ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

КУРКИН Евгений Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОДДЕРЖКИ ПРОЦЕССА ПЕРЕХОДА РЕГИОНАЛЬНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РЕЖИМ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: кандидат экономических наук,
профессор Баева Н.Б.

Воронеж – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ……. 4

Глава I. Концептуальные основы выбора направления развития открытых неоднородных систем ……. 10

§1. Открытые неоднородные системы: сущность, структура, описатели, примеры ……..... 12

§2. Существующие подходы к оценке качества исследуемого объекта ……... 22

§3. Стратегии качественного развития открытых неоднородных систем и управление процессом их удержания в режиме устойчивого развития. Постановка задачи ……..…… 26

Выводы ……. 33

Глава II. Алгебра коэффициентов трудности достижения цели как операционная основа квалиметрического анализа открытых неоднородных систем …….. 35

§1. Расширение теоретических основ оценок качества на основе трудности достижения цели. Алгебра трудности достижения цели ..……... 36

§2. Обобщенные квалитативные и производственно-квалитативные функции …….. 50

§3. Направления использования оценок качества на основе трудности достижения цели в условиях функционирования открытых неоднородных систем …….. 54

Выводы ……. 61

Глава III. Математические методы выбора оптимальной стратегии достижения цели открытой неоднородной системы …… 63

§1. Алгоритм решения задачи векторной оптимизации специального вида на основе теории трудности достижения цели …… 63

§2. Методы решения задачи развития многокритериальных открытых неоднородных систем …….…….…… 69

§3. Базовые основы контроля с использованием трудности достижения цели

……..…….. 74
§4. Алгоритм реализации многокритериального трассологического контроля движения открытой неоднородной системы к цели ……..……..…. 87
Выводы ……. 91
Глава IV. Математические методы и модели поддержки развития открытой неоднородной экономической системы региона на основе траектории с заданными свойствами …… 92
§1. Открытая неоднородная экономическая система региона: определение, базовый описатель …….. 92
§2. Имитационная система формирования плана качественного развития региональной экономической системы …… 96
§3. Сущность и особенности выделения нового элемента региональной экономической системы – производственной лакуны региона …….. 112
§4. Экспериментальные расчеты сценариев развития региональной экономической системы. Комплекс алгоритмов и программ ….....…… 121
Выводы ……... 138
Заключение ……. 140
Список литературы …… 142
Приложения ……. 154

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень разработанности проблемы. Открытые неоднородные системы широко представлены в экономике, производстве, технике, биологии и других сферах. Необходимость в исследовании и моделировании развития таких систем методами и средствами, учитывающими связь с внешней средой, неоднородный состав элементов и связей, диктуется тем фактом, что сохранение как можно большего числа свойств исходной системы ведет к повышению адекватности модели и получаемых на её основе результатов. При таком подходе не требуется проводить различного рода классификации элементного состава системы с целью последующего агрегирования элементов до однородного типа, а также изучать объект, процесс или явление без учета влияния внешней среды. Кроме того одновременный учет и совершенствование характеристик качества (Азгальдов Г.Г.) необходимо с целью недопущения диспропорций в развитии открытых неоднородных систем. К тому же любая открытая система требует эффективных методов проведения контроля в процессе достижения поставленных целей (Руссман И.Б.). Особый интерес представляет моделирование региональных экономических систем (Макаров В. Л., Клейнер Г. Б. и др.), как социально-экономической среды жизни человека.

На фоне глубокой и обстоятельной разработки общей теории систем и вычислительных методов системного анализа (Клир Дж., Антонов А.В., Острейковский В.А., Черняк Ю.И., Уёмов А.И. и др.) открытые неоднородные системы (Волкова В.Н., Денисов А.А.) и их аналог в экономике исследованы недостаточно обстоятельно: не выявлены ни особенности их функционирования, ни методы моделирования и контроля, не выработан язык исследования. Разработка общего подхода к исследованию открытых неоднородных систем в экономике требует

применения математических и программных средств. Исходя выше сказанного, разработка математических методов поддержки процесса перехода региональных экономических систем в режим устойчивого развития является актуальной задачей.

Цели и задачи исследования. Совершенствование математических методов моделирования открытых неоднородных систем, разработка алгоритма удержания многокритериальных систем в режиме устойчивого развития, развитие средств и методов оценки и моделирования качества.

Для достижения цели необходимо решение следующих **задач:**

- разработка моделей и методов построения устойчивых траекторий развития открытых неоднородных систем вообще и в экономике в частности;
- развитие аппарата теории трудности достижения цели, как наиболее эффективного инструмента для оценки и моделирования качества;
- разработка алгоритма оптимального контроля многокритериальных систем;
- разработка комплекса алгоритмов и инструментальных средств моделирования развития открытых неоднородных экономических систем.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы оптимизации, исследования операций, алгебры, системологии, системного анализа, экономико-математического моделирования, анализа экспертной информации, теории игр. При написании программного комплекса использовался объектно-ориентированный подход.

Результаты, выносимые на защиту, и их научная новизна:

1. Развитие теории трудности достижении цели: введение новых операций, единичного элемента, получение и доказательство ряда теорем относительно образуемых типов алгебраических систем. Введение ранее недоступных зависимостей в квалитативных функциях.
2. Квалитативное моделирование в пространстве трудности достижения цели, позволяющее моделировать качественные аспекты развития открытых

неоднородных систем.

3. Алгоритм проведения контроля для многокритериальной открытой неоднородной системы, позволяющий при минимальной частоте контроля удерживать её в области устойчивого развития.

4. Обнаружение нового класса элементов: лакун – объектов принадлежащих системе, частично использующих её ресурсы, но функционирующих в интересах иных систем. Учет этих элементов приводит к совершенствованию моделирования открытых неоднородных систем.

5. Программный комплекс, реализующий все разработанные алгоритмы и модели диссертационного исследования.

Область исследования. Содержание диссертации соответствует п. 1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента», п. 5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» специальности 05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Паспорта специальностей ВАК РФ.

Практическая и теоретическая значимость диссертации и использование полученных результатов. Развитие теории трудности достижения цели: введение дополнительных обобщенных операций, доказательство ряда теорем Совершенствование базы для построения квалитативных и производственно-квалитативных функций. Создание универсальной модели развития открытых неоднородных систем с учетом качества и свойством устойчивости к внешним воздействиям. Введение нового типа объекта – лакуна системы. Для региональных систем создан прикладной инструментарий для оценки масштаба лакуны, представлено уравнение описывающее динамику её изменения, описаны способы

изменения масштаба лакуны региона. Разработана система многокритериального контроля для удержания системы в области устойчивого развития.

Теоретические результаты диссертации используются в учебном процессе Воронежского государственного университета при чтении спецкурсов и выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ (имеется акт о внедрении).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университета и следующих конференциях: IX международная междисциплинарная научная конференция «Синергетика в естественных науках» (Тверь, 2011); IV Международная научно-практическая Интернет-конференция «Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов» (Волгоград, 2011); XXXV международная научная школа-семинар им. С.С. Шаталина «Системное моделирование социально-экономических процессов» (Кострома, 2012); международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж 2012); XXXVI международная научная школа-семинар им. С.С. Шаталина «Системное моделирование социально-экономических процессов» (Воронеж, 2013); IX международная научно-практическая конференция «Экономическое прогнозирование: модели и методы» (Воронеж, 2013).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 14 работ, в том числе 4 в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Список публикаций приведен в конце автореферата. Лично соискателю принадлежат работы [3, 7, 8, 9, 10, 11]. Остальные работы выполнены в соавторстве.

В работе [1] введены новые обобщенные операции, единичный элемент множества коэффициентов трудности достижения цели. В [2] доказано, что множество трудности достижения цели с введенными на ней операциями

являются алгебраической системой. В [3] для моделирования развития системы предложена модель учитывающая показатели качества и гипотетические элементы, введена функция прироста качества. В работе [4] предложен способ оценки масштаба лакуны, приведен системный описатель с производственной лакуной, составлена модель построения сбалансированной траектории развития экономики региона. В [6] представлена методика трассологического контроля за системой движущейся к цели, доказана теорема о выборе оптимальной точки контроля. В [9] приведены особенности коэффициентов трудности достижения цели как показателей качества, дана лингвистическая интерпретация уровней коэффициентов трудности достижения цели.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка используемых источников из 108 наименований и приложения; изложена на 141 странице основного текста и включает 14 рисунков и 12 таблиц.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, определены предмет и объект исследования, сформулирована цель и поставлены задачи, решение которых необходимо для ее достижения, раскрыта научная новизна, теоретическая и практическая значимость результатов исследования.

В первой главе «Концептуальные основы выбора направления развития открытых неоднородных систем» введено понятие открытых неоднородных систем, задан описатель, определено понятие устойчивости и качества развития систем, рассмотрены основные сценарии развития, приведена постановка задачи.

Вторая глава «Алгебра коэффициентов трудности достижения цели как операционная основа квалиметрического анализа открытых неоднородных систем» посвящена вопросу количественной оценке качества, расширения теории трудности достижения цели, построению обобщенных

квалитативных и производственно-квалитативных функций, направлениям применения коэффициентов трудности достижения цели.

Третья глава «Математические методы выбора оптимальной стратегии достижения цели открытой неоднородной системы» посвящена вопросу решения задачи векторной оптимизации и разрешению конфликтных целевых функций, универсальному методу решения модели развития открытых неоднородных систем, организации контроля за системой движущейся к многокритериальной цели на основе коэффициентов трудности достижения цели.

В *четвертой главе* «Математические методы и модели поддержки развития открытой неоднородной экономической системы региона на основе траектории с заданными свойствами» вводиться понятие открытой неоднородной региональной экономической системы, рассматриваются сценарии моделирования развития и модернизации экономической системы региона с рассмотрением практических примеров, вводится понятие производственной лакуны, даются методы определения масштаба производственной лакуны региона, описывается комплекс алгоритмов и программ, приводятся примеры расчетов.

В заключении сформулированы основные выводы диссертационного исследования.

ГЛАВА I. КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ВЫБОРА НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ОТКРЫТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Во многих сферах деятельности человека большинство процессов и явлений протекают в открытой среде, и структурные элементы составляющие процесс или явление чаще неоднородны: различны по размерам, выполняемым функциям, связям с другими элементами и т.п. При моделировании же чаще, напротив, стараются уйти от неоднородности, проводя различного рода классификации и агрегирования элементов исследуемого объекта с целью приведения нового элементного состава к однородному типу. При действиях подобного рода модель уже не столь адекватно представляет исследуемый объект и при практическом применении требует дополнительных действий по подготовке исходных данных и интерпретации результатов, что не может не сказаться на трудоемкости и точности модели. Влияние внешней среды, характерное для открытых систем зачастую с теми или иными допущениями опускают и рассматривают в модели закрытую систему. Очевидно, что для более адекватного воспроизведения моделью исследуемого объекта, процесса или явления требуются иные подходы, при которых реальная и моделируемая система наиболее полно соответствуют другу в плане элементного состава, связей и воздействия внешней среды, как основополагающих факторов системного моделирования.

Моделирование и исследование объектов, процессов и явлений с использованием системного подхода открывает широкие возможности по применению математического аппарата теории систем и системного анализа. Поэтому разработка алгоритмов, методов и программ моделирования и контроля устойчивого развития открытых неоднородных систем с применением системного подхода представляются нам перспективным направлением. Открытые неоднородные системы широко представлены в

различных областях исследований: экономике, производстве, технике, биологии и т. д.

Особенность исследования отрытых систем заключается в сложности прогнозирования влияния на них внешней среды, поэтому требуется разработка моделей развития систем устойчивых к внешним воздействиям, равно как и методов определения и прогнозирования влияния внешней среды. Какими бы хорошими ни были модель и прогноз развития, без оптимального контроля вероятность движения открытой неоднородной системы по запланированной траектории маловероятна. Поэтому не менее актуальной задачей является разработка алгоритмов оптимального контроля следования системы к поставленной цели. Контроль должен быть не слишком частым, из экономических соображений, но и не слишком редким, чтобы не оказаться в ситуации, когда менять уже что-то поздно. Таким образом, требуется разработка основ оптимального контроля, в том числе многокритериального, движения системы к цели.

Модель реального объекта будет тем актуальней, чем большее число параметров системы ею учитывается, при сохранении возможности её практического решения в разумные сроки. В тех конкретных приложениях, когда система обладает характеристиками качества, целесообразно применять методы квалиметрии для одновременного учета количественных и качественных показателей системы. Последнее ставит задачу разработки операционных основ для работы с оценками качества, позволяющих наравне с количественными характеристиками учитывать и прогнозировать показатели качества. Действительно, игнорирование показателей качества при моделировании, например, такой системы как экономика региона, может привести к диспропорции в её развитии.

Целью работы является *разработка инструментария (модели, методы алгоритмы) позволяющего построить устойчивую траекторию развития системы, отвечающую заданным свойствам*, на основе которой

управляющий центр может принимать более эффективные управленческие решения, *выявить точки роста системы*, стимулирование развития которых, «потянет» за собой развитие других элементов и системы в целом.

§1. Открытые неоднородные системы: сущность, структура, описатели, примеры

Введем базовые понятия, на которые будем далее. Условимся под системой S понимать множество элементов E, находящихся в отношениях и связях R друг с другом, которое образует определённую целостность и единство $\langle E, R \rangle$ [71, 85].

В данной работе рассматриваются сложные открытые функционирующие динамические неоднородные системы, движущиеся к поставленной цели и управляемые контролирующим органом. Под управлением понимаются действия управляющего центра, обеспечивающие поддержание деятельности и реализацию целей системы [66]. Цель у системы определяется на этапе планирования её деятельности и может быть многокритериальной – векторной. Система движется к цели, используя как свои собственные, так и привлекаемые ресурсы. Управляющий центр обладает некоторым объемом дополнительных ресурсов, которыми он распоряжается с целью управления и достижения глобальной цели, а также улучшения требуемых характеристик системы. Помимо случая когда система следует цели установленной одним управляющим центром, рассматриваются *полицентроидные* системы, в которых имеется несколько центров интересов развития системы. В этих случаях система имеет несколько целевых функционалов, к которым не всегда в силу своей смысловой противоречивости не могут быть применены методы решения задач векторной оптимизации как скаляризация векторного критерия, оптимизация

одного наиболее важного, упорядочивание критериев. Полицентроидные системы в данной работе предлагается решать методами теории игр.

Будем считать систему *неоднородной*, если выполняется хотя бы одно из условий:

- составляющие её элементы не однотипны;
- элементы не одинаковы по размеру (мощности), наличие доминирующего элемента;
- связи между элементами разнородны;
- для части элементов не могут быть указаны связи с другими элементами системы, но, тем не менее, известно, что эти элементы взаимодействуют с другими [53].

Допустим, что каждый элемент может быть охарактеризован мощностью $|e_i|, i = \overline{1,n}$, причем мощности неоднотипных элементов могут быть в различных единицах измерения. Пусть, с помощью коэффициентов $w_i, i = \overline{1,n}$ мы можем привести их к единой шкале, тогда для элементов неоднородной системы выполняется соотношение

$$w_1|e_1| \le w_2|e_2| \le \ldots \le w_n|e_n|.$$

Вектор $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ для которого выполняется соотношение

$$\rho_1 w_1|e_1| = \rho_2 w_2|e_2| = \ldots = \rho_n w_n|e_n|$$

называется *вектором неоднородности*. Его длина, разделенная на число элементов, $|\rho| = \frac{1}{n}\sqrt{\rho_1^{\ 2} + \rho_2^{\ 2} + \ldots + \rho_n^{\ 2}}$ называется *индексом неоднородности системы*.

Отметим, что наличие в системе доминирующего элемента, для которого верно $|e_{i_D}| >> |e_i|, \forall i = \overline{1,n}, i \ne i_D$ может привести систему к полицентроидному типу, в силу того, что доминирующий элемент будет «диктовать» системе свои цели, которые могут противоречить целям управляющего центра.

Система называется *открытой*, если она подвержена влиянию внешней среды и/или воздействует на внешнюю среду. Особенностью моделирования развития открытых систем является сложность в прогнозировании влияния внешних факторов. Поэтому выявление параметров системы косвенно влияющих на внешние факторы, а также прогнозирование масштаба влияния представляется нам важной и актуальной задачей.

Определим, что система является сложной, если выполняется, хотя бы одно из условий:

- система является крупномасштабной, то есть число элементов системы велико и без их агрегирования система за разумное время не разрешима и число связей между элементами велико и требует выделения среди них наиболее существенных с точки зрения целей рассмотрения системы;
- различные масштабы элементов;
- система и/или её элементы связаны с внешней средой;
- сами элементы, вообще говоря, могут рассматриваться как самостоятельные системы с аналогичными целями исследования;
- функционирование системы не может быть описано одной функцией;
- реакция системы на однотипные воздействия неоднозначна и часто определяется как нечеткая.

Для оценки сложности системы может быть использована функция удовлетворяющая следующим требованиям [49]. Пусть X - множество систем, $P(X)$ – мощность множества X, а $c: P(X) \to R$ – мера сложности, обладающая свойствами:

1) $c(\varnothing) = 0$;

2) если $A \subset B$, то $c(A) \le c(B)$;

3) если A изоморфно B, то $c(A) = c(B)$;

4) если $A \cap B = \emptyset$ и A и B не являются гомоморфными образами друг друга, то $c(A \cup B) = c(A) + c(B)$.

Системный подход позволяет формализовано подойти к описанию функционирования и развития исследуемых объектов, что весьма полезно с точки зрения математического моделирования и позволяет выявить особенности объекта, которые при предметном рассмотрении не проявляют себя. Системный подход обладает рядом полезных свойств:

1. Универсальность – возможность применения описателя к широкому кругу объектов с предъявляемыми к ним свойствами.
2. Гибкость – способность легко перестраивать модели систем при получении новой информации о системы или её элементах.
3. Сравнительная легкость программной реализации, в силу того, что выделены входы, выходы системы, передаточный функционал и т.п.

Одной из проблем конструирования системы является рациональное выделение в ней объектов, являющихся её элементами. Под рациональным будем понимать такое выделение элементов, которое соответствует целям разработки системы и позволяет решить поставленную задачу. Под элементом системы $e \in E$ мы понимаем неделимую часть системы, определяемую на основе заранее введенных общих принципов, для которых известны основные характеристики, E – множество элементов системы. При моделировании систем обладающих большим количеством элементов (сотни, тысячи) возникают проблемы вычислительного характера, поэтому целесообразно производить агрегирование – объединение элементов системы в более крупные агрегаты на основе однородности их свойств, позволяющих создать внутренне непротиворечивые агрегаты. Одним из известных подходов к укрупнению элементов основан на методах классификации [68, 78, 101]. В результате классификации происходит разделение множества объектов, составляющих сложное образование с неоднородной структурой, на небольшое число групп (классов, кластеров, таксонов) по закономерности,

их связывающей. Эти закономерности выражают однотипность в каком-либо смысле объектов внутри одного класса и существенные межгрупповые различия объектов. Подробнее вопрос классификации приведен в приложении 2.

Пусть для каждого элемента системы может быть определен набор характеристик

$$z(e_i) = \left(z_i^1, z_i^2, ..., z_i^K\right), i = \overline{1,n},$$

принятых в системе для оценки состояния элемента. *Состояние* – определенное значение набора наиболее существенных показателей или свойств, которые приняты для оценки элемента $z(e)$ или системы $z(S)$. Каждая характеристика имеет свое множество принимаемых значений $z_k \in Z_k, i = \overline{1,K}$, тогда состояние элемента определено на множестве

$$z \in Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_K .$$

Под воздействием внешней среды состояния элементов могут изменяться.

При выделении элементов системы должно выполняться свойство: система может обладать характеристиками, которыми не обладает ни один из элементов, составляющих её [49]. То есть пусть P(S) множество характеристик системы, то должно выполняться

$$\bigcup_{i=1}^{n} P(e_i) \subseteq P(S) .$$

В нашей работе предполагается, что внутренняя структура элемента не изучается и элемент рассматривается как черный ящик, но для которого может быть восстановлена функция, преобразующая входной вектор элемента в выходной. Одной из особенностей нашего подхода является то, что выход элемента может быть вектором.

Взаимодействие элементов осуществляется по средствам связей. Связи могут быть различного рода:

- по сущности: материальные, информационные, финансовые;

- по определенности: детерминированные, стохастические;

- по характеру: равноправные, генетические, подчинения, управления;

- по месту приложения: внутренние, внешние;

- по направленности: прямые, обратные.

Связь $r \in R$ – некоторое отношение, возникающее между элементами

$$r_{ij} = e_i R\ e_j, \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n}.$$

Связи одного типа в системе могут быть заданы графом или квадратной матрицей размерности равной количеству элементов в системе

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & r_{ij} & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & r_{nj} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Неоднородность системы *по типу связей* имеет место, когда существует несколько типов отношений $R = \{R^{(1)}, R^{(2)}, ..., R^{(k)}\}$. Для каждого типа отношений, в таких случаях задается своя матрица.

Структура системы $Cm(E,R)$ – это совокупность элементов и соединяющие их связи [71]. Внутренняя структура системы отражает наиболее существенные взаимоотношения между элементами и их группами (подсистемами), которые мало меняются при изменениях в системе и обеспечивают существование системы и ее свойств. Структура является основой целостности системы и представляет собой мало изменяющуюся категорию.

Таким образом, в рамках системного подхода простейшим описателем системы будет следующий

$$S = \left\langle (e_i, E), (r_{ij}, R), Cm(E,R) \right\rangle$$

здесь e_i – i-й элемент из множества E, r_{ij} – отношения между элементами, $Cm(E,R)$ – образуемая элементами и их связями структура.

Системы испытывающие влияние внешней среды, передающие во внешнюю среду поток, который соответствует сущности (миссии) системы называются *функционирующими*. Для описания функционирующей системы необходимо ввести характеристики, связывающие систему с внешней средой. К ним относятся – входы (*I*) и выходы (*X*) системы, а также передаточная функция *F*, которая строится по аналогии с производственной функцией и помимо прочего зависит также от состояния системы (*Z*). Описатель функционирующей системы имеет вид

$$S_{\Phi} =< S_{исх}; I; X; X = F(I, Z) >,$$

где $S_{исх}$ – простейший описатель системы.

Систему будем называть динамической, если параметры, характеристики, переменные, которые используются при её описании, либо в явном виде зависят от времени, либо являются дискретными, меняющими во времени величинами. При описании динамических систем вводится системное время $t \in [t_0, T]$, где t_0 – начальное время, T – горизонт системного времени. В рассматриваемых далее моделях время является дискретным, то есть $t \in \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, ..., T - 1, T\}$. Описатель динамической системы имеет вид

$$S_t =< S_{исх}; (t_0, t, T); (I(t), G_I); (X(t) = F(I(t), Z(t))) >,$$

где $S_{исх}$ – простейший описатель системы, $I(t)$ – входной поток, заданный на множестве G_I, $X(t)$ – выходной поток, рассчитываемый с помощью передаточной функции *F*, зависящий от вектора состояний $Z(t) = H(Z(t-1), I(t))$, который в свою очередь зависит от входного потока, вектора состояний в предыдущий момент времени.

Как указывалось выше, у системы есть миссия, цель функционирования. *Целью системы* будем называть совокупность требований к результатам функционирования системы (ее выходу) в течение определенного промежутка времени с момента установления данной цели.

Цели сложных систем, довольно трудно формализовать. Когда цели могут задаваться функциональной зависимостью $\Phi(I,Z)$ или конечным целевым состоянием системы $Z(T)$, можем привести описатель системы с целью как

$$S_t =< S_{исх};(t_0,t,T);(I(t),G_I);(X(t)=F(Z(t)));$$
$$Z(t)=H(Z(t-1),I(t));\Phi(I(t),Z(t))>,$$

начальное состояние системы считается заданным. Цель может быть вектором, в том числе определяться несколькими управляющими центрами. То есть описатель может применяться к полицентроидным системам.

Расширим ранее введенные описатели системы для учета неоднородных экономических объектов. Влияние внешней среды на систему будем учитывать через специальный элемент e_L, для которого не могут быть непосредственно указаны связи с другими элементами, в силу особенностей влияния внешней среды. Система в этом случае, даже если все другие элементы $e_i, i=\overline{1,n}$ были однородными, становится неоднородной и требует особого описателя. Простейший описатель может быть записан как

$$S=\left\langle (e_i,E),(r_{ij},R),Cm(e,r);e_L \right\rangle,$$

здесь присутствует e_L только как отдельно выделенный элемент в силу того, как уже отмечалось, что про связи, которого с другими элементами при определении системы не известно ничего. Простейший описатель при отсутствии связей с элементом e_L с точки зрения исследования системы не представляет особого интереса. Перейдем к описателю функционирующей системы.

Описатель функционирующей системы с неоднородными элементами может быть записан как

$$S_{\Phi} =< S_{исх};I;X;F(I,Z);(e_L;I_L;X_L)>,$$

здесь отсутствует передаточная функция для e_L, вследствие отсутствия данных у управляющего центра информации о функционировании внешней

среды, то есть о функции влияния на другие элементы системы. Но предполагается, что на основе исторических данных возможно определение входных I_L и выходных X_L потоков для e_L. Один из таких подходов будет описан в четвертой главе.

Для динамической системы имеем следующий описатель с учетом неоднородных объектов

$$S_t =< S_{исх};(t_0,t,T);(I(t),G_I);(X(t)=F(I(t),Z(t)));(e_L,I_L(t),X_L(t)) >,$$

здесь, как и в предыдущем случае, для e_L в описателе выделены входные и выходные потоки изменяющиеся во времени.

Отношение $\lambda_L = \frac{|X_L(t)|}{|X(t)|}$ назовем *индексом открытости системы*. Индекс открытости характеризует степень влияния внешней среды на систему.

Исследование системы состоит в поиске такого набора состояний, благодаря которому будут эффективно использованы имеющиеся ресурсы, достигнуто целевое состояние системы или оптимальное значение выбранного целевого показателя.

В качестве примера открытой неоднородной экономической системы могут быть выбраны различные крупные объекты, но силу весьма ограниченной доступности достоверной информации в официальной статистике в нашей работе для практических примеров выберем экономическую систему региона. Экономика региона является открытой, неоднородной системой, которая имеет управляющий центр, обладающий ресурсами, ставящий цели и контролирующий их достижение. Рассмотрим подробнее пример региональной экономики с точки зрения системного подхода.

В силу того, что регионах насчитывается не одна тысяча хозяйствующих субъектов [30, 31], то целесообразно произвести агрегирование элементов в более крупные агрегаты. Наиболее удобно, в силу

наличия статистической информации, в качестве агрегатов использовать виды экономической деятельности и уже их принять в качестве элементов $e_i \in E$ описателя. В экономической системе региона для учета взаимосвязей R между элементами экономической системы, обусловленных процессами производства, распределения, потребления и накопления общественного продукта[1], используются таблицы «затраты-выпуск» – межотраслевые балансы.

Входом экономической системы региона являются различного рода начальные параметры функционирования и ограничения на изменяющиеся параметры, как то, начальный объем ресурсов, допустимые границы коэффициентов перераспределения. Состояние региональной экономической системы определяют те параметры, которые изменяются в процессе её функционирования и от которых прямо или косвенно значение целевых функционалов системы, например, величина капитала, трудовых ресурсов. Передаточный функционал задается сложившимися основными экономико-производственными соотношениями системы – это могут быть производственные функции видов экономической деятельности, основные балансовые соотношения. Выходом системы может быть валовой выпуск[2] продукции региона по всем видам экономической деятельности. Конкретный пример будет приведен в четвертой главе настоящей работы.

Другие примеры открытых неоднородных систем приведены в приложении 8.

Всякое развитие предполагает достижение определенных показателей или стремление к достижению поставленных целей. В большинстве случаев цели ставятся в отношении показателей характеризующих некие количественные аспекты (уровень производства, валовой выпуск, собираемость налогов и т.п.). С нашей точки зрения помимо количественных

[1] совокупность товаров и услуг, произведенных в течение одного года

[2] стоимость продуктов и услуг, являющихся результатом деятельности хозяйственных объектов страны в течение данного периода (обычно — года)

важно учитывать показатели качества в тех или иных сферах. Поэтому разработка и внедрение в модель инструментов позволяющих, наравне с количественными характеристиками, учитывать качественные представляется нам важной и актуальной задачей. Действительно, достижение, например, высокого уровня валового выпуска может быть достигнуто за счет ухудшения характеристик качества выпускаемой продукции или услуг, или увеличение налоговых сборов может сопровождаться снижением уровня жизни населения. Рассмотрим основные существующие подходы к оценке качества.

§2. Существующие подходы к оценке качества исследуемого объекта

Существуют различные способы учета качества от неколичественных методик представленных некоторыми стандартами качества ИСО до подходов использующих количественные оценки качества. Первое реализуется путем внедрения различных сертифицированных комплексных систем: мотивации, обучения персонала, систем взаимоотношений с потребителями и поставщиками (см. рис. 1.1), – основной целью использования которых является повышение качества готовой продукции или услуг [72, 96].

Рисунок 1.1. Звезда качества.

Подразумевается, что на любом этапе производства продукции, оказания услуги принятые стандарты должны соблюдаться, последнего достаточно для получения результата заданного качества. Для контроля соблюдения стандартов на определенных этапах, определяемых системой качества, проводятся контрольные мероприятия, делаются контрольные выборки (составляются контрольные карты). Данный подход имеет ограниченное применение и используется преимущественно в производственных сферах.

Другой подход к учету качества базируется на количественных оценках качества. Возможно объединение систем качества и количественных оценок [32, 72].

В дальнейшем, говоря об оценке качества, будем иметь ввиду количественную оценку качества некоторого параметра исследуемого объекта. Под качеством будем понимать определение, зафиксированное в стандарте ИСО 9000:2001 [99]: *«Качество – это степень, с которой совокупность собственных отличительных свойств (характеристик) выполняет требования (потребности или ожидания) заинтересованных*

сторон, которые установлены, обычно предполагаются или являются обязательными».

В различной литературе (см. напр. [3, 4, 18, 30] и др.) проблема количественной оценки качественных параметров (преимущественно нечисловой природы) освещена по разному. Вызвано это, как нам представляется, в первую очередь тем, что за сравнительно недолгое время исследования проблемы численной оценки качества, не сложилось целостной и единой теории. Г.Г. Азгальдов, А.В. Гличев, Э.П. Райхман, В.П. Панов и другие в начале второй половины XX века систематизировали сложившиеся на практике методы и разработали первые общие подходы к численной оценке качества [3, 4]. Способы оценки качества по настоящий день продолжают эволюционировать. Г. Галилей отмечал, что «одна из главных задач науки в том, что нужно измерять все измеримое и делать измеримым то, что пока не поддается измерению». В современных условиях это высказывание можно интерпретировать как стремление в разумных пределах учесть все возможные факторы при моделировании процессов функционировании сложных систем.

В настоящее время существует значительное количество методик, в которых для вычисления оценки отдельных свойств и комплексной оценки качества применяются различные аналитические формулы [3, 4, 106]. В большинстве из них принимается, что оценка зависит от значений соответствующих показателей свойств – оцениваемого и базового. В общем виде эта зависимость имеет вид: $K_j = \Psi\left(P_j, P_j^{баз}\right)$ [4].

Разработка конкретных типов (классов) зависимостей представляет собой достаточно трудоемкую задачу, требующую глубокого и всестороннего исследования оцениваемого объекта. При этом попытки разработать методики и формулы, единые для всех свойств самых разнообразных объектов, объясняется, во-первых, отношением к оценке качества как к задаче несложной и второстепенной и во-вторых, стремлением

создать методики с небольшим объемом вычислений, при использовании которых нет необходимости в проведении специальных исследований (анализ взаимосвязей свойств, поиск базового набора свойств и т. д.). Действительно, самая объективная методика, при использовании которой необходимо проделать слишком большой объем работ, вряд ли найдет широкое применение. Так и простая методика, имеющая в результате большую погрешность с точки зрения ее практической применимости, не вызывает единогласного одобрения со стороны экспертов. На наш взгляд, оптимальным вариантом является методика, реализующая сравнительно небольшой объем вычислений с достаточно подробным изучением данного типа объектов.

Ниже рассмотрим часто встречаемые виды зависимостей между показателями свойств и их качеством:

- оценка свойства является отношением значений его показателя и соответствующего базового (эталонного) показателя

$$K_j = \frac{P_j}{P_j^{баз}},\ 0 \le K_j \le 1 \qquad (1.1)$$

- если оцениваемый показатель не может принимать значения меньшие некоторого значения $P_j^{мин}$, то справедлива следующая линейная зависимость:

$$K_j = \frac{P_j - P_j^{мин}}{P_j^{баз} - P_j^{мин}},\ 0 \le K_j \le 1 \qquad (1.2)$$

- предложена в методике, разработанной американским исследователем Дж. Харрингтоном [4]

$$K_j = e^{-\left(\left|P^0\right|\right)^{m_j}},$$

где m_j – положительная константа $0 < m_j \le M < \infty$, P^0 – линейная функция от P_j, $P^0 = \dfrac{2P_j - \left(P_j^{макс} + P_j^{мин}\right)}{P_j^{макс} - P_j^{мин}}$, $P^0 = -1$ при $P_j = P_j^{мин}$, $P^0 = 1$ при $P_j = P_j^{макс}$.

В случае необходимости использования разнородных показателей для оценки различных свойств, может быть полезным привлечение к оценке качества объекта исследования квалифицированных экспертов [63]. Экспертный метод определения зависимости между показателем и оценкой отличается от методов, в которых используются какие-либо формализованные характеристики, большей гибкостью.

Экспертный метод также имеет недостаток – субъективность оценки, и, как следствие, низкая достоверность получаемых результатов. Недостатком линейных зависимостей (1.1) и (1.2) является то, что любому изменению показателя соответствует пропорциональное изменение оценки, что имеет место лишь для ограниченного числа свойств определенного класса объектов.

Поэтому, несмотря на большое количество методик, необходимость в разработке точных и достоверных моделей оценки качества, соответствующим принятым стандартам качества и существующим алгоритмическим и программным средствам, остается актуальной задачей. Направление поиска оптимальной зависимости состоит, на наш взгляд, *в использовании нелинейной формы оценки совместно с введением нормативного уровня показателей элементов рассматриваемой системы.*

Для целей нашего исследования при оценке качества ресурсов регионального управления предлагается измерять качество, опираясь на коэффициенты трудности достижения результата как обобщенные характеристики ресурсов, учитывающие не только его свойства, но и требования, предъявляемые к ним системой. Данный подход будет подробно рассмотрен во второй главе диссертации.

Рассмотрим далее вопрос качественных стратегий развития систем.

§3. Стратегии качественного развития открытых неоднородных систем и управление процессом их удержания в режиме устойчивого развития. Постановка задачи

При планировании развития системы приоритетным аспектом является построение устойчивой траектории к внешним воздействиям. Действительно, траектория развития, которая под малым внешним воздействием перестает удовлетворять предъявляемым к ней требованиям, не представляет какого-либо практического интереса и не может быть принята управляющим центром.

Опишем свойства интересующей нас стратегии развития. Введем интегрирующее понятие *качества развития*, под которым будем *понимать такое развитие системы, при котором движение осуществляется по устойчивой, сбалансированной траектории построенной с учетом улучшений показателей качества функционирования системы*. Под развитием чаще всего подразумевается рост показателей системы или процесс положительных структурных изменений в системе [103].

Рассмотрим подробнее характеристики качества развития. Под *устойчивым развитием* мы будем понимать такое *развитие, при котором при малых изменениях исходных данных и внешних параметров траектория движения системы меняется незначительно* [21].

Рассмотрим с математической точки зрения определение устойчивого развития, опираясь на описатель функционирующей динамической системы введенный в первом параграфе

$$S_t =< S_{исх};(t_0,t,T);(I(t),G_I);(X(t)=F(Z(t)))>.$$

Пусть на основе экспертного оценивания задано, что $I(t)$ – входной поток под воздействием внешней среды может меняться в установленных пределах δ_I, то есть $\left|I(t)-I^{пл}(t)\right|<\delta_I$. При этом считается, что система

устойчива, если отклонение выходного потока $X(t)$ от планового значения не превосходит заранее установленной экспертом величины ε, то есть $\left|X(t) - X^{пл}(t)\right| < \varepsilon$.

Радиусом устойчивости назовем величину

$$r = \max\left\{\delta_I > 0 : \left|I(t) - I^{пл}(t)\right| < \delta_I \Rightarrow \left|X(t) - X^{пл}(t)\right| < \varepsilon\right\},$$

для заданного ε. При этом область допустимых отклонений входного потока ограниченная радиусом устойчивости

$$\Omega_r = \left\{I(t) : \left|I(t) - I^{пл}(t)\right| < r\right\}$$

называется *областью устойчивого развития*.

В рамках вопроса устойчивости системы в целом отметим, что в совокупности с контролем и корректирующими мероприятиями система будет обладать устойчивостью по принципу Ле Шателье – переменные системы изменяются в ответ на внешние возмущения в направлении их компенсации [41]. Действительно, в моменты контроля определяется фактическое состояние системы, и в случае отклонения параметров развития на значение большего допустимого применяются меры по корректировке параметров системы для достижения постеленной цели в срок. Отметим, что траектория в таких случаях будет составная.

Приведем ниже ряд положений (Р), на которые будем опираться при постановке задачи и последующем исследовании объекта.

Р1. Исследуемая система состоит из элементов, характеризуемых вектором состояния и между которыми можно выявить связи.

Совокупность зависимостей выходных значений системы от времени $X_i(t), \forall j = \overline{1, n_X}$ есть траектория системы.

Р2. Траектория развития системы строится на заданный прогнозный временной период $[t_0, T]$, где t_0 – начальная точка отсчета, в которой берутся все начальные значения показателей, а T – горизонт планирования, время в

системе дискретное. В работе рассматриваются дискретно-детерминированные модели. Подробнее о типах моделей описано в приложении 9.

Р3. Будем считать, что управляющей центр имеет величину дополнительных ресурсов *Ф*, предназначенных для распределения между элементами на развитие системы в целом и достижения к моменту времени *T* целей, поставленных центром. Характер и источники возникновения ресурсов в модели не детализируется.

