На правах рукописи

Воронцов Ярослав Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ВЫБОРА С РАСПЛЫВЧАТОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И АЛГЕБРЫ НЕЧЕТКИХ ПАРАМЕТРОВ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Матвеев Михаил Григорьевич**
Официальные оппоненты:	**Блюмин Семён Львович,** доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, кафедра прикладной математики, профессор
	Анисимов Дмитрий Николаевич, кандидат технических наук, доцент, Московский энергетический институт, кафедра управления и информатики, доцент
Ведущая организация:	Тверской государственный технический университет

Защита состоится «20» мая 2015 г. в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.020 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета и на сайте http://www.science.vsu.ru/disser.

Автореферат разослан «   » марта 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент — Шабров Сергей Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Развитие теории нечётких множеств позволило расширить возможности учёта различных видов неопределённости, для описания которых в течение долгого времени в моделях использовались методы теории вероятностей и математической статистики. Исторически сложилось два основных направления нечёткой математики — нечёткий логический вывод, использующий модели с нечёткими отношениями, и мягкие вычисления, применяемые в классических моделях с чёткими отношениями и нечёткими параметрами. Удобство этих моделей состоит в том, что они достаточно хорошо проработаны и испытаны временем и во многих случаях позволяют получать решение в аналитическом виде.

Фаззификация известных ранее классических задач и создание новых нечётких моделей привела к необходимости разработки новых методов решения, позволяющих применять экспертные оценки на различных этапах моделирования. В работах известных зарубежных (D. Dubois, R. Fuller, A. Prade, R. Yager, L. Zadeh, H. Zimmermann и др.) и отечественных (В. Г. Балашов, А. Н. Борисов, В. В. Борисов, В. В. Круглов, С. Л. Блюмин, А. А. Усков и др.) учёных и исследователей рассмотрено и проанализировано множество применений результов теории нечётких множеств и мягких вычислений к решению задач выбора, управления и принятия решений. Обратной стороной использования моделей с нечёткостью стало возникновение противоречий между решениями, полученными с применением новых методов, и результатами классических теорий, потеря устойчивости решений, нарушение естественных отношений в моделях, в которых нечёткими являются только параметры, неоправданное расширение степени нечёткости результата, повышение вычислительной сложности задач.

Актуальность темы исследования определяется необходимостью разработки математических моделей, численных методов и программ, инвариантных к широкому кругу различных задач с чёткими отношениями и нечёткой неопределённостью параметров и позволяющих решать их как совокупность нескольких чётких, используя при этом классические методы моделирования и стандартное ПО и обеспечивая требуемые в конкретной задаче качественные свойства решения — устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.

Диссертационная работа выполнена в рамках одного из основных научных направлений Воронежского государственного университета «Разработка моделей, методов и алгоритмов обработки информации для создания информационных технологий и систем нового поколения» (№ гос. регистрации 01201263910).

Целью диссертационной работы является построение и исследование моделей учёта нечёткой неопределённости, обеспечивающих требуемые свойства решения различных прикладных задач — устойчивость, сохранение чётких математических соотношений, ограничение расширения неопределённости, а также разработка методов численного решения на основе вводимых моделей. Для достижения поставленной цели в работе решались следующие **задачи**:

1. Анализ существующих методик нечётких вычислений с точки зрения сохранения свойств решения задач.
2. Разработка модели представления нечётких чисел, позволяющей максимально сохранять исходную экспертную информацию и обеспечить требуемые качественные свойства решений (устойчивость, сохранение чётких математических соотношений и т. п.).
3. Разработка методики эффективной численной реализации решения задач с нечёткими параметрами, основанной на подходящих алгебраических структурах и её тестирование на примере задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.
4. Разработка и верификация программного обеспечения, реализущего предложенную модель представления нечётких параметров и методики численного решения задач с нечёткими параметрами.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы основные положения и методы теории нечётких множеств, мягких вычислений, интервального анализа, теории алгебраических структур, теории графов, численных методов. При создании программного обеспечения использовались технологии модульного и объектно-ориентированного программирования.

Тематика работы. Содержание диссертации соответствует п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 8 «Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования» паспорта специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. Предложена и исследована модель представления расплывчатых числовых оценок в классе треугольных LR-чисел, отличающаяся модификацией нечёткого LR-числа, основанной на применении предложенного L-преобразования LR-чисел в соответствующие LL/RR-числа.
2. Разработаны вычислительные методы приближённого решения задач выбора с нечёткими параметрами, отличающиеся построением и использованием изоморфной алгебраической структуры над множеством модифицированных нечётких чисел, инвариантные к форме математического описания задачи и позволяющие параметрически управлять устойчивостью решения.
3. Разработаны алгоритмы и структура программного комплекса для решения задач выбора с нечёткими параметрами, реализующего предложенные в работе вычислительные методы, отличающегося использованием стандартных вычислительных операций над действительными переменными (в отличие от специализированных программных пакетов, работающих с нечеткими числами).

Достоверность научных результатов. Научные положения, теоретические выводы и практические рекомендации обоснованы корректным использованием выбранного математического аппарата и подтверждены результатами вычислительного эксперимента.

Практическая значимость исследования заключается в расширении сферы применимости методов моделирования с использованием чётких отношений и нечётких параметров. Подходы к нечётким вычислениям, предложенные в диссертации, позволяют существенно упростить процедуру расчётов без значительных потерь экспертной информации, а также использовать существующее стандартное программное обеспечение для решения различных производственных задач.

