ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Якубенко Илья Павлович

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Задорожний В.Г.

Воронеж - 2015

Содержание

Введение 4
Глава I. Случайные процессы и их характеристики 17
1 Вариационная производная и её свойства 17
2 Моментные функции случайного процесса 19
3 Линейное дифференциальное уравнение с обычной и вариационной производными 20
4 Математическое ожидание решения скалярного дифференциального уравнения первого порядка 22
5 Вторая моментная функция решения скалярного дифференциального уравнения первого порядка 25
6 Нахождение статистических характеристик решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами 28
7 Численный метод нахождения математического ожидания для скалярного дифференциального уравнения со случайным параметром 30
8 Численный метод нахождения математического ожидания для систем дифференциальных уравнений со случайным параметром (общий случай) 32
9 Метод пошагового вычисления математического ожидания 34
10 Применение методов для решения конкретных задач 35
11 Применение методов для решения систем дифференциальных уравнений содержащих случайный процесс 45
Глава II. Нахождение статистических характеристик оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества 50
1 Нахождение оптимального управления для линейной стохастической системы 50
2 Примеры решения линейных задач оптимального управления с квадратичным критерием качества 62

3 Частный случай задачи (2.1.14) - (2.1.16) с нормальной случайной величиной 63
4 Задача (2.1.4) - (2.1.6) с нормальной случайной величиной 68
5 Задача с равномерной случайной величиной 74
6 Случайный процесс с двумя реализациями 85
Глава III. Вторая моментная функция оптимального управления системы со случайными коэффициентами 96
1 Постановка задачи 96
2 Нахождение математического ожидания оптимального управления 98
3 Нахождение второй моментной функции оптимального управления 103
Глава IV. Численные расчёты статистических характеристик 112
1 Уравнения Фредгольма и их решение 112
2 Квадратурный метод решения интегральных уравнений Фредгольма 114
3 Нахождение первых моментных функций траектории и управления в среде Mathcad 116
4 Нахождение второй моментной функции управления 120
Список литературы 124
Приложение 130

Введение

Актуальность темы исследования. Работа посвящена задачам оптимального управления динамическими системами. Управляемые системы изобилуют в химической промышленности, экономике, биологии и физических задачах. Этому направлению посвящено огромное количество публикаций, особую роль в задачах оптимального управления играет принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования.

Реальные управляемые процессы зависят от влияния внешних факторов (это является скорее правилом, чем исключением). В некоторых случаях таким влиянием можно пренебречь, однако иногда это может приводить к ощутимым последствиям. Зачастую влияние внешних факторов можно моделировать случайными процессами. К настоящему времени большое развитие получила теория стохастических дифференциальных уравнений, разработке которой посвящены труды А. Н. Колмогорова, Р. Л. Стратоновича, В. С. Пугачёва, К. Ито, И. И. Гихмана, А. В. Скорохода, А. Н. Ширяева, П. Ланжевена, А. С. Монина, А. М. Яглома и многих других [10, 27, 34, 61, 62].

Изучаются и задачи оптимального управления системами, описываемыми стохастическими дифференциальными уравнениями, а также дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых являются случайными процессами (М. Ю. Афанасьев, Ф. Л. Черноусько) [1, 45]. Наиболее изученными, при этом являются задачи, описываемые линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с квадратичным критерием качества управления (Ф. Л. Черноусько, J. Y. S. Luh, M. P. Lukas, W. M. Wonham) [45, 59, 60, 61].

Задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых являются случайными процессами, изучены меньше, хотя многие реальные процессы описываются именно такими уравнениями. Для практики

важно знать хотя бы первые две моментные функции оптимального управления и оптимальной траектории, именно этой задаче и посвящена настоящая работа, раскрывающая новые области применения подходов рассматриваемых В. Г. Задорожним [12-22].

Цели и задачи. Целью работы является нахождение статистических характеристик оптимального управления и оптимальной траектории динамической системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением первого порядка, коэффициенты которого являются случайными процессами с квадратичным критерием качества управления.

Научная новизна. Перечисленные ниже результаты являются новыми.

1. Рассматривается новый квадратичный критерий качества, зависящий от квадратов первой и второй моментных функций оптимального управления и оптимальной траектории.
2. Коэффициенты линейного дифференциального уравнения являются случайным процессами более общего вида (не являются функциями, возмущенными белым шумом).
3. Условия оптимальности в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода для математического ожидания оптимального управления.
4. Условия оптимальности в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода для второй моментной функции оптимального управления.
5. Численный метод нахождения математического ожидания решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами.

Теоретическая и практическая значимость работы. Рассматриваются новые постановки задачи оптимизации для систем со случайно изменяющейся

структурой. Получены новые условия оптимальности первой и второй моментных функций оптимального управления и оптимальной траектории линейной системы с квадратичным критерием качества управления. Рассмотрены конкретные примеры динамических систем, позволяющие сравнить результаты оптимального управления полученными различными способами. На практике исследуемые модели применимы для управления химическими процессами, в медицине для расчёта средних значений объемов принимаемых медикаментов и др. Условия оптимальности можно излагать в качестве специальных курсов для студентов по курсам оптимального управления.

Методология и методы исследования. В работе используются теория дифференциальных уравнений, функционального анализа и теории случайных процессов. Задача нахождения первых моментных функций оптимального управления и оптимальной траектории сводится к детерминированной задаче минимизации квадратичного функционала. Для решения интегральных уравнений Фредгольма применяется численный метод, основанный на сведении к задаче с вырожденным ядром. Расчёты проводятся в системе автоматизированного проектирования Mathcad.

Степень достоверности и апробация результатов. Совокупность теоретических и практических исследований подтверждает верность предложенных методов. Основные результаты опубликованы в 11 научных статьях, 3 из которых входят в список рецензируемых изданиях из перечня ВАК.

В совместных работах с научным руководителем Задорожнему В. Г. принадлежат только постановки задач.

Содержание диссертации. Диссертация содержит четыре главы, нумерация формул состоит из трех чисел: первое число – номер главы, второе число – номер

параграфа, третье – номер формулы в этом параграфе. Нумерация формул в автореферате соответствует нумерации в диссертации.

Первая глава посвящена случайным процессам и их характеристикам. В изложении основных определений и понятий мы следуем [12]. Сначала даются определение вариационной производной и ее основные свойства.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, T - отрезок вещественной оси $\mathbb{R}$, X - банахово пространство функций $x: T \to \mathbb{R}$ с нормой $\|\cdot\|$ и L - подпространство в X, причем $L_2(T)$ плотно в L.

Определение. Если для функционала $y: X \to \mathbb{C}$ приращение $y(x+h) - y(x)$ можно записать в виде $y(x+h) - y(x) = \int_T \varphi(x,t)h(t)dt + \omega(x,h)$, $\forall h \in L$,

где интеграл понимается в смысле Лебега [12], $\varphi: X \times T \to \mathbb{C}$, причем $\int_T \varphi(x,t)h(t)dt$ является линейным ограниченным по h оператором на L и $\frac{|\omega(x,h)|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$, то φ называется *вариационной производной* функционала y по направлению L и обозначается $\varphi(x,t) = \frac{\delta y(x)}{\delta x(t)}$.

Далее приводятся определения понятий характеристического функционала и моментной функции.

Пусть $\varepsilon(t,\omega)$ - случайный скалярнозначный процесс с выборочными функциями из функционального пространства X. В дальнейшем случайный процесс обозначается просто $\varepsilon(t)$. Пусть V - банахово пространство функций $\upsilon: T \to \mathbb{C}$ и V^* - сопряженное пространство функций, причем значение $v \in V^*$ на элементе $\upsilon \in V$ определяется соотношением

$$v(\upsilon) = \int_T v_1(s)\upsilon(s)ds,$$

где v_1 - некоторая функция и интеграл понимается в смысле Лебега.

Определение. *Характеристическим функционалом* процесса $\varepsilon(t)$ называется выражение $\varphi_\varepsilon(\upsilon) = M(\exp(i\int_T \varepsilon(s)\upsilon(s)ds))$, где $X \subset V^*$, а M обозначает математическое ожидание, вычисленное по функции распределения процесса $\varepsilon(t)$.

Определение. *Моментной функцией порядка* $k > 0$ случайного процесса называют $M(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2)..., \varepsilon(t_k))$.

Далее рассматриваются задачи Коши для линейного однородного и неоднородного уравнения с обычными и вариационными производными.

Ставится задача о нахождении математического ожидания решения скалярного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon(t)x + f(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, t_1] = T$, t_0 задано, x_0 - случайная величина, ε, f - случайные процессы, причем x_0 не зависит от ε и f. Случайные процессы ε и f заданы характеристическим функционалом

$$\varphi(\upsilon, \omega) = M \exp\left(i\int_T [\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s)]ds \right),$$

где M – математическое ожидание по функции распределения ε, f.

Теорема. Пусть $\upsilon, \omega \in L_1(T)$ и характеристический функционал $\varphi : L_1(T) \times L_1(T) \to \mathbb{C}$ имеет непрерывные в окрестности точки (0,0) вариационные производные $\frac{\delta\varphi(\upsilon,\omega)}{\delta\upsilon(t)}$, $\frac{\delta^2\varphi(\upsilon,\omega)}{\delta\upsilon(t)\delta\omega(s)}$, тогда

$$Mx(t) = Mx_0\varphi(-i\chi(t_0,t),0) - i\int_{t_0}^{t} \frac{\delta\varphi(-i\chi(s,t),0)}{\delta\omega(s)}ds, \tag{1.4.4}$$

где

$$\chi(t_0,t,s)=\begin{cases} sign(s-t_0), s\in[t_0;t] \\ 0, s\notin[t_0;t] \end{cases}.$$

Приводятся формулы и для второй моментной функции решения дифференциального уравнения.

Далее в работе рассматриваются численные подходы к поиску статистических характеристик решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами.

Рассматривается задача Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x}= f(t,x,\varepsilon), \tag{1.7.1}$$

$$x(t_0)=x_0\ , \tag{1.7.2}$$

где $x(t)\in\mathbb{R}$, $t\in[t_0;t_0+T]$, $\varepsilon=\varepsilon(t)\in\mathbb{R}$ - случайный процесс.

Очевидно, если в момент времени t_k случайная величина $\varepsilon(t_k)$ является равномерно распределенной на $[a,b]$, тогда формула для математического ожидания выглядит следующим образом

$$Mx(t_k,\varepsilon)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t_k,y)dy\ .$$

Далее рассматривается общий случай численного метода нахождения математического ожидания для систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x}= f(t,x,\varepsilon), \tag{1.6.3}$$

$$x(t_0)=x_0\ , \tag{1.6.4}$$

где $x=(x_1,x_2,..,x_n)$, $f=(f_1,f_2,..,f_n)$, $t\in[t_0,t_0+T]$, $\varepsilon=\varepsilon(t)$ - вектор случайных процессов $\varepsilon=(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),..,\varepsilon_s(t))$.

Приводится процесс, позволяющий получить в момент времени t_k приближение к математическому ожиданию решения задачи (1.6.3), (1.6.4)

$$Mx(t_k,\varepsilon_1(t_k),\varepsilon_2(t_k),..,\varepsilon_s(t_k))=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}x(t_k,y_1,y_2,...,y_s)\cdot p_{\varepsilon(t_k)}(y_1,y_2,...,y_s)dy_1dy_2...dy_s\ .$$

Во второй главе рассматриваются задачи нахождения статистических характеристик оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества.

Рассматривается задача оптимального управления вида

$$\widehat{J}\left(x(t),u(t)\right)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(s)ds+\frac{1}{2}cx^2(t_1)\to\inf\,, \tag{2.1.1}$$

$$x(0)=x_0\,, \tag{2.1.2}$$

$$\dot{x}(t)=\varepsilon(t)x+u(t)\,, \tag{2.1.3}$$

где $x(t)$ - фазовая траектория, $u(t)$ - управление, $\varepsilon(t)$ - случайный процесс.

Для сравнения результатов рассматривается и задача, где случайный процесс $\varepsilon(t)$ заменен на случайную величину

$$\widehat{J}\left(x(t),u(t)\right)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(s)ds+\frac{1}{2}cx^2(t_1)\to\inf\,, \tag{2.1.14}$$

$$\dot{x}(t)=\varepsilon x+u(t)\,, \tag{2.1.15}$$

$$x(0)=x_0\,. \tag{2.1.16}$$

Для практики интерес представляют важнейшие характеристики оптимального управления и оптимальной траектории – их математические ожидания, поэтому рассматривается новая задача

$$J\left(x(t),u(t)\right)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(Mu(s))^2ds+\frac{1}{2}c(Mx(t_1))^2\to\inf\,, \tag{2.1.4}$$

$$x(0)=x_0\,, \tag{2.1.5}$$

$$\dot{x}(t)=\varepsilon(t)x+u(t)\,. \tag{2.1.6}$$

о нахождении оптимального математического ожидания управления и оптимального математического ожидания фазовой траектории.

Рассмотрены примеры задач для нормального и равномерного закона распределения случайной величины ε.

Рассматриваются следующие случаи:

1. Задача (2.1.14) - (2.1.16), когда в качестве случайной величины в формулах стоит ее математическое ожидание.
2. Задача (2.1.14) - (2.1.16) .
3. Задача (2.1.4) - (2.1.6).

Первая задача детерминированная. Однако полученные формулы позволяют выписать математические ожидания оптимального управления и фазовой траектории.

Во второй задаче мы показываем, что математические ожидания оптимального управления и фазовой траектории можно вычислить при помощи пакета прикладных программ.

В третьей задаче мы рассматриваем критерий качества, который зависит от квадратов математических ожиданий управления и фазовой траектории, и находим статистические характеристики.

Если случайный процесс $\varepsilon(t)$ имеет две реализации, то рассмотренные выше задачи решаются точно и выражаются через реализации.

Снова рассматриваются три варианта:

1. Задача (2.1.1) - (2.1.3), где в исходной задаче выражение случайного процесса заменено его математическим ожиданием (вместо случайного процесса рассмотрена функция равная математическому ожиданию случайного процесса) т. е. формулы (2.1.17) и (2.1.18) содержат математическое ожидание.

2. Задача (2.1.1) - (2.1.3) с указанным случайным процессом решается точно, причем оптимальное управление зависит от случайного процесса $\varepsilon(t)$.

   В этом случае мы вычисляем значение функционала качества (2.1.4).

3. Решаем задачу (2.1.4) - (2.1.6) используя характеристический функционал для $\varepsilon(t)$ (здесь мы находим сразу математическое ожидание $Mu(t)$ и $Mx(t)$).

Сравнение результатов показывает, что значение критерия качества (2.1.4) во втором случае близко к значению в третьем случае и несколько меньше.

Третья глава посвящена нахождению второй моментной функции оптимального управления системы со случайными коэффициентами.

Рассматривается линейная управляемая система, описываемая уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)x + u(t), \tag{3.1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ управление, $\varepsilon(t)$ - случайный процесс с заданным начальным условием

$$x(t_0) = M(x_0). \tag{3.1.2}$$

Требуется найти малое управление $u(t)$, которое обеспечивает близость к нулю $x(t)$ на заданном промежутке времени $[t_0, T]$. Поскольку $\varepsilon(t)$ является случайным процессом, то управление $u(t)$ также будет случайным процессом. Наибольший интерес представляют собой первые две моментные функции случайного процесса $u(t)$. Если будут малы $M(u(t))$, $M(u(t)u(\tau))$ и $M(x(t))$, $M(x(t)x(\tau))$, то этого может быть и достаточно для прикладной задачи. Таким образом, естественной является следующая **задача.**

При заданном случайном процессе $\varepsilon(t)$ *и математическом ожидании* $M(x_0)$ *требуется найти моментные функции* $M(u(t))$ *и* $M(u(t)u(\tau))$, *при которых функционал*

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(s)M^2(x(s)) + B_1(s)M^2(u(s))]ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2)) + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1 ds_2 + \qquad (3.1.3)$$
$$+ \frac{c_1}{2}M^2(x(T)) + \frac{c_2}{2}M^2(x^2(T))$$

принимает наименьшее значение.

Здесь $A_1(s) \geq 0, B_1(s) > 0,$ заданные непрерывные функции, $A_2(s_1,s_2) \geq 0, B_2(s_1,s_2) > 0,$ заданные симметричные по s_1, s_2 непрерывные функции, $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ - заданные числа.

Мы считаем, что случайный процесс $\varepsilon(t)$ задан своим характеристическим функционалом, который определяется по формуле

$$\varphi_\varepsilon(v) = M(\exp(i\int_{t_0}^{T}\varepsilon(s)v(s)ds)),$$

где $v \in L_1[t_0,T]$, а управление $u(t)$ выбирается случайным образом и не зависит от $\varepsilon(t)$.

Пусть сначала $A_2 = B_2 = 0$, $c_2 = 0$. Тогда критерий качества имеет вид

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(s)M^2(x(s)) + B_1(s)M^2(u(s))]ds + \frac{c_1}{2}M^2(x(T)) \qquad (3.2.1)$$

и не зависит от $M(u(t)u(\tau))$. Будем искать $M(u(t))$, при котором функционал I_1 принимает минимальное значение.

В точке минимума функционала вариационная производная обращается в нуль. Найдем вариационную производную.

Лемма. Вариационная производная $\frac{\delta I_1(u)}{\delta M(u(t))}$ функционала I_1 равна

$$\int_t^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds +$$
$$+ B_1(t)M(u(t)) + cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) + c\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz. \qquad (3.2.3)$$

Теорема. Математическое ожидание $M(u(t))$ задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1) является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$B_1(t)^{-1}\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds + M(u(t)) +$$
$$+ c_1 B_1(t)^{-1} M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) +$$
$$+ B_1(t)^{-1}\int_{t_0}^T [\begin{cases}\int_h^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h \ge t \\ \int_t^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h < t\end{cases} + \tag{3.2.4}$$
$$+ c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,T))]M(u(h))dh = 0.$$

Таким образом, для нахождения $M(u(t))$ нужно решить детерминированное уравнение Фредгольма (3.2.4).

Далее для нахождения второй моментной функции оптимального управления положим в функционале I коэффициенты A_1, B_1 и c_1 равными нулю, тогда критерий качества I примет вид

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T [A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2)) + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1 ds_2 + \frac{c_2}{2}M^2(x^2(T)). \tag{3.3.1}$$

Будем искать $M(u(t)u(\tau))$, которое доставляет минимум функционалу I_2.

Согласно (1.5.6), вторая моментная функция решения задачи (3.1.1), (3.1.2) имеет вид

$$M(x(t)x(s)) = M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s) - i\chi(t_0,t)) +$$
$$+ M(x_0)[\int_{t_0}^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t) - i\chi(t_0,s))M(u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(t_0,t))M(u(\tau))d\tau] +$$
$$+ \int_{t_0}^t d\xi\int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau .$$

Подставив это выражение в функционал I_2, получим

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T [A_2(s_1,s_2)(M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1) - i\chi(t_0,s_2)) +$$
$$+ M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1) - i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s_2} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2) - i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau] +$$

$$+\int_{t_0}^{s_1} d\xi \int_{t_0}^{s_2} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s)-i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau)^2 + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1ds_2 + \quad (3.3.2)$$

$$+\frac{c_2}{2}[M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T)) + 2M(x_0)\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{T} d\xi \int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(\xi,T))M(u(\tau)u(\xi))d\tau]^2.$$

Для удобства вычислений введем следующие обозначения

$$f(s_1,s_2) = M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1)-i\chi(t_0,s_2)) + M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1)-i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2)-i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau],$$

$$g(\xi,s_2,\tau,s_1) = \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s)-i\chi(\xi,t)),$$

$$V = M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T)) + 2M(x_0)\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau,$$

$$p(\xi,\tau) = \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(\xi,T)).$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2) + \int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\xi,s_2,\tau,s_1)M(u(\tau)u(\xi))d\xi d\tau]^2 +$$

$$+ B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))ds_1ds_2 + \frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)M(u(\tau)u(\xi))d\xi d\tau]^2$$

или с заменой выражения $M(u(\tau)u(\xi))$ на $y(\tau,\xi)$,

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2) + \int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2 + B_2(s_1,s_2)y^2(\tau,\xi)ds_1ds_2$$
$$+\frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2. \quad (3.3.3)$$

Далее доказываются основные лемма и теорема**.**

Лемма. Вариационная производная $\frac{\delta I_2(y)}{\delta y(\xi,\tau)}$ функционала (3.3.3) равна

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2 +$$

$$+ B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+c_2[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau).$$

Теорема. Вторая моментная функция $M(u(t)u(\tau))$ задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.3.1) является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$M(u(\tau)u(\xi)) + B_2^{-1}(\xi,\tau)\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)[M(x_0^{\,2})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_1}-i\chi_{t_0,s_2})+$$

$$+ Mx_0\{\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_1}-i\chi_{z,s_2})Mu(z)dz+\int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_2}-i\chi_{h,s_1})Mu(h)dh\}]\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2}-i\chi_{\tau,s_1})ds_1ds_2 +$$

$$+ B_2^{-1}(\xi,\tau)\frac{1}{2}c_2\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,T}-i\chi_{\tau,T})[(M(x_0^{\,2})\varphi_\varepsilon(-2i\chi_{t_0,T})+2Mx_0\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,T}-i\chi_{z,T})Mu(z)dz]+$$

$$+ B_2^{-1}(\xi,\tau)\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\mu}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2}-i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2}-i\chi_{\tau,s_1})ds_1,\ \eta\ge\tau\\ \int_{\tau}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2}-i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2}-i\chi_{\tau,s_1})ds_1,\ \eta<\tau\end{array}\right. ds_2,\ \mu\ge\xi\\ \int_{\xi}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2}-i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2}-i\chi_{\tau,s_1})ds_1,\ \eta\ge\tau\\ \int_{\tau}^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2}-i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2}-i\chi_{\tau,s_1})ds_1,\ \eta<\tau\end{array}\right. ds_2,\ \mu<\xi\end{array}\right. +$$

$$+ c_2\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,T}-i\chi_{\tau,T})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,T}-i\chi_{\eta,T})M(u(\mu)u(\eta))d\mu d\eta = 0.$$

(3.3.4)

Четвертая глава посвящена численным расчётам статистических характеристик и их анализу. Сначала описывается используемый квадратурный метод решения уравнения Фредгольма, затем приводятся выкладки из пакета прикладного программного обеспечения Mathcad с примером графика второй моментной функции управления для конкретной задачи.

Глава I. Случайные процессы и их характеристики

1 Вариационная производная и её свойства

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, T - отрезок вещественной оси $\mathbb{R}$, X - банахово пространство функций $x: T \to \mathbb{R}$ с нормой $\|\cdot\|$ и L - подпространство в X.

Определение. Если для функционала $y: X \to$ приращение $y(x+h) - y(x)$ можно записать в виде

$$y(x+h) - y(x) = \int_T \varphi(x,t)h(t)dt + \omega(x,h),\ \forall h \in L,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега [12], $\varphi: X \times T \to \mathbb{C}$, причем $\int_T \varphi(x,t)h(t)dt$ является линейным ограниченным по h оператором на L и $\frac{|\omega(x,h)|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$, то φ называется вариационной производной функционала y по направлению L и обозначается $\varphi(x,t) = \frac{\delta y(x)}{\delta x(t)}$. Функционал y называется вариационной первообразной от $\varphi(x,t)$ по направлению L и обозначается $\int \varphi(x,t)\delta x$.

Приведем свойства, которое помогут вычислять вариационные производные на практике:

1. Если функционал y имеет вариационную производную и $\alpha \in \mathbb{C}$, тогда функционал αy дифференцируем и справедливо равенство
$$\frac{\delta(\alpha y(x))}{\delta x(t)} = \alpha \frac{\delta(y(x))}{\delta x(t)}.$$
2. Если для функционалов y_1 и y_2 существуют вариационные производные, то их сумма так же дифференцируема и

$$\frac{\delta(y_1(x)+y_2(x))}{\delta x(t)}=\frac{\delta(y_1(x))}{\delta x(t)}+\frac{\delta(y_2(x))}{\delta x(t)}.$$

3. Если функционалы y_1 и y_2 имеют вариационные производные, то их произведение так же дифференцируемо и

$$\frac{\delta(y_1(x)y_2(x))}{\delta x(t)}=\frac{\delta(y_1(x))}{\delta x(t)}y_2(x)+y_1(x)\frac{\delta(y_2(x))}{\delta x(t)}.$$

4. Если функционалы y_1 и y_2 имеют вариационные производные $y_2(x)\neq 0$, то их отношение так же дифференцируемо и

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)=\frac{\frac{\delta(y_1(x))}{\delta x(t)}y_2(x)-y_1(x)\frac{\delta(y_2(x))}{\delta x(t)}}{{y_2}^2(x)}.$$

Теорема (о дифференцировании сложных функционалов). Пусть $g: X \to \mathbb{C}$ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ отображение g имеет в точке x вариационную производную, а f имеет производную в точке $g(x)$, тогда функционал $y(x)=f(g(x))$ имеет вариационную производную в точке x и справедливо равенство

$$\frac{\delta y(x)}{\delta x(t)}=f'(g(x))\frac{\delta g(x)}{\delta x(t)}.$$

2 Моментные функции случайного процесса

Пусть $\varepsilon(t,\omega)$ - случайный скалярнозначный процесс с выборочными функциями из функционального пространства X. В дальнейшем случайный процесс обозначим просто $\varepsilon(t)$. Пусть V - банахово пространство функций $\upsilon: T \to \mathbb{C}$ и V^* - сопряженное пространство функций, причем значение $v \in V^*$ на элементе $\upsilon \in V$ определяется соотношением

$$v(\upsilon) = \int_T v_1(s)\upsilon(s)ds,$$

где v_1 - некоторая функция и интеграл понимается в смысле Лебега.

Определение. *Характеристическим функционалом* процесса $\varepsilon(t)$ называется выражение $\varphi_e(\upsilon) = M(\exp(i\int_T \varepsilon(s)\upsilon(s)ds))$, где $X \subset V^*$, а M обозначает математическое ожидание, вычисленное по функции распределения процесса $\varepsilon(t)$.

Определение. *Моментной функцией порядка* $k > 0$ случайного процесса называют $M(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2)..., \varepsilon(t_k))$.

В дальнейшем будем обозначать математическое ожидание случайного процесса $M(\varepsilon(t))$, вторую моментную функцию случайного процесса $M(\varepsilon(t), \varepsilon(s))$.

3 Линейное дифференциальное уравнение с обычной и вариационной производными

Пусть V - банахово пространство функций $\upsilon : T \to \mathbb{C}$ и $u(r,0) = \{\upsilon \in V \mid \|v\| < r\}$.

Рассмотрим задачу Коши для линейного однородного уравнения

$$\frac{\partial y(\upsilon,t)}{\partial t} = a(t)\frac{\delta y(\upsilon,t)}{\delta v(t)}, \tag{1.3.1}$$

$$y(\upsilon,t_0) = y_0(\upsilon), \tag{1.3.2}$$

где $y : V \times T \to \mathbb{C}$ - искомое отображение, $a(t)$- заданная на отрезке $T = [t_0,t_1]$ функция, $y_0 : V \to \mathbb{C}$ - заданный функционал.

Решением задачи называется отображение $y : V \times T \to \mathbb{C}$, имеющее непрерывные производные $\frac{\partial y(\upsilon,t)}{\partial t}$ и $\frac{\delta y(\upsilon,t)}{\delta v(t)}$ на $T \times u(r,0)$ удовлетворяющее задаче (1.3.1), (1.3.2).

Введем функцию

$$\chi(t_0,t,s) = \begin{cases} sign(s-t_0), s \in [t_0;t] \\ 0, s \notin [t_0;t] \end{cases}. \tag{1.3.3}$$

Теорема. Если $V = L_1(T)$, y_0 имеет непрерывную вариационную производную и функция $a(t)$ непрерывна, то задача (1.3.1), (1.3.2) имеет решение, и оно находится по формуле

$$y(\upsilon,t) = y_0(\upsilon + a\chi(t_0,t)). \tag{1.3.4}$$

Доказательство приведено в [12].

Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial y(\upsilon,t)}{\partial t} = a(t)\frac{\delta y(\upsilon,t)}{\delta v(t)} + f(\upsilon,t), \tag{1.3.5}$$

$$y(\upsilon,t_0) = y_0(\upsilon), (f : V \times T \to \mathbb{C}). \tag{1.3.6}$$

Теорема. Пусть $V = L_1(T)$ и f, y_0 имеют непрерывные вариационные производные по υ, тогда решение задачи (1.4), (1.5) находится по формуле

$$y(\upsilon,t) = y_0(\upsilon + a\chi(t_0,t)) + \int_{t_0}^{t} f(\upsilon + a\chi(s,t),s)ds. \tag{1.3.7}$$

Доказательство приведено в [12].

4 Математическое ожидание решения скалярного дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon(t)x + f(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, t_1] = T$, t_0 задано, x_0 - случайная величина, ε, f - случайные процессы, причем x_0 независимо с ε и f. Случайные процессы ε и f заданы характеристическим функционалом

$$\varphi(\upsilon, \omega) = M \exp\left(i \int_T \left[\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s) \right] ds \right),$$

где M – математическое ожидание по функции распределения ε, f. Требуется найти математическое ожидание решения задачи (1.4.1).

Можно попытаться решить эту задачу следующим образом. Выписать решение задачи (1.4.1) для реализаций ε и f

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s) ds \right) + \int_{t_0}^{t} f(s) \exp\left(\int_s^t \varepsilon(\tau) d\tau \right) ds$$

и потом попытаться найти математическое ожидание для этого выражения.

Мы поступим иным способом. Введем вспомогательное выражение

$$y(\upsilon, \omega, t) = M\left[x(t) \exp\left(i \int_T \left[\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s) \right] ds \right) \right],$$

где M – математическое ожидание по функции распределения ε, f и x_0. Это выражение примечательно тем, что $Mx(t) = y(0,0,t)$. Таким образом, если найти $y(\upsilon, \omega, t)$, то $Mx(t)$ легко находится. Получим уравнение для $y(\upsilon, \omega, t)$.

Умножим уравнение (1.4.1) на $\exp\left(i\int_T [\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s)]ds \right)$ и усредним по функции распределения ε, f и x_0, получим

$$M\left[\dot{x}(t)\exp\left(i\int_T [\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s)]ds \right)\right] = M\left[(\varepsilon(t)x(t) + f(t))\exp\left(i\int_T [\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s)]ds \right)\right]$$

$$M\left[x(t_0)\exp\left(i\int_T [\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s)]ds \right)\right] = M\left[x_0\exp\left(i\int_T [\varepsilon(s)\upsilon(s) + f(s)\omega(s)]ds \right)\right]$$

Эти уравнения можно записать с помощью $y(\upsilon,\omega,t)$ в виде

$$\frac{\partial y(\upsilon,\omega,t)}{\partial t} = \frac{1}{i}\frac{\delta y(\upsilon,\omega,t)}{\delta\upsilon(t)} + \frac{1}{i}\frac{\delta\varphi(\upsilon,\omega)}{\delta\omega(t)}, \qquad (1.4.3)$$

$$y(\upsilon,\omega,t_0) = Mx_0\varphi(\upsilon,\omega).$$

Мы получили детерминированную задачу для $y(\upsilon,\omega,t)$, из которой математическое ожидание решения задачи (1.4.1) находится в виде $Mx(t) = y(0,0,t)$. Следовательно, нам достаточно найти решение задачи (1.4.3) в как угодно малой окрестности нулевой точки по переменным υ и ω.

Теорема. Пусть $\upsilon,\omega \in L_1(T)$ и характеристический функционал $\varphi : L_1(T)\times L_1(T) \to \mathbb{C}$ имеет непрерывные в окрестности точки (0,0) вариационные производные $\frac{\delta\varphi(\upsilon,\omega)}{\delta\upsilon(t)}$, $\frac{\delta^2\varphi(\upsilon,\omega)}{\delta\upsilon(t)\delta\omega(s)}$, тогда

$$Mx(t) = Mx_0\varphi(-i\chi(t_0,t),0) - i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\varphi(-i\chi(s,t),0)}{\delta\omega(s)}ds. \qquad (1.4.4)$$

Доказательство. Задача (1.4.3) имеет вид задачи, решение которой известно [12]. В нашем случае $f(\upsilon,t) = -i\frac{\delta\varphi(\upsilon,\omega)}{\delta\omega(t)}$, $a(t)\equiv -i$. По формуле (1.3.7) находим

$$y(\upsilon,\omega,t) = Mx_0\varphi(\upsilon - i\chi(t_0,t),\omega) - i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\varphi(\upsilon - i\chi(s,t),\omega)}{\delta\omega(s)}ds \qquad (1.4.5)$$

Полагая в этом выражении $\upsilon = 0, \omega = 0$, получаем формулу (1.4.4).

