$\langle u-v,u-v\rangle\le Ch,$$

причем, константа C не зависит от $h=\dfrac{1}{n}$, где n — количество интервалов, на которые производится разбиение каждого ребра (сетка предполагается равномерной).

Приближенное решение математической модели (2) будем искать в виде $v(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{n_i-1}a_{j,i}(t)\varphi_{j,i}(x)+c(t)\varphi_r(x)$, где $a_{j,i}(t)$, $c(t)$ - неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции на графе Γ, $\varphi_{j,i}(x)$ - j-ая базисная функция на ребре γ_i.

Таким образом, получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений $\widehat{A}a''(t)+\widehat{B}a(t)=\widehat{F}$, где $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ - матрицы порядка r, коэффициенты которых находятся по формулам $\widehat{A}_{kj}=\widehat{A}_{jk}=$

$\int\limits_\Gamma \varphi_{k,i}(x)\varphi_{j,i}(x)dM$, $\widehat{A}_{rr} = \int\limits_\Gamma \varphi_r^2(x)dM$, $\widehat{B}_{kj} = \widehat{B}_{jk} = \int\limits_\Gamma p(x)\varphi'_{k,i}(x)\varphi'_{j,i}(x)dx +$ $\int\limits_\Gamma \varphi_{k,i}(x)\varphi_{j,i}(x)dQ$, $(k = 1, 2, ..., n_i - 1, i = 1, 2, ..., N)$, $\widehat{B}_{rr} = \int\limits_\Gamma p(x)\varphi_r'^2(x)dx +$ $\int\limits_\Gamma \varphi_r^2(x)dQ$, где $a(t) = (a_{1,1}(t), a_{2,1}(t), a_{3,1}(t), .., a_{j,i}(t), ..., a_{n_i-1,N}(t), c(t))^T$ и $\widehat{F}(t) = (F_{1,1}(t), F_{2,1}(t), ...F_{j,i}(t), ..., F_r(t))^T$ — вектор-столбцы, компоненты $F_n(t)$ определяются равенствами $F_{k,i}(t) = \int\limits_\Gamma f(x,t)\varphi_{k,i}(x)d\Gamma$, $F_r(t) =$ $\int\limits_\Gamma f(x,t)\varphi_r(x)d\Gamma$.

Теорема 4. *Пусть $M'_\Gamma(x) > 0$, $Q'_\Gamma(x) \geq 0$, $p(x) > 0$ и начальные условия $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ таковы, что математическая модель (2) имеет единственное решение в классе E. Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (2), $v(x,t)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\int\limits_\Gamma w_t'^2(x,t)dM + \int\limits_\Gamma w_x'^2(x,t)dx + \int\limits_\Gamma w^2(x,t)dQ \right)^{\frac{1}{2}} \leq \overline{C} \cdot \sqrt{h},$$

причем, константа $\overline{C}$ не зависит от $h = \dfrac{1}{n}$, где n — количество интервалов, на которые производится разбиение, $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$.

В четвертой главе приводится описание комплекса программ, разработанного для проведения численных экспериментов. Программы написаны на высокоуровневом языке программирования общего назначения Python, ориентированным на повышение производительности и читаемости кода. На рисунках 1—2 представлены алгоритмы разработанных программ Program1.py, Program2.py.

В пятой главе представлены результаты реализации численных методов при проведении двух численных экспериментов. Результаты численных экспериментов на тестовых задачах иллюстрируются графическими изображениями.

С помощью Program1.py найдено приближенное решение модели (1). Приведем графики погрешности между известным точным и найденным приближенным решениями для модели (1). Результаты представлены на рисунках 3—16 при разбиении ребер графа на $N = 10$, 100 и 1000 частей.