Реализация и внедрение результатов работы. Разработанный программный комплекс «CSBusinessGraph» используется в практической деятельности по первоначальной оценке проектов ООО «Философт» (DataArt). Результаты диссертации в форме моделей, алгоритмов и программ используются в производственном процессе ООО «Философт», что подтверждается актом о внедрении. Признана целесообразность использования предложенной в диссертации методики для оптимизации процедур первоначальной оценки проектов по разработке программного обеспечения.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университа и следующих конференциях различного уровня: международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2012 г.); международная конференция «Информатика: проблемы, методология, технологии» (Воронеж, 2013–2014 гг.); международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации» (Алушта, 2013–2014 гг.); научно–техническая конференция студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, 2014).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 11 научных работ [1]– [11], в том числе 4 [5, 6, 10, 11] — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. В работах, выполненных в соавторстве: в [5] предложено преобразование L и алгебра модифицированных нечётких чисел; в [6] выполнен анализ существующих методов сравнения нечётких чисел и предложен метод сравнения для модифицированных LL/RR-чисел; а в [10] — предложено определение устойчивости задачи нечёткого линейного программирования и разработан алгоритм решения задачи календарно-сетевого планирования и управления с нечёткими параметрами, позволяющий получать устойчивое решение.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации **158** страниц текста с **16** рисунками и **3** таблицами. Список литературы содержит **131** наименование, включая работы автора.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, кратко изложены структура и содержание диссертации, определены научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** приведены основные понятия теории нечётких множеств и описаны актуальные модели представления нечёткой информации, используемые в дальнейшем при описании исследования. Дано определение нечётких моделей и их классификация в зависимости от этапа применения нечёткой математики — при описании системы, при задании параметров, при задании входов, выходов и состояний (модели первого, второго и третьего типа). В работе предложена классификация нечётких моделей на основе применяемого в них языка описания выбора, объединённая с вышеописанной (рис. 1). В качестве объекта исследования выбраны модели, использующие чёткие отношения и нечёткие параметры (модели второго типа).

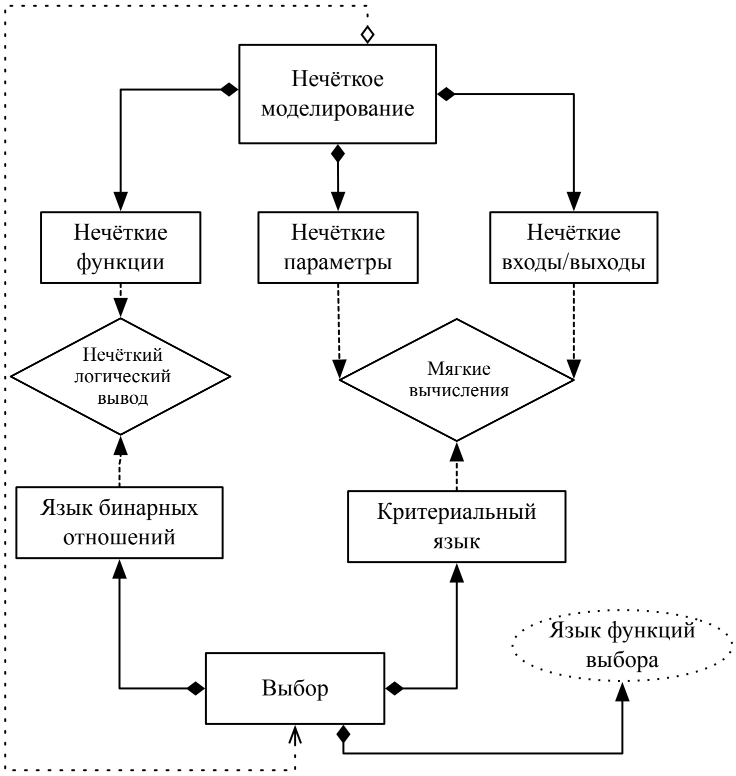


Рис. 1. Предлагаемая классификация нечётких моделей

Анализ методов мягких вычислений показал, что лежащие в их основании алгебраические структуры (в основном решётки) и отсутствие отношения линейного порядка приводят к нарушениям чётких математических отношений и неоправданному расширению неопределённости результата. В диссертации формулируются основные требования к модели представления нечёткой информации и методам решения задач второго типа — получение устойчивого решения, непротиворечивость естественным математическим отношениям, ограничение расширения неопределенности, — и вводятся требования вычислительной эффективности и возможности применения стандартных программных комплексов, предназначенных для чётких вычислений.

Вторая глава диссертации посвящена разработке и исследованию методов моделирования и обработки нечетких числовых величин, которые удовлетворяли бы выдвинутым к ним в главе 1 требованиям. Ввиду широкого распространения линейных моделей, исследование проводится для нечётких треугольных чисел. В качестве основной формы представления треугольных чисел в работе выбрана форма (1) в виде границ чётких α-интервалов X_α, $\alpha \in [0;1]$, позволяющая быстро переходить к интервальной неопределённости.

$$\left[\begin{array}{l} x^L(\alpha)=m-a+a\alpha \\ x^R(\alpha)=m+b-b\alpha \end{array}\right. \tag{1}$$

Проводится краткий анализ существующих алгебраических методов обработки нечётких чисел, выделяются их достоинства и недостатки с точки зрения применимости в нечётких моделях второго типа. Для преодоления выделенных в главе 1 недостатков существующих методов нечётких вычислений предлагается следующий подход. Исходная задача выбора значения $\tilde{X}$, удовлетворяющего некоторой функции $\tilde{Y} = f\left(\tilde{X},\tilde{A}\right)$ с нечёткими числовыми параметрами, рассматривается как совокупность задач с интервальной неопределенностью

$$\tilde{Y}=f\left(\tilde{X},\tilde{A}\right)\to\bigcup_{\alpha=0}^{1}y_\alpha=f(X_\alpha,A_\alpha) \tag{2}$$

с последующим переходом к детерминированной задаче на каждом α-уровне, для чего внутри интервала X_α выбирается точка $\bar{x}(\alpha)$. В диссертации предлагается выбирать значение $\bar{x}(\alpha)$ с помощью линейного параметрического преобразования L

$$\bar{x}(\alpha)=L(X_\alpha)=\lambda x^L(\alpha)+(1-\lambda)x^R(\alpha). \tag{3}$$

Для треугольных чисел $\bar{x}(\alpha)$ является линейной функцией ввиду линейности $x^L(\alpha)$ и $x^R(\alpha)$. После решения чётких α-уровневых задач полученные результаты $y(\alpha)$ аппроксимируются нечётким числом $\tilde{Y}^*=\{y(\alpha)|\mu_{\tilde{Y}}(y)=\alpha\}$, которое называется *модифицированным решением* задачи (2).