Задача построения траектории развития с учетом большей части обозначенных допущений широко рассмотрена в литературе, например [25, 53, 101, 22]. Одним из видов моделей развития производственных, технических, экономических систем состоят из двух частей: ограничений перераспределения дополнительных ресурсов и балансовых соотношений для учета пропорций в развитии системы [53]. В обобщенном виде при дискретном времени модель можно выписать в следующем виде:

$$X(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(R_i(T)) \to \max \tag{1.3}$$

$$R_i^j(t) = R_i^j(t-1) + \beta_i^j(t)\Phi(t) - d_i R_i^j(t), \tag{1.4}$$

$$0 \le \underline{\beta_i^j}(t) \le \beta_i^j(t) \le \overline{\beta_i^j}(t), \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \beta_i^j(t) = 1, \tag{1.6}$$

$$R_i^j(t_0) = R_{0i}^j, \tag{1.7}$$

$$i = 1,2,...,n,\ t = t_0 + 1,...,T,\ j = 1,2,...,m,$$

где $R_i^j(t)$ – ресурс *j*-го вида *i*-ого элемента системы, а R_{0i}^j - его начальная величина, $\Phi(t)$ – величина дополнительных ресурсов, имеющаяся в системе в периоды времени $t = t_0, t_0 + 1,...,T$, $\beta_i^j(t)$ представляют собой долю дополнительных ресурсов, направляемых на развитие *i*-го элемента системы,

$f_i(R_i(t))$ – функция отражающая величину выхода i-го элемента при преобразовании элементом входных ресурсов, d_i – коэффициент выбытия ресурсов i-го вида.

P4. Для элемента, например, на основе исторических данных, можно восстановить передаточную функцию между входом элемента, состоянием и выходом.

P5. На начальный момент t_0 считаются известными исходное состояние системы и начальный вектор входных параметров.

Ниже приведена графическая схема функционирования одного элемента системы.

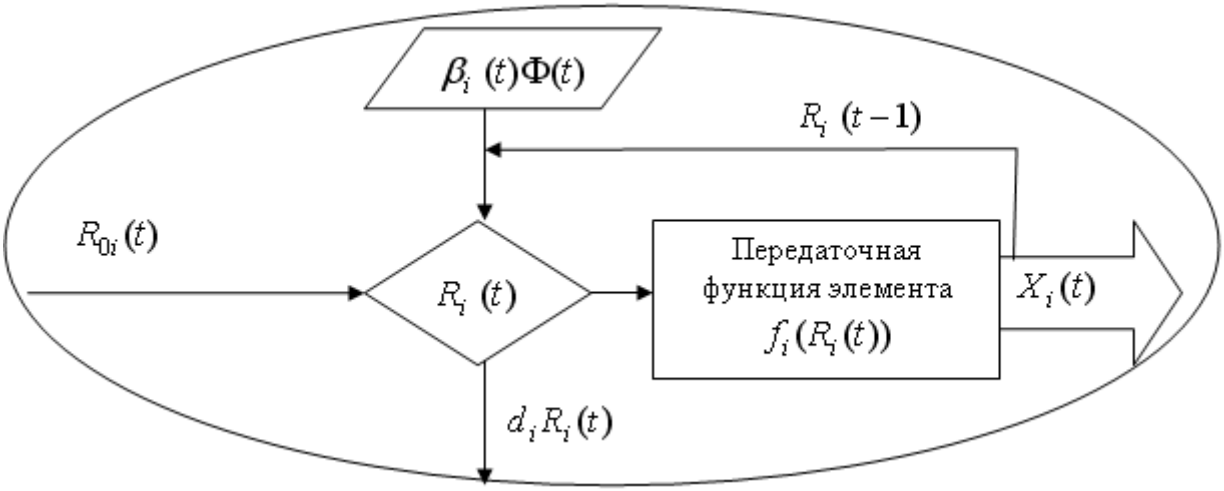


Рисунок 1.2. Схема функционирования элемента системы.

Рассмотрим устойчивость базовой части модели (1.3)-(1.7), которая лежит в основе моделирования развития системы. Допустим, что начальные условия $R_{0i}^j, i=1,2,...,n, j=1,2,...,m$ изменились на величину δ_R, а величина дополнительно выделяемых ресурсов $\Phi(t), t=t_0+1,..,T$ изменилась на δ_Φ, тогда согласно ранее приведенному определению устойчивости целевой функционал $X(T)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(R_i(T))$ не должен измениться на величину большую чем

$$\varepsilon = C\cdot\left((T-t_0)m\delta_R+(T-t_0)\delta_\Phi\right), C>0 .$$

Действительно, если начальные условия равны

$$R_i^j(t_0) = R_{0i}^j - \delta_R, i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,m,$$

то за $T - t_0$ периодов величина ресурсов будет равна

$$R_i^j(T) = R_{0i}^j - (T - t_0)\delta_R + \sum_{t=t_0+1}^{T} \beta_i^j(t)\Phi(t) - \delta_\Phi \sum_{t=t_0+1}^{T} \beta_i^j(t).$$

Откуда можем выписать величину накопленного отклонения

$$\delta = (T - t_0)\delta_R + \delta_\Phi \sum_{t=t_0+1}^{T} \beta_i^j(t).$$

В силу того, что $\beta_i^j(t) \le 1$, то для приведенного выражение можно дать оценку сверху

$$\delta < \overline{\delta} = (T - t_0)\delta_R + (T - t_0)\delta_\Phi.$$

Таким образом, накопленное отклонение ресурсов не превышает величины $\overline{\delta}$, выпуск при этом будет равен

$$X(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(R_i(T) + \overline{\delta}).$$

Откуда можно сделать вывод, что прирост целевого функционала будет зависеть от свойств передаточной функции. Сразу можно отметить, что если хотя бы одна передаточная функция имеет разрывы второго рода, то есть

$$\exists i = 1,..,n, \exists R_i^* : \lim_{R_i \to R_i^*} f_i(R_i) \to \infty$$

то такая система не будет устойчивой.

Р6. По этой причине будем считать, что все передаточные функции элементов не имеют разрывов второго рода и ограничены сверху на области определения элемента. Конкретные примеры устойчивости систем будут рассмотрены в четвертой главе.

Общим явлением в исследованной литературе уделяется недостаточное внимание вопросам качества функционирования, повышения уровня качества. Оценку уровня развития системы целесообразно проводить по нескольким критериям не только количественным, но и качественным.

Одновременный учет количественных и качественных показателей необходим в силу того, что зачастую улучшение одного показателя сопровождается ухудшением другого.

Р7. Для учета показателей качества, в системе должен быть определен набор показателей, по которым будут строиться оценки качества и по каждому показателю должны быть информация о его нижнем (или вернем) допустимом для функционирования системы значении.

В базовом варианте модели учет качества может быть введен следующим образом, в дополнение к (1.3)-(1.7):

$$Q(T) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(T) \to \max \tag{1.8}$$

$$Q_i(t) = Gr(Q_i^j(t-1), \kappa_i^j(t)\mathrm{K}(t)), \tag{1.9}$$

$$0 \le \underline{\kappa_i^j}(t) \le \kappa_i^j(t) \le \overline{\kappa_i^j}(t), \tag{1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \kappa_i^j(t) = 1, \tag{1.11}$$

$$Q_i^j(t_0) = Q_{0i}^j, \tag{1.12}$$

$$i = 1,2,...,n,\ t = t_0 + 1,...,T,\ j = 1,2,...,m.$$

Здесь введена вторая целевая функция (1.8), отражающая достигнутый к концу периода суммарный уровень качества $Q(T)$ и функция прироста качества (1.9), отражающая зависимость между вложениями ресурсов в качество и показателем качества. Ограничения (1.10)-(1.11) аналогичны (1.5)-(1.6). Во второй главе будут введены операционные основы работы с показателями качества, позволяющие построить обозначенные функции, и приведены примеры.

Р8. Для построения функции прироста качества должна иметься предыстория функционирования объекта, либо какие другие данные, позволяющие восстановить её аналитический вид.

Приведем в общем виде модель описывающую сценарий внедрения новых элементов в систему. Подобная задача возникает в случаях, когда необходимо решить вопрос о целесообразности присутствия того или иного элемента в системе, но реально которого в системе ещё не существует. Подобный вопрос можно решить с помощью моделирования функционирования системы с этим элементом и без него. На основе решения двух моделей и анализа ключевых показателей и значений целевых функций, принимается решение о внедрении элемента в реальную систему. Совокупность таких элементов будем называть *гипотетическими элементами* – запланированные проекты создания новых объектов (элементов) системы, но перспективы существования которых не определены.

Для каждого гипотетического элемента известна передаточная функция, согласно которой он будет функционировать в системе, и величины затрат ресурсов $R_k^?(t), t = t_0 + 1,...,T, k = \overline{1,K}$ на каждый год планирования, которые использует элемент. Введем коэффициенты $\gamma_k \in \{0,1\}, k = \overline{1,K}$ отвечающие за принятие того или иного гипотетического элемента и принимающие значения 0 или 1, в зависимости от того, будет ли соответствующий гипотетический элемент внедрен в систему. Тогда уравнение (возможного) выделения ресурсов на внедрение гипотетических элементов запишется как:

$$\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \sum_{k=1}^{K} \gamma_k R_k^?(t), t = t_0 + 1,...,T, \tag{1.13}$$

$$\gamma_k \in \{0,1\}, k = \overline{1,K}. \tag{1.14}$$

Коэффициенты принятия проектов (1.14) подлежат определению в ходе решения системы (1.3)-(1.14), согласно ограничениям и целевым функциям.

Р9. В частных приложениях помимо ограничений и целевых функций (1.3)-(1.14) в системе могут быть другие выражения: балансовые

соотношения, особенности движения ресурсов, дополнительные целевые функции и т.д. Для сохранения свойства устойчивости базовой модели они должны быть ограниченны (в частности, целевые функции не иметь разрывов второго рода).

Р10. Для организации контрольных мероприятий должна быть возможность определения максимальной и минимальной скорости движения системы к каждой частной цели.

Выводы

В первой главе настоящей диссертационной работы описаны основы системного подхода к исследованию сложных открытых неоднородных систем. Приведены описатели для различных видов систем: функционирующих, динамических, целевых. Описана базовая модель развития системы: заданы основные группы ограничений их взаимосвязь и назначение. Введены индексы неоднородности и открытости системы.

Рассмотрены вопросы устойчивого развития системы, определены параметры влияющие на устойчивость. Введено понятие качества развития, рассмотрены его характеристики: устойчивость, сбалансированность, учет показателей качества.

Приведен и рассмотрен пример сложной открытой неоднородной региональной экономической системы. Определены для неё базовые понятие элемента, связей и структуры системы. Указаны уточняющие понятия характеристик развития и виды целевых функционалов и особенностей влияния внешней среды на региональную экономическую систему.

ГЛАВА II. АЛГЕБРА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРУДНОСТИ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ КАК ОПЕРАЦИОННАЯ ОСНОВА КВАЛИМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ОТКРЫТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Квалиметрия, как научное направление о численном измерении качества, начала активно развиваться во второй половине XX столетия. С тех пор были предложены различные подходы к оценкам качества, краткий обзор которых был проведен в предыдущей главе. Как нам представляется, наиболее подходящим с точки зрения не только оценки качества, но и операционных основ для работы с показателями качества, вариантов интерпретации и сфер применения оценок является подход на основе коэффициентов трудности достижения цели. Данное направление появилось в конце 60-х годов прошлого века в работах Руссмана И. Б., Берманта М. А., Бабунашвили М. К. [6, 7, 18, 79] и в дальнейшем развивалось совместно с Каплинским А. И., Умывакиным В. М., Берколайко М. З., Леденевой Т. М. и др. [20, 46, 61].

В данной работе учет показателей качества будет вестись на основе коэффициентов трудности достижения цели. Для обоснования важности учета показателей качества в развитии систем достаточно обратится к одному из общих научных законов – закона перехода количественных изменений в качественные [44]: достижение количественной характеристики определенного предела, вызывает появление иного объекта с другими закономерностями и мерой, в которую заложена уже иная количественная определенность. Другими словами, учет только количественных характеристик в моделировании развития открытых неоднородных систем при последующем применении результатов моделирования к реальному объекту может привести к кардинальным качественным изменениям какой-либо сферы исследуемого объекта.

В настоящей главе будет рассмотрены и расширены подходы к учету показателей качества и их прогнозирования в моделях развития открытых неоднородных систем.

§1. Расширение теоретических основ оценок качества на основе трудности достижения цели. Алгебра трудности достижения цели

Идея введения коэффициентов трудности достижения цели (ТДЦ) и разработки способов их расчета принадлежит Руссману И.Б. [46, 79]. Она возникла из интуитивных соображений о том, что *при прочих равных условиях получить результат определенного качества тем труднее, чем ниже качество ресурса и чем выше требования к качеству результата.* Причем эти требования обычно порождаются требованиями к результату функционирования системы в целом. Можно рассматривать, например, трудность по времени выполнения работы, затратам, свойствам конечного результата. При этом трудность выступает мерой несоответствия ресурсов системы и требований к их качеству, и в то же время, является некоторой обобщенной оценкой качества.

Рассмотрим некоторую организационную систему, на входе которой существует исходный набор необходимых для достижения цели ресурсов. Введем величину μ_k – оценку качества k-го ресурса, задаваемую в полуинтервале

$$0 < \mu_k \le 1. \qquad (2.1)$$

С точки зрения достижения целей системы не все значения качеств ресурсов являются достижимыми. Поэтому разумно ввести понятие требования к качеству k-го ресурса – ε_k, удовлетворяющее условиям:

$$0 \le \varepsilon_k < 1,\ \varepsilon_k \le \mu_k. \qquad (2.2)$$

Определить данные безразмерные величины для конкретного объекта, процесса или свойства можно, например, следующим образом. Если P^k оценка свойства рассматриваемого объекта, известен интервал изменения оценки $\left[P^k_{\min}, P^k_{\max}\right]$, то качество k-той оценки и требование к нему определяется как

$$\mu_k = \frac{P^k}{P^k_{\max}}\ ,\ \varepsilon_k = \frac{P^k_{\min}}{P^k_{\max}} \qquad (2.3).$$

В случае, когда меньшее значение свойства является по смыслу «лучшим», чем большее, тогда справедливо допустить, что ε_k будет оценкой для μ_k сверху, то есть $0 \le \mu_k < 1$, $\mu_k \le \varepsilon_k$, $0 < \varepsilon_k \le 1$. Здесь также целесообразно рассматривать величину $P^k_\varepsilon \in \left[P^k_{\min}, P^k_{\max}\right]$, которая является верхней допустимой границей свойства, но не максимальной $P^k_\varepsilon \le P^k_{\max}$. Выражения для перехода от значений свойства к его безразмерным величинам могут быть следующими:

$$\mu_k = \frac{P^k - P^k_{\min}}{P^k_{\max} - P^k_{\min}},\ \varepsilon_k = \frac{P^k_\varepsilon - P^k_{\min}}{P^k_{\max} - P^k_{\min}}. \qquad (2.4)$$

Трудность достижения цели $d_k = d_k(\mu_k, \varepsilon_k)$ как функция качества ресурса и требования к нему должна обладать следующими свойствами:

а) $d(\mu, \varepsilon) = 1$, при $\mu = \varepsilon$, т. е. принимает максимальное значение. Это объясняется тем, что трудность получения результата максимальна при предельно низком значении качества работы.

б) $d(\mu, \varepsilon) = 0$, при $\mu = 1, \mu > \varepsilon$, т. е. достигает своего минимума. Таким образом, при предельно высоком значении качества работы независимо от требований (при $\varepsilon < 1$) трудность должна быть минимальной.

в) $d(\mu, \varepsilon) = 0$, при $\mu > 0, \varepsilon = 0$.

Трем вышеперечисленным свойствам отвечает функция следующего вида [43]:

$$d = \frac{\varepsilon(1-\mu)}{\mu(1-\varepsilon)}, \tag{2.5}$$

доопределим формулу в точках $d(0,0) = 0$ и $d(1,1) = 1$.

В случае, когда $\mu \le \varepsilon$, $\mu \in [0,1)$, $\varepsilon \in (0,1]$ справедлива формула

$$d = \frac{\mu(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-\mu)}, \tag{2.6}$$

для которой верны все выкладки, имеющие место для формулы (2.5) [61].

Нетрудно проследить аналогию между формулой трудности и приведенным в первой главе втором параграфе определением качества, в нем численной характеристикой собственных отличительных свойств является величина μ, а численное значение требований заинтересованных сторон есть ε. Действительно, чем меньше трудность достижения цели, тем больше разница между качеством ресурса μ и минимальным требованием к нему ε, и тем лучше ресурс (качественнее). Аналогично, чем больше трудность достижения цели, тем меньше разница между качеством ресурса μ и минимальным требованием к нему ε, тем самым ресурс считается менее качественным.

Приведем один из подходов лингвистической интерпретации уровней коэффициентов ТДЦ по критерию затратности использования оцениваемого ресурса. За основу примем шкалу предложенную Харрингтоном [4]:

Таблица 2.1

Характеристики градаций коэффициента некачественности

Градация значений	Характеристика уровня
0,00-0,20	Превосходный и приемлемый уровень
0,20-0,37	Хороший и приемлемый уровень
0,37-0,63	Недостаточно хороший, но удовлетворительный
0,63-0,80	Граничная зона, использование ресурса потребует значительных вложений
0,80-1,00	Практически неприемлемый уровень, большие затраты при использовании ресурса

В таблице 2.1 величина 0,37 есть приближенное значение $\frac{1}{e}$, а 0,63 есть $1-\frac{1}{e}$. Отметим тот факт, что граничное значение 0,63 совпадает единичным элементом $\hat{e}=1-\frac{1}{e}\approx 0.63$ множества *D=[0,1]* коэффициентов ТДЦ.

Поскольку качество объекта можно трактовать как иерархическую совокупность его отдельных свойств, то оценка качества, выражаемая через частные трудности d_k должна быть интегральной, комплексной и являться функцией оценок отдельных свойств.

Предположим, что мы располагаем объектом, который может быть охарактеризован двумя свойствами или комплексным ресурсом, состоящим из двух компонент. Пусть их оценки имеют значения d_1 и d_2, тогда обобщенная оценка будет иметь вид $d = f(d_1, d_2)$.

Сформулируем набор основных требований к виду функции, зависящей от локальных оценок качества. Она может рассматриваться как результат некоторой операции над локальными оценками (в простейшем случае эта операция будет бинарной).

1) *ассоциативность* заключается в выполнении условия:

$$f(f(d_1,d_2),d_3)=f(d_1,f(d_2,d_3))$$

В интегральном показателе смысл ассоциативности состоит в том, что иерархичность показателей не влияет на результирующее значение качества.

2) *коммутативность* характеризует равноценность или одинаковую важность локальных оценок, и изменение одной из них на некоторую величину изменяет интегральную оценку точно так же, как и изменение другой на ту же самую величину:

$$f(d_1,d_2)=f(d_2,d_1).$$

3) *гладкость* требует непрерывной зависимости интегральной оценки от локальных. Кроме того, для практических приложений наиболее простой

является форма интегральной зависимости в виде многочлена, поэтому будем считать, что функция $f(d_1, d_2)$ – полином.

4) *ограниченность* означает, что должны быть известны или могут задаваться интервалы изменения аргументов (локальных оценок) и значений функции (интегральной оценки):

$$0 \le f(\cdot) \le 1,\ f(0,0) = 0,\ f(1,1) = 1$$

5) *нейтральность* нулевого значения одной из компонент, то есть при рассмотрении взаимодействия двух показателей общий эффект совпадает с действием лишь одного, в случае если другой принимает минимальное, а в нашем случае нулевое, значение:

$$f(d_1, 0) = d_1.$$

В [74] доказана справедливость следующей теоремы:

Единственным многочленом двух переменных, удовлетворяющим условиям 1-5, является функция вида:

$$d = d_1 + d_2 - d_1 d_2 = 1 - (1 - d_1)(1 - d_2) \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) легко обобщается на случай *n* компонент комплексного ресурса:

$$d = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - d_k) \qquad (2.8)$$

Таким образом, частная трудность d_k может рассматриваться как относительная оценка качества компоненты ресурса или отдельного свойства объекта с учетом требований, предъявляемых к компоненте или к этому свойству. Обобщенная оценка качества комплексного ресурса системы может рассматриваться как интегральная трудность, рассчитанная по формуле (2.8).

В свою очередь, $\varepsilon = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \varepsilon_k)$, $\mu = \dfrac{1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \varepsilon_k)}{1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{\varepsilon_k}{\mu_k}\right)}$. Из данных формул видно, что обобщенная оценка требований зависит лишь от требований к

качеству каждой компоненты, в то время как обобщенная оценка качества ресурса – величина относительная, зависящая не только от оценок качества отдельных компонент, но и от требований, предъявляемых к качеству каждой компоненты. В связи с этим, для ε справедливо неравенство $\varepsilon \geq \max_k \varepsilon_k$, в то время как про границы значений μ в этом плане ничего сказать нельзя.

Разнородность составляющих оцениваемых ресурсов может быть учтена при помощи введения в формулу (2.8) коэффициентов важности (β_k) отдельных компонент, определяемых, например, методом экспертных оценок:

$$d = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - d_k\right)^{\beta_k} \qquad (2.9).$$

Следует отметить, что в данной постановке d понимается как трудность достижения результата (цели системы), то есть выступает как некая *мера некачественности или оценка риска использования ресурсов ненадлежащего качества,* при этом легко можно перейти непосредственно к оценке качества комплексного ресурса, например по следующей формуле: $P = 1 - d$.

Обобщая вышесказанное, перечислим операции над коэффициентами трудности. Пусть множество D есть отрезок $[0,1]$, которому принадлежат значения, получаемые по формуле (2.5) и $d_i \in D, i = 1,..n$.

Таблица 2.2

Обобщенные операции

Название операции	Аналитический вид
обобщенное сложение (обозначается знаком $\oplus$)	$d = d_1 \oplus d_2 = d_1 + d_2 - d_1 d_2$
обобщенное умножение (обозначается знаком $\otimes$)	$d = d_1 \otimes d_2 = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2}}$ (2.10)

n-арное сложение	$d = d_1 \oplus d_2 \oplus ... \oplus d_n = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - d_i)$ (2.11)
n-арное умножение	$d = d_1 \otimes d_2 \otimes ... \otimes d_n = 1 - e^{-\prod_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1-d_i}}$ (2.12)
умножение на неотрицательное число	$\lambda \otimes d = 1 - (1 - d)^{\lambda}$ (2.13)
обобщенное возведение в степень (обозначается знаком $\wedge$), $\lambda \geq 0$	$d^{\hat{\lambda}} = 1 - e^{-\left(\ln \frac{1}{1-d}\right)^{\lambda}}$ (2.14)
обобщенное вычитание (обозначается знаком Θ), $d_1 \geq d_2$	$d = d_1 \Theta d_2 = \frac{d_1 - d_2}{1 - d_2}$ (2.15)
обобщенное деление (обозначается знаком $\emptyset$)	$d = d_1 \emptyset d_2 = 1 - e^{-\ln \frac{1}{1-d_1} \Big/ \ln \frac{1}{1-d_2}}$ (2.16)

Операции сложения и умножения, а также производные от них введены и обоснованы в работе [46]. Приведем обоснования новых операций обобщенного вычитания и деления.

Вид операции вычитания можно получить из операции сложения $d = d_1 + d_2 - d_1 d_2$, выразив элемент d_2 через d и d_1:

$$d = d_1 + d_2(1 - d_1) \Leftrightarrow d_2(1 - d_1) = d - d_1 \Leftrightarrow d_2 = \frac{d - d_1}{1 - d_1}.$$

Переобозначив в последней формуле переменные, получим аналитический вид обобщенной операции вычитания $d = \frac{d_1 - d_2}{1 - d_2}$.

Покажем корректность введённой операции на примере:

$$d_1 \oplus d_2 \Theta d_1 = \frac{d_1 + d_2 - d_1 d_2 - d_2}{1 - d_1} = \frac{d_2(1 - d_1)}{1 - d_1} = d_2.$$

Следует также отметить, что операция сложения даёт результат больший, чем каждое из входящих в неё слагаемых (это легко видно из

представлений $d = d_1 + d_2 - d_1 d_2 = d_1 + d_2(1 - d_1) > d_1$ и $d = d_1 + d_2 - d_1 d_2 = d_1(1 - d_2) + d_2 > d_2$), а поскольку вычитание мы выводим из сложения, числитель в формуле вычитания будет положителен, так как d больше d_1. Поскольку коэффициент трудности лежит в диапазоне [0,1], то будем в дальнейшем учитывать при использовании формулы вычитания данное ограничение: вычитаемый коэффициент трудности должен быть не больше уменьшаемого коэффициента трудности.

Обоснование аналитического вида обобщенной операции деления проведем аналогично вычитанию, а именно выразим d_2 из равенства $d = d_1 \otimes d_2$:

$$d = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2}} \Leftrightarrow e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2}} = 1 - d \Leftrightarrow \ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2} = \ln\frac{1}{1-d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-d_2} = e^{\ln\frac{1}{1-d}\Big/\ln\frac{1}{1-d_1}} \Leftrightarrow d_2 = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d}\Big/\ln\frac{1}{1-d_1}}.$$

Переобозначив в последней формуле переменные, получим аналитический вид обобщенной операции деления $d = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\Big/\ln\frac{1}{1-d_2}}$.

В некоторых случаях для построения интегральной оценки качества с использованием коэффициентов трудности и обобщенных операций требуется единичный элемент, умножение на который не меняет результата (аналог единицы для вещественных чисел). Для отыскания значения единичного элемента, выразим d_2 из уравнения $d_1 \otimes d_2 = d_1 \Leftrightarrow$ $1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2}} = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}} \Leftrightarrow \ln\frac{1}{1-d_2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-d_2} = e \Leftrightarrow d_2 = 1 - \frac{1}{e}$. Таким образом, единичным элементом является $\hat{e} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$. Заметим также, что данное значение согласно классификации Харрингтона [4], является

нейтральным при принятии решения о качестве свойства оцениваемого объекта.

Отметим ещё один факт, имеющий отношение к полученному нами единичному элементу $\hat{e} = 1 - \frac{1}{e}$. На множестве действительных чисел умножение на число большее единицы, увеличивает результат, а умножение на число меньшее единицы, уменьшает результат. Аналогичная ситуация имеет место и для множества коэффициентов трудностей.

Теорема 1: Пусть даны $d_1 \in D$, $d_2 \in D$, где D множество трудностей, тогда при $d_2 > 1 - \frac{1}{e}$ выполняется неравенство $d_1 \otimes d_2 > d_1$, а из $d_2 < 1 - \frac{1}{e}$ следует, что $d_1 \otimes d_2 < d_1$.

Доказательство: решим неравенство относительно d_2:

$$d_1 \otimes d_2 > d_1 \Leftrightarrow$$

$$1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2}} > d_1 \Leftrightarrow e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2}} < 1 - d_1 \Leftrightarrow$$

$$-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2} < \ln(1-d_1) \Leftrightarrow \ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2} < \ln\frac{1}{1-d_1} \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{1}{1-d_2} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{1-d_2} < \ln e \Leftrightarrow \frac{1}{1-d_2} < e \Leftrightarrow d_2 > 1 - \frac{1}{e}.$$

То есть при значениях d_2 больше $1 - \frac{1}{e}$ результат обобщенного умножения d_1 на d_2 больше значения d_1. Аналогично, если в приведенных неравенствах поменять знак на противоположный, то получим, что при значениях d_2 меньше единичного элемента, результат обобщенного умножения d_1 на d_2 меньше значения d_1. Теорема доказана.

Покажем, что введенные обобщенные операции над коэффициентами ТДЦ, образуют алгебраическую систему.

По определению множество D (носитель) с заданным на нем набором операций (Таблица 2.2) и отношений (значения коэффициентов ТДЦ сравниваются по величине, как вещественные числа), является *алгебраической системой*. Определим, к каким категориям относится данная алгебраическая система.

Теорема 2. Алгебраическая система с носителем D и одной операцией сложения является моноидом.

Доказательство.

Для доказательства утверждения необходимо показать выполнение следующих положений [69]:

- уравнения вида $d \oplus a = b$ и $a \oplus d = b$ (здесь и далее все переменные принадлежат D, если не указано иное) имеют единственное решение;

- наличие единичного элемента;

- ассоциативность операции сложения $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

Действительно, уравнение $d \oplus a = b$ согласно таблице 2.2 можно переписать в эквивалентном виде: $d + a - da = b \Leftrightarrow d = \dfrac{b-a}{1-a}$,

откуда видно, что оно имеет единственное решение. Аналогично доказывается, что уравнение $a \oplus d = b$ также имеет единственное решение.

Единичным элементом в D относительно операции сложения является 0: $d \oplus 0 = 0 \oplus d = d$.

Остается показать ассоциативность обобщенной операции сложения:

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + b + c - bc - ab - ac + abc = a + b - ab + c - ac - bc + abc.$$

Последнее тождество верно в силу коммутативности сложения на множестве действительных чисел. Теорема доказана.

Теорема 3. Алгебраическая система с носителем D и одной операцией умножения является абелевой группой.

Доказательство.

Для доказательства требуется выполнение следующих условий [69]:

- уравнения вида $d \otimes a = b$ и $a \otimes d = b$ имеют единственное решение;

- наличие единичного элемента;

- ассоциативность операции умножения $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$;

- наличие обратного элемента;

- коммутативность операции умножения $a \otimes b = b \otimes a$.

Действительно, уравнение $d \otimes a = b$ имеет единственное решение, поскольку эквивалентное уравнение $1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d}\ln\frac{1}{1-a}} = b$ в силу непрерывности и монотонности на D имеет единственное решение

$$d = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-b} \Big/ \ln\frac{1}{1-a}}.$$

Единственность решения уравнения $a \otimes d = b$ может быть показана аналогично.

Единичным элементом в D относительно операции умножения является $\hat{e} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63$: $\quad d \otimes \hat{e} = \hat{e} \otimes d = d$.

Ассоциативность обобщенной операции умножения следует из приведенных ниже преобразований:

$$a \otimes (b \otimes c) = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-(1-e^{-\ln\frac{1}{1-b}\ln\frac{1}{1-c}})}} = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-b}\ln\frac{1}{1-c}} =$$

$$1 - e^{-\ln\frac{1}{1-(1-e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-b}})}\ln\frac{1}{1-c}} = (a \otimes b) \otimes c.$$

Вид обратного элемента можно вывести из уравнения $d \otimes \overline{d} = \hat{e}$:

$$1 - e^{-\ln\frac{1}{1-d}\ln\frac{1}{1-\overline{d}}} = 1 - e^{-1} \Leftrightarrow \overline{d} = 1 - e^{\frac{1}{\ln(1-d)}}.$$

Для доказательства утверждения остается показать коммутативность обобщенной операции умножения:

$$a \otimes b = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-b}} = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-b}\ln\frac{1}{1-a}} = b \otimes a.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Алгебраическая система с носителем D и двумя обобщенными операциями сложения и умножения является полукольцом.

Доказательство.

Для доказательства утверждения необходимо показать выполнение закона дистрибутивности для обобщенных операций:

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c, \quad (a \oplus b) \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c.$$

Докажем выполнение первого равенства:

$$(a \oplus b) \otimes c = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-(b+c-bc)}} = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{(1-b)(1-c)}} = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\left(\ln\frac{1}{1-b}+\ln\frac{1}{1-c}\right)} =$$

$$= 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-b}} e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-c}} = \left(1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-b}}\right) + \left(1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-c}}\right) -$$

$$- \left(1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-b}}\right)\left(1 - e^{-\ln\frac{1}{1-a}\ln\frac{1}{1-c}}\right) = a \otimes b \oplus a \otimes c.$$

Справедливость второго равенства показывается аналогично.

Теорема доказана.

Есть основание полагать, что если какая-либо частная оценка равна единице, то значение любой свертки составленной с помощью коэффициентов ТДЦ и обобщенных операций будет также равно единице. Приведем соответствующее обоснование.

Теорема 5. Если $d_1 = 1$, то для любого $d_2 \in D$ (при вычитании и делении $d_2 \neq 1$) результат обобщенных операций сложения, вычитания, умножения и деления будет равен единице.

Доказательство.

Если $d_1 = 1$, то переходом к обычным операциям получаем:

$1 \oplus d_2 = 1 + d_2 - 1 \cdot d_2 = 1$,

$1 \Theta d_2 = \dfrac{1 - d_2}{1 - d_2} = 1$,

$1 \otimes d_2 = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-1}\ln\frac{1}{1-d_2}} = 1$ (в силу того, что $\lim\limits_{d_1 \to 1} e^{-\ln\frac{1}{1-d_1}\ln\frac{1}{1-d_2}} = 0$),

$$1 \varnothing d_2 = 1 - e^{-\ln\frac{1}{1-1} \Big/ \ln\frac{1}{1-d_2}} = 1 \text{ (в силу того, что } \lim_{d_1 \to 1} e^{-\ln\frac{1}{1-d_1} \Big/ \ln\frac{1}{1-d_2}} = 0\text{).}$$

Теорема доказана.

Следствие. Значение произвольного выражения $f(d_1,...,d_n)$ составленного с помощью обобщенных операций и рассматриваемого как суперпозиция бинарных операций равно единице, если хотя бы один аргумент равен единице.

Отметим также факт, широко используемый в свертках с весовыми коэффициентами: результат умножения коэффициента ТДЦ на любое неотрицательное число

$$\lambda \otimes d = 1 - (1 - d)^{\lambda},$$

будет лежать в пределах от 0 до 1. Последнее следует из того факта, что возведение в степень числа не превосходящего единицы (1-*d*) дает результат меньший либо равный единице.

Введение полного набора операций над коэффициентами трудности достижения цели дает основу для составления функций, отражающих зависимости показателей качества. В следующем параграфе рассмотрим различные варианты функций, учитывающих наряду с количественными показателями – качественные.

§2. Обобщенные квалитативные и производственно-квалитативные функции.

Используя введенные операции над трудностями как частными оценками качества можно построить зависимости результата функционирования исследуемой системы от свойств ее компонент, то есть *зависимости результата от оценок качества применяемых ресурсов и требований к ним*. Будем обозначать такую зависимость

$$D = F(d_1, d_2, ..., d_n)\ ,\ D : [0,1]^n \to [0,1]$$

и называть *функцией качества системы или квалитативной функцией* по аналогии с производственной функцией. Квалитативная функция позволяет дополнять производственную, описывая процесс переработки исходных ресурсов с точки зрения их качеств.

Отметим, необходимость учета того факта, что чем лучше качество, тем меньше значение коэффициента трудности достижения цели, то фактически коэффициент ТДЦ означает меру некачественности.

Квалитативная функция удовлетворяет следующим свойствам:

1) если частная трудность по какой-либо k-той компоненте равна единице, то и обобщенный результат равен 1, т. е. $\exists k_0 : d_{k_0} = 1$, то $D = 1$;

2) если частная трудность по какой-либо k-той компоненте равна нулю, то результат обобщенного сложения не зависит от трудности по этой компоненте, т.е. $\exists k_0 : d_{k_0} = 0$, то $F(d_1, d_2, ..., d_{k_0-1}, d_{k_0}, d_{k_0+1}, ..., d_n) =$ $= F(d_1, d_2, ..., d_{k_0-1}, d_{k_0+1}, ..., d_n)$;

3) функция F построенная из операций обобщенного сложения и умножения монотонно возрастает по всем аргументам.

Введение в инструментарий математического моделирования алгебры трудности достижения цели, дает следующие преимущества:

- сравнивать разнородные показатели;

- агрегировать частные оценки в интегральные
- агрегированные оценки, полученные с помощью коэффициентов ТДЦ и специально построенных для них обобщенных операций, обладают свойством Парето-доминирования[3] [77];
- величина комплексной оценки системы на основе коэффициентов ТДЦ лежит в том же диапазоне что и частные значения;
- коэффициенты ТДЦ имеют вероятностную интерпретацию [46, 61].

Рассмотрим класс функций учитывающих разнородные показатели: количественные и качественные. *Функции, в которых наряду с количественными характеристиками процесса производства, учитываются и качественные, назовем производственно-квалитативными функциями*. То есть значение такой функции зависит не только от «количественных» переменных, но и от их оценки качества. В общем случае производственно-квалитативная функция записываются в виде $y = f(X,Q)$, где $f: R^m \times D^n \to R$, R – множество действительных чисел, $X \in R^m$, $m = 1,2,..$, $D = [0,1]$, $Q \in D^n$, $n = 1,2,...$

Сущность и свойства производственно-квалитативных функций приведены в работе [100].

Вид производственно-квалитативной функции в каждом конкретном случае будет зависеть от организационной структуры объекта и накопленной статистической информации о его функционировании. Один из возможных алгоритмов построения производственно-квалитативной функции приведен в работе [101]. Перечислим некоторые, наиболее часто встречающиеся, подходы к построению этих функций.

1. $f(X,Q) = q(Q)y(X)$. Здесь *q(Q)* – поправка значения производственной функции *y(X)* значением интегральной оценки качества, в

[3] Если для всех частных показателей выполняется $x_i \geq x'_i, i = \overline{1,n}$ и хотя бы для одного *i*: $x_i > x'_i$, то для интегральных оценок верно $d < d'$.

работе [81] предлагается называть её калибровочным коэффициентом. Однако, поскольку здесь под *q(Q)* понимается любое, сколь угодно сложное выражение, то будем использовать общий термин – калибровочная квалитативная функция. Так как *q(Q)* квалитативная функция, то её значения лежат в отрезке [0,1]. В силу того, что обобщенные операции над трудностями обладают свойствами непрерывности и дифференцируемости в интервале (0,1), то и калибровочная квалитативная функция является непрерывной и дифференцируемой. Этот вид производственно-квалитативной функции является наиболее часто используемым

2. $f(X,Q) = y(g_1(X_1,Q_1),...,g_n(X_n,Q_n))$. В этом представлении производственно-квалитативной функции каждый аргумент функции *y(X)* есть функция агрегирования $g_i(X_i,Q_i)$ величины ресурса X_i и его качественной оценки Q_i. Здесь, в отличие от предыдущего случая, поправку на качество имеют сами аргументы функции. Более подробно данный способ учета качества рассмотрен в работе [100].