Теорема доказана.

Следствие. Если в условиях предыдущей теоремы случайные процессы ε, f независимы и $\varepsilon(t)$ задано характеристическим функционалом $\varphi_\varepsilon(\upsilon)$, то имеет место формула

$$Mx(t) = Mx_0\varphi_\varepsilon\big(-i\chi(t_0,t)\big) + \int_{t_0}^{t} \varphi_\varepsilon\big(-i\chi(s,t)\big)Mf(s)ds \qquad (1.4.6)$$

Действительно, пусть $\psi(\omega)$ - характеристический функционал для f, тогда

$$-i\frac{\delta\varphi\big(-i\chi(s,t),0\big)}{\delta\omega(s)} = \frac{1}{i}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))\frac{\delta\psi(\omega)}{\delta\omega(s)}\bigg|_{\omega=0} = \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))Mf(s).$$

Подставив это выражение в (1.4.4), получим (1.4.6).

Рассмотрим частный случай задачи (1.4.1) - задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x} = \varepsilon(t)x, \qquad (1.4.7)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad (1.4.8)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $\varepsilon(t)$ - случайный процесс, причем $\varepsilon(t)$ задан характеристическим функционалом $\varphi_\varepsilon(u)$, тогда имеет место формула

$$Mx(t) = x_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t)). \qquad (1.4.9)$$

5 Вторая моментная функция решения скалярного дифференциального уравнения первого порядка

Найдем вторую моментную функцию [12], для этого введем вспомогательное отображение.

$$z(\upsilon,\omega,t,s)=M\left[x(t)x(s)\exp\left(i\int_T[\varepsilon(s)\upsilon(s)+f(s)\omega(s)]ds\right)\right]$$

Очевидно, что вторая моментная функция решения задачи (1.4.1) находится из z по формуле $M(x(t)x(s))=z(0,0,t,s)$.

Получим детерминированную задачу для z. С этой целью умножим первое уравнение (1.4.1) на

$$x(s)\exp\left(i\int_T[\varepsilon(s)\upsilon(s)+f(s)\omega(s)]ds\right)$$

и усредним по функции распределения ε, f и x_0.

Формально полученные выражения можно записать с помощью z в виде

$$\frac{\partial z(\upsilon,\omega,t,s)}{\partial t}=-i\frac{\delta z(\upsilon,\omega,t,s)}{\delta\upsilon(t)}-i\frac{\delta y(\upsilon,\omega,s)}{\delta\omega(t)} \qquad (1.5.1)$$

Из второго равенства (1.4.1) легко находим

$$z(\upsilon,\omega,t_0,t_0)=Mx_0^2\varphi(\upsilon,\omega) \qquad (1.5.2)$$

Определение. Если $z(\upsilon,\omega,t_0,t_0)$ решение задачи (1.5.1), (1.5.2) в некоторой окрестности нуля по переменным υ,ω, то $z(0,0,t,s)$ будем называть второй моментной функцией решения задачи (1.4.1).

Таким образом, мы получили детерминированную задачу (1.5.1), (1.5.2) для нахождения $z(\upsilon,\omega,t,s)$, причем из его определения следует, что $z(\upsilon,\omega,t,s)=z(\upsilon,\omega,s,t)$.

В уравнение (1.5.1) s входит как параметр, и уравнение можно решать при каждом s, но условие (1.5.2) задано только при $s = t_0$.

Получим формулу для второй моментной функции.

Теорема. Пусть характеристический функционал $\varphi : L_1(T) \times L_1(T) \to C$ имеет непрерывные вариационные производные $\dfrac{\delta\varphi_0(\upsilon - i\chi(t_0,t) - i\chi(\sigma,s),\omega)}{\delta\omega(\sigma)}$, $\dfrac{\delta^2\varphi_0(\upsilon - i\chi(\xi,s) - i\chi(\sigma,t),\omega)}{\delta\omega(\sigma)\delta\omega(\xi)}$, тогда задача (1.5.1), (1.5.2) имеет симметричное по t, s решение в виде

$$z(\upsilon,\omega,t,s) = Mx_0^2\varphi\big(\upsilon - i\chi(t_0,t) - i\chi(t_0,s),\omega\big) - iMx_0\int_{t_0}^{s}\frac{\delta\varphi\big(\upsilon - i\chi(t_0,t) - i\chi(\tau,s),\omega\big)}{\delta\omega(\tau)}d\tau -$$

$$- iMx_0\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\varphi\big(\upsilon - i\chi(t_0,s) - i\chi(\tau,t),\omega\big)}{\delta\omega(\tau)}d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{\delta^2\varphi\big(\upsilon - i\chi(\xi,s) - i\chi(\tau,t),\omega\big)}{\delta\omega(\tau)\delta\omega(\xi)}d\tau d\xi \qquad (1.5.3)$$

Доказательство. Положим в уравнении (1.5.1) $s = t_0$, т. е получим задачу Коши для линейного неоднородного уравнения с вариационной производной вида (1.3.5). По формуле (1.3.7) находим

$$z(\upsilon,\omega,t_0,t_0) = Mx_0^2\varphi\big(\upsilon - i\chi(t_0,t),\omega\big) - i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta y\big(\upsilon - i\chi(\tau,t),\omega,t_0\big)}{\delta\omega(\tau)}d\tau,$$

где y вычисляется по формуле (1.4.5). Так как z симметрично по переменным t, s, то находим

$$z(\upsilon,\omega,t_0,s) = Mx_0^2\varphi\big(\upsilon - i\chi(t_0,s),\omega\big) - i\int_{t_0}^{s}\frac{\delta y\big(\upsilon - i\chi(\tau,s),\omega,t_0\big)}{\delta\omega(\tau)}d\tau.$$

Получена задача (1.5.1), (1.5.2) для $z(\upsilon,\omega,t,s)$. Задача имеет вид (1.3.4). Применив формулу (1.3.5) находим

$$z(\upsilon,\omega,t,s) = Mx_0^2\varphi\big(\upsilon - i\chi(t_0,s) - i\chi_{t_0,t},\omega\big) - i\int_{t_0}^{s}\frac{\delta y\big(\upsilon - i\chi(\tau,s) - i\chi(t_0,s),\omega,t_0\big)}{\delta\omega(\tau)}d\tau -$$

$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta y(\upsilon - i\chi(\tau,t),\omega,s)}{\delta\omega(\tau)}d\tau .$$

Подставив это выражение в формулу (1.4.5) для y, получим формулу (1.5.3). Легко видеть, что выражение (1.5.3) симметрично по переменным t,s. Что и требовалось доказать.

Теорема. В условиях предыдущей теоремы вторая моментная функция решения задачи (1.4.1) находится по формуле

$$M(x(t)x(s)) = Mx_0^2\varphi(\upsilon - i\chi(t_0,t) - i\chi(t_0,s),0) - iMx_0\int_{t_0}^{t}\frac{\delta\varphi(\upsilon - i\chi(t_0,s) - i\chi(\tau,t),0)}{\delta\omega(\tau)}d\tau -$$
$$-iMx_0\int_{t_0}^{s}\frac{\delta\varphi(\upsilon - i\chi(t_0,t) - i\chi(\tau,s),0)}{\delta\omega(\tau)}d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{\delta^2\varphi(\upsilon - i\chi(\xi,s) - i\chi(\tau,t),0)}{\delta\omega(\tau)\delta\omega(\xi)}d\tau d\xi \qquad (1.5.5)$$

Очевидно, для доказательства в (1.5.3) следует положить $\upsilon = 0, \omega = 0$.

Следствие. Если процессы независимы и ε задано характеристическим функционалом $\varphi_\varepsilon(\upsilon)$, то имеет место формула.

$$M(x(t)x(s)) = Mx_0^2\varphi_\varepsilon(\upsilon - i\chi(t_0,t) - i\chi(t_0,s)) + Mx_0\int_{t_0}^{s}\frac{\delta\varphi(\upsilon - i\chi(t_0,s) - i\chi(\tau,t),0)}{\delta\omega(\tau)}d\tau -$$
$$-iMx_0\int_{t_0}^{s}\frac{\delta\varphi(\upsilon - i\chi(t_0,t) - i\chi(\tau,s),0)}{\delta\omega(\tau)}d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{\delta^2\varphi(\upsilon - i\chi(\xi,s) - i\chi(\tau,t),0)}{\delta\omega(\tau)\delta\omega(\xi)}d\tau d\xi \qquad (1.5.6)$$

Доказательство. Так как процессы независимы, то $\varphi(\upsilon,\omega) = \varphi_\varepsilon(\upsilon)\varphi_f(\omega)$,

и $-i\frac{\delta\varphi_f(\omega)}{\delta\omega(\tau)}\Big|_{\omega=0} = Mf(\tau)$, $-i\frac{\delta^2\varphi_f(\omega)}{\delta\omega(\tau)\delta\omega(\xi)}\Big|_{\omega=0} = M(f(\tau)f(\xi))$, подставив эти выражения в (1.5.5) получим искомую формулу.

Отметим, что существуют и другие способы для нахождения моментных функций.

6 Нахождение статистических характеристик решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с заданным начальным условием

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.6.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \ , \tag{1.6.2}$$

где

$$x = (x_1, x_2, .., x_n),$$

$$f = (f_1, f_2, .., f_n),$$

$$t \in [t_0; t_0 + T].$$

Будем считать, что точное решение задачи Коши (1.6.1), (1.6.2) неизвестно.

В реальном мире, естественно, вместо задачи (1.6.1), (1.6.2) решать задачу.

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \tag{1.6.3}$$

$$x(t_0) = x_0 \ , \tag{1.6.4}$$

где

$$x = (x_1, x_2, .., x_n),$$

$$f = (f_1, f_2, .., f_n),$$

$$t \in [t_0; t_0 + T],$$

$\varepsilon = \varepsilon(t)$ - случайный процесс, $\varepsilon = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), .., \varepsilon_s(t))$.

Рассматривать задачу (1.6.3), (1.6.4), вместо задачи (1.6.1), (1.6.2) заставляют следующие идеи:

1. Любая математические модель не является абсолютно точным отражением действительности и содержит погрешности, которые естественно предусмотреть при создании модели.

2. Математическая модель может содержать случайные процессы, оказывающие некоторое воздействие на систему.
3. При решении задачи Коши (1.6.1), (1.6.2) численными методами, очевидно, возникают погрешности, а также происходит их накопление.
4. Правая часть (1.6.1) практически всегда вычисляется приближенно, так как даже все элементарные функции вычисляется с погрешностью.

Введенная система как раз и моделирует эти случаи.

Наша задача (1.6.1), (1.6.2) свелась к задаче найти математическое ожидание решения задачи (1.6.3), (1.6.4).

7 Численный метод нахождения математического ожидания для скалярного дифференциального уравнения со случайным параметром

Рассмотрим систему задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \tag{1.7.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \ , \tag{1.7.2}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0; t_0 + T]$,

$\varepsilon = \varepsilon(t) \in \mathbb{R}$ - случайный процесс.

Для простоты изложения алгоритма, предположим что $\varepsilon(t) = \varepsilon$ - случайная величина, которая в каждый момент времени t является дискретной случайной величиной, принимающей m возможных значений ε_1, ε_2,.., ε_m соответственно с вероятностью $p(\varepsilon_1)$, $p(\varepsilon_2)$,.., $p(\varepsilon_m)$.

Будем решать каким-либо итерационным численным методом (например, Рунге-Кутты) m дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, \varepsilon_i), \ x_i(t_0) = x_0,$$

где $i = 1..m$.

На первом шаге метода, в качестве начального приближения выберем точку (t_0, x_0), соответствующую начальному условию задачи Коши (1.7.1), (1.7.2). Далее выполнив одну итерацию численного метода для каждого из дифференциальных уравнений, найдем математическое ожидание решения в точке

$$Mx(t_1, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} p(\varepsilon_i) x_i(t_1, \varepsilon_i).$$

На следующем шаге итерационного метода в качестве начального приближения выберем точку $(t_1, Mx(t_1, \varepsilon))$, где $t_1 = t_0 + h$, h – шаг численного метода. Далее в k - ой итерации получим точку $(t_k, Mx(t_k, \varepsilon))$, где

$$Mx(t_k, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} p(\varepsilon_i) x_i(t_k, \varepsilon_i).$$

Продолжив итерации, получим приближенное математическое ожидание решения задачи.

В случае равномерной дискретной случайной величины, формула для математического ожидания решения в момент времени t_k

$$Mx(t_k, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} p(\varepsilon_i) x_i(t_k, \varepsilon_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i(t_k, \varepsilon_i).$$

Если в момент времени t_k случайная величина $\varepsilon(t_k)$ является равномерно распределенной на $[a,b]$, тогда формула для математического ожидания выглядит следующим образом

$$Mx(t_k, \varepsilon) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t_k, y) dy.$$

8 Численный метод нахождения математического ожидания для систем дифференциальных уравнений со случайным параметром (общий случай)

Вернемся к системе (1.6.3), (1.6.4).

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \tag{1.6.3}$$

$$x(t_0) = x_0 \ , \tag{1.6.4}$$

где

$$x = (x_1, x_2, .., x_n),$$

$$f = (f_1, f_2, .., f_n),$$

$$t \in [t_0; t_0 + T],$$

$\varepsilon = \varepsilon(t)$ - вектор случайных процессов $\varepsilon = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), .., \varepsilon_s(t))$.

То есть в момент времени t_k будет записан вектор случайных величин $\varepsilon(t_k) = (\varepsilon_1(t_k), \varepsilon_2(t_k), .., \varepsilon_s(t_k))$ с многомерной плотностью вероятности $p_{\varepsilon(t_k)}(y_1, y_2, ..., y_s)$.

Для реализации алгоритма нам потребуется любой итерационный численный метод, пригодный для решения систем дифференциальных уравнений.

С помощью начального условия и формул итерационного численного метода можем найти вектор решений $x(t_1, \varepsilon(t_1)) = (x_1(t_1, \varepsilon(t_1)), x_2(t_1, \varepsilon(t_1)), .., x_n(t_1, \varepsilon(t_1)))$ в точке t_1, где $\varepsilon(t_1) = (\varepsilon_1(t_1), \varepsilon_2(t_1), .., \varepsilon_s(t_1))$ - вектор случайных величин.

Математическое ожидание решений системы в точке t_1 будет находиться по формуле

$$Mx(t_1, \varepsilon_1(t_1), \varepsilon_2(t_1), .., \varepsilon_s(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1, y_1, y_2, ..., y_s) \cdot p_{\varepsilon(t_1)}(y_1, y_2, ..., y_s) dy_1 dy_2 ... dy_s .$$

Это равенство записано в векторной форме, для математического ожидания решения i-го равенства системы (1.6.3), (1.6.4), формула выглядит следующим образом

$$Mx_i(t_1, \varepsilon_1(t_1), \varepsilon_2(t_1),.., \varepsilon_s(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t_1, y_1, y_2,..., y_s) \cdot p_{\varepsilon(t_1)}(y_1, y_2,..., y_s) dy_1 dy_2 ... dy_s .$$

Далее в качестве нового начального условия численного метода берем вектор $(t_1, Mx(t_1, \varepsilon_1(t_1), \varepsilon_2(t_1),.., \varepsilon_s(t_1)))$, получаем решения системы (1.6.3), (1.6.4) , зависящие от s случайных величин и таким же образом вычисляем $Mx(t_2, \varepsilon_1(t_2), \varepsilon_2(t_2),.., \varepsilon_s(t_2))$.

Продолжим процесс. В момент времени t_k математическое ожидание решения задачи (1.6.3), (1.6.4)

$$Mx(t_k, \varepsilon_1(t_k), \varepsilon_2(t_k),.., \varepsilon_s(t_k)) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x(t_k, y_1, y_2,..., y_s) \cdot p_{\varepsilon(t_k)}(y_1, y_2,..., y_s) dy_1 dy_2 ... dy_s .$$

В ходе работы алгоритма будут получены приближения к математическому ожидания решения в моментах времени t_k.

9 Метод пошагового вычисления математического ожидания

Вернемся к системе (1.7.1), (1.7.2)

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \tag{1.7.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \ , \tag{1.7.2}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$.

$\varepsilon = \varepsilon(t) \in \mathbb{R}$ - случайный процесс, имеющий равномерное распределение при каждом $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Зная начальные условия задачи, получим с помощью любого итерационного метода решение в точке $t_1 = t_0 + h$, причем при вычислении решения в правую часть подставим некоторую случайно сгенерированную реализацию случайного процесса в точке t_1, таким образом, получим решение $x_1(t_1)$, далее аналогичным образом получим еще решения $x_i(t_1)$, вообще говоря, различные вследствие влияния случайной величины.

Получив число N, вообще говоря, разных решений $x_i(t_1)$, $i = 1..N$ в точке t_1 произведем усреднение полученных значений $x(t_1) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)$, возьмем теперь в качестве новой «отправной» точки численного метода точку $(t_1, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1))$.

Далее в момент времени t_{k+1}, взяв в качестве предыдущих начальных условий $(t_k, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_k))$ получим приближенное значение математического ожидания $Mx(t_{k+1}) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_{k+1})$.

Предложенный метод может применяться и для решения систем дифференциальных уравнений вида (1.6.3), (1.6.4).

10 Применение методов для решения конкретных задач

Как показано ранее, для задачи

$$\dot{x} = \varepsilon(t)x, \tag{1.4.7}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.4.8}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $\varepsilon(t)$ - случайный процесс, причем $\varepsilon(t)$ задан характеристическим функционалом $\varphi_\varepsilon(u)$ имеет место формула

$$Mx(t) = x_0 \varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,t}). \tag{1.4.9}$$

Характеристическая функция для случайной величины, распределенной по равномерному закону $\varphi_\varepsilon(u) = \dfrac{\sin \int_T a(s)u(s)ds}{\int_T a(s)u(s)ds} e^{i\int_T \xi(s)u(s)ds}$, где $a(t) \geq 0$, $\xi(s) = M\varepsilon(t)$,

$\varepsilon(t) \in [\xi(t) - a(t); \xi(t) + a(t)]$

Подставим характеристическую функцию в формулу (1.4.9) получим

$$Mx(t) = x_0 \frac{\sin \int_T -a(s)i\chi_{t_0,t}(s)ds}{\int_T -a(s)i\chi_{t_0,t}(s)ds} e^{i\int_T -\xi(s)i\chi_{t_0,t}(s)ds} = x_0 \frac{\sin(i\int_{t_0}^{t} a(s)ds)}{i\int_{t_0}^{t} a(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}$$

Поскольку $\sin(x + iy) = \sin(x)ch(y) + i\cos(x)sh(y)$, то

$$Mx(t) = x_0 \frac{ish(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)}{i\int_{t_0}^{t} a(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds} = x_0 \frac{sh(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)}{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds} = x_0 \frac{e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}}{2\int_{t_0}^{t} a(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение с заданным начальным условием

$$\dot{x} = \sin(t)x, \tag{1.10.1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.10.2}$$

Эта задача детерминированная. Точное решение задачи находится по формуле и изображено на Рисунке 1 (здесь и далее в этой главе для построения графиков и численных исследований используется написанная в среде программирования Delphi программа см. Приложение).

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t0}^{t} \sin(s)\,ds} = x_0 e^{\cos(t_0)-\cos(t)}$$

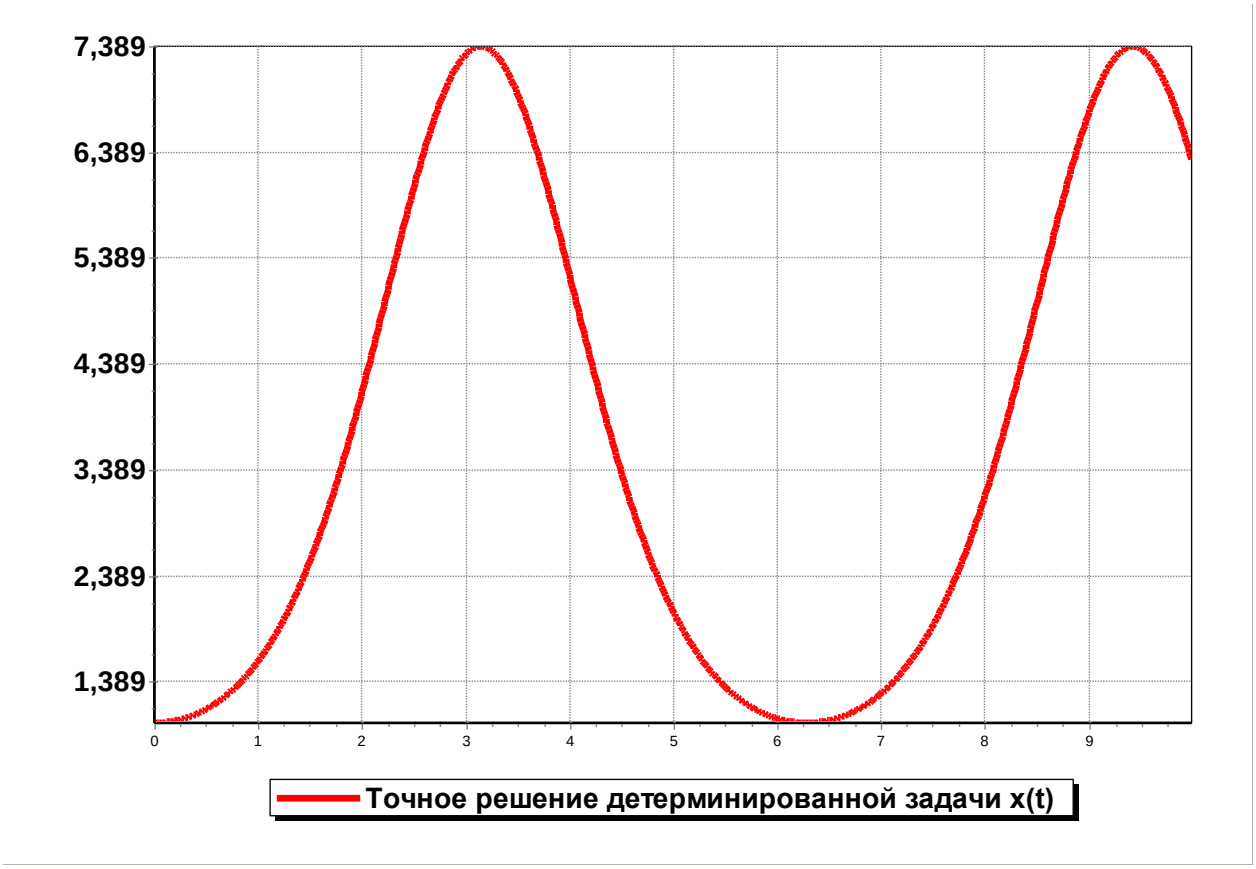


Рисунок 1.

При решении этой задачи (1.10.1), (1.10.2) численными методами происходит накопление погрешностей, кроме того функция $\sin(t)$ вычисляется приближенно, например в среде программирования Delphi $\sin(10000000000000000000\pi) = = 0{,}0413893229227964$. Естественно попытаться смоделировать поведение влияние случайной величины, получим задачу

$$\dot{x} = (\sin(t) + \varepsilon(t))x, \qquad (1.10.3)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad (1.10.4)$$

где $\varepsilon(t)$ случайный процесс.

Будем решать задачу (1.10.3), (1.10.4), где $\varepsilon(t)$ в момент времени t_k - является случайной величиной распределенной по равномерному закону $R(-a;a)$.

Выберем в качестве численного метода решения метод Рунге-Кутта четвертого порядка [6] с фиксированным шагом $h = 0{,}01$ и изобразим графики на Рисунке 2.

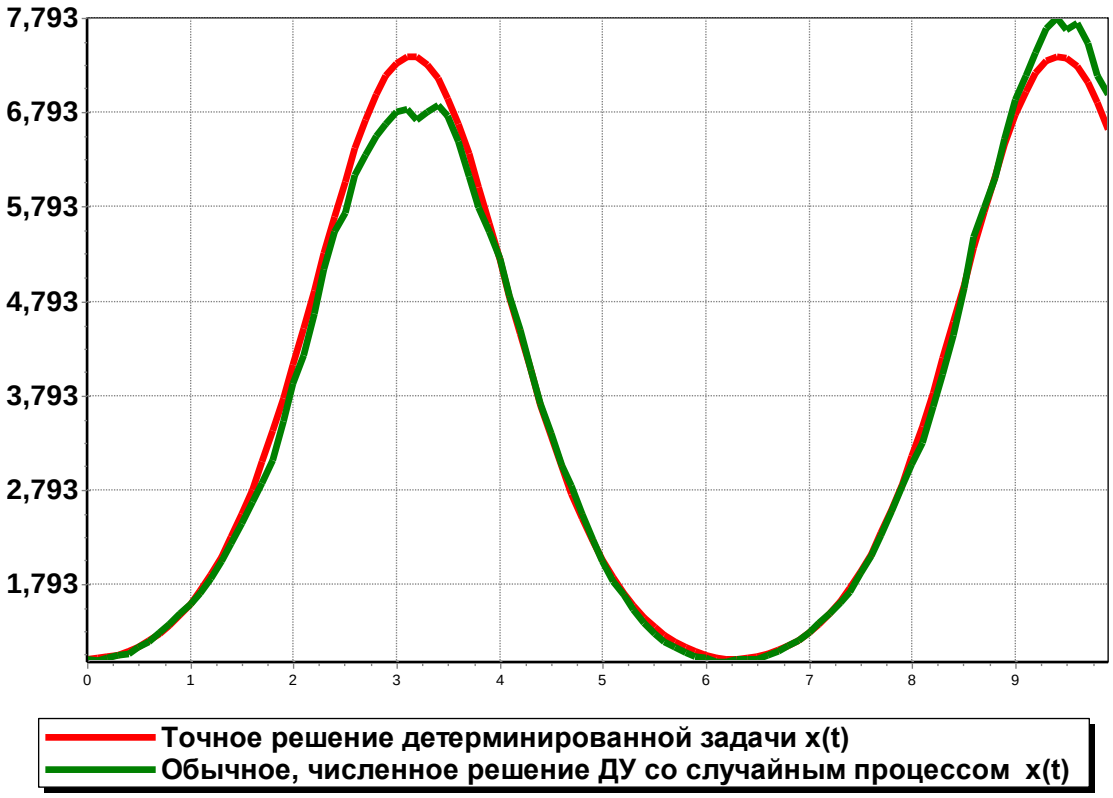


Рисунок 2.

Графики при $a = 0{,}5$, $h = 0{,}01$.

Как видно из графиков, случайный процесс оказывает значительное воздействие на поведение решения. На более длинном промежутке, это влияние будет только усиливаться см. Рисунок 3 .

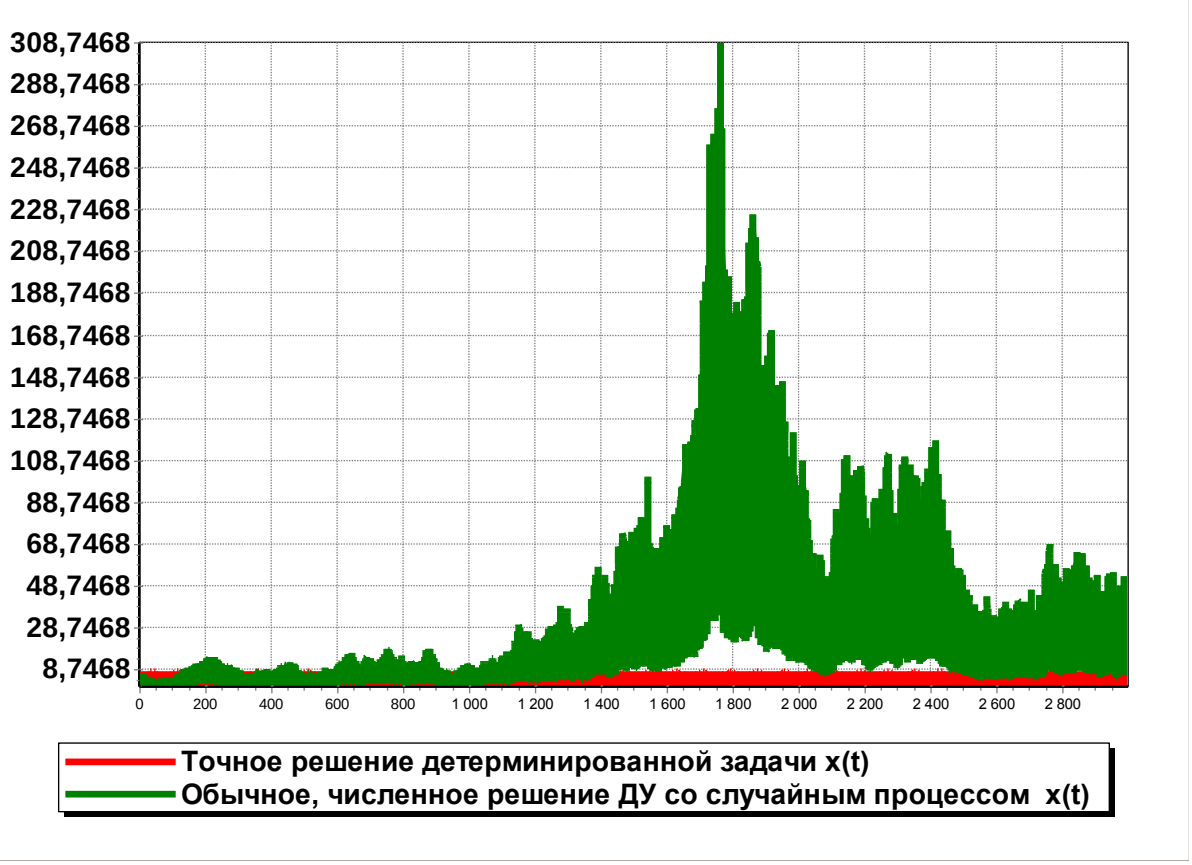


Рисунок 3.

Воздействие случайной величины в каждый момент времени.

Математическое ожидание решения задачи (1.10.3), (1.10.4) может быть записано в виде

$$Mx(t) = x_0 \frac{e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}}{2\int_{t_0}^{t} a(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}$$

где $a(s) = a, \xi(s) = M\varepsilon(t) = \sin(t)$.

Таким образом,

$$Mx(t) = x_0 \frac{e^{a(t-t_0)} - e^{a(t_0-t)}}{2a(t-t_0)} e^{\cos(t_0)-\cos(t)}.$$

График на небольшом промежутке [0,10] с параметром $a = 0{,}0005$ изображен на Рисунке 4.

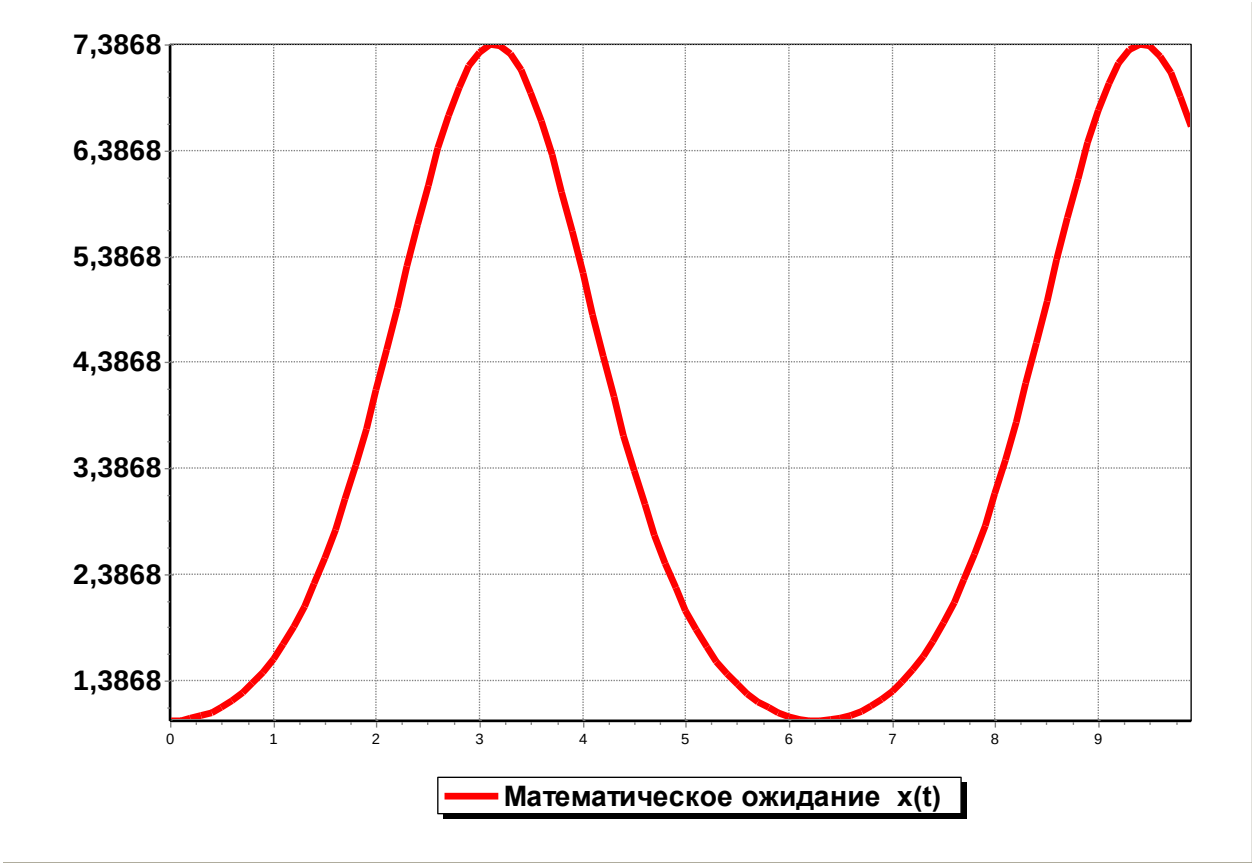


Рисунок 4.