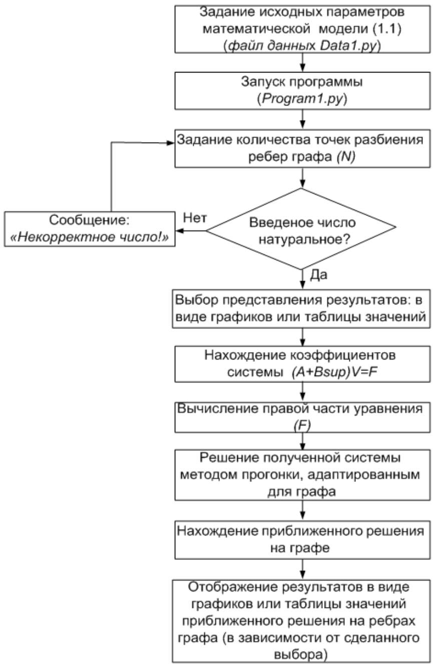


Рис. 1: Алгоритм программы Program1.py

Рис. 2: Алгоритм программы Program2.py

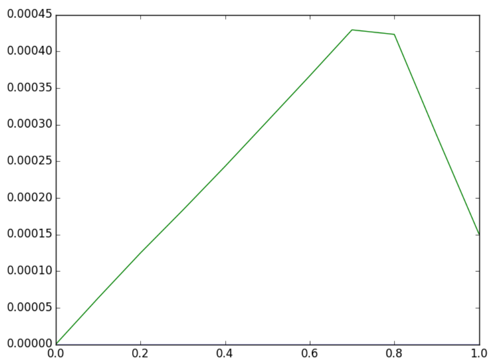


Рис. 3: Погрешность решения на ребре γ_1 при $N = 10$

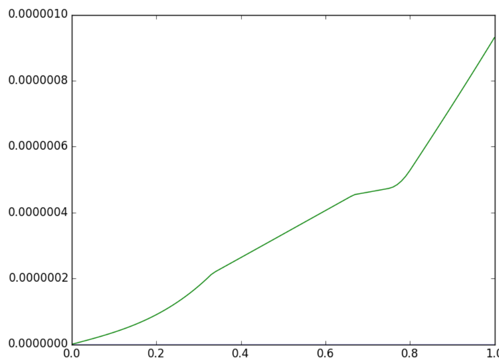
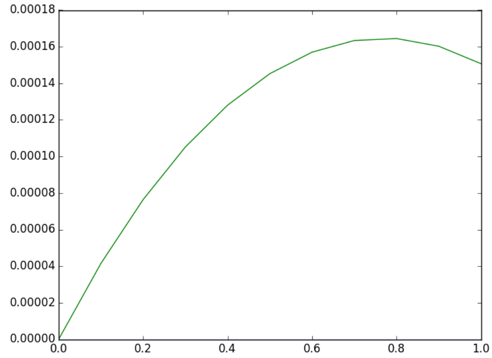


Рис. 4: Погрешность решения на ребре γ_1 при $N = 100$

В приложении представлены тексты разработанных программ.



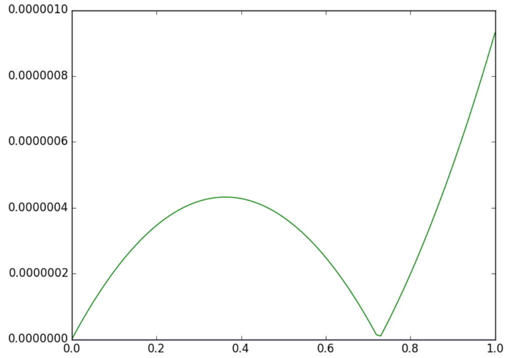
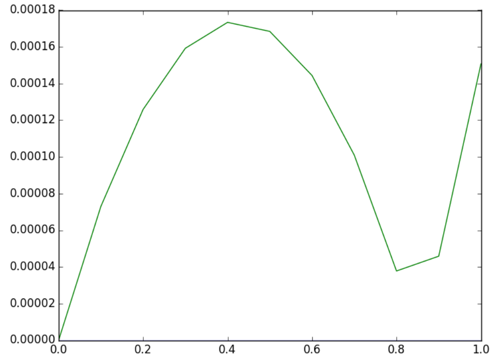


