

На правах рукописи



**ПОПОВ МИХАИЛ ИВАНОВИЧ**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ  
ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В  
КОНДУКТИВНО-ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ**

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена на кафедре высшей математики ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор **Ряжских Виктор Иванович**

Официальные оппоненты: **Костин Владимир Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», кафедра математического моделирования, заведующий

**Постников Евгений Борисович**, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Курский государственный университет», кафедра физики и нанотехнологий, профессор

Ведущая организация: Тверской государственный технический университет (г. Тверь)

Защита состоится 20 мая 2015 г. в 17:00 на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д.1., ауд. 333

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», полный текст размещен по адресу <http://www.science.vsu.ru>.

Автореферат разослан «\_\_\_» марта 2015 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
кандидат  
физико-математических  
наук, доцент



Шабров Сергей Александрович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Исследование явлений переноса в технических системах предметного назначения, таких как охладительные контуры тепловыделяющих элементов в атомной энергетике, резервуары хранения сжиженных газов в криогенной технике, производственные реакторы химического и пищевого производства при термической обработке жидких субстанций напрямую связано с моделированием свободной конвекции как одного из основных механизмов переноса тепла и массы. Наибольший интерес в этой связи представляет моделирование кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции во внутренних задачах, так как чувствительность современной контрольно-измерительной аппаратуры не позволяет с достаточной степенью точности определять гидротермические характеристики процесса. Таким образом, вычислительный эксперимент является основным источником выявления закономерностей. Существует два подхода к решению данной проблемы. При первом из них используется полная система уравнений Обербека-Буссинеска при малых числах Грасгофа, но в силу остающейся нелинейности уравнений, анализ такой модели затруднен. Во втором, уравнения линеаризуются за счет пренебрежения конвективными слагаемыми, что отвечает физическому смыслу для очень медленных течений. Преимущества такого подхода в линейности получаемых уравнений, что позволяет применять классический математический аппарат для их решения. В рамках этих представлений математическая формализация внутренних задач кондуктивного режима свободной конвекции приводит к краевым задачам для уравнений в частных производных четвертого порядка относительно функции тока, которые по постановкам аналогичны задачам теории пластин и оболочек. К настоящему времени данный подход уже позволил получить ряд точных решений задач о свободной конвекции у бесконечной вертикальной стенки, в плоском вертикальном канале и в прямоугольной камере с отношением высоты к ширине намного больше единицы, а также приближенные аналитические решения для ряда внутренних задач кондуктивно-ламинарного режима свободной конвекции. Однако остается неясным насколько полученные решения соответствуют реальным процессам.

Диссертационная работа выполнялась в соответствии с планом научно-исследовательских работ Воронежского государственного университета инженерных технологий по теме «Дифференциальные и интегральные уравнения математических моделей естественных и прикладных наук» (№ г. р. 0020543).

**Цель работы:** разработка аналитических и численных методов исследования математической модели кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в замкнутых объемах на основе интегральных преобразований и конечно-разностных схем.

Для достижения цели поставлены **задачи:**

1) проанализировать математическую модель внутренней задачи свободной конвекции для кондуктивно-ламинарного режима, основанную на линеаризации уравнений Обербека-Буссинеска;

2) на примере прямоугольной области получить приближенное аналитическое решение задачи в нестационарной постановке;

3) разработать конечно-разностные схемы численного интегрирования для стационарной и нестационарной постановок в прямоугольных областях, методами функционального анализа показать их устойчивость и сходимость к точному решению задачи;

4) разработать комплекс предметно-ориентированных программ, реализующих решения задач, и с их помощью провести вычислительные эксперименты по определению стационарных и нестационарных гидродинамических полей;

5) на основании данных вычислительных экспериментов сравнить численные и аналитические решения, выявить наиболее эффективные подходы к решению.

**Методы исследования.** В ходе выполнения исследования были использованы методы математического моделирования явлений переноса, теоретической гидродинамики, теории дифференциальных уравнений математической физики, функционального анализа, вычислительной математики и программирования.

**Тематика работы** соответствует пункту 2 “Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей”, пункту 3 “Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий”, пункту 4 “Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента” паспорта специальности 05.13.18 – “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”.

**Достоверность и обоснованность полученных результатов** основывается на использовании законов явлений тепломассопереноса, на проведении вычислительных экспериментов и сравнительном анализе с классическими данными.

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие результаты характеризующиеся новизной:

1. Приближенное аналитическое решение задачи нестационарной кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в прямоугольной области, позволяющее описывать возникновение и развитие течения, которое отличается от известных возможностью идентификации основных гидротермических характеристик в явном виде.

2. Явная итерационная и полунявная двухслойная конечно-разностные схемы численного интегрирования соответственно стационарных и нестационарных постановок задач кондуктивно-ламинарной свободной

конвекции с модификацией способа весового перераспределения невязки по смоченной поверхности, что позволяет упростить процедуру вычисления за счет снижения размерности сеточных уравнений.

