На правах рукописи

Повприц Елена Викторовна

Характеризация следов и преобразование Коши линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах аналитических функций со смешанными нормами

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Брянском государственном университете имени академика И. Г. Петровского.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор **Шамоян Файзо Агитович**.

Официальные оппоненты: **Расулов Карим Магомедович**, доктор физико-математических наук, профессор, Смоленский государственный университет, кафедра математического анализа, заведующий кафедрой

Охлупина Ольга Валентиновна, кандидат физико–математических наук, Брянская государственная инженерно-технологическая академия, кафедра математики, доцент.

Ведущая организация: **Южный федеральный университет** (Ростов-на-Дону)

Защита диссертации состоится «2» июня 2015 г. в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» по адресу 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2748

Автореферат разослан « » марта 2015 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Гликлих Ю. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В комплексном анализе и его многочисленных приложениях важную роль играют пространства Харди и Бергмана. Методы, разработанные в процессе решения задач, связанных с этими пространствами, нашли существенные приложения в теории рядов и интегралов Фурье, в теории сингулярных интегральных операторов и в других разделах комплексного и гармонического анализа. В последние десятилетия по этому направлению опубликовано несколько монографий. Среди них отметим монографии У. Рудина (1969г., 1980 г.), А.Е. Джрбашяна и Ф.А. Шамояна (1988 г.), Х. Хеденмальма, Б.И. Коренблюма и К. Жу (2000 г.), Н.К. Никольского (2002 г.), К. Сейпа (2004 г.), Ф.А. Шамояна и Е.Н. Шубабко (2009 г.).

В одномерном случае пространства Харди и Бергмана исследованы довольно полно, в то же время ряд важных вопросов, относящихся к весовым пространствам аналитических функций типа Харди и Бергмана в поликруге, сравнительно мало изучен. При этом задачи, связанные с указанными пространствами, имеют широкие приложения в теории кратных тригонометрических рядов и других вопросах многомерного гармонического и комплексного анализа, теории функциональных пространств. Поэтому тематика диссертационной работы весьма актуальна.

Приведём обзор некоторых результатов, тесно связанных с тематикой диссертационной работы. Для этого введем необходимые определения и обозначения.

Пусть

$$U^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n) : |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\} \qquad (1)$$

- единичный поликруг n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$,

$$T^n = \{z = (z_1, z_2, ..., z_n) : |z_j| = 1, 1 \leq j \leq n\} \qquad (2)$$

- единичный тор (остов поликруга U^n), $H(U^n)$ - множество всех аналитических в U^n функций, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ - некоторая вектор-функция, заданная на $Q_n = [0; 1)^n$, $H^p(U^n)$ - класс Харди в U^n.

Обозначим через Ω множество всех положительных функций ω, суммируемых на интервале $(0, 1)$ для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω, q_ω такие, что $m_\omega, q_\omega \in (0, 1)$ и

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega,$$

$\forall r \in (0, 1), \lambda \in [q_\omega; 1]$.

Если $\omega \in \Omega$, то $\alpha_\omega := \frac{\ln m_\omega}{\ln q_\omega}$, $\beta_\omega := \frac{\ln M_\omega}{\ln \frac{1}{q_\omega}}$.

Пусть $z=(z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$, $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_n)\in\mathbb{C}^n$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, тогда $z^\alpha=z^{\alpha_1}\cdot...\cdot z^{\alpha_n}$, $|\alpha|:=\alpha_1+...+\alpha_n$, $(1-|z|^2)^\alpha:=\prod\limits_{j=1}^{n}(1-|z_j|^2)^{\alpha_j}$, $(1-\zeta z)^\alpha:=\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\zeta_j z_j)^{\alpha_j}$, здесь и всюду ниже выбрана главная ветвь степенной функции. Также, если $\omega=(\omega_1,...,\omega_n)$, $\omega_j\in\Omega$, $j=1,...,n$, тогда $\omega_\Pi(1-r):=\prod\limits_{j=1}^{n}\omega_j(1-r_j)$, $\omega_\Pi^s(1-r):=\prod\limits_{j=1}^{n}\omega_j^s(1-r_j)$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $r=(r_1,...,r_n)\in Q_n$.