Предлагаемый подход в своей основе имеет декомпозицию нечётких чисел по α-уровням — происходит переход от использования «полноценных» треугольных чисел к алгебрам для треугольных чисел LL/RR-типа (т.е. таких, у которых один из коэффициентов нечёткости нулевой), и функция принадлежности чисел такого типа является обратной к линейной функции (3), которая определяет точки $\bar{x}(\alpha)$:

$$\mu_{\tilde{A}^*}(x)=(\bar{x}(\alpha))^{-1} \tag{4}$$

В диссертации вводится ключевое понятие модифицированного нечёткого числа. *Модифицированным нечётким числом* называется число $\tilde{A}^*$, получаемое из $\tilde{A}$ с помощью преобразования (3) и (4). В работе показано, что модифицированное нечёткое число является числом LL/RR-типа, и в дальнейшем для таких чисел используется обозначение $\bar{x}(\alpha)$, указывающее на механизм их построения с помощью (4).

Исходя из (3) и (4) очевидно, что преобразование L сокращает информативность исходной нечёткой величины. Для определения степени потери нечёткой информации исследуются свойства преобразования L. Чтобы производить анализ и вычисления в форме, инвариантной к расположению числа на числовой оси, в диссертации предложено представление треугольного числа в виде совокупности следующих параметров:

- длина носителя $d_{\tilde{A}}$;
- мода $m_{\tilde{A}}$;
- степень асимметрии $AS_{\tilde{A}}$.

Степенью асимметрии $AS_{\tilde{A}}$ называют характеристику треугольного нечёткого числа, определяемую как разность площадей прямоугольных треугольников, на которые исходное нечёткое число делится модой.

В работе показано, что запись треугольного нечёткого числа в виде тройки $(m_{\tilde{A}}, d_{\tilde{A}}, AS_{\tilde{A}})$ эквивалентна введённым ранее способам записи через коэффициенты нечёткости $(m;a;b)$ и точки пересечения с осью Ox $\left(x^L;m;x^R\right)$. При известных степени асимметрии $AS_{\tilde{A}}$ и длине носителя $d_{\tilde{A}}$, коэффициенты нечёткости определяются по формуле

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{d_{\tilde{A}} - 2AS_{\tilde{A}}}{2} \\ b = \dfrac{d_{\tilde{A}} + 2AS_{\tilde{A}}}{2} \end{array}\right.$$

Для преобразования L доказаны следующие свойства, подтверждающие, что его применение к нечетким числовым величинам в основном сохраняет их информативность при целенаправленном выборе параметра λ, а уменьшение длины носителя позволяет снизить степень неопределённости решения.

Утверждение 1. *Преобразование L сохраняет моду нечёткого числа. Другими словами, $\forall\lambda \in [0;1]:\ m_{\tilde{A}} = m_{\tilde{A}^*}$.*

Утверждение 2. *При некоторых значениях параметра λ преобразование L сохраняет*
1. знак степени асимметрии, т.е. $\exists\lambda \in [0;1]:\ sign(AS_{\tilde{A}}) = sign(AS_{\tilde{A}^*})$;
2. значение степени асимметрии, т.е. $\exists\lambda \in [0;1]:\ AS_{\tilde{A}} = AS_{\tilde{A}^*}$.

Утверждение 3. *Модифицированное число всегда содержится внутри исходного числа. Другими словами, $\forall\lambda \in [0;1]:\ A^*_\alpha \subset A_\alpha;\ d_{\tilde{A}} \geqslant d_{\tilde{A}^*}$, т. е. преобразование L уменьшает длину носителя нечёткого числа и оставляет α-интервалы модифицированного числа в рамках α-интервалов исходного числа.*

На основании следствий из свойств преобразования L, в диссертации даются рекомендации по выбору параметра λ и применимости предлагаемой методики:

- при $\lambda = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{d_{\tilde{A}}}$ сохраняется значение степени асимметрии. Применение преобразования L с этим значением λ к нечётким LL/RR-числам не изменяет их;
- при $\lambda = \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{b}{d_{\tilde{A}}}$ преобразование L уничтожает нечёткую информацию, заложенную экспертом в число, и сводит операции над числами к операциям над их модами;
- применимость преобразования L при использовании симметричных нечётких числах ограничена, поскольку $\lambda = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{1}{2}$, и все вычисления в этом случае сводятся к операциям над модами чисел.

Для доказательства применимости предложенного подхода в нечётких моделях второго типа, создаётся алгебраическая система для множества всех нечётких модифицированных чисел $K = \{\bar{x}(\alpha)\};\ \alpha \in [0;1]$. Строится чёткая алгебра $P = \langle K;\ +,*\rangle$; для её построения используется более удобная форма записи модифицированного числа

$$\bar{x}(\alpha) = c + k\alpha, \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} c = m + b - \lambda(a+b) \\ k = \lambda(a+b) - b \end{cases} \tag{6}$$
$$\lambda \in [0;1];\ c,k \in \mathbb{R}$$

На множестве K вводится операция сложения (7), а также нейтральный (8) и противоположный по сложению (9) элементы. Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности операции (7).

$$\bar{x}_1(\alpha) + \bar{x}_2(\alpha) = r_1(\alpha) = c_1 + c_2 + (k_1 + k_2)\alpha,\ r_1(\alpha) \in K; \tag{7}$$

$$\bar{0} = 0 + 0\alpha \in K : \forall \bar{x}(\alpha) \in K:\ \bar{x}(\alpha) + \bar{0} = c + k\alpha + 0 + 0\alpha = \bar{x}(\alpha); \tag{8}$$

$$-\bar{x}(\alpha) = -c - k\alpha \in K:\ \bar{x}(\alpha) + (-\bar{x}(\alpha)) = \bar{0}. \tag{9}$$