3. Теоретические оценки способа дискретизации области интегрирования, обеспечивающие условия сходимости и устойчивости вычислительной процедуры, отличающиеся возможностью рационального выбора дискретных шагов интегрирования с наибольшей скоростью сходимости.

4. Структура предметно-ориентированного программного комплекса, отличающаяся комбинированием численного и приближенного аналитического подходов, позволяющая оптимизировать вычислительный процесс.

**Практическая значимость** состоит в разработке предметно-ориентированного программного комплекса, который позволяет рассчитывать гидротермические характеристики даже на грубых сетках с достаточной степенью точности, имеет высокую скорость сходимости и устойчив, что существенно рационализирует проведение вычислительных экспериментов.

**Реализация и внедрение результатов.** Результаты диссертационного исследования используются в учебном процессе ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет инженерных технологий» при чтении курса «Математическое моделирование» для демонстрации применения эффективных численных схем в анализе явлений переноса.

**Апробация.** Результаты диссертационной работы докладывались на научных конференциях и семинарах. Среди них «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2011), V международная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (Воронеж, 2011), IV международная конференция для молодых математиков по дифференциальным уравнениям и их приложениям, посвященная Я. Б. Лопатинскому (Донецк, 2012), «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXIII и XXIV» (Воронеж, 2012, 2013).

**Публикации.** Основные положения диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 3 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, в том числе зарегистрированная программа для ЭВМ. В работах, опубликованных в соавторстве и приведенных ниже, лично соискателем предложены: в [1] – построение конечно-разностной схемы, получение теоретических оценок для выбора оптимального итерационного шага, разработка программы для вычислительного эксперимента, реализация и анализ вычислительного эксперимента, [2] – разработка численной схемы, доказательство ее сходимости и устойчивости, реализация и анализ вычислительного эксперимента, теоретическое обоснование метода перераспределения невязки, [4] – вывод уравнений деформации, выбор вспомогательных параметров, [5] – организация и проведение

вычислительной процедуры, [6] – расчет гидродинамических полей, [8] – обобщение задачи на прямоугольную область, [9] – реализация метода конечного интегрального синус-преобразования Фурье, способы определения неизвестных коэффициентов.

**Структура и объем.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка литературы и приложения. Материал изложен на 116 страницах и содержит 25 рисунков и 8 таблиц.

### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна и ее практическая значимость.

**В первой главе** проанализировано современное состояние проблемы математического моделирования внутренних задач свободной конвекции в кондуктивно-ламинарном режиме. Рассмотрена математическая модель, базирующаяся на уравнениях Обербека-Буссинеска

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \bar{v} - \bar{g} \beta t,$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \bar{v} \nabla t = a \Delta t,$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0,$$

где  $\bar{v}$ ,  $\bar{g}$  - векторы скорости и ускорения силы тяжести;  $p$  - давление;  $\tau$  - текущее время;  $\rho_0$  - плотность среды в невозмущенном состоянии;  $a$ ,  $\nu$ ,  $\beta$  - коэффициенты температуропроводности, кинематической вязкости и объемного расширения жидкости;  $\nabla$ ,  $\Delta$  - дифференциальные операторы "набла" и Лапласа.

Простейшей геометрией, для которой удалось получить аналитическое решение задачи свободной конвекции, является вертикальная бесконечная пластина. Так же известно решение Польгаузена у вертикальной полуограниченной пластины. Получены аналитические решения в плоском вертикальном канале (Aung W.) и в прямоугольной каверне с отношением высоты к ширине намного больше единицы (Моргунов К.П.).

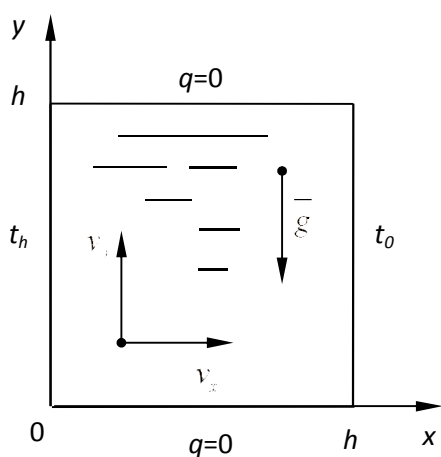


Рис. 1. Расчетная схема

**Во второй главе** получены приближенные аналитические выражения для функции тока в нестационарной задаче о кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в квадратной каверне.

Пусть имеется квадратная плоская область (рис. 2.1), полностью заполненная вязкой несжимаемой жидкостью, в начальный момент находящейся в состоянии покоя с температурой  $t_0$ . Далее, например, температура левой стороны области скачком изменяется до температуры  $t_h$ , при этом

верхнее и нижнее основания теплоизолированы, т.е. тепловой поток отсутствует  $q=0$ , а температура правой стенки остаётся равной первоначальной температуре жидкости ( $t_h > t_0$ ).