Через $L^{p,q}_\omega(U^n)$ обозначим класс измеримых по Лебегу в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{p,q}_\omega}=\left(\int\limits_{Q_n}\omega_\Pi(1-r)\left(\int\limits_{T^n}|f(rw)|^p dm_n(w)\right)^{\frac{q}{p}}dr\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty,\quad 0<p,q<+\infty,$$

где dm_n есть мера Лебега на T^n.

Теория функциональных пространств со смешанными нормами типа $L^{p,q}_\omega(U^n)$ берет свое начало в 60-х годах прошлого столетия из работ А. Бенедека и Р. Панцоне. По этим вопросам опубликован ряд фундаментальных трудов. Полученные результаты освещены в хорошо известных монографиях С.М. Никольского (1969 г.), О.В. Бесова, В.П. Ильина, С.М. Никольского (1975 г.), Х. Трибеля (1986 г.).

Положим $A^{p,q}_\omega(U^n)=H(U^n)\cap L^{p,q}_\omega(U^n)$ с соответствующей квази-нормой.

Ясно, что, если f принадлежит $H^p(U^n)$ или $A^{p,q}(U^n)$, то функция $D(f)(z):=f(z,...,z)$ является аналитической функцией в $U:=U^1$. Естественно возникает вопрос о полной характеризации таких аналитических в круге функций, то есть описание следов этих классов на диагонали поликруга U^n. Проблема характеризации следов функции из класса Харди $H^p(U^n)$ на диагонали поликруга впервые была поставлена и исследована в классической монографии У. Рудина(1974 г.). Он установил, что если $f\in H^1(U^2)$, то $D(f)\in A^{1,1}_1(U)$; если $f\in H^2(U^2)$, то $D(f)\in A^{2,2}_1(U)$ и при этом $DH^2(U^2)=A^{2,2}_1(U)$. Здесь существенно было использовано то, что $H^2(U^2)$ является гильбертовым пространством. В указанной монографии У. Рудиным были поставлены следующие проблемы:

1) отображает ли оператор D $H^1(U^2)$ на $A^{1,1}_1(U)$;

2) как охарактеризовать сужение классов Харди $H^p(U^n)$ на диагональ полидиска при $n\geq 2, 0<p<+\infty$.

В этом направлении одновременно и независимо друг от друга работали несколько специалистов комплексного анализа.

Пусть $h^p(U^n)$ - класс Харди n-гармонических в поликруге U^n функций, то есть множество всех n-гармонических в U^n функций, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{T^n} |u(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) < +\infty.$$

П. Дьюрен и А. Шилдс (1975 г.) установили, что если $u \in h^p(U^n)$, причем $2 \leq p < +\infty$, то $D(u) \in L^p(U, \mu_n)$, где $d\mu_n(\zeta) = (1-|\zeta|)^{n-2}dm_2(\zeta)$, $dm_2(\zeta)$ - плоская мера Лебега на U.

Ф.А. Шамоян (1976г.) получил следующие результаты:

Пусть μ - конечная мера в круге U, тогда следующие утверждения эквивалентны:

i) Оператор диагонального отображения D отображает класс $h^p(U^n)$ в $L^p(U, d\mu)$, для некоторого $p_0,\ 1 < p_0 < +\infty$;

ii) Это утверждение справедливо для всех $1 < p < +\infty$;

iii) Существует константа A, такая что $\mu(\Delta_l(\zeta)) \leq Al^n$, $\forall \zeta \in T^1 = T,\quad 0 < l < 1$, где $\Delta_l(\zeta)$ - прямоугольник Карлесона: $\Delta_l(\zeta) = \{z \in U : |\arg\zeta - \arg z| < \frac{l}{2},\ \ 1 - l < |z| < 1\}$.

При этом было установлено, что указанное утверждение неверно при $0 < p \leq 1$.

Очевидно, что мера $d\mu(r, \varphi) = (1-r)^{n-2} r dr d\varphi$ удовлетворяет условию iii).

На основе этих результатов Ф.А. Шамоян установил, что $DH^p(U^n) = A^p_{n-2}(U)$ при всех $0 < p < +\infty$ и $n \geq 2$.

Одновременно с Ф.А. Шамояном и независимо от него другими методами последний результат в частном случае при $p \geq 1$ был получен в работе С. Горовица и Е. Оберлина (1976 г.). А в 1978 г. Дж. Детрас были переоткрыты результаты Ф.А. Шамояна при $0 < p < 1, n = 2$. Диагональное отображение в пространстве $A^{p,p}_\alpha(U^n)$ при $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), 0 < p < +\infty$ было исследовано Ф.А. Шамояном в 1987 г.