Производственно-квалитативные функции имеют достаточно широкое применение в описании различного рода производственно-экономических, технических процессов. Ниже будет приведен пример построения производственно-квалитативной функции, с использованием новых обобщенных операций над коэффициентами трудности.

Отражая количественную и качественную стороны процесса производства, производственно-квалитативные функции строятся на основе двух классов функций, поэтому их свойства во многом определяются свойствами функций, лежащих в их основе.

Приведем свойства производственно-квалитативных функций:

1. Пусть возможно определить максимальные значения $\overline{X_i}, i = \overline{1,m}$ каждого ресурса, тогда можем указать область определения производственно-квалитативной функции $D(f) = [0,\overline{X_1}] \times .. \times [0,\overline{X_m}] \times [0,1]^n$.

2. Область определения ограничена $E(f)=[0,\overline{Y}]$, $\overline{Y}=f(\overline{X},\overline{Q})$. Экономическая обоснованность данного свойства следует из того, что при ограниченных материальных ресурсах нельзя получить бесконечно большой выпуск и невозможно получить стопроцентное качество.

3. Производственно-квалитативная функция непрерывна в области определения по каждому аргументу.

4. Вообще говоря, производственно-квалитативные функции монотонно не убывают по аргументам X_i, Q_i, то есть при увеличении затрат или улучшении качества ресурсов выпуск продукции не уменьшается

$$\frac{\partial f(X,Q)}{\partial X_i} \geq 0, \ \frac{\partial f(X,Q)}{\partial Q_i} \geq 0, \ i=\overline{1,n}.$$

5. Если производственно-квалитативная функция – дважды непрерывно дифференцируема, то верно неравенство

$$\frac{\partial^2 f(X,Q)}{\partial X_i^2} \leq 0, \ i=\overline{1,n}.$$

6. При увеличении количества одного ресурса при постоянных количествах других предельная эффективность использования этого ресурса не возрастает.

7. По аналогии с производственной функцией, можно говорить об однородности производственно-квалитативной функции по затратам ресурсов. Если выполняется $f(\lambda B,Q)=\lambda^{\alpha} f(B,Q)$, $\lambda \in R$, то говорят, что функция однородна со степенью однородности α.

Следует отметить, что аналогично производственным функциям, существуют производственно-квалитативные функции, для которых не все свойства могут выполняться.

Аналитический вид производственно-квалитативной функции восстанавливается исходя из предыстории функционирования объекта, по свойствам производственного процесса, его основным характеристикам.

Рассмотрим возможные направление и примеры использования теории трудности достижения цели в части функциональной зависимости качества от других характеристик объекта.

§3. Направления использования оценок качества на основе трудности достижения цели в условиях функционирования открытых неоднородных систем

Помимо обобщенных квалитативных и производственно-квалитативных функций с помощью коэффициентов трудности достижения цели и введенных операций, можно составлять так называемые *функции прироста качества*, которые отражают зависимость уровня качества и вложенных в его повышение средств и ресурсов. В общем виде функция задается как

$$d_i^j(t) = G_i^j(R_i^j(t), Z_i(t), d_i^j(t-1)), j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n},$$

где $R_i^j(t)$ - вектор средств и ресурсов, направляемых на повышение качества, $Z_i(t)$ - вектор состояния *i*-го элемента системы, $d_i^j(t-1)$ - значение качества в предыдущий момент времени.

Рассмотрим один из вариантов функции прироста качества

$$\overline{G}_i^j(\kappa_i^K(t) \cdot \Phi(t), \overline{A}_i^j(t), Y_i(t), d_i^j(t-1)), j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}$$

для региональной экономической системы, зависящей от вложенных на развитие качества финансовых средств $\kappa_i^j(t) \cdot \Phi(t), i = 1,...,n$, коэффициента текущего износа фондов $\overline{A}_i^j(t), i = 1,2,...,n$, объема выпускаемой продукции $Y_i(t)$ и предыдущего значения $d_i^i(t-1)$ коэффициента ТДЦ. Данный вид функции прироста качества в дальнейшем будет использоваться при моделировании развития региональной экономической системы.

Функция прироста качества строится в терминах коэффициентов ТДЦ на основе имеющейся статистической информации о предыдущих вложениях финансовых средств и вызванным вложениями приростом качества. Ниже приведен возможный подход к её определению.

В качестве аналитического вида функции прироста качества выберем следующую

$$G_i^j(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t),\overline{A}_i^j(t),Y_i\ (t),d_i^j(t-1)) =$$
$$=\left(\lambda_d \otimes d_i^j(t-1)\oplus(\lambda_A\otimes d_A)\oplus(\lambda_Y\otimes d_Y)\right)\otimes d_\Phi \emptyset(\hat{e}\oplus\lambda_\Phi\otimes d_\Phi),$$

где d_Φ – коэффициент ТДЦ, зависящий от объема дополнительно выделяемых на увеличение качества средств $\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t)$, d_A – коэффициент ТДЦ, характеризующий износ ресурсов $A_i^j(t)$ и d_Y – коэффициент ТДЦ, определяемый загрузкой ресурсов. Коэффициенты λ при каждом обобщенном слагаемом – есть весовые коэффициенты, определяемые на основе статистической информации из предыстории функционирования объекта. Величина ТДЦ d_Φ вычисляется по формуле (2.5), в которой $\mu\in(0,1]$ есть текущая оценка качества ресурса, и определяется по формуле $\mu=\varphi(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t))$, а $\varepsilon\in[0,1)$ – нижняя допустимая граница качества $\varepsilon=\varphi(\underline{\kappa}_i^j(t)\cdot\Phi(t))$. Здесь φ – функция, определяемая экспертным способом и показывающая степень удовлетворенности ресурса финансовыми средствами. Причем для определения нижней границы качества предполагается, что есть некий минимум, необходимый для поддержания ресурса в требуемом состоянии, например, это могут средства для покрытия амортизации. Таким образом,

$$d_\Phi(\Phi(t))=\frac{\varphi(\underline{\kappa}_i^j(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t)))}{\varphi(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\underline{\kappa}_i^j(t)\cdot\Phi(t)))}.$$

Величина d_A определяется на основе коэффициента амортизации $A_i^j(t)=\mu_{амр}\in[0,1)$ и верхней границей $\overline{A}_i^j(t)=\varepsilon_{амр}\in(0,1]$ амортизации, выше

которой ресурс считается устаревшим и непригодным для использования. Таким образом

$$d_A = \frac{\mu_{амр}(1-\varepsilon_{амр})}{\varepsilon_{амр}(1-\mu_{амр})} = \frac{A_i^j(t)(1-\overline{A}_i^j(t))}{\overline{A}_i^j(t)(1-A_i^j(t))}.$$

Коэффициент ТДЦ d_Y определяется по формуле:

$$d_Y = \frac{\mu_Y(1-\varepsilon_Y)}{\varepsilon_Y(1-\mu_Y)} = \frac{\psi(Y)(1-\psi(Y^{\max}))}{\psi(Y^{\max})(1-\psi(Y))},$$

где ψ – некая нормирующая функция, определяемая экспертным способом.

Теперь можем выписать аналитический вид функции роста качества:

$$G_i^j(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t),\overline{A}_i^j(t),Y_i\ (t),d_i^j(t-1)) =$$
$$= \left(\lambda_d \otimes d_i^j(t-1) \oplus \lambda_A \otimes d_A \oplus \lambda_Y \otimes d_Y\right) \otimes (d_\Phi \oslash (\hat{e} \oplus \lambda_\Phi \otimes d_\Phi)) =$$

$$= \left(\lambda_d \otimes d_i^j(t-1) \oplus \lambda_A \otimes \frac{\underline{A}_i^j(t)(1-A_i^j(t))}{A_i^j(t)(1-\underline{A}_i^j(t))} \oplus \lambda_Y \otimes \frac{\varepsilon(Y_i^{\max}(t))(1-\psi(Y_i\ (t)))}{\psi(Y_i\ (t))(1-\varepsilon(Y_i^{\max}(t)))}\right) \otimes$$
$$\otimes \left(\frac{\varphi(\underline{\kappa}_i^j(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t)))}{\varphi(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\underline{\kappa}_i^j(t)\cdot\Phi(t)))} \oslash \left(\hat{e} \oplus \lambda_\Phi \otimes \frac{\varphi(\underline{\kappa}_i^j(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t)))}{\varphi(\kappa_i^j(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\underline{\kappa}_i^j(t)\cdot\Phi(t)))}\right)\right)$$

(2.17).

Отметим, что во введенной функции используются новые обобщенные операции. Это объясняется тем, что для функции прироста качества влияние вложенных средств вне зависимости от их количества должно снижать итоговую величину трудности достижения цели и в то же время при росте величины вложений, итоговое значение функции должно убывать. Без введения единичного элемента и новых обобщенных операций такую зависимость составить не представлялось возможным.

В качестве ещё одного практического направления использования оценок качества на основе трудности достижения цели приведем иллюстративный пример по построению производственно-квалитативной функции. Рассмотрим производственный процесс выпуска силикатного кирпича на некотором предприятии – от добычи извести до выпуска готовой продукции. В производстве участвует три подразделения: по добыче извести,

перевозке и непосредственно производству кирпича. Исходные данные представлены в таблице 2.3:

Таблица 2.3

Исходные данные для восстановления функции

год	период	расходы на известь, тыс. руб, x_1	выход извести, тыс. тонн, y_1	транспортные затраты, тыс. руб, x_2	сырьё известь, тыс. т., y_2	расходы на кирпич, тыс. руб, x_3	выпуск кирпича, млн. шт. y_3
1996	январь	928,8	28,9	1058,8	31,7	5413	10,8
1996	февраль	725,4	23,4	1086	29,2	4952,4	9,9
1996	март	1290,6	37,9	1479,8	41,4	5757,2	12,4
1996	апрель	1642,3	47,5	1475,5	46,5	5644,7	12,7
1996	май	1892	54	1511,2	49,6	5329	12,6
1996	июнь	1905,6	54,8	1804,4	53,4	5509,4	13,3
1996	июль	2065	57,3	1404,7	49,8	5741,4	12,9
1996	август	2079,2	57,7	1622,3	52,2	5875,6	13,3
1996	сентябрь	2044,3	56,9	1499,1	50,6	5727,5	13
1996	октябрь	1885,6	53,8	1576,8	50,4	5785	13,2
1996	ноябрь	1587,9	46	1471,3	45,1	5654,5	12,6
1996	декабрь	1065	32	1189,9	34,8	5445,7	11,3
1997	январь	875,8	27,4	855,9	28	5751,1	10,7
1997	февраль	1067	32,1	1021,5	32,8	5463,4	10,9
1997	март	1325,2	38,9	1563,1	42,9	6036	12,8
1997	апрель	1503,6	43,8	1483,6	44,2	5818,8	12,5
1997	май	1752	50,2	1646,6	48,8	5863,9	12,9
1997	июнь	2112,7	58,5	1711,1	53,7	6047,2	13,7
1997	июль	1942,4	55,4	1848,1	54	6087	13,5
1997	август	2123,8	58,8	1635,3	53,1	5861,5	13,2
1997	сентябрь	2212,6	60,5	1571	52,8	6046,9	13,4
1997	октябрь	2027,6	56,2	1895,7	54,7	6583,8	14,2
1997	ноябрь	1672	48,4	1664,9	46,3	6946,8	13,8
1997	декабрь	1083,4	32,6	1132,3	34,4	6028,5	11,5

Для первого подразделения по добыче извести учет качества будем производить исходя из загрязненности добываемого ресурса. По производственной технологии, загрязненность извести не должна превышать 25%, то есть в терминах трудности достижения цели нижняя граница требования к качеству добываемого ресурса $\varepsilon = 0{,}75$. Известны также показатель загрязненности добываемой извести по каждому временному

периоду (см. таблицу 2.4 столбец «лабораторный показатель качества извести») и коэффициент выхода извести после очистки от добытого объема. Вычисляется коэффициент выхода извести с помощью квалитативной функции $q(d_1) = 1.7 \otimes (\hat{e}Ød_1)$, которая в свою очередь получена на основе обработки статистической информации из таблицы 2.4. Именно, анализируя значения столбцов трудности достижения цели и коэффициента выхода, приходим к выводу, что зависимость между показателями обратная. Подбор коэффициентов обратной функции методом наименьших квадратов привел к виду приведенному выше. Показатель аппроксимации для данной функции составил 0,98.

Таблица 2.4

Данные по первому подразделению.

год	период	расходы на известь, тыс. руб, x_1	Лабораторный показатель качества извести	Трудность достижения цели, при ε=0,75, d_1	выход неочищенной извести, тыс. тонн	выход отчищенной извести, тыс. тонн, y_1	Коэффициент выхода
1996	январь	928,8	0,88	0,42	28,9	27,68	0,96
1996	февраль	725,4	0,87	0,46	23,4	21,92	0,94
1996	март	1290,6	0,94	0,19	37,9	37,89	1,00
1996	апрель	1642,3	0,89	0,39	47,5	46,05	0,97
1996	май	1892	0,91	0,31	54	53,47	0,99
1996	июнь	1905,6	0,90	0,34	54,8	53,86	0,98
1996	июль	2065	0,93	0,23	57,3	57,20	1,00
1996	август	2079,2	0,86	0,50	57,7	52,65	0,91
1996	сентябрь	2044,3	0,85	0,51	56,9	51,48	0,90
1996	октябрь	1885,6	0,90	0,34	53,8	52,95	0,98
1996	ноябрь	1587,9	0,95	0,16	46	46,00	1,00
1996	декабрь	1065	0,88	0,40	32	30,89	0,97
1997	январь	875,8	0,88	0,42	27,4	26,22	0,96
1997	февраль	1067	0,94	0,20	32,1	32,08	1,00
1997	март	1325,2	0,87	0,45	38,9	36,66	0,94
1997	апрель	1503,6	0,94	0,19	43,8	43,78	1,00
1997	май	1752	0,88	0,41	50,2	48,22	0,96
1997	июнь	2112,7	0,94	0,19	58,5	58,48	1,00
1997	июль	1942,4	0,92	0,24	55,4	55,27	1,00

1997	август	2123,8	0,94	0,19	58,8	58,78	1,00
1997	сентябрь	2212,6	0,88	0,40	60,5	58,22	0,96
1997	октябрь	2027,6	0,90	0,35	56,2	55,10	0,98
1997	ноябрь	1672	0,90	0,35	48,4	47,47	0,98
1997	декабрь	1083,4	0,88	0,39	32,6	31,55	0,97

Производственная функция первого подразделения, дающая выход неочищенной извести – есть функция от одной переменной. Общий вид производственной функции для случая с одной переменной есть $f(x_1) = a_0 x_1^{a_1}$. Используя метод наименьших квадратов, получаем $f(x_1) = 0.0757 x_1^{0.8694}$ для которой сумма квадратов отклонений меньше, чем при использовании линейной функции.

Таким образом, имея производственную функцию выхода неочищенного сырья и квалитативную функцию, описывающую зависимость между лабораторным показателем качества извести и коэффициентом получения чистого сырья, можем составить производственно-квалитативную функцию первого подразделения

$$y_1(x_1, d_1) = q(d_1) f(x_1) = (1.7 \otimes (\hat{e}Od_1)) \cdot 0.0757 x_1^{0.8694}.$$

Для второго подразделения по перевозке извести предполагается, что известь не теряет своего качества во время перевозки, поэтому составим только производственную функцию. Для транспортного предприятия допускается закупать известь от третьих лиц, с целью оптимизации собственных внутренних затрат. Перебирая основные аналитические виды производственных функций, наилучшей аппроксимацией процесса перевозки обладает функция Солоу $f(y_1, x_2) = (0.6082 y_1^{1.0445} + 0.0588 x_2^{0.8691})^{0.9092}$.

Построим производственно-квалитативную функцию третьего подразделения. Исходные данные для получения аналитического вида функции приведены в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Данные по третьему подразделению

год	период	сырьё известь, тыс. т., y_2	Оценка качества извести	Оценка в терминах трудности, при ε=0,45, d_{31}	качество присадок в терминах трудности, d_{32}	итого-вая труд-ность	расходы на кирпич, тыс. руб, x_3	суммар-ные расходы, тыс. руб	выпуск кирпича, млн. шт. y_3
1996	январь	31,7	0,78	0,23	0,07	0,11	5413	6020,9	10,8
1996	февраль	29,2	0,62	0,50	0,05	0,32	4952,4	6520,3	9,9
1996	март	41,4	0,74	0,29	0,00	0,19	5757,2	6838,0	12,4
1996	апрель	46,5	0,51	0,80	0,07	0,60	5644,7	9015,5	12,7
1996	май	49,6	0,52	0,76	0,09	0,56	5329	8306,6	12,6
1996	июнь	53,4	0,82	0,18	0,00	0,11	5509,4	6120,8	13,3
1996	июль	49,8	0,55	0,66	0,02	0,47	5741,4	8464,8	12,9
1996	август	52,2	0,68	0,38	0,01	0,24	5875,6	7298,0	13,3
1996	сентябрь	50,6	0,78	0,23	0,06	0,12	5727,5	6403,1	13
1996	октябрь	50,4	0,60	0,55	0,03	0,37	5785	7943,2	13,2
1996	ноябрь	45,1	0,56	0,64	0,04	0,44	5654,5	8149,4	12,6
1996	декабрь	34,8	0,63	0,49	0,04	0,32	5445,7	7161,1	11,3
1997	январь	28	0,58	0,59	0,10	0,38	5751,1	7930,8	10,7
1997	февраль	32,8	0,61	0,52	0,10	0,32	5463,4	7210,4	10,9
1997	март	42,9	0,67	0,40	0,01	0,26	6036	7628,1	12,8
1997	апрель	44,2	0,76	0,26	0,09	0,12	5818,8	6520,9	12,5
1997	май	48,8	0,56	0,64	0,03	0,45	5863,9	8485,0	12,9
1997	июнь	53,7	0,81	0,19	0,09	0,08	6047,2	6502,3	13,7
1997	июль	54	0,73	0,30	0,07	0,16	6087	7043,8	13,5
1997	август	53,1	0,80	0,20	0,03	0,11	5861,5	6513,7	13,2
1997	сентябрь	52,8	0,71	0,33	0,07	0,18	6046,9	7161,5	13,4
1997	октябрь	54,7	0,57	0,61	0,08	0,41	6583,8	9264,8	14,2
1997	ноябрь	46,3	0,79	0,21	0,06	0,10	6946,8	7663,1	13,8
1997	декабрь	34,4	0,51	0,79	0,03	0,61	6028,5	9677,2	11,5

Известно, что известь перед применением проходит обработку, тем больше, чем ниже её лабораторная оценка качества, кроме того, в известь добавляются присадки с целью придания ресурсу требуемых производственной технологией свойств. На обработку необходимы финансовые ресурсы, величина которых зависит от качества извести и присадок. Установлено, что объем дополнительных средств вычисляется по формуле $\Delta x_3 = q(d_{31}, d_{32})x_3$, где $q(d_{31}, d_{32})$ – есть квалитативная функция от качества извести d_{31} и качества присадок d_{32} в терминах трудности достижения цели. Квалитативная функция искалась как сумма одноранговых

трудностей с поправочным коэффициентом – $q(d_{31}, d_{32}) = k \otimes (d_{31} \oplus d_{32})$. По статистической информации был найден коэффициент *k*, получен следующий вид функции – $q(d_{31}, d_{32}) = 0.6 \otimes (d_{31} \oplus d_{32})$.

Аналитический вид производственной функции от величины сырья и суммарных затрат получен аналогично двум предыдущим случаям, наилучшим образом процесс описывает функция Кобба-Дугласа $y_3 = 1.6198 y_2^{0.3967} x_3^{0.0605}$. Откуда можем выписать аналитический вид производственно-квалитативной функции

$$y_3 = 1.6198 y_2^{0.3967} ((1 + 0.6 \otimes (d_{31} + d_{32})) x_3)^{0.0605}.$$

Производственно-квалитативная функция всего предприятия, тогда имеет вид:

$$y_3 = 1.6198(0.041(1.7 \otimes (\hat{e}\emptyset d_1)) x_1^{0.6353} + 0.0588 x_2^{0.0891})^{0.3607} \cdot$$

$$((1 + 0.6 \otimes (d_{31} + d_{32})) x_3)^{0.0605}.$$

Поскольку производственно-квалитативная функция является более близкой аппроксимацией реального процесса, то, получив её аналитический вид, мы можем более точно прогнозировать выход итогового продукта с учетом качества исходных ресурсов.

Для успешного управления объектом, помимо функции или модели, описывающей развитие объекта, необходимо производить контрольные мероприятия для оценки соответствия реального положения объекта планируемой траектории. При этом важную роль играет нахождение оптимальных моментов проведения контрольных мероприятий. Данному вопросу и посвящен следующий параграф.

Выводы

В настоящей главе представлено развитие теории трудности достижения цели в её теоретическом и прикладном аспекте. Предложена

методика, позволяющая оперировать с оценками качества как обычными числами на основе использования специально введенных обобщенных операций. Ввод новых действий позволил расширить применение теории коэффициентов трудности. Поскольку результат ранее существовавших и введенных операций находится в той же шкале, что и аргументы, то это позволяет описывать взаимодействие качественных показателей объектов, находящихся на разных иерархических уровнях, учитывать влияние качества исходных компонентов на качества результата, прогнозировать качество результата.

Показано, что обобщенные операции на множестве трудностей D образуют алгебраическую систему: моноид относительно операции сложения, абелеву группу относительно умножения и полукольцо относительно операций сложения и умножения. Вышеперечисленные свойства алгебраической системы позволяют использовать коэффициенты трудности с введенными операциями для построения функций качества (квалитативные и производственно-квалитативные) и создают надежную операционную основу для построения адекватных математических моделей с учетом показателей качества.

Предложен вариант лингвистической шкалы для коэффициентов трудности достижения цели по критерию затратности использования оцениваемого ресурса.

Представлены возможные направления использования коэффициентов трудности достижения цели и обобщенных операций над ними, приведены примеры.

ГЛАВА III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ ОТКРЫТОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Оптимальное управление экономическим объектом невозможно без надлежащего планирования, целеполагания. Именно от начального этапа (планирования) зависят все остальные шаги управления. При планировании определяется цель, которую к определенному моменту планируется достигнуть. Цель может состоять из нескольких целевых функционалов, которые при решении модели необходимо уметь объединять для применения математических методов решения модели. Сами цели могут быть различны, например, для региональной экономической системы, достичь определенного уровня валового выпуска или уровня хозяйственного развития территории, повысить качество оказываемых услуг или товаров некоторых отраслей, повысить уровень занятости населения.

Для достижения поставленной цели необходимо построить траекторию, по которой исследуемый объект будет развиваться, двигаться к поставленной цели.

Эффективно управлять процессами развития открытых неоднородных систем сложно без использования эффективных методов контроля реализованных с помощью информационных технологий. Таким образом, вопросу решения модели, построения траектории развития открытых неоднородных систем и алгоритмам эффективного контроля посвящена третья глава.

§1. Алгоритм решения задачи векторной оптимизации специального вида на основе теории трудности достижения цели

Значительная часть неоднородных систем системы имеют более одной целевой функции, поэтому для разрешения системы необходимо определить методику решения векторной задачи оптимизации. Данному вопросу посвящено много различной литературы (см., например, [17, 43, 89, 98]). Известен ряд методов разрешения многокритериальной задачи, среди них:

- оптимизация одного, признанного экспертом наиболее важного критерия, остальные критерии при этом считаются ограничениями;
- упорядочивание экспертом критериев, согласно их важности и последовательная оптимизация по каждому из них;
- сведение многих критериев к одному, посредством свертки и назначаемых экспертом весовых коэффициентов.

Отметим, что в нашем случае построения задачи базирующейся на модели (1.3)-(1.12) с учетом качества, оставление только одного критерия делает практически бессмысленным использование сценария в целом.

Последовательная оптимизации в силу специфики ограничений на перераспределение ресурсов, как правило, сводиться только к одному этапу, после которого для остальных критериев не остается вариантов.

Таким образом, наиболее перспективным представляется метод сведения многих критериев к одному. Более того, если часть целевых функций составлены с помощью коэффициентов трудности достижения цели с использованием обобщенных операций, целесообразно применить *методику объединения целевых функций в одну, на основе теории трудности достижения цели*. Для чего необходимо целевые функции, составленные с помощью обычных арифметических операций на множестве действительных чисел, перевести на множество коэффициентов трудности достижения целей, после чего объединить в одну при помощи обобщенных операций. В экспериментальных расчетах будем считать, что все критерии имеют одинаковый вес и поэтому для свертки целевых функций в одну используется

операция обобщенного сложения, без коэффициентов. В случае, когда есть необходимость применения весовых коэффициентов и возможность привлечения экспертов можно применить взвешенную обобщенную сумму критериев.

Для того чтобы от некоторого действительного значения параметра перейти к его коэффициенту трудности достижения цели, необходимо определить его теоретически достижимые (вероятно в пределе) наибольшее и наименьшее значение. Причем по смыслу эти значения должны характеризовать некое предельно «плохое» значение исследуемого параметра и предельно «хорошее». Затем, в зависимости от того, какие значение, наименьшее или наибольшие в семантическом смысле является «худшим», по формулам (2.5) или (2.6) соответственно переходим к коэффициентам трудности достижения цели.

Приведем общий **алгоритм объединения нескольких целевых функций в одну на основе теории трудности достижения цели**. Пусть в задаче имеется набор целевых функций $\{G_i \to \min/\max, i = 1,...,m\}$ записанных действительными переменными с применением обычных арифметических операций, для которых можно определить их наибольшее $\{P_i^{\max} = \max(G_i), i = 1,...,m\}$ и наименьшее $\{P_i^{\min} = \min(G_i), i = 1,...,m\}$ возможные значения, также для критериев к минимуму требуется набор верхних допустимых границ свойства $\{P_i^{\varepsilon} : \min(G_i) < P_i^{\varepsilon} < \max(G_i), i = 1,...,m\}$. Пусть $\{D_i \to \min, i = m+1,...,M\}$ набор целевых функций записанных через коэффициенты трудности достижения цели с применением обобщенных операций.

Шаг **1**. Инициируем перебор целевых функций i:=1. Переход к шагу 2.

Шаг **2**. Целевая функция G_i к максимуму? Если да, то переход к шагу 3, если нет, то переход к шагу 5.

Шаг **3**. По формулам $\mu_i = \dfrac{P_i}{P_i^{\max}}$, $\varepsilon_i = \dfrac{P_i^{\min}}{P_i^{\max}}$ переходим к безразмерным величинам оценки качества и её нижней допустимой границе соответственно. Переход к шагу 4.

Шаг **4**. По формуле $d_i = \dfrac{\varepsilon_i(1-\mu_i)}{\mu_i(1-\varepsilon_i)} = \dfrac{P_i^{\min}(P_i^{\max} - P_i)}{P_i(P_i^{\max} - P_i^{\min})}$ получаем выражение трудности достижения цели по целевой функции G_i. Переход к шагу 7.

Шаг **5**. По формулам $\mu_i = \dfrac{P_i - P_i^{\min}}{P_i^{\max} - P_i^{\min}}$, $\varepsilon_i = \dfrac{P_i^{\varepsilon} - P_i^{\min}}{P_i^{\max} - P_i^{\min}}$ переходим к безразмерным величинам оценки качества и верхней допустимой её границе соответственно. Переход к шагу 6.

Шаг **6**. По формуле $d_i = \dfrac{\mu_i(1-\varepsilon_i)}{\varepsilon_i(1-\mu_i)} = \dfrac{(P_i - P_i^{\min})(P_i^{\max} - P_i^{\varepsilon})}{(P_i^{\varepsilon} - P_i^{\min})(P_i^{\max} - P_i)}$ получаем выражение трудности достижения цели по целевой функции G_i. Переход к шагу 7.

Шаг **7**. Проверяем $i=m$? Если нет, то $i:=i+1$ и переход к шагу 2, если да, то переход к шагу 8.

Шаг **8**. Составляем из полученных в ходе шагов 2-7 выражений, а также имеющихся $\{D_i \to \min, i = m+1,...,M\}$ свертку, которую минимизируем $d = d_1 \oplus ... \oplus d_m \oplus d_{m+1} \oplus ... \oplus d_M \to \min$.

Конец.

Отметим, что в шагах 3 и 5 могут быть применены и другие выражения для перехода к безразмерным величинам оценки качества и требований к ним предъявляемым. Функция $f(x,a,b)$ для перехода к безразмерным величинам должна удовлетворять следующим условиям [79] (a и b соответственно наименьшее и наибольшее значение оцениваемой величины x):

- $f(x,a,b)$ определена для $a \le x \le b$, $0 \le f(x,a,b) \le 1$;
- $f(x,a,b)$ – монотонно возрастает при возрастании x;

- для $f(x,a,b)$ должно выполняться требование гладкости, чтобы малым изменениям величины x соответствовало малое изменение оценки.

На шаге 8 свертка может быть составлена с весовыми коэффициентами.

Возможность определить наибольшее и наименьшее значение критерия позволяет перевести его в коэффициент трудности достижения цели, что в совокупности со свойствами обобщенных операций дает основу для использования коэффициентов и операций ТДЦ для объединения нескольких целевых функций в одну, что облегчает решение многокритериальной модели. Далее будут приведены примеры объединения нескольких целевых функций в одну на основе коэффициентов трудности достижения цели.

Рассмотрим теперь вопрос *разрешения противоречивых друг другу целевых функционалов*, которые могут иметь место при решении полицентроидной системы. Будем рассматривать такие системы как коалиционную игру двух игроков: один – основной управляющий центр, другой – объединение прочих игроков, представляющих влияние внешней среды и имеющих свои интересы, полностью или частично противоречащие интересам основного управляющего центра. Интересы игроков представлены целевыми функциями. Стратегии первого игрока:

А1 – вкладывать дополнительные средства и ресурсы способствующие росту своей целевой функции;

А2 – расходовать ресурсы на «подавление» роста целевой функции второго игрока.

Стратегии второго игрока:

В1 – присутствовать в системе;

В2 – уйти из системы.

Тогда, пусть $C^A = \begin{pmatrix} c_{11}^A & c_{12}^A \\ c_{21}^A & c_{22}^A \end{pmatrix}$ – матрица выигрыша первого игрока, которая получена путем моделирования каждой из четырех комбинаций стратегий

игроков и величина выигрыша определяется значением целевой функции первого игрока. Аналогично может быть составлена матрица выигрыша второго игрока $C^B = \begin{pmatrix} c_{11}^B & c_{12}^B \\ c_{21}^B & c_{22}^B \end{pmatrix}$. Поскольку решение игрокам требуется принимать в течении всего периода планирования, решим задачу в смешанных стратегиях, с использованием выражений представленных в работе [84]. Для получения стратегии первого игрока $St_A = \begin{pmatrix} A1 & A2 \\ p_1^A & p_2^A \end{pmatrix}$, необходимо вычислить вероятности, решив систему (V^A – цена игры):

$$\begin{cases} c_{11}^A p_1 + c_{21}^A p_2 = V^A \\ c_{12}^A p_1 + c_{22}^A p_2 = V^A \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

Решением системы являются выражения

$$p_1^A = \frac{c_{22}^A - c_{21}^A}{c_{11}^A + c_{22}^A - c_{12}^A - c_{21}^A},$$

$$p_2^A = \frac{c_{11}^A - c_{12}^A}{c_{11}^A + c_{22}^A - c_{12}^A - c_{21}^A},$$

$$V^A = \frac{c_{22}^A c_{11}^A - c_{12}^A c_{21}^A}{c_{11}^A + c_{22}^A - c_{12}^A - c_{21}^A}.$$

Аналогично получаем стратегию второго игрока $St_B = \begin{pmatrix} B1 & B2 \\ p_1^B & p_2^B \end{pmatrix}$ через систему

$$\begin{cases} c_{11}^B p_1 + c_{12}^B p_2 = V^B \\ c_{21}^B p_1 + c_{22}^B p_2 = V^B \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

Решением системы являются выражения

$$p_1^B = \frac{c_{22}^B - c_{12}^B}{c_{11}^B + c_{22}^B - c_{12}^B - c_{21}^B},$$

$$p_2^B = \frac{c_{11}^B - c_{21}^B}{c_{11}^B + c_{22}^B - c_{12}^B - c_{21}^B},$$

$$V^B = \frac{c_{22}^B c_{11}^B - c_{12}^B c_{21}^B}{c_{11}^B + c_{22}^B - c_{12}^B - c_{21}^B}.$$

Если каждый из игроков будет действовать согласно обозначенным стратегиям St_A и St_B, то выигрыш будет оптимальным среди других возможных случаев применения стратегий.

Таким образом, мы получили инструментарий работы с целевыми функциями, далее необходимо получить универсальный алгоритм решения моделей развития открытых неоднородных систем.

§2. Методы решения задачи развития многокритериальных открытых неоднородных систем

В силу того, что в любом из сценариев с учетом качества в системе ограничений и целевых функций присутствуют нелинейные функции, которые, поэтому вся задача оптимизации является нелинейной. Отметим, что лишь в одном из самых простых сценариев теоретически возможно применение линейной передаточной функции мы получим линейную задачу оптимизации, которую можно решить симплекс методом. На практике такой случай маловероятен и ценность полученных при решении результатов не представляет большого практического интереса, поэтому такой вариант мы подробно рассматривать не будем.

Решение методом Лагранжа в общем случае ограничено тем, что целевые функции и ограничения не являются непрерывными вместе со своими частными производными. Кроме того, в тех частных случаях, когда непрерывность имеет место, то решение системы с частными производными приравненными к нулю является не тривиальной задачей и требует

существенных вычислительных ресурсов не меньших, чем предлагаемый далее метод решения исходной задачи. Аналогичная ситуация имеет место и с другими известными нам методами решения нелинейных задач оптимизации.

Таким образом, применение точных методов решения в общем случае не представляется возможным. Решение данной задачи требует алгоритма достаточно высокой универсальности, коим обладает метод Соболя [89]. Метод Соболя требует для каждой неизвестной переменной двусторонних ограничений, рассматриваемые системы удовлетворяет этому критерию. Действительно, набор параметров $\{\beta_i^j(t), \kappa_i^j(t)\}$, $i = 1,..,n$, $j = 1,..,m$, $t = t_0 + 1,..,T$ значения которых определяются в ходе решения системы, ограничены двусторонними неравенствами (1.5), (1.10).

Применительно к нашей системе отметим отличительную особенность алгоритма от обычного метода Соболя, которая заключается в том, что значения коэффициентов перераспределения, согласно ограничениям модели, должны быть в сумме равны единице. Это означает, что среди всего набора точек многомерного единичного куба, предлагаемых методом Соболя, нас интересуют только те, что лежат на плоскости пересекающей оси координат в точках со значением 1. Схематически (для случая трех переменных) это изображено на рисунке 3.1.

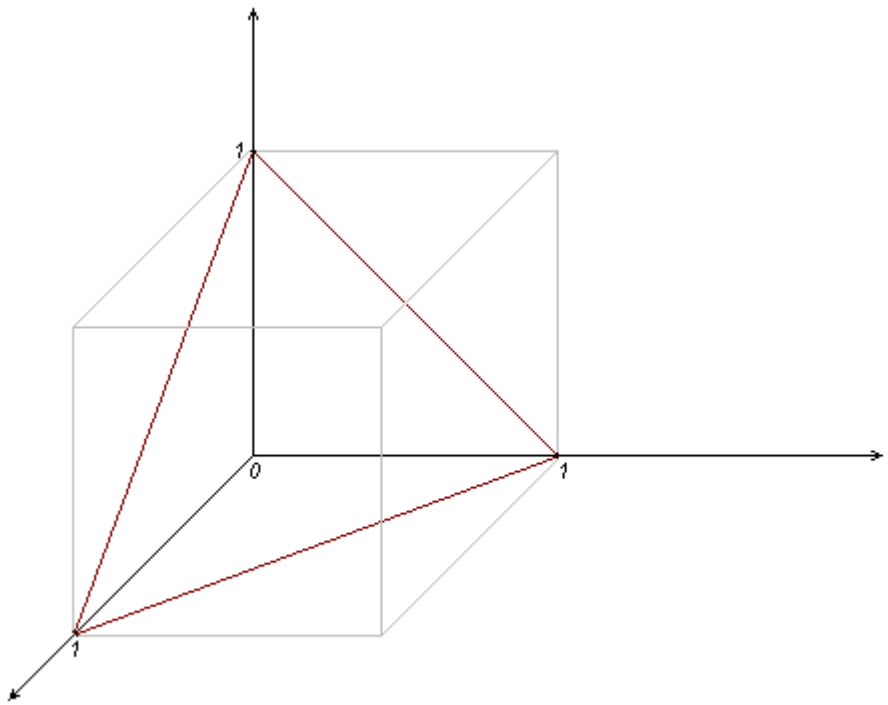


Рис. 3.1. Плоскость поиска решения.

Таким образом, перебирая точки на плоскости, а не в кубе можно существенно ускорить работу алгоритма. Сложность алгоритма полного перебора точек куба оценивается как $O(N^k)$, где k количество переменных. В сценариях с учетом показателей качества k=4n, в сценариях с учетом только количественных характеристик k=2n, где n – количество видов элементов системы (в примерах приведенных в четвертой главе равно шести). Оценка сложности алгоритма в случае перебора точек на плоскости есть $O(N^{k-1})$. Уменьшение сложности алгоритма вызвано тем, что, помимо прочего, одна из переменных находится в зависимости от других и может быть вычислена через другие.

Приведем *модифицированный алгоритм метода Соболя* для решения задач векторной оптимизации.