В соответствии с физической постановкой и на основе системы Обербека–Буссинеска уравнения математической модели для последующего анализа таковы

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \beta g t, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} &= a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Далее применена физическая линеаризация (в кондуктивно-ламинарном режиме конвективные слагаемые нивелируются вследствие малых скоростей  $v_x \approx 0, v_y \approx 0$ )

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \beta g t, \quad (2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Приведем систему (1)–(4) к безразмерному виду для сокращения числа параметров путем введения относительных величин  $\theta = \tau/\bar{\tau}$ ,  $X = x/h$ ,

$Y = y/h$ ,  $V_x = v_x/\bar{v}$ ,  $V_y = v_y/\bar{v}$ ,  $P = p/\bar{p}$ ,  $T = (t - t_0)/(t_h - t_0)$ ,  $\bar{\tau} = \frac{h^2}{\nu}$ ,  $\bar{v} = \frac{\nu}{h}$ ,

$$\bar{p} = \rho \frac{\nu^2}{h^2}.$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} - \text{Gr} T, \quad (6)$$

где  $\text{Gr} = \frac{h^3}{\nu^2} \beta g (t_h - t_0)$  - число Грасгофа.

Чтобы избавиться от давления сначала продифференцируем уравнение (5) по  $Y$  и умножим на  $-1$ , а уравнение (6) по  $X$ , а затем сложим полученные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) - Gr \frac{\partial T}{\partial X}.$$

Обозначим через  $\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y}$  - безразмерный вихрь, тогда

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} - Gr \frac{\partial T}{\partial X}, \quad (7)$$

Уравнение неразрывности (4) в безразмерных переменных примет вид  $\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0$ . Введем функцию тока  $\Psi$ :  $V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}$ ,  $V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}$ . Тогда

$\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}$ . Уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} - (-Gr) \frac{\partial T}{\partial X}.$$

Введя переменную  $\Phi = -\frac{\Psi}{Gr}$ , получим уравнение, не содержащее параметр  $Gr$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} - \frac{\partial T}{\partial X}. \quad (8)$$

Перепишем уравнение (3) в безразмерных переменных

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right), \quad (9)$$

где  $Pr$  – число Прандтля.

Поскольку в начальный момент жидкость находилась в состоянии покоя и имела всюду одинаковую температуру  $t_0$ , то

$$\Phi(X, Y, 0) = 0, \quad (10)$$

$$T(X, Y, 0) = 0. \quad (11)$$

Далее, т.к. температура левой стороны области скачком изменяется до температуры  $t_h$ , а температура правой стенки остаётся равной первоначальной температуре жидкости  $t_0$ , граничные условия для температуры примут вид

$$T(0, Y, \theta) = 1, \quad T(1, Y, \theta) = 0. \quad (12)$$

Условие непротекания жидкости через границу выражается уравнением

$$\Phi(0, Y, \theta) = \Phi(1, Y, \theta) = \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, 1, \theta) = 0, \quad (13)$$

условие прилипания



$$\frac{\partial\Phi(0,Y,\theta)}{\partial X} = \frac{\partial\Phi(1,Y,\theta)}{\partial X} = \frac{\partial\Phi(X,0,\theta)}{\partial Y} = \frac{\partial\Phi(X,1,\theta)}{\partial Y} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, система уравнений (1)–(4) путем обезразмеривания и перехода к переменным «вихрь-функция тока», свелась к несопряженной системе уравнений (8) и (9) с начальными условиями (10)–(11) и граничными условиями (12)–(14).

Поскольку система уравнений (8)–(14) носит несопряженный характер, она декомпозируется на две последовательно решаемые задачи: тепловую – (9), (11), (12), и гидродинамическую – (8), (10), (13), (14).

Решение тепловой задачи известно

$$T(X,Y,\theta) = 1 - X + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sin[(1-X)\pi p] \exp\left(-\frac{\pi^2 p^2}{Pr} \theta\right), \quad (15)$$

Двойным применением конечного интегрального синус преобразования Фурье по пространственным переменным получено аналитическое представление функции тока в виде

$$\begin{aligned} \Phi(X,Y,\theta) = & 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)]}{\lambda^2 + \mu^2} \left\langle \int_0^{\theta} [\lambda \cos \lambda A_Y(\mu, z) - \lambda B_Y(\mu, z) + \right. \\ & \left. + \mu \cos \mu C(\lambda, z) - \mu D(\lambda, z)] \exp[\theta(\lambda^2 + \mu^2)] dz + \right. \\ & \left. \frac{\cos \mu - 1}{\mu} \frac{(\cos \lambda - 1) \{ \exp[\theta(\lambda^2 + \mu^2)] - 1 \}}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2)} + \right. \\ & \left. + 2 Pr \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{[\cos \lambda - \cos(\pi p)] \{ \exp[-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr} + \theta(\lambda^2 + \mu^2)] - 1 \}}{(\pi^2 p^2 - \lambda^2) [\pi^2 p^2 - Pr(\lambda^2 + \mu^2)]} \right\rangle \cdot \\ & \cdot \sin(\lambda X) \sin(\mu Y). \end{aligned} \quad (16)$$