Также на множестве K вводится операция умножения. Её можно было бы определить с помощью (10) как сумму произведений компонент модифицированных нечётких чисел

$$\bar{x}_1(\alpha) \cdot \bar{x}_2(\alpha) = r_2'(\alpha) = (c_1 + k_1\alpha)(c_2 + k_2\alpha) = c_1c_2 + c_1k_2\alpha + c_2k_1\alpha + k_1k_2\alpha^2, \tag{10}$$

однако такое определение приводит к искажению треугольного вида результата нечётких операций, т.е. $r_2'(\alpha) \notin K$. Для того, чтобы множество K было замкнутым относительно операции умножения, используется линейная интерполяция — зависимость $r_2(\alpha)$ восстанавливается в виде линейной функции по значениям выражения (10) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Это приводит к следующему определению операции умножения:

$$r_2(\alpha) = c_1c_2 + (c_1k_2 + c_2k_1 + k_1k_2)\alpha;\ r_2(\alpha) \in K. \tag{11}$$

Для операции умножения (11) вводятся нейтральный (12) и обратный по умножению (13) элементы. Доказываются свойства ассоциативности и коммутативности, а также свойство дистрибутивности умножения (11) относительно сложения (7). Показано, что для существования обратного элемента число $\bar{x}(\alpha)$ должно иметь ненулевую моду, поскольку, согласно (6), $c + k = m \neq 0$.

$$\bar{1} = 1 + 0\alpha \in K:\ \forall \bar{x}(\alpha) \in K \quad \bar{x}(\alpha) \cdot \bar{1} = \bar{x}(\alpha); \tag{12}$$

$$\bar{x}^{-1}(\alpha) = \frac{1}{c} - \frac{k}{c(c+k)}\alpha,\ c \neq 0;\ \bar{x}^{-1}(\alpha) \in K:\ \bar{x}(\alpha)\bar{x}^{-1}(\alpha) = \bar{1}. \tag{13}$$

В диссертации для модифицированных нечётких чисел показывается эквивалентность записи в виде (5) и в виде

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) = \bar{x}_{\tilde{A}}(0) + \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0)) = \alpha\bar{x}_{\tilde{A}}(1) + (1-\alpha)\bar{x}_{\tilde{A}}(0). \tag{14}$$

На основании (14) предложен способ нечётких вычислений, называемый двухточечными вычислениями, позволяющий решать нечёткую задачу как две чёткие при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Если обозначить за $*$ произвольную арифметическую операцию, то для чисел в форме (14) её результат будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{x}_{\tilde{A}}(\alpha) * \bar{x}_{\tilde{B}}(\alpha) = \alpha(\bar{x}_{\tilde{A}}(1) * \bar{x}_{\tilde{B}}(1)) + (1-\alpha)(\bar{x}_{\tilde{A}}(0) * \bar{x}_{\tilde{B}}(0)). \tag{15}$$

В диссертации показано, что двухточечные вычисления, описываемые алгеброй $Q = \langle M, \Omega_2 \rangle$ с сигнатурой Ω_2, где M — множество пар действительных значений $(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$, изоморфны введённой ранее алгебре модифицированных нечётких чисел $P = \langle K, \Omega_1 \rangle$ с сигнатурой Ω_1. Действительно, существует отображение $\Gamma:\ K \to M$ и обратное ему $\Gamma^{-1}\colon\ M \to K$, описываемые формулами

$$\begin{cases} c = \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \\ k = \bar{x}_{\tilde{A}}(1) - \bar{x}_{\tilde{A}}(0); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_{\tilde{A}}(0) = c; \\ \bar{x}_{\tilde{A}}(1) = c + k; \end{cases} \tag{16}$$

и удовлетворяющее условиям (17)–(18) для бинарных операций $\varphi_i \in \Omega_1$, $\psi_i \in \Omega_2$ и элементов $k_1, k_2 \in K$, $m_1, m_2 \in M$:

$$\Gamma(\varphi_i(k_1, k_2)) = \psi_i(\Gamma(k_1, k_2)); \tag{17}$$

$$\varphi_i\big(\Gamma^{-1}(m_1, m_2)\big) = \Gamma^{-1}(\psi_i(m_1, m_2)) = \tag{18}$$

Ввиду (16), множества M и K суть одно и то же, поэтому равенства (17) и (18) после исключения Γ и Γ^{-1} доказываются простой подстановкой в общем виде. Переход к двухточечным вычислениям избавляет от необходимости вводить отношение линейного порядка на множестве K и позволяет использовать стандартные программные продукты для решения нечетких задач, т. к. нечеткая задача решается как две чётких.

В конце второй главы кратко рассматривается проблема устойчивости моделей второго типа на примере задачи линейного программирования с нечёткими параметрами

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}, \end{cases}$$

где $\mathbf{A} = \left\{\tilde{A}_{ij}\right\}$ — матрица, а $\mathbf{B} = \left\{\tilde{B}_i\right\}$, $\mathbf{C} = \left\{\tilde{C}_i\right\}$ — векторы нечётких параметров. Применение к каждому из элементов матрицы и векторов преобразования L приводит к модифицированной задаче

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} \to \min; \\ \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{B}^*, \end{cases} \tag{19}$$

в которой $\mathbf{A}^* = \left\{\bar{x}_{\tilde{A}_{ij}}(\alpha)\right\}$, $\mathbf{B}^* = \left\{\bar{x}_{\tilde{B}_i}(\alpha)\right\}$, $\mathbf{C}^* = \left\{\bar{x}_{\tilde{C}_i}(\alpha)\right\}$.