Пусть в математической модели имеется набор неизвестных $\{x_i, i=\overline{1,n}\}$. Каждой переменной соответствуют двусторонние ограничения $\forall i=\overline{1,n} \quad \underline{x_i} \le x_i \le \overline{x_i}$. Ограничения такого рода определяют в пространстве

параметров параллелепипед. Также в нашей модели есть дополнительное нормирующее ограничение на неизвестные $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Благодаря этому ограничению нас будут интересовать только те точки параллелепипеда, которые являются пересечением его с плоскостью пересекающей оси ординат в единице. Если $\Phi(x)$ –целевая функция и задача имеет вид:

$$\Phi(x) \to \min$$

$$x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$\underline{x_i} \le x_i \le \overline{x_i}, \forall i = \overline{1, n}$$

то приведем алгоритм нахождения оптимальной точки. Предварительно введем нормально распределенную на отрезке $\left[-\frac{1}{2K}(\overline{x_i} - \underline{x_i}), \frac{1}{2K}(\overline{x_i} - \underline{x_i})\right]$ случайную величину $\tilde{x}_i$.

Шаг **1**. Задаем число K – количество точек разбиения интервала $[\underline{x_i}, \overline{x_i}]$. Инициируем первую точку нижними значениями каждой переменной $x_i = \underline{x_i}, \forall i = \overline{1, n}$. Задаем i=1, k=1. Переход к шагу 2.

Шаг **2**. Суммируем все нижние границы переменных $\sum_{i=1}^{n} \underline{x_i}$. Если сумма превосходит единицу, останов – задача решения не имеет, если сумма равна единице, то задача имеет единственную допустимую точку $(x_1, x_2, ..., x_n)^{\min} = (\underline{x_1}, \underline{x_2}, ..., \underline{x_n})$, переход к шагу 9, иначе переход к шагу 3.

Шаг **3**. Вычисляем значение очередной точки $x_i = x_i + \frac{1}{K}(\overline{x_i} - \underline{x_i}) + \tilde{x}_i$. Переход к шагу 4.

Шаг **4**. Проверяем точку на допустимость, если сумма $\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \underline{x_n}$ меньше либо равна единицы, то переход к шагу 5, иначе к шагу 8.

Шаг **5**. Вычисляем последнюю зависимую переменную $x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$. Если $x \in \Omega$, то вычисляем значение целевой функции в полученной точке $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$, если это значение меньше ранее полученного (или это первое рассчитанное значение), то запоминаем его как $\Phi_{\min}$ вместе с точкой $(x_1, x_2, ..., x_n)^{\min}$. Если k=1, то переход к шагу 7, иначе переход к шагу 6.

Шаг **6**. Если *k*<*K* то *k*=*k*+*1* и переход к шагу 3, иначе *k*=1 и переход к шагу 8.

Шаг **7**. Устанавливаем *i*=1, *k*=*k*+*1*, переход к шагу 3.

Шаг **8**. Устанавливаем $x_j = \underline{x_j}, \forall j = \overline{1,i}$. Если *i*<*n*-1, то переход к следующей переменной *i*=*i*+1, иначе переход к шагу 9.

Шаг **9**. Решение найдено – точка $(x_1, x_2, ..., x_n)^{\min}$ со значением целевой функции $\Phi_{\min} = \Phi((x_1, x_2, ..., x_n)^{\min})$

Конец.

Приведенный выше модифицированный алгоритм метода Соболя реализован программно на языке C# в MS Visual Studio 2010 и на практических примерах демонстрирует меньшее время работы, чем при соответствующих исходных данных имел базовый вариант метода Соболя.

Решив модель системы, мы получим плановую траекторию движения системы к цели. Для достижения цели систему необходимо контролировать с целью удержанию её в области устойчивого развития. Построению оптимальных контрольных мероприятий и посвящен следующий параграф.

§3. Базовые основы контроля с использованием трудности достижения цели

Как отмечается в работе [41]: объект, «обладающий свойством устойчивости, способен к выживанию и развитию в своем окружении … для сохранения своей жизнеспособности она (система) должна быть способна реагировать на эти угрозы или адаптироваться к ним до того, как угрозы реализовавшись, нанесут ей невосполнимый урон» - таким образом, необходимо, чтобы открытая система обладала свойствами адаптации. Это возможно, если управляющий центр будет иметь методы и средства для контроля с целью *своевременного* обнаружения отклонений в развитии системы и последующей корректировки параметров системы.

В ходе этапа планирования развития региональной экономической системы по какому-либо из сценариев мы получаем прогнозную траекторию развития. Поскольку рассматриваемые нами системы являются открытыми, то есть подвержены влиянию сторонних факторов, поэтому необходимо контролировать движение системы к цели, определять возможные отклонения от запланированной траектории. Необходимость проведения своевременных контрольных мероприятий подчеркивается в работе [47], где обосновано, что даже правильное управленческое решение, будучи примененным несвоевременно может привести неустойчивому функционированию системы. Мы в рамках методики трассологического контроля будем определять предельный момент контроля по специальным формулам, позже которого объект может оказаться в ситуации, когда уже достижение цели в рамках отведенного времени и бюджета будет невозможным.

Приведём общую постановку задачи контроля, изначально сформулированную в работах [20, 46, 82]. Рассматривается проблема контроля за деятельностью системы, движущейся к поставленной цели.

Пусть исполнительному объекту ставится задача (например, руководством предприятия) достичь к заданному моменту определённого значения какого-либо показателя (например, получить заданный доход или произвести требуемый объём продукции), после этого экономический объект начинает двигаться к цели по какой-либо траектории. Если выяснится, что достижение цели оказывается невозможным, то требуется обнаружить это как можно раньше и так изменить параметры цели экономического объекта, чтобы она стала достижимой, например, это изменение может выражаться в уменьшении количественной оценки планового результата, в увеличении времени на его достижение, или в том и другом одновременно. Задачей системы контроля будет являться оценка текущего состояния экономического объекта, объёма выполненных работ, риска невыполнения плана, а также близости состояния системы – к критической области, откуда достижение цели будет невозможно при любых допустимых затратах. Помимо этого система контроля является одновременно и отправной точкой для системы перепланирования.

Допустим, что за время T нам нужно добиться результата, количественное выражение которого есть A. При этом известно, что существует минимальная скорость производства результата во времени $V_{\min}$ и максимальная скорость $V_{\max}$ (см. рис. 3.2).

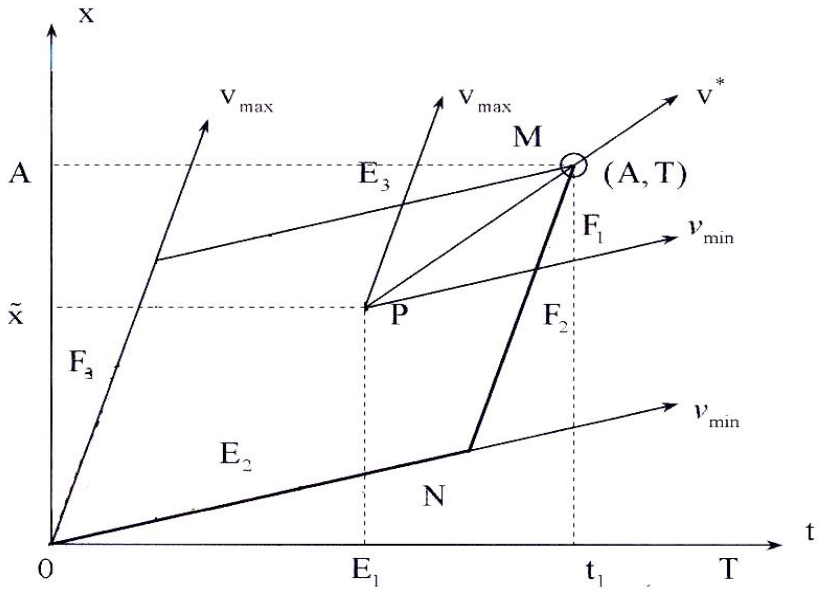


Рис. 3.2. Графическое представление схемы контроля

Важно найти точки контроля над состоянием объекта, выполняющего работу, которые могут быть моментами времени, когда необходимо принять решение об управляющем воздействии или пересмотре параметров цели. Если в процессе движения объект попадает в область, лежащую ниже прямой MN на рисунке, то достижение цели в заданное время станет невозможным, поэтому эта область становится запретной, и приближение к ней надо рассматривать как угрозу невыполнения задачи. Контроль объекта должен быть организован таким образом, чтобы можно было вовремя вмешаться в деятельность объекта, если его состояние приближается к опасной зоне.

Организация системы контроля должна удовлетворять двум противоречивым требованиям: с одной стороны, точек контроля должно быть достаточно много, т.к. при отсутствии должного контроля мы можем оказаться в ситуации, когда что-либо менять уже поздно. С другой стороны, за проведение контроля приходится платить, поэтому точек контроля должно быть как можно меньше.

Процесс достижения цели будем трактовать как процесс управления движением экономического объекта. В качестве цели принято обеспечение достижения планового результата. В процессе управления приходиться

преодолевать некоторые трудности (слово «трудность» мы употребляем здесь чисто семантически), и чем эти трудности существеннее, тем выше угроза недостижения цели.

Введём величины (параметры), которые будут использоваться при определении системы. За $t_{пл}$ – *плановый срок* обозначим время за которое нужно добиться результата $A_{пл}$ в дальнейшем для указания этой величины будем употреблять термин *плановый результат*. При этом из предыстории объекта известно, что *минимальная скорость* его движения есть V_{min} (минимальная скорость достижения результата) и *максимальная скорость* – V_{max}. Для определения термина скорости будем основываться на классическом определении: именно скорость – отношение изменения результата (в численном его выражении) к промежутку времени, в течении которого произошло это изменение. Для определения максимальной и минимальной скоростей движения экономического объекта рассматривается история функционирования объекта, и отыскиваются максимальная зафиксированная мгновенная скорость движения и минимальная, возможно отрицательная. Укажем необходимые ограничения на соотношения между параметрами, возникающие вследствие заложенного в них смысла, именно:

- максимальная скорость должна хотя бы обеспечивать достижение планового результата за плановый срок $V_{\max} t_{пл} \geq A_{пл}$, в противном случае ни о каком выполнении результата мы не можем говорить;
- двигаясь всё время с минимальной скоростью мы не должны превысить планового результата $V_{\min} t_{пл} \leq A_{пл}$, иначе зачем ставить задачу, если не прилагая никаких усилий мы превышаем нужный результат;
- минимальная скорость должна быть меньше максимальной $V_{\min} < V_{\max}$.

Критерием оптимизации будет являться величина трудности достижения цели. Данное допущение не ограничивает область применения задачи, так как трудность достижения цели эквивалентна риску, как мере

угрозы потери управляемости и эквивалентна стоимости (затратам) на сохранение управляемости или стоимости возможности достижения цели.

В основе предлагаемого алгоритма лежит контрольный процесс особого рода, состоящий в оценке отклонения реального состояния от планируемого, на основе заранее построенной оптимальной траектории, и расчете оптимального момента контроля. Оптимального в смысле трудности удержания системы от попадания в критические области, движение из которых исключает возможность достижения планового результата.

Процесс контроля продолжается до тех пор, пока характеристики процесса не окажутся в целевом прямоугольнике $C = \left\{ \underline{t_{пл}} \le t_{пл} \le \overline{t_{пл}}, \underline{A_{пл}} \le A_{пл} \le \overline{A_{пл}} \right\}$.

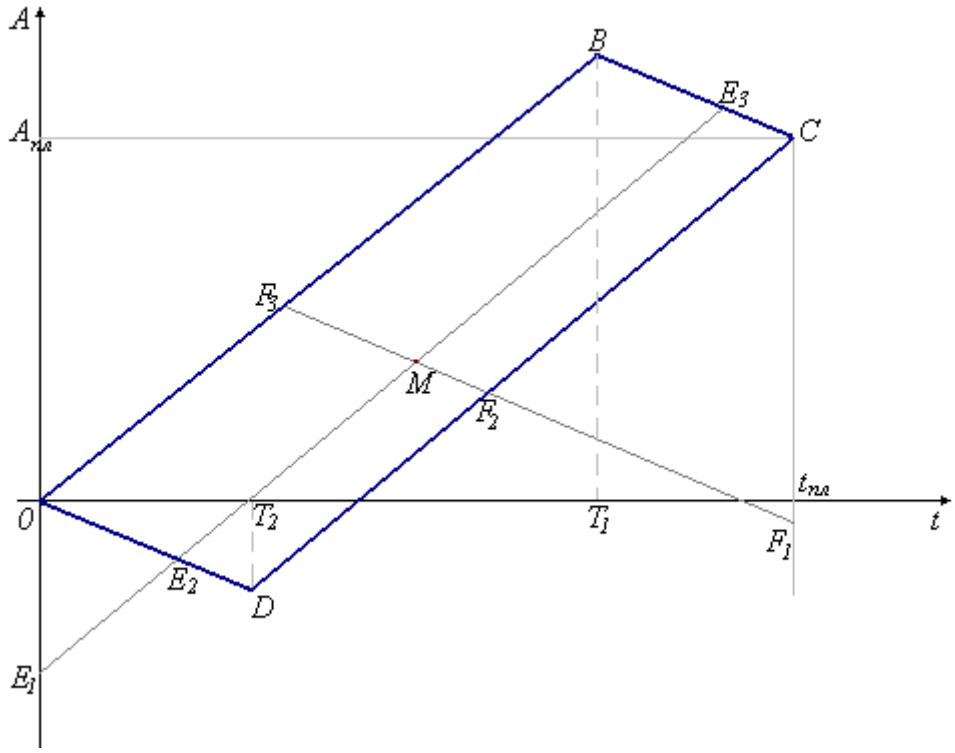


Рис. 3.3. Параллелограмм допустимых положений объекта

На этом рисунке *OD* совпадает с направлением V_{min}, *OB* с направлением V_{max}, *C* – целевая точка. Строиться параллелограмм *OBCD* и ставиться задача отыскания абсциссы точки контроля *M* на траектории движения, при которой

риск попадания характеристик экономического объекта в нежелательную область минимален.

Рассмотрим две трудности: d_1 и d_2, причем d_1 стремится к 1 (максимальной трудности), когда М приближается к прямой *OD*, поскольку область лежащую ниже прямой *OD* будем считать запретной в силу того, что движение объекта со скоростью ниже минимальной говорит о возникновении неблагоприятных маловероятных ситуаций. Аналогично d_2 стремится к 1 при приближении точки *M* к прямой *CD*, так как область лежащая за прямой *CD* также является запретной, поскольку при попадании в неё объекта достижение поставленной цели в заданное время становится невозможным и контроль теряет смысл. Ранее была введена формула для нахождения трудности (2.5), в ней за ε возьмём отношение $\frac{E_1E_2}{E_1E_3}$, а $\mu = \frac{E_1M}{E_1E_3}$. Так как точка E_1 лежит на оси *OA*, а E_2 на прямой *OD*, то ε будет являться нижней границей к качеству ресурса и чем ближе *OD* к оси *OA* (имеется ввиду чем меньше угол между ними), тем меньшие требования к нижней границе качества мы предъявляем. Полное отсутствие требований будет выражаться в совпадении прямой *OD* с осью *OA* и соответствовать отрицательной бесконечной минимальной скорости объекта. И так как исследуемая точка контроля *M* находится в параллелограмме *OBCD*, то она всегда будет выше точки E_2 и $\mu = \frac{E_1M}{E_1E_3}$ – оценка качества ресурса будет больше ε – нижней границы требований к качеству. Аналогичная ситуация с максимальной скоростью, где $\varepsilon = \frac{F_1F_2}{F_1F_3}$ и $\mu = \frac{F_1M}{F_1F_3}$. При увеличении максимальной скорости F_2 будет стремиться к F_1, тем самым нижняя граница требований к максимальной скорости объекта убывать. Подставляя ε и μ в формулу трудности, получим $d_1 = \frac{E_1E_2(E_1E_3 - E_1M)}{E_1M(E_1E_3 - E_1E_2)}$ и $d_2 = \frac{F_1F_2(F_1F_3 - F_1M)}{F_1M(F_1F_3 - F_1F_2)}$.

Решим вопрос отыскания отрезка контроля системы, поскольку уменьшение области поиска облегчает задачу отыскания момента контроля. Введём в рассмотрение две точки T_1 и T_2. Найдём для них выражения через параметры состояния. Точка T_1 есть абсцисса пересечения прямых OB и BC:

$$\begin{cases} A = V_{\max} t \\ A = V_{\min}(t - t_{пл}) + A_{пл} \end{cases} \text{ решая, получаем } T_1 = \frac{A_{пл} - V_{\min} t_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}}.$$

Точка T_2 есть абсцисса пересечения прямых OD и CD:

$$\begin{cases} A = V_{\min} t \\ A = V_{\max}(t - t_{пл}) + A_{пл} \end{cases} \text{ решая, получаем } T_2 = \frac{V_{\max} t_{пл} - A_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}}.$$

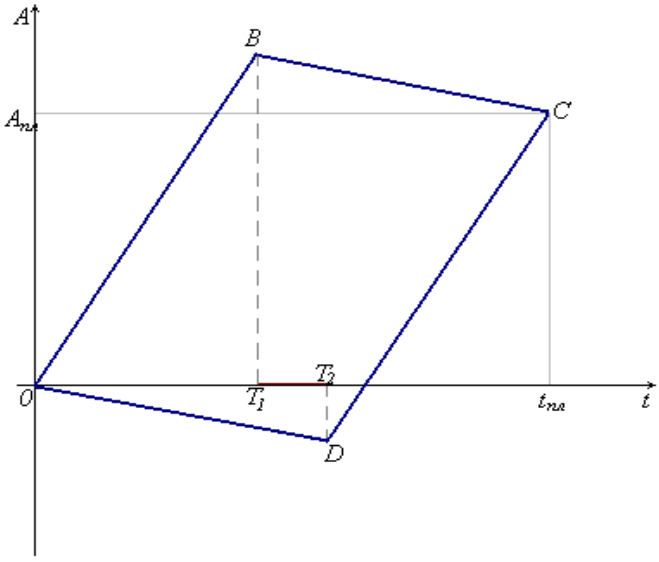
Таким образом

$$T_1 = \frac{A_{пл} - V_{\min} t_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}},$$

$$T_2 = \frac{V_{\max} t_{пл} - A_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}}.$$

Выясним их смысл и взаимное расположение в зависимости от параметров системы. Вообще говоря, возможны 3 ситуации, вне зависимости от знака минимальной скорости, когда $T_1<T_2$, $T_1>T_2$ и $T_1=T_2$:

– $T_1<T_2$:



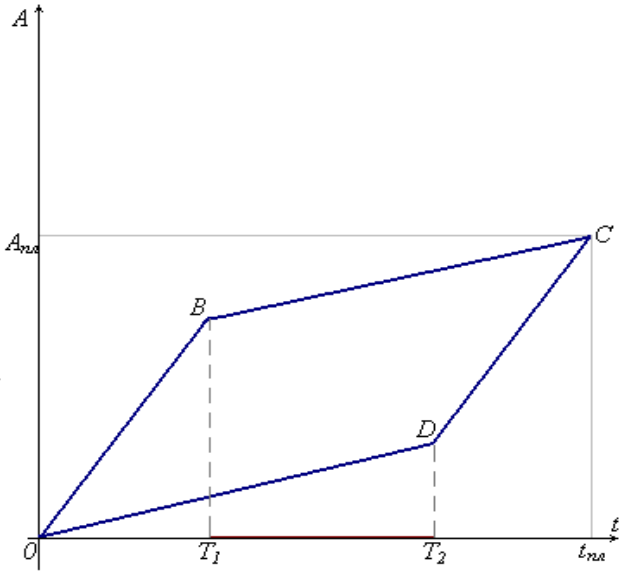


Рис. 3.4. Варианты расположения допустимого параллелограмма (случай $T_1<T_2$)

– $T_1>T_2$:

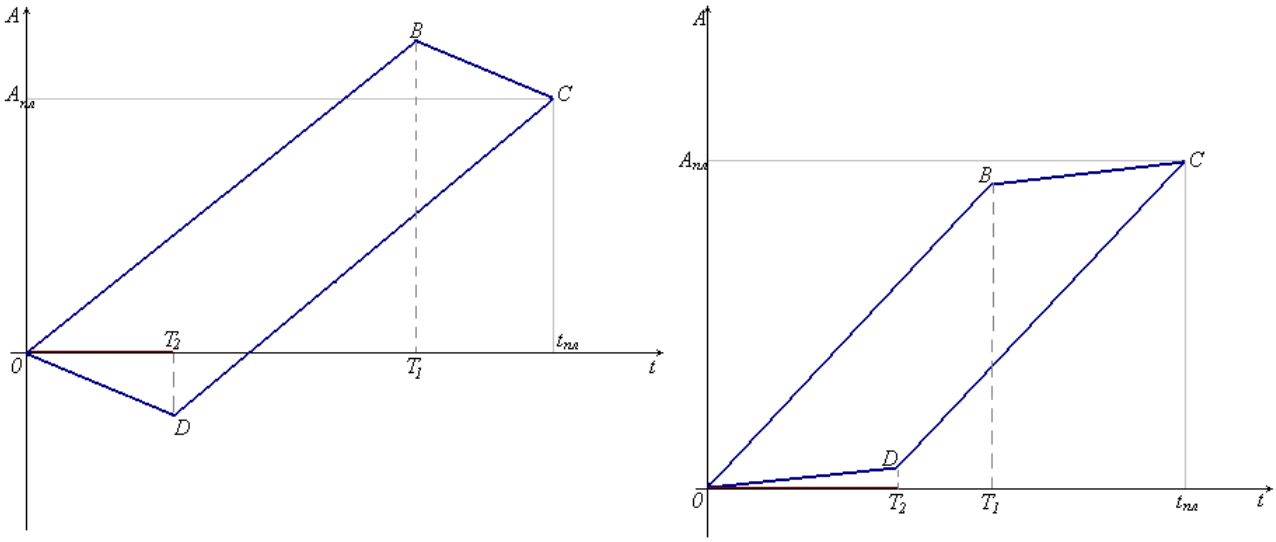


Рис. 3.5. Варианты расположения допустимого параллелограмма (случай $T_1>T_2$)

Приравнивая выражения для T_1 и T_2: $\frac{A_{пл}-V_{\min}t_{пл}}{V_{\max}-V_{\min}}=\frac{V_{\max}t_{пл}-A_{пл}}{V_{\max}-V_{\min}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_{пл}-V_{\min}t_{пл}=V_{\max}t_{пл}-A_{пл}\Leftrightarrow V_{\max}+V_{\min}=\frac{2A_{пл}}{t_{пл}}$ – получаем, что в случае $T_1>T_2$:

$$V_{\max}+V_{\min}<\frac{2A_{пл}}{t_{пл}}$$

– а в случае $T_1\le T_2$:

$$V_{\max}+V_{\min}\ge\frac{2A_{пл}}{t_{пл}}.$$

В первом случае контроль следует производить на отрезке [T_1, T_2], так как объект мог изначально двигаться с максимальной скоростью и к моменту T_1 попасть в точку B после чего двигаясь даже с минимальной скоростью мы достигнем цели. После же момента T_2 объект может попасть в запретную область из которой даже с максимальной скоростью не выйти. Во

втором и третьем случае, т.е. при $T_1 \geq T_2$, контроль необходимо производить с не позднее точки T_2, так как в противном случае система может выйти из-под контроля, таким образом получаем отрезок $[0, T_2]$. В этом случае ($T_1 > T_2$) под T_1 будем понимать 0, чтобы сохранить обозначение отрезка контроля $[T_1, T_2]$.

Выразим стоящие в формулах d_1 и d_2 длины отрезков через параметры состояния ($A_{пл}$, $t_{пл}$, V_{max}, V_{min}) и координаты точки (A_0, t_0), для этого сначала необходимо найти координаты точек E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3.

Точка E_1 лежит на пересечении прямой E_1E_3 и оси ординат, т.е. её координаты удовлетворяют системе $\begin{cases} t = 0 \\ A = V_{\max}(t - t_0) + A_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ A = A_0 - V_{\max} t_0 \end{cases}$.

Точка E_2 лежит на пересечении OD и E_1E_3 $\Rightarrow \begin{cases} A = V_{\min} t \\ A = V_{\max}(t - t_0) + A_0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = V_{\min} \dfrac{V_{\max} t_0 - A_0}{V_{\max} - V_{\min}} \\ t = \dfrac{V_{\max} t_0 - A_0}{V_{\max} - V_{\min}} \end{cases}.$$

Точка E_3 лежит на пересечении BC и $E_1E_3 \Rightarrow \begin{cases} A = V_{\min}(t - t_{пл}) + A_{пл} \\ A = V_{\max}(t - t_0) + A_0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{A_{пл} V_{\max} - V_{\max} V_{\min} t_{пл} + V_{\max} V_{\min} t_0 - A_0 V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}} \\ t = \dfrac{A_{пл} - V_{\min} t_{пл} + V_{\max} t_0 - A_0}{V_{\max} - V_{\min}} \end{cases}.$$

Абсцисса точки F_1 равна $t_{пл}$ для нахождения ординаты воспользуемся уравнением прямой F_1F_3: $A = V_{\min}(t - t_0) + A_0 \Rightarrow F_1 = \left(V_{\min}(t_{пл} - t_0) + A_0, t_{пл} \right)$

$$F_2 = DC \bigcap F_1F_3 \Rightarrow \begin{cases} A = V_{\max}(t - t_{пл}) + A_{пл} \\ A = V_{\min}(t - t_0) + A_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{V_{\max}A_0 - V_{\max}V_{\min}t_0 - V_{\min}A_{пл} + V_{\max}V_{\min}t_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}} \\ t = \dfrac{A_0 - A_{пл} + V_{\max}t_{пл} - V_{\min}t_0}{V_{\max} - V_{\min}} \end{cases}.$$

$$F_3 = OB \bigcap F_1F_3 \Rightarrow \begin{cases} A = V_{\max}t \\ A = V_{\min}(t - t_0) + A_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = V_{\max}\dfrac{A_0 - V_{\min}t_0}{V_{\max} - V_{\min}} \\ t = \dfrac{A_0 - V_{\min}t_0}{V_{\max} - V_{\min}} \end{cases}.$$

Найдя координаты точек, можем вычислить длины отрезков входящих в состав формулы трудностей, как корень из суммы квадратов разностей координат, получим:

$$E_1E_2 = \frac{V_{\max}t_0 - A_0}{V_{\max} - V_{\min}}\sqrt{1 + V_{\max}^2}$$

$$E_1M = t_0\sqrt{1 + V_{\max}^2}$$

$$E_1E_3 = \frac{V_{\max}t_0 - V_{\min}t_{пл} + A_{пл} - A_0}{V_{\max} - V_{\min}}\sqrt{1 + V_{\max}^2}$$

$$F_1F_2 = \frac{A_{пл} - A_0 + V_{\min}t_0 - V_{\min}t_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}}\sqrt{1 + V_{\min}^2}$$

$$F_1M = (t_{пл} - t_0)\sqrt{1 + V_{\min}^2}$$

$$F_1F_3 = \frac{V_{\max}t_{пл} - A_0 + V_{\min}t_0 - V_{\min}t_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}}\sqrt{1 + V_{\min}^2}$$

– откуда имеем:

$$d_1 = \frac{(V_{\max}t_0 - A_0)(A_{пл} + V_{\min}t_0 - V_{\min}t_{пл} - A_0)}{t_0(A_{пл} - V_{\min}t_{пл})(V_{\max} - V_{\min})},$$

$$d_2 = \frac{(V_{\max}t_0 - A_0)(A_{пл} + V_{\min}t_0 - V_{\min}t_{пл} - A_0)}{(t_{пл} - t_0)(V_{\max}t_{пл} - A_{пл})(V_{\max} - V_{\min})}.$$

Используем для объединения трудностей выражение (2.7). Таким образом, можем выписать модель для вычисления точки контроля *M*:

$$d(t_0) = d_1(t_0) + d_2(t_0) - d_1(t_0)d_2(t_0) \to \min_{t_0} \qquad (3.1)$$

$$d_1(t_0) = \frac{(V_{\max}t_0 - F(t_0))(A_{пл} + V_{\min}t_0 - V_{\min}t_{пл} - F(t_0))}{t_0(A_{пл} - V_{\min}t_{пл})(V_{\max} - V_{\min})}; \qquad (3.2)$$

$$d_2(t_0) = \frac{(V_{\max}t - F(t_0))(A_{пл} + V_{\min}t - V_{\min}t_{пл} - F(t_0))}{(t_{пл} - t_0)(V_{\max}t_{пл} - A_{пл})(V_{\max} - V_{\min})}; \qquad (3.3)$$

$$T_1 \le t_0 \le T_2; \qquad (3.4)$$

$$T_1 = \frac{A_{пл} - V_{\min}t_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}}; \qquad (3.5)$$

$$T_2 = \frac{V_{\max}t_{пл} - A_{пл}}{V_{\max} - V_{\min}}; \qquad (3.6)$$

Решение данной задачи даёт координату точки минимума функции трудности $d(t_0)$.

Пусть задано $A_{пл}$ и $t_{пл}$, определены V_{max} и V_{min} и рассчитана оптимальная траектория развития, по задаче первого уровня, тогда:

Теорема 6: *решением задачи (3.1)-(3.6) является оптимальная точка проведения контрольного мероприятия. Данная точка характеризуется минимумом затрат на его проведение. Расчет моментов контроля с помощью задачи (3.1)-(3.6) гарантирует достижение поставленной цели.*

Доказательство.

Действительно, в найденный в задаче (3.1)-(3.6) момент времени трудность минимальна, а как это было показано выше, в данный момент минимальны будут и затраты на проведение контроля и корректирующих действий. Достижение цели гарантируется за счёт того, что в задаче поздняя точка контроля ограничена моментом T_2, до которого неблагоприятное состояние экономического можно исправить, а после которого выправление ситуации, вообще говоря, невозможно. Теорема доказана.

Укажем, как будет рассчитываться суммарная трудность, которая необходима для оценки каждого конкретного поведения и выбора среди них оптимального. Таким образом, по суммарной трудности можно будет судить о траектории – насколько «легко» по ней по сравнению с другими двигаться к цели.

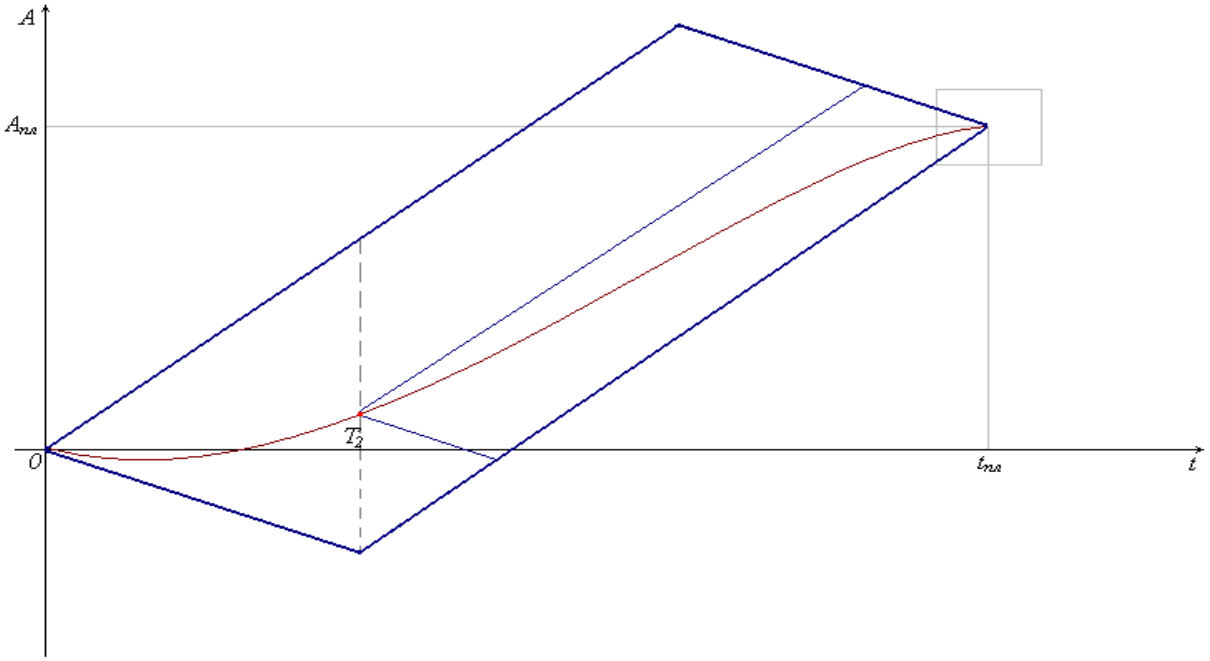


Рис. 3.6. Построение следующей точки контроля

После получения очередной точки контроля, необходимо провести перерасчет параметров системы: из планового результата вычесть уже достигнутое и из планового срока вычесть значение найденной оптимальной точки контроля с момента предыдущей контроля, получив тем самым новые параметры состояния, и рассматривать полученную задачу как исходную. Графически это проиллюстрировано на рисунке 3.7.

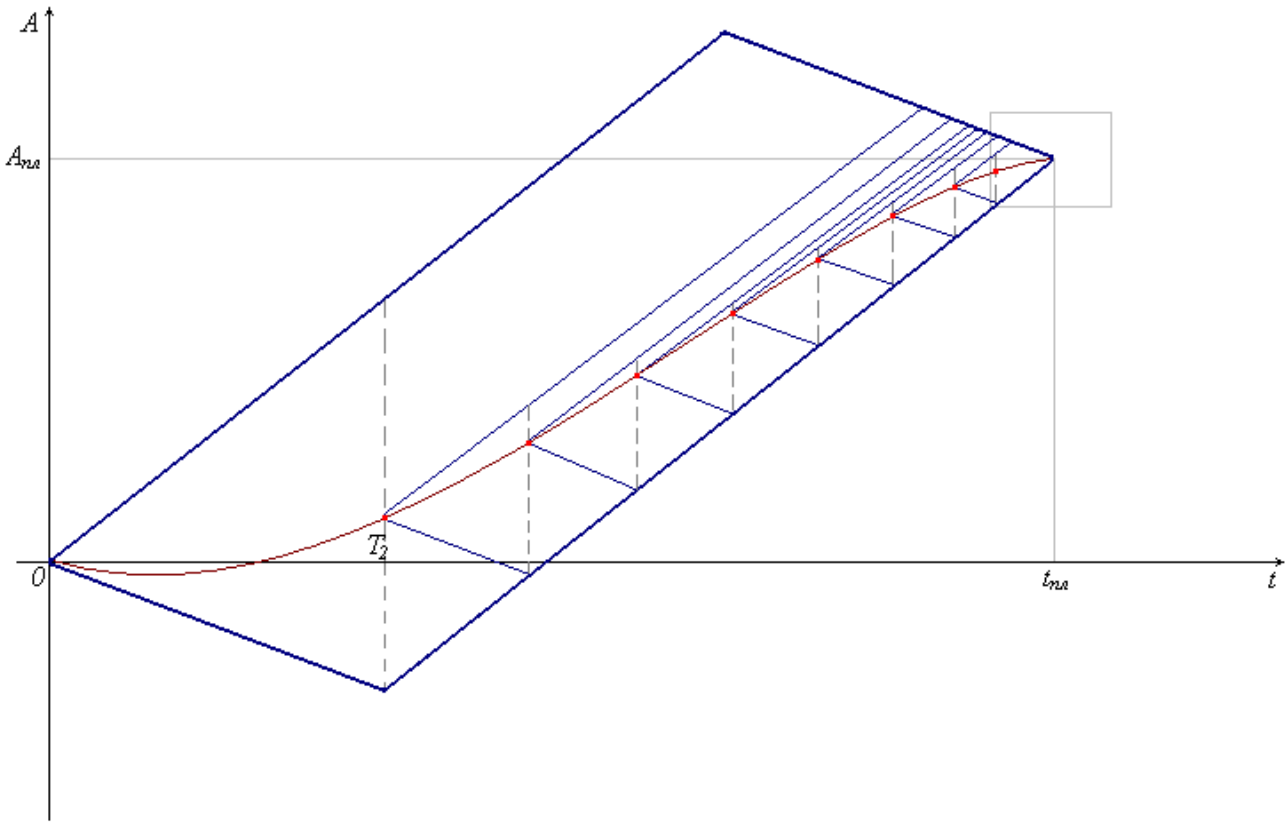


Рис. 3.7. Построение точек контроля

Найдя, таким образом, некоторое количество точек контроля со значениями трудности в них, необходимо эти значения просуммировать по формуле (2.11). В результате получим итоговую трудность, которая будет являться характеристикой конкретной траектории движения экономического объекта.

На каждом этапе нахождения точки контроля решается задача (3.1)-(3.6). Из самого способа отыскания времени контроля на каждом шаге следует, что избранный метод контроля отвечает принципу минимальной достаточности, сформулированному ранее.

Ниже приведён алгоритм нахождения точек контроля для заранее предопределённой траектории достижения цели.

Шаг **1**. Указать плановый срок $t_{пл}$ за который необходимо добиться результата численное выражение которого есть $A_{пл}$; определить минимальные и максимальные скорости движения системы V_{max} и V_{min}.

Шаг **2**. Определить отрезок контроля $[T_1, T_2]$.

Шаг **3**. На определённом на шаге 2 отрезке найти минимум функции трудности, точку t_0, в которой этот минимум достигается; если система не отклонилась от заданной траектории, то переход к шагу 4, иначе перепостановка задачи, с указанием новой траектории шаг 1.

Шаг **4**. Если t_0 попадает в целевой прямоугольник, то все моменты контроля определены, переход к шагу 6, в противном случае производим переформирование исходных данных шаг 5.

Шаг **5**. Пересчитываем $A_{пл}$ и $t_{пл}$, вычитая из них уже достигнутые результаты: $A_{пл} = A_{пл} - F(t_0)$ и $t_{пл} = t_{пл} - t_0$; данное действие можно трактовать как перенос начала координат в точку переформирования системы $(t_0, F(t_0))$; переход к шагу 2 алгоритма.

Шаг **6**. По найденным точкам контроля характеризуем движение экономического объекта, то есть оцениваем суммарные затраты и трудности.

При проведении контрольно-корректирующих мероприятий в вычисленные по указанному алгоритму способом моменты, гарантируется, что количество точек контроля будет минимально достаточным для достижения поставленной цели за поставленный срок.

Приведенный алгоритм контроля может применяться для системы следующей к единой скалярной цели, в тех случаях когда цель задана вектором – многокритериальная цель, необходимы более общие алгоритмы контроля, к рассмотрению которым мы и переходим.