Для интегралов от неизвестных коэффициентов  $A_Y(\mu, z), B_Y(\mu, z), C(\lambda, z), D(\lambda, z)$  принята гипотеза асимптотического приближения к стационарному состоянию. Коэффициенты находятся из системы линейных уравнений, составленной по граничному условию на градиент функции. Достоверность принятой гипотезы подтверждена согласованностью результатов с численным решением данной задачи.

**Третья глава** посвящена построению явной итерационной и полунявной двухслойной конечно-разностных схем численного интегрирования стационарной и нестационарной задач о кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в квадрате и прямоугольнике.

Математическая формулировка стационарной задачи в квадрате сводится к неоднородному бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \Phi(X,Y)}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(X,Y)}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(X,Y)}{\partial Y^4} = -1$$

с граничными условиями

$$\Phi(0, Y) = \Phi(1, Y) = \Phi(X, 0) = \Phi(X, 1) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(0, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, 1)}{\partial Y} = 0.$$

С помощью метода установления разработана маршевая конечно-разностная схема по фиктивной переменной  $\theta$  (аналог времени)

$$\frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\tau} + B\Phi_k = -1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \Phi_0 = 0. \quad (17)$$

Область решения разбита равномерной сеткой  $\bar{\omega}_h$ . На множестве сеточных функций введено гильбертово пространство  $H_h$  со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=2}^{m-2} u_{i,j} v_{i,j} h^2 \text{ и нормами } \|u\|_1 = \max_{i,j} |u_{i,j}|, \quad \|u\|_2 = \left( \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=2}^{m-2} u_{i,j}^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вычислена погрешность аппроксимации  $|\varepsilon| = M_1 h^2 + M_2 h^4$ .

**Теорема 1.** *Оператор  $B$  положительно определенный.*

Вычислена норма оператора перехода и оптимальный итерационный шаг

$$\|S\|_3 = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \rho_0, \quad \tau = \tau_0 = \frac{2h^4}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}, \text{ где } \lambda_{\max}, \lambda_{\min} - \text{максимальное и}$$

минимальное собственные значения оператора  $\tilde{B} = h^4 B$ . Доказаны устойчивость схемы и ее сходимость к точному решению задачи. На рис. 2 приведены поле функции тока и ее профиль в сечении  $Y = 0.5$ .

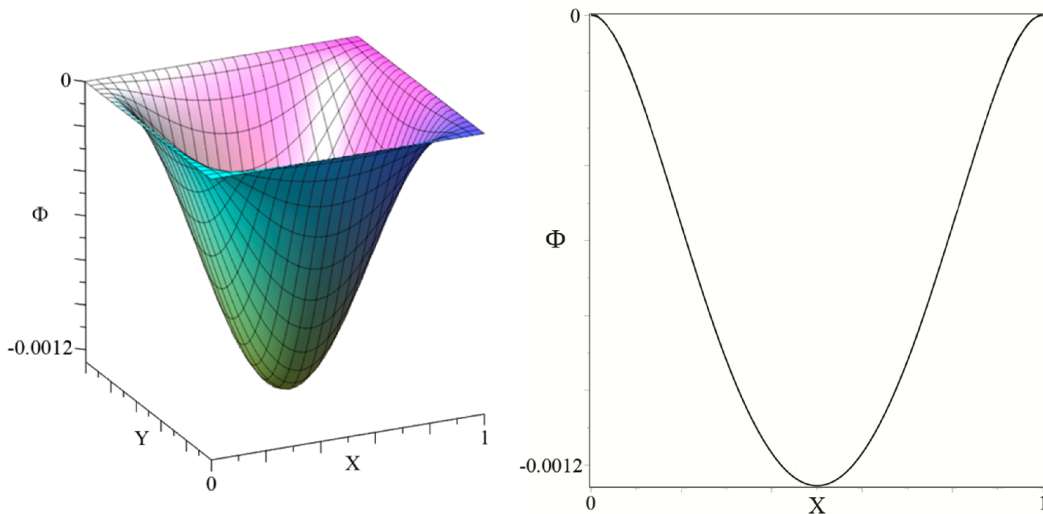


Рис. 2. Функция тока и ее профиль в сечении  $Y = 0.5$ .