Рис. 5: Погрешность решения на ребре γ_2 при $N = 10$

Рис. 6: Погрешность решения на ребре γ_2 при $N = 100$



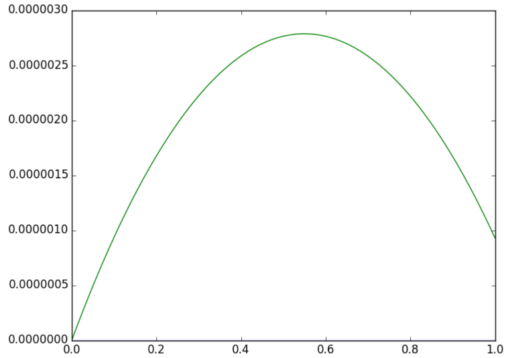
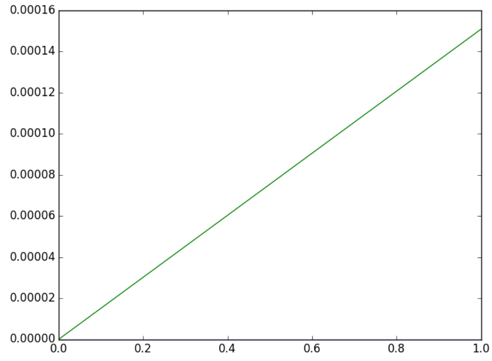