При изменении значений α при фиксированных коэффициентах λ_{A_i} преобразования L, происходит возмущение задачи (19). Ввиду свойства сохранения моды, в работе предлагается зафиксировать в качестве «эталонного» решение (19) при $\alpha = 1$ и использовать определение устойчивости по решению, поскольку оно включает в себя более узкое определение общей устойчивости, т. е. принципиальное существование решения возмущённой задачи. Предполагается, что нечёткая задача будет считаться устойчивой по решению, если при переходе с одного α-уровня на другой не происходит значительного изменения решения в смысле евклидовой метрики, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0;1]\ |\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(\alpha_1) - \mathbf{x}(\alpha_2)\| < \varepsilon. \tag{20}$$

Согласно методике двухточечных вычислений, задачу (19) достаточно решить на двух α-уровнях. Получаемая пара векторов $\mathbf{x}(\alpha = 1)$ и $\mathbf{x}(\alpha = 0)$ позволяет восстановить модифицированные решения в соответствие с (14). Однако при $\alpha = 0$ все значения λ_S, где S — один из индексов $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$, — принимают граничные значения (0 или 1). Для решения данной проблемы вводятся дополнительные ограничения для параметров λ_S:

$$(\lambda_S^\star - \lambda_S)^2 \to \min \tag{21}$$

которые позволяют минимизировать отклонение параметров от оптимальных в смысле сохранения нечёткой информации значений $\lambda_S^\star = \dfrac{a_S}{d_S}$ и, таким образом, управлять устойчивостью решения. Ввиду противоречивости критериев (21) и целевой функции задачи (19), возникает задача векторной оптимизации, для решения которой используется аддитивная свёртка критериев:

$$f^*(\mathbf{x},\lambda) = \mathbf{C}^*\mathbf{x} + \gamma \sum_s (\lambda_S^* - \lambda_S)^2 \to \min \tag{22}$$

Семантика целевой функции (22) такова: ищется решение $\mathbf{x}$ и вектор параметров λ_S преобразования L, которые позволяют удовлетворить исходный критерий оптимизации и при этом максимально сохранить нечёткую информацию, заложенную экспертами в параметры задачи. Безразмерный коэффициент γ позволяет привести значение свёртки к одному порядку со значением исходной целевой функции.

В **третьей главе** происходит тестирование разработанных моделей и методов обработки нечетких числовых величин на примере задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками. Кратко рассматривается классическая постановка задачи, связанные с ней определения и основные способы её решения, а также исследуются достоинства и недостатки существующих способов решения задачи сетевого планирования с нечёткими параметрами.

В качестве модели проекта в сетевом планировании рассматривается направленный ациклический граф $G = (V,E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, в котором работам проекта w_j, длительностью τ_j каждая, сопоставлены дуги графа e_j, $j = \overline{1,m}$, а событиям проекта z_i с временами наступления t_i сопоставления вершины графа v_i, $i = \overline{1,n}$. Событие z_1 — начало работ по проекту, событие z_n — окончание проекта. Граф G обладает следующими свойствами:

- существует ровно одна вершина $v_1 \in V$, называемая истоком, из которой рёбра только исходят, т.е. $\forall i = 2,n \ \nexists (v_i,v_1)$;
- существует ровно одна вершина $v_n \in V$, называемая стоком, в которую рёбра графа только входят, т.е. $\forall i = \overline{1,n-1} \ \nexists (v_n,v_i)$;
- для любой вершины графа $v_i \in V,\ i = \overline{1,n}$ существует путь $v_1 \ldots v_n$, проходящий через неё;
- для любого ребра $e_j \in E$, $j = \overline{1,m}$ существует путь $v_1 \ldots v_n$, содержащий это ребро.

Задача сетевого планирования сводится к поиску общего времени выполнения проекта T, которое равно длине максимального пути в графе, называемого также критическим. Соответственно, операции, которые принадлежат пути максимальной длины, также называются критическими. В диссертации указано, что алгоритмический метод решения задачи сетевого планирования (модифицированные алгоритмы Дейкстры и Форда-Мура-Беллмана) не позволяет проводить её анализ на устойчивость, т.е. на изменение критического пути. В качестве основного способа решения выбрано решение задачи линейного программирования (23) с нечёткими временными оценками

$$T = t_n - t_1 \to \min \tag{23}$$

при ограничениях на времена наступления событий

$$t_{j_s}-t_{i_s}\geqslant\tilde{\tau}_s;\ s=\overline{1,m}, \tag{24}$$

где t_{i_s} и t_{j_s} — времена наступления событий начала и окончания работы w_s соответственно. В результате решения данной задачи получается общее время выполнения проекта $\tilde{T}$ и совокупность критических операций $\mathbf{S}_1$.

Для решения задачи (23)–(24), в работе применяется преобразование L и методика двухточечных вычислений. Формулируется задача для произвольного α-уровня

$$\begin{cases} T(\alpha)=t_n-t_1\to\min \\ t_{j_s}-t_{i_s}\geqslant\bar{\tau}_s(\alpha,\lambda_s),\ \forall s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{25}$$

Результатом решения задачи (25) является вектор времён $t\ (\alpha)\ =\ \{t_0(\alpha),...,t_n(\alpha)\}$, который является календарным планом α-уровня, а также множество критических операций $S_1\,(\alpha)$. Нечеткость оценок $\tilde{\tau}_i$ обуславливает проблему устойчивости решений задачи (25) в смысле (20). Очевидно, что если на всех α-уровнях критический путь не изменяется и проходит по одним и тем же дугам, то решение устойчиво. В связи с этим в работе в качестве метрики сходства решений выбрана мощность симметрической разности двух множеств критических операций:

$$\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0;1];\ \alpha_1\neq\alpha_2\ S_1(\alpha_1)\Delta S_2(\alpha_2)=\varnothing, \tag{26}$$

Полученное при $\alpha=1$ решение задачи (25) даёт активные ограничения на критические операции. Для управления устойчивостью решения параметры λ необходимо включить в целевую функцию, подобно (22). В итоге при $\alpha=0$ решается видоизменённая задача

$$\begin{cases} T^*(\alpha,\lambda)=t_n-t_1+\gamma\sum\limits_{s=1}^{m}(\lambda_s^*-\lambda_s)^2\to\min; \\ t_{j_{s_1}}-t_{i_{s_1}}=\bar{\tau}_{s_1}(\alpha,\lambda_{s_1}),\ \forall s_1\in S_1(1); \\ t_{j_s}-t_{i_s}\geqslant\bar{\tau}_s(\alpha,\lambda_s),\ \forall s\notin S_1(1),s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{27}$$

В результате проведённого исследования предлагается следующий алгоритм решения задачи сетевого планирования с нечёткими временными оценками как задачи линейного программирования с возмущениями.