Для системы (8), (10), (13)-(15) построена явная по времени и неявная по координатам конечно-разностная схема, каноническая форма которой

$$C \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\tau} + B\Phi_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \Phi_0 = 0. \quad (18)$$

Аналогично стационарному случаю вводится гильбертово пространство  $H_h$

**Теорема 2.** *Оператор  $C$  положительно определенный.*

Вычислена норма оператора перехода и оптимальный итерационный шаг

$\|S\|_3 = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} = \rho_0$ ,  $\tau = \tau_0 = \frac{2h^2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$ , где  $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$  – максимальное и минимальное собственные значения оператора  $\tilde{C}^{-1}\tilde{B} = h^2 C^{-1}B$ . Вычислена погрешность аппроксимации  $|\varepsilon| \leq M_0 h^4 + M_1 h^2$ .

**Теорема 3.** Для устойчивости схемы (18) достаточно, чтобы выполнялось условие для разрешающего оператора  $T_{n,j} = S_{n-1}S_{n-2}\dots S_j$ :

$$\|T_{n,j}\| \leq M \quad \forall 0 \leq j \leq n.$$

при этом верна априорная оценка

$$\|\Phi_{k+1}\| \leq M \left( \|\Phi_0\| + \sum_{j=0}^k \tau \|C_j^{-1}\varphi_j\| \right).$$

**Теорема 4.** Если:

- 1) решение краевой задачи (8), (10), (13)-(15) существует в некотором классе функций,
- 2) разностная задача (18) аппроксимирует краевую (8), (10), (13)-(15) на классе решения,
- 3) разностная задача (18) корректна, то:  
при  $h \rightarrow 0$  решение  $\Phi_h$  разностного уравнения стремится к решению  $\Phi$  дифференциального уравнения, т.е.  $\|\Phi - \Phi_h\|_{H_h} \rightarrow 0$ .

Теоремы 3 и 4 обеспечивают устойчивость схемы и ее сходимость к точному решению. Показано, что при  $\theta \rightarrow \infty$  решение сходится к решению стационарной задачи.

Численные схемы и модифицированы с помощью весового перераспределения невязки по граничному условию "прилипания" на смоченной поверхности в теле процедуры вычисления функции тока вместо необходимости постановки сеточного граничного условия для функции вихря. В расширенном гильбертовом пространстве  $\tilde{H}_h$  доказаны устойчивость и сходимость полученных схем.

Для системы (8), (10), (15) рассмотренной в прямоугольнике с граничными условиями

$$\begin{aligned} \Phi(0, Y, \theta) = \Phi(1, Y, \theta) = \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, \xi, \theta) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0, \theta)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, \xi, \theta)}{\partial Y} = 0, \end{aligned}$$

где  $\xi$  - отношение сторон прямоугольника, аналогично построена конечно-разностная схема. Доказаны ее устойчивость и сходимость.

**В четвертой главе** проведен анализ численного и аналитического решения стационарной и нестационарной задачи с целью установления эффективности развиваемого подхода.

На рис. 3 показано изменение функции тока при уменьшении шага сетки области:  $h = 0.1$  – сплошная линия,  $h = 0.05$  – штрих-пунктир,  $h = 0.02$  – штриховая. Как видно, при уменьшении шага сетки значение в центральной

точке области сначала резко увеличивается по модулю, а затем практически не меняется, что свидетельствует о быстрой сходимости численной схемы.

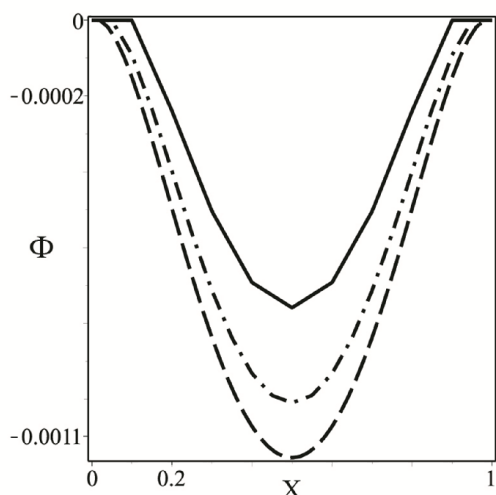


Рис. 3. Профили функции тока при изменении сеточного шага.

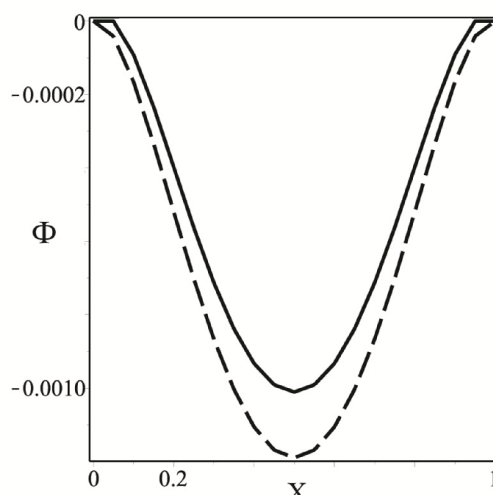


Рис. 4. Профили функции тока при различной точности аппроксимации граничных условий.