Впервые задача о диагональном отображении в пространствах со смешанными нормами была решена в работах Ф.А. Шамояна и О.В. Ярославцевой (2000 г.). В их работах рассматривалась следующая задача: Пусть $\overrightarrow{p} = (p_1, ..., p_n)$, $0 < p_j < +\infty$, $1 \leq j \leq n$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\widetilde{\omega}_p(t) = \omega_n(t) \prod\limits_{j=1}^{n-1} (\omega_j(t) t^2)^{\frac{p_n}{p_j}}, t \in [0;1)$, $A^{\overrightarrow{p}}_\omega(U^n)$ - пространство голоморфных в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{A^{\overrightarrow{p}}_\omega(U^n)} = \Big(\int_U \omega_n(1-|z_n|) \Big(\int_U \omega_{n-1}(1-|z_{n-1}|) ... \times$$

$$\times\Big(\int\limits_U |f(z)|^{p_1}\omega_1(1-|z_1|)dm_2(z_1)\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}...dm_2(z_{n-1})\Big)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}dm_2(z_n)\Big)^{\frac{1}{p_n}}<+\infty.$$

И $A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}(U)$ - пространство голоморфных в U функций f, для которых

$$\|f\|_{A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}}=\Big(\int\limits_U |f(z)|^{p_n}\widetilde{\omega}_p(1-|z|)dm_2(z)\Big)^{\frac{1}{p_n}}<+\infty.$$

Тогда оператор D отображает $A^{\overrightarrow{p}}_{\omega}(U^n)$ на $A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}(U)$, то есть $DA^{\overrightarrow{p}}_{\omega}(U^n)=A^{\overrightarrow{p}}_{\widetilde{\omega}_p}(U)$, где D - оператор диагонального отображения.

В дальнейшем, Г. Рен и Дж. Ши (2004 г.) исследовали задачу о диагональном отображении в пространствах $A^{p,q}(U^n)$ при $\omega_j(t_j)=t_j^{\alpha_j}$, $j=1,...,n$. Однако методы, применяемые в этой работе, не проходят в случае общих весовых пространств. Поэтому вопрос о характеризации следов аналитических функций из весовых анизотропных пространств со смешанными нормами на диагонали полидиска оставался открытым.

Хорошо известно, что для изучения весовых пространств аналитических функций важное значение имеет описание линейных непрерывных функционалов в терминах соответствующих пространств аналитических функций. Результаты, связанные с данной тематикой, имеют обширные приложения в различных вопросах комплексного и гармонического анализа: теории аппроксимации и интерполяции, описании инвариантных подпространств оператора сдвига, теории операторов и т.д. Этим вопросам посвящены работы В.П. Захарюта и В.И. Юдовича (1964 г.), П. Дьюрена, А. Шилдса, Б. Ромберга (1969 г.), А. Фразье (1972 г.), К. Хана и Дж. Мичелл (1976 г.), Ф. А. Шамояна (1973 г., 1987 г.).

Вопрос об описании линейных непрерывных функционалов в многомерных анизотропных весовых пространствах $A^{p,q}_{\omega}$ аналитических функций со смешанными нормами при всех $0<p,q<+\infty$ по-прежнему остаётся весьма актуальным.

В теории классов Харди существенную роль играет внешне-внутренняя факторизация, построенная еще в начале 20-го столетия в классических работах Г. Сегё, М. Рисса, Р. Неванлинны, В.И. Смирнова. В работах Б.И. Коренблюма, В.П. Хавина, Ф.А. Шамояна, Н.А. Широкова, К.М. Дьяконова было установлено, что указанная факторизация может быть успешно применена для изучения классов аналитических в круге функций, гладких вплоть до его границы. Эти результаты основаны на том, что многие классы указанного типа инвариантны относительно тёплицевых операторов вида $T_h(f)=P_+(\overline{h}f)$, где h - любая ограниченная аналитическая в круге функция. Здесь P_+ - известный проектор М. Рисса. Операторы T_h применяются не только в теории факторизации, они также имеют широкие приложения во многих областях комплексного и функционального анализа (при исследовании замкнутых идеалов в алгебрах аналитических функций, при изучении инвариантных подпространств оператора сдвига, в вопросах характеризации метрических проекций и др.) Естественно возникает задача получения многомерных аналогов этих результатов, в том числе в классах голоморфных в поликруге функций и гладких вплоть до его границы.