График на небольшом промежутке [0,10] с параметром $a = 0{,}0005$.

На Рисунке 5 помимо графика математического ожидания, изобразим метод пошагового вычисления математического ожидания и численный метод математического ожидания для непрерывной равномерной случайной величины.

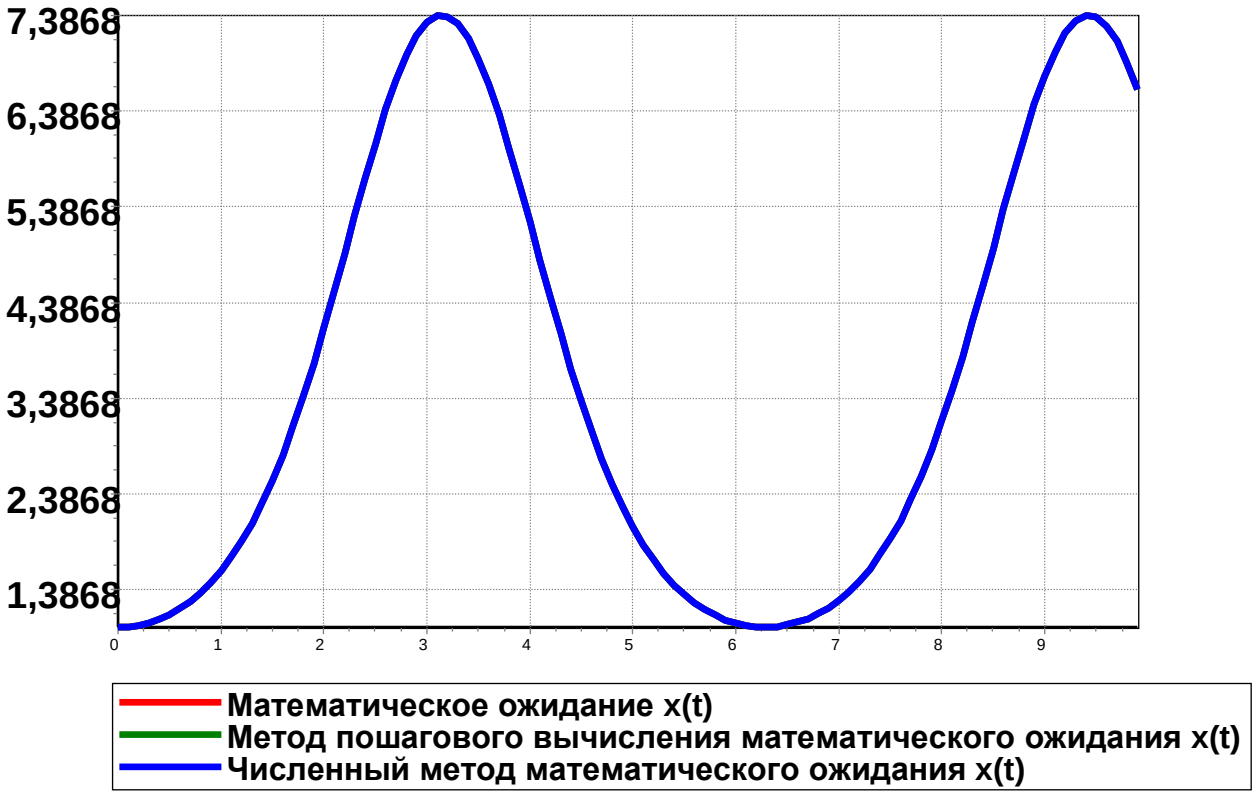


Рисунок 5.

Как видно, графики решений почти совпали, более того их качественное поведение похоже на решение детерминированной задачи.

Рассмотрим на более длинном отрезке времени [0, 3000] с тем же параметром $a = 0{,}0005$ и взяв шаг метода Рунге-Кутты $h = 0{,}1$ см. Рисунок 6.

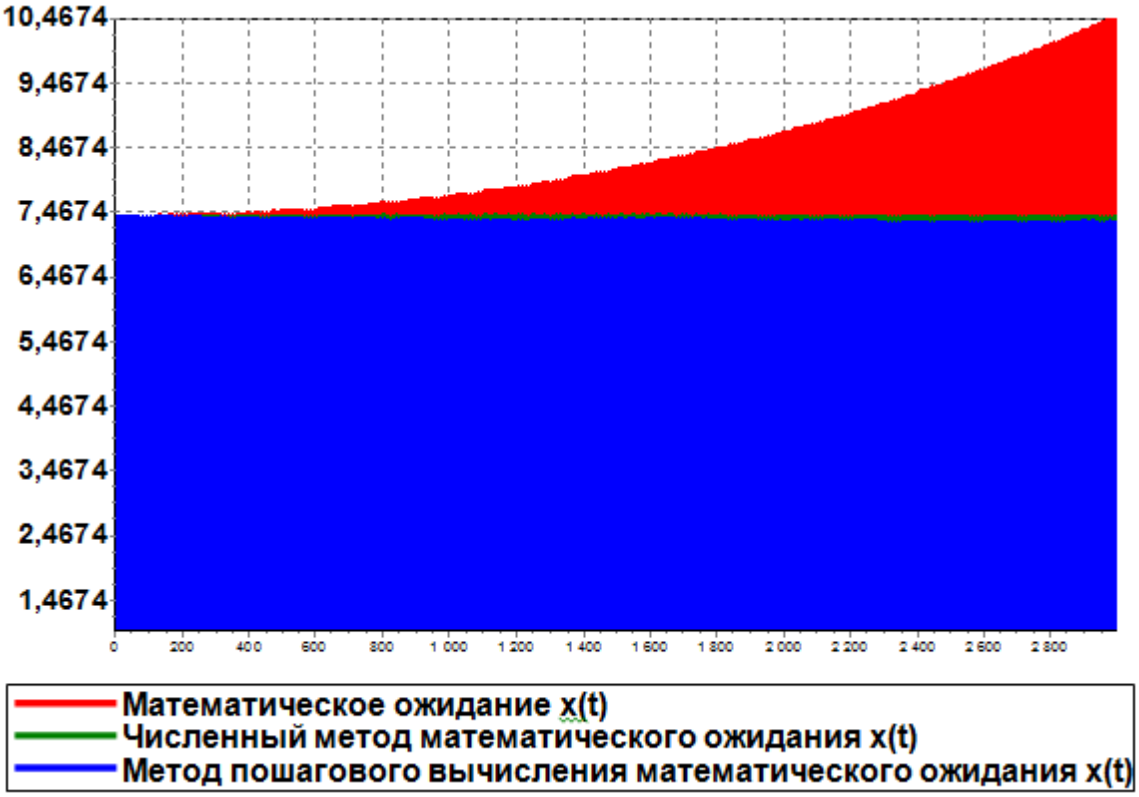


Рисунок 6.

Увеличим масштаб см. Рисунок 7.

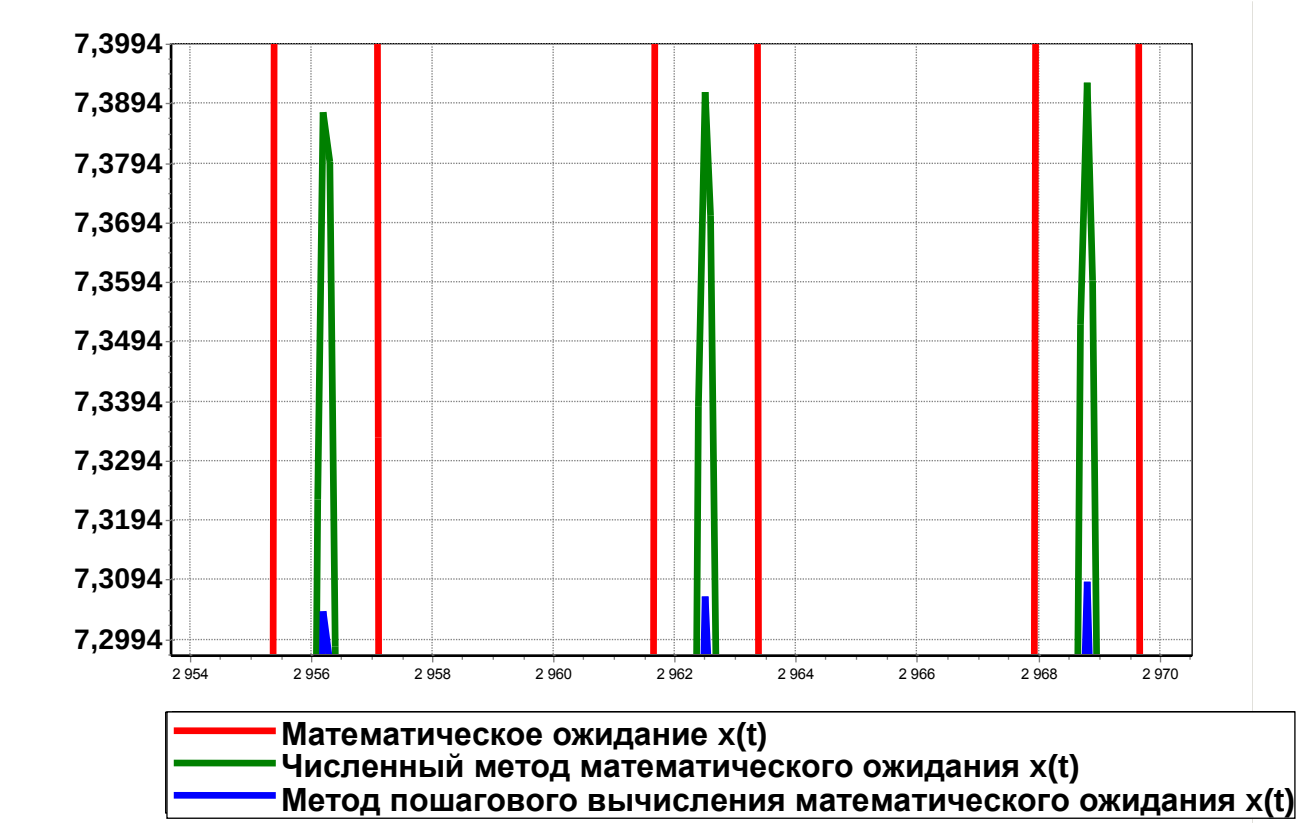


Рисунок 7.

Как видим из графиков, локальные максимумы математического ожидания вычисленного по формуле, возрастают сильнее, чем полученные численным методом математического ожидания и методом пошагового вычисления математического ожидания. Однако следует отметить, что качественное поведение графиков совпадает.

Изобразим графики решений при разных параметрах a.

Построим численное математическое ожидание решения при $a = 0{,}5$, шаге метода Рунге-Кутты $h = 0{,}1$ - см. Рисунок 8.

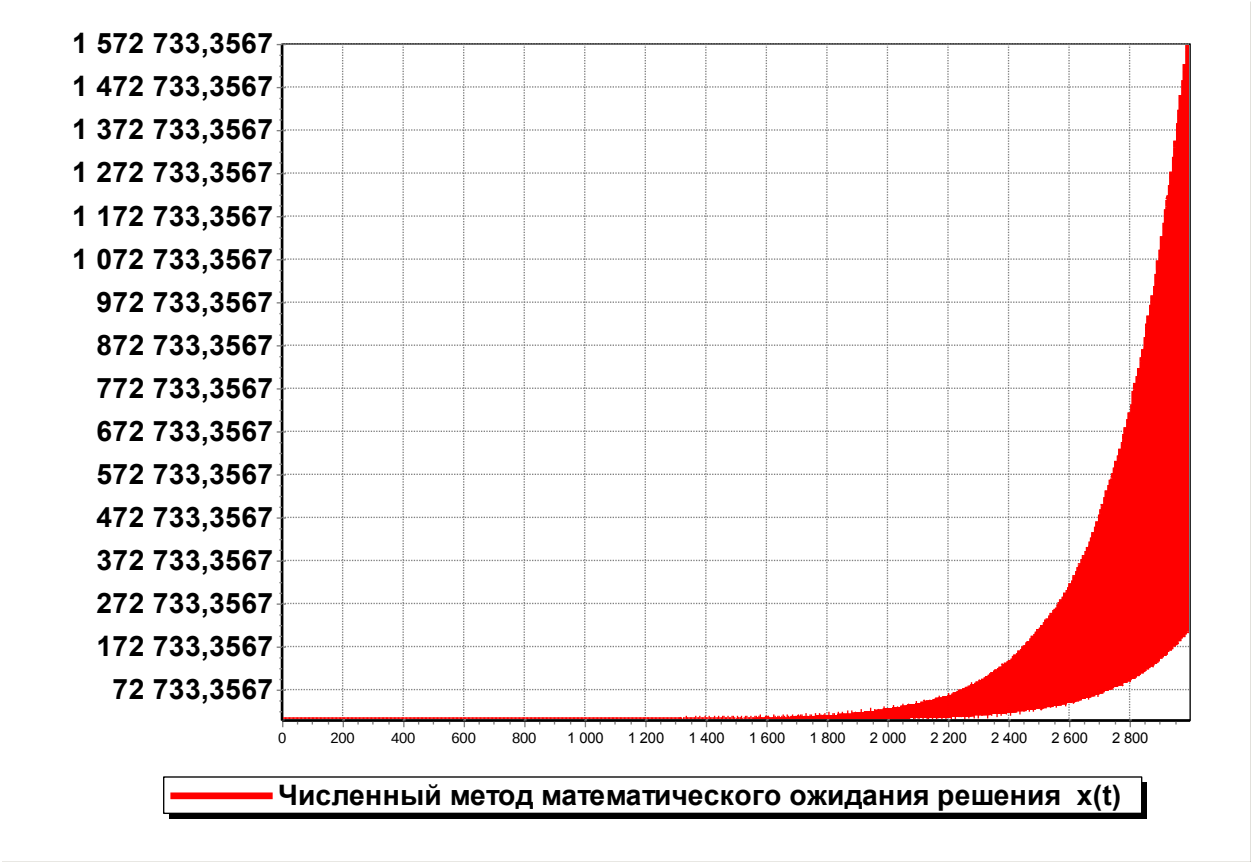


Рисунок 8.

Отметим, что увеличив параметр a, мы усилили влияние случайного процесса.

Рисунок 9 иллюстрирует график математического ожидания решения полученного по прямой формуле при $a = 0{,}005$.

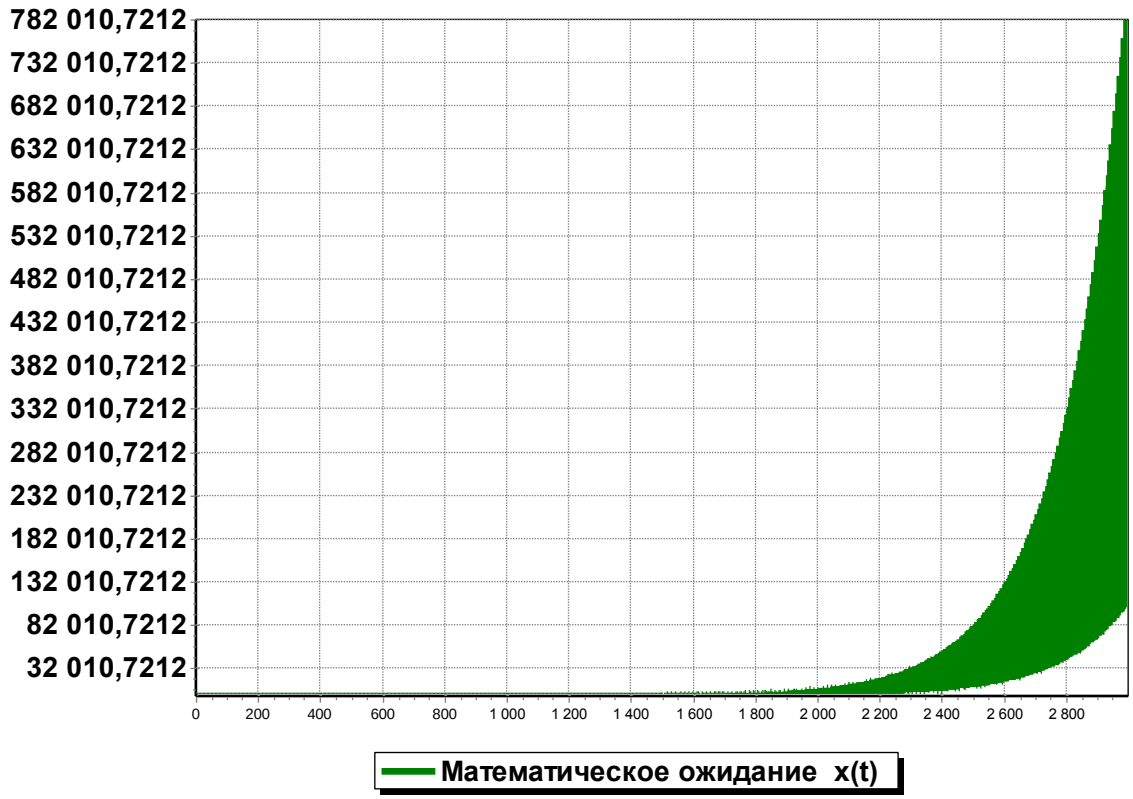


Рисунок 9.

11 Применение методов для решения систем дифференциальных уравнений содержащих случайный процесс

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с заданным начальным условием.

$$\begin{cases} \dot{x}1 = x2, \\ \dot{x}2 = (-\sin(t) + \varepsilon)x1, \\ x1(0) = 1, \\ x2(0) = 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon(t_k)$ в момент времени t_k является непрерывной равномерно распределенной случайной величиной и принимает значения из отрезка [-5,5].

Изобразим графики решений детерминированной задачи, то есть, когда ε=0, и решение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка примененного к исходной системе см. Рисунок 10 (при некоторой реализации случайного процесса).

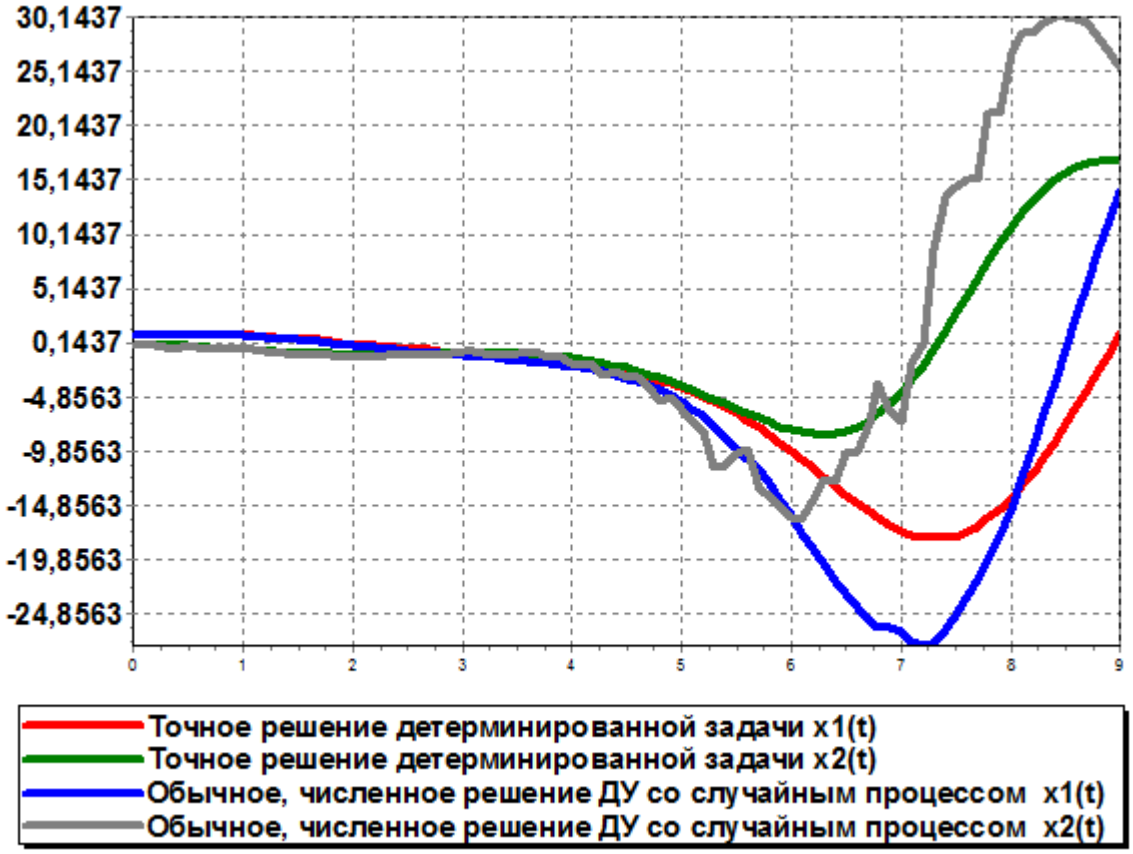

30,1437
25,1437
20,1437
15,1437
10,1437
5,1437
0,1437
-4,8563
-9,8563
-14,8563
-19,8563
-24,8563
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Точное решение детерминированной задачи x1(t)
Точное решение детерминированной задачи x2(t)
Обычное, численное решение ДУ со случайным процессом x1(t)
Обычное, численное решение ДУ со случайным процессом x2(t)

Рисунок 10.

Применим описанные методы для нахождения математического ожидания к решению этой системы дифференциальных уравнений см. Рисунок 11

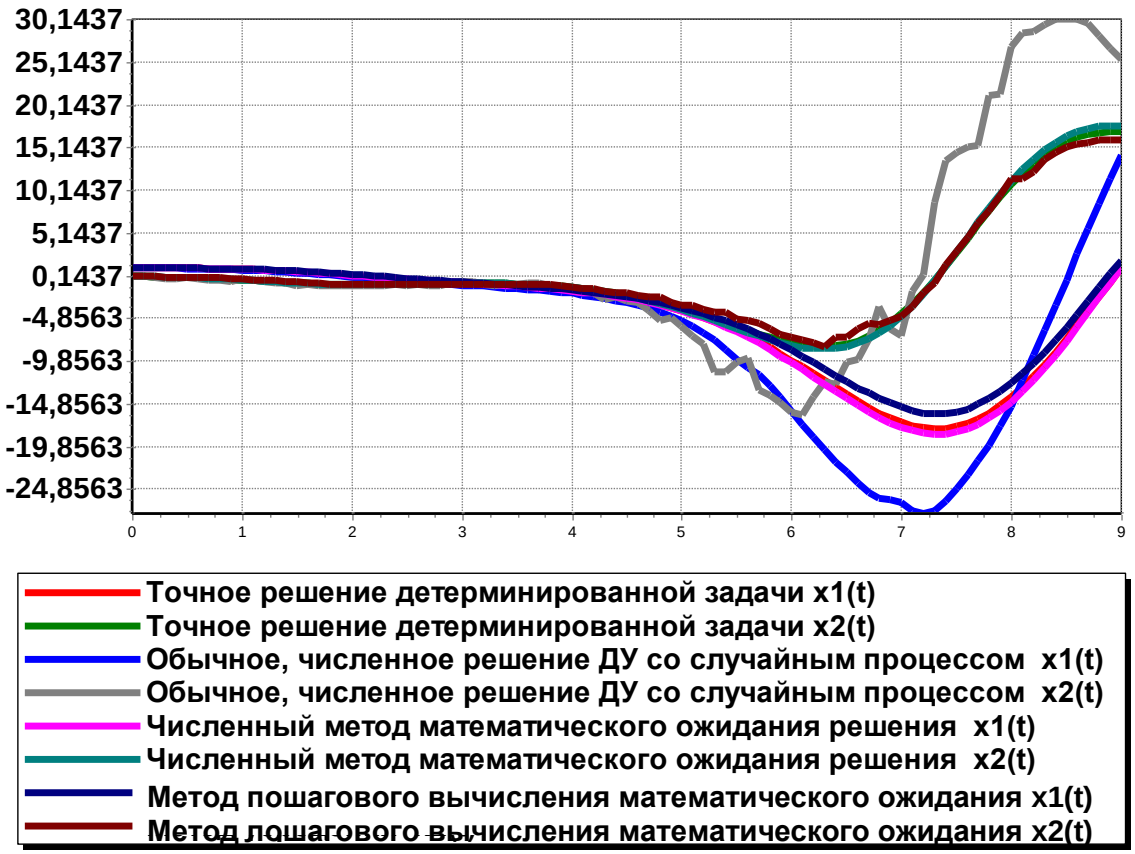


Рисунок 11.

Увеличенный масштаб изображён на Рисунке 12 и 13.

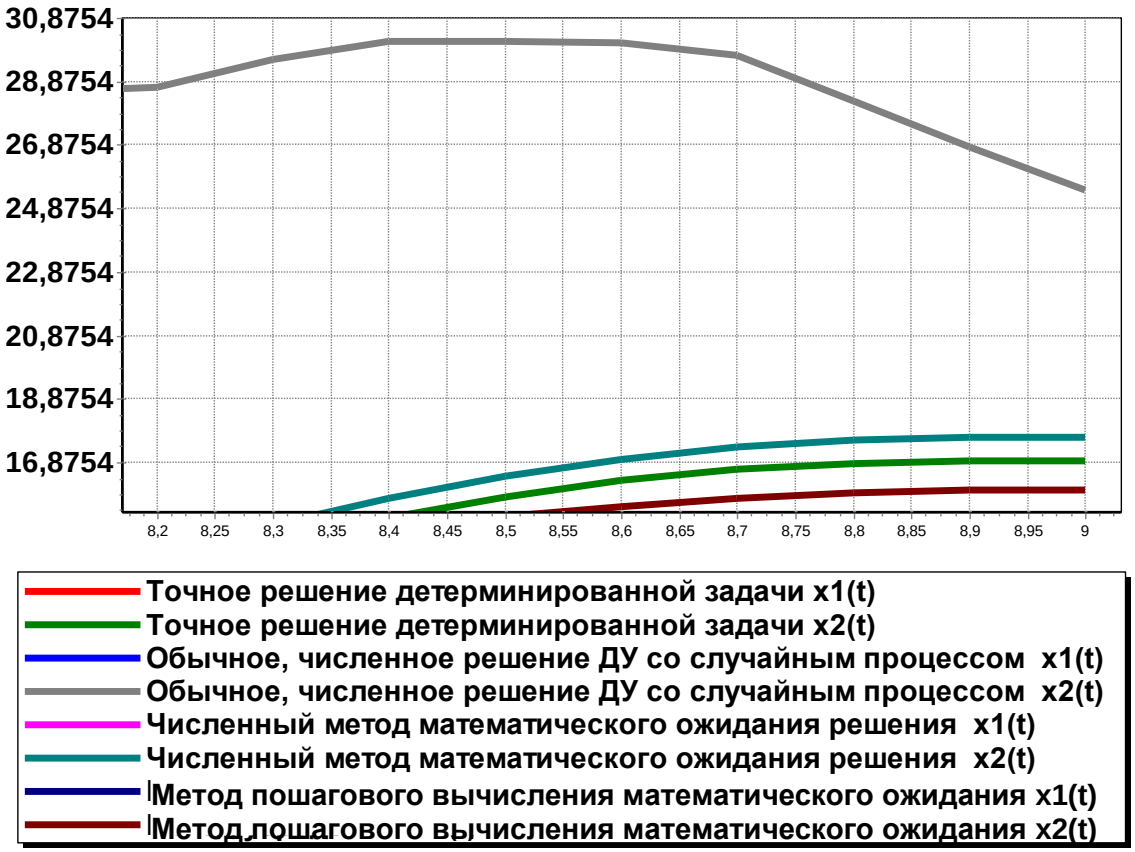


Рисунок 12.

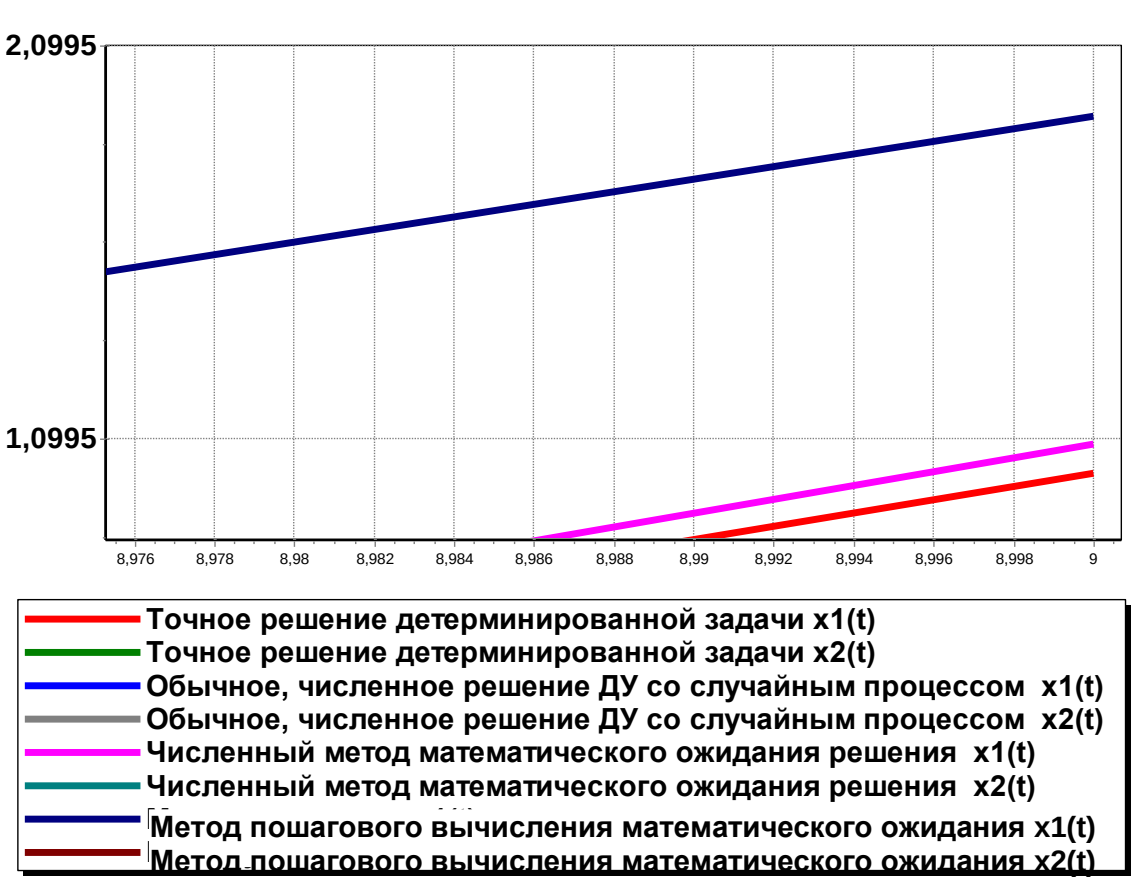

2,0995
1,0995
8,976
8,978
8,98
8,982
8,984
8,986
8,988
8,99
8,992
8,994
8,996
8,998
9
Точное решение детерминированной задачи x1(t)
Точное решение детерминированной задачи x2(t)
Обычное, численное решение ДУ со случайным процессом x1(t)
Обычное, численное решение ДУ со случайным процессом x2(t)
Численный метод математического ожидания решения x1(t)
Численный метод математического ожидания решения x2(t)
Метод пошагового вычисления математического ожидания x1(t)
Метод пошагового вычисления математического ожидания x2(t)

Рисунок 13.