На рис. 4. сплошной изображены профили при  $h = 0.05$ : сплошная линия – точность аппроксимации граничных условий  $O(h)$ , штриховая – точность  $O(h^2)$ . По рис. 3 и 4 видно, что решение точности  $O(h)$  при  $h = 0.02$  практически совпадает с решением точности  $O(h^2)$  при  $h = 0.05$ , что говорит об ускорении сходимости с увеличением точности решения.

На рис. 5 изображены численное (при  $h = 0.04$ ) – штриховая линия и аналитическое (при  $K = 51$ , предельное значение индексов суммирования в (16)) – пунктир решения. Как видно, они незначительно отличаются лишь в центральной точке и приграничных областях, что подтверждает корректность предложенного подхода.

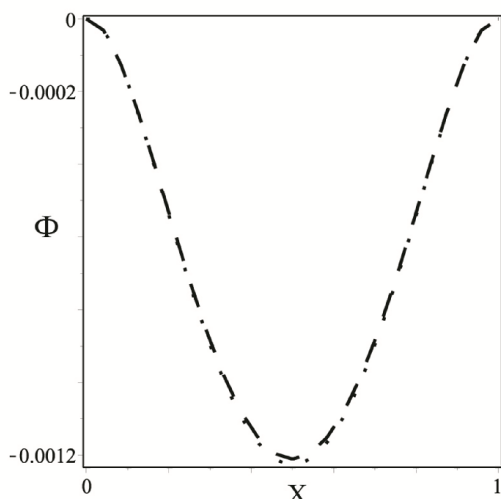


Рис. 5. Сравнение численного и аналитического решений

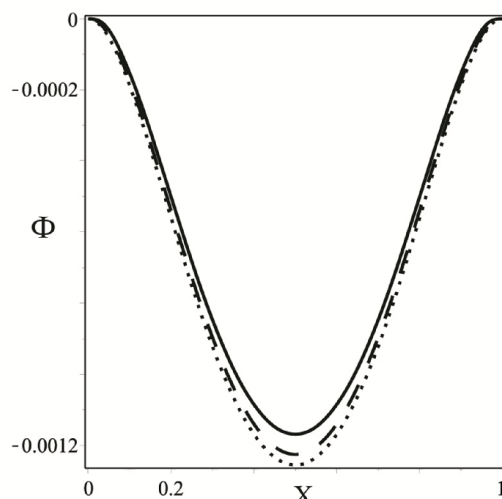


Рис. 6. Сравнение аналитических решений.

Из рис. 6 видно, что значения функции тока практически не меняются при увеличении слагаемых в приближенном аналитическом решении:

сплошная линия соответствует индексу суммирования  $K = 21$ , штриховая –  $K = 51$  и пунктир –  $K = 201$ .

На рис. 6 показано изменение профиля функции тока при уменьшении шага сетки области при  $\theta = 0.01$ :  $h = 0.1$  – сплошная линия,  $h = 0.05$  – штриховая,  $h = 0.02$  – штрих-пунктир. Максимальное по модулю значение функции тока ведет себя также как и в стационарном случае, смещаясь к нагретой стенке, то есть течение возникает у границы.

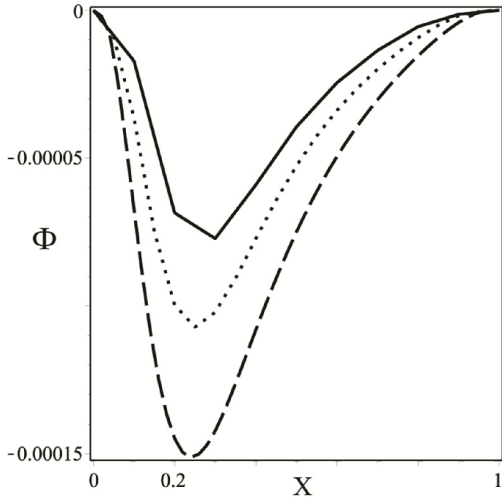


Рис. 7. Профили функции тока при изменении сеточного шага.

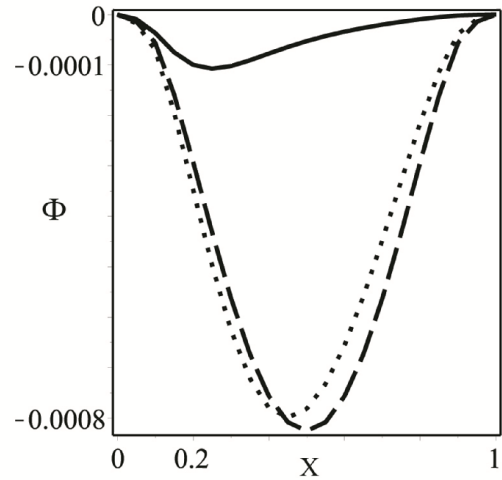


Рис. 8. Изменение функции тока во времени.