Однако следует отметить, что поведение кратных тёплицевых операторов существенно отличается от одномерного случая. Так, например, аналог классической теоремы И.И. Привалова об ограниченности интегралов типа Коши в гёльдеровких классах, как установила Б. Ерикке(1983 г.), в случае единичного тора не имеет места.

Цель работы.

1. Дать полное описание следов весовых анизотропных пространств аналитических в поликруге функций со смешанной нормой на диагонали поликруга.

2. Получить полную характеризацию преобразования Коши линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой.

3. Дать полную характеризацию тех плюригармонических символов, при которых кратный тёплицев оператор с соответствующим символом действует в весовом анизотропном пространстве Соболева аналитических в поликруге функций.

Методы исследования. В работе применялись общие методы комплексного и функционального анализа, теории сингулярных интегральных операторов. Важную роль играют интегральные представления исследуемых классов.

Научная новизна.
В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получена полная характеризация следов весовых анизотропных пространств аналитических в поликруге функций со смешанной нормой на диагонали поликруга.

2. Получено полное описание преобразования Коши линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой.

3. Описаны те плюригармонические символы, при которых кратный тёплицев оператор с соответствующим символом действует в весовом анизотропном пространстве Соболева аналитических в поликруге функций.

Практическая и теоретическая значимость.
Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты исследования могут быть использованы в многомерном гармоническом анализе, в теории функциональных пространств, в теории сингулярных интегральных операторов, при исследовании вопросов представления и описания двойственных пространств, вопросов аппроксимации, при изучении операторов сдвига в весовых пространствах аналитических функций, а также могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей университетов.

Апробация результатов диссертации.
Основные результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2011 г.), «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 2011 г.-2013 г.), «Комплексный анализ и приложения» (Петрозаводск, 2012 г.), на Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (2014 г.), а также неоднократно на семинарах по комплексному анализу Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского.

Часть исследований, результаты которых представлены в диссертации, поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект №13-353 01-97508) и Министерства образования и науки РФ (проект №1.1704.2014К).

Публикации.
Результаты исследований опубликованы в работах: [1]–[10]. Работы [1]–[3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В совместных работах [2, 3, 7, 9, 10] научному руководителю принадлежат постановка задачи и идея доказательства.

Структура и объем диссертации.
Работа состоит из введения, двух глав, разбитых в общей сложности на 6 параграфов, списка использованной литературы и занимает 116 страниц. Библиография содержит 48 наименований.

Содержание диссертации.

Во *введении* излагается история вопроса, обосновывается актуальность темы и кратко излагается содержание работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена вопросам диагонального отображения и эквивалентности норм в анизотропных аналитических пространствах со смешанными нормами в поликруге U^n.

Для формулировки основных результатов введем дополнительные обозначения.

Будем писать $f(\zeta) \lesssim g(\zeta), \zeta \in E$, если существует положительное число $A > 0$, такое что $f(\zeta) \leq Ag(\zeta), \zeta \in E$, где f и g - две вещественнозначные функции с общей областью определения E.

Если $f \in H(U^n)$, $f(z) = f(z_1, ..., z_n) = \sum\limits_{k_1,...,k_n=0}^{+\infty} a_{k_1...k_n} {z_1}^{k_1}...{z_n}^{k_n}$ и $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $\beta_j > -1$, $1 \leq j \leq +\infty$, то назовем дробной производной порядка β в смысле Римана-Лиувилля следующую голоморфную функцию:

$$D^\beta f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k, \tag{3}$$

где $|k| = k_1 + ... + k_n$, Γ - функция Эйлера, $\Gamma(k+\beta+1) = \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(k_j + \beta_j + 1)$.

Ясно, что если $f \in H(U^n)$, тогда $D^\beta f(z) \in H(U^n)$, для всех β.

Пусть $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$, $0 < p, q < +\infty$ и $D(f)(z) = f(z, ..., z)$, $\omega_j \in \Omega$, $1 \leq j \leq n$, пусть далее $z \in U$,

$$\Omega_n(r) = r^{\left(\frac{q}{p}+1\right)(n-1)} \prod_{j=1}^{n} \omega_j(r), \quad r \in (0,1).$$

Через $A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$ обозначим весовой класс аналитических в единичном круге U функций f, для которых

$$\|f\|_{A^{p,q}_{\Omega_n}} = \left(\int_0^1 \Omega_n(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(rw)|^p dm(w) \right)^{\frac{q}{p}} dr \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, \quad 0 < p, q < +\infty.$$

В *первом параграфе* первой главы установлен результат, который, наряду с другими вспомогательными утверждениями, используется при доказательстве основных теорем. Однако, на наш взгляд, это утверждение имеет также самостоятельный интерес.

