Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Брянский государственный университет
имени Ивана Георгиевича Петровского»

На правах рукописи

Повприц Елена Викторовна

Характеризация следов и преобразование Коши линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах аналитических функций со смешанными нормами

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Шамоян Файзо Агитович

Брянск 2015

Содержание

Введение

Актуальность темы. В комплексном анализе и его многочисленных приложениях важную роль играют пространства Харди и Бергмана. Методы, разработанные в процессе решения задач, связанных с этими пространствами, нашли существенные приложения в теории рядов и интегралов Фурье, в теории сингулярных интегральных операторов и в других разделах комплексного и гармонического анализа. В последние десятилетия по этому направлению опубликовано несколько монографий. Среди них отметим монографии У. Рудина [11], [12], А. Е. Джрбашяна и Ф. А. Шамояна [30], Х. Хеденмальма, Б. И. Коренблюма и К. Жу [34], Н. К. Никольского [41], К. Сейпа [43], Ф. А. Шамояна и Е. Н. Шубабко [24].

В одномерном случае пространства Харди и Бергмана исследованы довольно полно, в то же время ряд важных вопросов, относящихся к весовым пространствам аналитических функций типа Харди и Бергмана в поликруге, сравнительно мало изучен. При этом задачи, связанные с указанными пространствами, имеют широкие приложения в теории кратных тригонометрических рядов и других вопросах многомерного гармонического и комплексного анализа, теории функциональных пространств. Поэтому тематика диссертационной работы весьма актуальна.

Приведём обзор некоторых результатов, тесно связанных с тематикой диссертационной работы. Для этого введем необходимые определения и обозначения.

Пусть

$$U^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n) : |z_j| < 1, 1 \le j \le n\} \tag{0.1}$$

- единичный поликруг n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$,

$$T^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n) : |z_j| = 1, 1 \le j \le n\} \tag{0.2}$$

- единичный тор (остов поликруга U^n), $H(U^n)$ - множество всех аналитических в U^n функций, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ - некоторая вектор-функция, заданная на $Q_n = [0; 1)^n$, $H^p(U^n)$ - класс Харди в U^n.

Обозначим через Ω множество всех положительных функций ω, суммируемых на интервале $(0, 1)$ для которых существуют положительные числа m_ω,

M_ω, q_ω такие, что $m_\omega, q_\omega \in (0,1)$ и

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega,$$

$\forall r \in (0,1), \lambda \in [q_\omega; 1]$. Простым примером таких функций является функция вида: $\omega(x) = x^\alpha (\ln\ln ... \ln \frac{C}{x})^\beta$, где C - положительное число, которое не зависит от x, $\alpha > -1$, $\beta \in R$.

Пусть $\omega \in \Omega$, тогда $\alpha_\omega := \frac{\ln m_\omega}{\ln q_\omega}$, $\beta_\omega := \frac{\ln M_\omega}{\ln \frac{1}{q_\omega}}$.

Если $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, $\zeta_j = \rho_j e^{i\theta_j}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, тогда $z^\alpha = z^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $(1-|z|^2)^\alpha := \prod_{j=1}^n (1-|z_j|^2)^{\alpha_j}$, $(1-\zeta z)^\alpha := \prod_{j=1}^n (1-\zeta_j z_j)^{\alpha_j}$, здесь и везде ниже выбрана главная ветвь степенной функции. Также, если $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega_j \in \Omega$, $j = 1, ..., n$, тогда $\omega_\Pi(1-r) := \prod_{j=1}^n \omega_j(1-r_j)$, $\omega_\Pi^s(1-r) := \prod_{j=1}^n \omega_j^s(1-r_j)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $r = (r_1, ..., r_n) \in Q_n$.

Через $L^{p,q}_\omega(U^n)$ обозначим класс измеримых по Лебегу в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{p,q}_\omega} = \left(\int_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \left(\int_{T^n} |f(rw)|^p dm_n(w) \right)^{\frac{q}{p}} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, \quad 0 < p, q < +\infty,$$

где dm_n есть мера Лебега на T^n.

Здесь и в дальнейшем для краткости изложения мы будем называть $\|f\|_{L^{p,q}_\omega}$ нормой и в том случае, когда $\min(p,q) < 1$, хотя по существу отображение $f \to \|f\|_{L^{p,q}_\omega}$ является нормой только, когда $1 \le p, q \le +\infty$.

Теория функциональных пространств со смешанными нормами типа $L^{p,q}_\omega(U^n)$ берет свое начало в 60-х годах прошлого столетия из работ А. Бенедека и Р. Панцоне [26]. По этим вопросам опубликован ряд фундаментальных трудов. Полученные результаты освещены в хорошо известных монографиях С. М. Никольского [10], О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [3], Х. Трибеля [13].

Положим $A^{p,q}_\omega(U^n) = H(U^n) \cap L^{p,q}_\omega(U^n)$ с соответствующей квази-нормой.

Ясно, что, если f принадлежит $H^p(U^n)$ или $A^{p,q}(U^n)$, то функция $D(f)(z) := f(z, ..., z)$ является аналитической функцией в $U := U^1$. Естественно возникает вопрос о полной характеризации таких аналитических в круге функций, то есть описание следов классов Харди на диагонали поликруга U^n. Проблема характеризации следов функции из класса Харди $H^p(U^n)$ на диагонали поликруга впервые была поставлена и исследована в классической монографии У. Рудина [11]. Он установил, что если $f \in H^1(U^2)$, то $D(f) \in A_1^{1,1}(U)$; если $f \in H^2(U^2)$, то $D(f) \in A_1^{2,2}(U)$ и при этом $DH^2(U^2) = A_1^{2,2}(U)$. Здесь существенно было использовано то, что $H^2(U^2)$ является гильбертовым пространством. В указанной монографии У. Рудиным были поставлены следующие проблемы:

1. отображает ли оператор D $H^1(U^2)$ на $A_1^{1,1}(U)$;
2. как охарактеризовать сужение классов Харди $H^p(U^n)$ на диагональ полидиска при $n \geq 2, 0 < p < +\infty$.

В этом направлении одновременно и независимо друг от друга работали несколько специалистов комплексного анализа.

Пусть $h^p(U^n)$ - класс Харди n-гармонических в поликруге U^n функций, то есть множество всех n-гармонических в U^n функций, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{T^n} |u(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) < +\infty.$$

В работе [31] П. Дьюрен и А. Шилдс установили, что если $u \in h^p(U^n)$, причем $2 \leq p < +\infty$, то $D(u) \in L^p(U, \mu_n)$, где $d\mu_n(\zeta) = (1-|\zeta|)^{n-2} dm_2(\zeta)$, $dm_2(\zeta)$ - плоская мера Лебега на U.

В статье [19] Ф. А. Шамоян получил следующие результаты:

Пусть μ - конечная мера в круге U, тогда следующие утверждения эквивалентны:

i) Оператор диагонального отображения D отображает класс $h^p(U^n)$ в $L^p(U, d\mu)$, для некоторого $p_0,\ 1 < p_0 < +\infty$;

ii) Это утверждение справедливо для всех $1 < p < +\infty$;

iii) Существует константа A, такая что $\mu(\Delta_l(\zeta)) \leq Al^n$, $\forall \zeta \in T^1 = T, \quad 0 < l < 1$, где $\Delta_l(\zeta)$ - прямоугольник Карлесона: $\Delta_l(\zeta) = \{z \in U : |\arg\zeta - \arg z| < \frac{l}{2}, \quad 1 - l < |z| < 1\}$.

При этом было установлено, что указанное утверждение неверно при $0 < p \leq 1$.

Очевидно, что мера $d\mu(r,\varphi) = (1-r)^{n-2} r dr d\varphi$ удовлетворяет условию iii).

На основе этих результатов Ф. А. Шамоян установил, что $DH^p(U^n) = A^p_{n-2}(U)$ при всех $0 < p < +\infty$.

Одновременно с Ф. А. Шамояном и независимо от него другими методами последний результат в частном случае при $p \geq 1$ был получен в работе [35] С. Горовица и Е. Оберлина. В [29] Дж. Детрас были переоткрыты результаты Ф.А. Шамояна при $0 < p \leq 1, n = 2$. Диагональное отображение в пространстве $A^{p,p}_{\alpha}(U^n)$ при $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), 0 < p < +\infty$ было исследовано в [22] Ф. А. Шамояном.

Впервые задача о диагональном отображении в пространствах со смешанными нормами была решена в работах Ф. А. Шамояна и О. В. Ярославцевой в работе [44]. В их работах рассматривалась следующая задача: Пусть $\overrightarrow{p} = (p_1, ..., p_n)$, $0 < p_j < +\infty$, $1 \leq j \leq n$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\widetilde{\omega}_p(t) = \omega_n(t) \prod\limits_{j=1}^{n-1} (\omega_j(t) t^2)^{\frac{p_n}{p_j}}, t \in [0;1)$, $A^{\overrightarrow{p}}_{\omega}(U^n)$ - пространство голоморфных в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{A^{\overrightarrow{p}}_{\omega}(U^n)} = \Big(\int\limits_U \omega_n(1-|z_n|) \Big(\int\limits_U \omega_{n-1}(1-|z_{n-1}|) ... \times$$

$$\times \Big(\int\limits_U |f(z)|^{p_1} \omega_1(1-|z_1|) dm_2(z_1) \Big)^{\frac{p_2}{p_1}} ... dm_2(z_{n-1}) \Big)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dm_2(z_n) \Big)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty.$$

И $A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}(U)$ - пространство голоморфных в U функций f, для которых

$$\|f\|_{A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}} = \Big(\int\limits_U |f(z)|^{p_n} \widetilde{\omega}_p(1-|z|) dm_2(z) \Big)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty.$$

Тогда оператор D отображает $A^{\overrightarrow{p}}_{\omega}(U^n)$ на $A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}(U)$, то есть $DA^{\overrightarrow{p}}_{\omega}(U^n) = A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}(U)$, где D - оператор диагонального отображения.

В дальнейшем, Г. Рен и Дж. Ши в [42] исследовали задачу о диагональном отображении в пространствах $A^{p,q}(U^n)$ при $\omega_j(t_j) = t_j^{\alpha_j}$, $j = 1, ..., n$. Однако методы, применяемые в этой работе, не проходят в случае общих весовых пространств. Указанные методы уже неприменимы даже в случае, когда

$\omega_j(t) = t^{\alpha_j}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\beta}$, $t \in (0;1)$, $j = 1,...,n$. Поэтому вопрос о характеризации следов аналитических функций из весовых анизотропных пространств со смешанными нормами на диагонали полидиска оставался открытым.

Хорошо известно, что для изучения весовых пространств аналитических функций важное значение имеет описание линейных непрерывных функционалов этих пространств в терминах соответствующих пространств аналитических функций. Результаты, связанные с данной тематикой, имеют обширные приложения в различных вопросах комплексного и гармонического анализа: теории аппроксимации и интерполяции, описании инвариантных подпространств оператора сдвига, теории операторов и т.д. Этим вопросам посвящены работы В. П. Захарюта и В. И. Юдовича [7], П. Дьюрена, А. Шилдса, Б. Ромберга[46], А. Фразье [33], К. Хана и Дж. Мичелл [39], Ф. А. Шамояна [17], [22].

Вопрос об описании линейных непрерывных функционалов в многомерных анизотропных весовых пространствах $A^{p,q}_{\omega}$ аналитических функций со смешанными нормами при всех $0 < p,q < +\infty$ по-прежнему остаётся весьма актуальным.

В теории классов Харди существенную роль играет внешне-внутренняя факторизация, построенная еще в начале 20-го столетия в классических работах Г. Сегё, М. Рисса, Р. Неванлинны, В. И. Смирнова.

Отметим, что хорошо известно следующее мультипликативное представление класса Харди H^p для одномерного случая: $f \in H^p(U)$ тогда и только тогда, когда f допускает факторизацию:

$$f(z) = Cz^m \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}\frac{\overline{z}_k}{|z_k|} \exp\left\{ -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)\right\}\times$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta\right\}, z \in U, \qquad (0.3)$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - произвольная последовательность из единичного круга U, удовлетворяющая условию Бляшке, то есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) < +\infty$;
$d\mu$ - неотрицательная сингулярная мера на $(-\pi;\pi]$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $|C| = 1$.

Функция

$$I_f = z^m \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} \exp\left\{ -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta) \right\}$$

называется внутренней часть функции f, а

$$Q_f = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \ln|f(e^{i\theta})| d\theta \right\}$$

- внешней частью f.

Говорят, что внутренняя функция I_1 делит внутреннюю функцию I_2, если $\frac{I_2}{I_1} \in H^\infty$.

Одно из основных свойств факторизации (0.3) заключается в том, что если $f \in H^p(U)$ и I делит внутреннюю часть f, то $\frac{f}{I} \in H^p$(см. [5]).

Отметим важную особенность: указанным свойством обладают не только функции из класса $H^p(U)$, но и гораздо более узкие классы аналитических функций в единичном круге, гладкие вплоть до его границы (см. [28], [8], [9]). Как установили В.П. Хавин [15] и Ф.А. Шамоян [16] в этих вопросах существенную роль играет ограниченность тёплицевых операторов вида

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta, z \in U,\ h \in H^\infty$$

в соотвествующих пространствах при условии, что символ h оператора принадлежит H^∞ (см. [17], [18], [21], [25]).

Другие подходы к вопросам деления предложены в работах С. А. Виноградова и Н. А. Широкова (см. [4], [47]), К. М. Дьяконова (см. [32]). Обзор этих и других результатов приведен в монографиях [47], [24].

Операторы T_h применяются не только в теории факторизации, они также имеют широкие приложения во многих областях комплексного и функционального анализа таких, как исследование замкнутых идеалов в алгебрах аналитических функций, изучение инвариантных подпространств оператора сдвига, в вопросах исследования метрических проекций и др. Кроме того тёплицевы операторы находят своё применение в прикладной математике и физике [27],

[40], [41]. Таким образом, естественно возникает задача получения многомерных аналогов этих результатов, в том числе в классах голоморфных в поликруге функций и гладких вплоть до его границы.

Однако следует отметить, что поведение кратных тёплицевых операторов существенно отличается от одномерного случая. Так, например, аналог классической теоремы И. И. Привалова об ограниченности интегралов типа Коши в гёльдеровких классах, как установила в [37] Б. Ёрикке, в случае единичного тора не имеет места.

Цель работы.

1. Дать полное описание следов весовых анизотропных пространств аналитических в поликруге функций со смешанной нормой на диагонали поликруга.

2. Получить полную характеризацию преобразования Коши линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой.

3. Дать полную характеризацию тех плюригармонических символов, при которых кратный тёплицев оператор с соответствующим символом действует в весовом анизотропном пространстве Соболева аналитических в поликруге функций.

Методы исследования. В работе применялись общие методы комплексного и функционального анализа, теории сингулярных интегральных операторов. Важную роль играют интегральные представления исследуемых классов.

Научная новизна.
В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получена полная характеризация следов весовых анизотропных пространств аналитических в поликруге функций со смешанной нормой на диагонали поликруга.

2. Получено полное описание преобразования Коши линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой.

3. Описаны те плюригармонические символы, при которых кратный тёплицев оператор с соответствующим символом действует в весовом анизотропном пространстве Соболева аналитических в поликруге функций.

Практическая и теоретическая значимость.
Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты исследования могут быть использованы в многомерном гармоническом анализе, в теории функциональных пространств, в теории сингулярных интегральных операторов, при исследовании вопросов представления и описания двойственных пространств, вопросов аппроксимации, при изучении операторов сдвига в весовых пространствах аналитических функций, а также могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей университетов.

Апробация результатов диссертации.
Основные результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2011 г.), «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 2011 г.-2013 г.), «Комплексный анализ и приложения» (Петрозаводск, 2012 г.), на Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (2014 г.), а также неоднократно на семинарах по комплексному анализу Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского.

Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект №13-353 01-97508) и Министерства образования и науки РФ (проект №1.1704.2014К).

Публикации.
Результаты исследований нашли отражение в работах: [49]–[58]. Работы [49]–[51] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В совместных работах [50, 51, 55, 57, 58] научному руководителю принадлежат постановка задачи и идея доказательства.

Структура и объем диссертации.
Работа состоит из введения, двух глав, разбитых в общей сложности на 6 параграфов, списка использованной литературы и занимает 116 страниц. Библиография содержит 48 наименований.

Содержание диссертации.

Первая глава диссертационной работы посвящена вопросам диагонального отображения и эквивалентности норм в анизотропных аналитических пространствах со смешанными нормами в поликруге U^n.

Для формулировки основных результатов введем дополнительные обозначения.

Будем писать $f(\zeta) \lesssim g(\zeta), \zeta \in E$, если существует положительное число $A > 0$, такое что $f(\zeta) \leq Ag(\zeta), \zeta \in E$, где f и g - две вещественнозначные функции с общей областью определения E. Скажем также $f \approx g$ на E, если $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$.

Если $f \in H(U^n)$, $f(z) = f(z_1, ..., z_n) = \sum\limits_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} a_{k_1...k_n} {z_1}^{k_1} ... {z_n}^{k_n}$ и $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $\beta_j > -1$, $1 \leq j \leq +\infty$, то назовем дробной производной порядка β в смысле Римана-Лиувилля следующую голоморфную функцию:

$$D^\beta f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k, \tag{0.4}$$

где $|k| = k_1 + ... + k_n$, Γ - функция Эйлера, $\Gamma(k+\beta+1) = \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(k_j + \beta_j + 1)$.

Ясно, что если $f \in H(U^n)$, тогда $D^\beta f(z) \in H(U^n)$, для всех β.

Пусть $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$, $0 < p, q < +\infty$ и $D(f)(z) = f(z, ..., z)$, $\omega_j \in \Omega$, $1 \leq j \leq n$, пусть далее $z \in U$,

$$\Omega_n(r) = r^{\left(\frac{q}{p}+1\right)(n-1)} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(r), \quad r \in (0,1).$$

Через $A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$ обозначим весовой класс аналитических в единичном круге U функций f, для которых

$$\|f\|_{A^{p,q}_{\Omega_n}} = \left(\int\limits_0^1 \Omega_n(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(rw)|^p dm(w) \right)^{\frac{q}{p}} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, \quad 0 < p, q < +\infty.$$

В *первом параграфе* первой главы установлен результат, который, наряду с другими вспомогательными утверждениями, используется при доказательстве основных теорем. Однако, на наш взгляд, это утверждение имеет также самостоятельный интерес.

Теорема 1.1. *Пусть* $\omega_j \in \Omega$, $\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t) \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)} \right)^q$, $t \in (0,1)$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$\alpha > \alpha_\omega$, $1 < p, q < +\infty$. Тогда оператор

$$T_\alpha(f)(z) = \int\limits_{U^n} \frac{\omega_\Pi(1-|\xi|)}{(1-\overline{\xi}z)^{\alpha+2}} f(\xi) dm_{2n}(\xi), \quad z \in U^n$$

отображает пространство $L^{p,q}_\omega(U^n)$ в пространство $A^{p,q}_{\omega_\alpha}(U^n)$, причем

$$\|T_\alpha f\|_{A^{p,q}_{\omega_\alpha}} \lesssim \|f\|_{L^{p,q}_\omega}.$$

Отметим, что указанный результат является точным.

Во *втором параграфе* первой главы получена полная характеризация следов функций из пространства $A^{p,q}_\omega(U^n)$ на диагонали поликруга, а именно установлен следующий результат:

Теорема 1.2. *Пусть $\omega_j \in \Omega$, $1 \le j \le n$, $0 < p, q < +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) функция $g \in H(U)$ представима в виде $g(z) = D(f)(z)$, $z \in U$, $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$;

2) $g \in A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$, то есть $DA^{p,q}_\omega(U^n) = A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$.

Напомним, что $D(f)(z) = f(z, ..., z)$, $z \in U$, $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$.

Последний параграф первой главы посвящен проблеме, связанной с хорошо известной теоремой Харди-Литтлвуда, об оценке $L^{p,q}_\omega$ - нормы аналитической функции через норму ее производной. Указанная теорема обобщается по трем направлениям: во-первых, теорема распространяется на многомерный случай, во-вторых, используется дробная производная любого порядка, и, в третьих, устанавливаются соответствующие оценки в случае смешанных норм.

Введём дополнительные обозначения.

Пусть $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \ge 0, \ j = 1, ..., n\}$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega_j \in \Omega$, тогда определим $\widehat{\omega}(t) = \prod\limits_{j=1}^n \omega_j(t_j) t_j^{m_j q}$, $t_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., n$.

В *третьем параграфе* первой главы, в частности, установлена справедливость следующего утверждения:

Теорема 1.3. *Пусть $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{R}^n_+$,*

$0 < p, q < +\infty$, *тогда справедливы следующие оценки*

$$\|D^m f\|_{A^{p,q}_{\widetilde{\omega}}(U^n)} \lesssim \|f\|_{A^{p,q}_{\omega}(U^n)} \lesssim \|D^m f\|_{A^{p,q}_{\widetilde{\omega}}(U^n)}. \qquad (0.5)$$

Первый параграф второй главы диссертационной работы посвящен решению задачи, связанная с описанием линейных непрерывных функционалов в терминах преобразования Коши в пространствах аналитических функций со смешанной нормой при $1 < p, q < +\infty$.

Напомним, что, если $\Phi \in (A^{p,q}_{\omega}(U^n))^*$, то преобразованием Коши этого функционала называется следующая функция:

$$g(z) = \Phi(e_z), \ \texttt{где}\ e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\zeta_j z_j},$$

$\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n), z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Ясно, что функция g является аналитической в U^n функцией. Отметим, что в случае, когда p, q принадлежат $(1, +\infty)$, или $(0, 1]$, а также, в случае, когда один из параметров принадлежит интервалу $(0, 1]$, а другой - интервалу $(1; +\infty)$, характеризация преобразования Коши имеет совершенно различное описание. При $1 < p, q < +\infty$ справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть* Φ *- линейный непрерывный функционал на* $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, *и* $g(z) = \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z}$, $\zeta,\ z \in U^n$, $1 < p, q < +\infty$. *Тогда* $g \in H(U^n)$ *и* $D^{\alpha+1} g \in A^{p',q'}_{\omega_\alpha}(U^n)$ *для* $\alpha > \alpha_\omega$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{q-1}$, $\omega_\alpha(t) = \omega(t)\left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)}\right)^{q'}$, $t \in Q_n$.

Функционал Φ *представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta) \qquad (0.6)$$

и справедливы оценки

$$\|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}_{\omega_\alpha}} \lesssim \|\Phi\| \lesssim \|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}_{\omega_\alpha}}. \qquad (0.7)$$

Верно и обратное: любая $g \in H(U^n)$ *такая, что* $D^{\alpha+1} g \in A^{p',q'}_{\omega_\alpha}$ *по формуле* (0.6) *порождает линейный непрерывный функционал на* $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$ *для ко-*

торого справедливы оценки (0.7).

Для формулировки следующего утверждения нам потребуются еще некоторые определения и обозначения.

Пусть $0<p,q\le 1$, обозначим через $\lambda_\omega^{p,q}$ класс аналитических в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{\lambda_\omega^{p,q}}=\sup_{z\in U^n}\left[\frac{(1-|z|)^{\alpha-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2}}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|z|)}|D^{\alpha+1}g(z)|\right]=$$

$$=\sup_{z=(z_1,\dots,z_n)\in U^n}\left[\prod_{j=1}^n\frac{(1-|z_j|)^{\alpha_j-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2}}{\omega_j^{\frac{1}{q}}(1-|z_j|)}|D^{\alpha+1}g(z)|\right]<+\infty,$$

где $\alpha_j>\frac{\alpha_{\omega_j}+1}{q}+\frac{1}{p}-2,\ \ 1\le j\le n.$

Если $0<p\le 1,\ \ 1<q<+\infty$, обозначим через $\widetilde{\lambda}_\omega^{p,q}$ множество всех голоморфных в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{\widetilde{\lambda}_\omega^{p,q}}=\left(\int\limits_{Q_n}\frac{(1-r)^{\alpha q'-\frac{q'}{p}+q'}}{\omega_\Pi^{\frac{q'}{q}}(1-r)}\left(\sup_{z\in T^n}|D^{\alpha+1}g(rz)|\right)^{q'}rdr\right)^{\frac{1}{q'}}=$$

$$=\left(\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n\frac{(1-r_j)^{\alpha_j q'-\frac{q'}{p}+q'}}{\omega_j^{\frac{q'}{q}}(1-r_j)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sup_{z=(z_1,\dots,z_n)\in T^n}|D^{\alpha+1}g(r_1z_1,\dots,r_nz_n)|\right)^{q'}r_1\dots r_ndr_1\dots dr_n\right)^{\frac{1}{q'}}<+\infty,$$

где $\alpha_j>\frac{\alpha_{\omega_j}}{q}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q'}-1,\ \ 1\le j\le n.$

И наконец, если $1<p<+\infty,\ \ 0<q\le 1$, обозначим через $\approx\!\!\lambda_\omega^{p,q}$ множество всех голоморфных в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{\approx\lambda_\omega^{p,q}}=\sup_{r\in Q_n}\left[\frac{(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}+1}}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-r)}\left(\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}}\right]=$$

$$=\sup_{r=(r_1,\dots,r_n)\in Q_n}\left[\prod_{j=1}^n\frac{(1-r_j)^{\alpha_j-\frac{1}{q}+1}}{\omega_j^{\frac{1}{q}}(1-r_j)}\times\right.$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^{p'}dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{1}{p'}}\Bigg]<+\infty,$$

где $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+1}{q} - 2,\ \ 1 \le j \le n.$

Для краткости введем также следующее обозначение

$$\Lambda^{p,q}_\omega = \begin{cases} \lambda^{p,q}_\omega, \texttt{если} & 0<p,q\le 1; \\ \widetilde{\lambda}^{p,q}_\omega, \texttt{если} & 0<p\le 1,\ 1<q<+\infty; \\ \approx^{p,q}_{\lambda_\omega}, \texttt{если} & 1<p<+\infty,\ 0<q\le 1. \end{cases}$$

Хорошо известно, что если один из параметров p или q меньше единицы, то любой непрерывный функционал в пространстве $L^{p,q}_\omega(U^n)$ тождественно нулевой. В случае аналитических функций указанное утверждение, разумеется, неверно: например, линейным непрерывным функционалом в этих пространствах является значение функции $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$ в точке $\Phi_{z_0}(f) = f(z_0)$, $z_0 \in U^n$. В рассматриваемом случае верно утверждение, установленное во *втором параграфе* второй главы:

Теорема 2.2. *Пусть* p, q *принадлежат* $(0,1]$ *или один из параметров принадлежит интервалу* $(0,1]$*, а другой - интервалу* $(1;+\infty)$, $\omega_j \in \Omega$, $j=\overline{1,n}$. *Если* Φ *- линейный непрерывный функционал на* $A^{p,q}_\omega(U^n)$ *и* $g(z) = \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z}$, ζ, $z \in U^n$, *тогда* $g \in \Lambda^{p,q}_\omega$.

Функционал Φ *представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f(\rho\zeta)g(\rho\overline{\zeta})dm_n(\zeta), \tag{0.8}$$

и справедливы оценки

$$\|g\|_{\Lambda^{p,q}_\omega} \lesssim \|\Phi\| \lesssim \|g\|_{\Lambda^{p,q}_\omega}. \tag{0.9}$$

Верно и обратное: любая $g \in \Lambda^{p,q}_\omega$ *по формуле* (0.8) g *порождает линейный непрерывный функционал на* $A^{p,q}_\omega(U^n)$ *для которого справедливы оценки* (0.9).

Описание линейных непрерывных функционалов находит свое приложение в исследованиях, посвященных изучению тёплицевых операторов в пространствах аналитических функций.

Для изложения следующих результатов введём дополнительные обозначения и определения:

Анизотропным пространством Соболева $A_\omega(\alpha, m)$ назовём пространство голоморфных в поликруге U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{A_\omega(\alpha,m)} = \int\limits_{U^n} |D^m f(z)|\omega_\Pi(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}dm_{2n}(z) < +\infty, \qquad (0.10)$$

$m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n,\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+,\ z = (z_1, ..., z_n) \in U^n.$

Обозначим через $RP(U^n)$ - класс суммируемых на торе T^n функций h, коэффициенты Фурье которых равны нулю вне множества $Y_n = \mathbb{Z}^n_+ \cup \mathbb{Z}^n_-$ ($\mathbb{Z}^n_+ = \mathbb{Z}_+ \times ... \times \mathbb{Z}_+$, аналогично $\mathbb{Z}^n_- = \mathbb{Z}_- \times ... \times \mathbb{Z}_-$), то есть класс функций представимых на торе в виде $h(\zeta) = f(\zeta) + \overline{g}(\zeta),\ f, g \in H^1(U^n)$. Ясно, что эти функции являются граничными значениями плюригармонических в единичном поликруге функций.

Кратным операторм Тёплица назовем интегральный оператор вида

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in U^n, \qquad (0.11)$$

где $h \in L^1(T^n), f \in C_A(U^n),\ C_A(U^n) = C(U^n \cup \partial U^n) \cap H(U^n)$.