§4. Алгоритм реализации многокритериального трассологического контроля движения открытой неоднородной системы к цели.

Цель контроля – удержание открытой неоднородной системы в режиме устойчивого развития, рассчитанного на этапе планирования. В моменты контроля при необходимости должны производиться управляющие

воздействия на систему. В третьем параграфе была описана общая методика организации контроля над системой движущейся к цели. Приведем алгоритм трассологического контроля применительно к открытой неоднородной системе с несколькими целями. Отметим, что аналогично общему случаю, алгоритм применим для систем, в которых возможно определить максимальную и минимальную скорость движения к цели по каждой целевой функции.

Для организации контроля у системы должна быть цель, которую необходимо достигнуть за отведенное время. Вообще цель – это идеальный мысленно сконструированный будущий результат действий. В качестве цели открытой неоднородной системы примем достижение полученных в ходе прогнозирования значений целевых функций. Время за которое система должна достигнуть цели есть горизонт планирования установленный на этапе прогнозирования. Согласно методике трассологического контроля в качестве цели должна выступать область, таким образом, необходимо определить допустимые отклонения от прогнозных значений целевых функций и величину отклонений от времени достижения цели. В реальных расчетах величины отклонений определяет лицо принимающее решения, в иллюстративных примерах в качестве допустимого отклонения примем 10% от соответствующих величин.

Так как в любом из приведенных сценариев мы имеем как минимум две целевых функции, то имеет место многокритериальная задача, тогда и цель задается несколькими критериями. В то время как методика трассологического контроля подразумевает скалярную цель. В данной ситуации возможны два варианта решения проблемы. Первый, более простой с точки зрения проведений этапов контроля: по аналогии с объединением нескольких целевых функций в одну составляется на основе теории трудности достижения цели один критерий, достижение требуемого показателя которого с допустимыми отклонениями образует целевую

область. Второй вариант: проведение контрольно-диагностических мероприятий для каждого критерия. Отметим, что моменты контроля по разным критериям могут не совпадать, что ведет к общему учащению точек контроля и его удорожанию. Преимущество второго варианта – определение ситуации по конкретному критерию (например, определено отставание по индексу хозяйственного развития), в том время как в первом варианте мы получаем лишь общую картину. Причем в первом варианте возможен случай замещения динамики роста одного критерия другим, ведь реально может иметь место отставание по одному критерию, за счет более динамичного роста другого. Таким образом, при описании алгоритма будем опираться на второй способ, как более общий.

Введем обозначения, которые нам потребуются для дальнейшего изложения. Пусть имеем в задаче имеется K критериев, по которым производится оптимизация, и как следствие мы имеем K оцениваемых параметров движение к цели которых необходимо контролировать. Обозначим через $T_k = \{t_1^k, t_2^k, ...\}$ множество точек контроля по критерию $k, k = \overline{1, K}$. Пусть $G_k, k = \overline{1, K}$ значение цели соответствующей целевой функции, которое нужно достигнуть за время T. Двусторонние ограничения $\underline{G_k} \le G_k \le \overline{G_k}, k = \overline{1, K}$, $\underline{T} \le T \le \overline{T}$ определяют допустимую область попадания в цель.

Алгоритм отыскания точек проведения контрольных мероприятий за открытой неоднородной системой с несколькими функциями цели.

Шаг **1**. Пусть на этапе планирования определены значения каждой целевой функции $G_k, k = \overline{1, K}$. Инициализируем переменную – точку контроля $t^* = 0$. Переход к шагу 2.

Шаг **2**. Задать целевую область, то есть определить допустимые отклонения $\underline{G_k} \le G_k \le \overline{G_k}, k = \overline{1, K}$, $\underline{T} \le T \le \overline{T}$. Переход к шагу 3.

Шаг **3**. Определить по каждому критерию максимальную $V_k^{\max}, k=\overline{1,K}$ и минимальную $V_k^{\min}, k=\overline{1,K}$ скорость движения к цели. Переход к шагу 4.

Шаг **4**. Для каждого критерия решить оптимизационную задачу (3.1)-(3.6) и найти точку контроля $t_k \in T_k, k=\overline{1,K}$, где под *F(t)* понимается соответствующая целевая функция, преобразованная к максимуму. Переход к шагу 5.

Шаг **5**. Во множестве точек контроля $\bigcup_{k=1}^{K} T_k$ выбрать новую минимальную точку большую, чем предыдущее $t^* = \min_{t>t^*}\left\{\bigcup_{k=1}^{K} T_k\right\}$, запомнить соответствующий этой точке критерий $k^*=k$ и «дождаться» момента контроля t^*, переход к шагу 6.

Шаг **6**. Проведение контрольных мероприятий в момент времени t^*. Если система попала в целевую область, то переход к шагу 8, иначе определение положения системы G^* относительно критерия k^*. Если положение системы позволяет достигнуть цели в рамках имеющихся ресурсов и времени, то переход к шагу 7, в противном случае переход в шагу 1 с начальным моментом времени $t_0 = t^*$ и имеющимися ресурсами.

Шаг **7**. Определение следующей точки контроля t'^*, посредством решения оптимизационной задачи (3.1)-(3.6) с пересчитанными параметрами $G_{k^*} = G_{k^*} - G^*$ и $t_{пл} = t_{пл} - t^*$. Корректировка значения следующей точки контроля относительно начального момента времени $t^* = t^* + t'^*$. Добавление полученной точки контроля в набор точек контроля T_{k^*}. Переход к шагу 5.

Шаг **8**. Система достигла цели. По точкам контроля можно восстановить реальную траекторию движения объекта.

Аналогично скалярному случаю описанному в предыдущем параграфе, приведенный алгоритм отвечают принципу минимальной достаточности контрольных мероприятий для достижения поставленной цели. Таким

образом, по алгоритму отыскания точек проведения контрольных мероприятий за открытой неоднородной системой с несколькими функциями цели, мы можем проводить своевременные контрольные мероприятия, приводящие к достижению поставленной многокритериальной цели.

Выводы

В третьей главе диссертации приведен метод решения задачи векторной оптимизации на основе теории трудности достижения цели. Описана стратегия действий каждой из сторон в случае конфликтных целевых функций для полицентроидных систем.

Разработан модифицированный метод Соболя решения оптимизационной задачи, в котором учитываются особенности ограниченный на искомые параметра, за счет чего достигается выигрыш во времени поиска решения.

Также на основе теории трудности достижения цели предложен вариант определения моментов проведения контрольных мероприятий над объектом движущимся к цели по запланированной траектории. Описанный метод поиска моментов контроля обладает свойством минимальной достаточности, гарантирующим достижений цели при минимуме точек контроля.

Представлен алгоритм трассологического метода контроля над экономической системой региона. Алгоритм составлен с учетом многокритериальности системы и обеспечивает контроль каждой цели по мере развития объекта.

ГЛАВА IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ РАЗВИТИЯ ОТКРЫТОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕГИОНА НА ОСНОВЕ ТРАЕКТОРИИ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ.

Описанные в предыдущих главах модели, средства учета качества и контроля над системой носили абстрактный характер. Действительно, под предъявляемые к системе требования подходит довольно широкий класс приложений. Часть аспектов была рассмотрена в общем виде, в силу того, что в каждом приложении будут свои особенности. Применим полученные теоретические результаты к такой открытой неоднородной системе как экономическая система региона. Выбор обоснован тем, что региональная экономическая система удовлетворяет предъявляемым к рассматриваемым системам требованиям, представляет существенный интерес с точки зрения моделирования развития с учетом качества, наличием достоверной статистической информации в официальных источниках для построения модели.

Для того, чтобы эффективно управлять процессами устойчивого регионального развития необходимо использование информационных технологий и экономико-математических моделей регионов [41]. Таким образом, задаче построения различных сценариев и стратегий развития региональной экономической системы и посвящена четвертая глава.

§1. Открытая неоднородная экономическая система региона: определение, базовый описатель.

Введем определение, на которое будем описаться при дальнейшем изложении материала. В данной работе условимся считать идентичными по

смыслу понятия экономическая система региона и региональная экономическая система (РЭС). Под *экономической системой региона* будем понимать совокупность хозяйствующих объектов, расположенных на определенной территории с достаточно однородными природными условиями и характерной направленностью развития производительных сил, вступающих в отношения по поводу экономической деятельности и обладающих целостностью и единством.

Региональная система, является сложной системой, так как состоит из «иерархически связанных территориальных образований разного уровня, которые сами по себе также являются сложными территориальными экономическими системами» [45].

В силу того, что в Воронежской области согласно статистике [28] насчитывается более 50 тысяч хозяйствующих субъектов (ХС), целесообразно произвести агрегирование элементов в более крупные агрегаты и уже их принять в качестве элементов $e_i \in E$ описателя. В других регионах сохраняется тот же порядок числа ХС. Существуют различные подходы к агрегированию элементов (напр., по классификаторам ОКОНХ, ОКВЭД). В настоящей работе для возможности использования публикуемых статистических данных используется деление РЭС по видам экономической деятельности (см. приложение 3).

В РЭС для учета взаимосвязей R между элементами экономической системы, обусловленных процессами производства, распределения, потребления и накопления общественного продукта, разрабатываются таблицы «затраты-выпуск» – межотраслевые балансы. В них в качестве единицы структурирования принимаются виды экономической деятельности.

Входом РЭС являются различного рода начальные параметры функционирования и ограничения на изменяющиеся параметры, например, начальный объем ресурсов. Состояние региональной экономической системы определяют те параметры, которые изменяются в процессе её

функционирования и определяют прямо или косвенно значение целевых функционалов системы. Передаточный функционал задается сложившимися основными экономико-производственными соотношениями системы. Далее будет приведен конкретный пример моделирования развития РЭС с указанием параметров определяющих вход, состояние и передаточный функционал системы.

Очевидно, что РЭС как сложная система имеет совокупность, иерархию целей разного уровня. Поэтому цель для региональной экономической системы будет задаваться вектором.

В региональной экономической системе будем трактовать развитие как экономический рост характеризуемый улучшением значений набора ключевых показателей в РЭС.

Отметим, что при моделировании развития экономики региона, по какому либо из сценариев, нас будут интересовать сбалансированные траектории развития. *Траектория развития региона называется сбалансированной (или балансово-равновесной), если для валовых выпусков видов экономической деятельности выполняются балансовые соотношения*. Важность построения балансово-равновесных траекторий диктуется необходимостью учета производственно распределительных процессов в экономике региона, соблюдения баланса между производством и потреблением. Балансовые соотношения возникают в модели межотраслевого баланса, которая будет рассмотрена ниже.

Все величины системы, кроме безразмерных показателей качества, будем измерять в единицах стоимости, если явно не указано иное.

Под ресурсами, которыми обладает управляющий центр, будем понимать финансовые средства – совокупную величину бюджетных (местных, целевых федеральных) и заемных (банковских) средств, имеющихся в распоряжении управляющего центра и предназначенных для

распределения на развитие экономики региона. Характер и источники возникновения средств в модели не детализируется.

Учет показателей качества в региональной экономической системе диктуется необходимостью недопущения перекосов в развитии региона. Также в настоящее время в министерствах и руководящих органах власти наметилась тенденция к стремлению повышения уровня и качества жизни населения, чего без улучшений показателей качества достичь нельзя. В работе [42] В. Л. Макаровым и А. Е. Варшавским отмечается аналогичное утверждение, что «в наиболее общем виде стратегическая задача социально-экономического развития страны на долгосрочную перспективу может быть сформулирована как обеспечение достойного уровня жизни основной части населения».

Вместе с тем, в большинстве известных нам подходах моделирования развития в качестве целевых функций используется максимизация валового выпуска. Следует отметить, что прирост валового выпуска может происходить как экстенсивными способами за счет расширения территории, роста населения, так и интенсивными за счет увеличения эффективности функционирования существующих субъектов хозяйственной деятельности, посредством внедрения новых современных проектов. Очевидно, что интенсивный путь увеличения валового выпуска является экономически более эффективным, поэтому считаем введение целевой функции отражающей интенсивный прирост валового выпуска является более эффективным подходом.

Предложенные направления совершенствования моделирования развития региона на основе экономической модели могут быть достигнуты путем введения индекса хозяйственного развития региона, введением целевой функции минимизирующей недоиспользование потенциала региона, учетом показателей качества для хозяйствующих субъектов государственного и муниципального вида собственности.

Анализ специфики функционирования региональной экономики, а также особенностей налоговой политики позволил выделить среди общего набора хозяйствующих субъектов особый класс, представляющий внешнюю среду системы, названный производственной лакуной, которой будет введен ниже. В известных нам подходах моделирования развития экономики региона не уделяется внимание такому явлению неоднородных экономических систем как производственная лакуна, которое, как будет отмечено далее, имеют существенное влияние на величину валового выпуска региона. На основе соотношений межотраслевого баланса будет разработан механизм прогнозирования такого явления как масштаб лакуны. Определение масштаба лакуны позволяет управляющему центру более адекватно прогнозировать налоговые поступления, регулировать занятость населения и получать более точные прогнозы развития экономики региона.

§2. Имитационная система формирования плана качественного развития региональной экономической системы.

Перед управляющим центром стоит задача развития и модернизации РЭС. Под модернизацией понимается усовершенствование, обновление объекта, приведение его в соответствие с новыми требованиями и нормами, техническими условиями, показателями качества [75]. Задачу модернизации планируется осуществлять по трем направлениям: максимизация индекса хозяйственного развития территории, минимизация общего уровня некачественности продукции и услуг среди ХС государственной и муниципальной собственности и максимизация уровня занятости населения в регионе. Каждому направлению соответствует целевая функция в описателе системы.

Необходимо разработать описатель РЭС, базовой основой которого будет являться совокупность ХС зарегистрированных в регионе, а также, в одном из сценариев, ХС присутствующих в регионе, использующих трудовые ресурсы региона, но непосредственно не платящих налогов в нем. Имеющийся в регионе набор N хозяйствующих субъектов различных форм собственности разделим на три множества: государственные и муниципальные ХС – N_1, N_2 – субъекты частной и прочих форм собственности, зарегистрированные в регионе, и N_3 – лакуны – ХС находящиеся на территории региона, но не подчиненные управляющему центру (подробнее будут рассмотрены в третьем параграфе). Также в одном из сценариев развития будут учитываться гипотетические элементы N_4, на основе которых происходит определение перспективных направлений развития РЭС. Гипотетические элементы в РЭС – это проекты создания новых хозяйствующих субъектов. Таким образом, набор N хозяйствующих субъектов различных форм собственности согласно системному описанию представим в виде

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4,$$

где N_4 – множество гипотетических элементов в некоторых сценариях может отсутствовать. Для базового описателя набор элементов состоит из $N = N_1 \cup N_2$.

Считается, что известна матрица распределения H между видами экономической деятельности, составленная за базовый год. Матрица H определяет отношения между элементами множества и структуру. Таким образом, базовый описатель есть

$$S_{исх} = (N, H).$$

Опишем целевые функционалы системы. В обобщенном описателе системы введены четыре целевых функции, что накладывает существенное ограничение на выбор методов решения. Далее будет предложен способ

объединения всех целевых функций в одну на основе теории трудности достижения цели.

Первая целевая функция – максимизация индекса хозяйственного развития территории, зависит от ограничений межотраслевого баланса и уровня трудовых ресурсов в денежном выражении определяемых моделью миграции трудовых ресурсов.

Минимизация недоиспользования потенциала $\Pi - X \to \min$ зависит от ограничений задающих перераспределение финансовых средств между видами экономической деятельности, ограничений межотраслевого баланса, определяющих валовой выпуск региона и в одном из сценариев модели миграции трудовых ресурсов.

Ограничения перераспределения дополнительных финансовых средств определяют величину улучшений качества функционирования субъектов государственной и муниципальной форм собственности. Показатели качества описываются величиной трудности достижения цели, функции прироста качества построены с помощью обобщенных операций над элементами трудности достижения цели.

Уровень занятости определяется напрямую через формулу трудности достижения цели и зависит от текущего уровня занятости, максимально возможного в данном регионе и минимально необходимого уровня занятости.

Приведем схему, описывающую наиболее полный сценарий развития с указанием влияния группы ограничений на приведенные целевые функции:

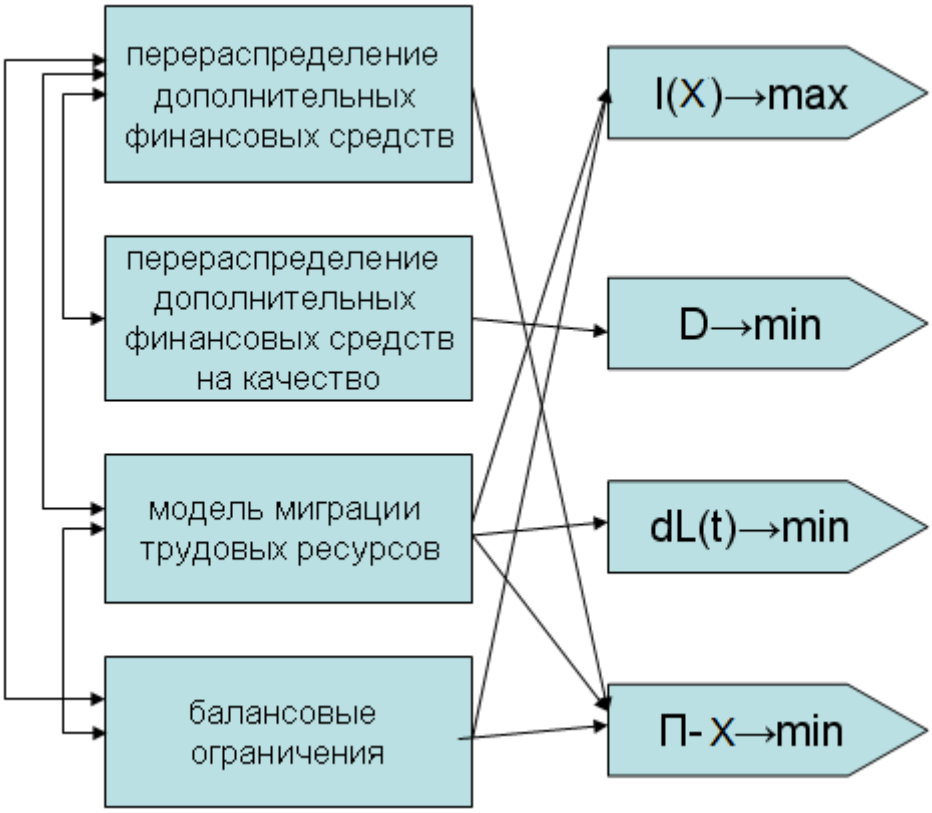


Рисунок 4.1. Схема и связи модели развития РЭС.

Как уже упоминалось, оценку уровня развития региона целесообразно проводить по нескольким критериям не только количественным, но и качественным. Одновременный учет количественных и качественных показателей необходим в силу того, что зачастую улучшение одного показателя сопровождается ухудшением другого. Важными количественными показателями, с нашей точки зрения, являются валовой выпуск, эффективность использования потенциала региона и уровень занятости населения. Как уже упоминалось, прирост валового выпуска может происходить как экстенсивными способами за счет расширения территории, роста населения, так и интенсивными за счет увеличения эффективности функционирования существующих субъектов хозяйственной деятельности, посредством внедрения новых современных проектов. Очевидно, что интенсивный путь увеличения валового выпуска является экономически более эффективным. Математически это можно отразить через индекс хозяйственного развития территории, который представляет собой среднее

геометрическое валового выпуска на одного человека и валового выпуска на единицу площади, скорректированное на коэффициент k

$$I = k\sqrt{\frac{X}{P}\frac{X}{S}} \to \max \qquad (4.1)$$

где X – суммарный валовой выпуск, P – население региона, S – площадь территории (тыс. км^2), в известной нам литературе k принимают равным 0,1. Индекс характеризует эффективность использования трудовых и земельных ресурсов при производстве валового продукта. Например, два региона могут иметь сравнительно одинаковые значения валового выпуска, но регион меньший по площади, будет иметь индекс хозяйственного развития больше, так как он использует свои ресурсы (земельные) эффективнее. Аналогично с численностью населения, при прочих равных условиях индекс будет больше у того региона, который имеет большую эффективность труда.

Говоря об эффективном функционировании экономики региона важно повышать уровень использования потенциала. Поэтому целесообразно ввести целевую функцию минимизирующую уровень недоиспользования экономического потенциала региона. Для определения потенциала региона будем использовать методику описанную в работе [9]. Оценка потенциала региона базируется на использовании производственных функций видов экономической деятельности вычисленных в точке приращения ресурсов. Таким образом, потенциал в нашей модели будет представлен максимально возможным валовым выпуском. Величина использования потенциала будет определяться на основе решения части ограничений модели, описанных в работе [51]. Введем целевую функцию, отражающую разницу между потенциалом региона и фактическим валовым выпуском:

$$\Pi(t) - X(t) \to \min . \qquad (4.2)$$

Для субъектов экономической деятельности государственной и муниципальной собственности целесообразно учитывать качественные показатели их функционирования. Учет качества в социальных сферах важен

с точки зрения повышения уровня и качества жизни населения. Для этого в работе предусмотрена методика оценки и работы с показателями качества на основе теории трудности достижения цели. Данный подход обоснован тем, что в экономических моделях необходима полноценная операционная база – алгебраическая система для оперирования оценками качества. Причем операционные основы должны учитывать специфику оценок качества. Будем считать, что за предысторию функционирования РЭС накоплен набор показателей, позволяющих определить влияние вложенных финансовых средств на изменение качества, т.е. задана функция прироста качества, которые ниже будут рассмотрены подробнее.

Важным социально-экономическим показателем являются уровень занятости населения. Поэтому важно учитывать его при моделировании развития региона. Оценивать уровень занятости населения планируется с использованием теории трудности достижения цели. Именно, имея данные по количеству трудоспособного населения в регионе можно определить максимальное значение L^{max} числа занятых, а L^{min} – минимальное значение числа занятых можно определить, например, как наименьшее число занятых при котором экономика региона может существовать. Перейдя к безразмерным величинам $\mu_L = \dfrac{L}{L^{\max}}$ и $\varepsilon_L = \dfrac{L^{\min}}{L^{\max}}$, можно вычислить значение коэффициента ТДЦ $d_L = \dfrac{\mu_L(1-\varepsilon_L)}{\varepsilon_L(1-\mu_L)}$ по уровню занятости населения. В данном случае, переход к коэффициентам ТДЦ удобен для решения модели, поскольку с помощью обобщенных операций над коэффициентами ТДЦ несколько целевых функции можно объединить в одну.

Приращение ресурсов в системе зависит от величины дополнительно выделяемых финансовых средств *Ф*. В частности за счет приращения величины ресурсов в региональной экономике производятся процессы модернизации. Выделение административным центром средств субъектам

необходимо для движения к общей цели – развитию региона. Считается, что на весь период планирования считаются известными величины дополнительных финансовых ресурсов $\Phi(t), t = \overline{t_0, T}$.

Приведем соотношения, которые будут задавать передаточный функционал системы, переводящий одно состояние в другое.

Пусть каждый производственный элемент РЭС выпускает продукцию, используя два основных ресурса: труд (L) и капитал (K). Под капиталом понимаются ресурсы, которые могут быть использованы в производстве товаров или оказании услуг. Пусть для элементов из N_1 и N_2 восстановлена производственная функция, отражающая максимально возможный объем выпуска (Y) при заданных ресурсах.

Предполагается, что имеется предыстория функционирования региона, за которую по каждому виду экономической деятельности накоплены данные по валовому выпуску ВЭД $V_i(t), i = \overline{1,n}, t \in [T_1, T_2]$, величины капитала $K_i(t), i = \overline{1,n}, t \in [T_1, T_2]$ и трудовых ресурсов $L_i(t), i = \overline{1,n}, t \in [T_1, T_2]$ в денежном выражении. Под капиталом понимаются все ресурсы, которые имеются в распоряжении хозяйствующего субъекта и используются для производства товаров или услуг. Под денежным выражением трудовых ресурсов понимается величина фонда оплаты труда. На основе этих данных восстанавливают вид производственных функций $V_i = f_i(K_i, L_i), i = \overline{1,n}$, характеризующих зависимость валового выпуска ВЭД от капитала и труда. Производственная функция здесь понимается в её классическом определении.

Приведем описание набора соотношений передаточной функции системы и отвечающих за перераспределение дополнительных финансовых средств:

$$K_i(t) = K_i(t-1) + \beta_i^K(t)\Phi(t) - d_i K_i(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T, \quad (4.3)$$

$$L_i(t) = L_i(t-1) + \beta_i^L(t)\Phi(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T, \quad (4.4)$$

$$0 \le \underline{\beta_i^K}(t) \le \beta_i^K(t) \le \overline{\beta_i^K}(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T, \quad (4.5)$$

$$0 \le \underline{\beta_i^L}(t) \le \beta_i^L(t) \le \overline{\beta_i^L}(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T, \quad (4.6)$$

начальные условия:

$$K_i(t_0) = K_i^0,\ i = \overline{1,N},\ L_i(t_0) = L_i^0,\ i = \overline{1,n}. \quad (4.7)$$

В приведенных ограничениях коэффициенты $\beta_i^K(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T$ и $\beta_i^L(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T$ называются коэффициентами перераспределения дополнительных финансовых средств $\Phi(t), t = \overline{t_0, T}$ и подлежат определению в ходе решения системы. На коэффициенты перераспределения накладываются двусторонние ограничения (4.5)-(4.6), с целью недопущения недофинансирования какого-либо вида экономической деятельности, например, социально значимого. Коэффициенты перераспределения определяют состояние системы в момент времени *t*. Коэффициент выбытия основных фондов $d_i, i = \overline{1,n}$ считается заданным и неизменным на всем горизонте планирования.

Отметим, что начальные условия $K_i^0,\ L_i^0,\ i = \overline{1,n}$, границы коэффициентов перераспределения финансовых средств $\underline{\beta_i^K}(t), \overline{\beta_i^K}(t), \underline{\beta_i^L}(t), \overline{\beta_i^L}(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T$ и объем этих средств $\Phi(t), t = t_0 + 1,..,T$ относятся к входу системы. Переменные $K_i(t), \beta_i^K(t), L_i(t), \beta_i^L(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T$ относятся к состоянию системы, меняющемуся под воздействием передаточного функционала.

Приведем набор ограничений определяющих значения валовых выпусков на основе балансовых соотношений

$$X_j(t) \ge \sum_{i=1}^{n} h_{ij} X_i(t) + d_j K_j(t) + L_j(t) + \mathrm{Pr}_j(t), j = \overline{1,n} \quad (4.8)$$

$$X_i(t) \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} W_j(t) + Y_i(t), i = \overline{1,n} \quad (4.9)$$

$$W_j(t) = \frac{\varphi_j X_j(t) - K_j(t)}{\xi_j} + d_j K_j(t), j = \overline{1,n} \qquad (4.10)$$

Как ранее отмечалось, предполагается, что есть таблица межотраслевого баланса за базовый год, на основе которой можно определить коэффициенты распределения $h_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ и коэффициенты затрат $a_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$. Считается, что коэффициенты распределения и затрат неизменны на весь горизонт планирования. Кроме того, заданными и неизменными считаются коэффициент технологической структуры капитальных вложений b_{ij}, коэффициент перевода в среднегодовые показатели $\xi_j, j = \overline{1,n}$ (поскольку мы будем рассматривать всегда год целиком, то в практических расчетах он будет равен единице) и коэффициент фондоемкости продукции $\varphi_j, j = \overline{1,n}$. Выражение (4.10) есть объем капитальных вложений и характеризует величину конечного продукта, идущего на восстановление основных фондов. Будем считать, что возможно составить прогноз значений прибыли по видам деятельности $\Pr_j(t), j = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,...,T$ и значения конечного продукта $Y_i(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,...,T$ на весь период планирования. Например, можно допустить, что изменение конечного спроса зависит от изменения реальных доходов населения и рост или убыль прибыли отрасли зависит от валового выпуска отрасли. Опираясь на сделанные допущения можно в модели рассчитывать конечный спрос на будущие периоды на основе прогноза изменения реальных доходов населения. Для прогнозирования прибыли на основе данных по валовому выпуску, можно, например, рассчитать процент прибыли в валовом выпуске за базовый год, и далее для каждого прогнозного года будем считать прибыль как процент от валового выпуска. Также можно условно зафиксировать величину конечного продукта и прибыли на уровне базового года.

В ограничениях (4.8)-(4.10) величины $h_{ij}, d_j, \Pr_j(t), X_i^B, X_j^B, b_{ij}, Y_i(t), \varphi_j, \xi_j, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}, t=t_0+1,...,T$ относятся к параметрам системы, а $W_j(t), K_j(t), L_j(t), j=\overline{1,n}, t=t_0+1,..,T$ – состоянию системы.

Теперь можем перейти к описанию первого базового сценария развития региональной экономической системы – **сценарию развития РЭС на основе максимизации использования потенциала региона.**

В дополнение к сделанным предположениям и ограничениям, выпишем выражения, определяющие значения параметров в целевых функциях (4.1), (4.2):

$$X_i(t) \le f_i(K_i(t), L_i(t)), i=\overline{1,n}, \tag{4.11}$$

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(K_i(t), L_i(t)), \tag{4.12}$$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t). \tag{4.13}$$

Сумма значений производственных функций видов экономической деятельности (4.12) определяют потенциал региона – теоретически достижимое значение выпуска при оптимальном использовании ресурсов. Выражение (4.11) определяет, что фактическое значение валового выпуска каждого вида экономической деятельности не превышает потенциала.

Таким образом, набор ограничений (4.3)-(4.12), в котором коэффициенты перераспределения пронормированы, с целевыми функциями (4.1)-(4.2) задают базовый сценарий развития на основе максимизации использования потенциала региона. В базовом описателе учтены только количественные характеристики функционирования региона, представленные двумя наборами ограничений: перераспределение финансовых средств (4.3)-(4.7) определяет потенциал региона и балансовые

ограничения (4.8)-(4.10) определяют соотношения между производством и потреблением.

Выпишем описатель приведенной выше динамической системы. С целью сокращения записи описателя будем применять композицию описателей, когда в одной записи будет присутствовать описатель более низкого уровня. Как уже отмечалось выше, базовый описатель системы есть

$$S_0 = \langle N_1 \cup N_2; H \rangle. \qquad (4.14)$$

Введем на его основе описатель функционирующей системы, в котором передаточный механизм («функция») F задается набором ограничений (4.3)-(4.12), вход системы есть вектор

$$In(t) = \left\{ K_i^0,\ L_i^0, \underline{\beta_i^K}(t), \overline{\beta_i^K}(t), \underline{\beta_i^L}(t), \overline{\beta_i^L}(t), \Phi(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T \right\},$$

состояние системы описывается вектором

$$Z(t) = \left\{ K_i(t), \beta_i^K(t), L_i(t), \beta_i^L(t), W_i(t), i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T \right\},$$

выход есть вектор валового выпуска $X(t)$. Введем в описатель системы время, таким образом, получим функционирующую динамическую систему:

$$S_1 = \langle S_0; (t_0, t, T); (In(t)); (X(t) = F(In(t), Z(t))) \rangle. \qquad (4.15)$$

Введем целевой функционал в описатель системы S_1, для чего определим вектор параметров системы

$$A = \left\{ h_{ij}, d_j, \mathrm{Pr}_j(t), X_i^B, X_j^B, b_{ij}, Y_i(t), \varphi_j, \xi_j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,...,T \right\}.$$

Целевой функционал $\Phi(X, A)$ состоит их двух целевых функций (4.1) и (4.2). Ниже будет описан способ объединения целевых функций в одну. Теперь можем привести описатель динамической целевой функционирующей системы:

$$S_2 = \langle S_1; \Phi(X, A) \rangle. \qquad (4.16)$$

Введение описателя и рассмотрение вопроса с точки зрения системного подхода позволяет проверить систему на устойчивость [69].

Сценарий развития РЭС на основе модернизации и учета показателей качества.

Рассмотрим сценарий, при котором в модели учитываются показателя качества функционирования видов экономической деятельности среди хозяйствующих субъектов государственной и муниципальной форм собственности.

Ограничения данной группы задаются через коэффициенты трудности достижения цели с помощью обобщенных операций, которые были описаны во второй главе настоящей работы.

По аналогии с перераспределением средств на повышение уровня количественных показателей (капитала и труда) введем выражения для показателей качества. Уравнение перераспределения средств на улучшение качества между существующими элементами РЭС:

$$d_i^K(t) = \overline{G}_i^K(\kappa_i^K(t) \cdot \Phi(t), \overline{A}_i^K(t), Y_i(t), d_i^K(t-1)), \tag{4.17}$$

$$d_i^L(t) = \overline{G}_i^L(\kappa_i^L(t) \cdot \Phi(t), Y_i(t), d_i^L(t-1)), \tag{4.18}$$

двусторонние ограничения на коэффициенты перераспределения и уровень амортизации

$$0 \le \underline{\kappa_i^K}(t) \le \kappa_i^K(t) \le \overline{\kappa_i^K}(t), i \in N_1, \tag{4.19}$$

$$0 \le \underline{\kappa_i^L}(t) \le \kappa_i^L(t) \le \overline{\kappa_i^L}(t), i \in N_1, \tag{4.20}$$

$$0 \le \overline{A}_i^K(t) \le 1. \tag{4.21}$$

Начальные показатели качества:

$$d_i^K(t_0) = d_{0i}^K,\ i \in N_1,\ d_i^L(t_0) = d_{0i}^L,\ i \in N_1 \tag{4.22}$$

Условие нормировки коэффициентов перераспределения:

$$\sum_{i \in N_1} (\beta_i^K(t) + \beta_i^L(t) + \kappa_i^K(t) + \kappa_i^L(t)) = 1, \forall t = t_0 + 1,..,\mathrm{T}. \tag{4.23}$$

Смысловое значение уравнений (4.17)-(4.18) аналогично (4.5)-(4.6), только записаны они в терминах показателей качества. Именно

дополнительные средства $\Phi(t)$ перераспределяются с учетом уровня амортизации и нагрузки на ресурсы в формуле (4.17) между подсистемами с начальными условиями (4.22). Один из возможных видов функции прироста качества (2.17) приведен во второй главе.

Введем целевую функцию по качеству, которая является обобщенной линейной комбинацией коэффициентов трудностей достижения цели по капиталу и труду каждого вида экономической деятельности

$$D = (\lambda_1^K \otimes d_1^K(T) \oplus \lambda_1^L \otimes d_1^L(T)) \oplus ...$$

$$...\oplus (\lambda_n^K \otimes d_n^K(T) \oplus \lambda_n^L \otimes d_n^L(T)) \to \min . \qquad (4.24)$$

Таким образом, набор целевых функций (4.1), (4.2), (4.24) определяют целевой функционал $\Phi(X, A)$, а набор ограничений (4.3)-(4.12), (4.17)-(4.23) задают функционал $\Phi(X, Z)$ в описателе РЭС с учетом показателей качества. При этом вектор параметров состояния пополниться коэффициентами перераспределения финансовых средств на качество

$$Z(t) = \{K_i(t), \beta_i^K(t), L_i(t), \beta_i^L(t), d_i^K(t), \kappa_i^K(t), d_i^L(t), \kappa_i^L(t), W_i(t),$$
$$i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T\}.$$

Вход системы примет вид

$$In(t) = \{K_i^0,\ L_i^0, d_{0i}^K, d_{0i}^L, \underline{\beta_i^K}(t), \overline{\beta_i^K}(t), \underline{\beta_i^L}(t), \overline{\beta_i^L}(t), \Phi(t), \underline{\kappa_i^K}(t), \overline{\kappa_i^K}(t), \underline{\kappa_i^L}(t), \overline{\kappa_i^L}(t),$$
$$i = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,..,T\}.$$

Вектор параметров:

$$A = \{h_{ij}, d_j, \mathrm{Pr}_j(t), X_i^B, X_j^B, b_{ij}, Y_i(t), \varphi_j, \xi_j, \overline{A}_i^K(t), \lambda, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, t = t_0 + 1,...,T\}.$$

Сценарий развития РЭС на основе модернизации и внедрения новых ХС.

Модернизация и внедрение новых хозяйствующих субъектов необходимый элемент развития экономики региона. В настоящее время, согласно статистическим данным [29], наблюдается значительный, более

50%, износ основных фондов, поэтому актуален вопрос их модернизации, введения в регион новых ХС, использующих современную технологическую базу. При достаточно большом горизонте планирования, превышающем срок окупаемости, можно оценить вклад нового ХС в валовой выпуск региона.

Под развитием РЭС на основе модернизации будем понимать обновление входящих в систему элементов посредством введения инноваций, повышения уровня качества существующих элементов, достижения определенных количественных и качественных показателей. Последнее согласуется с определением модернизации, приведенным в современном экономическом словаре [75]: «*Модернизация* – усовершенствование, обновление объекта, приведение его в соответствие с новыми требованиями и нормами, техническими условиями, показателями качества».

Пусть имеется набор N_4 проектов новых ХС разделенных по видам экономической деятельности. Каждый такой проект будем именовать гипотетическим элементом в системе. Для каждого гипотетического элемента известна производственная функция, согласно которой он должен функционировать, и величины инвестиций $K_i(t), t = t_0 + 1,...,T$ на каждый год планирования. Учет качества для гипотетических элементов в системе не производится.

Выпишем уравнение (возможного) выделения средств на внедрение гипотетических элементов:

$$\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \sum_{i \in N_4} \gamma_i K_i(t), t = t_0 + 1,...,T, \tag{4.25}$$

$$\gamma_i \in \{0,1\}, i \in N_4, \tag{4.26}$$

Отметим, что остаточная величина перераспределяемых средств зависит от инвестирования в гипотетические элементы и описывается уравнением (4.25).

Сценарий развития РЭС с учетом движения трудовых ресурсов.

В данном сценарии учитывается миграция трудовых ресурсов между видами экономической деятельности, которая вызывается неоднородностью экономической системы, что отчасти вызвано различием в оплате труда между различными сферами экономики региона. Предполагается, что поток трудовых ресурсов от одного вида экономической деятельности в другой зависит от некоторого потенциала. В качестве такого потенциала примем средний уровень заработной платы в определенной сфере экономики.