1. Решается невозмущённая задача (25) при $\alpha=1$. Ввиду свойства 1 преобразования L, это решение соответствует модифицированному решению $\langle T(1),t(1),S_1(1)\rangle$. Фиксируется множество операций $S_1(1)$, образующих критический путь.
2. Фиксируется критический путь при всех $\alpha\neq1$. Для этого в задаче (25) нестрогие неравенства меняются на равенства $\forall s_1\in S_1(1)$, т. е. выбранные операции всегда будут критическими. Данный шаг позволяет выполнить условие устойчивости задачи по решению (26).
3. Решается возмущённая задача (27) с изменённой целевой функцией. Результатом решения задачи является кортеж $\langle T(0),t(0),\lambda\rangle$, где λ — вектор параметров преобразования L.
4. Решение исходной задачи представляет из себя тройку $\left\langle\tilde{T},S_1,\lambda\right\rangle$. Функция принадлежности общего времени выполнения проекта $\tilde{T}$ восстанавливается по значениям $T(0)$ и $T(1)$, либо число $\tilde{T}$ оставляется в виде (5).

Предложенный алгоритм иллюстрируется на примере проекта, заданного таблицей 1.

Таблица 1. Оценки длительностей операций проекта и их взаимосвязи

Операция	*Предш. операции*	*a*	*m*	*b*	*Преобразование L*	λ^*
A	-	1	2	3	$\bar{\tau}_A(\alpha)=\lambda_A(1+\alpha)+(1-\lambda_A)(5-3\alpha)$	$1/4$
B	-	2	4	1	$\bar{\tau}_B(\alpha)=\lambda_B(2+2\alpha)+(1-\lambda_B)(5-\alpha)$	$2/3$
C	A	4	7	2	$\bar{\tau}_C(\alpha)=\lambda_C(3+4\alpha)+(1-\lambda_C)(9-2\alpha)$	$2/3$
D	B	2	6	3	$\bar{\tau}_D(\alpha)=\lambda_D(4+2\alpha)+(1-\lambda_D)(9-3\alpha)$	$2/5$
E	B	1	10	2	$\bar{\tau}_E(\alpha)=\lambda_E(9+\alpha)+(1-\lambda_E)(12-2\alpha)$	$1/3$
F	C	1	5	1	$\bar{\tau}_F(\alpha)=\lambda_F(4+\alpha)+(1-\lambda_F)(6-\alpha)$	$1/2$
G	D,E	4	5	1	$\bar{\tau}_G(\alpha)=\lambda_G(1+4\alpha)+(1-\lambda_G)(6-\alpha)$	$4/5$
H	F,G	2	4	3	$\bar{\tau}_H(\alpha)=\lambda_H(2+2\alpha)+(1-\lambda_H)(7-3\alpha)$	$2/5$

Для решения задачи использовалась надстройка «Поиск решения» в Microsoft Excel (рис. 2). При $\alpha=1$ решение задачи (25) привело к результату $T(1)=23$, $t(1)=\{0;7;4;14;14;14;19;23\}$, $S_1(1)=\{B,E,G,H\}$. При $\alpha=0$ решалась задача (27), которая при $\alpha=0$ приняла вид

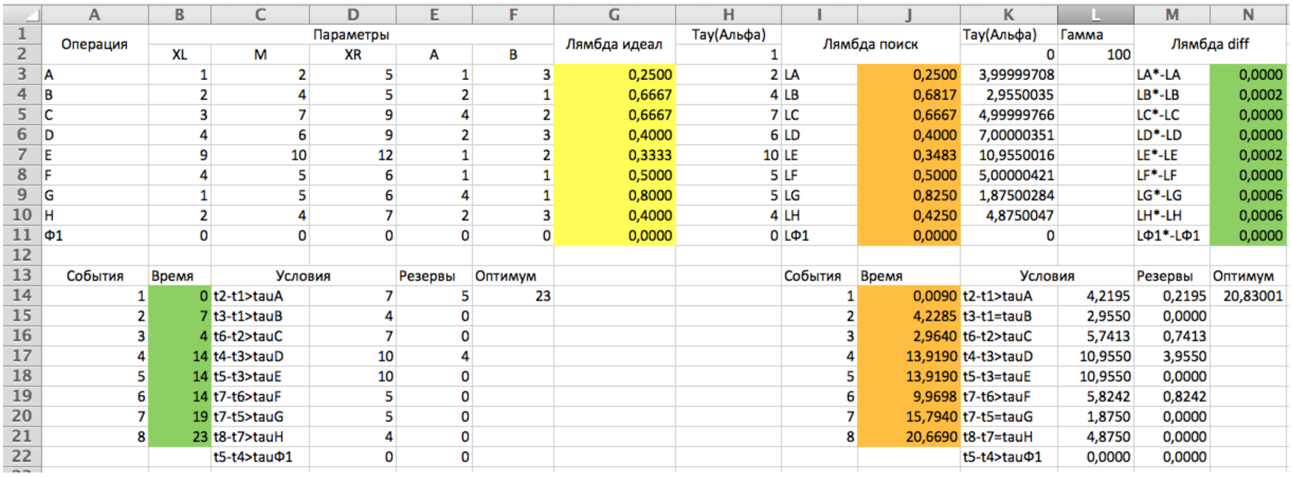
$$T(0)=t_8-t_1+\gamma\sum_{s=A}^{H}(\lambda_s^*-\lambda_s)^2\to\min \tag{28}$$

$$\begin{cases} t_2-t_1\geqslant 5-4\lambda_A \\ t_3-t_1=5-3\lambda_B \\ t_6-t_2\geqslant 9-6\lambda_C \\ t_4-t_3\geqslant 9-5\lambda_D \\ t_5-t_3=12-3\lambda_E \\ t_5-t_4\geqslant 0 \\ t_7-t_6\geqslant 6-2\lambda_F \\ t_7-t_5=6-5\lambda_G \\ t_8-t_7=7-5\lambda_H \end{cases} \tag{29}$$