Пусть $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ - вектор-функция типа модуля непрерывности, то есть ω_j -неубывающие неотрицательные на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ функции, такие что функции $t_j \to \frac{\omega_j(t_j)}{t_j}$ не возрастают на $\mathbb{R}_+$.

Если $(k_1, ..., k_n)$ некоторая перестановка чисел $(1, 2, ..., n)$, $n \in N$, $1 \le r \le n$. Тогда кортежем порядка r назовем вектор с координатами $(k_1, ..., k_r)$, множество всех кортежей порядка r обозначим через K_r. Ясно, что, если $1 \le r, m \le n$, то $(k_1, ..., k_r) = (s_1, ..., s_m)$ тогда и только тогда, когда $r = m$, $s_i = k_i$, $i = 1, ..., r$.

И, наконец, если X - некоторое квазинормированное пространство, то через $L(X)$ обозначим множество линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве X.

В *третьем параграфе* второй главы найден критерий ограниченности оператора Тёплица в весовом анизотропном пространстве Соболева голоморфных в поликруге функций. Установлены утверждения:

Теорема 2.3. *Пусть* $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\omega-$ *функция типа модуля непрерывности на* Q_n, $h-$ *функция из класса* $RP(U^n)$, $\int\limits_0^1 \frac{\omega_j(u)du}{u} < +\infty$, $j = 1, ..., n$.

1. *Если* $m_j \leq \alpha_j$, $j = 1, ..., n$, *то следующие утверждения равносильны:*

   a. $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$;

   b. *функция* h *допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n,$$

   где h_1, h_2 *являются граничными значениями функций, голоморфных в* U^n, *при этом* h_1 *- мультипликатор пространства* $A_\omega(\alpha, m)$, $D^{-m}h_2 \in \Lambda^\alpha_\omega$, *где* $D^{-m}-$ *оператор, обратный к оператору* D^m.

2. *Если* $m_j \geq \alpha_j + 2$, $j = 1, ..., n$, *то следующие утверждения равносильны:*

   a. $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$;

   b. h *допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n,$$

   где $h_1 \in A_\omega(\alpha, m), h_2 \in H^\infty(U^n)$.

В случае, когда $m_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, ..., n$ возникают дополнительные ограничения на функцию h, а именно справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.4. *Пусть* $h \in H^1(U^n)$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $m_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, ..., n$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

1. T_h *является ограниченным оператором в пространстве* $A_\omega(\alpha, m)$;

2. *функция* $h \in H^\infty(U^n)$, *причем для любого кортежа* $k = (k_1, ..., k_p) \in K_p$

справедлива оценка

$$\sup_{z\in U^n}\left\{\left|\frac{\partial^p h(z_1,...,z_p)}{\partial z_{k_1}...\partial z_{k_p}}\right|\prod_{j=1}^{p}\frac{(1-|z_{k_j}|)^2}{\omega_{k_j}(1-|z_{k_j}|)}\int\limits_{1-|z_{k_j}|}^{1}\frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2}du\right\}< +\infty, \qquad (0.12)$$

$z=(z_1,...,z_n)\in U^n$.

Теоремы 2.3 и 2.4 имеют интересные приложения в теории факторизации. А именно справедлива следующая теорема о делении аналитической функции:

Для формулировки следующего результата сначала приведем некоторые определения.

Скажем, что функция $J \in H^\infty(U^n)$ называется внутренней, если $|J(\zeta)|=1$, почти всюду по мере Лебега на T^n.

Пусть J_1 и J_2 две внутренние функции в U^n. Скажем, что внутренняя функция J_1 делится на J_2, если $\frac{J_1}{J_2}\in H^\infty(U^n)$. Также скажем, что функция $f\in H^1(U^n)$ делится на внутреннюю функцию J, если $\frac{f}{J}\in H^1(U^n)$.

Теорема 2.5. *Пусть* $F\in H^1(U^n)\cap A_\omega(\alpha,m)$ *причем* $F(z)=J(z)f(z)$, $z\in U^n$. *Тогда если* $f\in H^1(U^n)$, *то* $\frac{F}{J}=f\in H^1(U^n)\cap A_\omega(\alpha,m)$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за постановку задач и постоянное внимание к работе.

1 Диагональное отображение и теорема типа Харди-Литтлвуда в весовых анизотропных пространствах аналитических в поликруге функций со смешанной нормой

Первая глава диссертационной работы посвящена вопросам диагонального отбражения и оценке норм в анизотропных аналитических пространствах со смешанными нормами в U^n. В первом параграфе главы решается задача, связанная с построением оператора, который отображает пространство функций, интегрируемых по Лебегу на пространство голоморфных в поликруге функций. Второй параграф этой главы посвящен вопросам полной характеризации аналитических функций из единичного круга, которые являются сужением на диагонали поликруга аналитических функций из весовых анизотропных пространств со смешанной нормой, т.е. из $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$. В третьем параграфе устанавливается теорема об оценке смешанных норм аналитических в U^n функций через соотвествующие нормы их производных.

1.1 Теорема об ограниченном проекторе в весовых анизотропных пространствах голоморфных функций со смешанной нормой

Доказательства основных результатов первой главы потребуются некоторые вспомогательные результаты. С этой целью определим следующую функцию $\chi_\gamma(\rho) := \frac{1}{(1-\rho)^{\frac{\gamma}{qp}}} := \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-\rho_j)^{\frac{\gamma}{qp}}}$, $0<\gamma<\frac{1}{pp'}$, $p'=\frac{p}{p-1}$.

Лемма 1.1 (см. [23]). *Пусть* $\omega_j \in \Omega$, *и* $0<\gamma_j<1-\beta_{\omega_j}$, $\alpha_j>-1$ $j=1,...,n$, *тогда*

$$\int\limits_{Q_n} \frac{\omega_{\Pi}(1-\rho)\chi_\gamma(\rho)d\rho}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \lesssim \frac{\omega_{\Pi}(1-r)\chi_\gamma(r)}{(1-r)^{\alpha}}, \tag{1.1}$$

$r=(r_1,...,r_n)\in Q_n$.

В этом параграфе мы изучаем поведение некоторых интегральных операторов в пространствах $L^{p,q}_{\omega}(U^n)$ при $1 \leq p, q < +\infty$. Аналог рассматриваемого результата в частном случае, когда $p = q$, был доказан ранее в работе [23].

Теорема 1.1. *Пусть* $\omega_j \in \Omega$, $\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t)\left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)}\right)^q$, $t \in (0,1)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\alpha > \alpha_\omega$, $1 < p, q < +\infty$. *Тогда оператор*

$$T_\alpha(f)(z) = \int\limits_{U^n} \frac{\omega_\Pi(1-|\xi|)}{(1-\overline{\xi}z)^{\alpha+2}} f(\xi) dm_{2n}(\xi), \quad z \in U^n$$

отображает пространство $L^{p,q}_{\omega}(U^n)$ *в пространство* $A^{p,q}_{\omega_\alpha}(U^n)$, *причем*

$$\|T_\alpha f\|_{A^{p,q}_{\omega_\alpha}} \lesssim \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}}.$$

Доказательство. Предположим, что $f \in L^{p,q}_{\omega}(U^n)$, тогда, применяя неравенство Минковского, имеем

$$\left(\int\limits_{T^n} |T_\alpha(f)(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{T^n} \left| \int\limits_{Q_n} \int\limits_{T^n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho\zeta\overline{w})^{\alpha+2}} f(\rho w) dm_n(w) \rho d\rho \right|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_n} \left(\int\limits_{T^n} \left| \int\limits_{T^n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho\zeta\overline{w})^{\alpha+2}} f(\rho w) dm_n(w) \right|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \rho d\rho.$$

Затем мы применим неравенство Гельдера с $p' = \frac{p}{p-1}$

$$\left(\int\limits_{T^n} |T_\alpha(f)(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_{Q_n} \left(\int\limits_{T^n} \int\limits_{T^n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{|1-r\rho\zeta\overline{w}|^{\alpha+2}} |f(\rho w)|^p dm_n(w) \times\right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{T^n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{|1-r\rho\zeta\overline{w}|^{\alpha+2}} dm_n(w)\right)^{\frac{p}{p'}} dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \rho d\rho.$$

Легко видеть, что
$$\int\limits_{T^n} \frac{dm_n(w)}{|1-r\rho\zeta\overline{w}|^{\alpha+2}} \lesssim \frac{1}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}.$$
Тогда, принимая это во внимание и меняя порядок интегрирования получаем

$$\left(\int\limits_{T^n} |T_\alpha(f)(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi^{\frac{1}{p'}}(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\frac{\alpha+1}{p'}}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{T^n} \omega_\Pi(1-\rho)|f(\rho w)|^p \int\limits_{T^n} \frac{dm_n(\zeta)}{|1-r\rho\zeta\overline{w}|^{\alpha+2}} dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}} \rho d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi^{\frac{1}{p'}}(1-\rho)\omega_\Pi^{\frac{1}{p}}(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\frac{\alpha+1}{p'}}(1-r\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{T^n} |f(\rho w)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}} \rho d\rho = \int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \left(\int\limits_{T^n} |f(\rho w)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}} \rho d\rho.$$

Возводим в степень $1 < q < +\infty$ и интегрируем полученную оценку по кубу Q_n

$$I := \int\limits_{Q_n} \omega_\alpha(1-r)\left(\int\limits_{T^n} |T_\alpha(f)(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}} r dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_\alpha(1-r)\left(\int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \left(\int\limits_{T^n} |f(\rho w)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}} \rho d\rho\right)^q r dr.$$

Далее, умножаем и делим правую часть последнего неравенства на функцию $\chi_\gamma(\rho)$, после чего применяем неравенство Гельдера с показателем $q' = \frac{q}{q-1}$

$$I \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_\alpha(1-r) \int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}\chi_\gamma^q(\rho)} \left(\int\limits_{T^n} |f(\rho w)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}} \rho d\rho \times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)\chi_\gamma^{q'}(\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\rho d\rho\right)^{\frac{q}{q'}} rdr.$$

Согласно (1.1) получаем

$$I \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_\alpha(1-r)\left(\frac{\omega_\Pi(1-r)\chi_\gamma^{q'}(r)}{(1-r)^\alpha}\right)^{\frac{q}{q'}} \int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}\chi_\gamma^q(\rho)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n} |f(\rho w)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}} \rho d\rho r dr. \tag{1.2}$$

Очевидно, что

$$\omega_\alpha(1-r)\left(\frac{\omega_\Pi(1-r)\chi_\gamma^{q'}(r)}{(1-r)^\alpha}\right)^{\frac{q}{q'}} = \omega_\Pi(1-r)\left(\frac{(1-r)^\alpha}{\omega_\Pi(1-r)}\right)^q \chi_\gamma^q(r)\left(\frac{\omega_\Pi(1-r)}{(1-r)^\alpha}\right)^{q-1} =$$

$$= (1-r)^\alpha\chi_\gamma^q(r), \quad r\in Q_n.$$

Тогда (1.2) примет вид

$$I \lesssim \int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^\alpha\chi_\gamma^q(r)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\left[\int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-\rho)}{\chi_\gamma^q(\rho)}\left(\int\limits_{T^n} |f(\rho w)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}} \rho d\rho\right] rdr.$$

Далее меняем порядок интегрирования и в соответствии с формулой (1.1) получим

$$I \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_\Pi(1-\rho)\left(\int\limits_{T^n} |f(\rho w)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}} \rho d\rho.$$

Итак, $\|T_\alpha f\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \lesssim \|f\|_{L^{p,q}_\omega}$. □

1.2 Диагональное отображение в анизотропных пространствах аналитических в поликруге функций со смешанной нормой

В следующей теореме даётся полная характеризация следов функций из пространства $A^{p,q}_\omega(U^n)$ на диагонали поликруга, а именно установливает результат:

Теорема 1.2. *Пусть* $\omega_j \in \Omega$, $1 \le j \le n$, $0 < p, q < +\infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) функция $g \in H(U)$ *представима в виде* $g(z) = D(f)(z)$, $z \in U$, $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$;

2) $g \in A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$, *то есть* $DA^{p,q}_{\omega}(U^n) = A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее утверждение:

Лемма 1.2. *Пусть* $f \in H(U^n), 0 < p \le 1$. *Тогда справедлива следующая оценка*

$$\prod_{j=1}^{n}(1-r_j^2)^{\frac{1}{p}-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}...\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})|d\varphi_1...d\varphi_n \lesssim$$

$$\lesssim\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}...\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I := \int\limits_{-\pi}^{\pi}...\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})|d\varphi_1...d\varphi_n =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}...\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})|^p|f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})|^{1-p}d\varphi_1...d\varphi_n.$$

Как хорошо известно для класса Харди справедлива следующая оценка(см. [11]):

Если $f \in H^p$, то

$$|f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})| \le \frac{C\|f\|_{H^p}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\frac{1}{p}}}, r = (r_1,...,r_n) \in Q_n.$$

Теперь, с учетом этой оценки, мы получим

$$|f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})|^{1-p} \lesssim \left(\frac{\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1e^{i\theta_1},...,r_ne^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n \right)^{\frac{1}{p}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\frac{1}{p}}} \right)^{1-p}.$$

Таким образом

$$I \lesssim \int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n \prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{1-\frac{1}{p}} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n \right)^{\frac{1}{p}-1}.$$

Теперь, используя свойство монотонности (1.14) функции ψ, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n.$$

Отсюда следует, что

$$I \lesssim \prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому

$$\prod_{j=1}^{n}(1-r_j^2)^{\frac{1}{p}-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1^2e^{i\varphi_1},...,r_n^2e^{i\varphi_n})| d\varphi_1...d\varphi_n \lesssim$$
$$\lesssim \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} ... \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Перейдем теперь к доказательству основного результата параграфа.

Доказательство теоремы 1.2

Докажем сначала включение $DA^{p,q}_{\omega}(U^n) \subset A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$. Обозначим $r_k = 1-\frac{1}{2^k}$, $r_{k+1} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ и $\alpha_{k,l} = \frac{\pi l}{2^k}$, $\alpha_{k,l+1} = \frac{\pi(l+1)}{2^k}$, и $f(z) = DF(z)$, $F \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, $z \in U$. Рассмотрим следующий интеграл

$$I := \|DF\|^q_{A^{p,q}_{\Omega_n}(U^n)} = \int\limits_0^1 \Omega_n(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} dr =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-r)(1-r)^{\left(\frac{q}{p}+1\right)(n-1)} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} dr.$$

Заметим, что если $\omega \in \Omega$, тогда для всех $x, y \in (0;1)$, $0 < x \leq y < 1$ справедлива следующая оценка (см. [24])

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha_\omega} \lesssim \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \lesssim \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta_\omega}. \tag{1.3}$$

Итак, если $r_k \leq r \leq r_{k+1}$, то $(1-r) \approx (1-r_k) = 2(1-r_{k+1}) = 2(r_{k+1}-r_k)$ и $\omega_j(1-r) \approx \omega_j(1-r_k) \approx \omega_j(1-r_{k+1})$ (согласно (1.3)).

Соответственно получаем

$$I \approx \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)^{\left(\frac{q}{p}+1\right)(n-1)+1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_{k+1}e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)^{\frac{q}{p}n+n-\frac{q}{p}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(r_{k+1}e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)^{\frac{q}{p}n+n-\frac{q}{p}} \left(\sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \int\limits_{\alpha_{k,l}}^{\alpha_{k,l+1}} |f(r_{k+1}e^{i\theta})|^p dm\theta\right)^{\frac{q}{p}}.$$

В соответствии со свойствами (1.3) получаем $(\alpha_{k,l+1} - \alpha_{k,l}) = \pi(1-r_k) = 2\pi(r_{k+1}-r_k)$, тогда:

$$I \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)^{\frac{q}{p}n+n-\frac{q}{p}} \left(\sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\theta \in (\alpha_{k,l};\alpha_{k,l+1})} |f(r_{k+1}e^{i\theta})|^p \times\right.$$

$$\times(\alpha_{k,l+1}-\alpha_{k,l})\Bigg)^{\frac{q}{p}}\lesssim$$

$$\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)^{\frac{q}{p}n+n}\left(\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\max_{\theta\in(\alpha_{k,l};\alpha_{k,l+1})}|f(r_{k+1}e^{i\theta})|^p\right)^{\frac{q}{p}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)^{n}\left(\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\max_{\theta\in(\alpha_{k,l};\alpha_{k,l+1})}|f(r_{k+1}e^{i\theta})|^p(r_{k+1}-r_k)^n\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Снова воспользовавшись тем, что $(\alpha_{k,l+1}-\alpha_{k,l})=2\pi(r_{k+1}-r_k)$, получаем

$$I\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)^{n}\left(\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\max_{\theta\in(\alpha_{k,l};\alpha_{k,l+1})}|f(r_{k+1}e^{i\theta})|^p(\alpha_{k,l+1}-\alpha_{k,l})^n\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Ясно, что

$$I\lesssim\sum_{k_1=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_{k_j+1})(r_{k_j+1}-r_{k_j})\times$$

$$\times\left(\sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1}...\sum_{l_n=-2^{k_n}}^{2^{k_n}-1}\max_{\substack{\theta_j\in(\alpha_{k_j,l_j};\alpha_{k_j,l_j+1})\\ 1\le j\le n}}|f(r_{k_1+1}e^{i\theta_1},...,r_{k_n+1}e^{i\theta_n})|^p\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{j=1}^{n}(\alpha_{k_j,l_j+1}-\alpha_{k_j,l_j})\right)^{\frac{q}{p}}\lesssim\sum_{k_1=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}\int_{r_{k_1}}^{r_{k_1+1}}...\int_{r_{k_n}}^{r_{k_n+1}}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_j)\times$$

$$\times\left(\sum_{l_1=-2^{k_1}}^{2^{k_1}-1}...\sum_{l_n=-2^{k_n}}^{2^{k_n}-1}\int_{\alpha_{k_1,l_1}}^{\alpha_{k_1,l_1+1}}...\int_{\alpha_{k_n,l_n}}^{\alpha_{k_n,l_n+1}}|f(r_1e^{i\theta_1},...,r_ne^{i\theta_n})|^pd\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}}dr_1...dr_n=$$

$$=\int_{Q_n}\omega_1(1-r_1)...\omega_n(1-r_n)\left(\int_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n|^pdm_n(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}dr_1...dr_n=\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega(U^n)}.$$

Итак, первое утверждение теоремы установлено.

Докажем второе утверждение. Пусть $g\in A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$. Покажем, что можно построить функцию $f\in A^{p,q}_\omega(U^n)$ такую, что $D(f)(z)=g(z),\quad z\in U$.

Согласно хорошо известной формуле (см. [30], [34]) функция g допускает представление

$$g(z)=\frac{n\beta-1}{\pi}\int\limits_U \frac{(1-|\xi|)^{n\beta-2}g(\xi)}{(1-\overline{\xi}z)^{n\beta}}dm_2(\xi), z\in U.$$

Положим

$$f(z_1,...,z_n)=\frac{n\beta-1}{\pi}\int\limits_U \frac{(1-|\xi|)^{n\beta-2}g(\xi)}{(1-\overline{\xi}z_1)^{\beta}...(1-\overline{\xi}z_n)^{\beta}}dm_2(\xi), z=(z_1,...,z_n)\in U^n, \tag{1.4}$$

где β положительное достаточно большое число.

Очевидно, что $D(f)(z)=g(z),\quad z\in U$. Кроме того, f - аналитическая в U^n функция. Докажем, что $f\in A^{p,q}_\omega(U^n)$. Здесь доказательство распадается на несколько шагов. Рассмотрим их подробнее:

Шаг 1. Сначала предположим, что $1<p,q<+\infty$. Пусть $f\in H(U^n)$, по теореме Хана-Банаха и теореме Бенедека-Пансоне (см. [26]) имеем

$$\|f\|_{A^{p,q}_\omega}=\sup_{\|\psi\|_{L^{p',q'}_\omega}\le 1}\int\limits_{U^n} f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)=$$

$$=\sup_{\|\psi\|_{L^{p',q'}_\omega}=1}\int\limits_{U^n} f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta), p'=\frac{p}{p-1}, q'=\frac{q}{q-1}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1:=\int\limits_{U^n} f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta),\quad \psi\in L^{p',q'}_\omega:\|\psi\|_{L^{p',q'}_\omega}=1.$$

Подставляя (1.4) в I_1, получим

$$I_1\lesssim\int\limits_{U^n}\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)\int\limits_U\frac{(1-|w|)^{n\beta-2}g(w)}{\prod\limits_{j=1}^n(1-\overline{w}\zeta_j)^\beta}dm_2(w)dm_{2n}(\zeta)=$$

$$=\int\limits_U(1-|w|)^{n\beta-2}g(w)\int\limits_{U^n}\frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)}{\prod\limits_{j=1}^n(1-\overline{w}\zeta_j)^\beta}dm_{2n}(\zeta)dm_2(w)=$$

$$= \int\limits_U (1-|w|)^{n\beta-2} g(w) \overline{\int\limits_{U^n} \frac{\psi(\zeta)\omega_\Pi(1-|\zeta|)}{\prod\limits_{j=1}^n (1-w\overline{\zeta_j})^\beta} dm_{2n}(\zeta)} dm_2(w).$$

Положим

$$F(z) = \int\limits_{U^n} \frac{\psi(\zeta)\omega_\Pi(1-|\zeta|)}{\prod\limits_{j=1}^n (1-\zeta_j\overline{z})^\beta} dm_{2n}(\zeta), \quad z=(z_1,...,z_n)\in U^n.$$

Согласно Теореме 1.1 имеем, что $F \in A^{p',q'}_{\omega^*}$,
где $\omega^*(t) = \prod\limits_{j=1}^n \omega_j^*(t), \quad \omega_j^*(t) = \omega_j(t)\left(\frac{t^{\beta-2}}{\omega_j(t)}\right)^q, \quad t\in(0;1)$ при этом

$$\|F\|_{A^{p',q'}_{\omega^*}} \lesssim \|\psi\|_{L^{p',q'}_\omega} \le const.$$

В то же время

$$I_1 \lesssim \int\limits_U (1-|w|)^{n\beta-2} g(w) \overline{D(F)(w)} dm_2(w).$$

Но поскольку $F \in A^{p',q'}_{\omega^*}$, то по первой части теоремы $D(F) \in A^{p',q'}_{\Omega_n^*}(U^n)$, где

$$\Omega_n^*(t) = t^{\left(\frac{q'}{p'}+1\right)(n-1)} \prod_{j=1}^n \omega_j^*(t) = t^{\left(\frac{q'}{p'}+1\right)(n-1)+(\beta-2)nq'} \prod_{j=1}^n \omega_j^{1-q'}(t), \quad t\in(0;1).$$

Поэтому

$$|I_1| \lesssim \int\limits_U (1-|w|)^{n\beta-2} |g(w)||D(F)(w)| dm_2(w) =$$

$$= \int\limits_U \frac{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|w|)}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|w|)} (1-|w|)^{n\beta-2} |g(w)||D(F)(w)| dm_2(w).$$

Заметим также, что $\beta n - 2 = \beta n - (1+1) =$
$= \beta n - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}\right) = \beta n - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}\right) + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)n - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)n =$
$= \beta n + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(n-1) - \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}\right) - \left(1 - \frac{1}{p'} + 1 - \frac{1}{q'}\right)n =$
$= \beta n - 2n + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(n-1) - \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}\right) + \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}\right)n =$

$= (\beta-2)n+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(n-1)+\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}\right)(n-1)$ и $\frac{q'}{q} = 1-q'$, тогда, дважды применяя неравенство Гельдера, сначала с показателем $p'=\frac{p}{p-1}$, а затем с показателем $q'=\frac{q}{q-1}$, имеем

$$|I_1| \lesssim \int\limits_0^1 (1-\rho)^{(\beta-2)n+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(n-1)+\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}\right)(n-1)} \frac{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-\rho)}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-\rho)} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})||D(F)(\rho e^{i\theta})| d\theta d\rho \leq \int\limits_0^1 (1-\rho)^{(\beta-2)n+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(n-1)+\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}\right)(n-1)} \times$$

$$\times \frac{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-\rho)}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-\rho)} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D(F)(\rho e^{i\theta})|^{p'} d\theta\right)^{\frac{1}{p'}} d\rho \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^1 (1-\rho)^{\left(\frac{q}{p}+1\right)(n-1)} \omega_\Pi(1-\rho) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\rho\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{(\beta-2)nq'+\left(\frac{q'}{p'}+1\right)(n-1)}}{\omega_\Pi^{\frac{q'}{q}}(1-\rho)} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D(F)(\rho e^{i\theta})|^{p'} d\theta\right)^{\frac{q'}{p'}} d\rho\right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 (1-\rho)^{\left(\frac{q}{p}+1\right)(n-1)} \omega_\Pi(1-\rho) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\rho\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 (1-\rho)^{(\beta-2)nq'+\left(\frac{q'}{p'}+1\right)(n-1)} \omega_\Pi^{1-q'}(1-\rho) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D(F)(\rho e^{i\theta})|^{p'} d\theta\right)^{\frac{q'}{p'}} d\rho\right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \|g\|_{A^{p,q}_{\Omega_n}} \|D(F)\|_{A^{p',q'}_{\Omega_n^*}}.$$

Но в силу первой части теоремы

$$\|D(F)\|_{A^{p',q'}_{\omega^*}} \lesssim \|\psi\|_{L^{p',q'}_{\omega}} \leq const.$$

Следовательно получаем

$$|I_1| \lesssim \|g\|_{A^{p,q}_{\Omega_n}},$$

то есть

$$\|f\|_{A^{p,q}_{\omega}} \lesssim \|f\|_{A^{p,q}_{\Omega_n}}.$$

Итак, в случае $1 < p, q < +\infty$ теорема доказана.

Шаг 2. Пусть далее $0 < p, q \leq 1$. Напомним, что в этом случае квазинорма определяется следующим образом:

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_{\omega}} = \int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)\left(\int\limits_{T^n} |f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}} dr.$$

Воспользуемся представлением (1.4) и учтем, что $0 < p \leq 1$, тогда по лемме 1.4 получаем

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_{\omega}} \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)\left(\int\limits_{T^n}\left[\int\limits_{U} \frac{(1-|z|)^{n\beta-2}|g(z)|}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_j\overline{z}w_j|^{\beta}} dm_2(z)\right]^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}} dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)\left(\int\limits_{T^n}\int\limits_{U} \frac{(1-|z|)^{n\beta p-2p+2p-2}|g(z)|^p}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_j\overline{z}w_j|^{\beta p}} dm_2(z) dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}} dr.$$

Теперь меняем порядок интегрирования

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_{\omega}} \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)\left(\int\limits_{U}(1-|z|)^{n\beta p-2}|g(z)|^p \int\limits_{T^n} \frac{dm_n(w)}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_j\overline{z}w_j|^{\beta p}} dm_2(z)\right)^{\frac{q}{p}} dr =$$

$$= \int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)\left(\int\limits_{U}(1-|z|)^{n\beta p-2}|g(z)|^p \prod_{j=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dm(w_j)}{|1-r_j\overline{z}w_j|^{\beta p}} dm_2(z)\right)^{\frac{q}{p}} dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)\left(\int\limits_{0}^{1} \frac{(1-\rho)^{n\beta p-2}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\beta p-1}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta d\rho\right)^{\frac{q}{p}} dr.$$

В итоге, получим

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_\Pi(1-r)\left(\int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{n\beta p-2}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho)^{\beta p-1}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta d\rho\right)^{\frac{q}{p}} dr. \tag{1.5}$$

Далее, так как $0 < p, q \le 1$, то возможны два случая:

2.i) Пусть сначала $0 < \frac{q}{p} \le 1$. Рассмотрим оценку (1.5) и снова воспользуемся леммой 1.5 для $0 < \frac{q}{p} \le 1$, тогда

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\rho dr =$$

$$= \int\limits_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{n\beta q-\frac{q}{p}-1}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\rho dr.$$

Теперь снова меняем порядок интегрирования

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_0^1 (1-\rho)^{n\beta q-\frac{q}{p}-1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} \int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-r)dr}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}}} d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 (1-\rho)^{n\beta q-\frac{q}{p}-1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^n \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1-r_j)dr_j}{(1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}}} d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \prod_{j=1}^n \omega_j(1-\rho) \frac{(1-\rho)^{n\beta q-\frac{q}{p}-1}}{(1-\rho)^{\beta q n-\frac{q}{p}n-n}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\rho.$$

Окончательно, имеем

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_0^1 \prod_{j=1}^n \omega_j(1-\rho)(1-\rho)^{\frac{q}{p}n+n-\frac{q}{p}-1} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\rho =$$

$$\int_0^1 \Omega_n(1-\rho)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} d\rho = \|f\|^q_{A^{p,q}_{\Omega_n}}.$$

Теорема доказана и в этом случае.