Движение трудовых ресурсов между всеми существующими $\{N_1 \cup N_2 \cup N_3\}$, а также гипотетическими ХС $\{N_4\}$ будем описывать опираясь на методику предложенную в работе [100, 101]. Приведем основные положения и соотношения:

- ω_i^s – средняя оплата труда в *s*-ой группе *i*-ого элемента РЭС;

- l_{ij}^{sk} – поток ресурса из *s*-ой группы *i*-го элемента РЭС в *k*-ую группу *j*-ого элемента. Под группой будем понимать относительно однородное, с точки зрения уровня оплаты труда, множество трудовых ресурсов в *i*-м виде экономической деятельности. Будем считать, что величина потока трудовых ресурсов между соответствующими группами определяется как:

$$l_{ij}^{sk} = A_{ij}^{sk} \cdot \left|\tilde{\omega}_i^s - \tilde{\omega}_j^k\right|^{\phi} \cdot sign(\tilde{\omega}_i^s - \tilde{\omega}_j^k)$$

где $\tilde{\omega}_i^s = \dfrac{\omega_i^s}{\max\limits_{i,s} \omega_i^s}$, $\tilde{\omega}_j^k = \dfrac{\omega_j^k}{\max\limits_{j,k} \omega_j^k}$ – нормированная оплата труда. Коэффициент в выражении для потоков есть сумма $A_{ij}^{sk} = \sum\limits_n a_{ij}^{snk}$ коэффициентов потоков из подгрупп L_i^{sn}: $a_{ij}^{snk} = A_0 \cdot L_i^{sn} \cdot \left(1 - \dfrac{z_i^{sn}}{z_\kappa}\right)^{\gamma} \left(\dfrac{k}{s}\right)^{\eta}$, где A_0 – постоянный коэффициент, определяющий номинальную величину

потока, L_i^{sn} – численность соответствующей группы работников с возрастом z_i^{sn}, z_κ – максимальный возраст, γ, η – показатели степени, регулирующие влияние факторов, также предполагается, что группы ранжированы по важности (престижности работы) $k<s$.

После определения действительных потоков трудовых ресурсов уравнение динамики трудовых ресурсов в математической модели РЭС может быть уточнено следующим образом:

$$\Lambda_i(t) = \Lambda_i(t-1) + \sum_{j,k,s} l_{ij}^{sk}(t), \tag{4.27}$$

$$\Lambda_i(t_0) = \Lambda_i^0,\ i \in N. \tag{4.28}$$

Общее количество занятых среди трудоспособного населения в регионе оценивается следующим выражением:

$$\Lambda(t) = \sum_N \Lambda_i(t) + l(out) + l(in), \tag{4.29}$$

где $l(out)$ – величина, определяющая выбытие работников из региона, $l(in)$ – пополнение трудовых ресурсов.

Параметры $\Lambda_i(t)$ и $L_i(t)$ связаны между собой коэффициентом средней оплаты труда ω_i в i-м виде экономической деятельности

$$\Lambda_i(t) = \omega_i(t) L_i(t).$$

Значение коэффициента ω_i берется из статистических данных (см. напр. [27]). Аналогично задается связь общей численности трудовых ресурсов $\Lambda(t)$ с $L(t)$

$$\Lambda(t) = \omega(t) L(t),$$

где $\omega(t)$ – средняя оплата труда в регионе.

Введение соотношений описывающих миграцию трудовых ресурсов позволяет более адекватно прогнозировать валовой выпуск региональной экономической системы.

Как уже упоминалось выше, экономика региона является неоднородной системой, поэтому помимо задания элементов, связей и структуры необходимо ввести в описатель системы неоднородные элементы. К этому вопросу мы и переходим.

§3. Сущность и особенности выделения нового элемента региональной экономической системы – производственной лакуны региона

В ходе практического моделирования РЭС возникает необходимость учитывать влияние элементов, организационно не подчиненных административному центу и составляющих внешнюю среду для системы. Актуальность исследования влияния таких элементов на развитие региона, подчеркивается на примере Воронежской области. В [24] руководителем управления Федеральной налоговой службы указано, что «50% налога на прибыль в Воронежской области дают вертикально интегрированные компании, головные структуры которых «прописаны» в других регионах», там же отмечено, что «спрогнозировать объем этих сборов сложно». При составлении статистической информации величину валового выпуска, фактически произведенного на территории региона с привлечением трудовых ресурсов региона, для ХС из внешней лакуны относят к региону «прописки» головного подразделения субъекта. Это существенно завышает величину валового регионального продукта (ВРП) в рыночных ценах, произведенного на территории местонахождения головной компании и одновременно занижает ВРП территорий, где расположены другие подразделения компании. Все это приводит к значительным искажениям объема и динамики ВРП в рыночных ценах по отдельным субъектам Российской Федерации [28]. Описанный факт подчеркивает необходимость учета подобных

хозяйствующих субъектов при моделировании развития экономики региона и задании описателей системы экономики региона.

Набор хозяйствующих субъектов, о которых выше шла речь, составляющие неоднородность в структуре элементов экономики региона будем называть производственными лакунами. Вообще слово лакуна обозначает пробел, пропуск, недостающее, неясное, темное место[4]. Применительно к экономике региона зададим следующее определение: под *производственной лакуной* понимается *совокупность субъектов хозяйственной деятельности, которые вступают в материальные, организационные и производственные отношения с другими хозяйственными субъектами (ХС) региона, но организационно не подчинены административному центру и не зарегистрированы как юридические лица на территории региона*. Производственную лакуну можно разделить на два противоположных по свойствам вида: внешнюю – хозяйствующие субъекты зарегистрированные в других регионах, но ведущие свою производственную деятельность в регионе и не платящие в нем налоги (в частности налог на добавленную стоимость), и внутреннюю – хозяйствующие субъекты своего региона, ведущие деятельность за пределами региона, но платящие налоги в регионе «прописки». Внутренняя лакуна одного региона является внешней для другого. Обособленное положение этих хозяйствующих субъектов диктует необходимость выявление их вклада в общее развитие региона.

Ранее вводился описатель для неоднородных систем

$$S = \left\langle (e_i, N), (r_{ij}, R), Cm(e,r); e_L \right\rangle,$$

здесь присутствует e_L – производственная лакуна только как отдельно выделенный элемент в силу того, что про связи, которого с другими элементами при определении системы не известно ничего.

Описатель функционирующей системы с производственной лакуной

[4] Словарь иностранных слов.- 11-е изд., стереотип.- М.:Рус.яз., 1984.-608 с.

$$S_{\Phi} =< S_{исх}; X; Y; F(X,Z); (e_L; X_L; Y_L) >,$$

здесь отсутствует передаточная функция для e_L, вследствие отсутствия данных у административного центра информации об его функционировании. Методика определения входных и выходных потоков для производственной лакуны будет рассмотрена ниже.

Для динамической системы имеем следующий описатель с учетом неоднородных объектов

$$S_t =< S_{исх}; (t_0, t, T); (X_t, G_X); (U_t, G_u); (Y_t = F(Z(t))); (X_L(t), Y_L(t)) >,$$

здесь, как и в предыдущем случае, для e_L в описателе выделены входные и выходные потоки изменяющиеся во времени.

Для оценки масштаба $(X_L(t), Y_L(t))$ лакуны региона необходимо, с нашей точки зрения, предварительно решить следующие проблемы:

- в силу того, что производственная лакуна использует ресурсы региона, то для её масштабов целесообразно определить экономический потенциал региона;
- определить уровень использования экономического потенциала региона;
- разработать модели и методы расчета характеристик производственной лакуны региона.

Для оценки экономического потенциала и уровня его использования предполагается использовать базовый сценарий развития РЭС. Способы расчета характеристик производственной лакуны базируются на основе анализа недоиспользования экономического потенциала и особым образом составленного межотраслевого баланса.

Рассчитанный потенциал региона есть значения выпусков видов экономической деятельности, которые составляют возможную траекторию развития региональной экономической системы и позволяют составить

специальную таблицу межотраслевого баланса (МОБ), в которой значения валового выпуска берутся на основе произведенных расчетов.

Ниже приведена специальным образом составленная таблица, которая позволяет выявить неучтенные элементы – производственные лакуны.

Таблица 4.1

МОБ с выделением лакуны.

	1	2	…	n	n+1	1	…	n_Y	КП	ВП
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$x_{1,n+1}$	y_{11}	…	$y_{1,ny}$	$Y_1=\Sigma y_{1k}$	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$x_{2,n+1}$	y_{21}	…	$y_{2,ny}$	$Y_2=\Sigma y_{2k}$	X_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$x_{n,n+1}$	y_{n1}	…	$y_{n,ny}$	$Y_n=\Sigma y_{nk}$	X_n
n+1	$x_{n+1,1}$	$x_{n+1,2}$	…	$x_{n+1,n}$	$x_{n+1,n+1}$	$y_{n+1,1}$	…	$y_{n+1,ny}$	$Y_{n+1}=\Sigma y_{n+1,k}$	X_{n+1}
1	z_{11}	z_{12}	…	z_{1n}	$z_{1,n+1}$					
…	…	…	…	…	…					
n_Z	$z_{nz,1}$	$z_{nz,2}$	…	$z_{nz,n}$	$z_{nz,n+1}$					
ЧП	$Z_1=\Sigma z_{i1}$	$Z_2=\Sigma z_{i2}$	…	$Z_n=\Sigma z_{in}$	$Z_{n+1}=\Sigma z_{i,n+1}$					
ВП	X_1	X_2	…	X_n	X_{n+1}					

В таблице 4.1 наряду с *n* видами экономической деятельности присутствует производственная лакуна, представленная как дополнительный *n*+1 элемент. Аналогично базовому варианту МОБ $x_{ij}, i=\overline{1,n+1}, j=\overline{1,n+1}$ есть величина потока ресурсов в денежном выражении из *i*-го элемента (вида экономической деятельности, лакуны) в *j*-й, $Y_i, i=\overline{1,n+1}$ есть конечный продукт вида экономической деятельности или лакуны, $Z_j, j=\overline{1,n+1}$ - чистый продукт, а $X_i, i=\overline{1,n+1}$ – валовой выпуск. Анализируя *n*+1 столбец таблицы можно определить структуру выпуска производственной лакуны по видам экономической деятельности. Аналогично по *n*+1 строке можно понять структуру затрат производственной лакуны.

Приведем формулы для нахождения структуры затрат и выпуска лакуны. Опираясь на основные балансовые соотношения, можем выписать выражение для определения распределения выпуска лакуны

$$x_{i,n+1} = X_i - Y_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, i = \overline{1,n}, \tag{4.30}$$

и аналогично можно выписать формулу структуры затрат лакуны

$$x_{n+1,j} = X_j - Z_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, j = \overline{1,n}. \tag{4.31}$$

Формулы (2.1), (2.2) также могут быть записаны в терминах коэффициентов распределения:

$$x_{i,n+1}(t) = X_i(t) - Y_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t), i = \overline{1,n}, \tag{4.32}$$

$$x_{n+1,j}(t) = X_j(t) - Z_j(t) - \sum_{i=1}^{n} h_{ij} X_i(t), j = \overline{1,n}. \tag{4.33}$$

В приведенных соотношениях коэффициенты $a_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ – есть коэффициенты прямых затрат, $h_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ – коэффициенты распределения.

Отметим, что величина потока лакуны $x_{i,n+1}(t), i = \overline{1,n}$ состоит из двух частей: величина лакуны, представленная хозяйствующими субъектами, головные офисы которых расположены вне региона, и величиной лакуны, представленной хозяйствующими субъектами нашего региона, но ведущих свою деятельность вне региона. Другими словами, первая часть использует ресурсы региона, но валовой выпуск учитывается в стороннем регионе, то есть имеет место занижение внешней лакуной величины валового выпуска региона. Вторая часть, напротив, завышает валовой выпуск региона, за счет того, что часть хозяйствующего субъекта расположена вне региона, использует его ресурсы, но учет ведется в нашем регионе. Таким образом, можно записать, что $x_{i,n+1}(t) = \vec{x}_{i,n+1}(t) - \overleftarrow{x}_{i,n+1}(t), i = \overline{1,n}$, где $\overleftarrow{x}_{i,n+1}(t), i = \overline{1,n}$

величина выпуска, уходящая из региона за счет внешней лакуны, а $\vec{x}_{i,n+1}(t), i=\overline{1,n}$ величина выпуска входящая в регион за счет внутренней лакуны. Аналогичные рассуждения можно провести и для затрат $x_{n+1,i}(t)=\overleftarrow{x}_{n+1,i}(t)-\vec{x}_{n+1,i}(t), i=\overline{1,n}$ с той разницей, что внутренняя лакуна за счет использования ресурсов другого региона занижает отражаемые в нашем регионе затраты, в то время как внешняя завышает.

Определив величину потоков лакуны за несколько временных периодов можно составить *функцию привлекательности региона*, характеризующую динамику изменения привлекательности региона с позиции размещения в нем производства сторонними (внешней средой) хозяйствующими субъектами:

$$\frac{d\overleftarrow{X}_{n+1}(t)}{dt}=k^X X(t)+k^P P(t)-k^l l(t)-k^R R(t)+o(t), \qquad (4.34)$$

здесь *X(t)* – валовой выпуск региона в целом, *P(t)* – население региона, *l(t)* – средняя оплата труда сложившаяся в регионе в период времени *t*, *R(t)* – показатель отражающий стоимость основных ресурсов регионе (электроэнергия, вода, аренда земли и т.п.), *o(t)* – константа, характеризующая влияние неучтенных факторов. При каждой переменной в функции привлекательности региона стоит коэффициент его влияния на общее значение функции. Функция привлекательности региона может быть уточнена при рассмотрении конкретного вида экономической деятельности

$$\frac{d\overleftarrow{x}_{i,n+1}(t)}{dt}=\overleftarrow{k}_i^X X_i(t)+\overleftarrow{k}_i^p P_i(t)-\overleftarrow{k}_i^l l_i(t)-\overleftarrow{k}_i^R R_i(t)+o_i(t), i=\overline{1,n}. \qquad (4.35)$$

В этом случае берутся более точные значения показателей рассматриваемого вида деятельности, как-то экономически активное население, занятое в этой сфере, средний уровень заработной платы, также может быть уточнен перечень и стоимость основных ресурсов вида экономической деятельности.

Приведем решение дифференциального неоднородного уравнения первого порядка (4.35), воспользовавшись методом вариации произвольной постоянной. Предварительно преобразуем уравнение (4.35):

$$\frac{d\bar{x}_{i,n+1}(t)}{dt} = \overleftarrow{k}_i^X \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) + x_{i,n+1}(t) + Y_i(t) \right) + \overleftarrow{k}_i^p P_i(t) - \overleftarrow{k}_i^l l_i(t) - \overleftarrow{k}_i^R R_i(t) + o_i(t).$$

Аналогично можно выписать и для затрат

$$\frac{dx_{n+1,j}(t)}{dt} = k_j^X \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}(t) + x_{n+1,j}(t) + Z_j(t) \right) + k_j^p P_j(t) - k_j^l l_j(t) - k_j^R R_j(t) + o_j(t).$$

При решении будем использовать первый вариант – через распределение выпуска, а для второго – структуры затрат все выкладки будут справедливы. Для сокращения записи уравнения введем вспомогательное обозначение

$$\overline{o_i}(t) = \overleftarrow{k}_i^X \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}(t) + Y_i(t) \right) + \overleftarrow{k}_i^p P_i(t) - \overleftarrow{k}_i^l l_i(t) - \overleftarrow{k}_i^R R_i(t) + o_i(t), \qquad (4.36)$$

где присутствуют все члены уравнения, кроме тех, что содержат $\bar{x}_{i,n+1}(t)$.

Тогда уравнение запишется в виде $\frac{dx_{i,n+1}(t)}{dt} = k_i^X x_{i,n+1}(t) + \overline{o_i}(t)$.

Согласно методу вариации произвольной постоянной, решим предварительно уравнение $\frac{dx_{i,n+1}(t)}{dt} = k_i^X x_{i,n+1}(t)$. В последнем уравнении переменные легко разделяются и решением является функция вида $x_{i,n+1}(t) = c \cdot e^{k_i^X t}$. Пусть $c = u(t)$, найдем выражение производной $\frac{dx_{i,n+1}(t)}{dt} = u'(t)e^{k_i^X t} + u(t)k_i^X e^{k_i^X t}$ и подставим его и найденную функцию в исходное уравнение, получим:

$$u'(t)e^{k_i^X t} + u(t)k_i^X e^{k_i^X t} = k_i^X u(t)e^{k_i^X t} + \overline{o_i}(t).$$

После взаимного уничтожения одинаковых членов, получим уравнение $u'(t)e^{k_i^X t} = \overline{o_i}(t)$, откуда после интегрирования имеем

$$u(t) = \int \overline{o_i}(t) e^{-k_i^X t} dt . \qquad (4.37)$$

Если в выражении (4.37) допустить, что $\overline{o_i}(t)$ есть набор констант $\{\overline{o_i^t}, t = \overline{1,n}\}$, которые задаются в начале и не меняются в течении всего года (или единичного интервала времени), то тогда можно взять интеграл $u(t) = \int \overline{o_i^t} e^{-k_i^X t} dt = \overline{o_i^t} \int e^{-k_i^X t} dt = \overline{o_i^t} \left(\frac{e^{-k_i^X t}}{-k_i^X} + c \right)$. Подставляя полученное выражение в $x_{i,n+1}(t) = u(t) \cdot e^{k_i^X t}$, имеем

$$x_{i,n+1}(t) = \overline{o_i^t} \left(\frac{e^{-k_i^X t}}{-k_i^X} + c \right) \cdot e^{k_i^X t} = \overline{o_i^t} \left(c e^{k_i^X t} - \frac{1}{k_i^X} \right). \qquad (4.38)$$

Подставив в (2.9) вспомогательное выражение (2.7) при допущении о наборе констант, получим

$$\overleftarrow{x}_{i,n+1}(t) = \left(\overleftarrow{k}_i^X \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^t + Y_i^t \right) + \overleftarrow{k}_i^p P_i^t - \overleftarrow{k}_i^l l_i^t - \overleftarrow{k}_i^R R_i^t + o_i^t \right) \left(c e^{\overleftarrow{k}_i^X t} - \frac{1}{k_i^X} \right). \qquad (4.39)$$

Откуда можем сделать вывод, что масштаб присутствия производственной лакуны в регионе растет экспоненциально от времени с коэффициентом k_i^X, характеризующим влияние валового выпуска на привлекательность региона для хозяйствующих субъектов из производственной лакуны.

Отметим, что формулы (4.32) и (4.39) различны, но отражают одну и ту же величину – выпуск производственной лакуны. Причем вторая строилась в предположении более долгосрочного прогноза.

Таким образом, опираясь на таблицу расширенного межотраслевого баланса и функции привлекательности региона мы можем узнать структуру затрат лакуны региона и распределение выпуска производственной лакуны по видам экономической деятельности, а также дать прогноз динамики развития производственной лакуны и опосредованных способов изменения пропорций в производственной лакуне. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Необходимость в изменении влияния внешней среды – присутствия в регионе внешней производственной лакуны по отношению к внутренней может возникнуть, например, в случае неблагоприятной ситуации в сфере занятости в каком-либо виде экономической деятельности. Если, например, в регионе наблюдается нехватка рабочей силы в определенном виде экономической деятельности, то увеличение присутствия внешней лакуны будет нецелесообразным, в то время как размещение производства рассматриваемого вида деятельности в другом регионе будет являться действенной мерой по уменьшению диспропорции в производстве. Напротив, если в регионе наблюдается переизбыток трудовых ресурсов по какому-либо виду экономической деятельности, то привлечение внешней лакуны поможет снизить безработицу в этой сфере экономики. Таким образом, управление лакуной выглядит перспективной мерой в разрешении ряда задач в управлении развитием экономики региона.

Также реструктуризация пропорций в производственной лакуне может потребоваться в случае необходимости изменения величины собираемых налоговых отчислений на добавленную стоимость. Увеличение присутствия внутренней лакуны способствует приросту собираемости налогов без нагрузки на ресурсы региона.

Поскольку производственная лакуна отчасти является неподконтрольным административному центру элементом экономической системы региона, то необходимость в *опосредованных* методах влияния на неё с целью реструктуризации пропорций между внутренней и внешней лакуной является актуальной задачей требующей решения. Для чего, опираясь на выражение (4.39) систематизируем в таблице влияние показателей системы на производственную лакуну.

Таблица 4.2

Характер влияния параметров системы на производственную лакуну.

Параметр	время	производств. потребление	конечный продукт	числ-сть населения	средн. з/п	стоим. ресурсов
Обозначение	$ce^{k_i^X t}$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^t$	Y_i^t	P_i^t	l_i^t	R_i^t
Действие на внутреннюю лакуну	Увелич.	Увелич.	Увелич.	Увелич.	Уменьш.	Уменьш.
Действие на внешнюю лакуну	Уменьш.	Уменьш.	Уменьш.	Уменьш.	Увелич.	Увелич.

Отметим, что при увеличении средней заработной платы и стоимости основных ресурсов отток производства из региона выглядит вполне логичным и предсказуемым, поскольку регион уже будет не столь привлекательным для размещения производства «своими» субъектами хозяйственной деятельности. В то время как влияние производственного и не производственного потребления уже не столь наглядно и без математических методов моделирования трудно прогнозируемо.

Зная суммарную величину присутствия производственной лакуны в регионе X_L и общий валовой выпуск региона X_Σ можно ввести индекс производственной лакуны региона, как $\lambda_L = \frac{X_L}{X_\Sigma}$. Данный индекс является аналогом индекса открытости системы. Индекс производственной лакуны позволяет понять, насколько сильно система подвержена влиянию внешней среды.

§4. Экспериментальные расчеты сценариев развития региональной экономической системы. Комплекс алгоритмов и программ.

Приведем описание комплекса программ, который реализует разработанные выше алгоритмы и может быть использован при экспериментальных расчетах сценариев развития РЭС.

В ходе диагностики региона определяются виды экономической деятельности представленные в регионе, которые будут элементами моделируемой системы. По каждому виду экономической деятельности на основе предыстории функционирования элементов восстановливаются производственные функции методом наименьших квадратов, для чего в программном комплексе предназначен модуль «Восстановление вида функции методом наименьших квадратов».

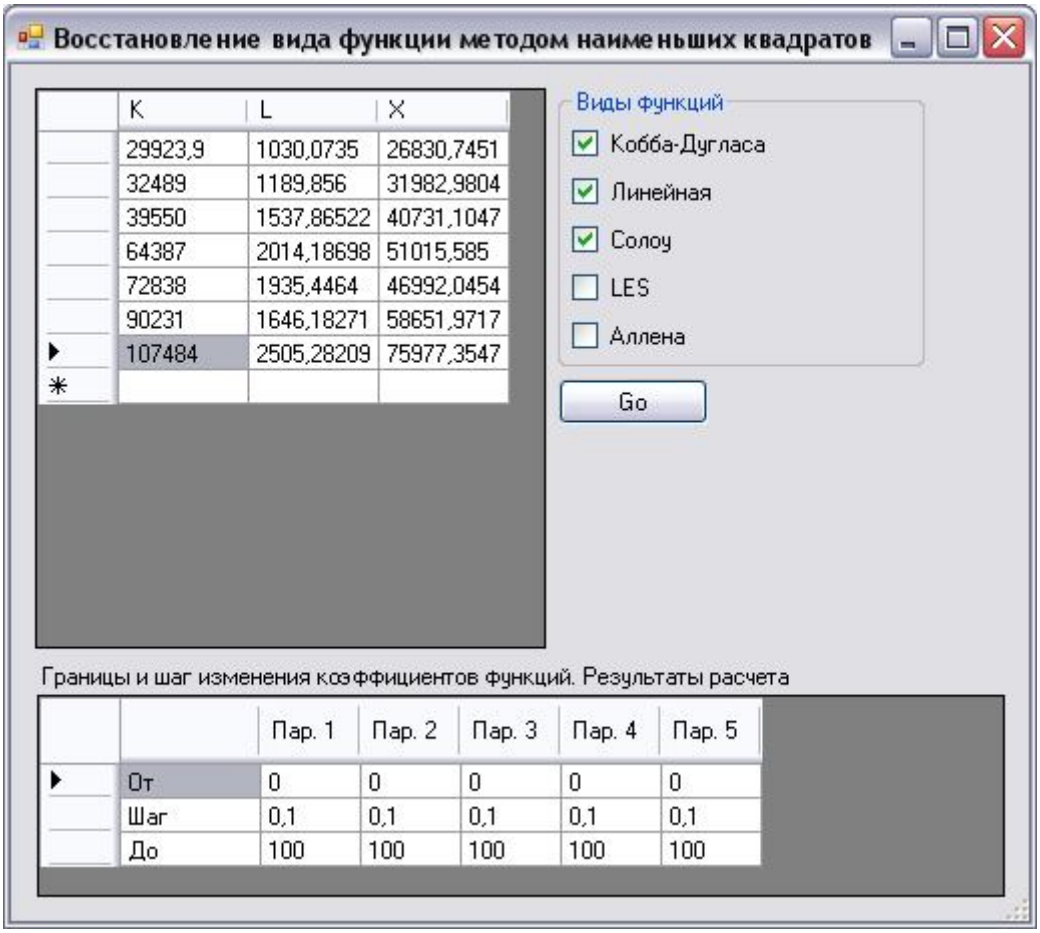


Рис. 4.2. Модуль восстановления аналитического вида функции.

Модуль позволяет по введенным временным рядам (капитала K, труда L и выпуска X) за один проход по всем коэффициентам для каждого

выбранного вида функций найти оптимальные их значения с заданной степенью точности и затем выбрать среди видов функций тот, который лучше всего аппроксимирует исходный ряд. С целью сокращения времени работы модуля возможно последовательное сокращение интервала поиска с одновременным увеличением точности нахождения коэффициентов. Примеры восстановленных функций будут приведены ниже.

Для восстановления функций прироста качества предварительно получают временной ряд характеристик какой-либо стороны производственного процесса. Например, это может быть набор характеристик определяющих качественную сторону трудовых ресурсов вида экономической деятельности. На основе этих характеристик составляется единый критерий качества, посредством коэффициентов трудности достижения цели и обобщенных операций. Для этого в программном комплексе предназначен модуль работы с характеристиками качества, который позволяет набор временных рядов нескольких характеристик свернуть в один временной ряд с использованием теории трудности достижения цели.

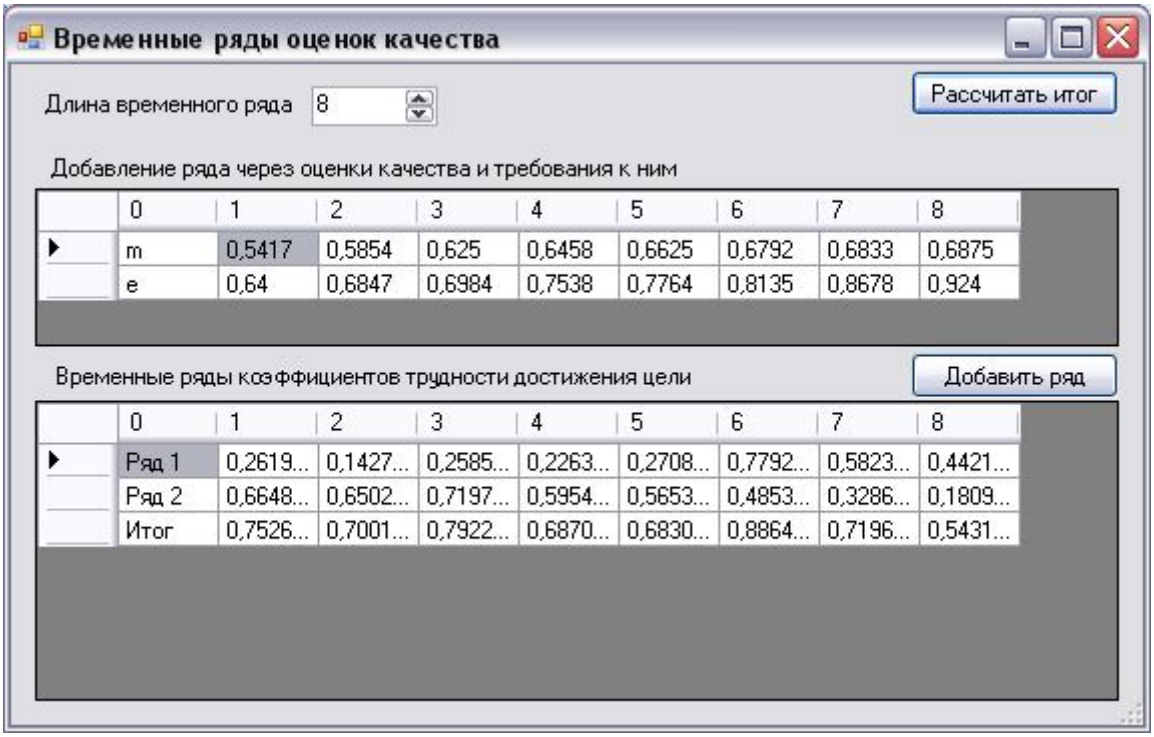


Рис. 4.3. Модуль для работы с оценками качества.

Далее составляется аналитический вид функции на основе теоретических посылок о характере влияния тех или иных показателей на итоговое значение найденного на предыдущем этапе значения качества – трудности достижения цели. Например, если требуется составить функцию прироста качества трудовых ресурсов от объема вложенных средств и от значения качества в предыдущий момент времени, то необходимо выяснить, как влияют эти два параметра на итоговое значение. Теоретически значение качества в предыдущий момент времени должно прямо пропорционально влиять на итог в следующий момент, так как это одна и та же характеристика, только взятая в разные моменты времени $G_i^L(...,d_1^L(t-1),...) = ...\lambda_i \otimes d_i^L(t-1)....$ В то время как объем вложенных средств должен иметь обратно пропорциональное влияние, в силу того, что качество тем выше, чем меньше значение трудности Одновременно должно учитываться, что сколько бы мы не вложили, это не должно уменьшить значение, чем если бы мы вообще не вкладывали. Данным требованиям удовлетворяет выражение вида $d_i^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e} \oplus \eta_i \otimes d_i^{\Phi L}(t))$. Действительно, чем больше средств вложено тем выше должно вырасти качество трудовых ресурсов и тем меньше отвечающая данной характеристики трудность $d_i^{\Phi L}(t)$, но каково бы ни было значение трудности $d_i^{\Phi L}(t)$, выражение $d_i^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e} \oplus \eta_i \otimes d_i^{\Phi L}(t))$ всегда будет меньше обобщенной единицы $\hat{e}$ и будучи помножено обобщенным умножением с трудностью в предыдущий момент времени $\lambda_i \otimes d_i^L(t-1)$ не увеличит общее значение трудности, то есть не ухудшит значение качества. Таким образом, аналитический вид функции прироста качества будет $G_i^L(d_i^{\Phi L}(t), d_i^L(t-1)) = \lambda_i \otimes d_i^L(t-1) \otimes d_i^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e} \oplus \eta_i \otimes d_i^{\Phi L}(t))$. В данном выражении по методу наименьших квадратов необходимо найти

оптимальные значения параметров λ_i и η_i, которые дадут наименьшее отклонение от исходного ряда. Для этих целей в программном комплексе разработан модуль расчета параметров функции прироста качества.

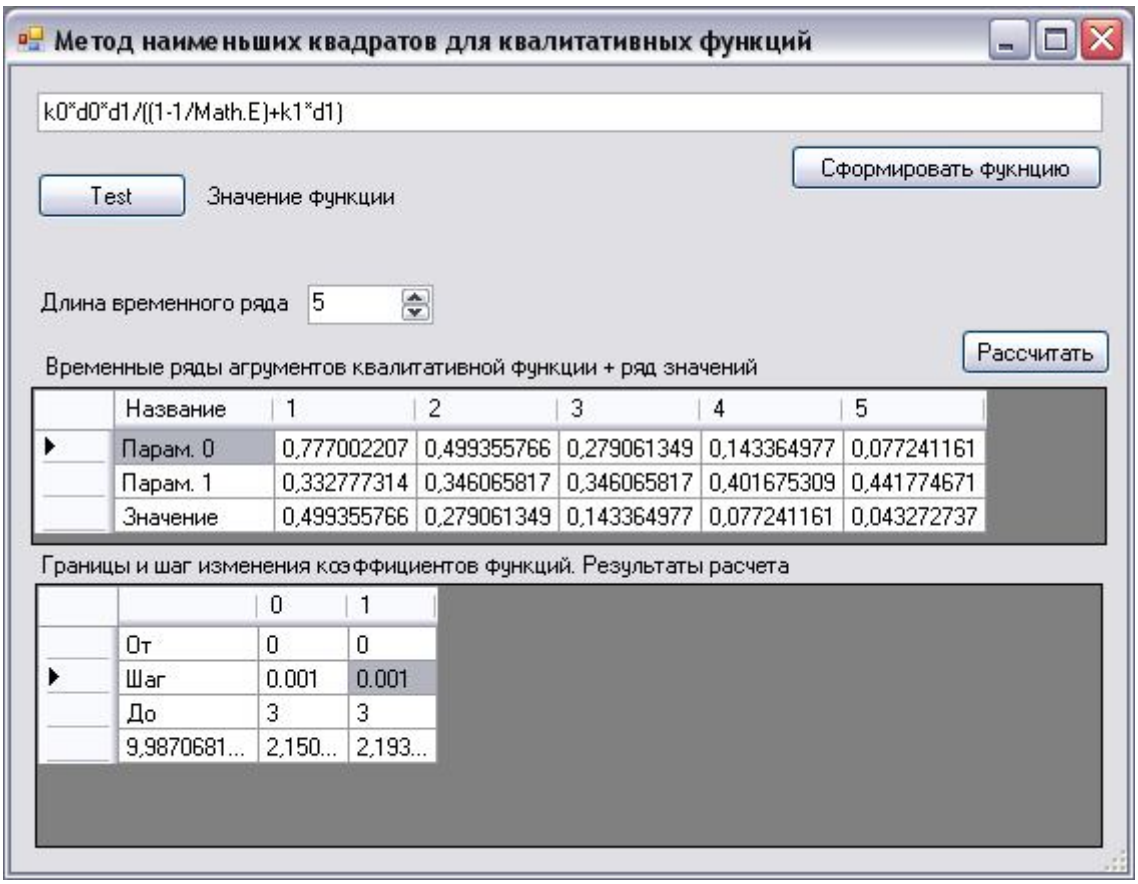


Рис. 4.4. Модуль восстановления квалитативных функций.

Особенностью модуля является возможность задач вид функции из интерфейса программы, которая скомпилируется на лету в программный код.

Найденные аналитические виды производственных функций и функций прироста качества, а также определенные в ходе диагностических мероприятий входные параметры региональной экономической системы используются в модуле расчета сценария развития региона. Модель развития региона решается модифицированным методом Соболя. В решаемом программой примере размерность модели (многомерного куба) равна 18. Ниже представлена таблица работы метода при различных параметрах разбиения отрезка. В таблице в последней строке представлено число итераций, которое бы было при базовом методе Соболя.

Таблица 4.3.

Время работы алгоритма модифицированного метода Соболя.

Число разбиений каждого отрезка	30	40	50	60	70
Время работы	00:00:02.93	00:00:36.47	00:05:52.69	00:40:37.76	03:16:34.27
Кол-во итераций модифицированного метода	247941	2391553	21224433	135572770	606539187
Время на итерацию	0,00001182	0,00001525	0,00001662	0,00001798	0,00001945
Кол-во итераций базового метода	3,8742E+26	6,8719E+28	3,8147E+30	1,0156E+32	1,6284E+33

Существенное сокращение итераций обусловлено ограничениями модели и тем, что строятся только точки принадлежащие допустимому множеству.

Полученные в ходе решения значения валовых выпусков и значений качества образуют траекторию движения системы к цели. Определение контрольных точек за системой движущейся к цели реализовано в модуле «контрольные точки с многокритериальной целью».

Приведем общую схему моделирования и контроля экономической системы региона, основанную на описанных выше алгоритмах и методах. Схема представляет собой набор зависимых друг от друга блоков, сами зависимости на схеме обозначены стрелками. Без информации имеющейся или обработанной одним блоком, алгоритм или метод следующего блока не может начать работу.

В качестве исходного банка данных выступают статистические данные по моделируемому региону – временные ряды, каждого представленного в регионе вида деятельности: по основным фондам, трудовым ресурсам, валовому выпуску. Для восстановления вида квалитативных функций необходимы временные ряды по показателям характеризующим качественную сторону вопроса: уровню жизни населения, заработной плате, смертности трудоспособного населения, охвату профессиональным образованием, уровню безработицы, валовому региональному продукту на число занятых в разрезе видов экономической деятельности.