Значение γ выбирается порядка 10, чтобы соответствовать максимальному значению τ_{max}. В результате решения задачи (28) при ограничениях (29) получается, что $T^*(0)=20,83$, $t(0)=\{0;\ 4{,}23;\ 2{,}96;\ 13{,}92;\ 13{,}92;\ 9{,}97;\ 15{,}79;\ 20{,}67\}$, $S_1(0)=\{B,E,G,H\}$, $\lambda=\{0{,}25;\ 0{,}68;\ 0{,}67;\ 0{,}4;\ 0{,}35;\ 0{,}5;\ 0{,}83;\ 0;43\}$.

На основании решений при $\alpha=1$ и $\alpha=0$ формируется окончательный результат: критический путь $S_1=\{B,E,G,H\}$, нечёткое время выполнения $T(\alpha)=20{,}67+2{,}33\alpha$.

В **четвертой главе** рассмотрено применение методов, представленных в диссертации, для усовершенствования процесса предварительного планирования проек-



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Операция	Параметры					Лямбда идеал	Тау(Альфа)	Лямбда поиск		Тау(Альфа)	Гамма	Лямбда diff	
2		XL	M	XR	A	B		1			0	100		
3	A	1	2	5	1	3	0,2500	2	LA	0,2500	3,99999708		LA*-LA	0,0000
4	B	2	4	5	2	1	0,6667	4	LB	0,6817	2,9550035		LB*-LB	0,0002
5	C	3	7	9	4	2	0,6667	7	LC	0,6667	4,99999766		LC*-LC	0,0000
6	D	4	6	9	2	3	0,4000	6	LD	0,4000	7,00000351		LD*-LD	0,0000
7	E	9	10	12	1	2	0,3333	10	LE	0,3483	10,9550016		LE*-LE	0,0002
8	F	4	5	6	1	1	0,5000	5	LF	0,5000	5,00000421		LF*-LF	0,0000
9	G	1	5	6	4	1	0,8000	5	LG	0,8250	1,87500284		LG*-LG	0,0006
10	H	2	4	7	2	3	0,4000	4	LH	0,4250	4,8750047		LH*-LH	0,0006
11	Ф1	0	0	0	0	0	0,0000	0	LФ1	0,0000	0		LФ1*-LФ1	0,0000
12														
13	События	Время	Условия		Резервы	Оптимум			События	Время	Условия		Резервы	Оптимум
14	1	0	t2-t1>tauA	7	5	23			1	0,0090	t2-t1>tauA	4,2195	0,2195	20,83001
15	2	7	t3-t1>tauB	4	0				2	4,2285	t3-t1=tauB	2,9550	0,0000	
16	3	4	t6-t2>tauC	7	0				3	2,9640	t6-t2>tauC	5,7413	0,7413	
17	4	14	t4-t3>tauD	10	4				4	13,9190	t4-t3>tauD	10,9550	3,9550	
18	5	14	t5-t3>tauE	10	0				5	13,9190	t5-t3=tauE	10,9550	0,0000	
19	6	14	t7-t6>tauF	5	0				6	9,9698	t7-t6>tauF	5,8242	0,8242	
20	7	19	t7-t5>tauG	5	0				7	15,7940	t7-t5=tauG	1,8750	0,0000	
21	8	23	t8-t7>tauH	4	0				8	20,6690	t8-t7=tauH	4,8750	0,0000	
22			t5-t4>tauФ1	0	0						t5-t4>tauФ1	0,0000	0,0000	

Рис. 2. Решение задачи сетевого планирования в Microsoft Excel

тов по разработке программного обеспечения. Отличительной особенностью таких проектов является наличие нечёткой неопределённости сроков выполнения операций, обусловленной внешними факторами.

В качестве средства разработки применяется интегрированная среда Microsoft Visual Studio 2010. Особенностью разработанного программного продукта «CSBusinessGraph» является то, что он не использует никаких специализированных средств и третьесторонних библиотек для представления нечётких чисели выполняет все вычисления только с использованием действительных переменных.

К основным *функциональным возможностям* программного продукта относятся: создание модели проекта в виде вершинного графа в ручном режиме или импорт существующей модели из XML-файла; поддержка модели проекта в согласованном состоянии — проверка отсутствия циклов в графе и наличие только одной компоненты связности; формирование временных оценок выполнения операций, выраженных в виде треугольных чисел; автоматическое преобразование вершинного графа в стрелочный; реализация механизма расчёта критического пути на основе α-уровневых и двухточечных вычислений с применением выбранного пользователем вида значений параметров λ преобразования L; экспорт отчёта о решении задачи в формат Microsoft Excel с формированием графиков для модифицированных нечётких оценок, общего времени выполнения проекта и построением стрелочного графа с выделением критических операций.

На рис. 3 изображено главное окно приложения с открытым в нём проектом.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Основные результаты работы

1. Разработана и исследована модель представления нечётких числовых параметров математического описания объектов в классе треугольных LR-чисел, обеспечивающая возможность построения алгебраической структуры нечётких чисел, сохраняющей требуемые свойства решения задач выбора: ограничение роста неопределённости, сохранение истинности млдельных отношений и возможность интерпретации полученного результата.