2.ii) Пусть теперь $1 < \frac{q}{p} < +\infty$. Рассмотрим оценку (1.5)

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int_{Q_n} \omega_\Pi(1-r)\left(\int_0^1 \frac{(1-\rho)^{n\beta p-2}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho)^{\beta p-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta d\rho\right)^{\frac{q}{p}} dr.$$

Положим $\rho_m = 1 - \frac{1}{2^m},\ m \in Z_+$. Тогда

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int_{Q_n} \omega_\Pi(1-r)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \frac{(1-\rho)^{n\beta p-2}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho)^{\beta p-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta d\rho\right)^{\frac{q}{p}} dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_{Q_n} \omega_\Pi(1-r)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-\rho_k)^{n\beta p-1}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho_k)^{\beta p-1}} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\rho_k e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} dr.$$

Теперь возведем полученное в степень $1 < \frac{q}{p} < +\infty$, воспользуемся неравенством Гельдера с показателем $s = \left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{q}{q-p}$ $s' = \frac{s}{s-1} = \frac{q}{p}$ и пусть γ - произвольное число, такое что $\gamma s > 1$, тогда

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int_{Q_n} \omega_\Pi(1-r)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-\rho_k)^{n\beta p-2+\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho_k)^{\beta p-1+\gamma-\gamma}} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\rho_k e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} dr \le$$

$$\le \int_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-\rho_k)^{n\beta q-2\frac{q}{p}+1}}{\prod\limits_{j=1}^n (1-r_j\rho_k)^{\beta q-\frac{q}{p}-\gamma\frac{q}{p}}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(\rho_k e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}} \times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-\rho_k)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho_k)^{\gamma s}}\right)^{\frac{q/p}{s}}dr\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\frac{(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}-\gamma\frac{q}{p}}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho\times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\frac{d\rho}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\gamma s}}\right)^{\frac{q/p}{s}}dr\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\left[\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}-\gamma\frac{q}{p}}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{d\rho}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\gamma s}}\right)^{\frac{q}{p}-1}\right]dr.$$

Оценим последний интеграл отдельно. Пусть

$$I_2:=\int\limits_{0}^{1}\frac{d\rho}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\gamma s}}.$$

Положим $\max r_j=r_{j_0}<1$ тогда $r_j\le r_{j_0}$ и $1-r_j\ge 1-r_{j_0}, j=1,...,n,$ следовательно

$$I_2\le\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n-1}(1-r_j)^{\gamma s}}\int\limits_{0}^{1}\frac{d\rho}{(1-r_{j_0}\rho)^{\gamma s}}\lesssim$$

$$\lesssim\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n-1}(1-r_j)^{\gamma s}}\frac{1}{(1-r_{j_0})^{\gamma s-1}}$$

$$=\frac{(1-r_{j_0})}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\gamma s}}=\frac{(1-r_{j_0})^{\frac{n}{n}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\gamma s}}\leq\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\frac{1}{n}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\gamma s}}=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\gamma s-\frac{1}{n}}}.$$

Тогда

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega}\lesssim\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}-\gamma\frac{q}{p}}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\gamma s-\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{q}{p}-1}dr=\int\limits_{Q_n}\frac{\omega_\Pi(1-r)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\gamma\frac{q}{p}-\frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}-1\right)}}\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}-\gamma\frac{q}{p}}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho dr.$$

Далее, изменив порядок интегрирования, получим

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega}\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\int\limits_{Q_n}\frac{\omega_\Pi(1-r)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\gamma\frac{q}{p}-\frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}-1\right)}}\frac{dr}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{q}{p}-\gamma\frac{q}{p}}}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^1\frac{\omega_j(1-r_j)dr}{(1-r_j\rho)^{\gamma\frac{q}{p}-\frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}-1\right)+\beta q-\frac{q}{p}-\gamma\frac{q}{p}}}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^1 (1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1-r_j)dr}{(1-r_j\rho)^{\beta q-\frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}-1\right)-\frac{q}{p}}}d\rho\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_0^1\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-\rho)\frac{(1-\rho)^{n\beta q-2\frac{q}{p}}}{(1-\rho)^{\beta qn-\left(\frac{q}{p}-1\right)-n\frac{q}{p}-n}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^1\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-\rho)(1-\rho)^{n\frac{q}{p}+n-\frac{q}{p}-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho.$$

Окончательно, имеем

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_{\omega}}\lesssim\int\limits_0^1\Omega_n(1-\rho)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho=\|g\|^q_{A^{p,q}_{\Omega_n}}.$$

Итак, в случае $0<p,q\le 1$ теорема доказана.

Шаг 3. Случай, когда $0<p\le 1$, а $1<q<+\infty$, то есть, когда $1<\frac{q}{p}<+\infty$, полностью аналогичен выше рассмотренному случаю 2.ii.

Шаг 4. Перейдем наконец к случаю, когда $1<p<+\infty$ и $0<q\le 1$, то есть $0<\frac{q}{p}<1$.

Так как $1<p<+\infty$, то, согласно теореме Хана-Банаха и теоремы Ф. Рисса существует функция $\psi\in L^{p'}$ такая, что

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}=\int\limits_{T^n}f(rw)\overline{\psi}(w)dm_n(w),$$

где $\left(\int\limits_{T^n}|\psi(w)|^{p'}dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}}=1.$

Тогда, с учетом (1.4), получим

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho)^{\beta n-2}\int\limits_{T^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|g(\rho e^{i\theta})||\overline{\psi}(w)|d\theta}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_jw_j\rho e^{-i\theta}|^{\beta}}dm_n(w)d\rho.$$

Сделаем замену переменных $we^{-i\theta}=u, w=ue^{i\theta}$

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho)^{\beta n-2}\int\limits_{T^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|g(\rho e^{i\theta})||\overline{\psi}(ue^{i\theta})|d\theta}{\prod\limits_{j=1}^n|1-r_j\rho u|^{\beta}}dm_n(u)d\rho.$$

Далее, применив неравенство Гельдера во внутреннем интеграле, получим

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho)^{\beta n-2}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\int\limits_{T^n}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\overline{\psi}(ue^{i\theta})|^{p'}d\theta\Big)^{\frac{1}{p'}}\frac{dm_n(u)}{\prod\limits_{j=1}^n|1-r_j\rho u|^{\beta}}d\rho.$$

Снова, применив неравенство Гельдера, имеем

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho)^{\beta n-2}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\overline{\psi}(ue^{i\theta})|^{p'}d\theta\frac{dm_n(u)}{\prod\limits_{j=1}^n|1-r_j\rho u|^{\beta}}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_{T^n}\frac{dm_n(u)}{\prod\limits_{j=1}^n|1-r_j\rho u|^{\beta}}\right)^{\frac{1}{p}}d\rho\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho)^{\beta n-2}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\overline{\psi}(ue^{i\theta})|^{p'}d\theta\frac{dm_n(u)}{\prod\limits_{j=1}^n|1-r_j\rho u|^{\beta}}\right)^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^n(1-r_j\rho)^{\frac{\beta-1}{p}}}d\rho.$$

Сделаем замену переменных $ue^{i\theta}=w$

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\int\limits_0^1(1-\rho)^{\beta n-2}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\overline{\psi}(w)|^{p'}d\theta\frac{dm_n(w)}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_jw_j\rho e^{-i\theta}|^{\beta}}\right)^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{\beta-1}{p}}}d\rho.$$

Далее меняем порядок интегрирования и, с учетом $\left(\int\limits_{T^n}|\psi(w)|^{p'}dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}}=1$, получаем

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^pdm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\beta n-2}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{\beta-1}{p}}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^pd\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{T^n}\frac{|\overline{\psi}(w)|^{p'}dm_n(w)}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_jw_j\rho e^{-i\theta}|^{\beta}}d\theta\right)^{\frac{1}{p'}}d\rho\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\beta n-2}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{\beta-1}{p}}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^pd\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_j\rho e^{-i\theta}|^{\beta}}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_{T^n}|\overline{\psi}(w)|^{p'}dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\beta n-2}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{\beta-1}{p}}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^pd\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_j\rho e^{-i\theta}|^{\beta}}\right)^{\frac{1}{p'}}d\rho.$$

Перейдём к оценке последнего интеграла. Для этого заметим, что $|1-r_j\rho e^{-i\theta}|\geq 1-r_j\rho$. Пусть $0<\max r_j=r_{j_0}<1$ тогда $r_j\leq r_{j_0}$ и $1-r_j\geq 1-r_{j_0}, j=1,...,n$, следовательно

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\prod\limits_{j=1}^{n}|1-r_j\rho e^{-i\theta}|^{\beta}}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n-1}|1-r_j\rho e^{-i\theta}|^{\beta}|1-r_{j_0}\rho e^{-i\theta}|^{\beta}}\leq$$

$$\leq \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n-1}(1-r_j\rho)^\beta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-r_{j_0}\rho e^{-i\theta}|^\beta}\lesssim \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n-1}(1-r_j\rho)^\beta}\frac{1}{(1-r_{j_0}\rho)^{\beta-1}}=$$

$$=\frac{(1-r_{j_0}\rho)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^\beta}=\frac{(1-r_{j_0}\rho)^{\frac{n}{n}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^\beta}\leq \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\beta-\frac{1}{n}}}.$$

Итак,

$$\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim \int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\beta n-2}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{\beta-1}{p}+\frac{\beta-1/n}{p'}}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}d\rho.$$

Далее поледнее неравенство возведем в степень $0<q\leq 1$, а затем умножим обе части на $\omega_\Pi(1-r)$ и проинтегрируем по Q_n

$$\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}}dr\lesssim \int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\Bigg(\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\beta n-2}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{\beta-1}{p}+\frac{\beta-1/n}{p'}}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}d\rho\Bigg)^q dr.$$

Используя лемму 1.5 получим

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega}\lesssim \int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{q\beta n-2q+q-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{q\beta-q}{p}+\frac{q\beta-q/n}{p'}}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{q}{p}}d\rho dr=$$

$$=\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{q\beta n-q-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{q\beta-q}{p}+\frac{q\beta-q/n}{p'}}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{q}{p}}d\rho dr.$$

Далее меняем порядок интегрирования и приходим к оценке

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_0^1 (1-\rho)^{q\beta n-q-1}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{q}{p}}\int\limits_{Q_n}\frac{\omega_\Pi(1-r)dr}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j\rho)^{\frac{q\beta-q}{p}+\frac{q\beta-q/n}{p'}}}d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 (1-\rho)^{q\beta n-q-1}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{q}{p}}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\omega_j(1-\rho)}{(1-\rho)^{\frac{qn\beta-qn}{p}+\frac{qn\beta-q}{p'}-n}}d\rho$$

Заметим, теперь что $\frac{qn\beta-qn}{p}+\frac{qn\beta-q}{p'}-n = qn\beta-\frac{qn}{p}-\frac{q}{p'}-n = qn\beta-\frac{qn}{p}-q(1-\frac{1}{p})-n = qn\beta-\frac{qn}{p}-q+\frac{q}{p}-n$. Следовательно

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_0^1 \prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-\rho)\frac{(1-\rho)^{q\beta n-q-1}}{(1-\rho)^{qn\beta-\frac{qn}{p}-q+\frac{q}{p}-n}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{q}{p}}d\rho =$$

$$= \int\limits_0^1 \prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-\rho)(1-\rho)^{\frac{qn}{p}+n-\frac{q}{p}-1}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{q}{p}}d\rho.$$

Окончательно, имеем

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_0^1 \Omega_n(1-\rho)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}d\rho = \|g\|^q_{A^{p,q}_{\Omega_n}}.$$

Итак, в случае $1<p<+\infty$ и $0<q\le 1$ теорема также доказана. Вместе с этим доказана и вся теорема полностью. □

1.3 Теорема типа Харди-Литтлвуда в весовых анизотропных пространствах аналитических функций в поликруге

В данном параграфе решается задача, связанная с хорошо известной теоремой Харди-Литтлвуда, об оценке нормы аналитической функции через норму ее производной. Причем задача решается в направлении обобщения теоремы Харди-Литтлвуда по трем аспектам: во-первых, теорема распространяется на многомерный случай, во-вторых, используется дробная производная любого порядка, и, в третьих, устанавливаются соответствующие оценки в случае смешанных квазинорм.

Основным результатом этого параграфа является доказательство следующего утверждения:

Теорема 1.3. *Пусть* $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < p, q < +\infty$, *тогда справедливы следующие оценки*

$$\|D^m f\|_{A^{p,q}_{\widehat{\omega}}(U^n)} \lesssim \|f\|_{A^{p,q}_{\omega}(U^n)} \lesssim \|D^m f\|_{A^{p,q}_{\widehat{\omega}}(U^n)}. \tag{1.6}$$

Напомним, что $\widehat{\omega}(t) = \prod\limits_{j=1}^{n} \omega_j(t_j) t_j^{m_j q}$, $t_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., n$. Доказательство этого результата основывается на следующих вспомогательных утверждениях:

Лемма 1.3. *Пусть* $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\gamma_j \in \mathbb{R}_+$ *такие, что* $\gamma_j + 1 - m_j > 0$, $j = 1, ..., n$, $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, *тогда существуют* n *ограниченных функций* $\psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)$ *таких, что справедливо представление*

$$f(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1 - \overline{\zeta_j} z_j)^{\gamma_j + 2 - m_j}} D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta).$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Доказательство. Хорошо известно следующее представление М.М. Джрбашяна функции $D^m f$ (см. [6])

$$D^m f(z_1, ..., z_n) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \gamma_j + 1}{\pi^n} \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\gamma_j + 2}} D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta),$$

Легко видеть, что из определения оператора D^{-m}, обратного к оператору D^m, следует равенство

$$f(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} m_j (1 - t_j)^{m_j - 1} D^m f(t_1 z_1, ..., t_n z_n) dt_j. \tag{1.7}$$

Тогда

$$f(z_1,...,z_n)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\gamma_j+1}{\pi^n}\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}m_j(1-t_j)^{m_j-1}\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{(1-\overline{\zeta}_jt_jz_j)^{\gamma_j+2}}\times$$

$$\times D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta)dt_j$$

Поменяв далее порядок интегрирования, получаем

$$f(z_1,...,z_n)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\gamma_j+1}{\pi^n}\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}m_j(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-t_j)^{m_j-1}dt_j}{(1-\overline{\zeta}_jt_jz_j)^{\gamma_j+2}}\times$$

$$\times D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta). \tag{1.8}$$

Вычислим внутренний интеграл

$$I:=\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-t_j)^{m_j-1}dt_j}{(1-\overline{\zeta}_jt_jz_j)^{\gamma_j+2}}.$$

Для этого воспользуемся интегральным представлением Гаусса для гипергеометрической функции (см. [2], стр. 72)

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}dt}{(1-tz)^a},\ Rec>Reb>0.$$

Тогда при $b=1$, $c=m_j+1$ имеем

$$F(\gamma_j+2,1,m_j+1,\overline{\zeta_j}z_j)=\frac{\Gamma(m_j+1)}{\Gamma(1)\Gamma(m_j)}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{m_j-1}dt}{(1-t\overline{\zeta_j}z_j)^{\gamma_j+2}},\ m_j+1>1>0.$$

Следовательно рассматриваемый интеграл I примет вид

$$I=\frac{1}{m_j}F(\gamma_j+2,1,m_j+1,\overline{\zeta_j}z_j),\ m_j>0.$$

Тогда согласно свойству гипергеометрической функций (см. [2], стр. 76) имеем

$$I=\frac{1}{m_j}F(\gamma_j+2,1,m_j+1,\overline{\zeta_j}z_j)=\frac{1}{m_j}\frac{F(m_j-\gamma_j-1,m_j,m_j+1,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{\zeta_j}z_j)^{\gamma_j+2-m_j}}=$$

$$=\frac{1}{(1-\overline{\zeta_j}z_j)^{\gamma_j+2-m_j}}\int\limits_0^1\frac{t^{m_j}dt}{(1-t\overline{\zeta_j}z_j)^{m_j-\gamma_j-1}}=\frac{\psi_0(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{\zeta_j}z_j)^{\gamma_j+2-m_j}}.$$

Отметим, что $\gamma_j+1-m_j>0$, поэтому

$$|\psi_0(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)|\le\int\limits_0^1\frac{|t|^{m_j}dt}{|1-t\overline{\zeta_j}z_j|^{m_j-\gamma_j-1}}\le\int\limits_0^1\frac{dt}{|1-t\overline{\zeta_j}z_j|^{m_j-\gamma_j-1}}\le$$

$$\le\int\limits_0^1\frac{dt}{(1-t\rho_jr_j)^{m_j-\gamma_j-1}}\le C,\quad r_j=|z_j|,\rho_j=|\zeta_j|\in(0;1).$$

Возвращаемся к (1.8) и получаем

$$f(z_1,...,z_n)=\frac{\prod\limits_{j=1}^n\gamma_j+1}{\pi^n}\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^n m_j(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}\frac{\psi_0(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{\zeta_j}z_j)^{\gamma_j+2-m_j}}\times$$

$$\times D^mf(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta).$$

Положив $\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)=\frac{\prod\limits_{j=1}^n m_j(\gamma_j+1)}{\pi^n}\psi_0(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)$, окончательно получаем

$$f(z_1,...,z_n)=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^n\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{\zeta_j}z_j)^{\gamma_j+2-m_j}}D^mf(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta).$$

□

Лемма 1.4. *Пусть $m=(m_1,...,m_n)\in\mathbb{R}^n_+$, γ_j- достаточно большие числа ($j=1,...,n$), $f\in A^{p,q}_\omega(U^n)$, тогда справедливо представление*

$$D^mf(z_1,...,z_n)=\frac{\prod\limits_{j=1}^n\gamma_j+1}{\pi^n}\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^n\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{(1-\overline{\zeta}_jz_j)^{\gamma_j+2+m_j}}f(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta),$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Доказательство. Снова используем представление М.М. Джрбашяна функции $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$

$$f(z_1, ..., z_n) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \gamma_j + 1}{\pi^n} \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\gamma_j + 2}} f(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta), \tag{1.9}$$

Продифференцировав (1.9) и воспользовавшись свойством оператора D^m по каждой переменной (см. [24], стр. 41), получим

$$D^m f(z_1, ..., z_n) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \gamma_j + 1}{\pi^n} \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\gamma_j + 2 + m_j}} f(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta).$$

□

Лемма 1.5 (см. [23]). *Пусть f - неотрицательная субгармоническая в U^n функция $0 < p \leq 1$, $\omega_j \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \geq -1$, $j = 1, ..., n$, тогда имеет место следующая оценка*

$$\left[\int\limits_{U^n} |f(z)| \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|)^{\alpha_j} dm_{2n}(z) \right]^p \lesssim \int\limits_{U^n} |f(z)|^p \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|)^{\alpha_j p + 2p - 2} dm_{2n}(z).$$

Пусть k_j - неотрицательное целое число, l_j - целое число, удовлетворяющее условию: $-2^{k_j} \leq l_j \leq 2^{k_j} - 1$, $1 \leq j \leq n$.

Положим

$$\Delta_{k_j, l_j} := \left\{ z_j : 1 - \frac{1}{2^{k_j}} \leq |z_j| < 1 - \frac{1}{2^{k_j + 1}}, \frac{\pi l_j}{2^{k_j}} \leq arg z_j < \frac{\pi (l_j + 1)}{2^{k_j}} \right\}. \tag{1.10}$$

$$\Delta^n_{k,l} := \Delta_{k_1, k_2, ..., k_n, l_1, l_2, ..., l_n} = \Delta_{k_1, l_1} \times \Delta_{k_2, l_2} \times ... \times \Delta_{k_n, l_n},$$

где $k = (k_1, k_2, ..., k_n), l = (l_1, l_2, ..., l_n)$.

При этих же k и l введем еще расширение криволинейных кубов $\Delta_{k,l}$

$$\Delta^*_{k_j,l_j} :=\left\{ z_j : 1-\frac{1}{2^{k_j-1}} \leq |z_j| < 1-\frac{1}{2^{k_j+2}}, \frac{\pi l_j}{2^{k_j}} \leq arg z_j < \frac{\pi(l_j+1)}{2^{k_j}} \right\}, \qquad (1.11)$$

$$\Delta^{n*}_{k,l} := \Delta^*_{k_1,k_2,\ldots,k_n,l_1,l_2,\ldots,l_n} = \Delta^*_{k_1,l_1} \times \Delta^*_{k_2,l_2} \times \ldots \times \Delta^*_{k_n,l_n}.$$

Заметим, что система $\Delta^n_{k,l}$ покрывает единичный поликруг U^n однократно, а система $\Delta^{n*}_{k,l}$ - конечнократно.

Отметим, что, если $n=1$, тогда получим следующее:

Пусть k - неотрицательное целое число, l - целое число, удовлетворяющее условию: $-2^k \leq l \leq 2^k-1$.

Положим

$$\mathbf{\Delta_{k,l}} :=\left\{ z : 1-\frac{1}{2^{k}} \leq |z| < 1-\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{\pi l}{2^{k}} \leq arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^{k}} \right\}. \qquad (1.12)$$

При этих же k и l введем еще расширение криволинейных кубов $\mathbf{\Delta_{k,l}}$

$$\mathbf{\Delta^*_{k,l}} :=\left\{ z : 1-\frac{1}{2^{k-1}} \leq |z| < 1-\frac{1}{2^{k+2}}, \frac{\pi l}{2^{k}} \leq arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^{k}} \right\}, \qquad (1.13)$$

Причем система $\mathbf{\Delta_{k,l}}$ покрывает единичный единичный круг U однократно, а система $\mathbf{\Delta^*_{k,l}}$ - конечнократно.

Лемма 1.6. *Предположим, что* $0<q\leqslant 1, 0<p<+\infty$, *и* $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}\left(\int\limits_{T^n}|f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} rdr \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)\left(\int\limits_{T^n}|f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}} rdr\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I := \int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}\left(\int\limits_{T^n}|f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} rdr =$$

$$= \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^n \omega_j^{\frac{1}{q}}(1-r_j)(1-r_j)^{\frac{1}{q}-1} r_j dr_j =$$

$$= \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} \int\limits_{1-\frac{1}{2^{k_1}}}^{1-\frac{1}{2^{k_1+1}}} ... \int\limits_{1-\frac{1}{2^{k_n}}}^{1-\frac{1}{2^{k_n+1}}} \left(\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^n \omega_j^{\frac{1}{q}}(1-r_j)(1-r_j)^{\frac{1}{q}-1} r_j dr_j.$$

Заметим, что если $r_{k_j} = 1 - \frac{1}{2^{k_j}}, r_{k_j+1} = 1 - \frac{1}{2^{k_j+1}}, k_j \in \mathbb{Z}_+, j = \overline{1,n}$, тогда

$$I \lesssim \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} \left\{ \max_{\substack{r_{k_1} \leqslant r_1 \leqslant r_{k_1+1} \\ .... \\ r_{k_n} \leqslant r_n \leqslant r_{k_n+1}}} \left(\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{1}{p}} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^n \omega_j^{\frac{1}{q}}(1-r_{k_j})(1-r_{k_j})^{\frac{1}{q}-1}(r_{k_j+1}-r_{k_j}) \right\} \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} \left(\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^n \omega_j^{\frac{1}{q}}(1-r_{k_j})(r_{k_j+1}-r_{k_j})^{\frac{1}{q}}, \qquad r = (r_1,...,r_n), r_j \in [r_{k_j+1}; r_{k_j+2}].$$

В предыдущем неравенстве мы использовали тот факт, что если $r_{k_j} \le r_j \le r_{k_j+1}$, то $(1-r_j) \approx (1-r_{k_j}) = 2(1-r_{k_j+1}) = 2(r_{k_j+1}-r_{k_j})$ и $\omega_j(1-r_j) \approx \omega_j(1-r_{k_j}) \approx \omega_j(1-r_{k_j+1})$, $1 \le j \le n$ (см. (1.3)).

Далее, воспользуемся тем, что функция

$$\psi(\rho_1,...,\rho_n)=\int\limits_{T^n}|f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n \tag{1.14}$$

монотонно возрастающая функция по каждой переменной на $[0,1)$. Принимая это во внимание,получаем

$$\max_{\substack{r=(r_1,...,r_n),\\ r_{k_j}\leqslant r_j\leqslant r_{k_j+1}}}\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_{T^n}|f(\rho_1\zeta_1,...,\rho_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n),$$

$\forall\rho_j\in[r_{k_j+1};r_{k_j+2}], j=\overline{1,n}$.

Теперь, используя условие $0<q\leqslant 1$ и элементарное неравенство $(a+b)^q\leqslant a^q+b^q$ для всех $a,b\in\mathbb{R}_+=[0;+\infty)$,получаем

$$I\lesssim\Bigg[\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{q}}(1-r_{k_j})\times$$

$$\times(r_{k_j+1}-r_{k_j})^{\frac{1}{q}}\Bigg]^{q\cdot\frac{1}{q}}\leqslant\Bigg[\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_{k_j})(r_{k_j+1}-r_{k_j})\Bigg]^{\frac{1}{q}}\lesssim$$

$$\lesssim\Bigg[\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}\int\limits_{r_{k_1+1}}^{r_{k_1+2}}...\int\limits_{r_{k_n+1}}^{r_{k_n+2}}\left(\int\limits_{T^n}|f(r_1\zeta_1,...,r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\right)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_j)r_j dr_j\Bigg]^{\frac{1}{q}}\lesssim$$

$$\lesssim \left[\int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{T^n} |f(r_1\zeta_1, ..., r_n\zeta_n)|^p dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n) \right)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^n \omega_j(1-r_j) r_j dr_j \right]^{\frac{1}{q}}.$$

В результате, мы получаем

$$I \lesssim \left(\int\limits_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

$\square$

Перейдем теперь к доказательству основного результата параграфа.

Доказательство теоремы 1.3.

Докажем сначала правую оценку в формуле (1.6). Соотвествующее доказательство мы разделим на 4 случая:

1) когда $1 < p < +\infty,\ 1 < q < +\infty$;

2) когда $0 < p \leq 1,\ 0 < q \leq 1$;

3) когда $0 < p \leq 1,\ 1 < q < +\infty$;

4) когда $1 < p < +\infty,\ 0 < q \leq 1$.

Рассмотрим сначала первый случай, когда $1 < p < +\infty, 1 < q < +\infty$. Согласно лемме 1.3 имеем

$$f(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^n \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1-\overline{\zeta_j} z_j)^{\gamma_j+2-m_j}} D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta),$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n, \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)-$ некоторые ограниченные аналитические функции, $\gamma_j, m_j \in \mathbb{R}_+$, $\gamma_j + 1 - m_j > 0,\ \ j = 1, ..., n$.

Оценим это равенство по модулю и проинтегрируем по T^n, применив неравенство Минковского ($z_j = r_j e^{i\varphi_j}, j = 1, ..., n$), $Q_{n,\pi} := [-\pi; \pi]^n$, получим

$$\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |f(r_1 e^{i\varphi_1}, ..., r_n e^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1 ... d\varphi_n \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} \left[\int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^n \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j}} |D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n)| dm_{2n}(\zeta) \right]^p d\varphi_1 ... d\varphi_n \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$=\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}\left[\int\limits_{Q_n}\int\limits_{Q_{n,\pi}}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{\gamma_j+2-m_j}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|d\theta_1...d\theta_n\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times d\rho_1...d\rho_n\right]^p d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\int\limits_{Q_n}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}\left[\int\limits_{Q_{n,\pi}}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{\gamma_j+2-m_j}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|d\theta_1...d\theta_n\right]^p d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{1}{p}}d\rho_1...d\rho_n.$$

Далее воспользуемся неравенством Гельдера с показателем $p'=\frac{p}{p-1}$

$$\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim$$

$$\int\limits_{Q_n}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}\int\limits_{Q_{n,\pi}}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{\gamma_j+2-m_j}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{Q_{n,\pi}}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{\gamma_j+2-m_j}}d\theta_1...d\theta_n\right]^{\frac{p}{p'}}d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{1}{p}}d\rho_1...d\rho_n.$$

Рассмотрим интеграл

$$I:=\int\limits_{Q_{n,\pi}}\prod_{j=1}^{n}\frac{d\theta_1...d\theta_n}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{\gamma_j+2-m_j}}.$$

В силу анизотропности пространства

$$I=\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta_j}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{\gamma_j+2-m_j}}\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}},$$

$\gamma_j+1-m_j>0$. Тогда получим следующее

$$\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim$$

$$\int\limits_{Q_n}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}\int\limits_{Q_{n,\pi}}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{\left|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}\right|^{\gamma_j+2-m_j}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\times\right.$$

$$\left.\times\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\right]^{\frac{p}{p'}}d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{1}{p}}d\rho_1...d\rho_n=\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{(1-r_j\rho_j)^{\frac{\gamma_j+1-m_j}{p'}}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p\int\limits_{Q_{n,\pi}}\prod_{j=1}^{n}\frac{d\varphi_1...d\varphi_n}{\left|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}\right|^{\gamma_j+2-m_j}}d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times d\rho_1...d\rho_n\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{(1-r_j\rho_j)^{\frac{\gamma_j+1-m_j}{p'}}}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-\rho_j r_j)^{\gamma_j+1-m_j}}d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{1}{p}}d\rho_1...d\rho_n=$$

$$=\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{1}{p}}d\rho_1...d\rho_n.$$

Возведем последнее неравенство в степень $1<q<+\infty$ и воспользуемся неравенством Гельдера с показателем $q'=\frac{q}{q-1}$

$$\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|f(r_1 e^{i\varphi_1},...,r_n e^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{q}{p}}\lesssim$$

$$\lesssim\left(\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j}}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{1}{p}}\times\right.$$

$$\left.\times d\rho_1...d\rho_n\right)^{q}\leq\left(\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q}}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\times\right.$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}}d\rho_1...d\rho_n\times$$

$$\times\left[\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{d\rho_1...d\rho_n}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\right]^{\frac{q}{q'}}\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-r_j)^{\frac{(\gamma_j-m_j)q}{q'}}}\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q}}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}}d\rho_1...d\rho_n.$$

Умножим полученное на $\prod\limits_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_j)$ и проинтегрируем по Q_n

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega}\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-r_j)}{(1-r_j)^{\frac{(\gamma_j-m_j)q}{q'}}}\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q}}{(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}}d\rho_1...d\rho_n dr_1...dr_n.$$

Далее, изменив порядок интегрирования, получим

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega}\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-r_j)dr_1...dr_n}{(1-r_j)^{\frac{(\gamma_j-m_j)q}{q'}}(1-r_j\rho_j)^{\gamma_j+1-m_j}}d\rho_1...d\rho_n\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{\frac{(\gamma_j-m_j)q}{q'}}(1-\rho_j)^{\gamma_j-m_j}}d\rho_1...d\rho_n\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q}\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{(\gamma_j-m_j)q}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}}d\rho_1...d\rho_n\lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-\rho_j)(1-\rho_j)^{m_j q} \Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1}, ..., \rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1 ... d\theta_n \Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1 ... d\rho_n.$$

Итак, правая оценка формулы (1.6) установлена при $1 < p, q < +\infty$.