Глава II. Нахождение статистических характеристик оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества

1 Нахождение оптимального управления для линейной стохастической системы

Множество задач механики, биологии, экономики могут быть описаны линейными управляемыми системами. Решив эти задачи, мы получаем сведения о том, как правильно управлять системой, чтобы достичь желаемого результата. Безусловно, все эти системы являются моделями реальной жизни, где некоторые параметры описывают законы, другие являются входными данными, однако и то, и другое всегда содержит некоторые пренебрегаемые факторы. К таким фактором относится действие посторонних сил, не учитываемых в системе, но в купе образующих случайное влияние на систему, входные данные также не всегда доподлинно известны. Имеет смысл рассматривать все эти факторы как неполноту информации о системе.

Существуют различные способы представления моделей задач управления при неполной информации. При вероятностном подходе, принятом ниже, неполнота информации интерпретируется как случайные возмущения коэффициентов системы.

1. Рассмотрим задачи оптимального управления вида

$$\widehat{J}\big(x(t),u(t)\big)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(s)ds+\frac{1}{2}c\cdot x^2(t_1)\to\inf\,, \tag{2.1.1}$$

$$x(0)=x_0\,, \tag{2.1.2}$$

$$\dot{x}(t)=\varepsilon(t)x+u(t)\,. \tag{2.1.3}$$

Здесь $x(t)$ - фазовая траектория, $u(t)$ - управление, $\varepsilon(t)$ - случайный процесс. Оптимальное управление и фазовая траектория зависят от случайного процесса $\varepsilon(t)$.

Обычно выражают оптимальное управление и оптимальную траекторию через реализацию случайного процесса $\varepsilon(t)$. Для практики важны статистические характеристики случайных процессов $u(t)$ и $x(t)$. Их находят используя полученные формулы для $u(t)$ и $x(t)$ с учетом закона распределения $\varepsilon(t)$. После этого вычисляют усредненный критерий качества

$$J\left(x(t),u(t)\right)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(Mu(s))^2\,ds+\frac{1}{2}c(Mx(t_1))^2\to\inf\ .$$

Это удается сделать для случая детерминированного процесса возмущенного белым шумом.

Для отыскания первых моментных функций оптимальных параметров системы логично изначально переписать исходную систему в виде

$$J\left(x(t),u(t)\right)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}(Mu(s))^2\,ds+\frac{1}{2}c(Mx(t_1))^2\to\inf\ , \qquad (2.1.4)$$

$$x(0)=x_0\ , \qquad (2.1.5)$$

$$\dot{x}(t)=\varepsilon(t)x+u(t) \qquad (2.1.6)$$

и искать математическое ожидание оптимального управления и математическое ожидание оптимальной фазовой траектории.

Применим оба этих подхода и сопоставим результаты. Решим первую задачу (2.1.1) – (2.1.3) классическим методом для реализации $\varepsilon(t)$. Выпишем решение дифференциального уравнения (2.1.5), (2.1.6) через реализации ε и u

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau} + \int_0^t e^{\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau} u(s)ds . \qquad (2.1.7)$$

Подставим решение (2.1.7) в функционал (2.1.1)

$$\hat{J}\big(x(t),u(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (u(s))^2 ds + \frac{1}{2}c\cdot(x_0 e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} + \int_0^{t_1} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} u(s)ds)^2 ,$$

$$\hat{J}\big(x(t),u(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (u(s))^2 ds + \frac{1}{2}c\cdot[x^2{}_0 e^{2\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} + 2x_0 e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} \int_0^{t_1} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} u(s)ds +$$

$$+ (\int_0^{t_1} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} u(s)ds)^2].$$

Найдем вариационную производную

$$\frac{\delta\hat{J}}{\delta u(s)} = u(s) + cx_0 e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} + ce^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} \cdot \int_0^{t_1} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} u(s)ds .$$

Оптимальное управление $u(s)$ можем найти, приравняв к нулю вариационную производную, т. е. решив уравнение

$$u(s) + cx_0 e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} + ce^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} \cdot \int_0^{t_1} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} u(s)ds = 0 . \qquad (2.1.7)$$

Заметим, что уравнение (2.1.7) - это уравнение Фредгольма второго рода вида

$$u(s) + f(s) + g(s)\int_0^{t_1} b(\tau)u(\tau)d\tau = 0 . \qquad (2.1.8)$$

Умножим это уравнение на $b(s)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,t_1]$

$$u(s)b(s) + f(s)b(s) + g(s)b(s)\int_0^{t_1} b(\tau)u(\tau)d\tau = 0 ,$$

$$\int_0^{t_1} u(s)b(s)ds + \int_0^{t_1} f(s)b(s)ds + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds \int_0^{t_1} b(\tau)u(\tau)d\tau = 0.$$

Введем обозначение

$$w = \int_0^{t_1} b(\tau)u(\tau)d\tau,$$

тогда

$$w + \int_0^{t_1} f(s)b(s)ds + \int_0^{t_1} g(s)b(s)dsw = 0,$$

$$(1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds)w = -\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds,$$

$$w = \frac{-\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds}{1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds}.$$

Вернёмся к исходному уравнению (2.1.8)

$$u(s) + f(s) + g(s)w = 0, \text{ отсюда}$$

$$u(s) = -f(s) - g(s)w,$$

$$u(s) = -f(s) - g(s)\frac{-\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds}{1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds},$$

$$u(s) = -f(s) + g(s)\frac{\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds}{1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds}, \qquad (2.1.9)$$

где

$$f(s) = cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau},$$

$$g(s) = ce^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau},$$

$$b(s) = e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}.$$

Подставим функции $f(s)$, $g(s)$ и $b(s)$ в (2.1.9)

$$u(s) = -cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} + ce^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} \frac{\int_0^{t_1} cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds}{1+\int_0^{t_1} ce^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds},$$

$$u(s) = -cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} + ce^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} \frac{\int_0^{t_1} cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds}{1+c\int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds},$$

или

$$u(s) = \frac{-cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} - c^2 x_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} \int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds + ce^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} \int_0^{t_1} cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds}{1+\int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds},$$

$$u(s) = \frac{-cx_0 e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}}{1+c\int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau} ds}. \qquad (2.1.10)$$

Таким образом, оптимальное управление задачи (2.1.1) – (2.1.3) может быть выражено через реализацию случайного процесса $\varepsilon(t)$ с помощью формулы (2.1.10). Фазовую траекторию найдем из уравнения (2.1.7) путем подстановки оптимального управления (2.1.10)

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau} + \int_0^t e^{\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau} \frac{-cx_0 e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau}}{1 + c\int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} ds} ds,$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau} - \int_0^t \frac{cx_0 e^{\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau}}{1 + c\int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} ds} ds. \qquad (2.1.11)$$

Математические ожидания управления и фазовой траектории находятся в виде

$$Mu(s) = M\left(\frac{-cx_0 e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau}}{1 + c\int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} ds}\right), \qquad (2.1.12)$$

$$Mx(t) = M\left(x_0 e^{\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau} - \int_0^t \frac{cx_0 e^{\int_s^t \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_0^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} e^{\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau}}{1 + c\int_0^{t_1} e^{2\int_s^{t_1} \varepsilon(\tau)d\tau} ds} ds\right). \qquad (2.1.13)$$

Заметим, что на практике для дискретных случайных процессов $\varepsilon(t)$ можно вычислить эти выражения, в иных случаях непросто найти из этих выражений искомые величины.

Отметим, что по исходной задаче (2.1.1) – (2.1.3) можно составить детерминированную задачу для математического ожидания оптимального управления и траектории, заменив в уравнении (2.1.2) случайный процесс $\varepsilon(t)$

его математическим ожиданием $M\varepsilon(t)$. При этом, оптимальное управление и оптимальная траектория находится по формулам (2.1.10) и (2.1.11).

2. Поскольку вычисления выражений (2.1.12) , (2.1.13) приводят к осложнениям, то для примера рассмотрим, когда ε не зависит от t, т. е. является случайной величиной.

Рассмотрим задачу

$$\widehat{J}\big(x(t),u(t)\big)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(s)ds+\frac{1}{2}c\cdot x^2(t_1)\to\inf\,, \tag{2.1.14}$$

$$\dot{x}(t)=\varepsilon x+u(t)\,, \tag{2.1.15}$$

$$x(0)=x_0\,. \tag{2.1.16}$$

Решение задачи (2.1.14) – (2.1.16) может быть найдено из предыдущих формул. Однако мы проведем вычисления с целью проверки полученных ранее результатов

$$x(t)=x_0e^{\int_0^t\varepsilon ds}+\int_0^t e^{\int_s^t\varepsilon d\tau}u(s)ds\,,$$

$$x(t)=x_0e^{\varepsilon t}+\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)}u(s)ds\,,$$

подставим это выражение в целевой функционал (2.1.14)

$$\widehat{J}\big(x(t),u(t)\big)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(s)ds+\frac{1}{2}c\cdot(x_0e^{\varepsilon t_1}+\int_0^{t_1}e^{\varepsilon(t_1-s)}u(s)ds),$$

$$\widehat{J}\big(x(t),u(t)\big)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(s)ds+\frac{1}{2}c\cdot(x^2{}_0e^{2\varepsilon t_1}+2x_0e^{2\varepsilon t_1}\int_0^{t_1}e^{-\varepsilon s}u(s)ds+e^{2\varepsilon t_1}(\int_0^{t_1}e^{-\varepsilon s}u(s)ds)^2)\,.$$

Найдем вариационную производную

$$\frac{\delta\widehat{J}}{\delta u(s)} = u(s) + cx_0 e^{2\varepsilon t_1} e^{-\varepsilon s} + ce^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon s} \int_0^{t_1} e^{-\varepsilon s} u(s) ds ,$$

для нахождения оптимального управления решим уравнение

$$u(s) + cx_0 e^{2\varepsilon t_1} e^{-\varepsilon s} + ce^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon s} \int_0^{t_1} e^{-\varepsilon s} u(s) ds = 0 ,$$

сделаем замену

$$u(\xi) = y \cdot e^{-\varepsilon\xi},$$

$$y \cdot e^{-\varepsilon\xi} + cx_0 e^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon\xi} + ce^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon\xi} \int_0^{t_1} e^{-\varepsilon\xi} y e^{-\varepsilon\xi} d\xi = 0,$$

$$y + cx_0 e^{2\varepsilon t_1} + ce^{2\varepsilon t_1} y \int_0^{t_1} e^{-2\varepsilon\xi} d\xi = 0,$$

$$y + cx_0 e^{2\varepsilon t_1} + ce^{2\varepsilon t_1} y \frac{(e^{2\varepsilon t_1} - 1)}{-2\varepsilon} = 0,$$

$$y + cx_0 e^{2\varepsilon t_1} + ce^{2\varepsilon t_1} y \frac{(e^{2\varepsilon t_1} - 1)}{-2\varepsilon} = 0,$$

$$2\varepsilon y + 2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1} - ce^{2\varepsilon t_1} y(e^{2\varepsilon t_1} - 1) = 0,$$

$$y(2\varepsilon - ce^{2\varepsilon t_1}(e^{2\varepsilon t_1} - 1)) + 2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1} = 0,$$

отсюда

$$y = \frac{-2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1}}{2\varepsilon - ce^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)},$$

тогда

$$u(s) = \frac{-2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1}}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)} \cdot e^{-\varepsilon s},$$

или

$$u(t) = \frac{-2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon t}}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)}. \qquad (2.1.17)$$

Подставим это выражение в формулу для решения дифференциального уравнения

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t} + \frac{e^{\varepsilon t}(-2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1} \cdot \frac{(e^{-2\varepsilon t} - 1)}{-2\varepsilon})}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)},$$

или

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t} + \frac{c x_0 e^{2\varepsilon t_1 + \varepsilon t} \cdot (e^{-2\varepsilon t} - 1)}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)}. \qquad (2.1.18)$$

Математическое ожидание управления и фазовой траектории запишем в виде

$$Mu(t) = M\left(\frac{-2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon t}}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)}\right), \qquad (2.1.19)$$

$$Mx(t) = M\left(x_0 e^{\varepsilon t} + \frac{c x_0 e^{2\varepsilon t_1 + \varepsilon t} \cdot (e^{-2\varepsilon t} - 1)}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)}\right). \qquad (2.1.20)$$

3. Вернемся к задаче (2.1.4) – (2.1.6)

$$J\big(x(t), u(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (Mu(s))^2 ds + \frac{1}{2} c \cdot (Mx(t_1))^2 \to \inf, \qquad (2.1.4)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (2.1.5)$$

$$\dot{x}(t) = \varepsilon(t)x + u(t). \qquad (2.1.6)$$

Применим формулу (1.4.6) для нахождения математического ожидания решения дифференциального уравнения со случайным процессом

$$Mx(t) = x_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t)) + \int_0^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))Mu(s)ds, \qquad (2.1.20)$$

где

$$\chi(t_0,t,s) = \begin{cases} sign(s-t_0), s \in (t_0,t) \\ 0, s \notin (t_0,t) \end{cases}.$$

Подставим математическое ожидание решения (2.1.20) в функцию цели (2.1.4), получим

$$J\big(x(t),u(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}(Mu(s))^2 ds + \frac{1}{2}c\cdot(x_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1)) + \int_0^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))Mu(s)ds)^2,$$

$$J\big(x(t),u(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}(Mu(s))^2 ds + \frac{1}{2}c\cdot(x^2{}_0\varphi^2{}_\varepsilon(-i\chi(0,t_1)) +$$

$$+ 2x_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\int_0^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))Mu(s)ds + (\int_0^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))Mu(s)ds)^2),$$

найдем вариационную производную

$$\frac{\delta J\big(x(s),Mu(s)\big)}{\delta Mu(s)} = Mu(s) + \frac{1}{2}c\cdot(2x_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1)) + 2\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))(\int_0^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))Mu(s)ds)),$$

$$\frac{\delta J\big(x(s),Mu(s)\big)}{\delta Mu(s)} = Mu(s) + cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1)) + c\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))\int_0^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))Mu(s)ds.$$

Для нахождения экстремалей функционала решим уравнение

$$Mu(s) + cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1)) + c\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))\int_0^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))Mu(s)ds = 0, \qquad (2.1.21)$$

Заметим, что уравнение (2.1.21) - это уравнение Фредгольма второго рода вида

$$Mu(s) + f(s) + g(s)\int_0^{t_1} b(\tau)Mu(\tau)d\tau = 0,$$

Умножим это уравнение на $b(s)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,t_1]$

$$Mu(s)b(s) + f(s)b(s) + g(s)b(s)\int_0^{t_1} b(\tau)Mu(\tau)d\tau = 0,$$

$$\int_0^{t_1} Mu(s)b(s)ds + \int_0^{t_1} f(s)b(s)ds + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds \int_0^{t_1} b(\tau)Mu(\tau)d\tau = 0,$$

обозначим

$$w = \int_0^{t_1} b(\tau)Mu(\tau)d\tau,$$

$$w + \int_0^{t_1} f(s)b(s)ds + \int_0^{t_1} g(s)b(s)dsw = 0,$$

$$(1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds)w = -\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds,$$

$$w = \frac{-\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds}{(1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds)},$$

вернёмся к исходному уравнению

$$Mu(s) + f(s) + g(s)w = 0,$$

отсюда

$$Mu(s) = -f(s) - g(s)w,$$

$$Mu(s) = -f(s) - g(s)\frac{-\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds}{(1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds)},$$

$$Mu(s) = -f(s) + g(s)\frac{\int_0^{t_1} f(s)b(s)ds}{(1 + \int_0^{t_1} g(s)b(s)ds)},$$

где

$$f(s) = cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1)) \cdot \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1)),$$

$$g(s) = c\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1)),$$

$$b(s) = \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1)).$$

Подставим функции $f(s)$, $g(s)$ и $b(s)$

$$Mu(s) = -cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1)) +$$

$$+ c\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))\frac{\int_0^{t_1} cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))ds}{1+\int_0^{t_1} c\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))ds},$$

преобразуем, найдя общий знаменатель

$$Mu(s) = \frac{-cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))}{1+\int_0^{t_1} c\varphi_\varepsilon{}^2(-i\chi(s,t_1))ds}. \qquad (2.1.22)$$

Найдем математическое ожидание решения $Mx(t)$

$$Mx(t) = x_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t)) + \int_0^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))\frac{-cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))\cdot\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))}{1+\int_0^{t_1} c\varphi_\varepsilon{}^2(-i\chi(s,t_1))ds}ds,$$

Преобразуем

$$Mx(t) = x_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t)) - \frac{cx_0\varphi_\varepsilon(-i\chi(0,t_1))}{1+\int_0^{t_1} c\varphi_\varepsilon{}^2(-i\chi(s,t_1))ds}\int_0^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t_1))ds.$$

(2.1.23)

Таким образом, мы рассмотрели три задачи: первые две следуют друг из друга, а третья, так же полученная формула (2.1.23) уникальны.

2 Примеры решения линейных задач оптимального управления с квадратичным критерием качества

Рассмотрим полученные формулы на частных примерах и сопоставим результаты (расчеты выполнены в среде Mathcad).

Возьмем следующие параметры для задач (2.1.1) - (2.1.3), (2.1.4) - (2.1.6) и (2.1.14) - (2.1.16)

$x(0) = 1$
$t_1 = 10,$
$c = 2.$

Далее рассмотрим следующие варианты:

1. Задачу (2.1.14) - (2.1.16), когда в качестве случайной величины в формулы (2.1.17) и (2.1.18) подставить ее математическое ожидание.
2. Задачу (2.1.14) - (2.1.16) с нормально распределенной случайной величиной.
3. Задачу (2.1.4) - (2.1.6) с нормально распределенной случайной величиной.

3 Частный случай задачи (2.1.14) - (2.1.16) с нормальной случайной величиной

Рассмотрим задачу (2.1.14) - (2.1.16), где ε - случайная величина, распределённая по нормальному закону со средним значением $\mu = -0.2$ и дисперсией $\sigma^2 = 0.09$.

В ходе предыдущих расчетов была получена формула (2.1.17) для оптимального управления и формула (2.1.18) для оптимальной траектории

$$u(t) = \frac{-2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon t}}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)},$$

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t} + \frac{c x_0 e^{2\varepsilon t_1 + \varepsilon t} \cdot (e^{-2\varepsilon t} - 1)}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)}.$$

Графики оптимального управления и фазовой траектории, в случае если в качестве случайной величины в формулы (2.1.17) и (2.1.18) подставить ее математическое ожидание выглядят следующим образом см. Рисунок 16 и Рисунок 17.

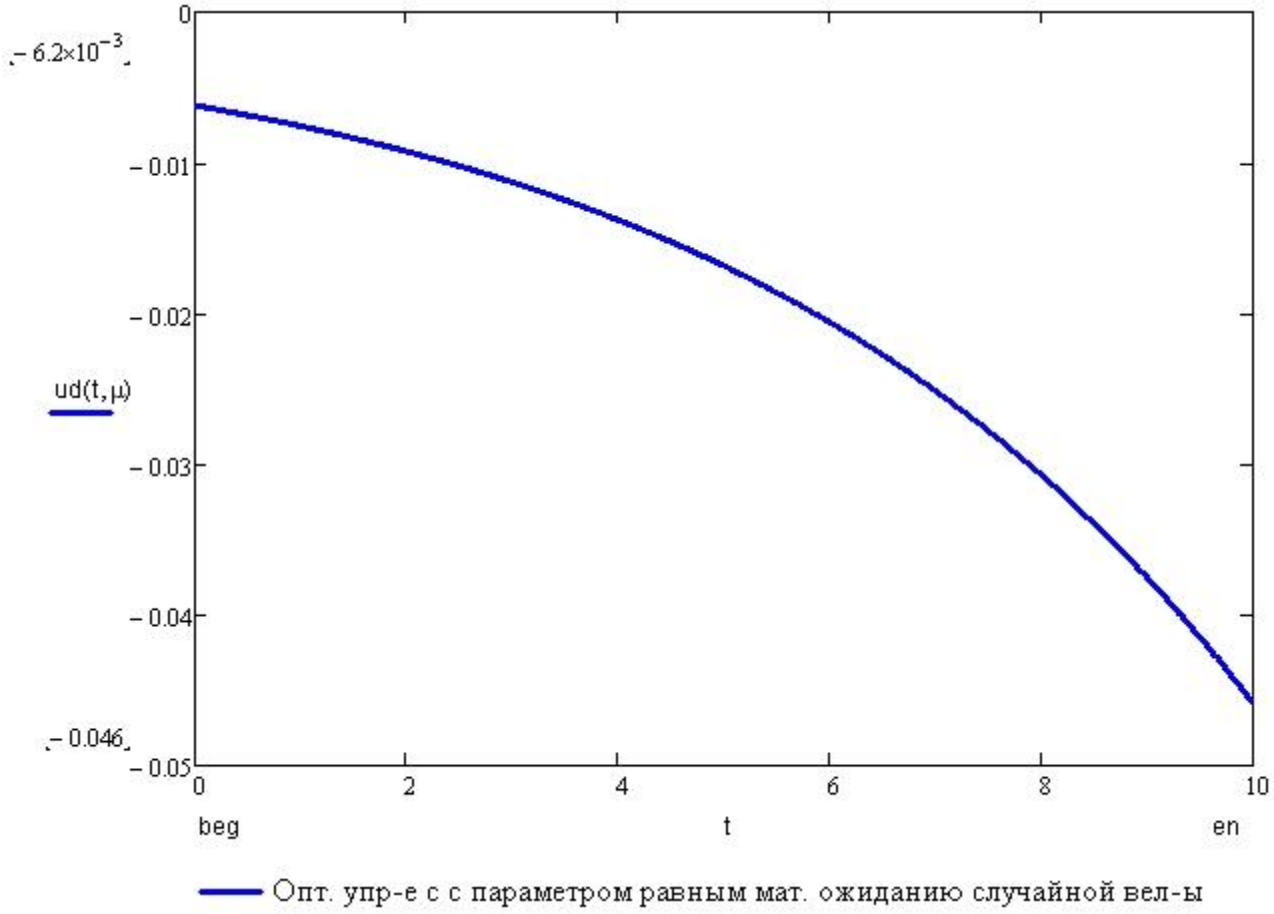

0
– 6.2×10^–3
– 0.01
– 0.02
ud(t, μ)
– 0.03
– 0.04
– 0.046
– 0.05
0
2
4
6
8
10
beg
t
en
Опт. упр-е с с параметром равным мат. ожиданию случайной вел-ы

Рисунок 16.

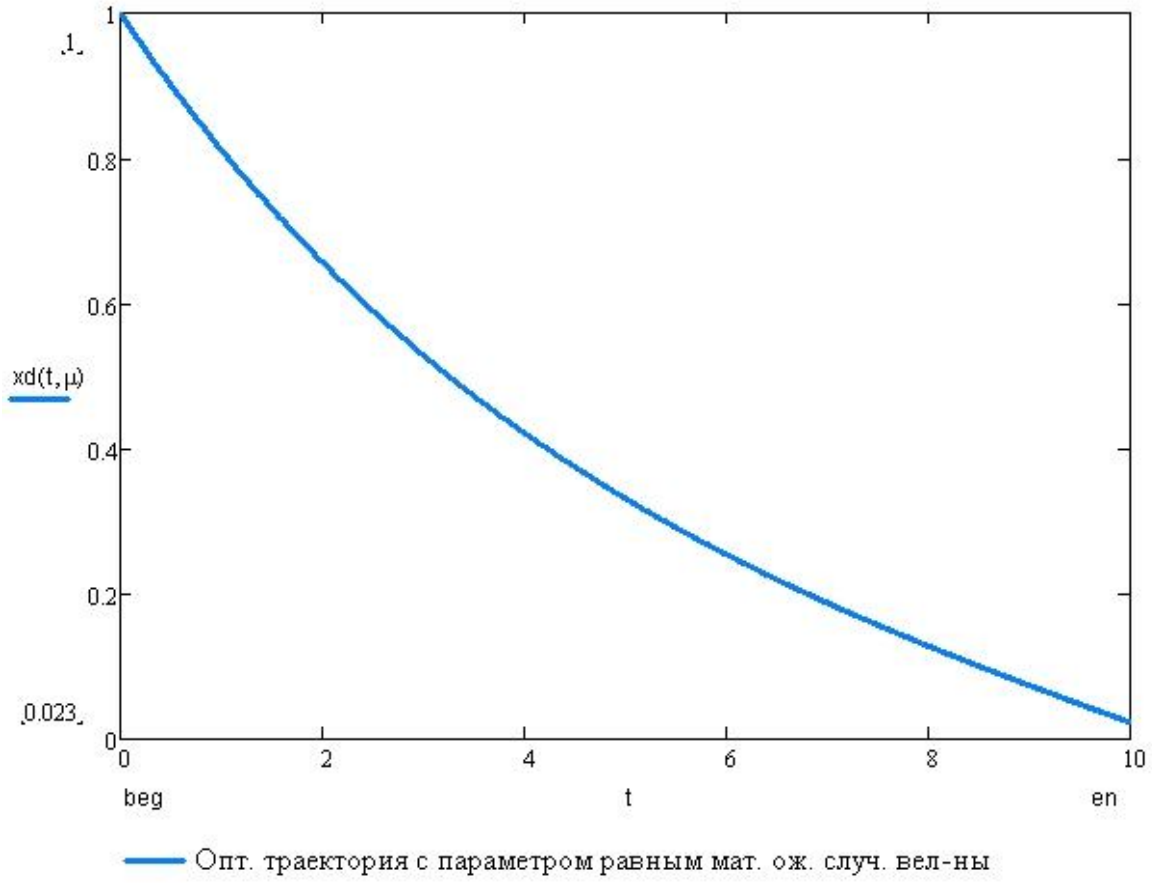


Рисунок 17.

Вычислим значение целевого функционала

$$Id := 0.5 \int_0^{t1} (ud(s, \mu))^2 \, ds + 0.5 \cdot c \cdot (xd(t1, \mu))^2$$

$$Id = 0.0031 .$$

Построим графики математического ожидания оптимального управления Рисунок 18 и математического ожидания фазовой траектории Рисунок 19. Математическое ожидание можно с достаточной точностью вычислить используя формулу (основываясь на «правиле трех сигм»).

$$Mud(t) := \int_{-30 \cdot \sigma}^{30\sigma} ud(t, \tau) \cdot p(\tau) \, d\tau$$

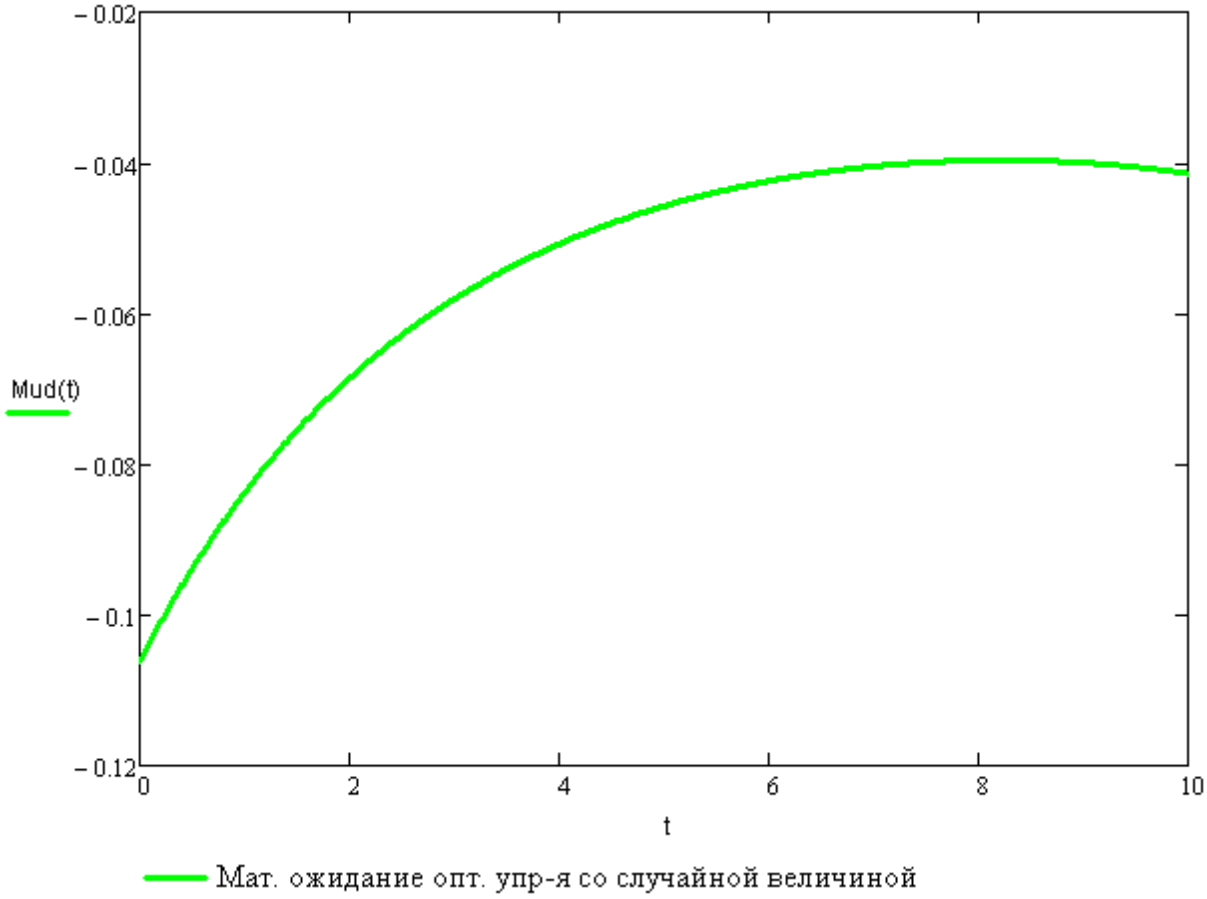

– 0.02
– 0.04
– 0.06
– 0.08
– 0.1
– 0.12
Mud(t)
0
2
4
6
8
10
t
Мат. ожидание опт. упр-я со случайной величиной

Рисунок 18.

Математическое ожидание фазовой траектории вычислим по следующей формуле

$$Mxd(t) := \int_{-30\cdot\sigma}^{30\sigma} xd(t,\tau)\cdot p(\tau)\, d\tau \quad .$$

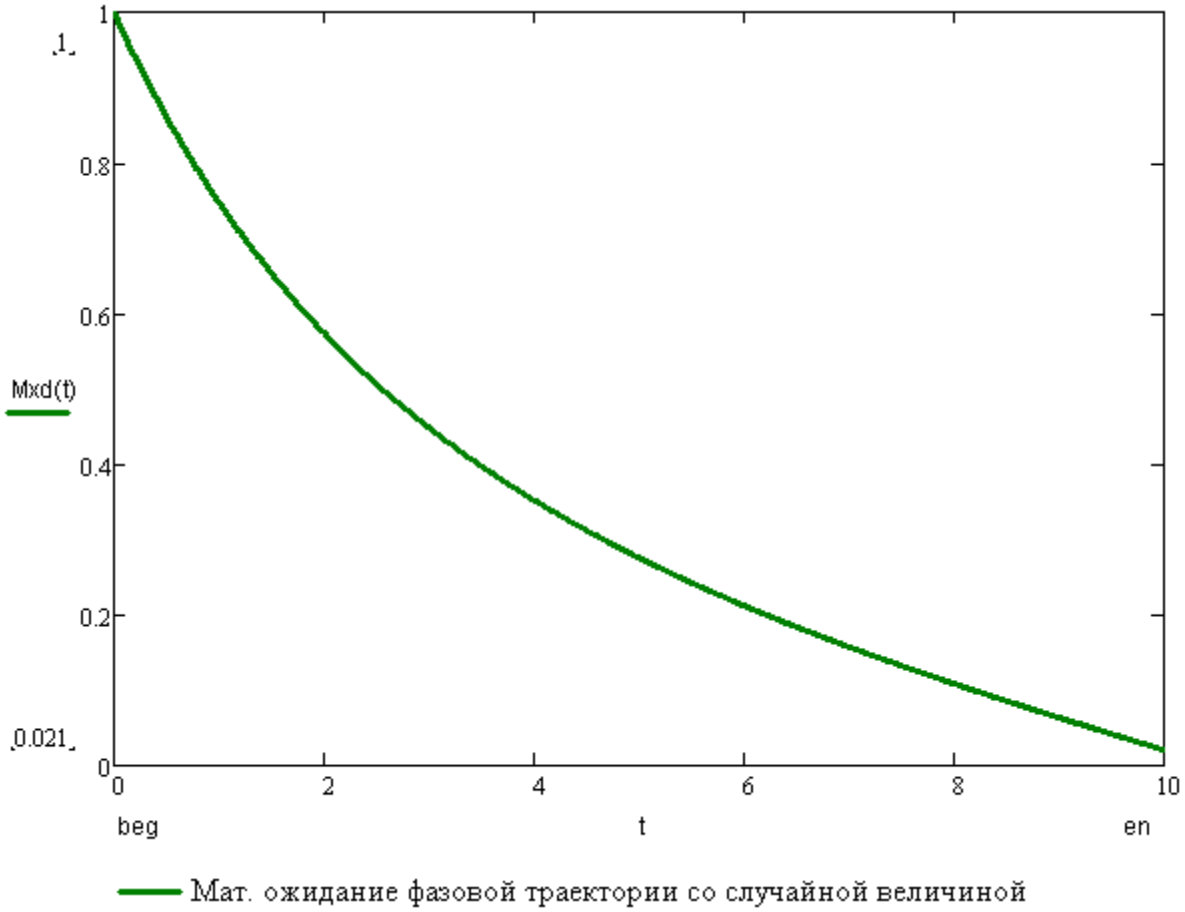


Рисунок 19.