Рис. 8. отражает изменение функции тока во времени при  $h = 0.05$ : сплошная – время течения  $\theta = 0.01$ , пунктир –  $\theta = 0.1$ , штриховая –  $\theta = 1$ .

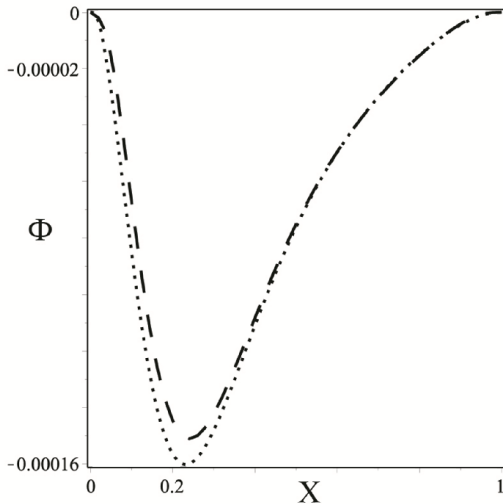


Рис. 9. Сравнение численного и аналитического решений.

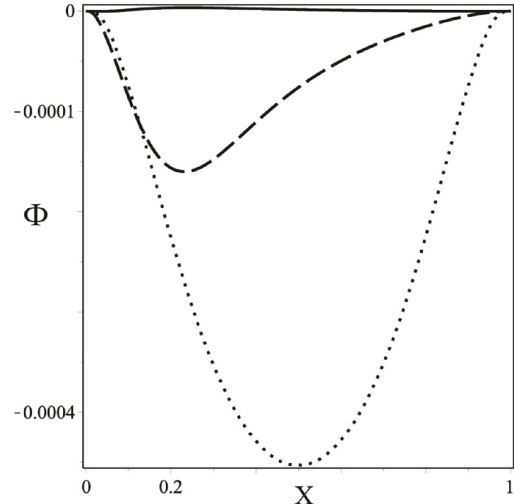


Рис. 10. Зависимость аналитического решения от числа Прандтля.

Течение развивается, смещаясь к центру области, и постепенно переходит в стационарный режим.

На рис. 9 штриховая линия изображает численное решение при  $h = 0.02$  и  $\theta = 0.01$ , а пунктир – аналитическое при  $K = 51$  и  $\theta = 0.01$ . Аналогично стационарному случаю, есть незначительное отличие в точке минимума, а также возле нагретой стенки.

На рис. 10 изображена зависимость профиля функции тока от числа Прандтля для аналитического решения при  $K = 51$  и  $\theta = 0.01$ : сплошная –  $Pr = 100$ , штриховая –  $Pr = 1$ , пунктир –  $Pr = 0.01$ . Как видно, с уменьшением числа Прандтля интенсивность течения возрастает, а при очень больших числах возникает инверсия течения.

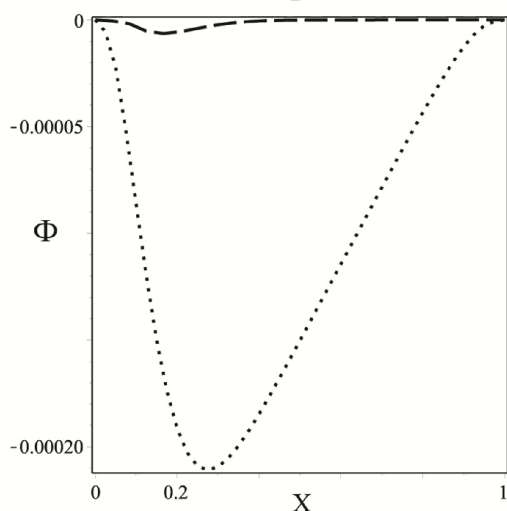


Рис. 11. Зависимость численного решения от отношения длины горячей стенки к теплоизолированной  $\xi$ .

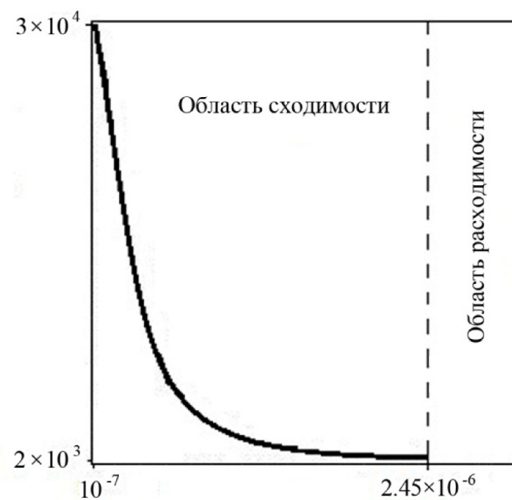


Рис. 12. Зависимость числа итераций от выбора итерационного шага.