Теперь перейдем ко второму случаю, когда $0 < p, q \leq 1$. Опять воспользуемся леммой 1.2, оценим функцию по модулю и возведем в степень $0 < p \leq 1$, тогда, учитывая лемму 1.3, получим

$$|f(z_1, ..., z_n)| \lesssim \Bigg(\int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j}} |D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n)| dm_{2n}(\zeta) \Bigg)^p \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j p + 2p - 2}}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{(\gamma_j+2-m_j)p}} |D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n)|^p dm_{2n}(\zeta).$$

Полученное проинтегрируем по T^n

$$\int\limits_{Q_{n,\pi}} |f(r_1 e^{i\varphi_1}, ..., r_n e^{i\varphi_n})| d\varphi_1 ... d\varphi_n \lesssim \int\limits_{Q_{n,\pi}} \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j p+2p-2}}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{(\gamma_j+2-m_j)p}} \times$$

$$\times |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1}, ..., \rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1 ... d\theta_n d\rho_1 ... d\rho_n d\varphi_1 ... d\varphi_n = \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} (1-\rho_j^2)^{\gamma_j p+2p-2} \times$$

$$\times \int\limits_{Q_{n,\pi}} \prod_{j=1}^{n} \frac{d\varphi_1 ... d\varphi_n}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{(\gamma_j+2-m_j)p}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1}, ..., \rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1 ... d\theta_n d\rho_1 ... d\rho_n \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j p+2p-2}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1}, ..., \rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1 ... d\theta_n d\rho_1 ... d\rho_n.$$

Теперь возведем полученную оценку в степень $\frac{q}{p}$. Здесь возможны два случая.

а) Случай, когда $0 < \frac{q}{p} \leq 1$. Применим лемму 1.5

$$\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |f(r_1 e^{i\varphi_1}, ..., r_n e^{i\varphi_n})| d\varphi_1 ... d\varphi_n \Bigg)^{\frac{q}{p}} \lesssim \Bigg(\int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j p+2p-2}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}} \times$$

$$\times|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n d\rho_1...d\rho_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} \lesssim \int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n \frac{(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)q-\frac{q}{p}}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n.$$

Далее умножим полученное на $\prod\limits_{j=1}^n \omega_j(1-r_j)$ и проинтегрируем по Q_n

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n \omega_j(1-r_j)\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n \frac{(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)q-\frac{q}{p}}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n dr_1...dr_n =$$

$$=\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n (1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n \frac{\omega_j(1-r_j)dr_j}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)q-\frac{q}{p}}} d\rho_1...d\rho_n \lesssim \int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n (1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}}\prod_{j=1}^n \frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{(\gamma_j+2-m_j)q-\frac{q}{p}-1}} d\rho_1...d\rho_n \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^n \omega_j(1-\rho_j)(1-\rho_j)^{m_j q}\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n.$$

Итак, правая оценка формулы (1.6) установлена при $0 < q, p \le 1,\ 0 < \frac{q}{p} \le 1$.

б) Пусть теперь $1 < \frac{q}{p} < +\infty$. Воспользуемся неравенством Гельдера с показателем $(\frac{q}{p})' = \frac{q}{q-p}$

$$\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|f(r_1 e^{i\varphi_1},...,r_n e^{i\varphi_n})|d\varphi_1...d\varphi_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} \lesssim \Bigg(\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^n \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j p+2p-2}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}}\times$$

$$\times|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n d\rho_1...d\rho_n\Bigg)^{\frac{q}{p}}\leq$$

$$\leq\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}}\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}}\times$$

$$\times d\rho_1...d\rho_n\Bigg(\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{d\rho_1...d\rho_n}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}}\Bigg)^{\frac{q-p}{q}\frac{q}{p}}\lesssim\Bigg(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-2}}\Bigg)^{\frac{q}{p}-1}\times$$

$$\times\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}}\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n.$$

Далее умножим полученное на $\prod\limits_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_j)$ и проинтегрируем по Q_n

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega}\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-r_j)}{(1-r_j)^{[(\gamma_j+2-m_j)p-2](\frac{q}{p}-1)}}\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n dr_1...dr_n=$$

$$=\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}}\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-r_j)dr_1...dr_n}{(1-r_j)^{[(\gamma_j+2-m_j)p-2](\frac{q}{p}-1)}(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-1}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}}\frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{[(\gamma_j+2-m_j)p-2](\frac{q}{p}-1)}(1-\rho_j)^{(\gamma_j+2-m_j)p-2}}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{Q_{n,\pi}}|D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\Bigg)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n.$$

$$=\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}(1-\rho_j^2)^{(\gamma_j p+2p-2)\frac{q}{p}}\frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{[(\gamma_j+2-m_j)p-2]\frac{q}{p}}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^n \omega_j(1-\rho_j)(1-\rho_j)^{m_j q}\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n.$$

Итак, правая оценка формулы (1.6) установлена при $0 < q, p \le 1,\ 1 < \frac{q}{p} < +\infty$.

Далее перейдем к третьему случаю, когда $0 < p \le 1, 1 < q < +\infty$. Он полностью аналогичен доказательству второго пункта чисть б), так как $1 < \frac{q}{p} < +\infty$.

Пусть теперь $1 < p < +\infty, 0 < q \le 1$. Тогда получаем, что

$$\int\limits_{Q_{n,\pi}} |f(r_1 e^{i\varphi_1},...,r_n e^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_{n,\pi}} \left[\int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^n \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j}} |D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)| dm_{2n}(\zeta)\right]^p d\varphi_1...d\varphi_n \le$$

$$\le \int\limits_{Q_{n,\pi}} \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^n \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j p}}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j}} |D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)|^p dm_{2n}(\zeta)\times$$

$$\times\left[\int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^n \frac{dm_{2n}(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j}}\right]^{\frac{p}{p'}} d\varphi_1...d\varphi_n \lesssim \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{(1-r_j)^{\gamma_j-m_j}}\right]^{\frac{p}{p'}}\times$$

$$\times \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^n (1-\rho_j^2)^{\gamma_j p} \int\limits_{Q_{n,\pi}} \frac{d\varphi_1...d\varphi_n}{|1-\rho_j r_j e^{i(\varphi_j-\theta_j)}|^{\gamma_j+2-m_j}} \int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p\times$$

$$\times d\theta_1...d\theta_n d\rho_1...d\rho_n \lesssim \left[\prod_{j=1}^n \frac{1}{(1-r_j)^{\gamma_j-m_j}}\right]^{p-1} \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^n \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j p}}{(1-\rho_j r_j)^{\gamma_j+1-m_j}}\times$$

$$\times \int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1},...,\rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n d\rho_1...d\rho_n.$$

Возведем последнее неравенство в степень $\frac{q}{p}$. Так как $1 < p < +\infty, 0 < q \le 1$, то $0 < \frac{q}{p} \leq 1$. Воспользовавшись леммой 1.5, получим

$$\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |f(r_1e^{i\varphi_1},...,r_ne^{i\varphi_n})|^p d\varphi_1...d\varphi_n\right)^{\frac{q}{p}} \lesssim \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-r_j)^{\gamma_j-m_j}}\right]^{q-\frac{q}{p}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j p}}{(1-\rho_j r_j)^{\gamma_j+1-m_j}} \int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1e^{i\theta_1},...,\rho_ne^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n d\rho_1...d\rho_n\right)^{\frac{q}{p}} \lesssim$$

$$\lesssim \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-r_j)^{\gamma_j-m_j}}\right]^{q-\frac{q}{p}} \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q+\frac{q}{p}-1}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+1-m_j)\frac{q}{p}}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1e^{i\theta_1},...,\rho_ne^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n.$$

Далее умножим полученное на $\prod\limits_{j=1}^{n} \omega_j(1-r_j)$ и проинтегрируем по Q_n

$$\|f\|^q_{A^{p,q}_\omega} \lesssim \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-r_j)}{(1-r_j)^{(\gamma_j-m_j)(q-\frac{q}{p})}} \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q+\frac{q}{p}-1}}{(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+1-m_j)\frac{q}{p}}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1e^{i\theta_1},...,\rho_ne^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n dr_1...dr_n =$$

$$= \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} (1-\rho_j^2)^{\gamma_j q+\frac{q}{p}-1} \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-r_j)dr_1...dr_n}{(1-r_j)^{(\gamma_j-m_j)(q-\frac{q}{p})}(1-\rho_j r_j)^{(\gamma_j+1-m_j)\frac{q}{p}}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1e^{i\theta_1},...,\rho_ne^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n \lesssim$$

$$= \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-\rho_j)(1-\rho_j^2)^{\gamma_j q+\frac{q}{p}-1}}{(1-\rho_j)^{(\gamma_j-m_j)(q-\frac{q}{p})}(1-\rho_j)^{(\gamma_j+1-m_j)\frac{q}{p}-1}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1e^{i\theta_1},...,\rho_ne^{i\theta_n})|^p d\theta_1...d\theta_n\right)^{\frac{q}{p}} d\rho_1...d\rho_n \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-\rho_j)(1-\rho_j)^{m_j q} \left(\int\limits_{Q_{n,\pi}} |D^m f(\rho_1 e^{i\theta_1}, ..., \rho_n e^{i\theta_n})|^p d\theta_1 ... d\theta_n \right)^{\frac{q}{p}} d\rho_1 ... d\rho_n.$$

Итак, правая оценка формулы (1.6) установлена при $1 < p < +\infty, 0 < q \leq 1$.

Таким образом правая оценка формулы (1.6) полностью установлена для всех p, q. Доказательство левой части оценки (1.6) полностью повторяет проведенные рассуждения и основывается на представлении из леммы 1.4. $\square$

2 Линейные непрерывные функционалы и тёплицевы операторы в пространствах аналитических в поликруге функций

Вторая глава посвящена вопросам описания линейных непрерывных функционалов, а также отысканию критерия ограниченност тёплицева оператора в пространствах аналитических в поликруге функций. В первой части главы решается задача, связанная с описанием линейных непрерывных функционалов в терминах преобразования Коши в пространствах аналитических функций со смешанной нормой при $1 < p, q < +\infty$. Вторая часть второй главы посвящена описанию линейных непрерывных функционалах в терминах преобразования Коши в пространствах аналитических функций со смешанными квазинормами при всевозможных сочетаниях p и q так, что $0 < \min(p, q) \leq 1$. Следует отметить, что в этом случае методы доказательств значительно отличаются от случая $1 < p, q < +\infty$, тут существенно используются результаты первой главы. Последняя часть второй главы посвящена вопросу исследования ограниченности кратного тёплицева оператора в весовых анизотропных пространствах Соболева, а также вопросам делимости аналитических функций.

2.1 Линейные непрерывные функционалы в пространствах $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$ при $1 < p, q < +\infty$

Хорошо известно, что если один из параметров p или q меньше единицы, то любой непрерывный функционал в пространстве $L^{p,q}_{\omega}(U^n)$ тождественно нулевой (см. [12]). Причем в случае, когда p, q принадлежат $(1, +\infty)$, или $(0, 1]$, а также, в случае, когда один из параметров принадлежит интервалу $(0, 1]$, а другой - интервалу $(1; +\infty)$, характеризация преобразования Коши имеет совершенно различное описание. При $1 < p, q < +\infty$ справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть* Φ *- линейный непрерывный функционал на* $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, *и* $g(z) = \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z}$, ζ, $z \in U^n$, $1 < p, q < +\infty$. *Тогда* $g \in H(U^n)$ *и* $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}_{\omega_\alpha}(U^n)$ *для* $\alpha > \alpha_\omega$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{q-1}$,

$\omega_\alpha(t)=\omega(t)\left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)}\right)^{q'}$, $t\in Q_n$.

Функционал Φ представим в виде

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f(\rho\zeta)g(\rho\overline{\zeta})dm_n(\zeta) \tag{2.1}$$

и справедливы оценки

$$\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}_{\omega_\alpha}}\lesssim\|\Phi\|\lesssim\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}_{\omega_\alpha}}. \tag{2.2}$$

Верно и обратное: любая $g\in H(U^n)$ такая, что $D^{\alpha+1}g\in A^{p',q'}_{\omega_\alpha}$ по формуле (2.1) порождает линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_\omega(U^n)$ для которого справедливы оценки (2.2).

Доказательство. Пусть Φ - линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_\omega(U^n)$. Используя теорему Хана-Банаха, продолжим Φ на $L^{p,q}_\omega(U^n)$ с сохранением нормы. Затем по теореме Бенедека-Понцоне (см. [26]) существует $\psi\in L^{p',q'}_\omega(U^n)$ такая, что

$$\Phi(f)=\int\limits_{U^n} f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta), \|\Phi\|=\|\psi\|_{L^{p',q'}_\omega}.$$

Тогда

$$g(z)=\Phi(e_z)=\int\limits_{U^n}\frac{1}{1-\zeta z}\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta), z\in U^n$$

и

$$D^{\alpha+1}g(z)=D^{\alpha+1}\left(\int\limits_{U^n}\frac{1}{1-\zeta z}\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\right)=$$

$$=\int\limits_{U^n}D^{\alpha+1}\left(\frac{1}{1-\zeta z}\right)\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)=\int\limits_{U^n}\frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega_\Pi(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)}{(1-\zeta z)^{\alpha+2}}.$$

Из Теоремы 1.1, получим

$$\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}_{\omega_\alpha}}\lesssim\|\psi\|_{L^{p',q'}_\omega}=\|\Phi\|.$$

Таким образом доказана левая оценка формулы (2.2). Теперь, чтобы доказать формулу (2.1), разложим в ряд функцию $e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z}$

$$e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z} = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} (z_1\zeta_1)^{k_1}...(z_n\zeta_n)^{k_n}.$$

Зафиксируем $z = (z_1, ..., z_n)$ и положим $\delta_k = \delta_{k_1,...,k_n} = \zeta_1^{k_1}...\zeta_n^{k_n}$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in U^n$, $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда, учитывая, что при любом z, рассматриваемый ряд равномерно сходится по $\zeta \in U^n \cup \partial U^n$, получаем

$$g(z) = \Phi(e_z) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} \Phi(\delta_{k_1,...,k_n}) z_1^{k_1}...z_n^{k_n}$$

Если $f \in A_\omega^{p,q}(U^n)$ и $0 < \rho < 1$, положим $f_\rho(z) = f(\rho z), z \in U^n$. Тогда легко видеть, что $\|f_\rho - f\|_{A_\omega^{p,q}} \to 0$ при $\rho \to 1-0$. В итоге,

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \Phi(f_\rho) = \lim_{\rho\to 1-0} \Phi(f_{\rho^2}) = \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k \rho^{2|k|} \Phi(\delta_k) =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k \rho^{|k|} \sum_{|m|=0}^{+\infty} \rho^{|m|} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \zeta^{k-m} dm_n(\zeta) =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k \rho^{|k|} \zeta^k \sum_{|m|=0}^{+\infty} \rho^{|m|} \zeta^{-m} dm_n(\zeta) =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\bar{\zeta}) dm_n(\zeta).$$

Таким образом, формула (2.1) доказана.

Прежде чем доказать правую оценку формулы (2.2), докажем обратное утверждение.

Пусть $g \in H(U^n)$ и $D^{\alpha+1}g \in A_{\omega_\alpha}^{p',q'}(U^n)$ покажем, что по формуле (2.1) порождается линейный непрерывный функционал на $A_\omega^{p,q}(U^n)$.

В начале отметим, что справедливо равенство(см. [23])

$$g(\rho\zeta) = \widetilde{c}(\alpha) \int\limits_{U^n} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{1-\overline{z}\zeta} D^{\alpha+1} g(\rho z) dm_{2n}(z) \tag{2.3}$$

где $\widetilde{c}(\alpha)$ - некоторое число, зависящее только от α.
Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta) = \frac{\widetilde{c}(\alpha)}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) \times$$

$$\times \int\limits_{U^n} \frac{(1-|w|)^\alpha}{1-\overline{w}\overline{\zeta}} D^{\alpha+1} g(\rho w) dm_{2n}(w) dm_n(\zeta) =$$

$$= \frac{\widetilde{c}(\alpha)}{(2\pi)^n} \int\limits_{U^n} (1-|w|)^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho w) \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta) dm_n(\zeta)}{1-\overline{w}\overline{\zeta}} dm_{2n}(w).$$

Вычислим последний интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta) dm_n(\zeta)}{1-\overline{w}\overline{\zeta}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta)\zeta dm_n(\zeta)}{\zeta-\overline{w}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta) d\zeta}{\zeta - \overline{w}} = f(\rho\overline{w}).$$

Итак

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta) = \widetilde{c}(\alpha) \int\limits_{U^n} (1-|w|)^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho w) f(\rho\overline{w}) dm_{2n}(w).$$

Согласно теореме 1.7(см. [24], стр. 19) о предельном переходе, имеем

$$|\Phi(f)| \lesssim \lim_{\rho\to 1-0} \int\limits_{U^n} (1-|w|)^\alpha |D^{\alpha+1} g(\rho w)| |f(\rho\overline{w})| dm_{2n}(w) \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{U^n} (1-|w|)^\alpha |D^{\alpha+1} g(w)| |f(\overline{w})| dm_{2n}(w).$$

Далее последовательно применя неравенство Гельдера сначала для $p' = \frac{p}{p-1}$, а потом для $q' = \frac{q}{q-1}$, получим

$$|\Phi(f)| \lesssim \int\limits_{Q_n} (1-r)^{\alpha} \left(\int\limits_{T^n} |D^{\alpha+1} g(r\tau)|^{p'} dm_n(\tau) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{T^n} |f(r\overline{\tau})|^{p} dm_n(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} r dr \lesssim$$

$$\lesssim \left[\int\limits_{Q_n} \omega_{\alpha}(1-r) \left(\int\limits_{T^n} |D^{\alpha+1} g(r\tau)|^{p'} dm_n(\tau) \right)^{\frac{q'}{p'}} r dr \right]^{\frac{1}{q'}} \left[\int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha q}}{\omega_{\alpha}^{\frac{q}{q'}}(1-r)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{T^n} |f(r\overline{\tau})|^{p} dm_n(\tau) \right)^{\frac{q}{p}} r dr \right]^{\frac{1}{q}} = \|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}_{\omega_{\alpha}}} \|f\|_{A^{p,q}_{\omega}}.$$

Получили, что $|\Phi(f)(z)|$ ограничен. Следовательно, $\Phi(f)$ есть линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, причем

$$\|\Phi\| \lesssim \|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}_{\omega_{\alpha}}}.$$

А это есть правая оценка в формуле (2.2).

Осталось показать равенство $\Phi(e_z) = g(z),\ e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z}, \zeta, z \in U^n$, тогда

$$\Phi(e_z) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\overline{\zeta})}{1-\rho\zeta z} dm_n(\zeta) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\zeta)}{1-\rho\overline{\zeta} z} dm_n(\zeta) =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\zeta)\zeta}{\zeta-\rho z} dm_n(\zeta) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\zeta)}{\zeta-\rho z} d\zeta =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} g(\rho^2 z) = g(z).$$

Используя первую часть доказательства мы получим

$$\|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}_{\omega_{\alpha}}} \lesssim \|\Phi\|.$$

$\square$

2.2 Линейные непрерывные функционалы в пространствах $A^{p,q}_\omega(U^n)$ при $0 < \min(p,q) \le 1$

Хорошо известно, что если один из параметров p или q меньше единицы, то любой непрерывный функционал в пространстве $L^{p,q}_\omega(U^n)$ тождественно нулевой (см. [12]). В случае аналитических функций указанное утверждение разумеется неверно, соотвествующее утверждение формулируется и доказывается в рассматриваемом параграфе.

Основным результатом этого параграфа является доказательство следующего утверждения:

Теорема 2.2. *Пусть* p, q *принадлежат* $(0,1]$ *или один из параметров принадлежит интервалу* $(0,1]$*, а другой - интервалу* $(1;+\infty)$, $\omega_j \in \Omega, j = \overline{1,n}$. *Если* Φ *- линейный непрерывный функционал на* $A^{p,q}_\omega(U^n)$ *и* $g(z) = \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z}$, $\zeta,\ z \in U^n$, *тогда* $g \in \Lambda^{p,q}_\omega$.

Функционал Φ *представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta), \tag{2.4}$$

и справедливы оценки

$$\|g\|_{\Lambda^{p,q}_\omega} \lesssim \|\Phi\| \lesssim \|g\|_{\Lambda^{p,q}_\omega}. \tag{2.5}$$

Верно и обратное: любая $g \in \Lambda^{p,q}_\omega$ *по формуле* (2.4) g *порождает линейный непрерывный функционал на* $A^{p,q}_\omega(U^n)$ *для которого справедливы оценки* (2.5).

Доказательство основного результата этого параграфа основывается на ранее упомянутых вспомогательных утверждениях и следующей лемме:

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < p, q \leqslant 1, f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \int\limits_{T^n} |f(r\zeta)| dm_n(\zeta) r dr \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r) \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Применяя лемму 1.6 и лемму 1.5, получаем

$$\int\limits_{Q_n} \omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \int\limits_{T^n} |f(r\zeta)| dm_n(\zeta) r dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1} \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} r dr \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Доказательство Теоремы 2.2.

1) Пусть сначала $1 < p < +\infty, 0 < q \leq 1$, тогда по определению $\Lambda_\omega^{p,q} = \overset{\approx p,q}{\lambda_\omega}$. Пусть Φ - линейный непрерывный функционал на $A_\omega^{p,q}(U^n)$ и $g(z) = \Phi(e_z), e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z},\ \zeta, z \in U^n$. Тогда, с учетом леммы 1.5, Φ будет непрерывен в пространстве $A_{\omega^*}^{p,1}(U^n)$, где $\omega_\Pi^*(1-|z|) = \omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|z|)(1-|z|)^{\frac{1}{q}-1}$ с нормой

$$\|f\|_{A_{\omega^*}^{p,1}} = \int\limits_{Q_n} \omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1} \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} r dr \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{Q_n} \omega_\Pi(1-r) \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r dr \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{A_\omega^{p,q}}.$$

Далее продолжим Φ с $A_{\omega^*}^{p,1}(U^n)$ на $L_{\omega^*}^{p,1}(U^n)$ с сохранением нормы. Снова, применяя теорему Бенедека-Понцоне (см. [26]), получим, что существует функция ψ такая, что

$$\sup_{r \in Q_n} \left(\int\limits_{T^n} |\psi(rw)|^{p'} dm_n(w) \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty,$$

причем

$$\|\Phi\| = \sup_{r\in Q_n}\left(\int\limits_{T^n} |\psi(rw)|^{p'} dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty,$$

$$\Phi(f) = \int\limits_{U^n} \omega^*_\Pi(1-|\zeta|)f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}dm_{2n}(\zeta),$$

$$g(z) = \Phi(e_z) = \Phi\left(\frac{1}{1-\zeta z}\right) = \int\limits_{U^n} \frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)}{1-\zeta z}\overline{\psi(\zeta)}dm_{2n}(\zeta),$$

$$D^{\alpha+1}g(z) = D^{\alpha+1}\left(\int\limits_{U^n} \frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)}{1-\zeta z}\psi(\overline{\zeta})dm_{2n}(\zeta)\right) = \int\limits_{U^n} \frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}}{(1-\zeta z)^{\alpha+2}}dm_{2n}(\zeta).$$

Тогда, проинтегрировав по T^n и применив сначала неравенство Минковского, а затем неравенство Гельдера, получим

$$\left(\int\limits_{T^n} |D^{\alpha+1}g(rw)|^{p'}dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}} \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{T^n}\left(\int\limits_{Q_n}\int\limits_{T^n} \frac{\omega^*_\Pi(1-\rho)\overline{|\psi(\rho\sigma)|}}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}}dm_n(\sigma)\rho d\rho\right)^{p'} dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_n}\left(\int\limits_{T^n}\left(\int\limits_{T^n} \frac{\omega^*_\Pi(1-\rho)\overline{|\psi(\rho\sigma)|}}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}}dm_n(\sigma)\right)^{p'} dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}}\rho d\rho \leqslant \int\limits_{Q_n}\omega^*_\Pi(1-\rho)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n}\int\limits_{T^n} \frac{\overline{|\psi(\rho\sigma)|^{p'}}}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}}dm_n(\sigma)\left(\int\limits_{T^n}\frac{dm_n(\sigma)}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}}\right)^{\frac{p'}{p}} dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}}\rho d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n}\frac{\omega^*_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}}}\left(\int\limits_{T^n}\int\limits_{T^n} \frac{\overline{|\psi(\rho\sigma)|^{p'}}}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}}dm_n(\sigma)dm_n(w)\right)^{\frac{1}{p'}}\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{Q_n}\frac{\omega^*_\Pi(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}}}\left(\int\limits_{T^n}\overline{|\psi(\rho\sigma)|^{p'}}\int\limits_{T^n} \frac{dm_n(w)}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}}dm_n(\sigma)\right)^{\frac{1}{p'}}\rho d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \left(\int\limits_{T^n} \overline{|\psi(\rho\sigma)|^{p'}} dm_n(\sigma) \right)^{\frac{1}{p'}} \rho d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \frac{\omega^*_{\Pi}(1-r)}{(1-r)^{\alpha}} \sup_{\rho \in Q_n} \left(\int\limits_{T^n} \overline{|\psi(\rho\sigma)|^{p'}} dm_n(\sigma) \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Таким образом

$$\|g\|_{\widetilde{\widetilde{\lambda}}^{p,q}_{\omega}} = \sup_{r \in Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha}}{\omega^*_{\Pi}(1-r)} \left(\int\limits_{T^n} |D^{\alpha+1} g(rw)|^{p'} dm_n(w) \right)^{\frac{1}{p'}} \lesssim$$

$$\lesssim \sup_{r \in Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha}}{\omega^*_{\Pi}(1-r)} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-r)}{(1-r)^{\alpha}} \sup_{\rho \in Q_n} \left(\int\limits_{T^n} \overline{|\psi(\rho\sigma)|^{p'}} dm_n(\sigma) \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{\rho \in Q_n} \left(\int\limits_{T^n} \overline{|\psi(\rho\sigma)|^{p'}} dm_n(\sigma) \right)^{\frac{1}{p'}} = \|\Phi\|.$$

Итак, доказано, что $\|g\|_{\widetilde{\widetilde{\lambda}}^{p,q}_{\omega}} \lesssim \|\Phi\|$. Следовательно левая оценка в формуле (2.5) для случая $1 < p < +\infty, 0 < q \leq 1$ установлена.