Вычислим значение целевого функционала

$$Imd := 0.5\cdot\int_{0}^{t1} (Mud(s))^2\, ds + 0.5\cdot c\cdot (Mxd(t1))^2 \quad ,$$

$$Imd = 0.01663$$

4 Задача (2.1.4) - (2.1.6) с нормальной случайной величиной

Рассмотрим задачу (2.1.4) – (2.1.6). Воспользуемся формулами (2.1.22) и (2.1.23) с этой целью будем считать, что $\varepsilon(s)$ - гауссовский случайный процесс, заданный характеристическим функционалом

$$\varphi_\varepsilon(u) = e^{i\int_T \overline{\varepsilon(s)}u(s)ds - \frac{1}{2}\iint_{T\,T} b(s_1,s_2)u(s_2)u(s_2)ds_1ds_2},$$

где

$$\overline{\varepsilon(s)} = M\varepsilon(s),$$

$$b(t,s) = M(\varepsilon(t)\varepsilon(s)) - M(\varepsilon(t))M(\varepsilon(s))$$

- ковариационная функция процесса $\varepsilon(s)$. Будем считать, что математическое ожидание $M\varepsilon$ и ковариационная функция $b(t,s) = \sigma^2$ постоянны.

При этом

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi_{a,b}) = e^{i\int_T M\varepsilon(-i\chi(a,b,s))ds - \frac{1}{2}\iint_{T\,T}\sigma^2(-i\chi(a,b,s_1))(-i\chi(a,b,s_2))ds_1ds_2},$$

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi_{a,b}) = e^{iM\varepsilon(-i)(b-a) - \frac{1}{2}\sigma^2(-i)(b-a)(-i)(b-a)},$$

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi_{a,b}) = e^{M\varepsilon(b-a) - \frac{1}{2}\sigma^2(-i)(-i)(b-a)^2},$$

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi_{a,b}) = e^{M\varepsilon(b-a) + \frac{1}{2}\sigma^2(b-a)^2},$$

тогда формула (2.1.20) примет вид

$$Mx(t) = x_0 e^{M\varepsilon t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + \int_0^t e^{M\varepsilon(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)^2} Mu(s)ds$$

проведем расчеты в среде Mathcad, построим графики математического ожидания оптимального управления на Рисунке 20 и математического ожидания фазовой траектории на Рисунке 21

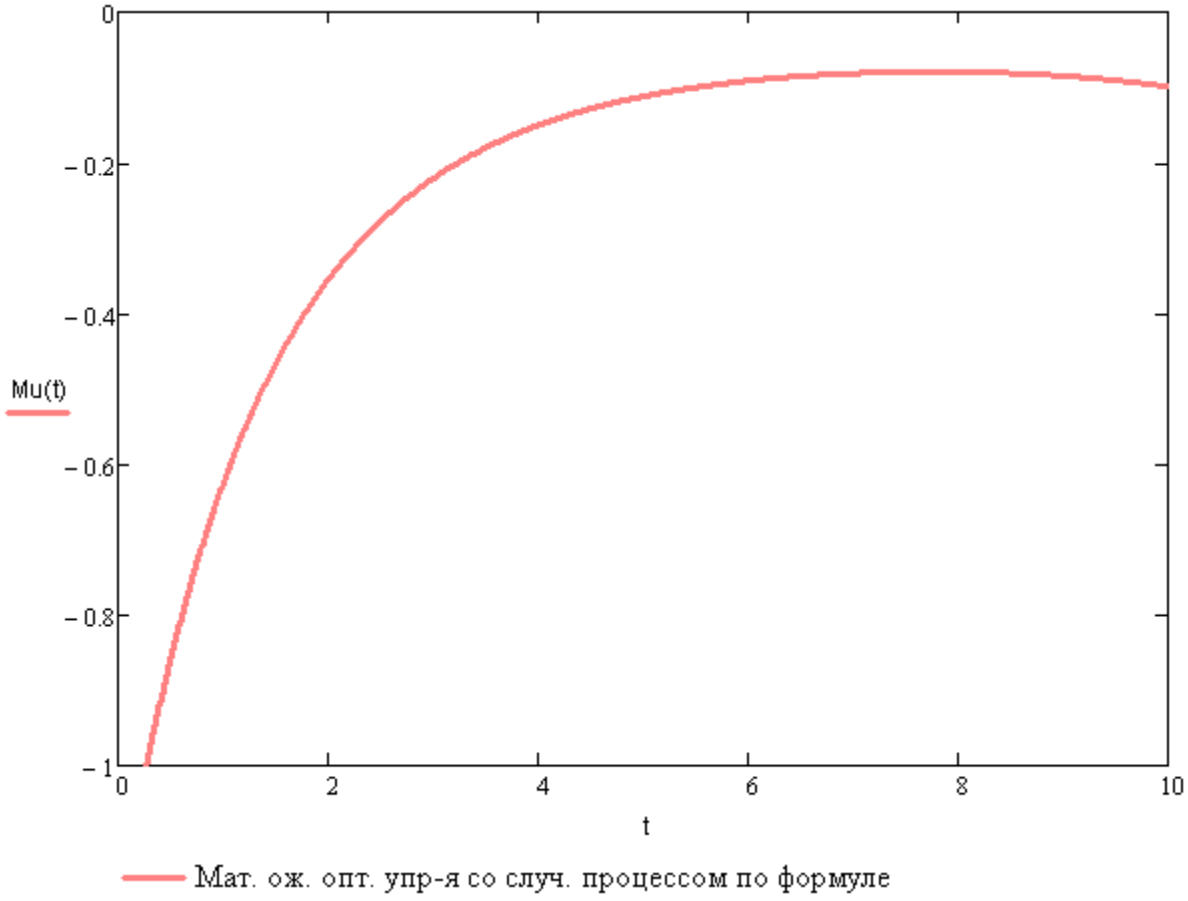

0
– 0.2
– 0.4
– 0.6
– 0.8
– 1
Mu(t)
0
2
4
6
8
10
t
Мат. ож. опт. упр-я со случ. процессом по формуле

Рисунок 20.

Формула для математического ожидания фазовой траектории в среде Mathcad выглядит следующим образом

$$Mx(t) := x0 \cdot phi(0, t) + \int_0^t phi(s, t) \cdot Mu(s)\, ds$$

.

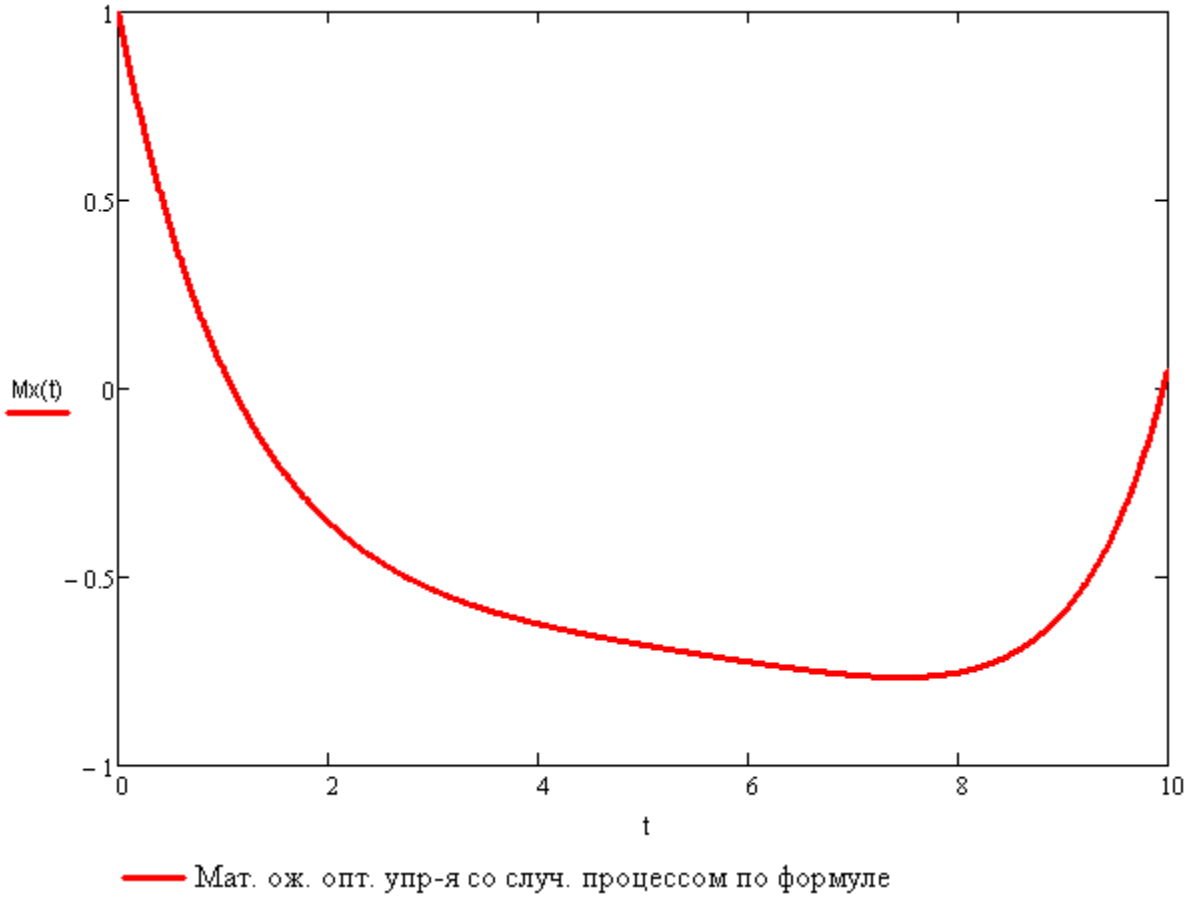


Рисунок 21.

Значение целевого функционала

$$I := 0.5 \int_0^{t1} (Mu(s))^2\, ds + 0.5 c \cdot (Mx(t1))^2$$

$$I = 0.6032$$

Изобразим все графики управлений задач на одном Рисунке 22

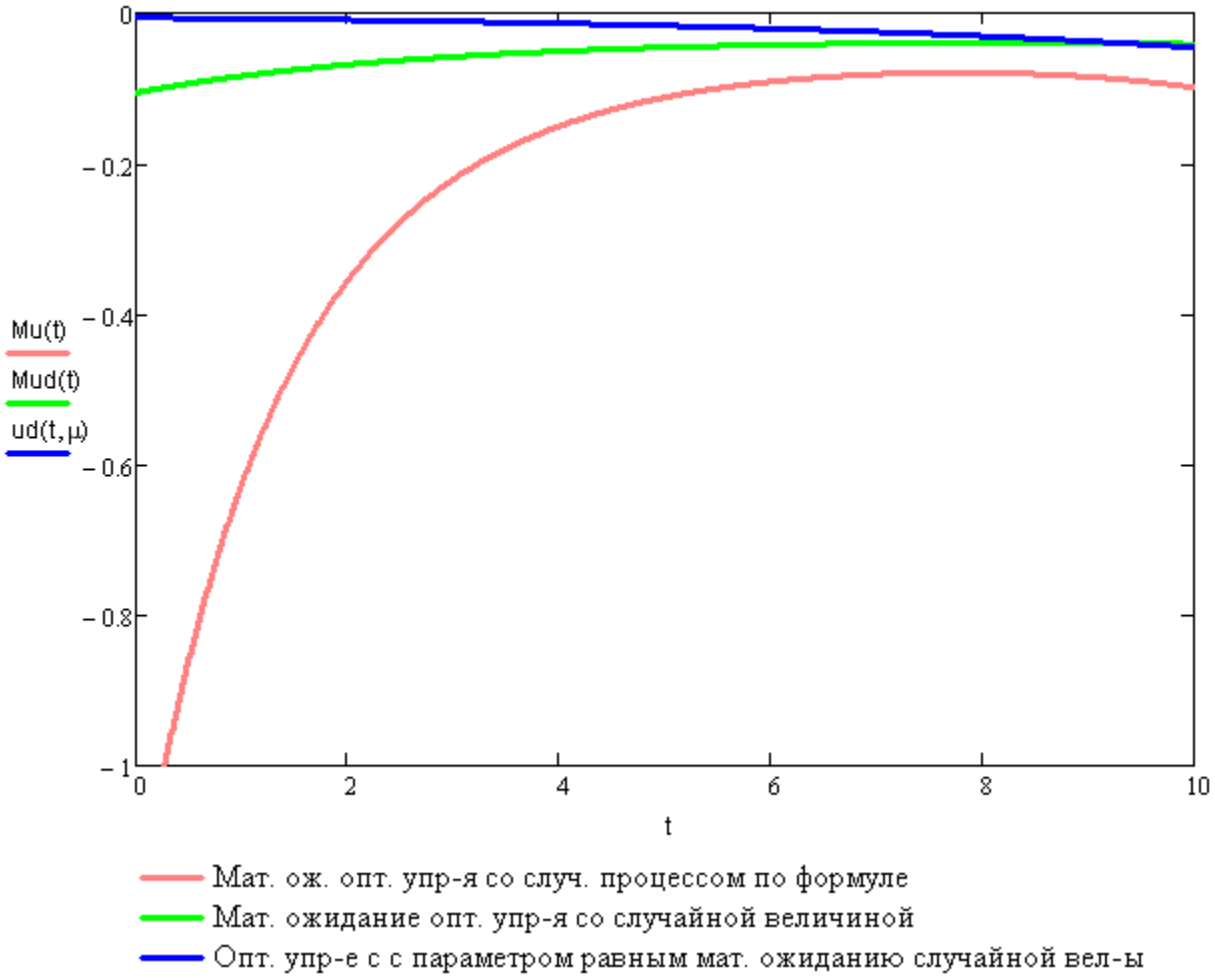


Рисунок 22.

Изобразим все траектории на одном Рисунке 23.

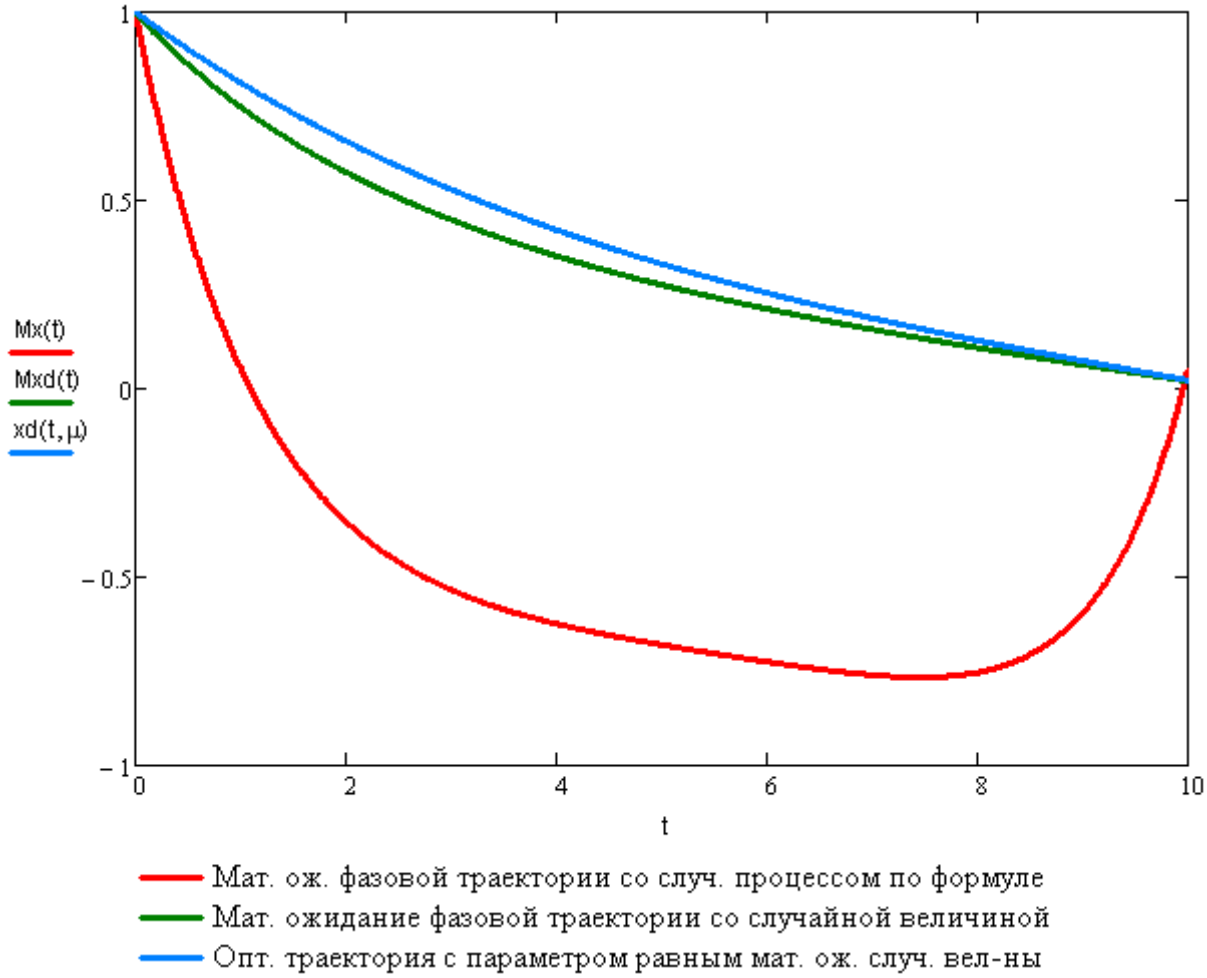


Рисунок 23.

Мы рассмотрели три разных задачи.

4. Задачу (2.1.14) - (2.1.16), когда в качестве случайной величины в формулы (2.1.17) и (2.1.18) подставить ее математическое ожидание.
5. Задачу (2.1.14) - (2.1.16) с нормально распределенной случайной величиной.
6. Задачу (2.1.4) - (2.1.6) с нормально распределенной случайной величиной.

получены выражения для оптимального управления и оптимальной траектории, вычислены значения целевых функционалов.

Первая задача – это детерминированная задача, однако полученные формулы позволяют выписать математические ожидания оптимального управления и фазовой траектории.

Во второй задаче мы показываем, что математические ожидания оптимального управления и фазовой траектории можно вычислить при помощи пакета прикладных программ.

В третьей задаче мы рассматриваем критерий качества, который зависит от квадратов математических ожиданий управления и фазовой траектории.

5 Задача с равномерной случайной величиной

Сначала рассмотрим задачу (2.1.14) - (2.1.16) со случайной величиной. Предположим, что случайная величина распределена по равномерному закону распределения на отрезке $[-1, 0.6]$, где $a = -1,\ b = 0.6$.

Математическое ожидание $\mu = -0.2$

Дисперсия $\sigma = 0.213(3)$

В ходе предыдущих расчетов была получена формула (2.1.17) для оптимального управления и формула (2.1.18) для фазовой траектории через реализации случайной величины для задачи (2.1.14) - (2.1.16)

$$u(t) = \frac{-2\varepsilon c x_0 e^{2\varepsilon t_1 - \varepsilon t}}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)},$$

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t} + \frac{c x_0 e^{2\varepsilon t_1 + \varepsilon t} \cdot (e^{-2\varepsilon t} - 1)}{2\varepsilon - c e^{2\varepsilon t_1}(e^{-2\varepsilon t_1} - 1)}.$$

Графики оптимального управления и фазовой траектории, в случае если в качестве случайной величины в формулы (2.1.17) и (2.1.18) подставить ее математическое ожидание выглядят следующим образом Рисунок 24 и Рисунок 25.

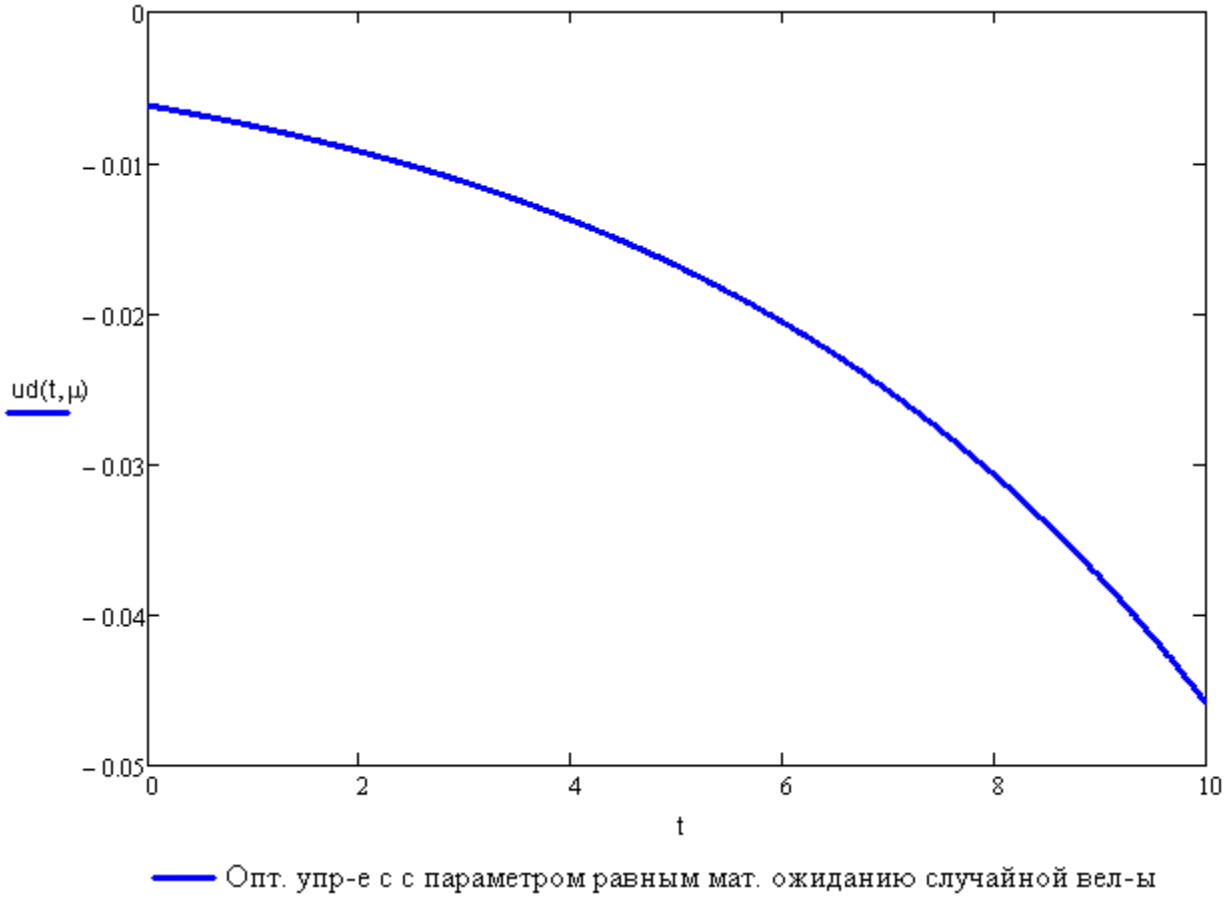

0
– 0.01
– 0.02
– 0.03
– 0.04
– 0.05
ud(t, μ)
0
2
4
6
8
10
t
Опт. упр-е с с параметром равным мат. ожиданию случайной вел-ы

Рисунок 24.

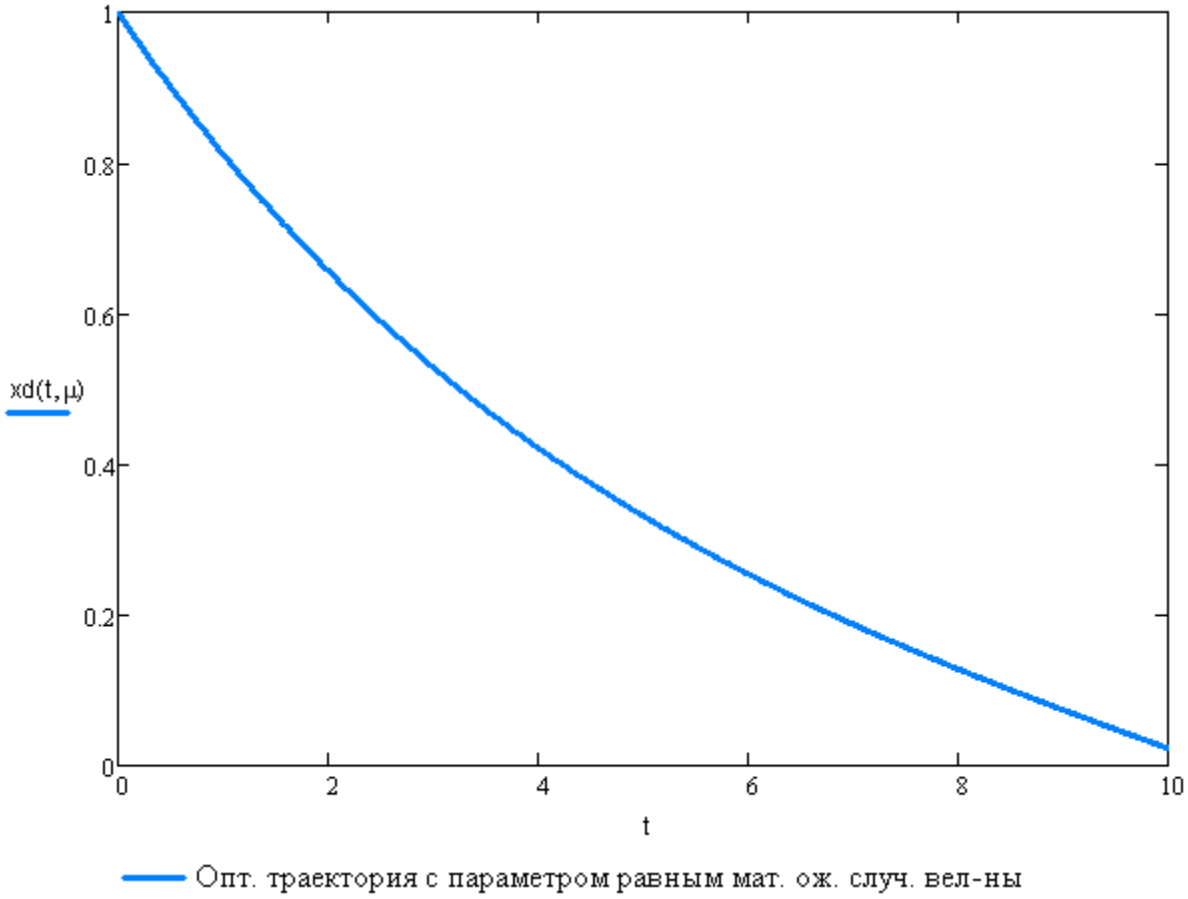


Рисунок 25.

При этом значение целевой функции

$$Id := 0.5 \int_0^{t1} (ud(s, \mu))^2 \, ds + 0.5 \cdot c \cdot (xd(t1, \mu))^2$$

$$Id = 0.0031$$

Построим графики математического ожидания фазовой траектории Рисунок 26 и математического ожидания оптимального управления Рисунок 27.

$$Mud(t) := \int_a^b ud(t, \tau) \cdot p(\tau) \, d\tau$$

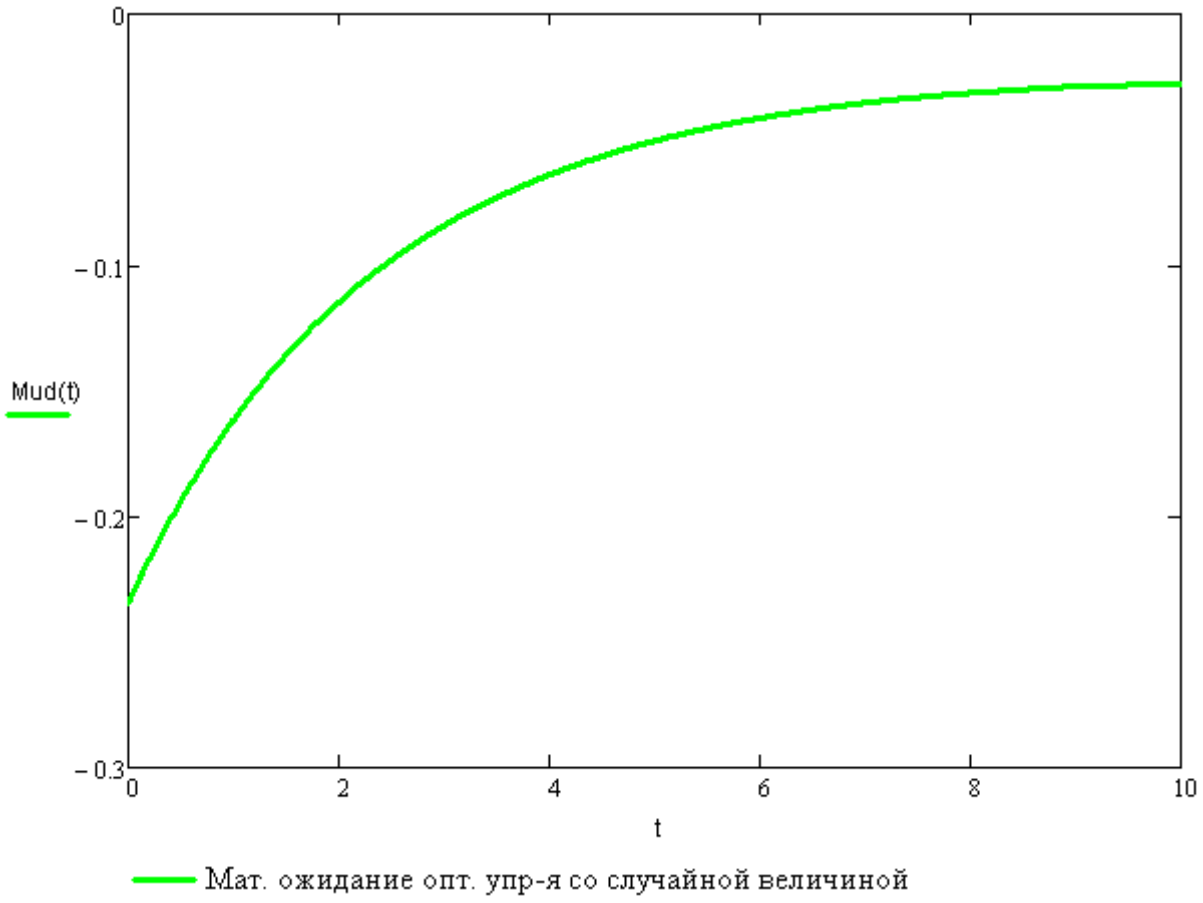


Рисунок 26.

$$Mxd(t) := \int_a^b xd(t,\tau)\cdot p(\tau)\,d\tau$$

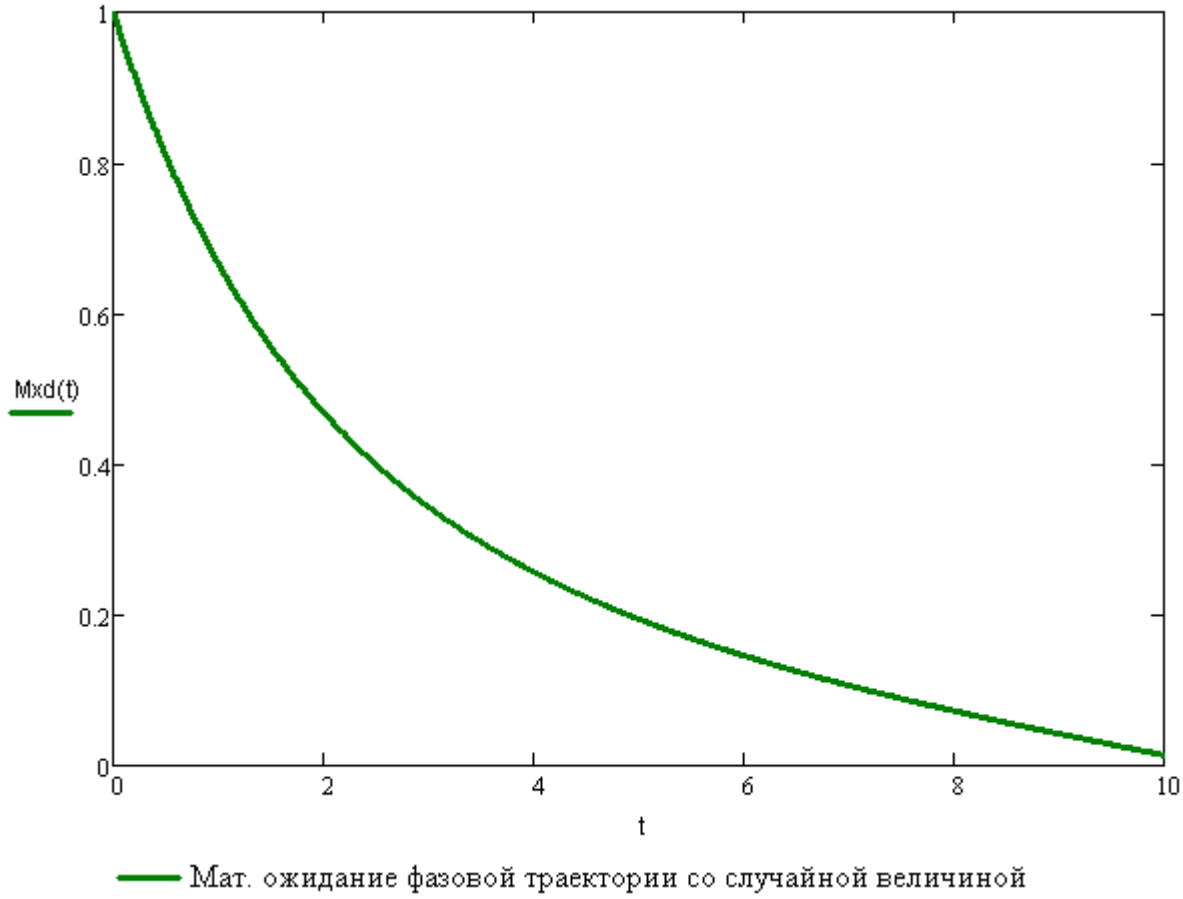


Рисунок 27.