Рис. 11 показывает, что увеличение длины нагретой стенки по отношению к теплоизолированной приводит к повышению интенсивности течения и сокращению времени перехода течения в стационарное состояние: штриховая линия –  $\xi = 0.2$ , пунктир –  $\xi = 5$ .

Сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента при различных шагах сетки с приближенным аналитическим решением (см. рис. 1 – рис.11) показал, что предложенные конечно-разностные схемы (17) и (18) обладают следующими свойствами:

1) объем расчетов по этим схемам может быть осуществлен на грубых сетках без существенной потери точности вычислений;

2) в зависимости от выбора шагов интегрирования по геометрическим координатам, согласно теоремам 1 и 2, могут быть определены границы между областями сходимости и расходимости (например, при  $h = 0.1$  граница области в стационарной задаче есть  $2.45 \cdot 10^{-6}$ , рис 12), что позволяет сократить затраты машинного времени за счет уменьшения числа итераций с одновременным достижением заданной точности вычислений.

В этом смысле предложенные вычислительные схемы являются более эффективными, чем классические маршевые схемы, реализуемые с помощью сеточных уравнений большей размерности. Кроме того гибридное применение вычислительных схем и приближенного аналитического решения позволяет снивелировать проблему идентификации искомых гидротермических полей вне сеточных узлов без потери физического смысла рассматриваемых задач.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Анализ математической модели внутренних задач свободной конвекции в кондуктивно-ламинарном режиме, основанной на линеаризованных уравнениях Обербека-Буссинеска без учета конвективных слагаемых в уравнениях переноса импульса и теплоты, показал ее адекватность, что дает преимущество, заключающееся в возможности использования классических методов при получении аналитических решений, описывающих гидротермическую структуру течений.

2. Получены приближенные аналитические решения в квадратной и прямоугольной областях, согласующиеся как с численными решениями, так и с известными данными.

3. Для стационарной и нестационарной постановок разработаны конечно-разностные схемы численного интегрирования. Методами функционального анализа получены оценки численного решения, определены оптимальные условия сходимости, доказаны устойчивость и сходимость полученных схем к точному решению задачи в гильбертовом пространстве сеточных функций.

4. Разработанный предметно-ориентированный программный комплекс позволяет рассчитывать гидротермические характеристики даже на грубых сетках с достаточной степенью точности, имеет высокую скорость сходимости и устойчив, что существенно рационализирует проведение вычислительных экспериментов.

5. Анализ результатов вычислительных экспериментов позволил установить некоторые закономерности при формировании гидротермической структуры свободноконвективных течений, такие как инверсия поля скоростей в момент образования течения, а также сформировать эффективные подходы к решению подобных задач.

### **Основные результаты диссертации отражены в следующих публикациях:**

*публикации в изданиях рекомендованных ВАК РФ*

1. Ряжских В. И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области / Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. – 2013. – вып. 1. – С. 52-62.

2. Ряжских В.И. О численном интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в задачах кондуктивной свободной конвекции / Ряжских В.И., Попов М.И. // Вестник Воронежского государственного технического университета, 2014, т.10, № 1, С. 56–62.

*Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ*

3. Попов М.И. Идентификация нестационарного гидродинамического поля во внутренних задачах кондуктивно-ламинарной свободной конвекции на примере квадратной каверны / Попов М.И. - Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013615004 от 9.04.2013. – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2013.

### *Статьи и материалы конференций*

4. Ряжских В.И. О применимости метода гомотопного анализа к решению внутренних задач свободной конвекции / Ряжских В.И., Попов М.И. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: изд-во Воронеж гос. ун-та, 2011. – С. 295-296.

5. Ряжских В. И. Численное интегрирование неоднородного бигармонического уравнения методом установления / Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011). – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2011. – С. 256.

6. Ряжских В. И. О численном интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в задачах кондуктивной свободной конвекции / Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. // Современные методы теории краевых задач: материалы весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXIII». – Воронеж: ВГУ, 2012. – С. 161-162.

7. Попов М. И. Конечно-разностная схема интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в квадратной области / Попов М. И. // Fourth International Conference for Young Mathematics on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. V. Lopatinskii. Book of Abstracts. - Donetsk, 2012. - P. 64-65.

8. Попов М. И. Конечно-разностная схема интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в прямоугольнике / Попов М. И., Ряжских В. И. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: изд-во Воронеж гос. ун-та, 2013. – С. 195-196.

9. Попов М. И. Анализ первой тестовой задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции в нестационарной постановке / Попов М. И. Ряжских В. И. // Современные методы теории краевых задач: материалы весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXIV». – Воронеж: ВГУ, 2013. – С. 151-152.