2) Пусть теперь $0 < p \leq 1, 1 < q < +\infty$, тогда по определению $\Lambda^{p,q}_{\omega} = \widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}$. Пусть Φ - линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$ и снова $g(z) = \Phi(e_z), e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z}, \zeta, z \in U^n$. Тогда, с учетом леммы 1.6, Φ будет непрерывен в пространстве $A^{1,q}_{\omega^*}(U^n)$, где $\omega^*_{\Pi}(1-|z|) = \omega(1-|z|)(1-|z|)^{q(\frac{1}{p}-1)}$ с нормой

$$\|f\|_{A^{1,q}_{\omega^*}} = \left(\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r)(1-r)^{q(\frac{1}{p}-1)} \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)| dm_n(\zeta) \right)^q r dr \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r) \left((1-r)^{\frac{1}{p}-1} \int\limits_{T^n} |f(r\zeta)| dm_n(\zeta) \right)^q r dr \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r) \left(\int\limits_{T^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r dr \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{A^{p,q}_{\omega}}.$$

Далее продолжим Φ с $A^{1,q}_{\omega^*}(U^n)$ на $L^{1,q}_{\omega^*}(U^n)$ с сохранением нормы. Снова, применяя теорему Бенедека-Понцоне, получим, что существует функция ψ такая, что

$$\left(\int\limits_{Q_n} \omega^*_{\Pi}(1-r) \sup_{w\in T^n} |\psi(rw)|^{q'} rdr\right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty, q' = \frac{q}{q-1},$$

причем

$$\|\Phi\| = \left(\int\limits_{Q_n} \omega^*_{\Pi}(1-r) \sup_{w\in T^n} |\psi(rw)|^{q'} rdr\right)^{\frac{1}{q'}},$$

и

$$\Phi(f) = \int\limits_{U^n} \omega^*_{\Pi}(1-|\zeta|) f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)} dm_{2n}(\zeta),$$

$$g(z) = \Phi(e_z) = \Phi\left(\frac{1}{1-\zeta z}\right) = \int\limits_{U^n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-|\zeta|)}{1-\zeta z}\overline{\psi(\zeta)} dm_{2n}(\zeta), z\in U^n.$$

$$D^{\alpha+1}g(z) = D^{\alpha+1}\left(\int\limits_{U^n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-|\zeta|)}{1-\zeta z}\overline{\psi(\zeta)} dm_{2n}(\zeta)\right) = \int\limits_{U^n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}}{(1-\zeta z)^{\alpha+2}} dm_{2n}(\zeta).$$

И

$$|D^{\alpha+1}g(z)| \lesssim \int\limits_{Q_n} \omega^*_{\Pi}(1-\rho) \int\limits_{T^n} \frac{|\psi(\rho\sigma)|}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}} dm_n(\sigma)\rho d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} \omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup_{\sigma\in T^n} |\psi(\rho\sigma)| \int\limits_{T^n} \frac{dm_n(\sigma)}{|1-\rho\sigma r w|^{\alpha+2}} \rho d\rho \lesssim \int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma\in T^n} |\psi(\rho\sigma)|}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \rho d\rho.$$

Таким образом

$$\|g\|_{\widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}} = \left(\int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha q' - \frac{q'}{p} + q'}}{\omega_{\Pi}^{\frac{q'}{q}}(1-r)} \sup_{w\in T^n} |D^{\alpha+1}g(rw)|^{q'} rdr\right)^{\frac{1}{q'}} \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha q' - \frac{q'}{p} + q'}}{\omega_{\Pi}^{\frac{q'}{q}}(1-r)} \left(\int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma\in T^n} |\psi(\rho\sigma)|}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \rho d\rho\right)^{q'} rdr\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\|g\|_{\widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}} \lesssim \Bigg(\int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha q' - \frac{q'}{p} + q'}}{\omega_{\Pi}^{\frac{q'}{q}}(1-r)} \int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma \in T^n} |\psi(\rho\sigma)|^{q'}}{(1-r\rho)^{\alpha+1} \chi_{\gamma}^{q'}(\rho)} \rho d\rho \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \chi^q_{\gamma}(\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \rho d\rho \Bigg)^{\frac{q'}{q}} r dr \Bigg)^{\frac{1}{q'}}.$$

В соответствии с формулой (1.1) получим

$$\|g\|_{\widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}} \lesssim \Bigg(\int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha q' - \frac{q'}{p} + q'}}{\omega_{\Pi}^{\frac{q'}{q}}(1-r)} \Bigg(\frac{\omega^*_{\Pi}(1-r) \chi^q_{\gamma}(r)}{(1-r)^{\alpha}} \Bigg)^{\frac{q'}{q}} \times$$

$$\times \int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma \in T^n} |\psi(\rho\sigma)|^{q'}}{(1-r\rho)^{\alpha+1} \chi_{\gamma}^{q'}(\rho)} \rho d\rho r dr \Bigg)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{Q_n} (1-r)^{\alpha} \chi^{q'}_{\gamma}(r) \int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma \in T^n} |\psi(\rho\sigma)|^{q'}}{(1-r\rho)^{\alpha+1} \chi_{\gamma}^{q'}(\rho)} \rho d\rho r dr \Bigg)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma \in T^n} |\psi(\rho\sigma)|^{q'}}{\chi_{\gamma}^{q'}(\rho)} \int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha} \chi^{q'}_{\gamma}(r) r dr}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \rho d\rho \Bigg)^{\frac{1}{q'}} \lesssim$$

$$\lesssim \Bigg(\int\limits_{Q_n} \frac{\omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma \in T^n} |\psi(\rho\sigma)|^{q'}}{\chi_{\gamma}^{q'}(\rho)} \frac{(1-\rho)^{\alpha} \chi^{q'}_{\gamma}(\rho)}{(1-\rho)^{\alpha}} \rho d\rho \Bigg)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{Q_n} \omega^*_{\Pi}(1-\rho) \sup\limits_{\sigma \in T^n} |\psi(\rho\sigma)|^{q'} \rho d\rho \Bigg)^{\frac{1}{q'}} = \|\Phi\|.$$

Таким образом, мы доказали, что $\|g\|_{\widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}} \lesssim \|\Phi\|$. Это есть левая оценка формулы (2.5), когда $0 < p \leq 1, 1 < q < +\infty$.

3)Перейдем к случаю $0 < p, q \leqslant 1$, тогда по определению $\Lambda^{p,q}_{\omega} = \lambda^{p,q}_{\omega}$. Пусть снова Φ представляет собой линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$ и $g(z) = \Phi(e_z), e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z}, \zeta, z \in U^n$. Тогда, с учетом леммы 2.1, Φ будет непрерывен в пространстве $A^{1,1}_{\omega^*}(U^n)$, где $\omega^*_\Pi(1-|z|)=\omega^{\frac{1}{q}}_\Pi(1-|z|)(1-|z|)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}$ с нормой

$$\|f\|_{A^{1,1}_{\omega^*}}=\int\limits_{Q_n}\omega^{\frac{1}{q}}_\Pi(1-r)(1-r)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\int\limits_{T^n}|f(r\zeta)|dm_n(\zeta)rdr\lesssim$$

$$\lesssim\left(\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\left(\int\limits_{T^n}|f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}rdr\right)^{\frac{1}{q}}=\|f\|_{A^{p,q}_\omega}.$$

Продолжим Φ с $A^{1,1}_{\omega^*}(U^n)$ на $L^{1,1}_{\omega^*}(U^n)$ с сохранением нормы. По теореме Ф. Рисса (см. [12])существует функция $\psi\in L^\infty(U^n)$ такая, что

$$\Phi(f)=\int\limits_{U^n}\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}dm_{2n}(\zeta),$$

причем

$$\|\Phi\|=\|\psi\|_{L^\infty(U^n)}.$$

Пусть снова

$$g(z)=\Phi(e_z)=\Phi\left(\frac{1}{1-\zeta z}\right)=\int\limits_{U^n}\frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)}{1-\zeta z}\overline{\psi(\zeta)}dm_{2n}(\zeta),\quad z\in U^n.$$

Тогда

$$D^{\alpha+1}g(z)=D^{\alpha+1}\left(\int\limits_{U^n}\frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)}{1-\zeta z}\overline{\psi(\zeta)}dm_{2n}(\zeta)\right)=$$

$$=\int\limits_{U^n}\frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}}{(1-\zeta z)^{\alpha+2}}dm_{2n}(\zeta).$$

И

$$|D^{\alpha+1}g(z)|\lesssim\int\limits_{U^n}\frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)\overline{|\psi(\zeta)|}}{|1-\zeta z|^{\alpha+2}}dm_{2n}(\zeta)\lesssim$$

$$\lesssim\|\psi\|_{L^\infty(U^n)}\int\limits_{U^n}\frac{\omega^*_\Pi(1-|\zeta|)}{|1-\zeta z|^{\alpha+2}}dm_{2n}(\zeta).$$

В соответствии с формулой (1.1) получим

$$|D^{\alpha+1}g(z)| \lesssim \frac{\omega^*_\Pi(1-|z|)}{(1-|z|)^\alpha}\|\psi\|_{L^\infty(U^n)}.$$

Тогда

$$\|g\|_{\lambda^{p,q}_\omega} = \sup_{z\in U^n}\frac{(1-|z|)^{\alpha-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2}}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|z|)}|D^{\alpha+1}g(z)| \lesssim$$

$$\lesssim \sup_{z\in U^n}\frac{(1-|z|)^{\alpha-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2}}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|z|)}\frac{\omega^*_\Pi(1-|z|)}{(1-|z|)^\alpha}\|\psi\|_{L^\infty(U^n)} =$$

$$= \sup_{z\in U^n}\frac{(1-|z|)^{\alpha-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2}}{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|z|)}\frac{\omega_\Pi^{\frac{1}{q}}(1-|z|)(1-|z|)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}}{(1-|z|)^\alpha}\|\psi\|_{L^\infty(U^n)} =$$

$$= \|\psi\|_{L^\infty(U^n)} = \|\Phi\|.$$

Итак, доказано, что $\|g\|_{\lambda^{p,q}_\omega} \lesssim \|\Phi\|$. Это есть левая оценка в формуле (2.5), при условии $0 < p, q \leqslant 1$.

Таким образом доказана левая оценка формулы (2.5) теоремы.

Перейдем к доказательству обратного утверждения теоремы, а также к доказательству формулы (2.4) и правой оценки формулы (2.5).

Как и выше, зафиксируем $z = (z_1, ..., z_n)$ и пусть $\delta_k = \delta_{k_1,...,k_n} = \zeta_1^{k_1}...\zeta_n^{k_n}$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in U^n, k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Далее разложим в ряд функцию $e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z}$

$$e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z} = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty}(z_1\zeta_1)^{k_1}...(z_n\zeta_n)^{k_n}, \quad \zeta, z \in U^n.$$

тогда, принимая во внимание, что для любого $z \in U^n$, рассматриваемый ряд сходится равномерно для $\zeta \in U^n \cup \partial U^n$, получим

$$g(z) = \Phi(e_z) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty}\Phi(\delta_{k_1,...,k_n})z_1^{k_1}...z_n^{k_n}.$$

Пусть $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$ и $0 < \rho < 1, \quad f_\rho(z) = f(\rho z), z \in U^n$. Легко видеть, что $\|f_\rho - f\|_{A^{p,q}_\omega} \to 0$ при $\rho \to 1-0$. В результате,

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \Phi(f_\rho) = \lim_{\rho\to 1-0} \Phi(f_{\rho^2}) = \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k \rho^{2|k|} \Phi(\delta_k) =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k \rho^{|k|} \sum_{|m|=0}^{+\infty} \rho^{|m|} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \zeta^{k-m} dm_n(\zeta) =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k \rho^{|k|} \zeta^k \sum_{|m|=0}^{+\infty} \rho^{|m|} \zeta^{-m} dm_n(\zeta) =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta).$$

Таким образом (2.4) доказана.

Теперь мы докажем обратное. Пусть $g \in \Lambda^{p,q}_\omega$, покажем, что по фомуле (2.4) порождается линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_\omega(U^n)$, для которого справедливы оценки (2.5).

Опять же, согласно формуле (2.3),получим

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta) = \frac{\widetilde{c}(\alpha)}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) \times$$

$$\times \int\limits_{U^n} \frac{(1-|w|)^\alpha}{1-\overline{w}\overline{\zeta}} D^{\alpha+1} g(\rho w) dm_{2n}(w) dm_n(\zeta) =$$

$$= \frac{\widetilde{c}(\alpha)}{(2\pi)^n} \int\limits_{U^n} (1-|w|)^\alpha D^{\alpha+1} g(\rho w) \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta) dm_n(\zeta)}{1-\overline{w}\overline{\zeta}} dm_{2n}(w).$$

Вычислим последний интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta) dm_n(\zeta)}{1-\overline{w}\overline{\zeta}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta)\zeta dm_n(\zeta)}{\zeta - \overline{w}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\rho\zeta) d\zeta}{\zeta - \overline{w}} = f(\rho\overline{w}).$$

Таким образом

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f(\rho\zeta)g(\rho\overline{\zeta})dm_n(\zeta)=\widetilde{c}(\alpha)\int\limits_{U^n}(1-|w|)^{\alpha}D^{\alpha+1}g(\rho w)f(\rho\overline{w})dm_{2n}(w).$$

Согласно теореме 1.7(см. [24], стр. 19) о предельном переходе, имеем

$$|\Phi(f)|\lesssim\lim_{\rho\to 1-0}\int\limits_{U^n}(1-|w|)^{\alpha}|D^{\alpha+1}g(\rho w)||f(\rho\overline{w})|dm_{2n}(w)\le$$

$$\le\int\limits_{U^n}(1-|w|)^{\alpha}|D^{\alpha+1}g(w)||f(\overline{w})|dm_{2n}(w).$$

Рассмотрим случай, когда $1<p<+\infty,\ 0<q\le 1$. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|\Phi(f)|\lesssim\int\limits_{Q_n}(1-r)^{\alpha}\left(\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|^{p'}dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|^{p}dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p}}rdr=$$

$$=\int\limits_{Q_n}(1-r)^{\alpha}\frac{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}}{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}}\left(\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|^{p'}dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p'}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|^{p}dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p}}rdr,$$

применяя далее лемму 1.5, имеем

$$|\Phi(f)|\lesssim\int\limits_{Q_n}(1-r)^{\alpha}\frac{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}}{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}}\left(\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|^{p'}dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p'}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|^{p}dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p}}rdr\lesssim\sup_{r\in Q_n}\left\{\frac{(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}+1}}{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|^{p'}dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\left(\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|^p dm_n(\tau)\right)^{\frac{q}{p}} rdr\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{\tilde{\lambda}^{p,q}_\omega}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Если $0<p\leq 1, 1<q<+\infty$, тогда

$$|\Phi(f)| \lesssim \int\limits_{Q_n}(1-r)^\alpha\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)||f(r\overline{\tau})|dm_n(\tau)rdr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n}(1-r)^\alpha \sup_{\tau\in T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|dm_n(\tau)rdr.$$

Применяя лемму 1.6, а затем, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|\Phi(f)| \lesssim \int\limits_{Q_n}(1-r)^\alpha \sup_{\tau\in T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|dm_n(\tau)rdr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n}(1-r)^\alpha \sup_{\tau\in T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|(1-r)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|^p dm_n(\tau)\right)^{\frac{1}{p}} rdr \leqslant$$

$$\leqslant\left(\int\limits_{Q_n}(1-r)^{\alpha q'+q'-\frac{q'}{p}}\frac{\sup\limits_{\tau\in T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|^{q'}}{\omega_\Pi^{\frac{q'}{q}}(1-r)} rdr\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|^p dm_n(\tau)\right)^{\frac{q}{p}} rdr\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{\tilde{\lambda}^{p,q}_\omega}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Теперь мы обратимся к случаю $0<p,q\leqslant 1$

$$|\Phi(f)| \lesssim \int\limits_{Q_n}(1-r)^\alpha\int\limits_{T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)||f(r\overline{\tau})|dm_n(\tau)rdr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n}(1-r)^\alpha \sup_{\tau\in T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|dm_n(\tau)rdr.$$

Применяя последовательно леммы 1.6 и 1.5, получаем

$$|\Phi(f)| \lesssim \int\limits_{Q_n}(1-r)^\alpha \sup_{\tau\in T^n}|D^{\alpha+1}g(r\tau)|\int\limits_{T^n}|f(r\tau)|dm_n(\tau)rdr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{Q_n} (1-r)^{\alpha} \sup_{\tau \in T^n} |D^{\alpha+1} g(r\tau)| (1-r)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{T^n} |f(r\tau)|^p dm_n(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} r dr \lesssim$$

$$\lesssim \sup_{z \in U^n} \Big[(1-|z|)^{\alpha} (1-|z|)^{1-\frac{1}{p}} (1-|z|)^{1-\frac{1}{q}} \omega_{\Pi}^{-\frac{1}{q}} (1-|z|) |D^{\alpha+1} g(z)| \Big] \times$$

$$\times \left(\int\limits_{Q_n} \omega_{\Pi}(1-r) \left(\int\limits_{T^n} |f(r\tau)|^p dm_n(\tau) \right)^{\frac{q}{p}} r dr \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \sup_{z \in U^n} \left[\frac{(1-|z|)^{\alpha+2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-|z|)} |D^{\alpha+1} g(z)| \right] \|f\|_{A^{p,q}(\omega)} = \|g\|_{\lambda_{\omega}^{p,q}} \|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Итак, $|\Phi(f)(z)|$ ограничен при всех $0 < p, q < +\infty$. Следовательно, $\Phi(f)$ есть линейный непрерывный функционал на $A_{\omega}^{p,q}(U^n)$, причем

$$\|\Phi\| \lesssim \|g\|_{\Lambda_{\omega}^{p,q}},$$

к тому же это есть правая оценка в формуле (2.5).

Остается доказать равенство $\Phi(e_z) = g(z),\ e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z}, \zeta, z \in U^n$, тогда

$$\Phi(e_z) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\overline{\zeta})}{1-\rho\zeta z} dm_n(\zeta) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\zeta)}{1-\rho\overline{\zeta} z} dm_n(\zeta) =$$

$$= \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\zeta)\zeta}{\zeta - \rho z} dm_n(\zeta) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(\rho\zeta)}{\zeta - \rho z} d\zeta =$$

$$= \lim_{\rho \to 1-0} g(\rho^2 z) = g(z).$$

Используя первую часть доказательства мы получим

$$\|D^{\alpha+1} g\|_{\Lambda_{\omega}^{p,q}} \lesssim \|\Phi\|.$$

Таким образом, теорема доказана.

$\square$

2.3 Критерии ограниченности тёплицева оператора в весовых анизотропных пространствах типа Соболева голоморфных в поликруге функций и делимость аналитических функций

В этом параграфе мы исследуем повоедение теплицевых операторов в весовых аналитических пространствах типа С.Л. Соболева в поликруге U^n. Для этого введём еще некоторые определения и обозначения:

Пусть $h^1(U^n)$ - класс Харди плюригармонических в поликруге функций, то есть класс плюригармонических в U^n функций, для которых

$$\sup_{0<\rho<1} \int\limits_{T^n} |u(\rho\zeta)| dm_n(\zeta) < +\infty.$$

Отметим, что, если h - некоторая суммируемая на U^n функция, то h имеет плюригармоническое продолжение в U^n, принадлежащее классу $h^1(U^n)$ тогда и только тогда, когда ряд Фурье этой функции на T^n имеет вид

$$h(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \approx \sum_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} C_{k_1...k_n} e^{ik_1\theta_1} ... e^{ik_n\theta_n} + \sum_{k=(k_1,...,k_n)\in \widetilde{Z}_-^n} C_{k_1...k_n} e^{ik_1\theta_1} ... e^{ik_n\theta_n},$$

где $\widetilde{Z}_-^n = -Z_+^n \setminus \{0\}$, то есть $\widetilde{Z}_-^n = \{-k = (-k_1, ..., -k_n) : \ k_j \in Z_+, \ j = 1, ..., n\}$ (см. [11]).

В дальнейшем нам потребуется также класс голоморфных функций $\Lambda_\omega^\alpha(U^n)$, для которых

$$\left| D^{\alpha+2} f(z_1, ..., z_n) \right| \lesssim \prod_{j=1}^n \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^2}, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in U^n, \tag{2.6}$$

с естественной нормой

$$\|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha} = \sup_{z\in U^n} \left\{ \left| D^{\alpha+2} f(z_1, ..., z_n) \right| \prod_{j=1}^n \frac{(1-|z_j|)^2}{\omega_j(1-|z_j|)} \right\} < +\infty, \tag{2.7}$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Основным результатом этого параграфа является доказательство следующих двух утверждений:

Теорема 2.3. *Пусть* $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\omega-$ *функция типа модуля непрерывности на* Q_n, $h-$ *функция из класса* $RP(U^n)$, $\int\limits_0^1 \frac{\omega_j(u)du}{u} < +\infty$, $j = 1, ..., n$.

1. *Если* $m_j \leq \alpha_j$, $j = 1, ..., n$, *то следующие утверждения равносильны:*

   a. $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$;

   b. *функция* h *допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n,$$

   где h_1, h_2 *являются граничными значениями функций, голоморфных в* U^n, *при этом* h_1 *- мультипликатор пространства* $A_\omega(\alpha, m)$, $D^{-m}h_2 \in \Lambda^\alpha_\omega$, *где* $D^{-m}-$ *оператор, обратный к оператору* D^m.

2. *Если* $m_j \geq \alpha_j + 2$, $j = 1, ..., n$, *то следующие утверждения равносильны:*

   a. $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$;

   b. h *допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n,$$

   где $h_1 \in A_\omega(\alpha, m), h_2 \in H^\infty(U^n)$.

Теорема 2.4. *Пусть* $h \in H^1(U^n)$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $m_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, ..., n$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

1. T_h *является ограниченным оператором в пространстве* $A_\omega(\alpha, m)$;

2. *функция* $h \in H^\infty(U^n)$, *причем для любого кортежа* $k = (k_1, ..., k_p) \in K_p$ *справедлива оценка*

$$\sup_{z \in U^n} \left\{ \left| \frac{\partial^p h(z_1, ..., z_p)}{\partial z_{k_1} ... \partial z_{k_p}} \right| \prod_{j=1}^{p} \frac{(1 - |z_{k_j}|)^2}{\omega_{k_j}(1 - |z_{k_j}|)} \int\limits_{1-|z_{k_j}|}^{1} \frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2} du \right\} < +\infty, \tag{2.8}$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Замечание. Отметим, что в одномерном случае результаты, аналогичные теоремам 2.3 и 2.4, были получены Ф.А. Шамояном в работах [21] и [25].

Доказательство основных результатов работы основывается на вспомогательных утверждениях.

Лемма 2.2. *Пусть* $\alpha_j \geq m_j$, $\omega_j \in \Omega$, $j = \overline{1,n}$. *Если* Φ *- линейный непрерывный функционал на* $A_\omega(\alpha, m)$ *и* $g(z) = \Phi(e_z)$, $\quad e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z}$, $\zeta, z \in U^n$, *тогда* $g \in \Lambda_\omega^\alpha$.

Функционал Φ *представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta), \tag{2.9}$$

и справедливы оценки

$$c_1 \|g\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \leq \|\Phi\| \leq c_2 \|g\|_{\Lambda_\omega^\alpha}. \tag{2.10}$$

Верно и обратное: любая $g \in \Lambda_\omega^\alpha$ *по формуле* (2.9) *gпорождает линейный непрерывный функционал на* $A_\omega(\alpha, m)$ *для которого справедливы оценки* (2.10).

Доказательство. Если положить $\alpha'_j \geq m_j, j = 1, ..., n$ и $A_\omega(\alpha, m) := A_\omega(\alpha' - m, m)$, то по Теореме 1.3 типа Харди-Литтлвуда, установленной в параграфе 1.3, справедливо, что $A_\omega(\alpha, m) \approx A_{\omega*}^{1,1}$, где $\omega * (t) := \omega(t) t^{\alpha-1}$ и $\lambda_{\omega*}^{1,1} = \Lambda_\omega^\alpha$. Следовательно, положив $p = q = 1$ в Теореме 2.2 получим требуемое. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть* $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $m_j \geq \alpha_j + 2$, $j = 1, ..., n$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $f \in \Lambda_\omega^\alpha$;

2)

$$\Big| D^m f(z_1, ..., z_n) \Big| \lesssim \prod_{j=1}^n \frac{\omega_j(1 - |z_j|)}{(1 - |z_j|)^{m_j - \alpha_j}}, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in U^n. \tag{2.11}$$

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2). Рассмотрим хорошо известное представление функции f (см. [24])

$$f(z_1,...,z_n)=\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j+3)\int\limits_{Q_n}(1-t_j)^{\alpha_j+1}D^{\alpha+2}f(t_1z_1,...,t_nz_n)dt_1...dt_n. \qquad (2.12)$$

Тогда

$$D^m f(z_1,...,z_n)=\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j+3)\int\limits_{Q_n}(1-t_j)^{\alpha_j+1}D^mD^{\alpha+2}f(t_1z_1,...,t_nz_n)dt_1...dt_n.$$

Отметим также, что если $f\in\Lambda_\omega^\alpha$, то справедлива оценка (2.6), и тогда легко установить, что

$$\Big|D^mD^{\alpha+2}f(z_1,...,z_n)\Big|\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^{m_j+2}},\quad z=(z_1,...,z_n)\in U^n.$$

Следовательно,

$$\Big|D^m f(z_1,...,z_n)\Big|\lesssim\int\limits_{Q_n}\prod_{j=1}^{n}(1-t_j)^{\alpha_j+1}\frac{\omega_j(1-t_j|z_j|)}{(1-t_j|z_j|)^{m_j+2}}dt_1...dt_n=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^1\frac{(1-t_j)^{\alpha_j+1}\omega_j(1-t_j|z_j|)}{(1-t_j|z_j|)^{m_j+2}}dt_j\lesssim\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^1\frac{\omega_j(1-t_j|z_j|)}{(1-t_j|z_j|)^{m_j-\alpha_j+1}}dt_j.$$

Учтем, что $x_j\to\frac{\omega_j(1-x_j)}{1-x_j}$ не убывает на $[0,1)$ и при этом $m_j-\alpha_j>1,\forall j=1,...,n$, тогда

$$\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^1\frac{\omega_j(1-t_j|z_j|)}{(1-t_j|z_j|)^{m_j-\alpha_j+1}}dt_j\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^{m_j-\alpha_j}},\ z=(z_1,...,z_n)\in U^n.$$

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1). Согласно лемме 1.3 справедливо представление

$$f(z_1,...,z_n)=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{\zeta}_jz_j)^{\gamma_j+2-m_j}}D^mf(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta).$$

Тогда

$$D^{\alpha+2}f(z_1,...,z_n)=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{\zeta}_jz_j)^{\gamma_j-m_j+\alpha_j+4}}D^mf(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta),$$

где $\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)$ - некотрая ограниченная аналитическая функция.

Следовательно, воспользовавшись пунктом 2. леммы, то есть оценкой (2.11), получим

$$|D^{\alpha+2}f(z_1,...,z_n)|=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}|\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)|}{|1-\overline{\zeta}_jz_j|^{\gamma_j-m_j+\alpha_j+4}}|D^mf(\zeta_1,...,\zeta_n)|dm_{2n}(\zeta)\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{|1-\overline{\zeta}_jz_j|^{\gamma_j-m_j+\alpha_j+4}}\frac{\omega_j(1-|\zeta_j|)}{(1-|\zeta_j|)^{m_j-\alpha_j}}dm_{2n}(\zeta)\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^2}.$$

Таким образом, доказана оценка (2.6) и, значит, $f\in\Lambda^{\alpha}_{\omega}$. □

Лемма 2.4. *Пусть $m_j<\alpha_j+1$, $j=1,...,n$, $h\in H(U^n)$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $D^{-m}h\in\Lambda^{\alpha}_{\omega}$*;*

2) $\Big|D^sh(z)\Big|\lesssim\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^{s_j+m_j-\alpha_j}}$, $s_j+m_j\geq\alpha_j$, $j=1,...,n$.

Доказательство. Импликация 1) ⇒ 2).