Функция цели

$$Imd := 0.5 \int_0^{t1} (Mud(s))^2 ds + 0.5 c \cdot (Mxd(t1))^2$$

$$Imd = 0.04136$$

Рассмотрим задачу (2.1.4) – (2.1.6). Пусть $\varepsilon(s)$ - равномерный случайный процесс, заданный характеристическим функционалом

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{\sin(\int_T a(s)u(s)ds)}{\int_T a(s)u(s)ds} e^{i\int_T b(s)u(s)ds},$$

где $a(s) \geq 0$, $b(s) = M\varepsilon(s)$,

тогда

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi_{a,b}(t)) = \frac{\sin(-i\int_a^b a(s)ds)}{-i\int_a^b a(s)ds} e^{-i\cdot i\int_a^b b(s)ds},$$

получим

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi_{a,b}(t)) = \frac{\sin(-i\int_a^b a(s)ds)}{-i\int_a^b a(s)ds} e^{\int_a^b b(s)ds}.$$

Изобразим графики оптимального управления и математического ожидания фазовой траектории используя формулы (2.1.22) и (2.1.23).

Расчеты будем вести в среде Mathcad.

Введем обозначения $a(s) = aotkl(s)$, $b(s) = bmatozh(s)$

и возьмем следующие значения в качестве примера

$a(s) = 0.8, b(s) = 0.213(3)$

$$phi(a,b) := \left[\frac{\left(\sin\left(-i\cdot\int_a^b aotkl(z)\,dz\right)\right)}{-i\cdot\int_a^b aotkl(z)\,dz}\right]\cdot e^{\left(\int_a^b bmatozh(z)\,dz\right)}$$

$$Mu(s) := \frac{(-c\cdot x0\cdot phi(0,t1)\cdot phi(s,t1))}{\left(1+\int_0^{t1} c\cdot phi(s,t1)\cdot phi(s,t1)\,ds\right)}.$$

График математического ожидания управления представлен на Рисунке 28.

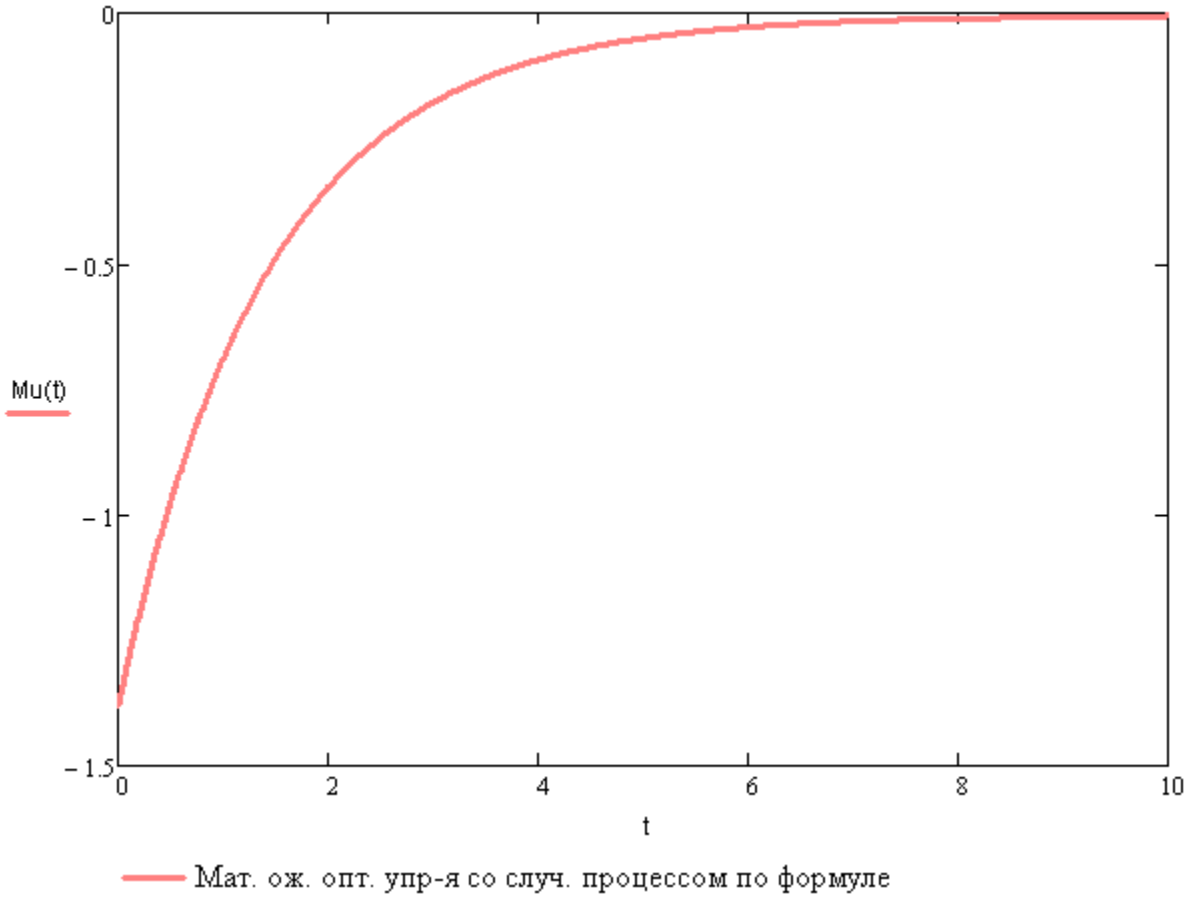


Рисунок 28.

Математическое ожидание фазовой траектории

$$Mx(t) := x0 \cdot phi(0, t) + \int_0^t phi(s, t) \cdot Mu(s)\, ds$$

График математического ожидания фазовой траектории представлен на Рисунке 29.

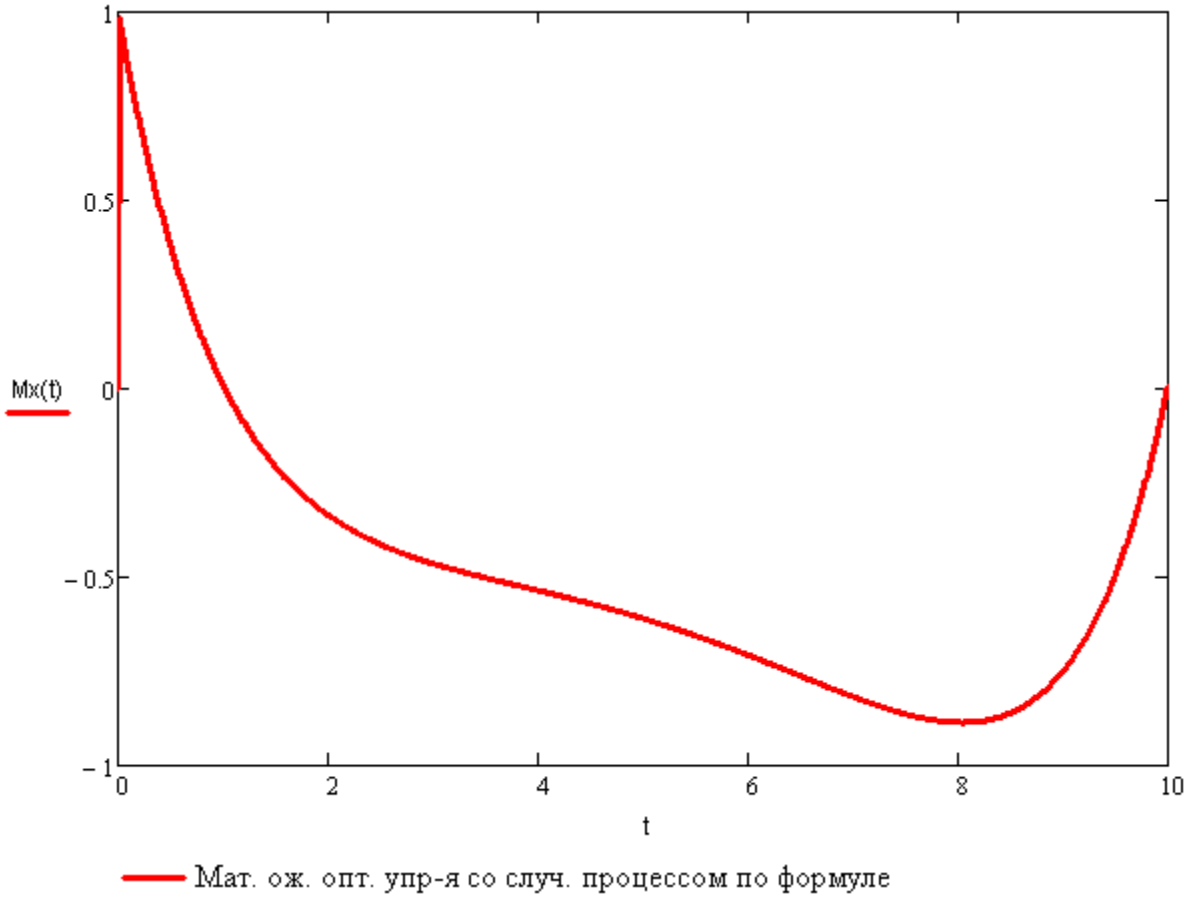


Рисунок 29.

Значение целевого функционала

$$I := 0.5 \cdot \int_0^{t1} (Mu(s))^2\, ds + 0.5 \cdot c \cdot (Mx(t1))^2$$

$$I = 0.6032$$

Изобразим все графики управлений на одном Рисунке 30

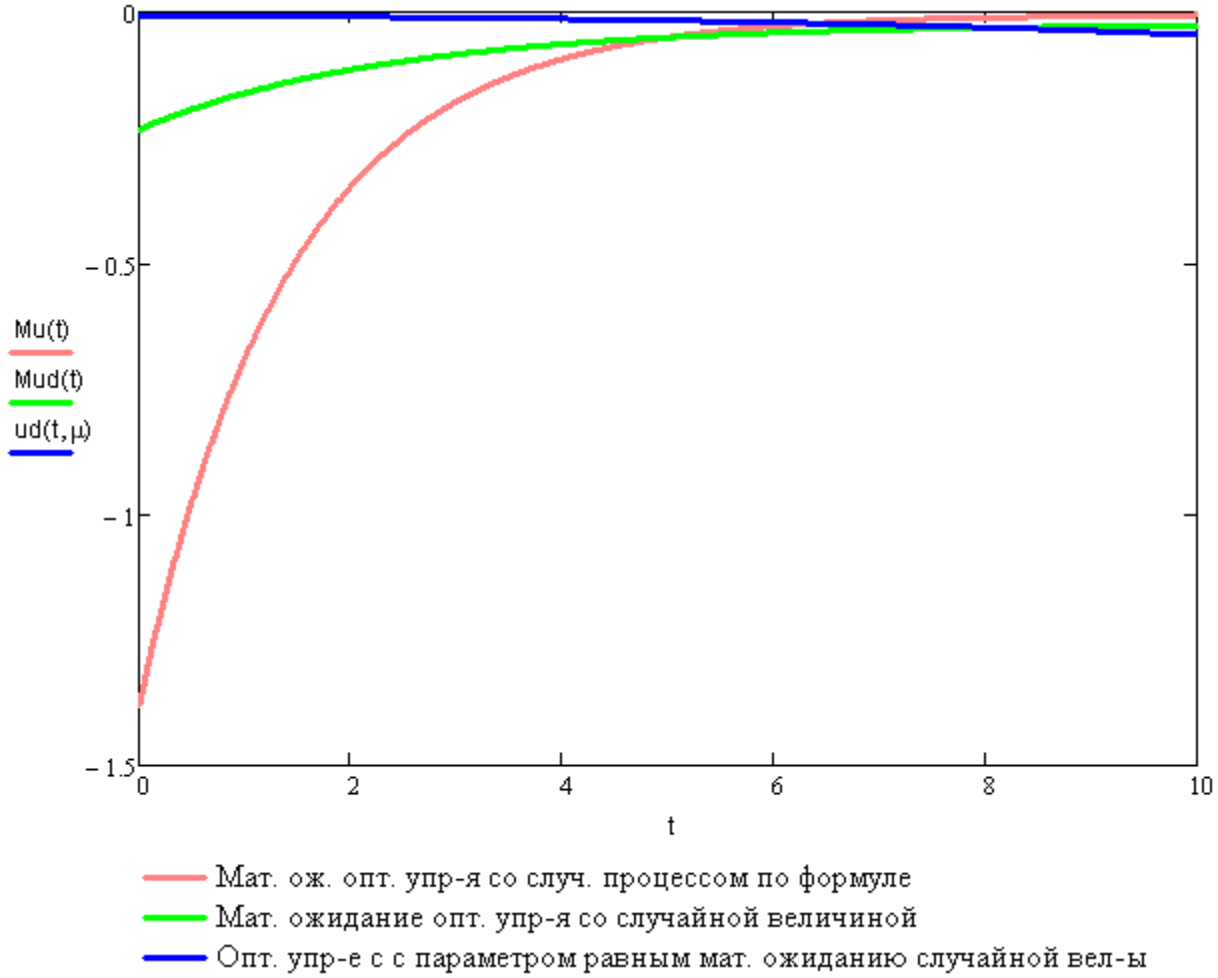


Рисунок 30.

Все фазовые траектории на одном Рисунке 31

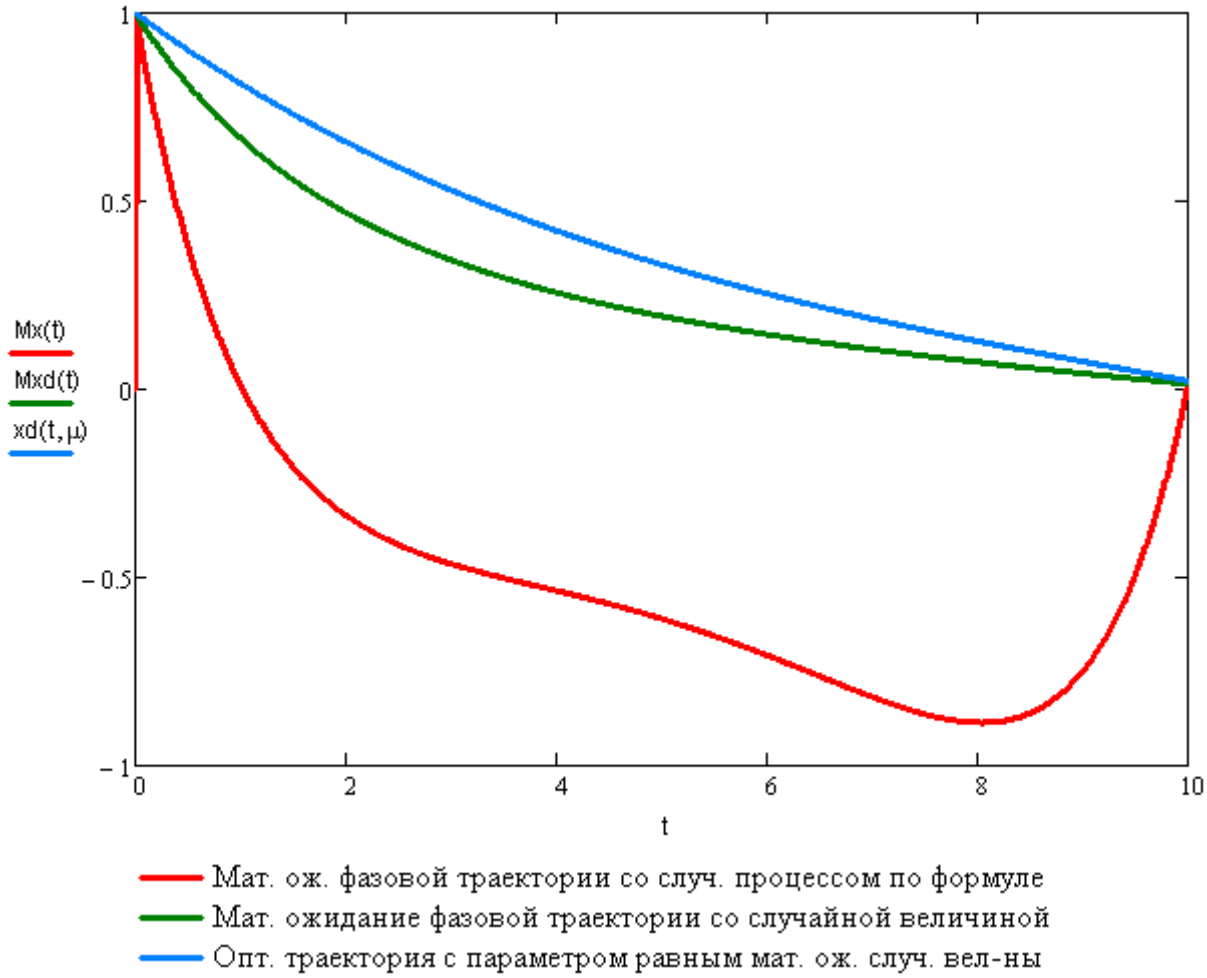


Рисунок 31.

Таким образом, мы рассмотрели три следующих задачи

1. Задачу (2.1.14) - (2.1.16), когда в качестве равномерной случайной величины в формулы (2.1.17) и (2.1.18) подставить ее математическое ожидание.
2. Задачу (2.1.14) - (2.1.16) с равномерно распределенной случайной величиной.
3. Задачу (2.1.4) - (2.1.6) с равномерно распределенной случайной величиной.

получены выражения для оптимального управления и оптимальной траектории, вычислены значения целевых функционалов.

Первая задача – это детерминированная задача, однако полученные формулы позволяют выписать математические ожидания оптимального управления и фазовой траектории.

Во второй задаче мы показываем, что математические ожидания оптимального управления и фазовой траектории можно вычислить при помощи пакета прикладных программ.

В третьей задаче мы рассматриваем критерий качества, который зависит от квадратов математических ожиданий управления и фазовой траектории.

6 Случайный процесс с двумя реализациями

Вернёмся к задаче (2.1.1) – (2.1.3).

$$\widehat{J}\big(x(t),u(t)\big)=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2(s)ds+\frac{1}{2}c\cdot x^2(t_1)\to\inf\,, \tag{2.1.1}$$

$$x(0)=x_0\,, \tag{2.1.2}$$

$$\dot{x}(t)=\varepsilon(t)x+u(t)\,. \tag{2.1.3}$$

Рассмотрим следующий случайный процесс $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}ep(t),\text{с вероятностью } p,\\ eq(t),\text{с вероятностью } q=1-p.\end{cases}$$

К примеру, возьмем

$ep(s) := \sin(s)$ $\quad$ $eq(s) := \cos(s)$

$p := 0.5$ $\quad$ $q := 0.5$

Среднее значение имеет вид

$$M\varepsilon(t)=ep(t)\cdot p+eq(t)\cdot q\,. \tag{2.1.24}$$

В ходе предыдущих расчетов были получены формулы для оптимального управления (2.1.10) и оптимальной фазовой траектории (2.1.11) для случайного процесса

$$u(t)=\frac{-cx_0e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}e^{\int_t^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}}{1+c\int_0^{t_1}e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}ds}\,, \tag{2.1.10}$$

$$x(t)=x_0e^{\int_0^{t}\varepsilon(\tau)d\tau}-\int_0^{t}\frac{cx_0e^{\int_s^{t}\varepsilon(\tau)d\tau}e^{\int_0^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}e^{\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}}{1+c\int_0^{t_1}e^{2\int_s^{t_1}\varepsilon(\tau)d\tau}ds}ds \tag{2.1.11}$$

1. Построим графики оптимального управления Рисунок 32 и фазовой траектории Рисунок 33, в качестве случайного процесса подставив его математическое ожидание (т. е. вместо случайного процесса рассмотрим функцию равную математическому ожиданию случайного процесса).

$$\mu(s) := ep(s)\cdot p + eq(s)\cdot q$$

$$\varepsilon(\tau) := \mu(\tau)$$

$$ud(t) := \frac{\left(-c\cdot x0\, e^{\int_0^{t1}\varepsilon(\tau)\,d\tau}\cdot e^{\int_t^{t1}\varepsilon(\tau)\,d\tau}\right)}{\left(1 + c\cdot\int_0^{t1} e^{2\cdot\int_s^{t1}\varepsilon(\tau)\,d\tau}\,ds\right)}$$

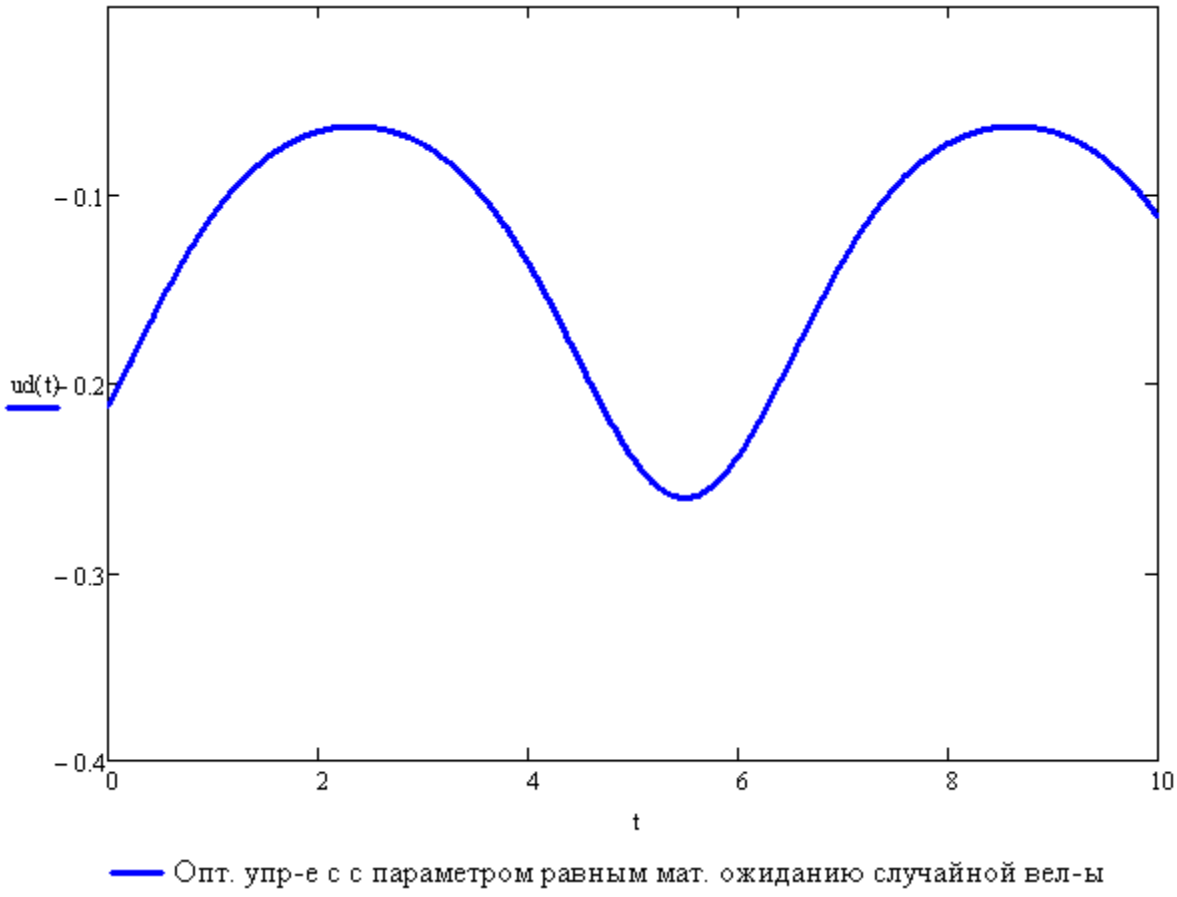


Рисунок 33.

Фазовая траектория в случае, если мы будем решать детерминированную задачу - с математическим ожиданием случайного процесса изображена на Рисунок 34.

$$xd(t) := x0\, e^{\int_0^t \mu(\tau)\, d\tau} + \int_0^t e^{\left(\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau\right)} \cdot ud(s)\, ds$$

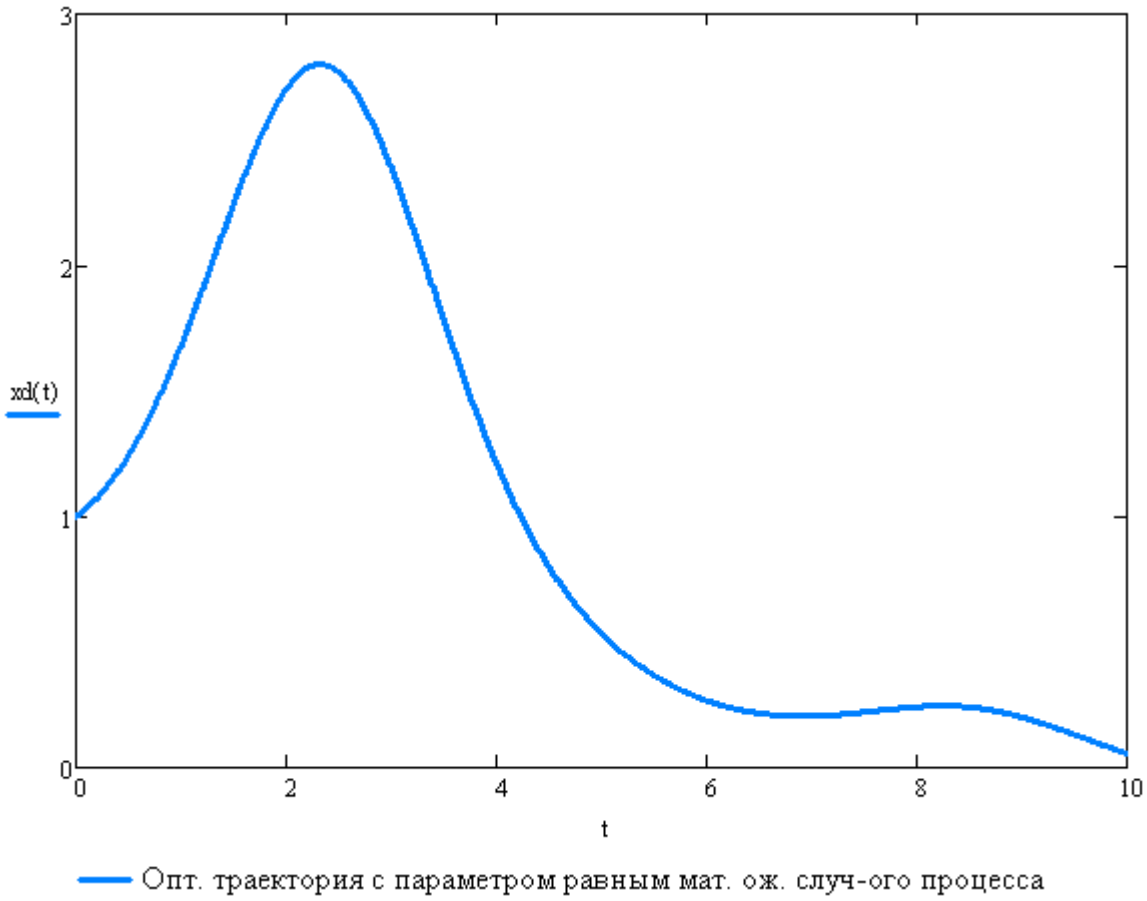


Рисунок 34.

Функция цели

$$Id := 0.5 \int_0^{t1} (ud(s))^2\, ds + 0.5c \cdot (xd(t1))^2$$

$$Id = 0.106$$

2. Используя выражения для оптимального управления и оптимальной фазовой траектории задачи (2.1.1) - (2.1.3), построим графики математического ожидания оптимального управления Рисунок 35 и математического ожидания фазовой траектории Рисунок 34.