Теорема 1.1. *Пусть* $\omega_j \in \Omega$, $\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t) \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)} \right)^q$, $t \in (0,1)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\alpha > \alpha_\omega$, $1 < p, q < +\infty$. *Тогда оператор*

$$T_\alpha(f)(z) = \int_{U^n} \frac{\omega_\Pi(1-|\xi|)}{(1-\overline{\xi}z)^{\alpha+2}} f(\xi) dm_{2n}(\xi), \quad z \in U^n$$

отображает пространство $L^{p,q}_{\omega}(U^n)$ *в пространство* $A^{p,q}_{\omega_\alpha}(U^n)$, *причем*

$$\|T_\alpha f\|_{A^{p,q}_{\omega_\alpha}} \lesssim \|f\|_{L^{p,q}_{\omega}}.$$

Отметим, что указанный результат является точным.

Во *втором параграфе* первой главы получена полная характеризация следов функций из пространства $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$ на диагонали поликруга, а именно установлен следующий результат:

Теорема 1.2. *Пусть* $\omega_j \in \Omega$, $1 \le j \le n$, $0 < p, q < +\infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *функция* $g \in H(U)$ *представима в виде* $g(z) = D(f)(z)$, $z \in U$, $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$;

2) $g \in A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$, *то есть* $DA^{p,q}_{\omega}(U^n) = A^{p,q}_{\Omega_n}(U)$.

Напомним, что $D(f)(z) = f(z, ..., z)$, $z \in U$, $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$.

Последний параграф первой главы посвящен проблеме, связанной с хорошо известной теоремой Харди-Литтлвуда, об оценке $L^{p,q}_{\omega}$ - нормы аналитической функции через норму ее производной. Указанная теорема обобщается по трем направлениям: во-первых, теорема распространяется на многомерный случай, во-вторых, используется дробная производная любого порядка, и, в третьих, устанавливаются соответствующие оценки в случае смешанных норм.

Введём дополнительные обозначения.

Пусть $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \ge 0,\ j = 1, ..., n\}$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega_j \in \Omega$, тогда определим $\widehat{\omega}(t) = \prod\limits_{j=1}^{n} \omega_j(t_j) t_j^{m_j q}$, $t_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., n$.

В *третьем параграфе* первой главы, в частности, установлена справедливость следующего утверждения:

Теорема 1.3. *Пусть* $f \in A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < p, q < +\infty$, *тогда справедливы следующие оценки*

$$\|D^m f\|_{A^{p,q}_{\widehat{\omega}}(U^n)} \lesssim \|f\|_{A^{p,q}_{\omega}(U^n)} \lesssim \|D^m f\|_{A^{p,q}_{\widehat{\omega}}(U^n)}. \tag{4}$$

Первый параграф второй главы диссертационной работы посвящен решению задачи, связанная с описанием линейных непрерывных функционалов в терминах преобразования Коши в пространствах аналитических функций со смешанной нормой при $1 < p, q < +\infty$.

Напомним, что, если $\Phi \in (A^{p,q}_{\omega}(U^n))^*$, то преобразованием Коши этого функционала называется следующая функция:

$$g(z) = \Phi(e_z), \text{ где } e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\zeta_j z_j},$$

$\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n), z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Ясно, что функция g является аналитической в U^n функцией. Отметим, что в случае, когда p, q принадлежат $(1, +\infty)$, или $(0, 1]$, а также, в случае, когда один из параметров принадлежит интервалу $(0, 1]$, а другой - интервалу $(1; +\infty)$, характеризация преобразования Коши имеет совершенно различное описание. При $1 < p, q < +\infty$ справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть Φ - линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$, и $g(z) = \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z}$, ζ, $z \in U^n$, $1 < p, q < +\infty$. Тогда $g \in H(U^n)$ и $D^{\alpha+1} g \in A^{p',q'}_{\omega_\alpha}(U^n)$ для $\alpha > \alpha_\omega$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{q-1}$, $\omega_\alpha(t) = \omega(t)\left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)}\right)^{q'}$, $t \in Q_n$.*

Функционал Φ представим в виде

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta) \tag{5}$$

и справедливы оценки

$$\|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}_{\omega_\alpha}} \lesssim \|\Phi\| \lesssim \|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}_{\omega_\alpha}}. \tag{6}$$

Верно и обратное: любая $g \in H(U^n)$ такая, что $D^{\alpha+1} g \in A^{p',q'}_{\omega_\alpha}$ по формуле (5) порождает линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_{\omega}(U^n)$ для которого справедливы оценки (6).