Согласно лемме 2.3 имеем $\Big|D^kD^{-m}f(z_1,...,z_n)\Big|\lesssim\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^{k_j-\alpha_j}}$, $k_j\geq\alpha_j+2, j=1,...,n.$

Тогда

$$\Big|D^{k-m}f(z_1,...,z_n)\Big|\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^{k_j-\alpha_j}},k_j\geq\alpha_j+2,j=1,...,n.$$

Положим $s_j:=k_j-m_j,j=1,...,n$. Тогда $k_j=s_j+m_j,j=1,...,n$ и, следовательно,

$$\Big|D^sf(z_1,...,z_n)\Big|\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^{s_j+m_j-\alpha_j}},\ s_j+m_j\geq\alpha_j,j=1,...,n.$$

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть выполняется условие 2., тогда, положив $s_j = \alpha_j - m_j + 2, j = 1, ..., n$, получим 1. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $h \in H(U^n)$ такая, что $D^{-m}h \in \Lambda_\omega^\alpha$, причем $m_j < \alpha_j$ и $\int\limits_0^1 \frac{\omega_j(u)}{u} du < +\infty$, $j = 1, ..., n$. Тогда $h \in H^\infty(U^n)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.4 имеем

$$\left|D^s h(z_1, ..., z_n)\right| \lesssim \prod_{j=1}^n \frac{\omega_j(1 - |z_j|)}{(1 - |z_j|)^{s_j + m_j - \alpha_j}},\ s_j + m_j \geq \alpha_j, j = 1, ..., n.$$

Учитывая теперь представление функции h

$$h(z_1, ..., z_n) = \prod_{j=1}^n (s_j + 1) \int\limits_{Q_n} (1 - t_j)^{s_j - 1} D^s h(t_1 z_1, ..., t_n z_n) dt_1 ... dt_n,$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$, получим

$$|h(z_1, ..., z_n)| \lesssim \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^n (1 - t_j)^{s_j - 1} |D^s h(t_1 z_1, ..., t_n z_n)| dt_1 ... dt_n \lesssim$$

$$\lesssim \prod_{j=1}^n \int\limits_0^1 (1 - t_j)^{s_j - 1} \frac{\omega_j(1 - t_j|z_j|)}{(1 - t_j|z_j|)^{s_j + m_j - \alpha_j}} dt_j \lesssim \prod_{j=1}^n \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1 - t_j|z_j|)}{(1 - t_j|z_j|)^{m_j - \alpha_j + 1}} dt_j.$$

Заметим, что $0 < |z_j| < 1, j = 1, ..., n$, а по условию леммы $m_j \leq \alpha_j$, тогда $m_j - \alpha_j \leq 0$ и $\frac{1}{(1 - |z_j|)^{m_j - \alpha_j}} \leq 1, \forall j = 1, ..., n$. Следовательно,

$$|h(z_1, ..., z_n)| \lesssim \prod_{j=1}^n \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1 - t_j|z_j|)}{1 - t_j|z_j|} dt_j \leq \prod_{j=1}^n \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(u)}{u} du < +\infty.$$

$\square$

Лемма 2.6. *Пусть $h \in H^1(U^n)$, тогда, если оператор $T_{\overline{h}}$ действует в пространстве $A_\omega(\alpha, m)$, то $h \in H^\infty(U^n)$ ограничен, причем $\|h\|_\infty \leq \|T_{\overline{h}}\|$.*

Доказательство. Положим $f_r(z_1, ..., z_n) = \prod\limits_{j=1}^n \frac{1}{1 - r_j z_j}$, $z_j \in U$, $r_j \in (0; 1)$,

$j=1,...,n.$. Тогда

$$T_{\overline{h}}(f_r)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{f_r(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}d\zeta_1...d\zeta_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}\zeta_j-z_j}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}d\zeta_1...d\zeta_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)(1-r_j\zeta_j)}=\overline{\frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{h(\zeta_1,...,\zeta_n)d\overline{\zeta}_1...d\overline{\zeta}_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)(1-r_j\overline{\zeta}_j)}}=$$

$$=\overline{\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{h(\zeta_1,...,\zeta_n)d\zeta_1...d\zeta_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\overline{\zeta}_j-\overline{z}_j)\zeta_j^2(1-r_j\overline{\zeta}_j)}}=\overline{\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{h(\zeta_1,...,\zeta_n)d\zeta_1...d\zeta_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\overline{z}_j\zeta_j)(\zeta_j-r_j)}}=$$

$$=\overline{\left(\frac{h(r_1,...,r_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n}1-\overline{z}_jr_j}\right)}=\frac{\overline{h(r_1,...,r_n)}}{\prod\limits_{j=1}^{n}1-z_jr_j},\quad z_j\in U^n, j=1,...,n.$$

Поскольку $T_{\overline{h}}$ действует в пространстве $A_\omega(\alpha,m)$, то

$$\|T_{\overline{h}}f\|_{A_\omega(\alpha,m)}=\int\limits_{U^n}|D^mT_{\overline{h}}f(z_1,...,z_n)|\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}dm_{2n}(z_1,...,z_n)=$$

$$=\int\limits_{U^n}\left|D^m\frac{\overline{h(r_1,...,r_n)}}{\prod\limits_{j=1}^{n}1-z_jr_j}\right|\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}dm_{2n}(z_1,...,z_n)=$$

$$=const\int\limits_{U^n}\left|\frac{\overline{h(r_1,...,r_n)}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-z_jr_j)^{m_j+1}}\right|\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}dm_{2n}(z_1,...,z_n)=$$

$$=const\int\limits_{U^n}|\overline{h(r_1,...,r_n)}||f_r(z_1,...,z_n)|\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}dm_{2n}(z_1,...,z_n)=$$

$$=const|h(r_1,...,r_n)|\int\limits_{U^n}|f_r(z_1,...,z_n)|\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}dm_{2n}(z_1,...,z_n)=$$

$$=const|h(r_1,...,r_n)|\|f_r\|_{A_\omega(\alpha,m)}.$$

Заметим таперь, что $|T_h(f)(z_1,...,z_n)|=|h(r_1,...,r_n)||f_r(z_1,...,z_n)|$. Следовательно,

$$|h(r_1, ..., r_n)| = \frac{|T_h(f)(z_1, ..., z_n)|}{|f_r(z_1, ..., z_n)|} \lesssim |T_h(f)(z_1, ..., z_n)| \leq$$

$$\leq \sup_{z \in U^n} |T_h(f)(z_1, ..., z_n)| = \|T_{\overline{h}}(f)\|.$$

Итак,

$$\|T_{\overline{h}} f\|_{A_\omega(\alpha,m)} \lesssim \|T_{\overline{h}}(f)\| \|f_r\|_{A_\omega(\alpha,m)}.$$

Если теперь заменить $f_r(z_1, ..., z_n)$ на $f_r(e^{i\theta_1} z_1, ..., e^{i\theta_n} z_n)$, тогда получим, что

$$|h(r_1 e^{i\theta_1}, ..., r_n e^{i\theta_n})| \lesssim \|T_{\overline{h}}(f)\|, \quad r_j \in (0; 1), \ \theta_j \in (-\pi; \pi], j = 1, ..., n.$$

□

Лемма 2.7. *Пусть $m_j \geq \alpha_j + 2$, ω_j - функция типа модуля непрерывности, $j = 1, ..., n$. Тогда класс $A_\omega(\alpha, m)$ является кольцом относительно операций умножения и сложения.*

Доказательство. Отметим, что, используя многомерную формулу Лейбница,достаточно доказать, что для произвольных $0 \leq k_j \leq m_j$ производные $D^{k_j} g(z)$, $D^{m_j - k_j} f(z)$, $j = 1, ..., n$, принадлежат классу $A_\omega(\alpha, 0)$.

Согласно лемме 1.3 имеем

$$f(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\gamma_j + 2 - m_j}} D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta),$$

$$g(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\gamma_j + 2 - m_j}} D^m g(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta),$$

$\gamma_j -$ достаточно большое число ($j = 1, ..., n$).

Тогда

$$D^{m-k} f(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\gamma_j + 2 - k_j}} D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta),$$

$$D^k g(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\gamma_j + 2 - m_j + k_j}} D^m g(\zeta_1, ..., \zeta_n) dm_{2n}(\zeta).$$

Соотвественно получаем

$$\int\limits_{U^n} |D^{m-k} f(z_1, ..., z_n)||D^k g(z_1, ..., z_n)| \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j - 1} dm_2(z_j) \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1} \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-k_j}} |D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n)| dm_{2n}(\zeta) \times$$

$$\times \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|w_j|^2)^{\gamma_j}}{|1-\overline{w}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j+k_j}} |D^m g(w_1, ..., w_n)| dm_{2n}(w) dm_{2n}(z) =$$

$$= \int\limits_{U^n} |D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n)| \prod_{j=1}^{n} (1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \int\limits_{U^n} |D^m g(w_1, ..., w_n)| \prod_{j=1}^{n} (1-|w_j|^2)^{\gamma_j} \times$$

$$\times \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1} dm_2(z_j)}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-k_j} |1-\overline{w}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j+k_j}} dm_{2n}(w) dm_{2n}(\zeta).$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$I := \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1} dm_{2n}(z_1, ..., z_n)}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-k_j} |1-\overline{w}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j+k_j}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{U} \frac{\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1} dm_2(z_j)}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-k_j} |1-\overline{w}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j+k_j}} =$$

В [24] была доказана следующая оценка:

$$\int\limits_{U} \frac{\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1} dm_2(z_j)}{|1-\overline{\zeta}_j z_j|^{\gamma_j+2-k_j} |1-\overline{w}_j z_j|^{\gamma_j+2-m_j+k_j}} \lesssim$$

$$\lesssim \min\left(\frac{\omega_j(1-|\zeta_j|)}{(1-|\zeta_j|)^{\gamma_j-k_j-\alpha_j+1}}; \frac{\omega_j(1-|w_j|)}{(1-|w_j|)^{\gamma_j-k_j-\alpha_j+1}} \right). \tag{2.13}$$

Из неравенства (2.13) следует, что

$$\|D^{m-k} f \cdot D^k g\|_{A_\omega(\alpha,m)} \lesssim \int\limits_{U^n} |D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n)| \prod_{j=1}^{n} (1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j} \int\limits_{U^n} |D^m g(w_1, ..., w_n)| \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n}(1-|w_j|^2)^{\gamma_j}\frac{\omega_j(1-|w_j|)(1-|w_j|)^{\alpha_j-1}}{(1-|w_j|)^{2\gamma_j+2-m_j}}dm_{2n}(w)dm_{2n}(\zeta) \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{U^n}|D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)|\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}}{(1-|\zeta_j|)^{\gamma_j+2-m_j}}\times$$

$$\times \int\limits_{U^n}|D^m g(w_1,...,w_n)|\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|w_j|)(1-|w_j|)^{\alpha_j-1}dm_{2n}(w)dm_{2n}(\zeta) =$$

$$= const\|g\|_{A_\omega(\alpha,m)}\int\limits_{U^n}|D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)|\prod_{j=1}^{n}(1-|\zeta_j|)^{m_j-2}dm_{2n}(\zeta).$$

Отметим, что $m_j \geq \alpha_j+2$ и $\omega_j(1-|\zeta_j|)\geq const(1-|\zeta_j|),\ j=1,...,n,$ поэтому

$$\int\limits_{U^n}|D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)|\prod_{j=1}^{n}(1-|\zeta_j|)^{m_j-2}dm_{2n}(\zeta) \leq$$

$$\leq \int\limits_{U^n}|D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)|\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|\zeta_j|)(1-|\zeta_j|^2)^{\alpha_j-1}dm_{2n}(\zeta).$$

Окончательно получаем, что

$$\|D^{m-k}f\cdot D^k g\|_{A_\omega(\alpha,m)} \lesssim \|g\|_{A_\omega(\alpha,m)}\|f\|_{A_\omega(\alpha,m)}.$$

$\square$

Лемма 2.8. *Пусть* $a=(a_1,...,a_n)\in U^n$, $1\leq p\leq n$

$$e_a(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\overline{a}_j z_j}, z=(z_1,...,z_n)\in U^n$$

и пусть $(k_1,...,k_n)\in K_n$, *положим*

$$e_{a,p}(z)=\prod_{s=1}^{p}\frac{1}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^2}\prod_{s=p+1}^{n}\frac{1}{1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}.$$

Тогда справедливо тождество

$$D^m e_{a,p}(z)=\prod_{s=1}^{p}\frac{1+\overline{a}_{k_s}z_{k_s}^{m_{k_s}}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{m_{k_s}+2}}\prod_{s=p+1}^{n}\frac{1}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{m_{k_s}+1}} \tag{2.14}$$

$z=(z_1,...,z_n)\in U^n$.

Доказательство. Имеем

$$D^m e_{a,p}(z)=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial^{|m|}(z_1^{m_1}...z_n^{m_n}e_{a,p}(z))}{\partial z_1^{m_1}...\partial z_n^{m_n}}\right).$$

Поэтому

$$\Gamma(m+1)D^m e_{a,p}(z)=\prod_{s=1}^{p}\left(\frac{\partial^{m_{k_s}}}{\partial z_{k_s}^{m_{k_s}}}\frac{z_{k_s}^{m_{k_s}}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^2}\right)\prod_{s=p+1}^{n}\left(\frac{\partial^{m_{k_s}}}{\partial z_{k_s}^{m_{k_s}}}\frac{z_{k_s}^{m_{k_s}}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})}\right),$$

$m=(m_1,...,m_n)\in Z_+^n$.

Следовательно,для того, чтобы доказать лемму достаточно вычислить $\frac{\partial^q}{\partial z^q}\frac{z^q}{1-\overline{a}z}$ и $\frac{\partial^q}{\partial z^q}\frac{z^q}{(1-\overline{a}z)^2}$, $a,z\in U, q\in N$.

Учитывая разложение в степенной ряд функции $\frac{z^q}{1-\overline{a}z}$, имеем

$$\frac{\partial^q}{\partial z^q}\frac{z^q}{1-\overline{a}z}=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)...(k+q)\overline{a}^k z^k=q!\frac{1}{(1-\overline{a}z)^{q+1}}.$$

Точно также устанавливается, что

$$\frac{\partial^q}{\partial z^q}\frac{z^q}{(1-\overline{a}z)^2}=\frac{(1+\overline{a}z)q!}{(1-\overline{a}z)^{q+2}},$$

то есть $D^q\frac{1}{(1-\overline{a}z)^2}=\frac{1}{q!}\frac{\partial^q}{\partial z^q}\frac{z^q}{1-\overline{a}z}=\frac{1+\overline{a}z}{(1-\overline{a}z)^{q+2}}, q\in Z_+^n$.

Лемма доказана. □

Лемма 2.9. *Пусть* $\psi\in H(U^n)$, $m=(m_1,...,m_n)\in Z_+^n$. *Тогда*

$$D^{m+1}(D^{-m}\psi(z))=D\psi(z)+m\psi(z), z\in U^n.$$

Доказательство. Учитывая, что $\psi(z)=\sum\limits_{|k|=0}^{+\infty}a_k z^k$, причем ряд абсолютно и равномерно сходится внутри U^n, можно предположить, что

$\psi = \psi_s(z) = z^s = z_1^{s_1}...z_n^{s_n}$, $s = (s_1, ..., s_n) \in Z_+^n$, $z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Теперь учтем, что

$$D^{m+1}(D^{-m}\psi_s)(z) = D^{m+1}\Big(m\int_{Q_n}(1-t)^{m-1}\psi_s(tz)dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{|m+1|}}{\partial z_1^{m_1+1}...z_n^{m_n+1}}\left(z_1^{m_1+1}...z_n^{m_n+1}\Big(m\int_{Q_n}(1-t)^{m-1}\psi_s(tz)dt\Big)\right).$$

Следовательно, можно предпологать, также что $n = 1$, $m \in Z_+$. Фиксируем $z \in U$ и докажем лемму для степенной функции $\psi_s(z) = z^s$, $z \in U, s \in Z_+$.

Итак, пусть $\psi_s(z) = z^s$, тогда

$$D^{-m}\psi_s(z) = m\int_0^1(1-t)^{m-1}\psi_s(tz)dt = mz^s\int_0^1(1-t)^{m-1}t^s dt =$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+m+1)}z^s.$$

Поэтому

$$D^{m+1}(D^{-m}\psi_s)(z) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(s+m+1)}\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}(z^{m+1}z^s) =$$

$$= \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+m+1)}(m+1+s)(m+s)...(s+1)z^s = \frac{\Gamma(s+m+2)}{\Gamma(s+m+1)}z^s =$$

$$= (m+s+1)z^s = D\psi_s(z) + m\psi_s(z), z \in U.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.10. *Пусть $h \in H^\infty(U^n)$, $g \in \Lambda_\omega^\alpha(U^n)$. Предположим, что для произвольной перестановки чисел $(1, ..., n)$, $(k_1, ..., k_n)$ и $1 \le p \le n$, $p \in N$ выполняется оценка*

$$\left|\frac{\partial^p(z_1...z_n h(z_1, ..., z_n))}{\partial z_{k_1}...\partial z_{k_p}}\right| \lesssim \frac{\prod\limits_{j=1}^{p}\omega_{k_j}(1-|z_{k_j}|)}{\prod\limits_{j=1}^{p}(1-|z_{k_j}|)^2\int\limits_{1-|z_{k_j}|}^{1}\frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2}du}, z = (z_1, ...z_n) \in U^n, \tag{2.15}$$

тогда, если $g \in \Lambda^{\alpha}_{\omega}(U^n), m_j = \alpha_j + 1, j = 1, ..., n,$ *то*

$$\left|\frac{\partial^p (z_{k_1}...z_{k_p} h(z_1, ..., z_n))}{\partial z_{k_1}...\partial z_{k_p}} \frac{\partial^{n-p}(z_{k_{p+1}}...z_{k_n} D^m g(z_1, ..., z_n))}{\partial z_{k_{p+1}}...\partial z_{k_n}}\right| \lesssim$$

$$\lesssim \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^2}, z = (z_1, ..., z_n) \in U^n. \tag{2.16}$$

Доказательство. Используя лемму 1.3, имеем

$$g(z_1, ..., z_n) = \int\limits_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^s D^{m+1} g(\zeta) \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1-\overline{\zeta} z)^{s+1-m}} dm_{2n}(\zeta),$$

где $\psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)$ некоторые ограниченные аналитичские функции, $j = 1, ..., n$.

Следовательно,

$$\frac{\partial^{n-p}(z_{k_{p+1}}...z_{k_n} D^m g(z_1, ..., z_n))}{\partial z_{k_{p+1}}...\partial z_{k_n}} =$$

$$= \int\limits_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^s D^{m+1} g(\zeta) \psi(m_j, \gamma_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{\prod\limits_{j=1}^{p} (1-\overline{\zeta_{k_j}} z_{k_j})^{s+1} \prod\limits_{j=p+1}^{n} (1-\overline{\zeta_{k_j}} z_{k_j})^{s+2}} dm_{2n}(\zeta).$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial^{n-p}(z_{k_{p+1}}...z_{k_n} D^m g(z_1, ..., z_n))}{\partial z_{k_{p+1}}...\partial z_{k_n}}\right| \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^{s-2} \omega_{\Pi}(1-|\zeta|)}{\prod\limits_{j=1}^{p} |1-\overline{\zeta_{k_j}} z_{k_j}|^{s+1} \prod\limits_{j=p+1}^{n} |1-\overline{\zeta_{k_j}} z_{k_j}|^{s+2}} dm_{2n}(\zeta),$$

$\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$.

Далее, используя стандартные оценки (см. [24]), получаем

$$\left|\frac{\partial^{n-p}(z_{k_{p+1}}...z_{k_n} D^m g(z_1, ..., z_n))}{\partial z_{k_{p+1}}...\partial z_{k_n}}\right| \lesssim \left(\prod_{j=1}^{p} \int\limits_{1-|z_{k_j}|}^{1} \frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2} du\right) \prod_{j=p+1}^{n} \frac{\omega_{k_j}(1-|z_{k_j}|)}{(1-|z_{k_j}|)^2},$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n, 1 \le p \le n.$

Теперь, учитывая оценку (2.15), окончательно получаем

$$\left|\frac{\partial^p(z_{k_1}...z_{k_p}h(z_1,...,z_n))}{\partial z_{k_1}...\partial z_{k_p}}\frac{\partial^{n-p}(z_{k_{p+1}}...z_{k_n}D^m g(z_1,...,z_n))}{\partial z_{k_{p+1}}...\partial z_{k_n}}\right|\lesssim$$

$$\lesssim\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^2},\, z=(z_1,...,z_n)\in U^n.$$

Лемма доказана. □

Перейдем теперь к доказательству основных результатов параграфа.

Доказательство теоремы 2.3.

Сначала докажем пункт *1*, импликацию **a**. ⇒ **b**.

Предположим, что $m_j\leq\alpha_j,\ \ j=1,...,n$, T_h действует в пространстве $A_\omega(\alpha,m)$. Покажем, что h можно представить в виде $h_1+\overline{h}_2$, где $D^{-m}h_2\in\Lambda_\omega^\alpha$, h_1 - мультипликатор пространства $A_\omega(\alpha,m)$.

Итак, поскольку T_h действует в пространстве $A_\omega(\alpha,m)$, то

$$\|T_h(f)\|_{A_\omega(\alpha,m)}\leq\|T_h\|\|f\|_{A_\omega(\alpha,m)},\quad\forall f\in A_\omega(\alpha,m).$$

Учитывая, что оператор $S_{z_0}(f)=f(z_0),\ z_0\in U^n$ является ограниченным оператором в $A_\omega(\alpha,m)$, легко заметить, что $\Phi(f)=T_h(f)(0)-$ линейный непрерывный функционал на $A_\omega(\alpha,m)$. Следовательно, по лемме 2.2, можно найти такую функцию $g\in H(U^n)$, что $D^{-m}g\in\Lambda_\omega^\alpha$ и

$$T_h(f)(0)=\lim_{\rho\to1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n}f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}dm_n(\zeta)=$$

$$=\lim_{\rho\to1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n}D^m f(\rho\zeta)\overline{D^{-m}g(\rho\zeta)}dm_n(\zeta).$$

Не ограничивая общности можно предположить, что $f\in A_\omega(\alpha,m)\cap C_A(U^n)$.

Заметим, что

$$T_h(f)(0)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{f(\zeta)h(\zeta)d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{n}\zeta_j}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n}f(\zeta)h(\zeta)dm_n(\zeta).$$

Положим $f(\zeta_1,...,\zeta_n)=\zeta_1^{s_1}...\zeta_n^{s_n}, \zeta_j\in U,\ s=(s_1,...,s_n)\in Z_+^n, j=1,...,n$. Тогда, с учетом леммы 2.2 и полученного равенства, имеем

$$\int\limits_{T^n}\zeta^s\overline{g(\zeta)}dm_n(\zeta)=\int\limits_{T^n}\zeta^s h(\zeta)dm_n(\zeta). \tag{2.17}$$

Следовательно, $h(\zeta_1,...,\zeta_n)-\overline{g(\zeta_1,...,\zeta_n)}\in H^1(U^n),\quad \zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n)\in U^n$, т.е. $h(\zeta)=h_1(\zeta)+\overline{g(\zeta)}$, где $h_1\in H^1(U^n),\quad D^{-m}g\in\Lambda_\omega^\alpha$. Напомним, что $H^1(U^n)-$ пространство Харди в U^n (см. [11]). При этом, учитывая равенство (2.17), легко заметить, что

$$\int\limits_{T^n}\overline{\zeta}^s g(\zeta)dm_n(\zeta)=\int\limits_{T^n}\overline{\zeta}^s h(\zeta)dm_n(\zeta), s=(s_1,...,s_n)\in Z_+^n.$$

Поэтому положим $h_2(\zeta):=g(\zeta)$ почти всюду на T^n, тогда получим $D^{-m}h_2\in\Lambda_\omega^\alpha$.

Теперь, если докажем, что оператор $T_{\overline{h}_2}$ является ограниченным оператором в пространстве $A_\omega(\alpha,m)$, то, учитывая равенство

$$T_h(f)(z_1,...,z_n)=h_1(z_1,...,z_n)f(z_1,...,z_n)+$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)}d\zeta_1...d\zeta_n}{\prod\limits_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)}, \forall z=(z_1,...,z_n)\in U^n,$$

тем самым докажем, что h_1 является мультипликатором пространства $A_\omega(\alpha,m)$.

Итак, согласно лемме 1.3, имеем

$$f(z_1,...,z_n)=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^n\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{\gamma_j}\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{\zeta}_jz_j)^{\gamma_j+2-m_j}}D^mf(\zeta_1,...,\zeta_n)dm_{2n}(\zeta).$$

Ясно, что при достаточно больших $\gamma_j, j=1,...,n$ рассматриваемый интеграл абсолютно сходится. Поэтому

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z_1,...,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)}}{\prod\limits_{j=1}^n(\zeta_j-z_j)}\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^n\frac{(1-|t_j|^2)^{\gamma_j}\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)}{(1-\overline{t}_j\zeta_j)^{\gamma_j+2-m_j}}\times$$

$$\times D^m f(t_1,...,t_n) dm_{2n}(t) d\zeta_1 ... d\zeta_n = \int\limits_{U^n} \left[\prod_{j=1}^{n} (1-|t_j|^2)^{\gamma_j} D^m f(t_1,...,t_n) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j} z_j)\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)}}{(1-\overline{t}_j\zeta_j)^{\gamma_j+2-m_j}(\zeta_j - z_j)} d\zeta_1...d\zeta_n \right] dm_{2n}(t).$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$I := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\psi(m_j,\gamma_j,\overline{t_j}\zeta_j)\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)}}{(1-\overline{t}_j\zeta_j)^{\gamma_j+2-m_j}(\zeta_j - z_j)} d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$= \overline{\frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\psi(m_j,\gamma_j,t_j\overline{\zeta_j}) h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)}{(1-t_j\overline{\zeta}_j)^{\gamma_j+2-m_j}(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)} d\overline{\zeta}_1...d\overline{\zeta}_n} =$$

$$= \overline{\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\psi(m_j,\gamma_j,t_j\overline{\zeta_j}) h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)}{(1-t_j\overline{\zeta}_j)^{\gamma_j+2-m_j}\zeta_j^2(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)} d\zeta_1...d\zeta_n} =$$

$$= \overline{\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\zeta_j^{\gamma_j+1-m_j}\psi(m_j,\gamma_j,t_j\overline{\zeta_j}) h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)}{(\zeta_j - t_j)^{\gamma_j+2-m_j}(1-\overline{z}_j\zeta_j)} d\zeta_1...d\zeta_n}.$$

Ввиду того, что $\psi(m_j,\gamma_j,\overline{\zeta_j}z_j)$ - ограниченная аналитическая функция, поэтому функция $\zeta_j^{\gamma_j+1-m_j}\psi(m_j,\gamma_j,\zeta_j\overline{z}_j)$ тоже является аналитической по $\zeta_j, j=1,...,n$, поэтому

$$I = \frac{\partial^{|\gamma+1-m|}}{\partial t_1^{\gamma_1+1-m_1}...\partial t_n^{\gamma_n+1-m_n}} \overline{\left(\frac{t_j^{\gamma_j+1-m_j}\psi(m_j,\gamma_j,|t_j|^2) h_2(t_1,...,t_n)}{1-\overline{z}_j t_j} \right)}.$$

Применяя формулу Лейбница, получим

$$I = \sum_{k_1=0}^{\gamma_1+1-m_1} ... \sum_{k_n=0}^{\gamma_n+1-m_n} C^{k_1}_{\gamma_1+1-m_1} ... C^{k_n}_{\gamma_n+1-m_n} \frac{\overline{\partial^{|k|}\widetilde{h}_2(t_1,...,t_n)}}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{\overline{z}_j^{\gamma_j+1-m_j-k_j}}{(1-z_j\overline{t}_j)^{\gamma_j+2-m_j-k_j}},$$

$\widetilde{h}_2(t_1,...,t_n) = h_2(t_1,...,t_n)\prod\limits_{j=1}^{n} t_j^{\gamma_j+1-m_j}\psi(m_j,\gamma_j,|t_j|^2)$. Тогда окончательно получаем

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z_1,...,z_n)=const\sum_{k_1=0}^{\gamma_1+1-m_1}...\sum_{k_n=0}^{\gamma_n+1-m_n}C^{k_1}_{\gamma_1+1-m_1}...C^{k_n}_{\gamma_n+1-m_n}\overline{z}_1^{\gamma_1+1-m_1-k_1}...\times$$

$$\times\overline{z}_n^{\gamma_n+1-m_n-k_n}\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|t_j|^2)^{\gamma_j}D^m f(t_1,...,t_n)}{(1-z_j\bar{t}_j)^{\gamma_j+2-m_j-k_j}}\overline{\frac{\partial^{|k|}\widetilde{h}_2(t_1,...,t_n)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}}}dm_{2n}(t).$$

Ясно, что

$$|D^m T_{\overline{h}_2}(f)(z)|\lesssim\max_{0\le k_j\le\gamma_j+1-m_j}\left\{\int\limits_{U^n}\left|\frac{\partial^{|k|}h_2(t)}{\partial t}|D^m f(t)|\frac{(1-|t|)^{\gamma}dm_{2n}(t)}{|1-z\bar{t}|^{\gamma+2-k}}\right|\right\},$$

$z=(z_1,...,z_n)\in U^n, k=(k_1,...,k_n)\in Z_+^n$.

Таким образом, для доказательства ограниченности оператора $T_{\overline{h}_2}$ в $A_\omega(\alpha,m)$ достаточно установить ограниченность оператора

$$B_{h_2}\psi(z_1,...,z_n)=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|t_j|^2)^{\gamma_j}|\psi(t_1,...,t_n)|}{|1-z_j\bar{t}_j|^{\gamma_j+2-k_j}}\overline{\left|\frac{\partial^{|k|}h_2(t_1,...,t_n)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}}\right|}dm_{2n}(t),$$

$z=(z_1,...,z_n)\in U^n$ в пространстве $A_\omega(\alpha,0)$, где h_2 такая, что $D^{-m}h_2\in\Lambda_\omega^\alpha$.