Математическое ожидание управления вычисляется по формуле

$$Mud(t) := ud_ep(t)\cdot p + ud_eq(t)\cdot q,$$

где

$$ud_ep(t) := \frac{\left(-c\cdot x0\, e^{\int_0^{t1} ep(\tau)\,d\tau} \cdot e^{\int_t^{t1} ep(\tau)\,d\tau}\right)}{\left(1 + c\cdot \int_0^{t1} e^{2\cdot \int_s^{t1} ep(\tau)\,d\tau}\, ds\right)},$$

$$ud_eq(t) := \frac{\left(-c\cdot x0\, e^{\int_0^{t1} eq(\tau)\,d\tau} \cdot e^{\int_t^{t1} eq(\tau)\,d\tau}\right)}{\left(1 + c\cdot \int_0^{t1} e^{2\cdot \int_s^{t1} eq(\tau)\,d\tau}\, ds\right)}.$$

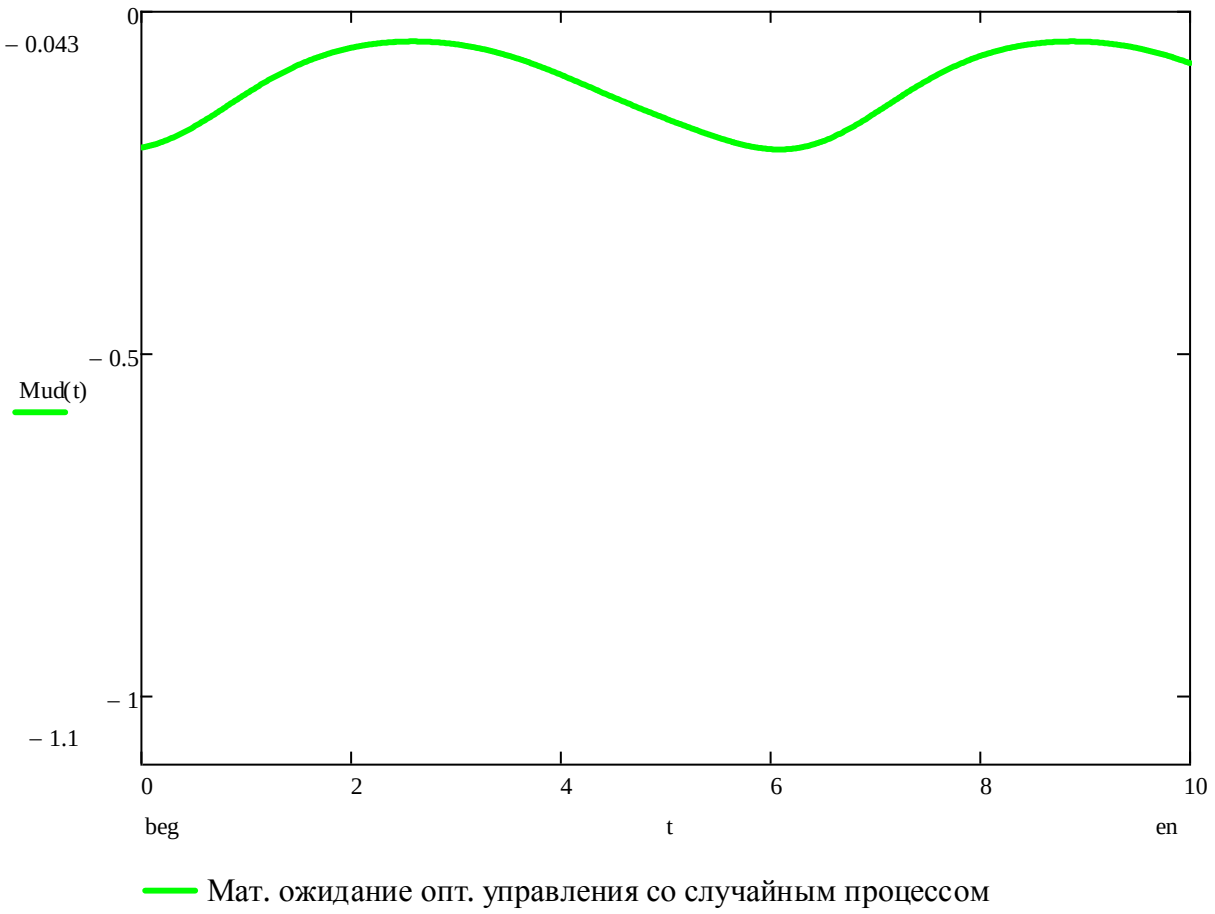


Рисунок 35.

Найдем математическое ожидание фазовой траектории.

$$Mxd(t) := xd_ep(t)\cdot p + xd_eq(t)\cdot q,$$

где

$$xd_ep(t) := x0\, e^{\int_0^t ep(\tau)\,d\tau} + \int_0^t e^{\left(\int_s^t ep(\tau)\,d\tau\right)}\cdot ud_ep(s)\,ds,$$

$$xd_eq(t) := x0\, e^{\int_0^t eq(\tau)\,d\tau} + \int_0^t e^{\left(\int_s^t eq(\tau)\,d\tau\right)}\cdot ud_eq(s)\,ds.$$

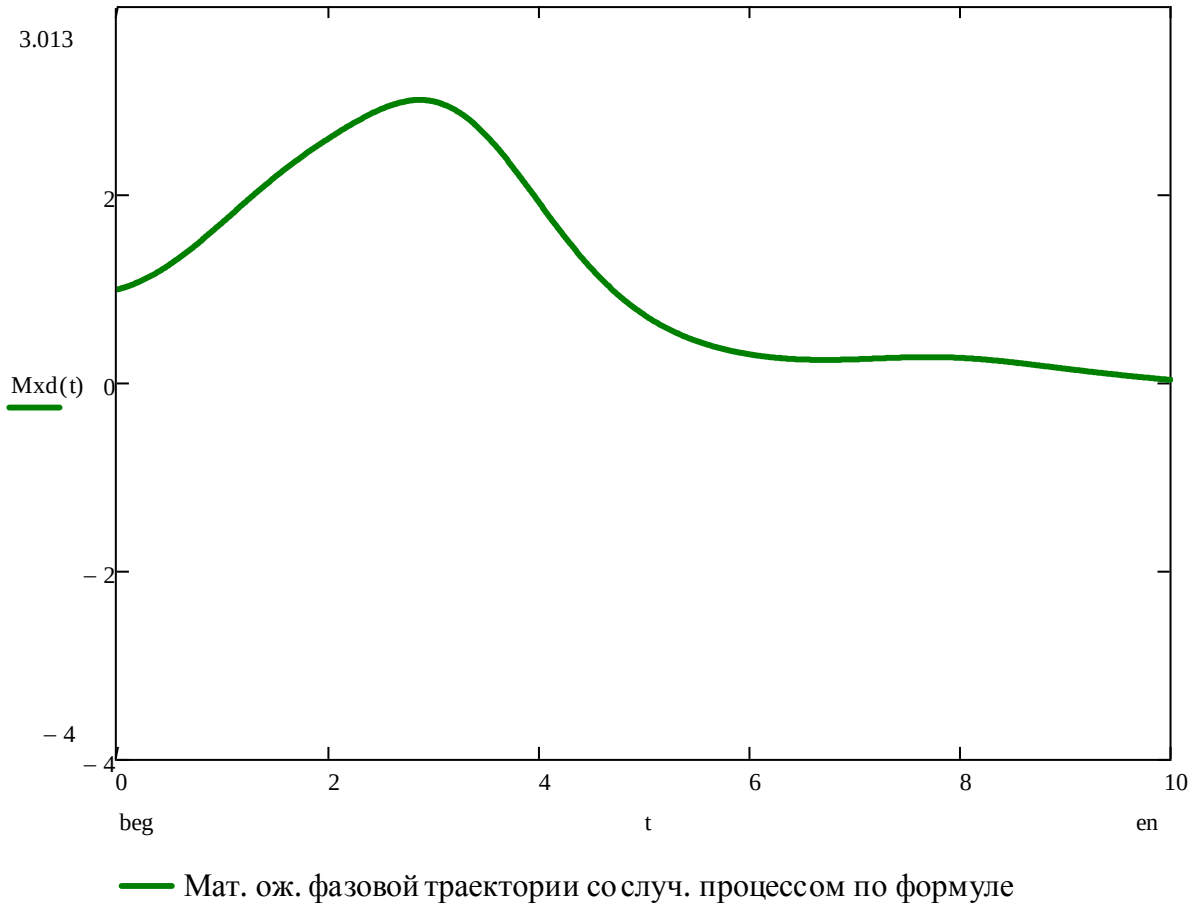


Рисунок 36.

Заметим, что на практике обычно вычисляют значение критерия качества (2.1.4) зависящего от математического ожидания управления и фазовой траектории. Поэтому подставим полученные выражения в критерий качества, вообще говоря, от другой задачи (2.1.4) - (2.1.6)

$$Imd := 0.5\int_0^{t1} (Mud(s))^2 ds + 0.5c\cdot(Mxd(t1))^2$$

$$Imd = 0.072$$

3. Рассмотрим задачу (2.1.4) – (2.1.6).

Характеристический функционал процесса $\varepsilon(s)$ выглядит следующим образом

$$\varphi_\varepsilon(u) = M(e^{i\int_T \varepsilon(s)\cdot u(s)ds}) = e^{i\cdot\int_T ep(s)\cdot u(s)ds} p + e^{i\cdot\int_T eq(s)\cdot u(s)ds} q,$$

тогда

$$\varphi_{\varepsilon}(-i\chi_{a,b}) = e^{\int_T ep(s)ds} p + e^{\int_T eq(s)ds} q.$$

Используя формулу (2.1.22) для математического ожидания управления и формулу (2.1.23) для математического ожидания фазовой траектории выполним расчеты соответствующих функций и изобразим графики математического ожидания фазовой траектории Рисунок 37 и математического ожидания фазовой траектории Рисунок 38.

Выполним расчеты в среде Mathcad

$$Mu(s) := \frac{(-c \cdot x0 \cdot phi(0, t1) \cdot phi(s, t1))}{\left(1 + \int_0^{t1} c \cdot phi(s, t1) \cdot phi(s, t1)\, ds\right)}$$

$$phi(a, b) := e^{\int_a^b ep(s)\, ds} \cdot p + e^{\int_a^b eq(s)\, ds} \cdot q,$$

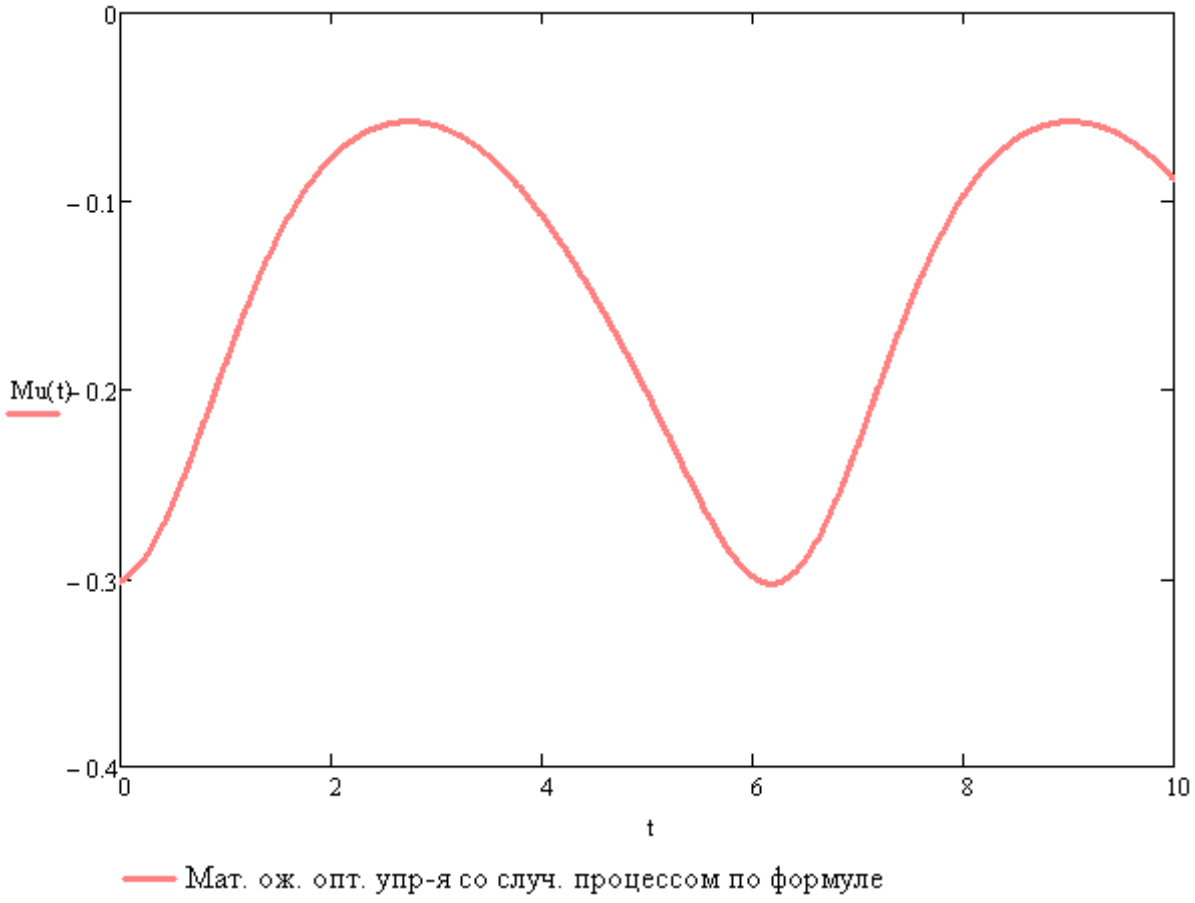


Рисунок 37.

$$Mx(t) := x0 \cdot phi(0, t) + \int_0^t phi(s, t) \cdot Mu(s)\, ds$$

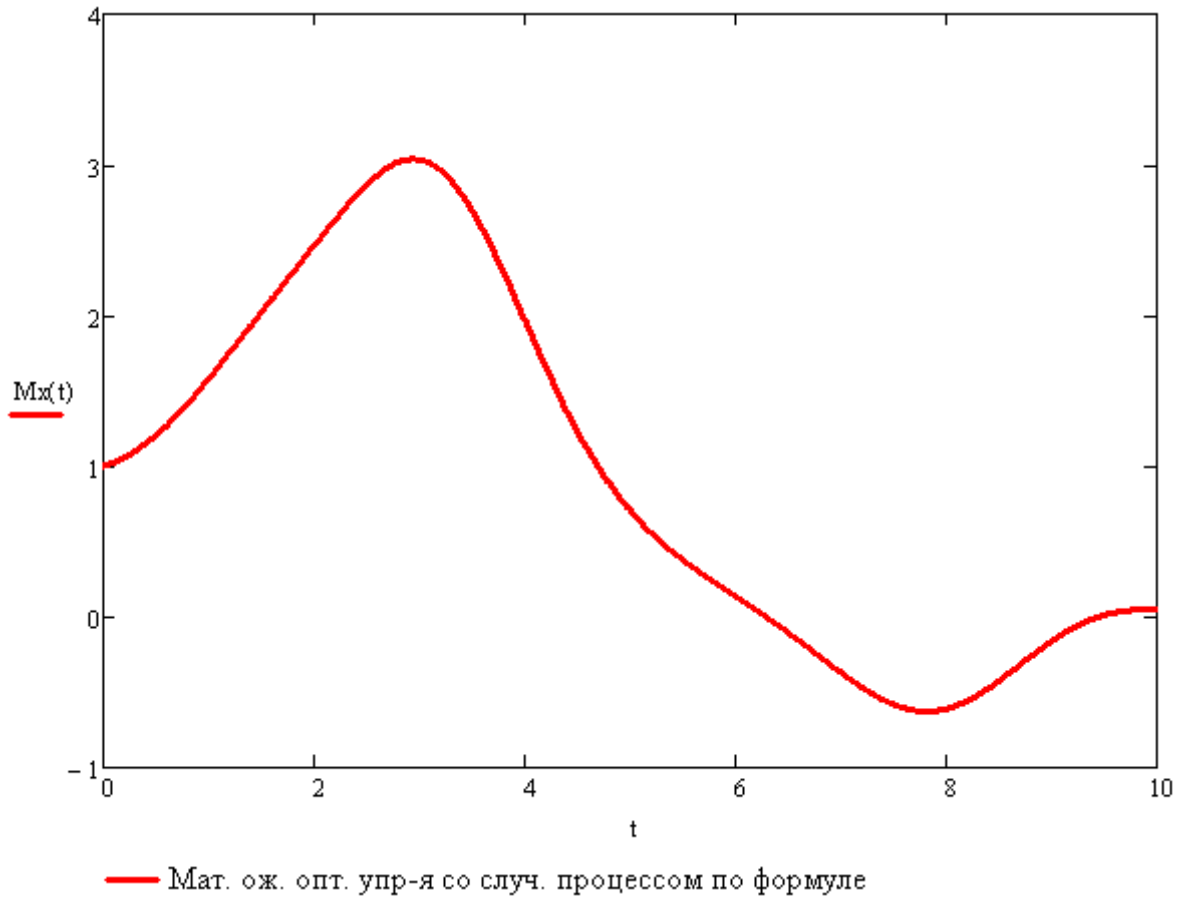


Рисунок 38.

Вычислим значение целевого функционала

$$I := 0.5 \int_0^{t1} (Mu(s))^2\, ds + 0.5c \cdot (Mx(t1))^2$$

$$I = 0.151$$

Изобразим все графики управлений на одном Рисунке 39

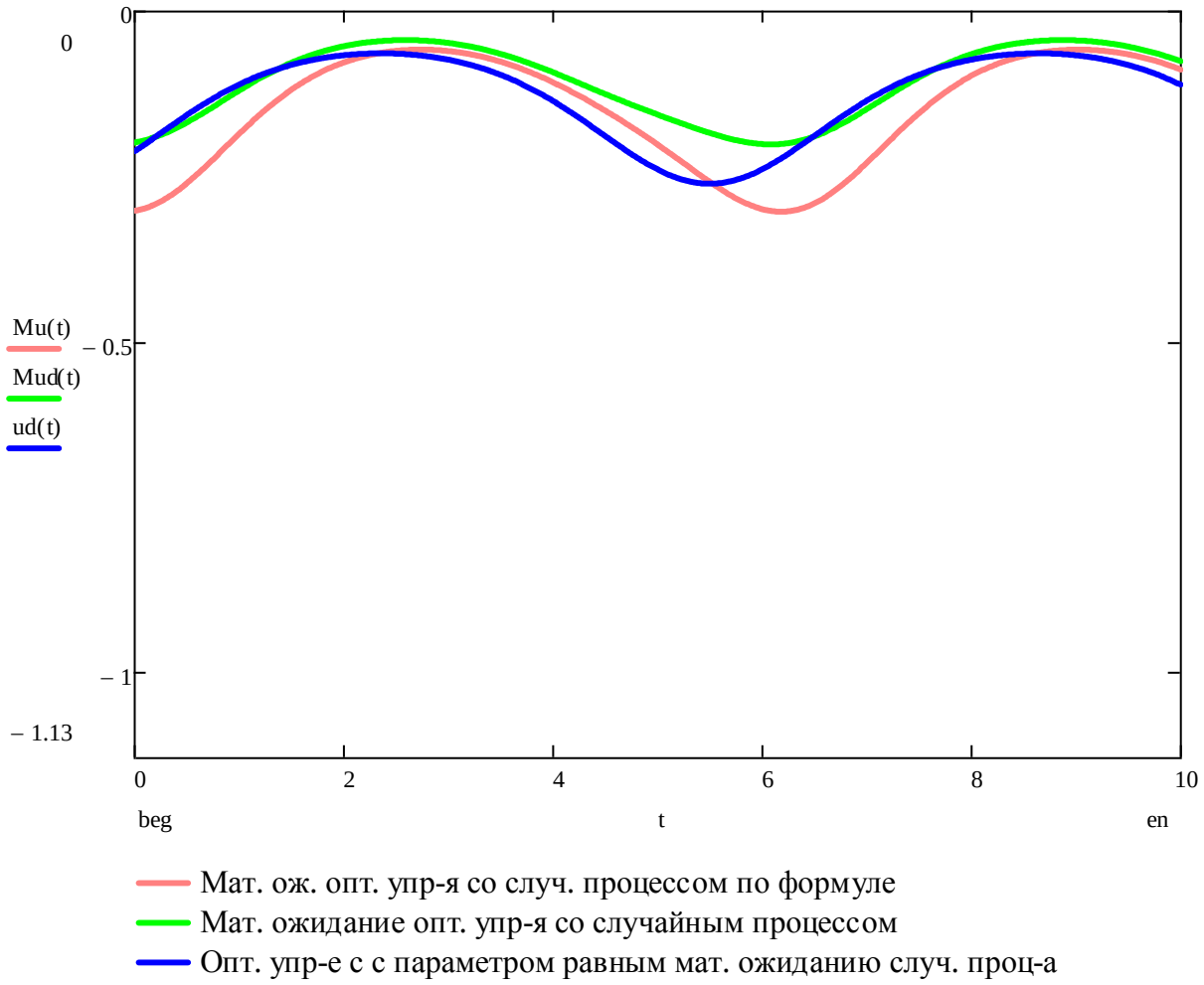


Рисунок 39.

Все фазовые траектории на одном рисунке, Рисунок 40

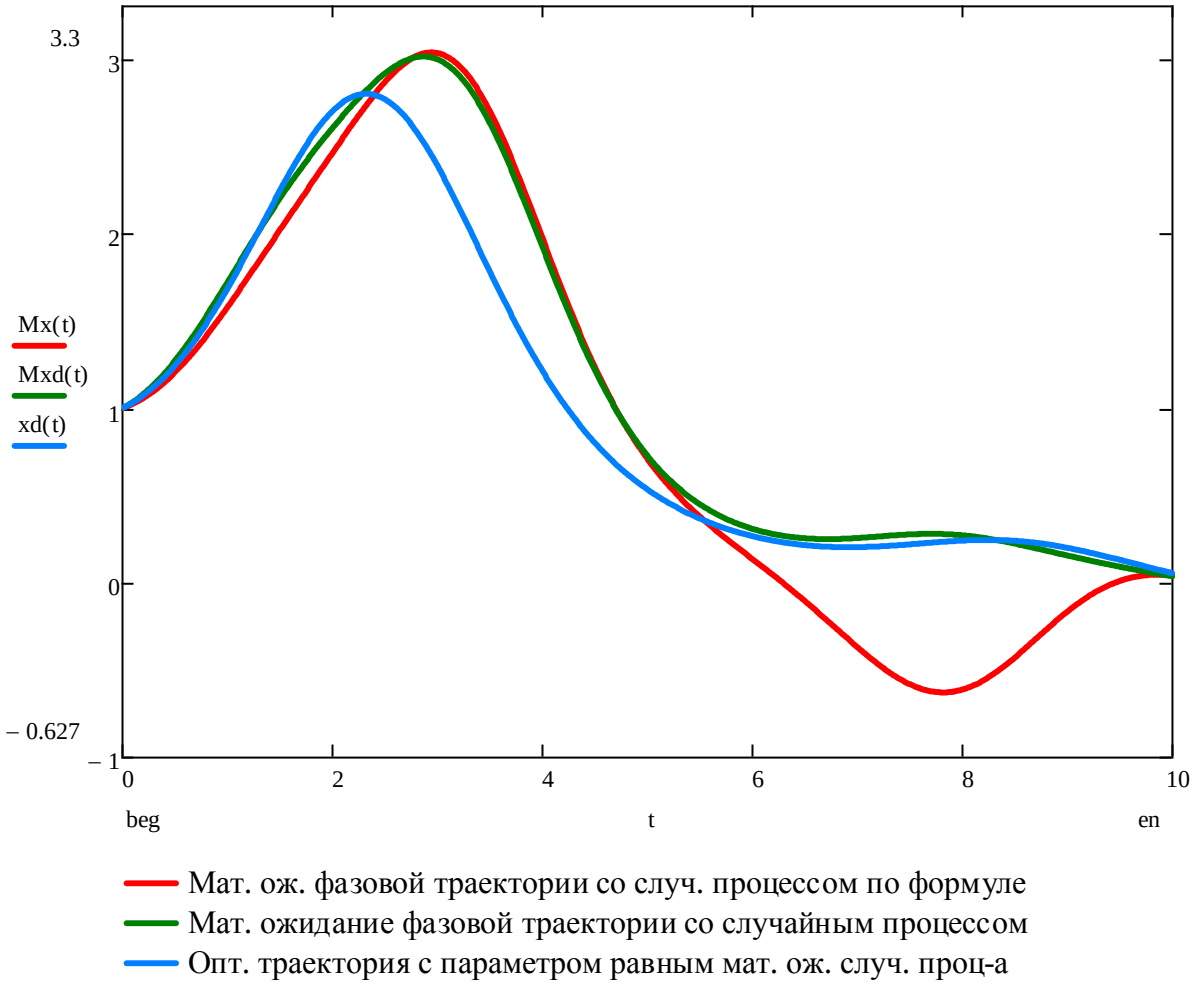


Рисунок 40.

В этом примере мы рассмотрели три варианта:

4. Задачу (2.1.1) - (2.1.3), где в исходной задаче выражение случайного процесса заменено его математическим ожиданием (т. е. вместо случайного процесса рассмотрена функция равная математическому ожиданию случайного процесса): формулы (2.1.17) и (2.1.18) содержат математическое ожидание.
5. Задача (2.1.1) - (2.1.3) с указанным случайным процессом решается точно, причем оптимальное управление зависит от случайного процесса $\varepsilon(t)$.

   В этом случае мы вычисляем значение функционала качества (2.1.4).
6. Решаем задачу (2.1.4) - (2.1.6) используя характеристический функционал для $\varepsilon(t)$ (здесь мы находим сразу математическое ожидание $Mu(t)$ и $Mx(t)$).

Сравнение результатов показывает, что значение критерия качества (2.1.4) во втором случае близко к значению в третьем случае и несколько меньше.

В первом случае функция цели = 0.106

Во втором случае функция цели = 0.072

В случае нашего метода = 0.151

Глава III. Вторая моментная функция оптимального управления системы со случайными коэффициентами

1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную управляемую систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)x + u(t), \tag{3.1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ управление, $\varepsilon(t)$ - случайный процесс. С заданным начальным условием

$$x(t_0) = M(x_0). \tag{3.1.2}$$

Требуется найти малое управление $u(t)$, которое обеспечивает близость к нулю $x(t)$ на заданном промежутке времени $[t_0, T]$. Поскольку $\varepsilon(t)$ является случайным процессом, то управление $u(t)$ также будет случайным процессом. Наибольший интерес представляют собой первые две моментные функции случайного процесса $u(t)$. Таким образом, естественной является следующая **задача.**

При заданном случайном процессе $\varepsilon(t)$ *и математическом ожидании* $M(x_0)$ *требуется найти моментные функции* $M(u(t))$ *и* $M(u(t)u(\tau))$, *при которых функционал*

$$\begin{aligned} I = &\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(s)M^2(x(s)) + B_1(s)M^2(u(s))]ds + \\ &+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2)) + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1 ds_2 + \\ &+\frac{c_1}{2}M^2(x(T)) + \frac{c_2}{2}M^2(x^2(T)) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

принимает наименьшее значение.

Здесь $A_1(s) \geq 0, B_1(s) > 0,$ заданные непрерывные функции, $A_2(s_1, s_2) \geq 0, B_2(s_1, s_2) > 0,$ заданные симметричные по s_1, s_2 непрерывные функции, $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ - заданные числа.

Линейным задачам с квадратичным критерием качества посвящено множество работ, однако обычно вместо уравнения (3.1.1) рассматривается линейное стохастическое дифференциальное уравнение (см., например, [1]).

Мы считаем, что случайный процесс $\varepsilon(t)$ задан своим характеристическим функционалом, который вычисляется по формуле

$$\varphi_\varepsilon(v) = M(\exp(i\int_{t_0}^{T} \varepsilon(s)v(s)ds)),$$

где $v \in L_1[t_0, T]$.

Мы считаем, что $\varphi_\varepsilon(v)$ известно, а управление $u(t)$ выбирается случайным образом и не зависит от $\varepsilon(t)$.

2 Нахождение математического ожидания оптимального управления

Пусть сначала $A_2 = B_2 = 0$, $c_2 = 0$. Тогда критерий качества I имеет вид

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(s)M^2(x(s)) + B_1(s)M^2(u(s))]ds + \frac{c_1}{2}M^2(x(T)) \qquad (3.2.1)$$

и не зависит от $M(u(t)u(\tau))$. Будем искать $M(u(t))$, при котором функционал I_1 принимает минимальное значение.

Используя известную формулу решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения, выпишем решение задачи (3.1.1), (3.1.2) для реализации $\varepsilon(t)$

$$x(t) = x_0 \exp(\int_{t_0}^{t}\varepsilon(s)ds) + \int_{t_0}^{t}\exp(\int_{s}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau)u(s)ds \ .$$

При условии, что x_0 не зависит от $\varepsilon(t)$ и $u(t)$, находим

$$M(x(t)) = M(x_0)M(\exp(\int_{t_0}^{t}\varepsilon(s)ds)) + \int_{t_0}^{t}M(\exp(\int_{s}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau))M(u(s))ds \ .$$

Введем в рассмотрение функцию $\chi(s,t,\tau)$, определенную следующим образом: $\chi(s,t,\tau) = sign(\tau - s)$ если τ принадлежит отрезку с концами s и t и равна нулю в противном случае. Согласно формуле (1.4.6), выражение для математического ожидания фазовой траектории можно записать с помощью характеристического функционала φ_ε

$$M(x(t)) = M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t)) + \int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))M(u(s))ds \ . \qquad (3.2.2)$$

Подставим (3.2.2) в функционал I_1, получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))M(u(z))dz]^2 + B_1(s)M^2(u(s))]ds +$$

$$+ \frac{c_1}{2}[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T)) + \int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds]^2 .$$

Лемма. Вариационная производная $\frac{\delta I_1}{\delta M(u(t))}$ функционала I_1 равна

$$\int_t^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds + \\ + B_1(t)M(u(t)) + cM(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) + c\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz. \quad (3.2.3)$$

Доказательство. Представим функционал I_1 в виде суммы двух функционалов $I_1 = I_1^* + I_1^{**}$, где

$$I_1^* = \frac{1}{2}\int_{t_0}^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))M(u(z))dz]^2 ds,$$

$$I_1^{**} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^T B_1(s)M^2(u(s))ds + \frac{c_1}{2}[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T)) + \int_{t_0}^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds]^2.$$

Найдем вариацию функционала I_1^*, т. е вычислим выражение

$$\delta I_1^* = \frac{dI_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}.$$

Рассмотрим приращение

$$I_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s))) = \\ = \frac{1}{2}\int_{t_0}^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))(M(u(z)) + \alpha\delta M(u(z)))dz]^2 ds,$$

вычислим производную по α

$$\frac{dI_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha} = \\ = \int_{t_0}^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))(M(u(z)) + \alpha\delta M(u(z)))dz]\int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\delta M(u(z))dzds.$$

в точке $\alpha = 0$ имеем

$$\frac{dI_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \\ = \int_{t_0}^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))M(u(z))dz]\int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\delta M(u(z))dzds.$$

или

$$\left.\frac{dI_1^*(M(u(s))+\alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\delta M(u(z))dzds.$$

Поменяем порядок интегрирования

$$\left.\frac{dI_1^*(M(u(s))+\alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\int_{z}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\delta M(u(z))dsdz.$$

Вынесем $\delta M(u(z))$

$$\left.\frac{dI_1^*(M(u(s))+\alpha\delta M(u(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\int_{z}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))ds\delta M(u(z))dz.$$

Таким образом, вариация функционала равна

$$\delta I_1^* = \int_{t_0}^{T}\int_{z}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))ds\delta M(u(z))dz.$$

По определению вариационной производной, имеем

$$\frac{\delta I_1^*}{\delta M(u(t))} = \int_{t}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds.$$

Вариационная производная функционала I_1^{**} может быть вычислена на основе правил и формул, описанных в первой главе

$$\frac{\delta I_1^{**}}{\delta M(u(t))} =$$

$$= B_1(t)M(u(t)) + c_1 M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) + c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds$$

т. к $\frac{\delta I_1}{\delta M(u(t))} = \frac{\delta I_1^*}{\delta M(u(t))} + \frac{\delta I_1^{**}}{\delta M(u(t))}$, то

$$\frac{\delta I_1}{\delta M(u(t))} = \int_t^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds +$$

$$+ B_1(t)M(u(t)) + c_1 M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) + c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds$$

изменив в последнем интеграле наименование переменной интегрирования, получим искомое выражение (3.2.3). Лемма доказана.

Теорема. Математическое ожидание $M(u(t))$ задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.2.1) является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} & B_1(t)^{-1}\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds + M(u(t)) + \\ & + c_1 B_1(t)^{-1} M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) + \\ & + B_1(t)^{-1}\int_{t_0}^T [\begin{cases} \int_h^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & , h \ge t \\ \int_t^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & , h < t \end{cases} + \\ & + c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,T))]M(u(h))dh = 0. \end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

Доказательство. По условию задачи, $M(u(t))$ следует выбрать так, чтобы оно доставляло минимум функционалу (3.2.1). Известно, что в точке минимума вариационная производная функционала обращается в нуль. Используя выражение для вариационной производной (3.2.3), запишем необходимое условие минимума

$$\int_t^T A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) + \int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds +$$

$$+ B_1(t)M(u(t)) + c_1 M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) + c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz = 0.$$

Раскроем скобки в первом слагаемом

$$\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+\int_t^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\int_{t_0}^s \varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dhds+$$

$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz=0.$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+\int_t^T\int_{t_0}^s A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dhds+$$

$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz=0$$

и поменяем порядок интегрирования

$$\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+\int_{t_0}^T\begin{cases}\int_h^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h\ge t\\ \int_t^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h<t\end{cases}M(u(h))dh+$$

$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^T \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz=0.$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$

$$+\int_{t_0}^T[\begin{cases}\int_h^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h\ge t\\ \int_t^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h<t\end{cases}+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,T))]M(u(h))dh=0.$$

Разделив левую и правую часть уравнения на $B_1(t)$, получим (3.2.4) интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Теорема доказана.