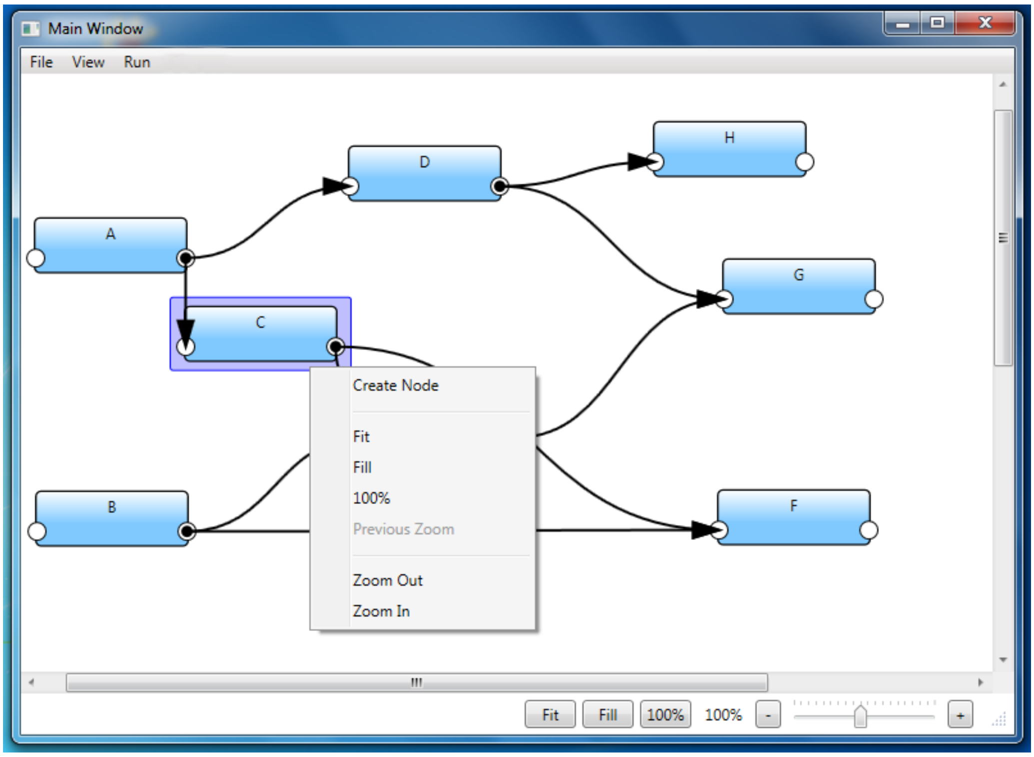


Рис. 3. Главное окно приложения

2. Разработан метод приближённого численного решения задач выбора с нечёткими параметрами, инвариантный к форме математического описания задачи, позволяющий строить нечёткое решение задач как линейную комбинацию чётких решений, полученных на границах интервального представления параметров, снизить вычислительную сложность процесса получения решения и применять стандартные программные продукты для нечётких вычислений.
3. Предложенные методы решения задач выбора с нечёткими параметрами апробированы на задаче сетевого планирования с нечёткими временными оценками. В процессе апробации рассмотрена проблема устойчивости критического пути, обосновано введение свёртки критериев для управления устойчивостью и сформулирован алгоритм, обеспечивающий получение устойчивого решения задачи. Достоверность полученного решения подтверждается его сравнением с решениями, найденным с помощью других методов, хорошо зарекомендовавших себя в мировой практике.
4. Разработан программный комплекс, позволяющий решать задачу оценки сроков при разработке программного обеспечения как задачу сетевого планирования с нечёткими временными оценками и обеспечивающий учёт возможных рисков, возникающих при разработке программного обеспечения. Практическая ценность коплекса подтверждается актом о внедрении.

Основные публикации по теме диссертации

1. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Информационные технологии управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и

математического моделирования: материалы V международной конференции. Воронеж, 11-16 сентября 2012 г. Дополнительный выпуск. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 8–10.

2. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Разработка информационных технологий и средства управления проектами в условиях расплывчатой неопределённости // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ / Под ред. к.ф.-м.н. Е. А. Сирота. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — С. 30–35.
3. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Влияние преобразования L на результаты арифметических операций с нечёткими LR-числами // Сборник трудов XXII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 18–24 сентября 2013 г. — М. : Изд-во МГУПИ, 2013. — С. 14–15.
4. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Исследование свойств линейного отображения в задачах с нечёткими параметрами // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIII научно-методической конференции. 7–8 февраля 2013 г.: в 4 т. — Т. 1. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013. — С. 298–304.
5. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L // Программная инженерия. — 2014. — № 8. — С. 23–29.
6. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Методы параметризованного сравнения нечётких треугольных и трапециевидных чисел // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 90–97.
7. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Постановка задачи об устойчивости альфа-уровневого метода поиска нечёткого критического пути // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIV Международной научно-методической конференции, Воронеж, 6–8 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — С. 360–363.
8. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Способ решения нечёткой задачи КСПУ с использованием преобразования L // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: двадцатая международная научно–техническая конференция студентов и аспирантов: тезисы докладов. Москва, 27–28 февраля 2014 г.: в 4 т. — Т. 2. — М. : Издательский дом МЭИ, 2014. — С. 58.
9. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость критического пути в задаче сетевого планирования с нечёткими параметрами // Сборник трудов XXIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 14–20 сентября 2014 г. — М. : ИКД «Зерцало-М», 2014. — С. 73–74.
10. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г. Устойчивость решения в задаче о критическом пути с нечёткими параметрами // Вестник ВГТУ. — 2014. — Т. 10, № 6. — С. 40–43.
11. Воронцов Я. А., Матвеев М. Г., Канищева О. И. Арифметические операции над двухкомпонентными нечёткими числами // Вестник ВГУ, серия «Системный анализ и информационные технологии». — 2014. — № 2. — С. 75–82.

Работы [5, 6, 10, 11] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.