Для формулировки следующего утверждения нам потребуются еще некоторые определения и обозначения.

Пусть $0 < p, q \leq 1$, обозначим через $\lambda^{p,q}_{\omega}$ класс аналитических в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{\lambda^{p,q}_{\omega}} = \sup_{z \in U^n} \left[\frac{(1-|z|)^{\alpha - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + 2}}{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-|z|)} |D^{\alpha+1} g(z)| \right] =$$

$$= \sup_{z=(z_1,...,z_n) \in U^n} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{(1-|z_j|)^{\alpha_j - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + 2}}{\omega_j^{\frac{1}{q}}(1-|z_j|)} |D^{\alpha+1} g(z)| \right] < +\infty,$$

где $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+1}{q} + \frac{1}{p} - 2,\ \ 1 \leq j \leq n.$

Если $0 < p \leq 1,\ \ 1 < q < +\infty$, обозначим через $\widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}$ множество всех голоморфных в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{\widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}} = \left(\int\limits_{Q_n} \frac{(1-r)^{\alpha q^{'} - \frac{q^{'}}{p} + q^{'}}}{\omega_{\Pi}^{\frac{q^{'}}{q}}(1-r)} \left(\sup_{z \in T^n} |D^{\alpha+1} g(rz)| \right)^{q^{'}} r dr \right)^{\frac{1}{q^{'}}} =$$

$$= \left(\int\limits_{Q_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-r_j)^{\alpha_j q^{'} - \frac{q^{'}}{p} + q^{'}}}{\omega_j^{\frac{q^{'}}{q}}(1-r_j)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sup_{z=(z_1,...,z_n) \in T^n} |D^{\alpha+1} g(r_1 z_1, ..., r_n z_n)| \right)^{q^{'}} r_1 ... r_n dr_1 ... dr_n \right)^{\frac{1}{q^{'}}} < +\infty,$$

где $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q^{'}} - 1,\ \ 1 \leq j \leq n.$

И наконец, если $1 < p < +\infty,\ 0 < q \leq 1$, обозначим через $\overset{\approx}{\lambda}{}^{p,q}_{\omega}$ множество всех голоморфных в U^n функций g, для которых

$$\|g\|_{\overset{\approx}{\lambda}{}^{p,q}_{\omega}} = \sup_{r \in Q_n} \left[\frac{(1-r)^{\alpha - \frac{1}{q} + 1}}{\omega_{\Pi}^{\frac{1}{q}}(1-r)} \left(\int\limits_{T^n} |D^{\alpha+1} g(r\zeta)|^{p^{'}} dm_n(\zeta) \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \right] =$$

$$= \sup_{r=(r_1,...,r_n) \in Q_n} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{(1-r_j)^{\alpha_j - \frac{1}{q} + 1}}{\omega_j^{\frac{1}{q}}(1-r_j)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{T^n} |D^{\alpha+1} g(r_1 \zeta_1, ..., r_n \zeta_n)|^{p^{'}} dm(\zeta_1) ... dm(\zeta_n) \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \right] < +\infty,$$

где $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}+1}{q} - 2,\ \ 1 \leq j \leq n.$

Для краткости введем также следующее обозначение

$$\Lambda^{p,q}_{\omega} = \begin{cases} \lambda^{p,q}_{\omega}, \text{если} & 0 < p, q \leq 1; \\ \widetilde{\lambda}^{p,q}_{\omega}, \text{если} & 0 < p \leq 1,\ 1 < q < +\infty; \\ \overset{\approx}{\lambda}{}^{p,q}_{\omega}, \text{если} & 1 < p < +\infty,\ 0 < q \leq 1. \end{cases}$$