Пусть теперь $k=(k_1,...,k_n)\in Z_+^n$ фиксировано, при этом $0\le k_j\le\gamma_j+1-m_j, j=1,...,n$, тогда очевидно, что

$$\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}\Big|B_{h_2}\psi(z_1,...,z_n)\Big|dm_{2n}(z)=$$

$$=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1}\times$$

$$\times\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|t_j|^2)^{\gamma_j}|\psi(t_1,...,t_n)|}{|1-z_j\bar{t}_j|^{\gamma_j+2-k_j}}\left|\frac{\partial^{|k|}h_2(t_1,...,t_n)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}}\right|dm_{2n}(t)dm_{2n}(z)=$$

$$=\int\limits_{U^n}\prod_{j=1}^{n}(1-|t_j|^2)^{\gamma_j}|\psi(t_1,...,t_n)|\left|\frac{\partial^{|k|}h_2(t_1,...,t_n)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}}\right|\times$$

$$\times \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1} dm_2(z_j)}{|1-z_j\bar{t}_j|^{\gamma_j+2-k_j}} dm_{2n}(t).$$

Перейдем к оценке последнего интеграла, имеем

$$\widetilde{I} := \int\limits_{U^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha_j-1} dm_2(z_j)}{|1-z_j\bar{t}_j|^{\gamma_j+2-k_j}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega_j(1-r_j)(1-r_j)^{\alpha_j-1} d\varphi_j r_j dr_j}{|1-r_j e^{i\varphi_j}\bar{t}_j|^{\gamma_j+2-k_j}}.$$

Учитывая хорошо известные оценки (см. [24], [50]), получим

$$\widetilde{I} \lesssim \prod_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1-r_j)(1-r_j)^{\alpha_j-1} dr_j}{(1-r_j|t_j|)^{\gamma_j+1-k_j}}.$$

В виду того, что $\frac{\omega_j(1-r_j)}{(1-r_j)}$ неубывающая функция $\forall j = 1, ..., n$, получаем

$$\widetilde{I} \lesssim \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)} \int\limits_0^1 \frac{(1-r_j)^{\alpha_j} dr_j}{(1-r_j|t_j|)^{\gamma_j+1-k_j}}, \rho_j = |t_j|, j = 1, ..., n.$$

1)если $\gamma_j - k_j - \alpha_j > 0$, тогда

$$\widetilde{I} \lesssim \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)} \frac{(1-\rho_j)^{\alpha_j}}{(1-\rho_j)^{\gamma_j-k_j}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{\gamma_j-k_j-\alpha_j+1}}, \rho_j = |t_j|, \forall j = 1, ..., n;$$

2)если $\gamma_j - k_j - \alpha_j \leq 0$, тогда

$$\widetilde{I} \lesssim \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{\gamma_j-k_j-\alpha_j+1}} + \int\limits_{1-\rho_j}^1 \frac{\omega_j(u) du}{u^{\gamma_j+2-k_j-\alpha_j}} \right), \rho_j = |t_j|, \forall j = 1, ..., n.$$

Отметим, что так как ω_j- функция типа модуля непрерывности, то

$$\int\limits_{1-\rho_j}^1 \frac{\omega_j(u) du}{u^{\gamma_j+2-k_j-\alpha_j}} \geq \frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{\gamma_j+1-k_j-\alpha_j}} \tag{2.18}$$

Разобъем множество чисел $\{\gamma_s - k_s - \alpha_s\}_{s=1}^n$ на две части. Предположим, что $\gamma_{s_j} - k_{s_j} - \alpha_{s_j} > 0$, $j = 1, ..., p$ и $\gamma_{s_j} - k_{s_j} - \alpha_{s_j} \le 0$, $j = p+1, ..., n$. Неограничивая общности, будем предпологать, что $s_j = j$, то есть $\gamma_j - k_j - \alpha_j > 0$, $1 \le j \le p$ и $\gamma_j - k_j - \alpha_j \le 0$, $p + 1 \le j \le n$. Тогда

$$\widetilde{I} \lesssim \prod_{j=1}^{p} \frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{\gamma_j - k_j - \alpha_j + 1}} \int\limits_{Q_{n-p}} \prod_{j=p+1}^{n} \frac{\omega_j(1-r_j)(1-r_j)^{\alpha_j - 1}}{(1-\rho_j r_j)^{\gamma_j - k_j + 1}} dr_j.$$

Теперь, учитывая оценку (2.18), получим

$$\widetilde{I} \lesssim \prod_{j=1}^{p} \frac{\omega_j(1-\rho_j)}{(1-\rho_j)^{\gamma_j - k_j - \alpha_j + 1}} \prod_{j=p+1}^{n} \int\limits_{1-\rho_j}^{1} \frac{\omega_j(u)}{u^{\gamma_j - k_j - \alpha_j + 2}} du.$$

Соотвественно

$$\|B_{h_2}\psi\|_{A_\omega(\alpha,0)} \lesssim \int\limits_{U^n} \left| \frac{\partial^{|k|} h_2(t_1, ..., t_n)}{\partial t_1^{k_1} ... \partial t_n^{k_n}} \right| |\psi(t_1, ..., t_n)| \prod_{j=1}^{p} (1 - |t_j|^2)^{\alpha_j + k_j - 1} \omega_j(1 - |t_j|) \times$$

$$\times \prod_{j=p+1}^{n} (1 - |t_j|^2)^{\gamma_j} \int\limits_{1-\rho_j}^{1} \frac{\omega_j(u) du}{u^{\gamma_j + 2 - k_j - \alpha_j}} dm_{2n}(t), \tag{2.19}$$

$\gamma_j - k_j - \alpha_j > 0$, $1 \le j \le p$ и $\gamma_j - k_j - \alpha_j \le 0$, $p + 1 \le j \le n$.

Сначала заметим, что если по лемме 2.6 $D^{-m}h \in \Lambda_\omega^\alpha$, то

$$|D^s h(u)| \lesssim \frac{\omega_\Pi(1 - |u|)}{(1 - |u|)^{m+s-\alpha}}, u = (u_1, ..., u_n) \in U^n, \tag{2.20}$$

$s = (s_1, ..., s_n), s_j > m_j + \alpha_j + 2, j = 1, ..., n.$

Поэтому, используя формулу (2.12), получаем

$$h(t) = \gamma \int\limits_{Q_n} (1-u)^{\gamma - 1} D^\gamma h(tu) du, \ t \in U^n \tag{2.21}$$

при $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n), \gamma_j > m_j + \alpha_j + 2, j = 1, ..., n.$

Из формулы (2.21) выводим

$$\frac{\partial^k h(t)}{\partial t^k} = \gamma \int\limits_{Q_n} (1-u)^{\gamma-1} \frac{\partial^k D^\gamma h(tu)}{\partial t^k} du,$$

Теперь, учитывая оценку (2.19), приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^k h(t)}{\partial t^k}\right| \lesssim \gamma \int\limits_{Q_n} (1-u)^{\gamma-1} \frac{\omega_\Pi(1-|t|u)}{(1-|t|u)^{\gamma+m-\alpha+k}} du, t \in U^n. \tag{2.22}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались оценкой

$$\left|\frac{\partial^k h(z)}{\partial z^k}\right| \lesssim \frac{\omega_\Pi(1-|z|)}{(1-|z|)^{\gamma+m-\alpha+k}}, z \in U^n, k \geq 0. \tag{2.23}$$

Указанная оценка легко выводится из оценки (2.20) стандартным образом.

Таким образом, имеем

$$\left|\frac{\partial^k h(t)}{\partial t^k}\right| \lesssim \int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{p} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} \prod_{j=p+1}^{n} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du \tag{2.24}$$

Напомним, что $u = (u_1, ..., u_n), t = (t_1, ..., t_n) \in U^n$.

Перейдем к оценке интегралов.

$$I_j = \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j, 1 \leq j \leq p.$$

$$I_j = \int\limits_0^{|t_j|} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j + \int\limits_{|t_j|}^1 \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j =$$

$$= I_j^1 + I_j^2.$$

Сначала оценим I_j^2. Ясно, что

$$I_j^2 = \int\limits_{|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j \lesssim \frac{\omega_j(1-|t_j|^2)}{(1-|t_j|)^{m_j-\alpha_j+k_j}} =$$

$$= \frac{\omega_j(1-|t_j|^2)(1-|t_j|)^{\alpha_j-m_j}}{(1-|t_j|)^{m_j-\alpha_j+k_j}} \lesssim \frac{1}{(1-|t_j|)^{k_j}}. \tag{2.25}$$

В последней оценке мы воспользовались условием $m_{\leq}\alpha_j$, то есть $\alpha_j - m_j \geq 0$.

Теперь перейдем к оценке интеграла I_j^1.

$$I_j^1 = \int\limits_0^{|t_j|} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j \lesssim \int\limits_0^{|t_j|} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)}{(1-|t_j|u_j)^{m_j-\alpha_j+k_j+1}} du_j \leq$$

$$\leq \int\limits_{1-|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(1-|t_j|(1-\tau))}{\tau^{m_j-\alpha_j+k_j+1}} d\tau \leq \frac{1}{(1-|t_j|)^{k_j}} \int\limits_{1-|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(1-|t_j|(1-\tau))}{\tau^{m_j-\alpha_j+1}} d\tau.$$

Но по условию теоремы $m_j - \alpha_j \leq 0, j = 1, ..., n$, поэтому

$$\int\limits_{1-|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(1-|t_j|(1-\tau))}{\tau^{m_j-\alpha_j+1}} d\tau \leq \int\limits_{1-|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(\tau)}{\tau^{m_j-\alpha_j+1}} d\tau < +\infty.$$

Следовательно, из (2.24) получим

$$\left|\frac{\partial^k h(t)}{\partial t^k}\right| \lesssim \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1-|t_j|)^{k_j}} \prod_{j=p+1}^{n} \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du, t \in U^n. \tag{2.26}$$

Снова положим

$$\widetilde{I}_j = \int\limits_0^1 \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j, p+1 \leq j \leq n.$$

$$\widetilde{I}_j = \int\limits_0^{|t_j|} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j + \int\limits_{|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}} du_j =$$

$$=\widetilde{I}_j^1+\widetilde{I}_j^2, p+1\le j\le n.$$

Итак,

$$\widetilde{I}_j^2=\int\limits_{|t_j|}^{1}\frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}}du_j\lesssim\frac{\omega_j(1-|t_j|)(1-|t_j|)^{\gamma_j}}{(1-|t_j|)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}}=$$

$$=\frac{\omega_j(1-|t_j|)}{(1-|t_j|)^{m_j-\alpha_j+k_j}}, p+1\le j\le n. \tag{2.27}$$

Оценим $\widetilde{I}_j^1$. Для этого проведем рассуждения аналогичные рассуждениям при оценке интеграла $I_j^1, 1\le j\le p$.

$$\widetilde{I}_j^1=\int\limits_0^{|t_j|}\frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)(1-u_j)^{\gamma_j-1}}{(1-|t_j|u_j)^{\gamma_j+m_j-\alpha_j+k_j}}du_j\lesssim\int\limits_0^{|t_j|}\frac{\omega_j(1-|t_j|u_j)}{(1-|t_j|u_j)^{m_j-\alpha_j+k_j+1}}du_j\le$$

$$\le\int\limits_{1-|t_j|}^{1}\frac{\omega_j(1-|t_j|(1-\tau))}{\tau^{m_j-\alpha_j+k_j+1}}d\tau\le\int\limits_{1-|t_j|}^{1}\frac{\omega_j(\tau)}{\tau^{m_j-\alpha_j+k_j+1}}d\tau\lesssim\frac{\omega_j(1-|t_j|)}{(1-|t_j|)^{m_j-\alpha_j+k_j}}. \tag{2.28}$$

Объединяя оценки (2.27) и (2.28), используем их в (2.24) и окончательно получаем

$$\left|\frac{\partial^k h(t)}{\partial t^k}\right|\lesssim\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{(1-|t_j|)^{k_j}}\prod_{j=p+1}^{n}\frac{\omega_j(1-|t_j|)}{(1-|t_j|)^{m_j-\alpha_j+k_j}}. \tag{2.29}$$

Подставляя (2.29) в оценку (2.19), получим

$$\|B_{h_2}\psi\|_{A_\omega(\alpha,0)}\lesssim\int\limits_{U^n}|\psi(t_1,...,t_n)|\prod_{j=1}^{p}\frac{(1-|t_j|^2)^{\alpha_j+k_j-1}\omega_j(1-|t_j|)}{(1-|t_j|)^{k_j}}\times$$

$$\times\prod_{j=p+1}^{n}\frac{(1-|t_j|^2)^{\gamma_j}\omega_j(1-|t_j|)}{(1-|t_j|)^{m_j-\alpha_j+k_j}}\int\limits_{1-|t_j|}^{1}\frac{\omega_j(u)du}{u^{\gamma_j+2-k_j-\alpha_j}}dm_{2n}(t)=$$

$$=\int\limits_{U^n}|\psi(t_1,...,t_n)|\prod_{j=1}^{n}(1-|t_j|^2)^{\alpha_j-1}\omega_j(1-|t_j|)\times$$

$$\times \prod_{j=p+1}^{n} (1-|t_j|^2)^{\gamma_j-m_j-k_j+1} \int\limits_{1-|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(u)du}{u^{\gamma_j+2-k_j-\alpha_j}} dm_{2n}(t) \tag{2.30}$$

Но по условию $\gamma_j - m_j - k_j + 1 \geq 0$, при $p+1 \leq j \leq n$. Поэтому

$$(1-|t_j|^2)^{\gamma_j-m_j-k_j+1} \int\limits_{1-|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(u)du}{u^{\gamma_j+2-k_j-\alpha_j}} dm_{2n}(t) \leq \int\limits_{1-|t_j|}^{1} \frac{\omega_j(u)du}{u^{1+m_j-\alpha_j}} dm_{2n}(t) < +\infty,$$

поскольку $m_j - \alpha_j \leq 0$ и $\int\limits_0^1 \frac{\omega_j(u)du}{u} < +\infty$.

Окончательно получаем, что

$$\|B_{h_2}\psi\|_{A_\omega(\alpha,0)} \lesssim \int\limits_{U^n} |\psi(t_1, ..., t_n)| \prod_{j=1}^{n} (1-|t_j|^2)^{\alpha_j-1} \omega_j(1-|t_j|) dm_{2n}(t) < +\infty.$$

Итак, если T_h является ограниченным оператором в $A_\omega(\alpha, m)$, то $h = h_1 + \overline{h}_2$, где $h_1 \in RP(U^n), D^{-m}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$, причем, если $D^{-m}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$, то оператор $T_{\overline{h}_2}$ является ограничен в $A_\omega(\alpha, m)$ Следовательно, если условие **a.** выполняется, то оператор $M_{h_1}f = f \cdot h_1 = (T_h - T_{h_2})(f)$ умножения на h_1 является ограниченным оператором в $A_\omega(\alpha, m)$, то есть h_1 является мультипликатором этого пространства. Отсюда следует импликация **a**. $\Rightarrow$ **b**. Импликация **b**. $\Rightarrow$ **a**. немедленно вытекает из доказательства последней части импликации **a**. $\Rightarrow$ **b**.

Итак, пункт *1*. теоремы 2.3 доказан.

Теперь перейдем к доказательству пункта *2*, импликация **a**. $\Rightarrow$ **b**.

Пусть теперь $m_j \geq \alpha_j + 2,\ j = 1, ..., n$.

Как и при доказательстве предыдущего пункта нетрудно установить, что при ограниченности оператора T_h в $A_\omega(\alpha, m)$ функция h должна быть представима в виде $h = h_1 + \overline{h}_2,\ \ h_2 \in H^1(U^n), h_1 \in A_\omega(\alpha, m)$.

Согласно лемме 2.7 $A_\omega(\alpha, m)$ при $m_j \geq \alpha_j + 2,\ j = 1, ..., n$ является кольцом, поэтому оператор $M_{h_1}f = f \cdot h_1$ – является ограниченным оператором в $A_\omega(\alpha, m)$ и, следовательно, T_{h_2} является ограниченным оператором в $A_\omega(\alpha, m)$. Тогда импликация **a**. $\Rightarrow$ **b**. следует из леммы 2.6.

Перейдем к доказательству импликации **b**. $\Rightarrow$ **a**.

Докажем ограниченность $T_{\overline{h}_2}$. Для этого зафиксируем функцию $f \in C_A(U^n)$ и используем двойственность пространств $A_\omega(\alpha, 0)$ и Λ_ω^α (см [50],

[23]). По теореме Хана-Банаха существует $g \in \Lambda_\omega^\alpha$ такая, что $\|g\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \lesssim 1$ и

$$I := \|D^m T_{\overline{h}_2}(f)\|_{A_\omega(\alpha,m)} =$$

$$= \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q_{n,\pi}} D^m T_{\overline{h}_2}(f_r)(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})\overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n =$$

$$= \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q_{n,\pi}} D^m T_{\overline{h}_2}(f)(re^{i\theta_1},...,re^{i\theta_n})\overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n.$$

В этом равенстве мы воспользовались тем, что $\Lambda_\omega^\alpha \subset H^\infty(U^n)$ (см. представление (2.12)) при этом $A_\omega(\alpha,m) \subset H^1(U^n)$

$$I = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q_{n,\pi}} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}}{\prod\limits_{j=1}^n (\zeta_j - re^{i\theta_j})^{m_j+1}} d\zeta_1...d\zeta_n \overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{Q_{n,\pi}} \frac{\overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n}{\prod\limits_{j=1}^n (\zeta_j - re^{i\theta_j})^{m_j+1}} d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)} \overline{\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})de^{i\theta_1}...de^{i\theta_n}}{i^n \prod\limits_{j=1}^n e^{i\theta_j}(\overline{\zeta}_j - re^{-i\theta_j})^{m_j+1}}} d\zeta_1...d\zeta_n.$$

Теперь воспользуемся формулой Коши:

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)} \times$$

$$\times \overline{\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n}) \prod\limits_{j=1}^n e^{i\theta_j m_j}\zeta_j^{m_j} de^{i\theta_1}...de^{i\theta_n}}{\prod\limits_{j=1}^n (e^{i\theta_j} - r\zeta_j)^{m_j+1}}} d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}\overline{\zeta}_1^{m_1}...\overline{\zeta}_n^{m_n} \times$$

$$\times \overline{\frac{\partial^{|m|}(g(r\zeta_1,...,r\zeta_n)\zeta_1^{m_1}...\zeta_n^{m_n})}{\partial\zeta_1^{m_1}...\partial\zeta_n^{m_1}}} d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1, ..., \zeta_n) \overline{h(\zeta_1, ..., \zeta_n)} \overline{\zeta}_1^{m_1} ... \overline{\zeta}_n^{m_n} \overline{D^m g(r\zeta_1, ..., r\zeta_n)} d\zeta_1 ... d\zeta_n.$$

Учитывая хорошо известные соотношения, получаем

$$D^\beta f(z_1, ..., z_n) = \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z_1^{\beta_1} ... \partial z_n^{\beta_n}} (z_1^{\beta_1} ... z_n^{\beta_n} f(z_1, ..., z_n)), \quad \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in Z_+^n. \tag{2.31}$$

Итак,

$$\|D^m T_{\overline{h}_2}(f)\|_{A_\omega(\alpha,m)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1, ..., \zeta_n) \overline{h_2(\zeta_1, ..., \zeta_n) \zeta_1^{m_1} ... \zeta_n^{m_n} D^m g(r\zeta_1, ..., r\zeta_n)} d\zeta_1 ... d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1, ..., \zeta_n) \overline{h_2(\zeta_1, ..., \zeta_n) \zeta_1^{m_1} ... \zeta_n^{m_n} D^m g(r\zeta_1, ..., r\zeta_n)} \zeta_1 ... \zeta_n |d\zeta_1| ... |d\zeta_n| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\zeta_1, ..., \zeta_n) \overline{h_2(\zeta_1, ..., \zeta_n) \zeta_1^{m_1-1} ... \zeta_n^{m_n-1} D^m g(r\zeta_1, ..., r\zeta_n)} |d\zeta_1| ... |d\zeta_n| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n) \times$$

$$\times \overline{D^{-m}[h_2(\zeta_1, ..., \zeta_n) \zeta_1^{m_1-1} ... \zeta_n^{m_n-1} D^m g(r\zeta_1, ..., r\zeta_n)]} |d\zeta_1| ... |d\zeta_n|.$$

Заметим, что

$$D^{-m}[h_2(\zeta_1, ..., \zeta_n) \zeta_1^{m_1-1} ... \zeta_n^{m_n-1} D^m g(r\zeta_1, ..., r\zeta_n)] = const \prod_{j=1}^n m_j \times$$

$$\times \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \prod_{j=1}^n (1-t_j)^{m_j-1} h_2(t_1\zeta_1, ..., t_n\zeta_n)(t_1\zeta_1)^{m_1-1} ... (t_n\zeta_n)^{m_n-1} \times$$

$$\times D^m g(rt_1\zeta_1, ..., rt_n\zeta_n) dt_1 ... dt_n.$$

Теперь применим теорему о двойственности пространств $A_\omega(\alpha, 0)$ и Λ_ω^α (см. [50], [23]), согласно которой

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} D^m f(\zeta_1, ..., \zeta_n) \times$$

$$\times \overline{D^{-m}[h_2(\zeta_1, ..., \zeta_n) \zeta_1^{m_1-1} ... \zeta_n^{m_n-1} D^m g(r\zeta_1, ..., r\zeta_n)]} |d\zeta_1| ... |d\zeta_n| \lesssim$$

$$\lesssim \|D^m f\|_{A_\omega(\alpha,0)} \|G_m\|_{\Lambda^\alpha_\omega},$$

где $G_m(z) = D^{-m}[\widetilde{h}_2 D^m g](z)$, $\widetilde{h}_2(z) = h(z) z^{m-1}, z \in U^n$. Но, поскольку $m \geq \alpha + 2$, то по лемме 2.3

$$\|G_m\|_{\Lambda^\alpha_\omega} \approx \sup_{z\in U^n} \left\{ \frac{(1-|z|)^{m-\alpha}}{\omega(1-|z|)} |D^m G_m(z)| \right\} \approx$$

$$\approx \sup_{z\in U^n} \left\{ \frac{(1-|z|)^{m-\alpha}}{\omega(1-|z|)} |h_2(z) z^{m-1} D^m g(z)| \right\} \lesssim$$

$$\lesssim \sup_{z\in U^n} \left\{ \frac{(1-|z|)^{m-\alpha}}{\omega(1-|z|)} |D^m g(z)| \right\} \|h_2\|_\infty \approx \|g\|_{\Lambda^\alpha_\omega} \|h_2\|_\infty.$$

Таким образом импликация **b**. $\Rightarrow$ **a**. пункта *2* доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.4.

Докажем сначала импликацию 1. $\Rightarrow$ 2.

Пусть $T_{\overline{h}}$ ограничен в пространстве $A_\omega(\alpha, m)$ и $h \in H^1(U^n)$. Зафиксируем натуральное число $p : 1 \leq p \leq n$ и картеж $(k_1, k_2, ..., k_p) \in K_p$ и точку $a = (a_1, ..., a_n) \in U^n$, докажем, что

$$\left| \frac{\partial^p (z_{k_1} ... z_{k_p} h(z_1, ..., z_n))}{\partial z_{k_1} ... \partial z_{k_p}} \right| \lesssim \prod_{j=1}^{p} \frac{\omega_{k_j}(1-|z_{k_j}|)}{(1-|z_{k_j}|)^2 \int\limits_{1-|z_{k_j}|}^{1} \frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2} du}$$

Положим

$$e_{a,p}(z) = \prod_{s=1}^{p} \frac{1}{(1-\overline{a}_{k_s} z_{k_s})^2} \prod_{s=p+1}^{n} \frac{1}{1-\overline{a}_{k_s} z_{k_s}}, z = (z_1, ..., z_n) \in U^n.$$

Заметим, что согласно лемме 2.8 и условиям $m_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, ..., n$ мы имеем

$$\|e_{a,p}\|_{A_\omega(\alpha,m)} \lesssim \prod_{s=1}^{p} \frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2} \prod_{s=p+1}^{n} \int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1} \frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2} du. \tag{2.32}$$

Найдем явный вид функции

$$T_{\overline{h}}(e_{a,p})(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{e_{a,p}(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta.$$

Выполняя необходимые преобразования нетрудно заметить, что

$$T_{\overline{h}}(e_{a,p})(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\overline{\frac{h(\zeta)\prod\limits_{s=1}^{p}\zeta_{k_s}^2\prod\limits_{s=p+1}^{n}\zeta_{k_s}|d\zeta|}{\prod\limits_{s=1}^{p}(\zeta_{k_s}-a_{k_s})^2\prod\limits_{s=p+1}^{n}(\zeta_{k_s}-a_{k_s})\prod\limits_{s=1}^{n}(1-\zeta_s\overline{z}_s)}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\overline{\frac{h(\zeta)\prod\limits_{s=1}^{p}\zeta_{k_s}}{\prod\limits_{s=1}^{p}(\zeta_{k_s}-a_{k_s})^2\prod\limits_{s=p+1}^{n}(\zeta_{k_s}-a_{k_s})\prod\limits_{s=1}^{n}(1-\zeta_s\overline{z}_s)}}d\zeta,$$

$\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n), z=(z_1,...,z_n)\in U^n$.

Тогда, применяя формулу Лейбница, данное равенство можно переписать в виде

$$T_{\overline{h}}(e_{a,p})(z)=\left[\sum_{j_1,...,j_p=0}^{1}\frac{\partial^{p-|j|}h_p(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_p}}\prod_{s=1}^{p}\frac{z_{k_s}^{j_s}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{j_s+1}}\right]\frac{1}{\prod\limits_{s=p+1}^{n}(1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s})}=$$

$$=\frac{\partial^p h_p(a)}{\partial\zeta_1...\partial\zeta_p}\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{(1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s})}+$$

$$+\left[\sum_{\substack{j_1,...,j_p=0,\\ |j|\neq 0}}^{1}\frac{\partial^{p-|j|}h_p(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_p}}\prod_{s=1}^{p}\frac{z_{k_s}^{j_s}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{j_s+1}}\right]\frac{1}{\prod\limits_{s=p+1}^{n}(1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s})}.$$

Следовательно, учитывая лемму 2.8, получаем

$$D^m(T_{\overline{h}}(e_{a,p})(z))=\prod_{s=p+1}^{n}\frac{1}{(1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+1}}\left[\frac{\partial^p h_p(a)}{\partial\zeta_1...\partial\zeta_p}\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{(1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s})}+\right.$$

$$+\sum_{\substack{j_1,...,j_p=0,\\ |j|\neq 0}}^{1} \frac{\partial^{p-|j|}h_p(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_p}}\prod_{s=1}^{p} D^{m_{k_s}}\Big(\frac{z_{k_s}^{j_s}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{j_s+1}}\Big)\Bigg], \tag{2.33}$$

где $D^{m_{k_s}}\psi = \frac{1}{m_{k_s}!}\frac{\partial^{m_{k_s}} z_{k_s}^{m_{k_s}}\psi(z)}{\partial z_{k_s}}$, $z=(z_1,...,z_n)\in U^n$, $1\le k_s\le n$, $\psi\in H(U^n)$. Снова учитывая лемму 2.8, приходим к равенству

$$D^{m_{k_s}}\frac{z_{k_s}^{j_s}}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{j_s+1}} = \begin{cases} \frac{1}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+1}}, \text{ если } j_s=0,\\ \frac{1}{\overline{a}_{k_s}}\frac{1}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+1}}+\frac{1}{\overline{a}_{k_s}}\frac{1+\overline{a}_{k_s}z_{k_s}^{m_{k_s}}}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+2}}, \text{ если} j_s=1,\end{cases}$$

$z_{k_s}, a_{k_s}\in U$. Последнее равенство получается из (2.33) и из леммы 2.8, если учесть следующее элементарное тождество

$$\frac{z}{(1-\overline{a}z)^2} = -\frac{1}{\overline{a}}\frac{1-\overline{a}z}{(1-\overline{a}z)^2}+\frac{1}{\overline{a}}\frac{1}{(1-\overline{a}z)^2} = -\frac{1}{\overline{a}}\frac{1}{(1-\overline{a}z)}+\frac{1}{\overline{a}}\frac{1}{(1-\overline{a}z)^2},$$

$a,z\in U$. Поэтому можно преобразовать последнее тождество в

$$\frac{1}{\overline{a}_{k_s}(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{m_{k_s}+1}}\Big(-1+\frac{1+\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}{1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}\Big)= \frac{1}{\overline{a}_{k_s}(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{m_{k_s}+1}}\times$$

$$\times\Big(\frac{-1+\overline{a}_{k_s}z_{k_s}+1+\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}{1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}\Big)= \frac{2z_{k_s}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{m_{k_s}+2}}.$$

Таким образом (2.33) можно представить в виде:

$$D^{m_{k_s}}\frac{z_{k_s}^{j_s}}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{j_s+1}} = \begin{cases} \frac{1}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+1}}, \text{ если } j_s=0,\\ \frac{1+\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+2}}, \text{ если} j_s=1\end{cases}.$$

Или

$$D^{m_{k_s}}\frac{z_{k_s}^{j_s}}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{j_s+1}} = \frac{1+j_s\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}{(1-z_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+1+j_s}}.$$

Следовательно,

$$D^m(T_{\overline{h}}(e_{a,p})(z)) = \frac{1}{m!}\Bigg[\frac{\partial^p h_p(a)}{\partial\zeta_1...\partial\zeta_p}\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{(1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s})}+$$

$$+\sum_{\substack{j_1,...,j_p=0,\\ |j|\neq 0}}^{1}\frac{\partial^{p-|j|}h_p(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_p}}\prod_{s=1}^{p}\Big(\frac{1+2j_s z_{k_s}\overline{a}_{k_s}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{j_s+1+m_{k_s}}}\Big)\Big]\times \tag{2.34}$$

$$\times\prod_{s=p+1}^{n}\frac{1}{(1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s})^{m_{k_s}+1}}.$$

Таким образом, для произвольной перестановки чисел $(1,2,...,n):(k_1,...,k_p,...,k_n)$ и $1\leq p\leq n$, $a\in U^n$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^p h_p(a)}{\partial\zeta_{k_1}...\partial\zeta_{k_p}}\right|\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{|1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s}|^{m_{k_s}+1}}\lesssim|D^mT_{\overline{h}}(e_{a,p})(z)|+$$

$$+\sum_{\substack{j_1,...,j_p=0,\\ |j|\neq 0}}^{1}\left|\frac{\partial^{p-|j|}h_p(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_p}}\right|\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{p}\Big(\frac{1+j_s}{|1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s}|^{j_s+1+m_{k_s}}}\Big)\Big]\prod_{s=p+1}^{n}\frac{1}{|1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s}|^{m_{k_s}+1}}. \tag{2.35}$$

Теперь докажем требуемую оценку по индукции. Предположим $p=1$, тогда из последней оценки сразу следует, что

$$\left|\frac{\partial h_1(a)}{\partial\zeta_{k_1}}\right|\leq\|T_{\overline{h}}\|\|e_{a,1}\|_{A_\omega(\alpha,m)}+|h_1(a)|\|\psi_{1,a}\|_{A_\omega(\alpha,m)}, \tag{2.36}$$

где $\psi_{1,a}(z)=\prod\limits_{s=2}^{n}\frac{1}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})}\frac{1}{(1-\overline{a}_{k_1}z_{k_1})^2}$ и $e_{a,1}(z)=\frac{1}{(1-\overline{a}_{k_1}z_{k_1})^2}\prod\limits_{s=2}^{n}\frac{1}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})}$. Учитывая оценку (2.32) и оценку (2.36), получим

$$\left|\frac{\partial h_1(a)}{\partial\zeta_{k_1}}\right|\prod_{s=1}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du\lesssim\frac{\omega_{k_1}(1-|a_{k_1}|)}{(1-|a_{k_1}|)^2}\prod_{s=2}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du+$$

$$+\|h\|_\infty\frac{\omega_{k_1}(1-|a_{k_1}|)}{(1-|a_{k_1}|)^2}\prod_{s=2}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du.$$

В итоге получим

$$\left|\frac{\partial h(\zeta_1,...,\zeta_n)\zeta_{k_1}}{\partial\zeta_{k_1}}\right|_{\zeta=a} \lesssim \frac{\omega_{k_1}(1-|a_{k_1}|)}{(1-|a_{k_1}|)^2\int\limits_{1-|a_{k_1}|}^{1}\frac{\omega_{k_1}(u_1)}{u_1^2}du_1}.$$

Итак, требуемая оценка установлена при $p=1$.