Рис. 7: Погрешность решения на ребре γ_3 при $N = 10$

Рис. 8: Погрешность решения на ребре γ_3 при $N = 100$



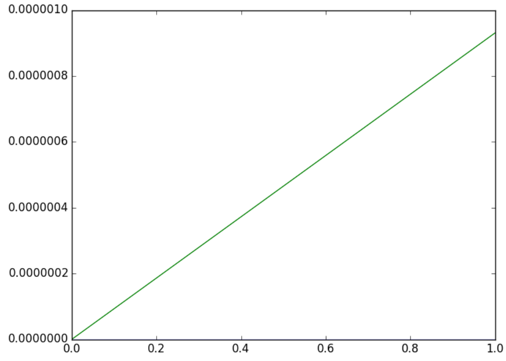


Рис. 9: Погрешность решения на ребре γ_4 при $N = 10$

Рис. 10: Погрешность решения на ребре γ_4 при $N = 100$

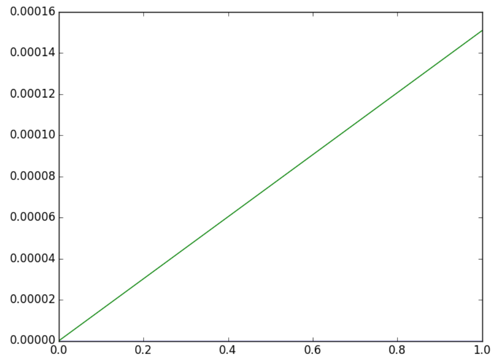


Рис. 11: Погрешность решения на ребре γ_5 при $N = 10$

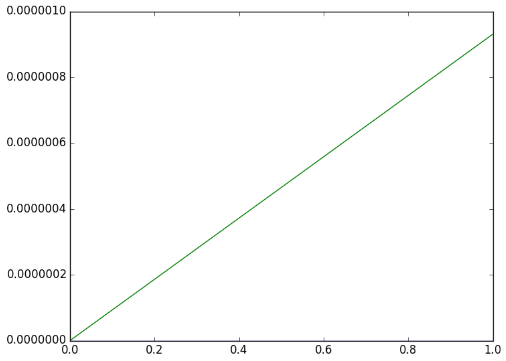


Рис. 12: Погрешность решения на ребре γ_5 при $N = 100$

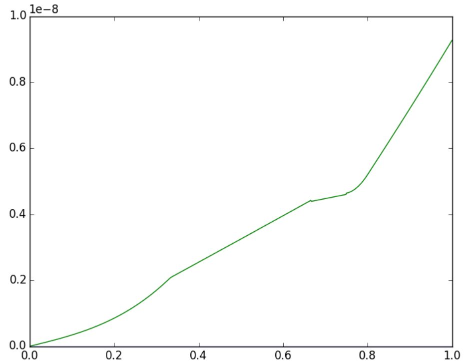


Рис. 13: Погрешность решения на ребре γ_1 при $N = 1000$

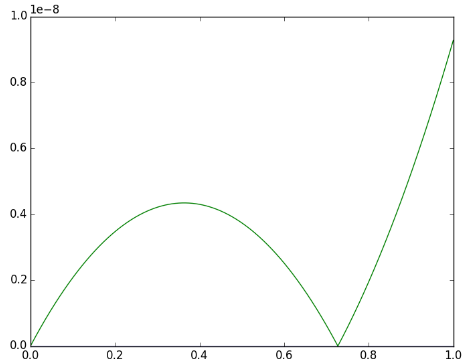


Рис. 14: Погрешность решения на ребре γ_2 при $N = 1000$

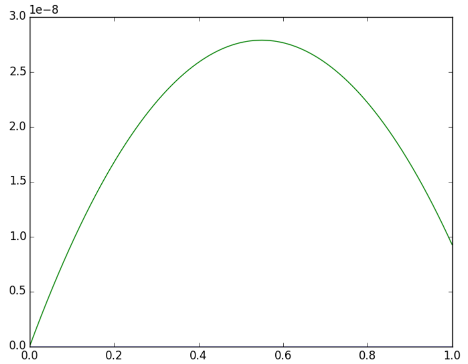


Рис. 15: Погрешность решения на ребре γ_3 при $N = 1000$

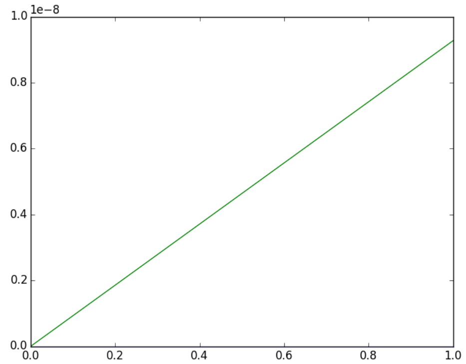


Рис. 16: Погрешность решения на ребре γ_4 при $N = 1000$

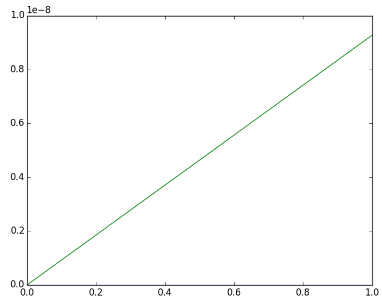


Рис. 17: Погрешность решения на ребре γ_5 при $N = 1000$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и малые вынужденные колебания растянутой сетки из струн с локализованными особенностями.

2. Доказательство корректности математических моделей на графе.

3. Доказательство возможности применения метода Фурье для математической модели малых вынужденных колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами.

4. Разработка эффективных численных методов решения рассматриваемых математических моделей.

5. Разработка программного комплекса для решения задач на графе с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях из перечня ВАК РФ

1. Лылов Е.В. Достаточные условия применимости метода Фурье к математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Научно-технический журнал "Теория и техника радиосвязи". — 2012. — №3.— С. 122–124.

2. Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М.Б. Зверева , С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — №1. — С. 97–105.

Публикации в других изданиях

3. Лылов Е.В. О достаточных условиях применимости метода Фурье

к математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XXIII". — Воронеж.— 2012. — С. 110.

4. Лылов Е.В. Математическая модель малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Взаимодействие математики и физики: новые перспективы: материалы Всероссийской молодежной научной школы. — Воронеж: ИПЦ "Научная книга".— 2012.— №3. — С. 3–4.

5. Лылов Е.В. Метод Фурье для математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов // Научно-аналитический журнал "Научная перспектива ".— 2012.— №6. — С. 88–90.

6. Лылов Е.В. О математической модели вынужденных колебаний сетки из струн / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования: материалы V Междунар.конф.— 2012. — С. 180–181.

7. Лылов Е.В. О методе Фурье для математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е.В. Лылов, С.А. Шабров // Актуальные проблемы математики, информатики и механики: сборник трудов международной конферен. — 2012 — С. 49–50.

8. Лылов Е.В. Оценка погрешности адаптированного метода конечных элементов для математических модели на геометрическом графе / Е.В. Лылов, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XXV". — 2014. — С. 132–133.

9. Шабров С.А. Адаптация метода конечных элементов для математических моделей на геометрическом графе / С.А. Шабров, Е.В. Лылов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы". — Воронеж. — 2013. — С. 275–277.