Хорошо известно, что если один из параметров p или q меньше единицы, то любой непрерывный функционал в пространстве $L^{p,q}_{\omega}(U^n)$ тождественно нулевой. В случае аналитических функций указанное утверждение, разумеется, неверно: например, линейным непрерывным функционалом в этих пространствах является значение функции $f \in A^{p,q}_\omega(U^n)$ в точке $\Phi_{z_0}(f) = f(z_0)$, $z_0 \in U^n$. В рассматриваемом случае верно утверждение, установленное во *втором параграфе* второй главы:

Теорема 2.2. *Пусть p, q принадлежат $(0,1]$ или один из параметров принадлежит интервалу $(0,1]$, а другой - интервалу $(1;+\infty)$, $\omega_j \in \Omega, j = \overline{1,n}$. Если Φ - линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_\omega(U^n)$ и $g(z) = \Phi(e_z)$, $e_z(\zeta) := \frac{1}{1-\zeta z}$, $\zeta,\ z \in U^n$, тогда $g \in \Lambda^{p,q}_\omega$.*

Функционал Φ представим в виде

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\overline{\zeta}) dm_n(\zeta), \tag{7}$$

и справедливы оценки

$$\|g\|_{\Lambda^{p,q}_\omega} \lesssim \|\Phi\| \lesssim \|g\|_{\Lambda^{p,q}_\omega}. \tag{8}$$

Верно и обратное: любая $g \in \Lambda^{p,q}_\omega$ по формуле (7) g порождает линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}_\omega(U^n)$ для которого справедливы оценки (8).

Описание линейных непрерывных функционалов находит свое приложение в исследованиях, посвященных изучению тёплицевых операторов в пространствах аналитических функций.

Для изложения следующих результатов введём дополнительные обозначения и определения:

Анизотропным пространством Соболева $A_\omega(\alpha, m)$ назовём пространство голоморфных в поликруге U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{A_\omega(\alpha,m)} = \int\limits_{U^n} |D^m f(z)| \omega_\Pi(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} dm_{2n}(z) < +\infty, \tag{9}$$

$m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n,\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+,\ z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Обозначим через $RP(U^n)$ - класс суммируемых на торе T^n функций h, коэффициенты Фурье которых равны нулю вне множества $Y_n = Z^n_+ \cup Z^n_-$, то есть класс функций представимых на торе в виде $h(\zeta) = f(\zeta) + \overline{g}(\zeta)$, $f, g \in H^1(U^n)$. Ясно, что эти функции являются граничными значениями плюригармонических в единичном поликруге функций.

Кратным операторм Тёплица назовем интегральный оператор вида

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n} \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in U^n, \tag{10}$$

где $h \in L^1(T^n), f \in C_A(U^n)$, $C_A(U^n) = C(U^n \cup \partial U^n) \cap H(U^n)$.

Пусть $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ - вектор-функция типа модуля непрерывности, то есть ω_j -неубывающие неотрицательные на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ функции, такие что функции $t_j \to \frac{\omega_j(t_j)}{t_j}$ не возрастают на $\mathbb{R}_+$.

Если $(k_1, ..., k_n)$ некоторая перестановка чисел $(1, 2, ..., n)$, $n \in N$, $1 \le r \le n$. Тогда кортежем порядка r назовем вектор с координатами $(k_1, ..., k_r)$, множество всех кортежей порядка r обозначим через K_r. Ясно, что, если $1 \le r, m \le n$, то $(k_1, ..., k_r) = (s_1, ..., s_m)$ тогда и только тогда, когда $r = m$, $s_i = k_i$, $i = 1, ..., r$.

И, наконец, если X - некоторое квазинормированное пространство, то через $L(X)$ обозначим множество линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве X.

В *третьем параграфе* второй главы найден критерий ограниченности оператора Тёплица в весовом анизотропном пространстве Соболева голоморфных в поликруге функций. Установлены утверждения:

Теорема 2.3. *Пусть* $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\omega-$ *функция типа модуля непрерывности на* Q_n, $h-$ *функция из класса* $RP(U^n)$, $\int\limits_0^1 \frac{\omega_j(u)du}{u} < +\infty$, $j = 1, ..., n$.

1. *Если* $m_j \le \alpha_j$, $j = 1, ..., n$, *то следующие утверждения равносильны:*

   a. $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$;

   b. *функция* h *допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n,$$

   где h_1, h_2 *являются граничными значениями функций, голоморфных в* U^n, *при этом* h_1 *- мультипликатор пространства* $A_\omega(\alpha, m)$, $D^{-m}h_2 \in \Lambda^\alpha_\omega$, *где* $D^{-m}-$ *оператор, обратный к оператору* D^m.