Далее, предположжим, что p - произвольное натуральное число $1 \le p \le n-1$ и что оценка (2.8) доказана для произвольных картежей $(k_1,...,k_p) \in K_p$, докажем эту оценку при всех $(k_1,...,k_{p+1}) \in K_{p+1}$. Для этого используем основную оценку (2.35), записывая ее для $1 \le p+1 \le n$ при всех $1 \le p \le n-1$ получаем

$$\left|\frac{\partial^{p+1}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}}\right|\prod_{s=1}^{n}\frac{1}{|1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s}|^{m_{k_s}+1}} \le |D^m T_{\overline{h}}(e_{a,p+1})(z)|+$$

$$+\sum_{\substack{j_1,...,j_{p+1}=0,\\ |j|=j_1+...+j_{p+1}\neq 0}}^{1}\left|\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}^{1-j_{p+1}}}\right|\left|\prod_{s=1}^{p+1}\Big(\frac{1+2j_s\overline{a}_{k_s}z_{k_s}}{(1-\overline{a}_{k_s}z_{k_s})^{j_s+1+m_{k_s}}}\Big)\right|\times$$

$$\times\prod_{s=p+2}^{n}\frac{1}{|1-\zeta_{k_s}\overline{a}_{k_s}|^{m_{k_s}+1}}. \tag{2.37}$$

Теперь заметим, что в выражении $\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_{p+1}}}$, $|j|\neq 0$ порядок производной $p+1-|j| \le p$, поэтому можно предположить, что $j_{s_0}\neq 0$, то есть в рассматриваемой сумме в каждом слогаемом имеется $\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_{s_0-1}}^{1-j_{s_0-1}}\partial\zeta_{k_{s_0+1}}^{1-j_{s_0+1}}...\partial\zeta_{k_{p+1}}^{1-j_{p+1}}}$, при некотором $1 \le s_0 \le p+1$. Учитывая индукционное предположение получим

$$\left|\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_{p+1}}}\right| \le \prod_{s=1}^{p+1}\left(\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}\frac{1}{\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du}\right)^{1-j_s}$$

Учитывая, также (2.37), окончательно получаем

$$\left|\frac{\partial^{p+1}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}}\right|\prod_{s=1}^{n}\int\limits_{1-|a_s|}^{1}\frac{\omega_s(u)}{u^2}du\lesssim$$

$$\lesssim\prod_{s=1}^{p+1}\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}\prod_{s=p+2}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du+$$

$$+\left(\sum_{\substack{j_1,...,j_{p+1}=0,\\ |j|=j_1+...+j_{p+1}\neq 0}}^{1}\left|\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}^{1-j_{p+1}}}\right|\prod_{s=1}^{p+1}\int\limits_0^1\frac{\omega_{k_s}(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha_{k_s}-1}d\rho}{|1-\overline{a}_{k_s}|^{j_s+1+m_{k_s}}}\right)\times \tag{2.38}$$

$$\times\prod_{s=p+2}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du.$$

Но, учитывая, что $m_{k_s}=\alpha_{k_s}+1, s=1,...,n$ имеем

$$\int\limits_0^1\frac{\omega_{k_s}(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha_{k_s}-1}d\rho}{|1-\overline{a}_{k_s}|^{j_s+1+m_{k_s}}}\approx\begin{cases}\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}, \text{ если } j_s=1,\\ \int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du, \text{ если } j_s=0.\end{cases}$$

В итоге, получаем

$$\left|\frac{\partial^{p+1}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}}\right|\prod_{s=1}^{n}\int\limits_{1-|a_s|}^{1}\frac{\omega_s(u)}{u^2}du\lesssim\prod_{s=1}^{p+1}\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}\prod_{s=p+2}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du+$$

$$+\prod_{s=1}^{p+1}\left(\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du}\right)^{1-j_s}\prod_{s=1}^{p+1}\left(\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}\right)^{j_s}\times \tag{2.39}$$

$$\times\left(\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du\right)^{1-j_s}+\sum_{\substack{j_1,...,j_{p+1}=0,\\ |j|=j_1+...+j_{p+1}\neq 0}}^{1}\left|\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}^{1-j_{p+1}}}\right|\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{p+1}\left(\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}\right)^{j_s}\left(\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du\right)^{1-j_s}.$$

Теперь, еще раз учитывая индукционное предположение, и то, что в выражении $\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_{p+1}}}$, $|j|\neq 0$ порядок производной $p+1-|j|\leq p$, получаем

$$\left|\frac{\partial^{p+1-|j|}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}^{1-j_1}...\partial\zeta_{k_p}^{1-j_{p+1}}}\right|\lesssim\prod_{s=1}^{p+1}\left[\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du}\right]^{1-j_s}. \tag{2.40}$$

Из (2.39) и (2.40) приходим к оценке

$$\left|\frac{\partial^{p+1}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}}\right|\prod_{s=1}^{n}\int\limits_{1-|a_s|}^{1}\frac{\omega_s(u)}{u^2}du\lesssim\prod_{s=1}^{p+1}\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2\prod\limits_{s=p+2}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du}+$$

$$+\prod_{s=1}^{p+1}\left[\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du}\right]^{1-j_s}\prod_{s=1}^{p+1}\left(\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}\right)^{j_s}\left(\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du\right)^{1-j_s}.$$

Или

$$\left|\frac{\partial^{p+1}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}}\right|\prod_{s=1}^{n}\int\limits_{1-|a_s|}^{1}\frac{\omega_s(u)}{u^2}du\lesssim\prod_{s=1}^{p+1}\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}\prod_{s=p+2}^{n}\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du+$$

$$+\prod_{s=1}^{p+1}\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2}.$$

В итоге, из последней оценки получаем, что

$$\left|\frac{\partial^{p+1}h_{p+1}(a)}{\partial\zeta_{k_1}...\partial\zeta_{k_{p+1}}}\right|\lesssim\prod_{s=1}^{p+1}\frac{\omega_{k_s}(1-|a_{k_s}|)}{(1-|a_{k_s}|)^2\int\limits_{1-|a_{k_s}|}^{1}\frac{\omega_{k_s}(u)}{u^2}du}.$$

Требуемая оценка установлена и тем самым доказана импликация 1. ⇒ 2.

Перейдем теперь к доказательству импликации 2. ⇒ 1.

Как и при доказательстве импликации **b**. $\Rightarrow$ **a**. пункта *2* теоремы 2.3 проведем следующие рассуждения.

Докажем ограниченность $T_{\overline{h}_2}$. Используем двойственность пространств $A_\omega(\alpha, m)$ и Λ_ω^α, при этом, не ограничивая общности, можем предполагать, что $f \in C_A^\infty(U^n)$, $Q_{n,\pi} = [-\pi;\pi]^n$. Согласно теореме Хана-Банаха существует $g \in \Lambda_\omega^\alpha$ такая, что $\|g\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \lesssim 1$ и

$$\|D^m T_{\overline{h}_2}(f)\|_{A_\omega(\alpha,m)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{Q_{n,\pi}} D^m T_{\overline{h}_2}(f_r)(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})\overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{Q_{n,\pi}} D^m T_{\overline{h}_2}(f)(re^{i\theta_1},...,re^{i\theta_n})\overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{Q_{n,\pi}} \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} \frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}}{\prod\limits_{j=1}^n(\zeta_j - re^{i\theta_j})^{m_j+1}}d\zeta_1...d\zeta_n\overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{Q_{n,\pi}} \frac{\overline{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})}d\theta_1...d\theta_n}{\prod\limits_{j=1}^n(\zeta_j - re^{i\theta_j})^{m_j+1}}d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}\overline{\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} \frac{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})de^{i\theta_1}...de^{i\theta_n}}{i^n\prod\limits_{j=1}^n e^{i\theta_j}(\overline{\zeta}_j - re^{-i\theta_j})^{m_j+1}}}d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}\times$$

$$\times\overline{\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} \frac{g(e^{i\theta_1},...,e^{i\theta_n})\prod\limits_{j=1}^n e^{i\theta_j m_j}\zeta_j^{m_j}de^{i\theta_1}...de^{i\theta_n}}{\prod\limits_{j=1}^n(e^{i\theta_j} - r\zeta_j)^{m_j+1}}}d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}\overline{\zeta}_1^{m_1}...\overline{\zeta}_n^{m_n}\times$$

$$\times\overline{\frac{\partial^{|m|}(g(r\zeta_1,...,r\zeta_n)\zeta_1^{m_1}...\zeta_n^{m_n})}{\partial\zeta_1^{m_1}...\partial\zeta_n^{m_1}}}d\zeta_1...d\zeta_n =$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h(\zeta_1,...,\zeta_n)}\overline{\zeta}_1^{m_1}...\overline{\zeta}_n^{m_n}\overline{D^m g(r\zeta_1,...,r\zeta_n)}d\zeta_1...d\zeta_n.$$

Выше мы воспользовались многомерной формулой Коши для производной, а также равенством (2.31). Итак,

$$\|D^m T_{\overline{h}_2}(f)\|_{A_\omega(\alpha,m)}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\times$$

$$\times\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)\zeta_1^{m_1}...\zeta_n^{m_n}D^m g(r\zeta_1,...,r\zeta_n)}d\zeta_1...d\zeta_n=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)\zeta_1^{m_1}...\zeta_n^{m_n}D^m g(r\zeta_1,...,r\zeta_n)}\times$$

$$\times\zeta_1...\zeta_n dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)=\frac{const}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} f(\zeta_1,...,\zeta_n)\times$$

$$\times\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)\zeta_1^{m_1-1}...\zeta_n^{m_n-1}D^m g(r\zeta_1,...,r\zeta_n)}dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)=$$

$$=\frac{const}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} D^m f(\zeta_1,...,\zeta_n)\times$$

$$\times D^{-m}[\overline{h_2(\zeta_1,...,\zeta_n)\zeta_1^{m_1-1}...\zeta_n^{m_n-1}D^m g(r\zeta_1,...,r\zeta_n)}]dm(\zeta_1)...dm(\zeta_n)\lesssim$$

$$\lesssim\|D^m f\|_{A_\omega(\alpha,m)}\|D^{-m}(h_2 D^m g_r)\|_{\Lambda_\omega^\alpha},\quad \zeta_j=e^{i\varphi_j}, j=1,...,n.$$

Напомним, что $m_j=\alpha_j+1,\ j=1,...,n$. Тогда нам нужно исследовать поведение оператора $D^{-m}(h_2 D^m g_r)$ в пространстве Λ_ω^α. Напомним, что для любой $F\in\Lambda_\omega^\alpha$

$$\|F\|_{\Lambda_\omega^\alpha}=\sup_{z\in U^n}\left\{\left|D^{\alpha+2}F(z_1,...,z_n)\right|\prod_{j=1}^n\frac{(1-|z_j|)^2}{\omega_j(1-|z_j|)}\right\}=$$

$$=\sup_{z\in U^n}\left\{\left|D^{m+1}F(z_1,...,z_n)\right|\prod_{j=1}^n\frac{(1-|z_j|)^2}{\omega_j(1-|z_j|)}\right\}.$$

Соответственно,

$$\|D^{-m}(h_2 D^m g_r)\|_{\Lambda_\omega^\alpha}=\sup_{z\in U^n}\left\{\left|D^{m+1}\left(D^{-m}[h_2(z_1,...,z_n)D^m g(rz_1,...,rz_n)]\right)\right|\times\right.$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|z_j|)^2}{\omega_j(1-|z_j|)} \Bigg\} =$$

$$= \sup_{z\in U^n} \Bigg\{ \Bigg| D\Bigg[h_2(z_1,...,z_n) D^m g(rz_1,...,rz_n) \Bigg] \Bigg| \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|z_j|)^2}{\omega_j(1-|z_j|)} \Bigg\}.$$

Используя лемму 2.9, имеем

$$\|D^{-m}(h_2 D^m g_r)\|_{\Lambda_\omega^\alpha} = \sup_{z\in U^n} \Bigg\{ \Bigg| D\Big[h_2(z_1,...,z_n) D^m g(rz_1,...,rz_n) \Big] +$$

$$+ m h_2(z_1,...,z_n) D^m g(rz_1,...,rz_n) \Bigg| \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|z|)^2}{\omega_j(1-|z|)} \Bigg\} \leq$$

$$\leq \sup_{z\in U^n} \Bigg\{ \Bigg| D\Big[h_2(z_1,...,z_n) D^m g(rz_1,...,rz_n) \Big] \Bigg| \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|z|)^2}{\omega_j(1-|z|)} \Bigg\} +$$

$$+ \sup_{z\in U^n} \Bigg\{ m \Bigg| D^m g(rz_1,...,rz_n) \Bigg| \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|z|)^2}{\omega_j(1-|z|)} \Bigg\} \|h_2\|_\infty. \tag{2.41}$$

С учетом формулы (2.31) имеем

$$D\Bigg[h_2(z_1,...,z_n) D^m g(rz_1,...,rz_n) \Bigg] =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial z_1 ... \partial z_n} \Bigg(z_1...z_n h_2(z_1,...,z_n) D^m g(rz_1,...,rz_n) \Bigg).$$

Согласно многомерной формуле Лейбница получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial z_1...\partial z_n} (z_1...z_n h_2(z_1,...,z_n) D^m g(rz_1,...,rz_n)) = \sum_{k_1=0}^{1} ... \sum_{k_n=0}^{1} C_1^{k_1} ... C_1^{k_n} \times$$

$$\times \frac{\partial^{|1-k|}(z_1...z_n h_2(z_1,...,z_n))}{\partial z_1^{1-k_1}...\partial z_n^{1-k_n}} \frac{\partial^{|k|}(D^m g(rz_1,...,rz_n))}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_n^{k_n}} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{1} ... \sum_{k_n=0}^{1} \frac{\partial^{|1-k|}(z_1...z_n h_2(z_1,...,z_n))}{\partial z_1^{1-k_1}...\partial z_n^{1-k_n}} \frac{\partial^{|k|}(D^m g(rz_1,...,rz_n))}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_n^{k_n}}.$$

Отметим, что для того, чтобы оценить норму данной функции достаточно оценить каждое слогаемое. Тогда, используя лемму 2.10, получаем, что первое слогаемое рассматриваемой функции не превосходит $\prod\limits_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)}{(1-|z_j|)^2} \lesssim 1$.

Для оценки второго слогаемого в (2.41) воспользуемся леммой 1.3, из которой следует, что

$$D^m g(z) = \int\limits_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^s D^{m+1} g(\zeta)\psi(m_j, s_j, \overline{\zeta_j} z_j)}{(1-\overline{\zeta} z)^{s+1}} dm_{2n}(z)$$

для некоторых $\psi(m_j, s_j, \overline{\zeta_j} z_j)$ ограниченных аналитических функций. Поэтому

$$\Big| D^m g(z) \Big| \lesssim \int\limits_{U^n} \frac{\omega_\Pi(1-|\zeta|)(1-|\zeta|^2)^{s-2}}{|1-\overline{\zeta} z|^{s+1}} dm_{2n}(z),$$

при $s > 2$. Далее, учитывая рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 2.3, получаем

$$\Big| D^m g(z) \Big| \lesssim \int\limits_{Q_n} \frac{\omega_\Pi(1-|\zeta|)(1-|\zeta|^2)^{s-2}}{(1-|\zeta||z|)^s} dm_n(z) \lesssim \frac{\omega_\Pi(1-|z|)}{(1-|z|)^2}.$$

Теперь, учитывая (2.41), получим требуемое.

Импликация 2. $\Rightarrow$ 1. доказана.

Итак, теорема 2.4 доказана. $\square$

Теоремы 2.3 и 2.4 имеют интересные приложения в теории факторизации. А именно справедлива следующая теорема о делении аналитической функции:

Теорема 2.5. *Пусть* $F \in H^1(U^n) \cap A_\omega(\alpha, m)$ *причем* $F(z) = J(z) f(z)$, $z \in U^n$. *Тогда если* $f \in H^1(U^n)$, *то* $\frac{F}{J} = f \in H^1(U^n) \cap A_\omega(\alpha, m)$.

Доказательство. Так как $f \in H^1(U^n)$, то

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{F(\zeta)\overline{J(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} = T_{\overline{J}}(F)(z)$$

см. [11]. В тоже время по теоремам 2.3 и 2.4 мы получаем, что последний интеграл принадлежит классу $H^1(U^n) \cap A_\omega(\alpha, m)$, поскольку $f = T_{\overline{J}}(F)$.

$\square$

Список литературы

1. Антоненкова, О. Е. Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций / О. Е. Антоненкова, Ф. А. Шамоян // Сибирский математический журнал. — 2005. — Т. 46. — № 6. — С. 1208–1234.

2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи / Пер. с англ. / Н. Я. Виленкин — М.: Наука, 1965. — 294 с.

3. Бесов, О. В. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1975. — 480 с.

4. Виноградов, С. А. О факторизации функций с производной из H^p / С. А. Виноградов, Н. А. Широков // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1971. — Т. 22. — № 0. — С. 8-–27.

5. Гарнетт, Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт / Пер. с англ. / В. П. Хавин (ред.); Е. М. Данькина (пер.) — М.: Мир, 1984. — 469 с.

6. Джрбашян, М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. — М.: Наука, ГИТТЛ, 1966. — 671 с.

7. Захарюта, В. П. Общий вид линейного функционала в $H_{p'}$ / В. П. Захарюта, В. И. Юдович // Успехи математических наук. — 1964. — Т. 19. — № 2(116). — С. 139–142.

8. Коренблюм, Б. И. Об одном экстремальном свойстве внешних функций / Б. И. Коренблюм // Математические заметки. — 1971. — Т. 10. — № 1. — С. 53–56.

9. Коренблюм, Б. И. О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы / Б. И. Коренблюм // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200. — № 1. — С. 24–27.

10. Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1969. — 480 с.

11. Рудин, У. Теория функций в поликруге / У. Рудин / Пер. с англ. / И. В. Островский (ред.); В. Э. Кацнельсон, И. Е. Овчаренко (пер.) — М.: Мир, 1974. — 160 с.

12. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин / Пер. с англ. / Е. А. Горин (ред.); В. Я. Лин (пер.) — М.: Мир, 1975. — 443 с.

13. Трибель, Х. Теория функциональных пространств / Х. Трибель / Пер. с англ. / В. И. Авербух (ред.); П. И. Лизоркин (пер.) — М.: Мир, 1986. — 448 с.

14. Хавин, В. П. Пространства аналитических функций / В. П. Хавин // Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ». — 1966. — № 0. — С. 76–164.

15. Хавин, В. П. О факторизации аналитических функций гладких вплоть до границы / В. П. Хавин // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1971. — Т. 22. — № 0. — С. 202–205.

16. Шамоян, Ф. А. Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге / Ф. А. Шамоян // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1971. — Т. 22. — № 0. — С. 206-–208.

17. Шамоян, Ф. А. Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций / Ф. А. Шамоян // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. — 1973. — Т. 8. — № 6. — С. 474–490.

18. Шамоян, Ф. А. Об одном классе операторов, связанных с факторизацией аналитических функций / Ф. А. Шамоян // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1974. — Т. 39. — № 0. — С. 200-–205.

19. Шамоян, Ф. А. Теорема вложения в пространствах n-гармонических функций и некоторые приложения / Ф. А. Шамоян // ДАН АрмССР. — 1976. — Т. 62. — № 1. — С. 10–14.

20. Шамоян, Ф. А. Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$ / Ф. А. Шамоян // Математический сборник. — 1978. — Т. 107(149). — № 3(11). — С. 446–462.

21. Шамоян, Ф. А. Тёплицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций / Ф. А. Шамоян // Изв. АН АрмССР. — 1983. — Т. 76. — № 3. — С. 215–219.

22. Шамоян, Ф. А. Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных функций / Ф. А. Шамоян // ДАН АрмССР. — 1987. — Т. 85. — № 1. —С. – .

23. Шамоян, Ф. А. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций / Ф. А. Шамоян // Сибирский математический журнал. — 1990. — Т.31. — № 2. — С. 474–494.

24. Шамоян, Ф. А. Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций / Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко. — Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009. — 152 с.

25. Шамоян, Ф. А. Об ограниченности тёплицевых операторов в весовых соболевских пространствах голоморфных в круге функции / Ф. А. Шамоян // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2011. — Т. 389. — № 0. — С. 257-–282.

26. Benedek, A. The space L^p with mixed norm / A. Benedek, R. Panzone // Duke Mathematical Journal. — 1961. — V. 28. — № 3. — P. 301–324.

27. Böttcher, A. Analysis of Toeplitz Operators / A. Böttcher, B. Silberman — Berlin: Springer Verlag, 1990. — 665 p.

28. Carleson, L. On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals / L. Carleson // Mathematische Zeitschrift. — 1952. — V. 56. — № 3. — P. 289–295.

29. Detras, J. Restrictions a la diagonale desclasses de Hardy du luelisque / J. Detras // C.R. Acacl. Sei Paris. — 1978. — V. 287. — № 7. — P. 997–999.

30. Djrbashian, A. E. Topics in the Theory of A^p_α spaces / A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan — Leipzig: Teubner, Teubner-Texte Zur Math., 1988. — 200 p.

31. Duren, P. L. Restrictions H^p functions to the diagonal of the polydisc / P. L. Duren, A. L. Shields // Duke Mathematical Journal. — 1975. — V. 42. — № 4. — P. 751–753.

32. Dyakonov, K. M. Division and multiplication by inner functions and embedding theorems for star-invariant subspaces / K. M. Dyakonov // American Journal of Mathematics. — 1993. — V. 115. — № 4. — P. 881–902.

33. Frazier, A. P. The dual space of H^p of the polydisc for $0 < p < 1$ / A. P. Frazier // Duke Mathematical Journal. — 1972. — V. 39. — № 2. — P. 369–379.

34. Hedenmalm, H. Theory of Bergman spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu — Berlin: Springer Verlag, Graduate Texts in mathematics, 2000. — 199 p.

35. Hörowitz, C. Restrictions to diagonal of U^n / C. Hörowitz, E. Oberlin // Indiana University Mathematics Journal. — 1976. — V. 24. — № 7. — P. 767–772.

36. Jonson, S. On the action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces / S. Jonson, J. Peetre, A. Semmes // Duke Mathematical Journal. — 1984. — V. 51. — № 4. — P. 937–958.

37. Jöricke, B. The multidimensional analog of the Privalov theorem / B. Jöricke // Math. Nachr., Bd. — 1982. — V. 107. — P. 221–233.

38. Li, S. Volterra type operators from Zygmund space into Bloch spaces / S. Li, S. Stević // J. Concr. Appl. Math. — 2008. — V. 6. — № 2. — P. 199–207.

39. Mitchell, J. Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in C^n / J. Mitchell, K. T. Hahn // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1976. — V. 56. — № 2. — P. 379–396.

40. Nikolski, N. K. Treatise on the Shift Operator / N. K. Nikolski — Berlin: Springer Verlag, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 1986. — 491 p.

41. Nikolski, N. K. Operators, Functions, and Systems-An Easy Reading: Hardy, Hankel, and Toeplitz / N. K. Nikolski — American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, 2002. — 461 p.

42. Ren, G. The diagonal mapping in mixed norm spaces / G. Ren, J. Shi // Studia Mathematica. — 2004. — V. 163. — № 2. — P. 103–117.

43. Seip, K. Interpolating and sampling in spaces of analytic functions / K. Seip. — American Mathematical Society,University Lecture Series, 2004. — 183 p.

44. Shamoyan, F. A. Continuous projections, duality, and the diagonal mapping in weighted spaces of holomorphic functions with mixed norm / F. A. Shamoyan, O. V. Yaroslavtseva // Journal of Mathematical Sciences. — 2000. — V. 101. — № 3. — P. 3211–3215.

45. Shapiro, J. H. Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces / J. H. Shapiro // Duke Mathematical Journal. — 1976. — V. 43. — № 1. — P. 187–202.

46. Shields, A. L. Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$ / A. L. Shields, P. L. Duren, B. W. Romberg // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1969. — V. 238. — P. 32–60.

47. Shirokov, N. A. Analytic functions smooth up to the boundary / N. A. Shirokov — Berlin: Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1988. — 222 p.

48. Zhu, K. Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators / K. Zhu // Journal of Functional Analysis. — 1989. — V. 87. — № 1. — P. 31–50.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

49. Мишина, Е. В. Оценка смешанных норм в весовом анизотропном пространстве типа Соболева аналитических в полидиске функций / Е. В. Мишина // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2011. — № 4. — С. 28–36.

50. Povprits, E. V. Representation of continuous linear functionals in anisotropic weighted spaces of analytic functions in the polydisc with mixed norm / F. A. Shamoyan, E. V. Povprits // Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. — Taylor and Francis. — 2014. — V. 59. — № 4. — P. 462-483.

51. Povprits, E. V. Diagonal mapping in anisotropic spaces of analytic functions in polydisc with mixed norm / F. A. Shamoyan, E. V. Povprits // Complex Analysis and Operator Theory. — Birkhauser Verlag Viaduktstr. — 2014. — V. 8. — № 6. — P. 1383-1403.

Статьи в других научных изданиях

52. Мишина, Е. В. К вопросу об оценках в весовом анизотропном пространстве Соболева смешанных норм функций, аналитических в полидиске / Е. В. Мишина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы молодежной научной школы-конференции «Лобочевские чтения» — Казань: Казан. матем. об-во. — 2011. — Т. 44. — С. 214-216.

53. Мишина, Е. В. Об одном весовом анизотропном пространстве типа Соболева аналитических в полидиске функций / Е. В. Мишина // Материалы международной коныеренции «Российско-Белорусско-Украинское пограничье: 25-летие экологических и социально-педагогических проблем в постчернобыльский период». — Новозыбков: Изд. РИО БГУ— 2011. —С. 455–461.

54. Мишина, Е. В. О весовых анизотропных пространствах типа Соболева аналитических в полидиске функций / Е. В. Мишина // Материалы XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2011. — Вып. 12. — С. 215-216.

55. Повприц, Е. В. О представлении линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах аналитических в полидиске функций со смешанной нормой / Ф. А. Шамоян, Е. В. Повприц // Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения» — Петрозаводск: ПетрГУ. — 2012. — С. 82-86.

56. Повприц, Е. В. Об ограниченности одного класса интегральных операторов в весовых классах n-гармонических в поликруге функций / Е. В. Повприц // Материалы XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2012. — Вып. 13. — С. 185-187.

57. Повприц, Е. В. Диагональное отображение в анизотропных пространствах аналитических в полидиске функций со смешанной нормой / Ф. А. Шамоян, Е. В. Повприц // Материалы XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2013. — Вып. 14. — С. 173-175.

58. Повприц, Е. В. Об ограниченности тёплицева оператора в одном весовом анизотропном пространстве аналитических функций в поликруге / Ф. А. Шамоян, Е. В. Повприц // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXV» —Воронеж: изд. центр «Научная книга». — 2014. — С. 197-199.