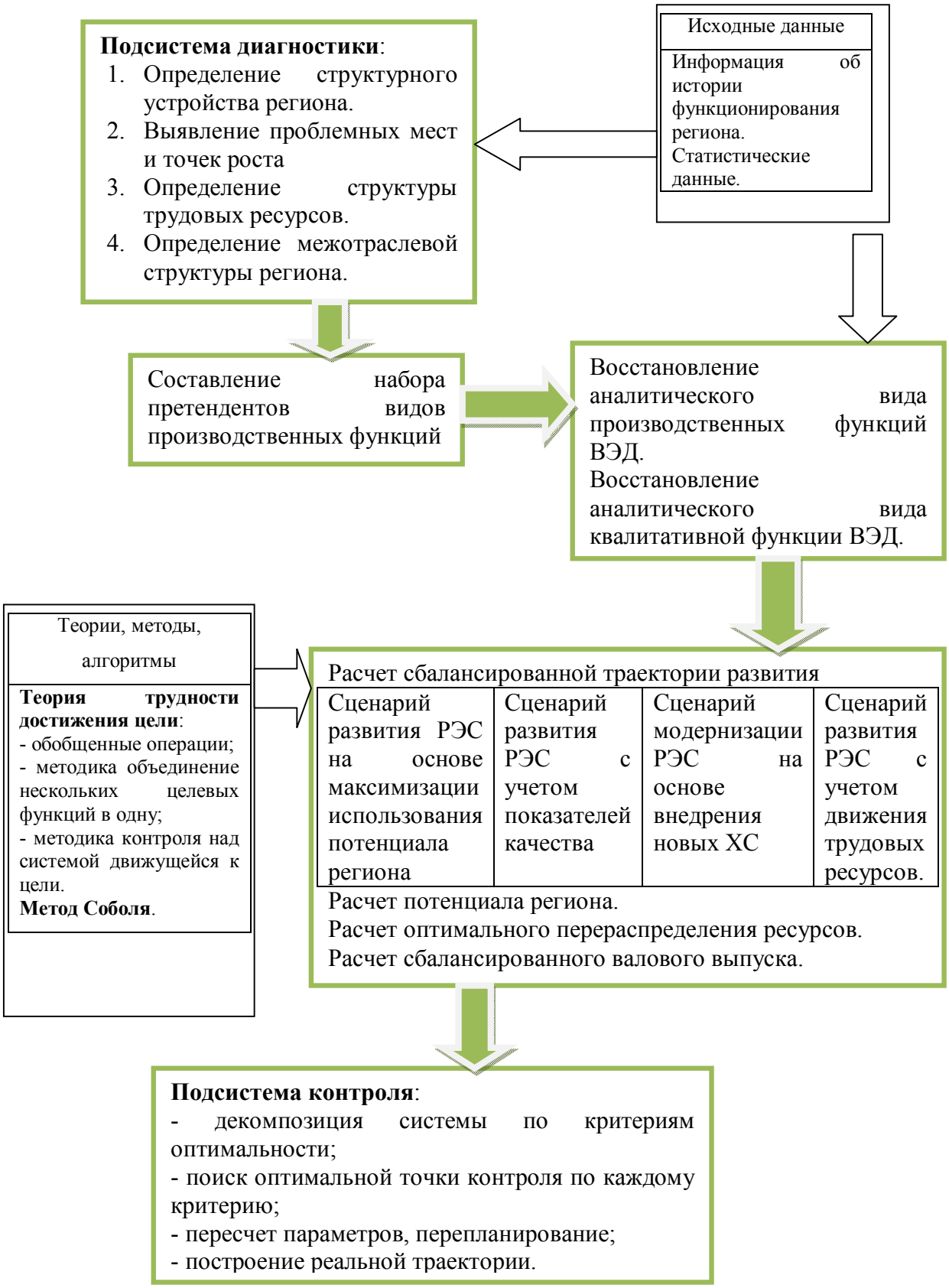


Рис. 4.5. Схема системы прогнозирования и контроля развития экономической системы региона.

Рассмотрим несколько иллюстративных примеров использования приведенных выше описателей региональной экономической системы и образуемых ими оптимизационных моделей. Последовательное усложнение рассматриваемых сценариев позволит выявить влияние вновь учитываемых факторов на результат.

Согласно первому сценарию **развития РЭС на основе максимизации использования потенциала региона** будем учитывать количественные характеристики региональной экономической системы. Для построения системы необходимо восстановить аналитический вид производственных функций. Будем считать, что производственная функция вида экономической деятельности зависит от двух факторов: капитала (основных фондов) и трудовых ресурсов. Оба аргумента производственной функции будем рассматривать в денежном выражении. Исходные данные для восстановления функций: временной ряд с 2004 по 2011 год по труду, капиталу и произведенному на их основе валовому выпуску – находятся в приложении 6. Возможные виды производственных функций приведены в приложении 4, а предпосылки их применения описаны в приложении 5. Региональная экономическая система является крупномасштабной системой, поэтому целесообразно оставить выбор на функциях Кобба-Дугласа, линейной и Солоу. Функция Солоу не обладает свойством однородности и постоянством эластичности замены факторов, но для ряда видов экономической деятельности её применение дает лучшее приближение к исходному ряду.

Восстановление аналитического вида производственной функции производится методом наименьших квадратов. Затем для каждого вида экономической деятельности выбирается тот тип производственной функции (Кобба-Дугласа, линейной или Солоу) для которого квадрат отклонения от реальных значений наименьший.

Следуя обозначенному принципу, восстановим аналитические виды производственных функций видов экономической деятельности по исходным данным приложения 6. Получим следующий набор производственных функций:

- обрабатывающие производства (Солоу)

$$F_1(t) = \left(0.000016K_1(t)^{1.89} + 665.4L_1(t)^{0.59}\right)^{0.95};$$

- производство и распределение электроэнергии, газа и воды (Кобба-Дугласа)

$$F_2(t) = 12.75K_2(t)^{0.001}L_2(t)^{1.14};$$

- сельское хозяйство (Кобба-Дугласа)

$$F_3(t) = 39.43K_3(t)^{0.001}L_3(t)^{0.93};$$

- оптовая и розничная торговля (линейная)

$$F_4(t) = 16631.7 + 0.0001 \cdot K_4(t) + 20.02 \cdot L_4(t);$$

- строительство (Солоу)

$$F_5(t) = \left(0.000016 \cdot K_5(t)^{3.52} + 157.46 \cdot L_5(t)^{2.54}\right)^{0.45};$$

- транспорт и связь (линейная)

$$F_6(t) = 0.001 \cdot K_6(t) + 26.62 \cdot L_6(t).$$

Установим горизонт планирования равный 5 годам. Пусть регион обладает финансовыми средствами предназначенными для распределения между видами экономической деятельности с распределением по годам планирования $\{\Phi(t), t = 1,..,5\} = \{43200, 65900, 88400, 39400, 33400\}$

Выпишем ограничения системы:

$$K_i(t) = K_i(t-1) + \beta_i^K(t)\Phi(t) - d_i K_i(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

$$L_i(t) = L_i(t-1) + \beta_i^L(t)\Phi(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

$$0 \le \underline{\beta_i^K}(t) \le \beta_i^K(t) \le \overline{\beta_i^K}(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

$$0 \le \underline{\beta_i^L}(t) \le \beta_i^L(t) \le \overline{\beta_i^L}(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

начальные условия:

$$\{K_i\ (t_0),\ i=1,2,...,6\}=\{64387,37313,42\,368,16798,8122,268054\},$$

$$\{L_i\,(t_0),\ i=1,2,...,6\}=\{2014.19,459.76,1340.99,1834.65,729.52,1141.98\},$$

$$0.12\le\beta_2^K(t)\le 1,$$

$$0.15\le\beta_3^K(t)\le 1,$$

$$0.1\le\beta_6^K(t)\le 1,$$

$$0\le\beta_i^K(t)\le 1, i=1,4,5,$$

$$0.05\le\beta_i^L(t)\le 1, i=1,2,...,6,$$

$$\sum_{i=1}^{6}(\beta_i^K(t)+\beta_i^L(t))=1, \forall t=1,..,5.$$

Матрица коэффициентов распределения H и значения коэффициентов выбытия d_j приведены в приложении 7. В описанных ниже ограничениях определим значения прибыли $\mathrm{Pr}_j(t), j=\overline{1,6}, t=1,..,5$ и конечного продукта $Y_i(t), i=\overline{1,6}, t=1,..,5$ на каждый год планирования. Допустим, что величина конечного продукта не изменяется на протяжении всего периода планирования и равна значению за базовый год $\{Y_i^B, i=\overline{1,6}\}=\{36904.7,8525.9,35580.3,41859.2,10384.2,3748.7\}$, а рост или убыль прибыли зависит от валового выпуска отрасли и затрат на оплату труда $\mathrm{Pr}_i(t)=c_i(X_i(t)-L_i(t))$. Вектор коэффициентов равен $\{c_i, i=\overline{1,6}\}=\{0.198,0.032,0.081,0.020,0.042,0.033\}$.

$$X_j(t)\ge\sum_{i=1}^{n}h_{ij}X_i(t)+d_jK_j(t)+L_j(t)+c_j(X_j(t)-L_j(t)), j=\overline{1,6},$$

$$X_i(t)\ge\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j(t)+Y_i^B, i=\overline{1,6},$$

$$X_i(t)\le F_i(K_i(t),L_i(t)), i=\overline{1,6},$$

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{6} F_i(K_i(t), L_i(t)),$$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{6} X_i(t),$$

$$I = 0.1\sqrt{\frac{X(T)}{2331500}\frac{X(T)}{52200}} \to \max,$$

$$\Pi(T) - X(T) \to \min.$$

Решая данную задачу методом Соболя, получаем следующие параметры состояния системы – управляющие коэффициенты распределения

Таблица 4.4

Коэффициенты перераспределения базового сценария.

	Коэффициенты перераспределения	**t_0+1**	**t_0+2**	**t_0+3**	**t_0+4**	**T=t_0+5**
Капитал	обрабатывающие производства	0,005	0,004	0,003	0,002	0,003
	производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	сельское хозяйство	0,207	0,212	0,217	0,179	0,199
	оптовая и розничная торговля	0	0	0	0	0
	строительство	0,058	0,062	0,067	0,03	0,05
	транспорт и связь	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Трудовые ресурсы	обрабатывающие производства	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0,106	0,103	0,098	0,228	0,216
	сельское хозяйство	0,123	0,124	0,126	0,103	0,104
	оптовая и розничная торговля	0,069	0,067	0,066	0,05	0,05
	строительство	0,087	0,085	0,082	0,079	0,056
	транспорт и связь	0,075	0,073	0,071	0,059	0,052

Индекс развития равен 1.305, распределение дополнительных финансовых средств тяготеет к сельскому хозяйству, как по капиталу так и по труду, а также по трудовым ресурсам в производстве и распределении электроэнергии, газа и воды.

Исследуем полученную траекторию на устойчивость аналогично тому, как это было сделано для модели (1.3)-(1.7). Пусть в ходе экспертного оценивания было установлено, что при отклонении начальных данных и дополнительных финансовых средств на 7% от плановых значений, значение индекса хозяйственного развития не должно отклониться более чем на 10% от планового значения. Вычислив индекс хозяйственного развития в последний год планирования при вычисленных коэффициентах перераспределения, получим значение 1.207, что на 7,5% меньше планового значения. Так как, отклонение результирующей величины не превысило порог в 10%, то траектория развития является устойчивой.

Далее рассмотрим иллюстративный пример для **сценария развития РЭС на основе модернизации и учета показателей качества**. Аналитические виды производственных функций видов деятельности аналогичны предыдущему примеру. Основываясь на истории функционирования РЭС за предыдущие годы, с помощью метода наименьших квадратов были получены следующие виды функций прироста качества трудовых ресурсов по видам деятельности:

- обрабатывающие производства

$$G_1^L(\kappa_1^L(t)\cdot\Phi(t), d_1^L(t-1)) = d_1^L(t-1)\otimes d_1^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.22\otimes d_1^{\Phi L}(t));$$

- производство и распределение электроэнергии, газа и воды

$$G_2^L(\kappa_2^L(t)\cdot\Phi(t), d_2^L(t-1)) = d_2^L(t-1)\otimes d_2^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.21\otimes d_2^{\Phi L}(t));$$

- сельское хозяйство

$$G_3^L(\kappa_3^L(t)\cdot\Phi(t), d_3^L(t-1)) = 0.63\otimes d_3^L(t-1)\otimes d_3^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.073\otimes d_3^{\Phi L}(t));$$

- оптовая и розничная торговля

$$G_4^L(\kappa_4^L(t)\cdot\Phi(t), d_4^L(t-1)) = 0.98\otimes d_4^L(t-1)\otimes d_4^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.18\otimes d_4^{\Phi L}(t));$$

- строительство

$$G_5^L(\kappa_5^L(t)\cdot\Phi(t), d_5^L(t-1)) = 0.86\otimes d_5^L(t-1)\otimes d_5^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.15\otimes d_5^{\Phi L}(t));$$

- транспорт и связь

$$G_6^L(\kappa_6^L(t)\cdot\Phi(t), d_6^L(t-1)) = 0.73 \otimes d_6^L(t-1) \otimes d_6^{\Phi L}(t) \varnothing(\hat{e} \oplus 0.108 \otimes d_6^{\Phi L}(t)).$$

На планируемый период известны средства, выделяемые на модернизацию, улучшение количественных показателей и качества трудовых ресурсов $\{\Phi(t), t = 1,..,5\} = \{43200, 65900, 88400, 39400, 33400\}$, также известны начальные значения ресурсообеспеченности и допустимые пределы изменения коэффициентов распределения дополнительно выделяемых средств между элементами системы. Выпишем целевые функции модели:

$$I = 0.1\sqrt{\frac{X(T)}{2331500}\frac{X(T)}{52200}} \to \max,$$

$$\Pi(T) - X(T) \to \min,$$

$$D = d_1^L \oplus d_2^L \oplus d_3^L \oplus d_4^L \oplus d_5^L \oplus d_6^L \to \min.$$

Набор ограничений модели для сценария развития РЭС с учетом качества:

$$K_i(t) = K_i(t-1) + \beta_i^K(t)\Phi(t) - d_i K_i(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

$$L_i(t) = L_i(t-1) + \beta_i^L(t)\Phi(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

$$0 \le \underline{\beta_i^K}(t) \le \beta_i^K(t) \le \overline{\beta_i^K}(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

$$0 \le \underline{\beta_i^L}(t) \le \beta_i^L(t) \le \overline{\beta_i^L}(t), i = \overline{1,6}, t = 1,..,5,$$

- начальные условия:

$$\{K_i(t_0),\ i = 1,2,...,6\} = \{64387, 37313, 42368, 16798, 8122, 268054\},$$

$$\{L_i(t_0),\ i = 1,2,...,6\} = \{2014.19, 459.76, 1340.99, 1834.65, 729.52, 1141.98\},$$

$$0.12 \le \beta_2^K(t) \le 1,$$

$$0.15 \le \beta_3^K(t) \le 1,$$

$$0.1 \le \beta_6^K(t) \le 1,$$

$$0 \le \beta_i^K(t) \le 1, i = 1,4,5,$$

$$0.05 \le \beta_i^L(t) \le 1, i = 1,2,...,6,$$

$$G_1^L(\kappa_1^L(t)\cdot\Phi(t), d_1^L(t-1)) = d_1^L(t-1) \otimes d_1^{\Phi L}(t) \varnothing(\hat{e} \oplus 0.22 \otimes d_1^{\Phi L}(t)),$$

$$G_2^L(\kappa_2^L(t)\cdot\Phi(t), d_2^L(t-1)) = d_2^L(t-1)\otimes d_2^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.21\otimes d_2^{\Phi L}(t)),$$

$$G_3^L(\kappa_3^L(t)\cdot\Phi(t), d_3^L(t-1)) = 0.63\otimes d_3^L(t-1)\otimes d_3^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.073\otimes d_3^{\Phi L}(t)),$$

$$G_4^L(\kappa_4^L(t)\cdot\Phi(t), d_4^L(t-1)) = 0.98\otimes d_4^L(t-1)\otimes d_4^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.18\otimes d_4^{\Phi L}(t)),$$

$$G_5^L(\kappa_5^L(t)\cdot\Phi(t), d_5^L(t-1)) = 0.86\otimes d_5^L(t-1)\otimes d_5^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.15\otimes d_5^{\Phi L}(t)),$$

$$G_6^L(\kappa_6^L(t)\cdot\Phi(t), d_6^L(t-1)) = 0.73\otimes d_6^L(t-1)\otimes d_6^{\Phi L}(t)\emptyset(\hat{e}\oplus 0.108\otimes d_6^{\Phi L}(t)),$$

$$d_i^{\Phi L}(\Phi(t)) = \frac{\varphi(\underline{\kappa}_i^L(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\kappa_i^L(t)\cdot\Phi(t)))}{\varphi(\kappa_i^L(t)\cdot\Phi(t))(1-\varphi(\underline{\kappa}_i^L(t)\cdot\Phi(t)))}, i=1,...,6,$$

$$\varphi(\kappa_i^L(t)\cdot\Phi(t)) = \kappa_i^L(t), i=1,...,6,$$

$$0.02 \le \kappa_i^L(t) \le 1, i=1,2,...,6,$$

$$\sum_{i=1}^{6}(\beta_i^K(t)+\beta_i^L(t)+\kappa_i^L(t)) = 1, \forall t=1,..,5,$$

$$\{Q_i^L(t_0),\ i=1,2,...,6\} = \{0.787, 0.799, 0.796, 0.775, 0.754, 0.702\},$$

$$\{d_i,\ i=1,2,...,6\} = \{0.05, 0.032, 0.051, 0.153, 0.017, 0.08\}.$$

В результате решения модели получены следующие коэффициенты распределения

Таблица 4.5

Коэффициенты распределения для сценария с учетом качества.

	Коэффициенты перераспределения	t_0+1	t_0+2	t_0+3	t_0+4	T=t_0+5
Капитал	обрабатывающие производства	0,003001	0,0033	0,0034	0,0012	0,0034
	пр-во и распред. эл-гии, газа и воды	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	сельское хозяйство	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
	оптовая и розничная торговля	0	0	0	0	0
	строительство	0	0	0	0	0
	транспорт и связь	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Труд	обрабатывающие производства	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05

	пр-во и распред. эл-гии, газа и воды	0,05	0,05	0,05	0,1004	0,119
	сельское хозяйство	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	оптовая и розничная торговля	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	строительство	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	транспорт и связь	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Труд (качество)	обрабатывающие производства	0,063	0,0577	0,055	0,0464	0,0426
	пр-во и распред. эл-гии, газа и воды	0,055	0,06	0,056	0,047	0,043
	сельское хозяйство	0,043	0,049	0,056	0,0478	0,044
	оптовая и розничная торговля	0,059	0,055	0,0546	0,0462	0,043
	строительство	0,055	0,053	0,053	0,046	0,042
	транспорт и связь	0,052	0,052	0,052	0,045	0,043

Индекс хозяйственного развития равен 0.735, что меньше, чем в базовом сценарии, вследствие перенаправления части финансовых средств на повышение уровня качества, которое никак не отражается индексом хозяйственного развития региона. Коэффициент трудности достижения цели по качеству равен 0,22. Анализируя коэффициенты распределения денежных средств, выявлено смещение финансирования в сторону качества трудовых ресурсов всех видов экономической деятельности.

Исследуем полученную траекторию на устойчивость. Допустимые отклонения исходных данных и результирующих значений примем равными предыдущему примеру в 7% и 10%. Результирующее значение индекса хозяйственного развития при уменьшенных исходных данных равно 0.681, что на 7,3% меньше планового значения. Коэффициент трудности достижения цели по качеству при измененных исходных данных равен 0,233, что на 6,1% отличается от планового значения. Так как оба результирующих значения не превышают порога в 10%, то траектория развития является устойчивой.

Опираясь на построенную траекторию развития, рассмотрим пример определения производственной лакуны региона. Ниже представлена специальным образом составленная таблица межотраслевого баланса.

Таблица 4.6

Расширенная таблица межотраслевого баланса за базовый год.

	1	2	3	4	5	6	6+1	Yi	Xi
обрабатывающие производства	9590,933	2051,475	5373	4113,385	2740,725	2759,469	-12518,1	36904,7	51015,6
производство и распределение электроэнергии, газа и воды	1326,406	410,295	501,48	738,2998	1187,648	871,4112	115,0609	8525,9	13676,5
сельское хозяйство	4438,357	615,4425	1361,16	52,7357	18,2715	1960,675	-8206,94	35580,3	35820
оптовая и розничная торговля	2652,811	423,9715	2077,56	5326,306	5481,45	4538,6	-9624,2	41859,2	52735,7
строительство	4234,295	369,2655	179,1	738,2998	475,059	544,632	1346,649	10384,2	18271,5
транспорт и связь	5917,81	1258,238	788,04	1160,185	493,3305	544,632	22397,86	3748,7	36308,8
Лакуна	7930,852	6467,237	19229,6	35189,14	6278,427	-4009,1			
Прибыль*,млн. руб.	9690,6	426,8	2808,3	1012,6	729	1151,1			
Норма амортизации* (средняя)	3219,35	1194,016	2160,768	2570,094	138,074	26805,4			
Труд, млн. руб	2014,187	459,7592	1340,991	1834,654	729,5157	1141,976			
Валовый выпуск	51015,6	13676,5	35820	52735,7	18271,5	36308,8			

В таблице 4.5 масштаб производственной лакуны определялся по формулам (4.30), (4.31). Анализируя величины выпуска лакуны $x_{i,n+1}, i=\overline{1,n}$ делаем вывод, что в обрабатывающих производствах, сельском хозяйстве и оптовой и розничной торговле доминирует внешняя лакуна и имеет место занижение валового регионального продукта по данным видам деятельности. В то время как по производство и распределению электроэнергии, газа и воды, строительству, транспорту и связи преобладает внутренняя производственная лакуна. По структуре затрат имеет место доминирование внутренней лакуны для транспорта и связи, по остальным видам экономической деятельности преобладает внешняя лакуна, использующая наши ресурсы.

Рассмотрим расширенную таблицу межотраслевого баланса для последнего года планирования, дабы оценить влияние вложенных средств на

структуру лакуны. Напомним, что матрица затрат предполагается неизменной на всем промежутке планирования.

Таблица 4.7

Расширенная таблица межотраслевого баланса за плановый год.

	1	2	3	4	5	6	6+1	Yi	Xi
обрабатывающие производства	24781,78	139046,63	45820,76	25268,05	72706,65	29659,42	-242370,01	36904,70	131817,99
производство и распределение электроэнергии, газа и воды	3427,27	27809,33	4276,60	4535,29	31506,21	9366,13	837530,82	8525,90	926977,55
сельское хозяйство	11468,17	41713,99	11607,93	323,95	484,71	21073,80	183218,92	35580,30	305471,76
оптовая и розничная торговля	6854,54	28736,30	17717,36	32718,89	145413,30	48781,95	1867,87	41859,20	323949,41
строительство	10940,89	25028,39	1527,36	4535,29	12602,49	5853,83	413838,53	10384,20	484710,99
транспорт и связь	15290,89	85281,94	6720,38	7126,89	13087,20	5853,83	253145,74	3748,70	390255,56
лакуна	32506,55	530956,28	186652,69	183631,48	186437,64	215058,69			
Прибыль*,млн. руб.	4427,83	476,29	713,67	895,65	-11,81	925,37			
Норма амортизации* (средняя)	6590,90	29663,28	15579,06	49564,26	8240,09	39025,56			
Труд, млн. руб	15529,19	18265,12	14855,95	15349,65	14244,52	14656,98			
Валовый выпуск	131817,99	926977,55	305471,76	323949,41	484710,99	390255,56			

Отметим, что после инвестирования финансовых средств в виды экономической деятельности, влияние внутренней лакуны стало доминировать в сельском хозяйстве и оптовой и розничной торговле. За счет вложений в трудовые ресурсы нашего региона в сфере транспорта и связи по структуре затрат стала доминировать внешняя лакуна.

Таким образом, посредством инвестирования в виды экономической деятельности можно опосредованно влиять на масштаб производственной лакуны региона.

Выводы

В четвертой главе введен описатель региональной экономической системы, приведены особенности региона как системы, рассмотрены различные сценарии развития экономической системы региона:

- сценарий развития РЭС на основе максимизации использования потенциала региона;
- сценарий развития РЭС с учетом показателей качества;
- сценарий развития и модернизации РЭС на основе внедрения новых хозяйствующих субъектов;
- сценарий развития РЭС с учетом движения трудовых ресурсов.

Для каждого сценария приведен описатель системы, позволяющий оценить влияние каждого параметра на поведение системы. В сценарии с учетом показателей качества использован такой вид квалитативной функции как функция прироста качества, отражающая помимо прочего влияние вложенных финансовых средств на уровень качества в соответствующем виде экономической деятельности региона. Рассмотрены иллюстративные примеры развития сценариев, указаны влияния особенностей сценариев на решение задачи.

В главе приведены определение производственной лакуны, выделены виды (внутренняя, внешняя), структура, системный описатель, также обоснована необходимость учета производственной лакуны региона для более адекватного моделирования определенных аспектов экономики региона.

Выявлены параметры влияющие на привлекательность региона с точки зрения размещения производств сторонних субъектов и описаны рычаги косвенного регулирования присутствия в регионе производственной лакуны. Указаны некоторые сферы (налоговые поступления, уровень занятости населения) на которые оказывает влияние производственная лакуна региона.

Введен индекс производственной лакуны региона, как частный случай индекса внешней среды.

Приведено описание программного комплекса, разработанного для решения системы развития региональной экономической системы. Приведены результаты расчетов различных сценариев развития.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование позволило сформулировать и обосновать ряд теоретических положений, касающихся построения качественных траекторий развития открытых неоднородных систем с несколькими функциями цели, в том числе, для полицентроидных систем с противоречивыми целевыми функционалами; ввести в модель учет показателей качества функционирования элементов; создать эффективную систему контроля за движением многокритериальной системы к цели и создать на этой основе комплекс алгоритмов и программ, позволяющих построить и выбрать перспективный сценарий развития системы.

Некоторые из положений, предложений и рекомендаций, содержащихся в работе, ранее не были предметом научных исследований, либо не рассматривались в контексте решения поставленных в диссертации задач.

Основные результаты, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Приведен системный описатель открытой неоднородной функционирующей динамической системы, с векторной целью, позволяющий формально подходит к описанию широкого класса систем, коими являются открытые неоднородные системы, в том числе полицентроидные. На основе описателя составлена модель развития системы с учетом качества и гипотетических элементов.

2. Усовершенствован аппарат теории трудности достижении цели: введены новые операции вычитания и деления, определен единичный элемент, введена лингвистическая шкала градаций коэффициента трудности достижения цели. Получены и доказаны ряд теорем касательно образуемых операциями типов алгебраических систем (моноид относительно операции сложения, абелева группа относительно операции умножения и полукольцо относительно сложения и умножения). Введен новый тип обобщенной квалитативной функции – функция прироста качества.

2. Разработан комплекс математических моделей, позволяющих на основе рационального распределения ресурсов между элементами системы, в том числе на улучшение качества, с учетом гипотетических элементов построить устойчивую траектории развития открытой неоднородной системы. Приведены методы решения задачи векторной оптимизации. Указан способ разрешения конфликтных ситуаций в полицентрических системах.

3. Исследованы основные моменты организации контроля над системой движущейся к цели. Разработан алгоритм проведения контрольных мероприятий для многокритериальной системы, обладающих свойством минимальной достаточности для достижений целей.

4. Практическое применение моделей и анализ структурного устройства системы экономики региона привел к обнаружению в составе элементов – объектов хозяйственной деятельности, функционирующих на территории региона, использующих его ресурсы, но зарегистрированных как налогоплательщики в других регионах. Совокупность такого рода объектов названа нами внешней производственной лакуной. Анализ связей с иными регионами показал, что существует и внутренняя производственная лакуна, действие которых противоположны друг другу: если внутренняя производственная лакуна приносит потери налогов в системе экономики региона, а как положительный фактор выступает повышение рабочих мест и трудовой занятости населения. Внутренняя лакуна приносит дополнительные налоговые отчисления в регион прописки, но вынуждена содержать трудовые ресурсы иных регионов. Очевидно, что учет этих факторов приводит к совершенствованию управления экономической системой региона.

Проведенное исследование и анализ полученных результатов подтвердили целесообразность использования на практике предложенного в диссертации прикладного инструментария моделирования и контроля открытых неоднородных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аганбегян А. Размышления о современном кризисе в России и её послекризисном развитии. [Текст] / А. Аганбегян // Мир перемен. 2012. №2. С. 9- 17.
2. Аганбегян А.Г. Экономическо-математический анализ межотраслевого баланса СССР [Текст] / А.Г. Аганбегян, А.Г. Гранберг. – М.: Мысль, 1968. – 357 с.
3. Азгальдов Г.Г. Квалиметрия для всех: Учеб. пособие [Текст] / Г.Г. Азгальдов, А.В. Костин, В.В. Садовов. — М.: Информзнание, 2012. — 165 с. ил. ISBN 978-5-906036-03-2
4. Азгальдов Г.Г. О квалиметрии. [Текст] / Г.Г. Азгальдов, Э.П. Райхман – Изд-во стандартов, 1972. – 172 с.
5. Антонов А. В. Системный анализ. Учеб. для вузов [Текст] / А. В. Антонов. – М.: Высш. шк., 2004. – 454 с.: ил. ISBN 5-06-004862-4.
6. Бабунашвили М.К. Контроль и управление в организационных системах [Текст] / М.К. Бабунашвили, М.А. Бермант, И.Б. Руссман // Экономика и мат. методы. – 1969. – Т. 5, № 2. – С. 212-227.
7. Бабунашвили М.К., Оперативное управление в организационных системах [Текст] / М.А. Бермант, И.Б. Руссман // Экономика и математические методы. – 1971. – т.7. – №3. – С. 480-492
8. Баева Н.Б. «Обобщение методов построения интегральных оценок качества на основе теории трудности достижения цели» [Текст] / Баева Н.Б., Куркин Е.В. // Вестник ВГУ, Серия: системный анализ и информационные технологии, 2011, № 1– С. 84-92.
9. Баева Н.Б. Математические методы оценки и наращивания экономического потенциала региона: монография [Текст] / Н. Б. Баева, Д. В. Ворогушина // Воронежский Государственный Университет. – Воронеж. Издательско-полиграфический центр Воронежского Государственного Университета, 2012. – 192 с. ISBN 978-5-9273-2016-5.

10. Баева Н.Б. «Математическое моделирование и исследование производственной лакуны региона» [Текст] / Н.Б. Баева, Е.В. Куркин // Материалы 36-й международной научной школы-семинара «Системное моделирование социально - экономических процессов» имени академика С.С. Шаталина, Воронеж, 29 сентября - 4 октября 2013.
11. Баева Н.Б. Прогнозирование развития региональной экономической системе в условиях неопределенности [Текст] / Н.Б. Баева, Д.С. Чембарцев // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы III Международной научно-практической конференции – Воронежский государственный университет, 2007. – Ч.1 – С.138-143.
12. Баева Н.Б. «Производственная лакуна региона: определение, сущность, методы оценки» [Текст] / Н.Б. Баева, Е.В. Куркин // Экономическое моделирование: Модели и методы: материалы IX международной научно-практической конференции, 26 апреля 2013 г. / под общ. ред. В.В. Давниса, В.И. Тиняковой; Воронеж. гос. ун-т [и др.]. – Воронеж: типография Воронежского ЦНТИ – филиала ФБГУ «РЭА» Минэнерго России, 2013. – С. 68-71. ISBN 978-5-4218-0165-8
13. Баева Н.Б., «Производственные лакуны как механизм уточнения разработки сбалансированной траектории развития региональной экономической системы» [Текст] / Н.Б. Баева, Е.В. Куркин // Материалы 35-й международной научной школы-семинара «Системное моделирование социально - экономических процессов» имени академика С.С. Шаталина, Кострома, 18-23 сентября 2012.
14. Баева Н.Б., «Алгебра трудности достижения цели как операционная основа оценки качества результата» [Текст] / Н.Б. Баева, Е.В. Куркин // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. №6(137), 2011. С. 210-213. ISSN 1994-2354.
15. Баева Н.Б., «Математические методы оценки производственной лакуны региона» [Текст] / Н.Б. Баева, Е.В. Куркин // Научно-практический

журнал «Современная экономика: Проблемы и решения». №11(35), 2012. С. 138-147. ISSN 2078-9017.

16. Баева Н.Б., Двухуровневая модель удержания экономического объекта в режиме сбалансированного роста [Текст] / Баева Н.Б., Куркин Е.В. // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2008. – №1 – С. 92-101.
17. Бахвалов Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Наука, 1987. 598 с.
18. Бермант М.А. «О проблеме оценки качества» [Текст] / М.А. Бермант, И.Б. Руссман // Экономика и математические методы, т. 14, вып. 4. – 1978. С. 691-699.
19. БГД – Регионы России. Социально-экономические показатели [Электронный ресурс]: Федеральная служба государственной статистики – Режим доступа: http://www.gks.ru/bgd/regl/b11_14p/Main.htm 24.03.2013.
20. Берколайко М.З., Методы формирования и управления портфелем активов [Текст] / И.Б. Руссман // Экономическая наука современной России. – 2004. – №1,№2. – С. 18-32
21. Бувальцева В.И. Теория и методология исследования устойчивого роста экономики региона [Текст] / В.И. Бувальцева, В.С. Сурнин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 1998. – 224 с.
22. Булгаков В. К. Моделирование динамики обобщающих показателей развития региональных экономических систем России [Текст] / В. К. Булгаков, О. В. Булгаков // Экономика и математические методы, 2006, том 42, №1, С. 32-49.
23. Введение в экономико-математическое моделирование. [Текст] / Лотов А.В. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 392 с.
24. Волдочинский В. Высокое напряжение [Текст]// Воронежский курьер. 2012. №121 (3360). С. 1.

25. Волкова В. Н. Теория систем: Учеб. пособие [Текст] / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. – М.: Высш. шк., 2006. – 511 с.: ил. ISBN 5-06-005550-7.
26. Ворогушина Д. В. Механизмы выбора оптимальной траектории сбалансированного экономического роста региональной системы. [Текст] / Д. В. Ворогушина // Вестник ВГУ, Серия: системный анализ и информационные технологии, 2009, № 1. С. 77-86.
27. Воронежская область [Элекстронный ресурс]: Википедия – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/ Воронежская_область 22.03.2013
28. Воронежский статистический ежегодник. 2011: Стат. сб. [Текст] / Воронежстат. – В 75 Воронеж, 2011. – 324 с.
29. Воронежский статистический ежегодник. 2012: Стат. сб. [Текст] / Воронежстат. – В 75 Воронеж, 2012. – 340 с.
30. Гличев А. В. Качество, эффективность, нравственность. [Текст] / А.В. Гличев – М.: ООО «Премиум Инжиниринг», 2009. – 358 с., ил.
31. Гранберг А.Г. Основы региональной экономики [Текст] / А.Г. Гранберг. – М.: ГУ ВШЭ, 2000. – 495 с.
32. Гурман. В. И. «Моделирование устойчивого развития с учетом инновационных процессов» [Текст] / В. И. Гурман. // Экономика и математические методы, 2003, том 39, №1, С. 3-11.
33. Гутман Г.В. Управление региональной экономикой [Текст] / Г.В. Гутман, А.А. Мироедов, С.В. Федин. - М.: Финансы и статистика, 2001. - 167 с.
34. Дмитриева О. Г. Региональная экономическая диагностика. [Текст] / О. Г. Дмитриева // СПб.: Изд-во Санкт-Петербурского Университета экономики и финансов, 1992. – 274 с.
35. Докучаева Е. В. Диагностика возникновения кризисных ситуаций на предприятиях [Текст] / Е. В. Докучаева // Региональная экономика сегодня и завтра: новый взгляд. Сборник работ лауреатов Рейтингового испытания на соискание стипендий холдинга «Управление и инвестиции». Воронеж 2000. – С. 22-34.

36. Дрогобыцкий И. Н. Системный анализ в экономике: учеб. пособие [Текст] / И. Н. Дрогобыцкий. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 512 с.: ил. ISBN 978-5-279-03242-6.
37. Емеличев В. А. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования [Текст] / В.А. Емеличев, Д.П. Подкопаев // Дискретный анализ и исследование операций. – Январь – июнь 2001. Серия 2. Том 8. № 1. С. 47-69.
38. Ершов Э.Б. Модель межотраслевых взаимодействий. [Текст] / Э.Б. Ершов, Ю.Яременко, А. Смышляев // Экономика и математические методы. – 1975. – Т. XI, №3.
39. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории [Текст] / В.Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
40. Зоидов К.Х. Эволюционально-институциональный подход и методология проведения антикризисных мероприятий в переходной экономике [Текст] / К.Х. Зоидов // Экономика и математические методы. – 2004. – Т. 40. – № 3. – С. 16-32
41. Иванов П. М. «Устойчивое региональное развитие: концепция и модель управления» [Текст] / П. М. Иванов // Экономика и математические методы, 2006, том 42, № 2, С. 51-59.
42. Инновационный менеджмент в России: вопросы стратегического управления и научно-технологической безопасности [Текст] / Руководители авт. колл. В.Л. Макаров, А.Е. Варшавский. – М.: Наука, 2004. – 880 с. ISBN 5-02-032880-4
43. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория [Текст] / М. Интрилигатор. – Москва.: Изд. «Прогресс», 1975. – 608 с.
44. Исследование систем управления: учеб. Пособие [Текст] / Е.В. Фрейдина; под ред. Ю.В. Гусева. – Москва: Издательство «Омега-Л», 2008. – 367 с. – (Высшая школа менеджмента). – ISBN 978-5-370-00907-5.

45. Калинникова И. О. Управление социально-экономическим потенциалом региона: Учебное пособие. [Текст] / И. О. Калиникова – СПб.: Питер, 2009. – 240 с.
46. Каплинский А.И. Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов системы. [Текст] / А.И. Каплинский, И.Б. Руссман, В.М. Умывакин – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. – 168 с.
47. Кильматов Т. Р. «Временной лаг как фактор потери устоячивости экономической системы» [Текст] / Т. Р. Кильматов // Экономика и математические методы, 2013, том 49, №3, С. 120-122.
48. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение [Текст] / Г.Б. Клейнер - М.: Финансы и статистика, 1986. - 240 с.
49. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач: Пер. с англ. [Текст] / Дж. Клир. – М.: Радио и связь, 1990. – 544 с.: ил. – ISBN 5-256-00649-5.
50. Косов В.В. Межотраслевой баланс. [Текст] / В.В. Косов. – М. «Экономика», 1966. – 223 с.
51. Косов В.В. Межотраслевые модели. Теория и практика использования [Текст] / В.В. Косов. – М.: Экономика, 1973. – 359 с.
52. Костюк В. Изменяющиеся системы [Текст] / В. Костюк – М.: Наука, 1993. – 320 с.
53. Красова Н. Е. Модели и методы перевода неоднородных экономических систем в режим устойчивого развития: диссертация кандидата экономических наук: 08.00.13: защищена 02.10.05 [Текст] / Красова Наталья Евгеньевна. – Воронеж, 2005. – 204 с.
54. Куркин Е.В. Математические методы учета лакун региональной экономической системы [Текст] / Куркин Е.В. // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 26-28 ноября 2012 г.: в 2 ч. Ч.

2. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. С. 162-167. ISBN 978-5-9273-1973-2.

55. Куркин Е.В. «Моделирование развития региональной экономической системы на основе её модернизации» [Текст] / Куркин Е.В. // Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: материалы междунар. науч.-прак. конф., г. Сочи, 3-9 мая 2012 г. / науч. Ред. А.Р. Симонян, Е.И. Улитина. – Сочи, 2012. С. 50-51.
56. Куркин Е.В. «Качественные оценки в экономическом моделировании» [Текст] / Куркин Е.В. // Европейский исследователь. Мультидисциплинарный научный журнал №5-1[7].2011. – С. 612-613.
57. Куркин Е.В. «Моделирование развития региональной экономической системы на основе её модернизации» [Текст] / Куркин Е.В. // Вестник ВГУ, Серия: системный анализ и информационные технологии, 2012, № 1. С. 107-114.
58. Куркин Е.В. «Операционные основы построения интегральных оценок качества на основе теории трудности достижения цели» [Текст] / Куркин Е.В. // Международная междисциплинарная научная конференция: Синергетика в естественных науках (седьмые Курдюмовские чтения)./ Сборник тезисов. – Тверь: Изд-во ТГУ, 2011. – С. 357-361.
59. Куркин Е.В. «Совершенствование процесса моделирования РЭС на основе управления качеством ресурсов» [Текст] / Е.В. Куркин // Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов: материалы III Международной научно-практической Интернет-конференции, 15 декабря 2011 г. – 15 февраля 2012 г. С. 127-135.
60. Лагоша Б.А. Методы и модели совершенствования организационных структур [Текст] // Б.А. Лагоша, В.Г. Шаркович, Т.Д. Дегтярева – М.: Наука, 1988. – 189 с.
61. Леденева Т.М. «О формировании интегральных оценок «трудность достижения цели» [Текст] / Леденева Т.М. // Вестник факультета ПММ. – вып. 8 – Воронеж: изд. полиграфический центр ВГУ, 2010 – С.122-140.

62. Лисичкин В. А. Принятие решений на основе прогнозирования в условиях АСУ [Текст] / А.В. Лисичкин, Е.И. Голынкер. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 50 с., ил.
63. Литвак Б.Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа [Текст] / Б.Г. Литвак. – М., Радио и связь, 1982. – 184 с.
64. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – 5-е изд., перераб. и доп. [Текст] – М.: Дело, 2003. – 520с. ISBN 5-7749-0275-7
65. Межотраслевой баланс экономического района. Методика составления [Текст] / под. ред. Л.Е. Минца, В.В. Коссова, Э.Ф. Баранова. - М.: Наука, 1967. – 332 с.
66. Методы и алгоритмы принятия решений в экономике: учеб. пособие [Текст] / Б. А. Баллод, Н. Н. Елизарова. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА – М, 2009. – 224 с.: ил.
67. Модели производственных процессов, логистики и риска. Н.Б. Баева, Т.В. Азарнова [Текст] / Учебное пособие // Воронеж, ВГУ, 2005, – 87 с.
68. Новиков А.В. Новый метод выделения существенных признаков для разработки региональных классификаций [Текст] / А.В. Новиков // Изв. АН СССР, сер. географ. – 1989. – № 1. – С. 112-119.
69. Общая алгебра. Т. 1 [Текст] / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др. Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 592 с. – ISBN 5-02-014426-6 (т. 1).
70. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. [Текст] / С.А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 208 с
71. Основы теории систем и вычислительные схемы системного анализа. Н.Б. Баева, Д.В. Ворогушина, Е.В. Куркин [Текст] / Методическое пособие для вузов // Воронеж, ВГУ, 2011. – 78 с.
72. Пономарев С.В. Квалиметрия и управление качеством. Инструменты управления качеством: Учебное пособие. [Текст] / С.В. Пономарев, С.В.

Мищенко, Б.И. Герасимов, А.В. Трофимов. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. – 80 с.

73. Поттосина С.А. Экономико-математические модели и методы: Учеб. пособие для студ. экон. спец. БГУИР всех форм обуч. [Текст] / С.А. Поттосина, В.А. Журавлев. – Мн.: БГУИР, 2003. – 94 с.: ил.
74. Пронин И.А. Производственно-квалитативные функции: сущность, свойства и направления использования. [Текст] / И.А. Пронин. – Сборник статей студентов и аспирантов факультета прикладной математики и механики. Выпуск 1. – 1997.
75. Райзберг Б.А. Современный экономический словарь. - 5-е изд., перераб. и доп. [Текст] / Б.А. Райсберг, Л.Ш. Лозовский, Е.Б. Стародубцева – М.: ИНФРА-М, 2006. – 495 с.
76. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. [Текст] / Л.Г. Раскин – М., «Сов. радио», 1976. – 344 с.: ил.
77. Регион – Википедия [Электронный ресурс]: Википедия. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Регион 19.02.2013.
78. Региональные экономические объединения и использование их опыта в СНГ. [Текст] – М.: Финстатинформ, 2002. – 110 с.
79. Руссман И.Б. «О проблеме пересчета интегральных показателей при сравнении многомерных объектов» [Текст] / И.Б. Руссман. // Проблемы функционирования и развития инфраструктуры народного хозяйства, Москва, ВНИИСИ, 1983, С. 19-24
80. Руссман И.Б. Алгоритмы контроля в организационных системах при неполной исходной информации [Текст] / Н.П. Митрофанова // Вестник ВГУ. Серия: Экономика и управление. – 2003. – №1. – С. 83-89.
81. Руссман И.Б. Методы учета влияния качества ресурсов в моделях регионального развития [Текст] / И.Б.Руссман, Д.С.Чембарцев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2006. – №2. – С. 162-168.

82. Руссман И.Б. «Трассологический контроль функционирования активных организационных систем» [Текст] / Руссман И.Б, Куркин Е.В. // Экономическое прогнозирование: Модели и методы. Материалы международной научно-практической конференции 30-31 марта 2006г. Часть 2. – С. 287 – 293.
83. Самарский А.А. Математическое моделирвание: Идеи. Методы. Примеры. [Текст] / Самарский А.А., Михайлов А.П. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.
84. Самаров К.Л. Математика. Элементы теории игр: учебно-методич. пособие [Текст] / К.Л. Самаров. – Москва: ООО «Резольвента», 2009. – 21 с.
85. Система // Большой Российский энциклопедический словарь. [Текст] – М.: БРЭ. — 2003, – С. 1437.
86. Системный анализ в экономике: учеб. пособие [Текст] / И.Н. Дрогобыцкий. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 512 с.: ил. ISBN 978-5-279-03242
87. Системный анализ. Учеб. для вузов [Текст] / А.В. Антонов. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 454 с.: ил. ISBN 5-06-004862-4
88. Смоляк С.А. Критерии оптимального поведения фирмы в условиях неопределенности [Текст] / С.А. Смоляк // Экономика и математические методы – 2005 – Т.41, №3 – С. 39-53
89. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями [Текст] / И.М. Соболь, Р.Б. Статников – М.: Наука, 1981. – 110 с.
90. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учеб. для вузов – 3-е изд., перераб. и доп. [Текст] – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.: ил. ISBN 5-06-003860-2.
91. Сорокин А. Бюджет к поправке готов [Текст] // Воронежский курьер. 2012. №140 (3379). – С. 2.

92. Степень износа основных фондов на конец года по полному кругу организаций [Электронный ресурс]: Единая межведомственная информационно-статистическая система – Режим доступа: http://www.fedstat.ru/indicator/data.do?id=40440 03.04.2013.
93. Сущность термина регион [Электронный ресурс]: Шадринский государственный педагогический институт. – Режим доступа: http://shgpi.edu.ru/fileadmin/faculties/f11/publication/conf.../nesterov.doc 19.02.2013.
94. Теория систем и системный анализ: учебник для вузов [Текст] / В.Н. Волкова А.А. Денисов. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 679 с. – (Университеты России). ISBN 978-5-9916-0229-7
95. Управление качеством. [Текст] / В.П. Мельников, В.П. Смоленцев, А.Г. Схиртладзе; Под ред. В.П. Мельникова. – М.: Издательский центр «Академия», 2005, – 352 с. – ISBN 5-7695-1570-8.
96. Управление качеством: Учебник для вузов [Текст] / С.Д. Ильенкова, Н.Д. Ильенкова, В.С. Мхитарян и др.; – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 334 с.
97. Федеральная служба государственной статистики. Где в России лучше жить [Текст] // Российская газета. 2012. №215(5888). – С. 18.
98. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов [Текст] / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с. ISBN 5-238-00068-5.
99. Цуцаев О. В. Человеческий капитал Воронежской области. [Текст] / О. В. Цуцаев // Региональная экономика сегодня и завтра: новый взгляд. Сборник работ лауреатов Рейтингового испытания на соискание стипендий холдинга «Управление и инвестиции». Воронеж 2000. – С. 76-109.
100. Чембарцев Д.С. Движение трудовых ресурсов и его влияние на их качество [Текст] / Д.С. Чембарцев // Системный анализ в

проектировании и управлении: Труды IX-й Междунар. науч.-техн. конф. СПб. – Изд-во СПбГПУ, 2005. – С. 247-252.

101. Чембарцев Д.С. Прикладной инструментарий выбора в условиях неопределенности сценариев развития региональных экономических систем : диссертация кандидата экономических наук : 08.00.13 : защищена 17.10.07 [Текст] / Чембарцев Дмитрий Сергеевич. – Воронеж, 2007. – 211 с.
102. Шадрин А.Д. Менеджмент качества. От основ к практике. [Текст] / А.Д. Шадрин – М.: ООО «НТК «Трек», 2005. – 360 с.
103. Шамовский В.Э. Формирование структуры бизнес-группы с желаемыми свойствами [Текст] / В.Э. Шамовский, А.А. Эйрих // Современные сложные системы управления: Международ. конф., 26-28 мая 2003 г.: Сб. науч. тр. – Воронеж, 2003. – Т. 1. – С. 353-357.
104. Шапошникова С. В. Повышение инвестиционной привлекательности региона в условиях дефицита финансовых ресурсов. [Текст] / С. В. Шапошникова // Региональная экономика сегодня и завтра: новый взгляд. Сборник работ лауреатов Рейтингового испытания на соискание стипендий холдинга «Управление и инвестиции». Воронеж 2000. – С. 110-122.
105. Шургалина И.Н. Реформирование российской экономики. Опыт анализа в свете теории катастроф [Текст] / И.Н. Шургалина – М.: РОССПЕН, 1997. – 76 с.
106. Azgaldov G.G., Kostin A. V. (2012) Quality - as the most important object of quantitative analysis / Europe Middle East Africa Members' Meeting, Barcelona (Spain), January 2012, pp. 26-28.
107. Garry G. Azgaldov, Alexander V. Kostin. Applied Qualimetry: Its origins, errors and misconceptions // Benchmarking: An International Journal, Volume 18, Number 3, 2011, pp. 428–444.
108. Cargile, J. (1995). qualities. in Honderich, T. (Ed.) (2005). The Oxford Companion to Philosophy (2nd ed.). Oxford.

Приложение 1

Классификация моделей систем

Модели в зависимости от объекта моделирования можно разделить на типы. Время в модели может рассматриваться на интервале моделирования $(0,T)$ как непрерывное, так и дискретное. Если математическое описание объекта моделирования не содержит элементов случайности или не учитываются, то модель называется детерминированной, иначе стохастической.

Таким образом, при построении математических моделей систем можно выделить основные подходы: непрерывно-детерминированный, дискретно-детерминированный, дискретно-стохастический, непрерывно-стохастический, обобщенные, или универсальные. Указанные типы сведены в таблицу:

Тип модели	Возможный мат. аппарат	Возможные соотношения	Возможные приложения
Непрерывно-детерминированные модели	Дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных	$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$ $y(t_0) = y_0$	Колебания маятника, электрический колебательный контур
Дискретно-детерминированные модели	Конечный автоматов	$z(t+1) = \varphi(z(t), x(t))$ $y(t) = \psi(z(t), x(t))$	Таблично заданные состояния и переходы

Дискретно-стохастические модели	Вероятностный автомат	Аналогично дискретно-детерминированному типу, но с распределением пар величин: пара (z_k, y_j) возникает с вероятностью b_{kj}, где $\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_{kj} = 1$	Таблично заданные состояния и переходы с вероятностями возникновения
Непрерывно-стохастические модели	Системы массового обслуживания	$P_0(t,\Delta t) + P_1(t,\Delta t) \approx 1$ $P_{>1}(t,\Delta t) \approx 0(\Delta t)$	Процессы функционирования экономических, производственных, технических и прочих систем
Сетевые модели	Сети Петри	$N = \langle B, D, I, O \rangle$	Графы позиций, переходов
Комбинированные модели	Агрегативные системы	$z(t_n + 0) = V[t_n, z(t_n), x$ $z(t) = U[t, t_n, z(t_n + 0)]$	Сложные схемы переработки информации

Приложение 2

Классификация элементного состава системы

Традиционный подход к классификации элементов системы заключается в следующем:

- вводится некоторая мера близости между векторами матрицы данных:
- по ней определяются расстояния между объектами;
- объекты упорядочиваются согласно выбранному алгоритму.

Фундаментальную роль при классификации данных играет понятие *расстояния* в пространствах объектов и свойств. Введем меры всевозможных расстояний, оперируя такими понятиями как объект, множество объектов, центр тяжести множества объектов, свойство:

1. Любое свойство может иметь как количественную, так и качественную природу в зависимости от шкалы, в которой оно измерено. Введем меру $r_{ij} = r(x_i, x_j)$ *расстояния между i-м и j-м объектами по признакам*. Выделяют очевидные свойства, которыми должны обладать меры d_{ij}:

a) непрерывность: $r(x_i, x_j)$ должна быть непрерывной функцией своих аргументов;

b) симметричность: $r(x_j, x_i) = r(x_i, x_j)$;

c) нормированность: $0 \le r(x_i, x_j) \le 1$, причем $r(x_i, x_j) = 0$, если $x_i = x_j$;

d) неравенство треугольника: для любых объектов *i*, *j*, *k* выполняется $r_{ij} \le r_{ik} + r_{kj}$

В зависимости от шкалы измерения того или иного функционального качества расстояние может быть задано по-разному. Например, для

количественных шкал r_{ij} задается как $r_{ij} = \left| r_i - r_j \right|$, где r_i и r_j – значения свойств *i*-го и *j*-го объекта.

2. Определим *расстояние между j-ым объектом и множеством L объектов* по некоторому *k*-му свойству как следующую функцию от расстояний между этим объектом и всеми элементами множества по данному свойству:

$$r_{j(L)^k} = \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \left(r_{ij}^k \right)^2 \right)^{1/2}$$

3. Введем *внутримножественное расстояние.* Пусть есть множество из *L* объектов. Внутримножественное расстояние по некоторому *k*-му свойству определим как следующую функцию от расстояний между всеми парами объектов множества:

$$r_{(L)^k} = \left(\frac{1}{L(L-1)} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{L} \left(r_{ij}^k \right)^2 \right)^{1/2}$$

4. Определим *расстояние между множествами объектов*. Рассмотрим два множества с числом объектов L_1 и L_2 с точки зрения некоторого *k*-го признака. Расстояние между ними по данному свойству определим как:

$$r_{(L_1)^k (L_2)^k} = \left(\frac{1}{L_1 L_2} \sum_{i=1}^{L_1} \sum_{j=1}^{L_2} \left(r_{ij}^k \right)^2 \right)^{1/2}$$

где r_{ij}^k – расстояние между *i*-м объектом первого множества и *j*-м объектом второго множества по *k*-му признаку.

5. Вычисление *центра тяжести множества* осуществляется по формуле:

$$\tilde{x} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} x_i$$

Приложение 3

Разделы и подразделы ОКВЭД

	Наименование разделов и подразделов
A	**Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство**
B	**Рыболовство, рыбоводство**
C	**Добыча полезных ископаемых**
CA	Добыча топливно-энергетических полезных ископаемых
CB	Добыча полезных ископаемых, кроме топливно-энергетических
D	**Обрабатывающие производства**
DA	Производство пищевых продуктов, включая напитки, и табака
DB	Текстильное и швейное производство
DC	Производство кожи, изделий из кожи и производство обуви
DD	Обработка древесины и производство изделий из дерева
DE	Целлюлозно-бумажное производство; издательская и полиграфическая деятельность
DF	Производство кокса, нефтепродуктов и ядерных материалов
DG	Химическое производство
DH	Производство резиновых и пластмассовых изделий
DI	Производство прочих неметаллических минеральных продуктов
DJ	Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий
DK	Производство машин и оборудования
DL	Производство электрооборудования, электронного и оптического оборудования
DM	Производство транспортных средств и оборудования
DN	Прочие производства
E	**Производство и распределение электроэнергии, газа и воды**
F	**Строительство**

G	**Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, бытовых изделий и предметов личного пользования**
H	**Гостиницы и рестораны**
I	**Транспорт и связь**
J	**Финансовая деятельность**
К	**Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг**
L	**Государственное управление и обеспечение военной безопасности; обязательное социальное обеспечение**
M	**Образование**
N	**Здравоохранение и предоставление социальных услуг**
O	**Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг**
P	**Предоставление услуг по ведению домашнего хозяйства**
Q	**Деятельность экстерриториальных организаций**

Приложение 4

Сводная таблица производственных функций:

Название, общий вид	однородность	постоянство эластичности замены факторов	Особенности
функция Леонтьева, $y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right)$	+	+	Предназначена для моделирования строго детерминированных технологий. Обычно используется для описания мелкомасштабных или полностью автоматизированных производственных объектов.
функция Кобба-Дугласа, $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$	+	+	Используется для описания среднемасштабных хозяйственных объектов. Вовлечение новой единицы ресурса приносит эффект, пропорциональный средней производительности имеющегося ресурса.
Линейная функция, $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$	+	+	Применяется для моделирования крупномасштабных систем. Особую роль играет предпосылка о постоянстве предельных производительностей факторов или об их неограниченной замещаемости.
функция Аллена, $y = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2$	+	-	Обычно используется для описания мелкомасштабных производственных систем с ограниченными возможностями переработки ресурсов, в которых чрезмерный рост любого из факторов оказывает отрицательное воздействие на объём выпуска.
функция *CES*, $y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{a_4}$	+	+	Применяется в случаях, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и вместе с тем есть основания предполагать, что этот уровень существенно не измениться при изменении объёмов вовлекаемых ресурсов. Может быть использована для моделирования систем любого уровня.
функция *LES*, $y = x_1^{a_0} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{a_3}$	+	-	Рекомендуется для описания производственных процессов, у которых возможность замещения вовлекаемых

			факторов существенно зависит от их пропорций.
функция Солоу, $y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_4})^{a_5}$	-	-	Может использоваться примерно в тех же случаях, что и функция *CES*, но не требуется предположения об однородности. Может моделировать системы любого масштаба.
ограниченная функция *CES*, $y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, (a_3 x_1^{a_5} + a_4 x_2^{a_5})^{a_6}\right)$	-	-	Предназначена для описания двухрежимного производственного процесса, в котором один из режимов характеризуется отсутствием заменяемости факторов, другой – ненулевой постоянной (но не известной заранее) величиной эластичности замены.
многорежимная функция, $y = (a_{11} x_1^{a_0} + a_{21} x_2^{a_0})^{a_1} \ldots$ $\ldots (a_{1k} x_1^{a_0} + a_{2k} x_2^{a_0})^{a_k}$	+	+	Используется при описании процессов, в которых уровень отдачи каждой новой единицы ресурса скачкообразно меняется в зависимости от соотношения факторов. Функцию целесообразно применять при наличии априорной информации о числе режимов.
функция линейного программирования, $y = \min\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{12}}\right) + \ldots$ $\ldots + \min\left(\frac{x_1}{a_{k1}}, \frac{x_2}{a_{k2}}\right)$	+	-	Имеет смысл использовать в тех случаях, когда выпуск продукции является результатом одновременного функционирования *k* фиксированных технологий, использующих одни и те же ресурсы.

Приложение 5

Виды двухфакторных производственных функций. Способы восстановления их аналитического вида.

1. Функция с фиксированными пропорциями факторов (функция Леонтьева)

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right).$$

Предпосылки, выделяющие функции данного вида:

а) предельная производительность первого фактора является двухуровневой кусочно-постоянной невозрастающей функцией от отношения x_1/x_2 с нулевым нижним уровнем. Предельная производительность второго фактора – неубывающая кусочно-постоянная функция от x_1/x_2 с нулевым нижним уровнем;

б) функция представляет решение следующей задачи математического программирования:

$$y \to \max$$
$$\begin{cases} a_1 y \le x_1 \\ a_2 y \le x_2 \end{cases},$$

где y – оптимизируемая переменная;

в) функция однородна и эластичность замены факторов равна нулю;

г) функция может быть получена из функции с постоянной эластичностью замены вида

$$y = \left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_3} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_3}\right)^{\frac{1}{a_3}}$$

путём предельного перехода $a_3 \to -\infty$.

Функция Леонтьева предназначена для моделирования строго детерминированных технологий, не допускающих отклонения от

технологических норм использования ресурсов на единицу продукции. Обычно используется для описания мелкомасштабных или полностью автоматизированных производственных объектов.

2. Функция *Кобба-Дугласа*

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}.$$

Предпосылки, выделяющие класс функций Кобба-Дугласа среди дважды дифференцируемых функций от двух переменных:

а) эластичности выпуска по факторам постоянны:

$$\begin{matrix} \chi_{21}^1(x_1, x_2) = a_1 \\ \chi_{22}^1(x_1, x_2) = a_2 \end{matrix}, \text{ где } \chi_{2i}^1(x_1, x_2) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_n)}{\dfrac{f(x_1, x_n)}{x_i}}, i = 1,2.$$

Решением этой системы дифференциальных уравнений частных производных первого порядка является класс функций Кобба-Дугласа;

б) эластичность функции по одному из факторов постоянна и функция является однородной:

$$\chi_{21}^1(x_1, x_2) = a_1;$$

$$\chi_{21}^1(x_1, x_2) + \chi_{22}^1(x_1, x_2) = a_1 + a_2;$$

в) функция однородна и эластичность замещения факторов по Алену и Михалевскому равны единице:

$$\sigma^A(x_1, x_2) = 1 = \sigma^M(x_1, x_2, dx_1, dx_2),$$

где эластичности замены по Аллену и Михалевскому вычисляются соответственно по формулам: $\sigma^A(x_1, x_2) = \dfrac{f_{x_1}' f_{x_2}' (x_1 f_{x_1}' + x_2 f_{x_2}')}{x_1 x_2 (-f_{x_1 x_1}'' f_{x_2 x_2}'' + 2 f_{x_1 x_2}'' f_{x_1}' f_{x_2}' - f_{x_2 x_2}'' f_{x_1 x_1}'')}$

$$\sigma^M(x_1,x_2,dx_1,dx_2) = f_{x_1}{}' f_{x_2}{}' \frac{-\frac{1}{x_1}dx_1 + \frac{1}{x_2}dx_2}{(f_{x_1x_1}{}'' f_{x_2}{}' - f_{x_1x_2}{}'' f_{x_1}{}')dx_1 + (f_{x_1x_2}{}'' f_{x_1}{}' - f_{x_2x_2}{}'' f_{x_2}{}')dx_2}$$

. Более подробное описание и вывод этих формул есть в [3.17].

г) предельная производительность каждого фактора пропорциональна его средней производительности:

$$\chi_{11}^1(x_1,x_2) = a_1\chi_{31}^0(x_1,x_2);$$

$$\chi_{12}^1(x_1,x_2) = a_2\chi_{32}^0(x_1,x_2),$$

где $\chi_{1i}^1(x_1,x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2), i = 1,2$ – предельная производительность, а $\chi_{3i}^0 = \frac{f(x_1,x_2)}{x_i}, i = 1,2$ – средняя отдача каждой единицы *i*-го ресурса.

д) функция однородна как функция от x_1, x_2 и как функция от x_1 при любом фиксированном x_2;

е) функция может быть получена из функции с постоянной эластичностью замены вида

$$y = a_0(a_1x_1^{a_3} + a_2x_2^{a_3})^{\frac{1}{a_3}}$$

путём предельного перехода $a_3 \to 0$.

Функция Кобба-Дугласа чаще всего используется для описания среднемасштабных хозяйственных объектов (от производственного объединения до отрасли), характеризующихся устойчивым, стабильным функционированием (вовлечение новой единицы ресурса приносит эффект, пропорциональный средней производительности имеющегося ресурса).

3. *Линейная функция*

$$y = a_1x_1 + a_2x_2.$$

Предпосылки:

а) предельные производительности факторов постоянны

$$\chi_{11}^1 = a_1, \chi_{12}^1 = a_2$$

и в нуле функция принимает нулевое значение;

б) предельная производительность одного из факторов постоянна и функция однородная первой степени:

$$\chi_{11}^{1} = a_1, \chi_{21}^{1} + \chi_{22}^{1} = 1;$$

в) функция однородна и эластичность замены факторов по Алену бесконечна:

$$\sigma^{A}(x_1, x_2) = \infty;$$

г) эластичности выпуска по факторам обратно пропорциональны его средней производительности:

$$\chi_{21}^{1} = \frac{a_1}{\chi_{31}^{0}}, \chi_{22}^{1} = \frac{a_2}{\chi_{32}^{0}}.$$

Линейная функция применяется обычно для моделирования крупномасштабных систем (крупная отрасль, народное хозяйство в целом), в которых выпуск продукции является результатом одновременного функционирования множества различных технологий. Особую роль играет предпосылка о постоянстве предельных производительностей факторов или об их неограниченной замещаемости.

4. *Функция Аллена*

$$y = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2$$

однозначно задаётся следующим условием:

скорости роста предельных производительностей постоянны и функция однородна:

$$\chi_{111}^{2} = const, \chi_{122}^{2} = const, \chi_{21}^{1} + \chi_{22}^{1} = const,$$

где $\chi_{1ij}^{2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2), i, j = 1,2$ – характеризует динамику изменения предельной производительности.

Функция Аллена при a_1, $a_2 \geq 0$ предназначена для описания производственных процессов, в которых чрезмерный рост любого из

факторов оказывает отрицательное воздействие на объём выпуска. Обычно такая функция используется для описания мелкомасштабных производственных систем с ограниченными возможностями переработки ресурсов.

5. Функция постоянной эластичности замены факторов (*функция CES*)

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{a_4}.$$

Предпосылки:

Функция однородна и эластичность замены факторов постоянна:

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - a_2}.$$

Функция *CES* применяется в случаях, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и вместе с тем есть основания предполагать, что этот уровень существенно не измениться при изменении объёмов вовлекаемых ресурсов. Иными словами, экономическая технология обладает определённой устойчивостью по отношению к пропорциям факторов. Функция *CES* (при наличии средств оценивания её параметров) может быть использована для моделирования систем любого уровня.

6. Функция с линейной эластичностью замены факторов (*функция LES*)

$$y = x_1^{a_0} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{a_3}.$$

Предпосылки:

функция однородна и эластичность замены факторов по Аллену является линейной функцией отношения факторов с единичным свободным членом:

$$\sigma^A(x_1, x_2) = 1 + c\frac{x_1}{x_2},$$

где $c = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_0 a_2}$.

Функция *LES* рекомендуется для описания производственных процессов, у которых (в отличие от описываемых функцией CES) возможность замещения вовлекаемых факторов существенно зависит от их пропорций, причём при низком уровне x_1/x_2 близка к единице, а с ростом x_1/x_2 неограниченно возрастает. Такая ситуация возможна, например, если рост ресурса x_1 связан с общим расширением производства, появлением множественных технологических процессов с широкими возможностями комбинирования.

7. *Функция Солоу*

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_4})^{a_5}$$

характеризуется тем, что величина процентного изменения предельной нормы замены факторов, вызванного увеличением любого фактора на один процент, не зависит от начального уровня факторов:

$$\frac{\partial \ln \chi_{312}^1}{\partial \ln x_1} = a_3 - 1, \frac{\partial \ln \chi_{312}^1}{\partial \ln x_1} = 1 - a_4$$

где $\chi_{312}^1(x_1, x_2) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)}$ – предельная норма замены 1-го ресурса 2-м.

Функция Солоу может использоваться примерно в тех же случаях, что и функция *CES*, однако предпосылки, лежащие в её основе, слабее предпосылок функции *CES* (в частности, не требуется предположения об однородности). Это позволяет рекомендовать её (при наличии соответствующих средств оценки параметров) в тех случаях, когда предположение об однородности представляется неоправданным, например, когда влияние на объём выпуска увеличения каждого из факторов проявляется различным образом. Функция Солоу может моделировать системы любого масштаба.

8. *Ограниченная функция CES*

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, (a_3 x_1^{a_5} + a_4 x_2^{a_5})^{a_6}\right).$$

Предпосылки:

Функция моделирует процесс, в котором при малых значениях одного из факторов выпуск пропорционален объёму этого фактора, при больших – описывается функцией *CES*. Функцию можно рассматривать как решение задачи оптимизации

$$y \to \max$$

$$\begin{cases} a_1 y \le x_1 \\ a_2 y \le x_2 \\ y \le (a_3 x_1^{a_5} + a_4 x_2^{a_5})^{a_6} \end{cases}$$

относительно переменной y.

Подобным способом могут быть построены ограниченные функции Кобба-Дугласа, Солоу и др.

Ограниченная функция *CES* предназначена для описания двухрежимного производственного процесса, в котором один из режимов характеризуется отсутствием заменяемости факторов, другой – ненулевой постоянной (но не известной заранее) величиной эластичности замены. При этом переход от одного режима к другому осуществляется в зависимости от уровня лимитирующего первый режим фактора.

9. *Многорежимная функция*

$$y = (a_{11} x_1^{a_0} + a_{21} x_2^{a_0})^{a_1} \ldots (a_{1k} x_1^{a_0} + a_{2k} x_2^{a_0})^{a_k}.$$

Предпосылки:

Функция однородна и эластичность функции по первому аргументу представляет собой сглаженную k-уровневую убывающую ступенчатую функцию. Сглаживание осуществляется путём перехода от кусочно-постоянной функции

$$\overline{\chi}_{21}^{1}(r) = \begin{cases} b, \text{при } 0 \le r \le a \\ 0, \quad \text{при } r > a \end{cases}$$

где a, b – положительные константы, к функции

$$\tilde{\chi}_{21}^{1}(r) = \frac{b}{1+\left(\frac{r}{a}\right)^{\beta}},$$

где $\beta >> 1$.

Многорежимная функция, одна из наиболее общих в числе приведённых форм производственных функций, используется при описании процессов, в которых уровень отдачи каждой новой единицы ресурса скачкообразно меняется в зависимости от соотношения факторов. Функцию целесообразно применять при наличии априорной информации о числе режимов (k), а иногда и о ширине «переходной» области между режимами (чем выше $|a_0|$, тем более отчётливо выделяются режимы).

10. *Функция линейного программирования*

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{12}}\right) + \ldots + \min\left(\frac{x_1}{a_{k1}}, \frac{x_2}{a_{k2}}\right).$$

Предпосылки:

а) функция является выражением зависимости между вектором ограничений и значением целевой функции в задаче линейного программирования

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_k y_k \to \max$$
$$\begin{cases} d_{11} y_1 + d_{12} y_2 + \ldots + d_{1k} y_k \le x_1 \\ d_{21} y_1 + d_{22} y_2 + \ldots + d_{2k} y_k \le x_2 \end{cases}$$

где $d_{11}, \ldots, d_{k2}, b_1, b_2$ – положительные константы, зависящие от $a_{11}, \ldots, a_{k2}$; y_1, y_2 – переменные;

б) предельная производительность по первому (второму) фактору представляет собой неубывающую (соответственно невозрастающую) многоступенчатую функцию от x_1/x_2 с нулевым нижним уровнем.

Функцию линейного программирования имеет смысл использовать в тех случаях, когда выпуск продукции является результатом одновременного

функционирования k фиксированных технологий, использующих одни и те же ресурсы. Иногда функции типа Леонтьева и функции линейного программирования оказывается возможным построить без статистического оценивания параметров, на основе нормативно-технической информации.

Приложение 6

Исходные данные для восстановления производственных функций.

Валовый выпуск, млн. руб.	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
обрабатывающие производства	26830,75	31982,98	40731,1	51015,59	46992,05	58651,97	75977,35
производство и распределение электроэнергии, газа и воды	6216,133	8030,409	10976,82	13676,53	18418,14	22476,21	21533,74
сельское хозяйство	13950,47	17685,99	27237,91	35820,05	35784,27	25072,84	54018,83
оптовая и розничная торговля	28662,03	31282,46	43972,9	52735,68	60985,08	63984,97	85764,74
строительство	7796,146	9605,211	12564,85	18271,47	21307,73	29961,26	36884,41
транспорт и связь	13900,78	19084,78	24305,59	36308,84	31477,82	33547,75	48338,43

Основные фонды	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
обрабатывающие производства	29923,9	32489	39550	64387	72838	90231	107484
производство и распределение электроэнергии, газа и воды	30961,7	31245	36287	37313	42562	52175	59773
сельское хозяйство	34605	32030	30344	42 368	49163	51764	61916
оптовая и розничная торговля	7204	7007	8767	16798	37586	40388	44095
строительство	3620	3182	3410	8122	8702	13943	13037
транспорт и связь	150840	178167	198031	268054	279331	267748	282554

Труд (млн. руб.)	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
обрабатывающие производства	1030,074	1189,856	1537,865	2014,187	1935,446	1646,183	2505,282
производство и распределение электроэнергии, газа и воды	263,8391	303,7439	371,5152	459,7592	557,0244	627,5745	740,1803
сельское хозяйство	595,3256	669,5694	928,8889	1340,991	1520,105	1632,033	1956,405
оптовая и розничная торговля	621,7326	860,468	1183,992	1834,654	2139,528	2528,165	3389,278
строительство	313,2594	452,364	541,1602	729,5157	786,0364	884,223	1320,373
транспорт и связь	626,5358	754,4611	903,1818	1141,976	1274,419	1410,627	1721,8

Значения приведены в миллионах рублей.

Приложение 7

Статистические показатели экономики РЭС Воронежской области (2008 г.)

	Матрица прямых затрат (2008 г)						Прибыль*, млн. руб.	Норма амортизации* (средняя)
	1	2	3	4	5	6		
1	0,188	0,150	0,150	0,078	0,150	0,076	9690,6	0,05
2	0,026	0,030	0,014	0,014	0,065	0,024	426,8	0,032
3	0,087	0,045	0,038	0,001	0,001	0,054	2808,3	0,051
4	0,052	0,031	0,058	0,101	0,300	0,125	1012,6	0,153
5	0,083	0,027	0,005	0,014	0,026	0,015	729	0,017
6	0,116	0,092	0,022	0,022	0,027	0,015	1151,1	0,08

* Источник: Воронежский статистический ежегодник, 2009.

По формуле $h_{ij} = \frac{a_{ij} X_j^B}{X_i^B}$ можно перейти к матрице коэффициентов распределения. Значения валового выпуска вида экономической деятельности X_j^B и X_i^B берутся за базовый год – год составления баланса.

	Матрица коэффициентов распределения (2008 г)						Валовой выпуск, млн. руб.
	1	2	3	4	5	6	
1	0,188	0,040	0,105	0,081	0,054	0,054	139869
2	0,097	0,030	0,037	0,054	0,087	0,064	27017
3	0,124	0,017	0,038	0,001	0,001	0,055	69021
4	0,050	0,008	0,039	0,101	0,104	0,086	288464
5	0,232	0,020	0,010	0,040	0,026	0,030	33252
6	0,163	0,035	0,022	0,032	0,014	0,015	63289

Приложение 8

Примеры открытых неоднородных систем.

В биологии примером открытой неоднородной системы может служить популяция рыб, разводимых в промышленных целях в водоеме. Элементами в системе будут являться виды рыб. Очевидно, что мощность каждого элемента, вычисляемая как число рыб определенного вида, будет, вообще говоря, различной. То есть имеет место неоднородность элементов системы. Связи одного рода между элементами можно задать основываясь на пищевой цепочке: два элемента связаны друг с другом по принципу хищник-жертва. Связи другого рода можно задать, опираясь на конкуренцию в пище: два элемента связаны, если их рацион пересекается. Имеем два рода связей – неоднородность системы по связям. Система является открытой, как минимум в силу того факта, что на популяцию рыб могут оказывать влияние животные и птицы питающиеся рыбой, нелегальные рыбаки и прочие факторы. Целевым функционалом системы может являться максимизация мощности тех элементов, что являются промысловыми рыбами. В качестве ресурсов, которыми обладает управляющий центр может выступать кормовая база, предназначенная в пищу для нужных видов рыб. Передаточная функция элемента определяет зависимость между поглощенными ресурсами и массой выловленной рыбы соответствующего вида.

Зависимости и ограничения модели. Отметим, что кормом также могут питаться непромысловые виды, снижая тем самым эффективность «вложений». При росте промысловой рыбы, с большей долей вероятности будет расти и популяция хищников, стремящаяся сократить число промысловой рыбы. Обе обозначенных зависимости должны быть отражены в модели в виде выражений характеризующих распределение ресурсов и связи между элементами.

Целевые функционалы показателей качества могут основываться на пригодности рыбы с точки зрения веса, питательных веществ, витаминов, а также экологических показателей.

В производственной сфере в качестве примера можно рассматривать некоторый производственный кластер. Элементами системы выступают предприятия кластера. Элементы различны по масштабу и типу. Для их приведения к одной шкале, целесообразно рассматривать показатели деятельности элементов в денежном эквиваленте. Связи между элементами определяются на основе товарных потоков между предприятиями. Передаточная функция элемента есть производственная функция предприятия. Дополнительные ресурсы – это денежные средства управляющего холдинга, который определяет цели развития кластера. Целевые функции, например, максимизация прибыли объединения и достижение определенного уровня качества выпускаемой продукции, повышение производительности и качества труда.

В качестве гипотетических элементов можно рассматривать предприятия, не включенные в кластер и определять в модели целесообразность их включения в объединение.

Влияние внешней среды можно рассматривать через предприятия не включенные в кластер, но имеющие связи с элементами системы. У данных предприятий могут быть свои цели, в том числе противоречащие целям системы.