2. *Если* $m_j \ge \alpha_j + 2$, $j = 1, ..., n$, *то следующие утверждения равносильны:*

   a. $T_h \in L(A_\omega(\alpha, m))$;

   b. h *допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n,$$

   где $h_1 \in A_\omega(\alpha, m), h_2 \in H^\infty(U^n)$.

Теорема 2.4. *Пусть* $h \in H^1(U^n)$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$ *и* $m_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, ..., n$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

1. T_h является ограниченным оператором в пространстве $A_\omega(\alpha, m)$;

2. функция $h \in H^\infty(U^n)$, причем для любого кортежа $k = (k_1, ..., k_p) \in K_p$ справедлива оценка

$$\sup_{z\in U^n}\left\{\left|\frac{\partial^p h(z_1,...,z_n)}{\partial z_{k_1}...\partial z_{k_p}}\right|\prod_{j=1}^{p}\frac{(1-|z_{k_j}|)^2}{\omega_{k_j}(1-|z_{k_j}|)}\int\limits_{1-|z_{k_j}|}^{1}\frac{\omega_{k_j}(u)}{u^2}du\right\}< +\infty, \qquad (11)$$

$z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Мишина, Е.В. Оценка смешанных норм в весовом анизотропном пространстве типа Соболева аналитических в полидиске функций / Е.В. Мишина // Вестник Брянского государственного университета: точные и естественные науки. — Брянск: Изд. БГУ. — 2011. — №4. — С. 28–36.

2. Povprits, E.V. Representation of continuous linear functionals in anisotropic weighted spaces of analytic functions in the polydisc with mixed norm / F.A. Shamoyan, E.V. Povprits // Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. — Taylor and Francis. — 2014. — V. 59. — №4. — P. 462-483.

3. Povprits, E.V. Diagonal mapping in anisotropic spaces of analytic functions in polydisc with mixed norm / F.A. Shamoyan, E.V. Povprits // Complex Analysis and Operator Theory. — Birkhauser Verlag Viaduktstr. — 2014. — V. 8. — №6. — P. 1383-1403.

4. Мишина, Е.В. К вопросу об оценках в весовом анизотропном пространстве Соболева смешанных норм функций, аналитических в полидиске / Е.В. Мишина // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы молодежной научной школы-конференции «Лобочевские чтения» — Казань: Казан. матем. об-во. — 2011. — Т. 44. — С. 214-216.

5. Мишина, Е.В. Об одном весовом анизотропном пространстве типа Соболева аналитических в полидиске функций / Е.В. Мишина // Материалы международной конференции «Российско-Белорусско-Украинское пограничье: 25-летие экологических и социально-педагогических проблем в постчернобыльский период». — Новозыбков: Изд. РИО БГУ— 2011. —С. 455–461.

6. Мишина, Е.В. О весовых анизотропных пространствах типа Соболева аналитических в полидиске функций / Е.В. Мишина // Материалы XII

международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2011. — Вып. 12 — С. 215-216.

7. Повприц, Е.В. О представлении линейных непрерывных функционалов в весовых анизотропных пространствах аналитических в полидиске функций со смешанной нормой / Ф.А. Шамоян, Е.В. Повприц // Материалы VI Петрозаводской международной конференции «Комплексный анализ и приложения» — Петрозаводск: ПетрГУ. — 2012. — С. 82-86.

8. Повприц, Е.В. Об ограниченности одного класса интегральных операторов в весовых классах n-гармонических в поликруге функций / Е.В. Повприц // Материалы XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2012. — Вып. 13 — С. 185-187.

9. Повприц, Е.В. Диагональное отображение в анизотропных пространствах аналитических в полидиске функций со смешанной нормой / Ф.А. Шамоян, Е.В. Повприц // Материалы XII международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» — Смоленск: СмолГУ. — 2013. — Вып. 14 — С. 173-175.

10. Повприц, Е.В. Об ограниченности тёплицева оператора в одном весовом анизотропном пространстве аналитических функций в поликруге / Ф.А. Шамоян, Е.В. Повприц // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXV» —Воронеж: изд. центр «Научная книга». — 2014. — С. 197-199.

Работы [1]–[3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.