Таким образом, для нахождения $M(u(t))$ нужно решить детерминированное уравнение Фредгольма (3.2.4). Это уравнение иногда решается точно, если это не удается, то можно решать численно, например, воспользовавшись квадратурным методом решения [33].

3 Нахождение второй моментной функции оптимального управления

Предположим теперь, что $A_1 = B_1 = 0$, $c_1 = 0$. Тогда критерий качества I примет вид

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2)) + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1 ds_2 + \frac{c_2}{2}M^2(x^2(T)). \quad (3.3.1)$$

Требуется найти $M(u(t)u(\tau))$, которое доставляет минимум функционалу I_2.

Согласно (1.5.6) вторая моментная функция решения задачи (3.1.1), (3.1.2) имеет вид

$$M(x(t)x(s)) = M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s) - i\chi(t_0,t)) +$$

$$+ M(x_0)[\int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t) - i\chi(t_0,s))M(u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(t_0,t))M(u(\tau))d\tau] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}d\xi\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau .$$

Подставив это выражение в функционал I_2, получим

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)(M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1) - i\chi(t_0,s_2)) +$$

$$+ M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1) - i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2) - i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau] +$$

$$+ \int_{t_0}^{s_1}d\xi\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau)^2 + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1 ds_2 + \quad (3.3.2)$$

$$+ \frac{c_2}{2}[M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T)) + 2M(x_0)\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T) - i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{T}d\xi\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T) - i\chi(\xi,T))M(u(\tau)u(\xi))d\tau]^2 .$$

Для удобства перепишем (3.3.2) в более компактном виде, введя обозначения. Пусть

$$f(s_1,s_2)=M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1)-i\chi(t_0,s_2))+M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1)-i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2)-i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau],$$

$$g(\xi,s_2,\tau,s_1)=\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s)-i\chi(\xi,t)),$$

$$V=M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T))+2M(x_0)\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau,$$

$$p(\xi,\tau)=\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(\xi,T)).$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)M(u(\tau)u(\xi))d\xi d\tau]^2+$$

$$+B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))ds_1ds_2+\frac{c_2}{2}[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}p(\xi,\tau)M(u(\tau)u(\xi))d\xi d\tau]^2$$

или с заменой выражения $M(u(\tau)u(\xi))$ на $y(\tau,\xi)$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2+B_2(s_1,s_2)y^2(\tau,\xi)ds_1ds_2$$

$$+\frac{c_2}{2}[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}p(\xi,\tau)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2. \qquad (3.3.3)$$

Лемма. Вариационная производная $\frac{\delta I_2(y)}{\delta y(\xi,\tau)}$ функционала (3.3.3) равна

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+c_2[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau).$$

Доказательство. Найдем вариацию функционала

$$\delta I_2=\left.\frac{dI_2(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Рассмотрим сначала первое слагаемое в интеграле и вычислим выражение

$$I_2^*(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))=$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)(y(\tau,\xi)+\alpha\delta y(\tau,\xi))d\xi d\tau]^2 ds_1 ds_2,$$

тогда

$$\frac{dI_2^*(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}=$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}2A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)(y(\tau,\xi)+\alpha\delta y(\tau,\xi))d\mu d\eta]\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau ds_1 ds_2.$$

или

$$\left.\frac{dI_2^*(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]\times$$
$$\times\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau ds_1 ds_2.$$

Внесем первый и второй множители под интеграл третьего множителя

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau ds_1 ds_2.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s_2}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)ds_1 d\xi d\tau ds_2.$$

Еще раз изменим порядок интегрирования

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)ds_1 ds_2 d\xi d\tau.$$

Вынесем $\delta y(\tau,\xi)$

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1 ds_2\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

Теперь, по определению вариационной производной, имеем

$$\frac{\delta I_2^*(y)}{\delta y(\tau,\xi)} = \int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2) + \int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1 ds_2.$$

Найдем вариационные производные других слагаемых функционала

$$I_2^{**} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)y^2(\tau,\xi)ds_1 ds_2 + \frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2.$$

Найдем вариацию функционала

$$\delta I_2^{**} = \left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2) + \alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Сначала вычислим следующее выражение

$$dI_2^{**}(y(s_1,s_2) + \alpha\delta y(s_1,s_2)) =$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)(y(s_1,s_2) + \alpha\delta y(s_1,s_2))^2 ds_1 ds_2 + \frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)(y(s_1,s_2) + \alpha\delta y(s_1,s_2))d\xi d\tau]^2,$$

$$\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2) + \alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha} =$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} 2B_2(s_1,s_2)(y(s_1,s_2) + \alpha\delta y(s_1,s_2))\delta y(s_1,s_2)ds_1 ds_2 +$$
$$+ 2\frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)(y(\xi,\tau) + \alpha\delta y(\xi,\tau))d\xi d\tau]\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Положим в этом выражении $\alpha = 0$

$$\left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2) + \alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$
$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)y(s_1,s_2)\delta y(s_1,s_2)ds_1 ds_2 +$$
$$c_2[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)y(\xi,\tau)d\xi d\tau]\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

или

$$\left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)y(s_1,s_2)\delta y(s_1,s_2)ds_1 ds_2 +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} c_2[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau)\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Внесем все выражения под один интеграл

$$\left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}(B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+c_2[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau))\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Откуда, согласно определению вариационной производной, имеем

$$\frac{\delta I_2^{**}(y)}{\delta y(\xi,\tau)} = B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+c_2[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau).$$

Взяв сумму вариационных производных частей I_2^* и I_2^{**}, получим значение вариационной производной исходного функционала I_2 - выражение (3.3.3). Лемма доказана.

Теорема. Вторая моментная функция $M(u(t)u(\tau))$ задачи (3.1.1), (3.1.2), (3.3.1) является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$M(u(\tau)u(\xi)) + B_2^{-1}(\xi,\tau)\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)[M(x_0{}^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_1} - i\chi_{t_0,s_2}) +$$

$$+ Mx_0\{\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_1} - i\chi_{z,s_2})Mu(z)dz + \int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_2} - i\chi_{h,s_1})Mu(h)dh\}]\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1 ds_2 +$$

$$+ B_2^{-1}(\xi,\tau)\frac{1}{2}c_2\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,T} - i\chi_{\tau,T})[(M(x_0{}^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi_{t_0,T}) + 2Mx_0\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,T} - i\chi_{z,T})Mu(z)dz] +$$

$$+ B_2^{-1}(\xi,\tau)\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\mu}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta \ge \tau \\ \int_{\tau}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta < \tau\end{array}\right. ds_2, \mu \ge \xi \\ \int_{\xi}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta \ge \tau \\ \int_{\tau}^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta < \tau\end{array}\right. ds_2, \mu < \xi\end{array}\right. +$$

$$+ c_2\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,T} - i\chi_{\tau,T})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,T} - i\chi_{\eta,T})M(u(\mu)u(\eta))d\mu d\eta = 0. \qquad (3.3.4)$$

Доказательство. Исходя из необходимого условия минимума функционала, вторая моментная функция управления $M(u(t)u(\tau))$ может быть найдена из условия равенства нулю вариационной производной.

Используя *Лемму,* запишем это условие.

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2) + \int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1 ds_2 +$$

$$+ B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau) + c_2[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau) = 0$$

или

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)\,f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2 +$$

$$+\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2 +$$

$$+ B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau) + p(\xi,\tau)c_2V + p(\xi,\tau)c_2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta = 0.$$

Поменяем местами слагаемые

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2 +$$

$$+\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)\,f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2 +$$

$$+ B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau) + p(\xi,\tau)c_2V + p(\xi,\tau)c_2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta = 0.$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)\,y(\eta,\mu)d\mu d\eta ds_1ds_2,$$

поменяем порядок интегрирования

$$\int_{\xi}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s_2}\begin{cases}\int_{\eta}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)\,y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_{\tau}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)\,y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} d\mu d\eta ds_2,$$

снова поменяем порядок интегрирования

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\begin{cases}\int_{\mu}^{T}\begin{cases}\int_{\eta}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)\,y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_{\tau}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)\,y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu\ge\xi\\ \int_{\xi}^{T}\begin{cases}\int_{\eta}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)\,y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_{\tau}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)\,y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu<\xi\end{cases} d\mu d\eta,$$

вернемся к исходному уравнению

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\mu}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\geq\tau \\ \qquad\qquad ds_2, \mu\geq\xi \\ \int_{\tau}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{array}\right. \\ \qquad\qquad d\mu d\eta + \\ \int_{\xi}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\geq\tau \\ \qquad\qquad ds_2, \mu<\xi \\ \int_{\tau}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)\,f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2 + B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau) +$$

$$+ p(\xi,\tau)c_2V + p(\xi,\tau)c_2\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta = 0,$$

внесем под один интеграл

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)\,f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2 + B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau) + p(\xi,\tau)c_2V +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\mu}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\geq\tau \\ \qquad\qquad ds_2, \mu\geq\xi \\ \int_{\tau}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{array}\right. \\ \qquad\qquad + \\ \int_{\xi}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\geq\tau \\ \qquad\qquad ds_2, \mu<\xi \\ \int_{\tau}^{T} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$+ c_2\,p(\xi,\tau)\,p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta = 0.$$

Разделим и левую, и правую часть уравнения на $B_2(\xi,\tau)$

$$y(\xi,\tau)+B_2^{-1}(\xi,\tau)\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)\,f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+B_2^{-1}(\xi,\tau)\,p(\xi,\tau)c_2V+$$

$$+B_2^{-1}(\xi,\tau)\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[\left\{\begin{array}{l}\int_{\mu}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T}g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1,\eta\geq\tau\\ \int_{\tau}^{T}g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1,\eta<\tau\end{array}\right.ds_2,\mu\geq\xi\\ \int_{\xi}^{T}\left\{\begin{array}{l}\int_{\eta}^{T}g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1,\eta\geq\tau\\ \int_{\tau}^{T}g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1,\eta<\tau\end{array}\right.ds_2,\mu<\xi\end{array}\right.+$$

$$+c_2\,p(\xi,\tau)\,p(\mu,\eta)]y(\mu,\eta)d\mu d\eta=0.$$

Возвратившись к исходным функциям, получим искомое интегральное уравнение Фредгольма второго рода (3.3.4) для нахождения второй моментной функции управления. Теорема доказана.

Замечание. В данной постановке задачи не учтены требования неотрицательности вторых моментных функций $M(x^2(s)), M(u^2(s))$. Данные ограничения можно добавить, используя метод штрафных функций [40], то есть, рассмотрев критерий качества

$$I_3 = I_2 + \psi(M(x(s_1)x(s_2)), M(u(s_1)u(s_2)), \alpha),$$

где функционал ψ является штрафным. Подобрав α, таким образом, чтобы влияние ψ было малым в точке минимума, мы можем точку минимума функционала I_3 сделать совпадающей с точкой минимума функционала I_2 с ограничениями.

Глава IV. Численные расчёты статистических характеристик

1 Уравнения Фредгольма и их решение

Рассмотрим уравнение Фредгольма вида

$$x(t) = \lambda \int_a^b Q(t,s)x(s)ds + f(s),$$

где $f(s)$- функция, $x(t)$- решение уравнения, $Q(t,s)$- ядро интегрального уравнения Фредгольма определенное на $[a,b]\times[a,b]$. Известно, что если $Q(t,s)$ и $f(t)$ - непрерывные функции для уравнения Фредгольма второго рода, то при условии $|\lambda| < \frac{1}{C(b-a)}$, где $C = \max|Q(t,s)|$, $t,s \in [a,b]$, существует единственное непрерывное решение.

Решение уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$Q(t,s) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t)q_i(s)$$

имеет вид

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^{m} z_i p_i(t)q_i(s) + f(t),$$

где z_i - решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} z_1 - \lambda c_{1,1}z_1 - \lambda c_{1,2}z_2 - \cdots - \lambda c_{1,m}z_m = d_1, \\ z_1 - \lambda c_{2,1}z_1 - \lambda c_{2,2}z_2 - \cdots - \lambda c_{2,m}z_m = d_2, \\ \vdots \\ z_1 - \lambda c_{m,1}z_1 - \lambda c_{m,2}z_2 - \cdots - \lambda c_{m,m}z_m = d_m, \end{cases}$$

где

$$c_{i,j} = \int_a^b q_i(s)p_j(s)ds,$$

$$d_{i,j} = \int_a^b q_i(s) f(s) ds .$$

Определитель системы $D(\lambda)$ называется определителем Фредгольма.

Если $D(\lambda) \neq 0$, то решение существует и единственно. Так как существуют методы для точного решения уравнения с вырожденным ядром, то имеет смысл строить приближение ядра, зависящее от двух переменных, а затем решение исходной задачи свести к решению системы линейных алгебраических уравнений [33] .

2 Квадратурный метод решения интегральных уравнений Фредгольма

Заменим определенный интеграл его приближенным значением, вычисляемым с помощью квадратурной формулы:

$$\int_a^b \varphi(s)ds = \sum_j^n A_j \varphi(s_j),$$

где $j = 1,2,....n$ - номера узлов временной сетки, A_j - коэффициенты квадратурной формулы.

Подставив правую часть приближенного равенства выше $\varphi(s) = Q(t,s)x(s)$ вместо интеграла в уравнение Фредгольма второго рода, получим

$$x(t) \approx \lambda \sum_j^n A_j Q(t, s_j) x(s_j) + f(t),$$

это выражение описывает приближенное решение интегрального уравнения. Введем на отрезке $[a,b]$ дискретную временную сетку $t_1, t_2, ..., t_n$, значения узлов которой равны значениям узлов сетки $s_1, s_2, ..., s_n$ для каждого момента времени t_j выполняется равенство

$$x(t_i) \approx \lambda \sum_j^n A_j Q(t_i, s_j) x(s_j) + f(t_i),$$

где $i = 1,2,....n$.

Введем обозначения $Q_{i,j} = Q(t_{i,}, s_j)$, $f_i = f(t_i)$, $x_i = x(t_i)$ и запишем последнее выражение в виде системы n алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} (1 - \lambda A_1 Q_{1,1})x_1 - \lambda A_2 Q_{1,2} x_2 - \cdots - \lambda A_n Q_{1,n} x_n = f_1 \\ (1 - \lambda A_2 Q_{2,1})x_1 - \lambda A_2 Q_{2,2} x_2 - \cdots - \lambda A_n Q_{2,n} x_n = f_2, \\ \vdots \\ (1 - \lambda A_n Q_{n,1})x_1 - \lambda A_2 Q_{n,2} x_2 - \cdots - \lambda A_n Q_{n,n} x_n = f_n, \end{cases}$$

Данную систему можно решить любым из способов для систем линейных алгебраических уравнений.

На практике для оценки точности применяют правило Рунге, оценивания значения на временных сетках с шагом $2h$ и h. Абсолютное значение разности данных решений дает величину погрешности [33].

3 Нахождение первых моментных функций траектории и управления в среде Mathcad

В этом параграфе описан последовательный процесс поиска моментных функций в среде Mathcad с использованием численного решения уравнения Фредгольма.

Зададим начальные условия

$x0 := 1$

$Mx0 := 1$

$M2x0 := 1$

Укажем конец времени

$T := 1$

Константа критерия качества

$c := 2$

$c2 := 2$

Параметры t построения графиков

$beg := 0$

$en := T$

Коэффициенты критерия качества для первых моментных функций

$A1(z) := 1$

$B1(z) := 1$

A2(z,t)=0, B2(z,t)=0;

Коэффициенты критерия качества для вторых моментных функций

$A2(z,t) := 1$

$B2(z,t) := 1$

A1(z)=0, B1(z)=0;

Константа характеристического функционала случайного процесса

$\mu := -0.2$

Константа характеристического функционала случайного процесса

$\sigma := 0.3$

Вид специальной характеристической функции случайного процесса

$$phi(a,b) := e^{\mu\cdot(b-a)+\frac{\left[\sigma^2\cdot(b-a)^2\right]}{2}}$$

Коэффициент уравнения Фредгольма

$\lambda := 1$

Задание функции Q(t,s)

$$fig_br(t,s) := \begin{cases} \int_s^T A1(z)\,phi(t,z)\cdot phi(s,z)\,dz & \text{if } s > t \\ \int_t^T A1(z)\,phi(t,z)\cdot phi(s,z)\,dz & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Q(t,s) := -(B1(t))^{-1}\cdot(fig_br(t,s) + c\cdot phi(t,T)\cdot phi(s,T))$$

Задание функции f(t)

$$f(t) := -B1(t)^{-1}\cdot\int_t^T A1(z)\cdot x0\cdot phi(0,z)\cdot phi(t,z)\,dz - B1(t)^{-1}\cdot c\cdot x0\cdot phi(0,T)\cdot phi(t,T)$$

Зададим сетку

$x1 := 0$

$x2 := T$

$N := 10$

$i := 0..N-1$

$$h := \frac{x2-x1}{(N-1)}$$

$t_i := x1 + h\cdot i$

$s := t$

$Atrap_i := 1$

$Atrap_0 := 0.5$

$Atrap_{N-1} := 0.5$

$j := 0..N-1$

$q_{i,j} := Q(t_i, s_j)$

$F_i := f(t_i)$

$$M := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..N-1 \\ \quad\quad M_{i,j} \leftarrow 1 - \lambda \cdot Atrap_j \cdot q_{i,j} \cdot h \quad \text{if } (i = j) \\ \quad\quad M_{i,j} \leftarrow -\lambda \cdot Atrap_j \cdot q_{i,j} \cdot h \quad \text{otherwise} \\ M \end{array} \right.$$

Решение уравнения

$Mu := M^{-1} \cdot F$

$i := 0..N-1$

Интерполированное математическое ожидание оптимального управления см. Рисунок 41.

$lMu(s) := linterp(t, Mu, s)$

$z := 0, 0.0001..T$

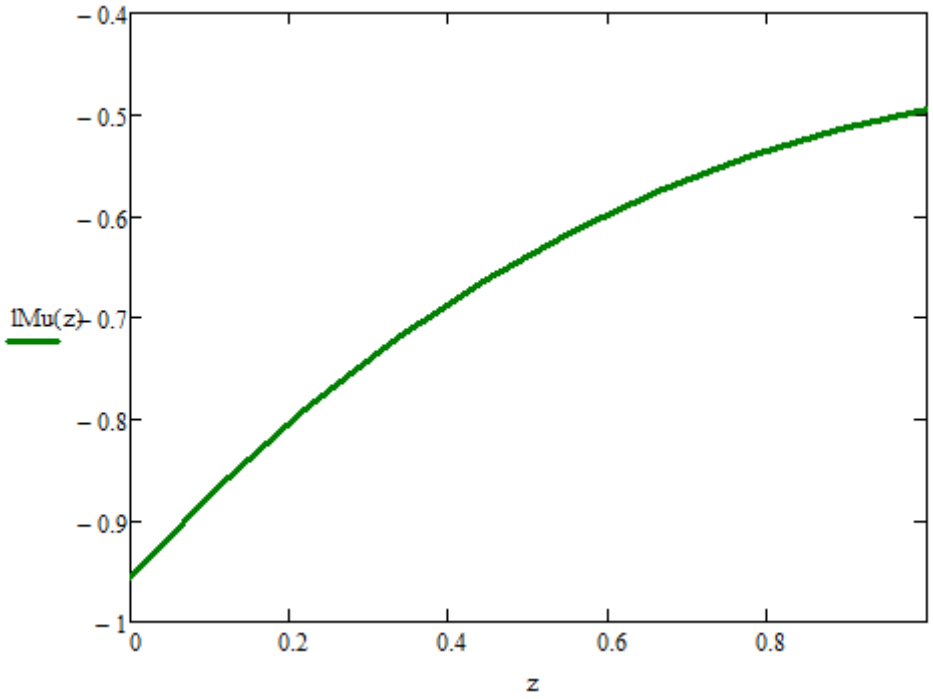


Рисунок 41.

$Mu_0 = -0.956$

$lMu(0) = -0.956$

lMu(10) = 1.098

Математическое ожидание фазовой траектории см. Рисунок 42.

$$Mx(t) := x0 \cdot phi(0,t) + \int_0^t phi(z,t) \cdot lMu(z)\, dz$$

Mx(0) = 1

Mx(T) = 0.248

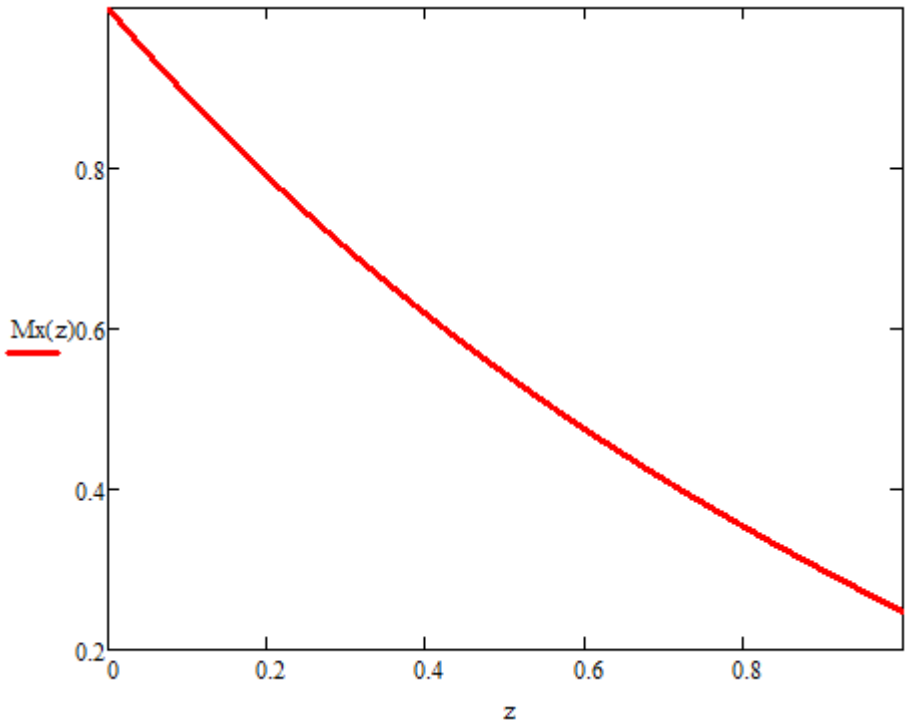


Рисунок 42.

Значение целевого функционала зависящего от математического ожидания фазовой траектории и математического ожидания управления:

$$J := 0.5 \int_0^T A1(z)\,(Mx(z))^2 + B1(z)\,lMu(z)^2\, dz + 0.5 \cdot c \cdot Mx(T)^2$$

J = 0.479

4 Нахождение второй моментной функции управления

Вид специальной характеристической функции

$$pa(s) := \mu$$

$$pb(s1,s2) := \sigma^2$$

$$phi2T(a,b,c,d) := \exp\left(\int_a^b pa(s)\,ds + \int_c^d pa(s)\,ds + 0.5\cdot\int_a^b\int_a^b pb(s1,s2)\,ds1\,ds2 + 0.5\cdot\int_c^d\int_c^d pb(s1,s2)\,ds1\,ds2 + 0.5\cdot\int_a^b\int_c^d pb(s1,s2)\,ds1\,ds2\right)$$

Упрощенный вид специальной характеристической функции

$$phi2(a,b,c,d) := \exp\left[(b-a)\cdot\mu + (d-c)\cdot\mu + 0.5(b-a)^2\cdot\sigma^2 + 0.5(d-c)^2\cdot\sigma^2 + 0.5(b-a)\cdot(d-c)\cdot\sigma^2\right]$$

$$t0 := 0$$

$$T := T$$

Расчет подынтегральной функции $Q2(\xi,\tau,\mu,\eta)$

$$fig_br2(\xi,\tau,\mu,\eta) := \begin{cases} \int_\mu^T \begin{cases} \int_\eta^T phi2(\mu,s2,\eta,s1)\cdot phi2(\xi,s2,\tau,s1)\,ds1 & \text{if } \eta > \tau \\ \int_\tau^T phi2(\mu,s2,\eta,s1)\cdot phi2(\xi,s2,\tau,s1)\,ds1 & \text{otherwise} \end{cases} ds2 & \text{if } \mu > \xi \\ \int_\xi^T \begin{cases} \int_\eta^T phi2(\mu,s2,\eta,s1)\cdot phi2(\xi,s2,\tau,s1)\,ds1 & \text{if } \eta > \tau \\ \int_\tau^T phi2(\mu,s2,\eta,s1)\cdot phi2(\xi,s2,\tau,s1)\,ds1 & \text{otherwise} \end{cases} ds2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Q2(\xi,\tau,\mu,\eta) := -(B2(\xi,\tau))^{-1}\cdot(fig_br2(\xi,\tau,\mu,\eta) + c2\cdot phi2(\xi,T,\tau,T)\cdot phi2(\mu,T,\eta,T))$$

$$f2(\xi,\tau) := 2.1 + 1\cdot -(B2(\xi,\tau))^{-1}\cdot\int_\xi^T\int_\tau^T A2(s1,s2)\left[M2x0\cdot phi2(t0,s1,t0,s2) + Mx0\cdot\left(\int_{t0}^{s2} phi2(t0,s1,z,s2)\,dz + \int_{t0}^{s1} phi2(t0,s2,h,s1)\,dh\right)\right]\cdot phi2(\xi,s2,\tau,s1)\,ds1\,ds2$$
$$+ \blacksquare - B2(\xi,\tau)^{-1}\cdot phi2(\xi,T,\tau,T)\cdot 0.5\cdot c2\cdot\left[M2x0\cdot phi2(t0,T,t0,T) + Mx0\cdot\left(2\cdot\int_{t0}^{T} phi2(t0,T,z,T)\,lMu(z)\,dz\right)\right]$$

Задание сетки

$$i := 0..N-1$$

$j := 0..N-1$

$i1 := 0..N-1$

$j1 := 0..N-1$

$h := \frac{T - t0}{(N-1)}$

Проверка векторов:

$t_i := t0 + h \cdot i$

$s := t$

$k := t$

$z := t$

$Atrap_i := 1$

$Atrap_0 := 0.5$

$Atrap_{N-1} := 0.5$

Вычисление матрицы коэффициентов уравнения M2*x=F2

$curRow := -1$

Проверка M2

$M2 :=$ for $i1 \in 0..N-1$
  for $j1 \in 0..N-1$
    $curRow \leftarrow curRow + 1$
    $curCol \leftarrow -1$
    for $i \in 0..N-1$
      for $j \in 0..N-1$
        $curCol \leftarrow curCol + 1$
        $M2_{curRow,curCol} \leftarrow 1 - \lambda \cdot Atrap_i \cdot Atrap_j \cdot Q2(t_{i1}, s_{j1}, k_i, z_j) \cdot h \cdot h$ if $[(i1 = i) \wedge (j1 = j)]$
        $M2_{curRow,curCol} \leftarrow -\lambda \cdot Atrap_i \cdot Atrap_j \cdot Q2(t_{i1}, s_{j1}, k_i, z_j) \cdot h \cdot h$ otherwise
  M2

$curRow := 0$

Проверка F2

Вычисление правой части уравнения M2x=F2

```
F2 := for i ∈ 0..N − 1
        for j ∈ 0..N − 1
          F2[curRow] ← f2(t_i, s_j)
          curRow ← curRow + 1
      F2
```

Решение линейного уравнения

$$Mu2L := M2^{-1} \cdot F2$$

Преобразование к матричному виду (по координатам, соответственно, переменные t,s)

$$curRow := 0$$

Проверка

```
Mu2 := for i ∈ 0..N − 1
         for j ∈ 0..N − 1
           Mu2[i,j] ← Mu2L[curRow]
           curRow ← curRow + 1
       Mu2
```

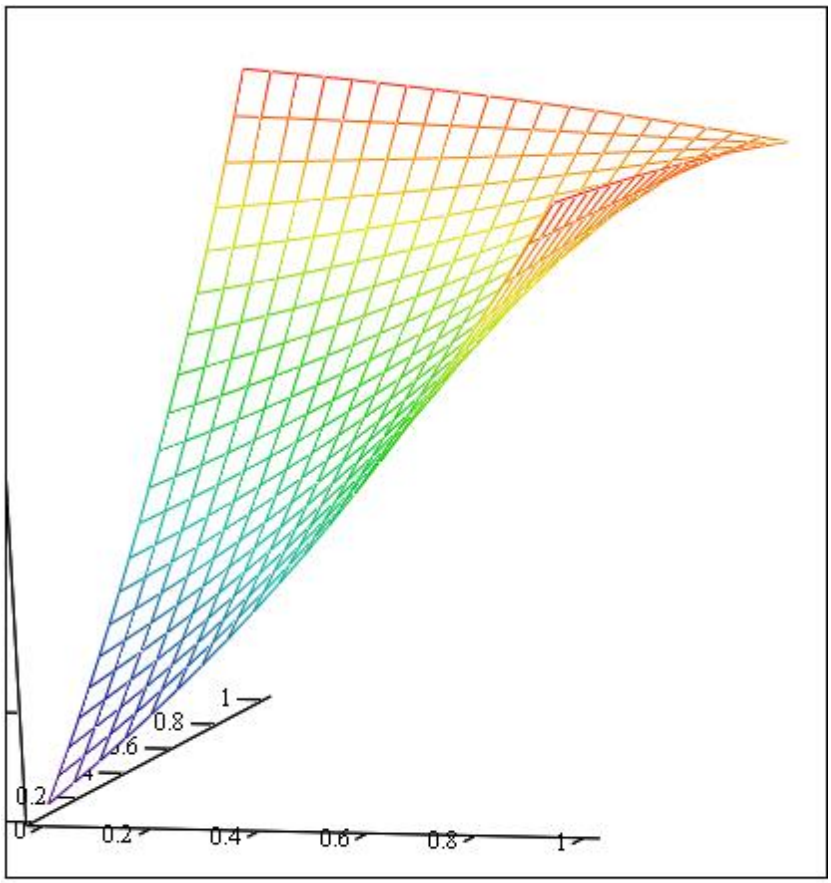
Интерполированная вторая моментная функция оптимального управления:

$$CoordXY := augment(sort(t), sort(s))$$

$$Mu2Spline := lspline(CoordXY, Mu2)$$

$$Mu2Int(t,s) := interp\left[Mu2Spline, CoordXY, Mu2, \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}\right]$$

График второй моментной функции управления см. Рисунок 43.



Mu2Int

Рисунок 43.

Список литературы

1. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М. : Высшая школа, 1998. – 574 с.
2. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1988. – 126 с.
3. Боровков, А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М. : Наука, 1986. – 431 с.
4. Боровских, А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. М. – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. – 540 с.
5. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 528 с.
6. Волков, Е. А. Численные методы / Е.А. Волков. – М. : Наука, 1982. – 256 с.
7. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1982. – 304 с.
8. Гайшун, И. В. Линейные уравнения в полных производных / И. В. Гайшун. – Минск : Наука и техника, 1983. – 272 с.
9. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1961. – 228 с.
10. Гихман, И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М. : Наука, 1977. – 567 с.
11. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Физматгиз, 1963. – 660 с.
12. Задорожний, В. Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. – Ижевск: РХД, 2006. – 316 с.

13. Задорожний, В. Г. Нахождение оптимального управления для линейной стохастической системы с квадратичным критерием качества / В. Г. Задорожний, И. П. Якубенко // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2010. – Вып. 8. – С. 169-175.
14. Задорожний, В. Г. Модели управления производством при случайно изменяющихся факторах / В. Г. Задорожний, И. П. Якубенко // Современная экономика: проблемы и решения. – 2011. – №9(21). – С.138-144.
15. Задорожний, В. Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными / В.Г. Задорожний. – Воронеж : Типография ВГУ, 2000. – 368 с.
16. Задорожний, В. Г. Дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами: учебное пособие для вузов / В. Г. Задорожний. – Воронеж. : ВГУ, 2012. – 98 с.
17. Задорожний, В. Г. Моментные функции решений стохастических дифференциальных уравнений (методические указания для студентов четвертого курса дневного и вечернего отделения) / В. Г. Задорожний. – Воронеж: ВГУ, 1992. – 30 с.
18. Задорожний, В. Г. Об оптимальном управлении линейной системой со случайными коэффициентами / В.Г. Задорожний, И.П. Якубенко // Вестник воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 126–134.
19. Задорожний, В. Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными / В. Г. Задорожний. – Воронеж : Изд-во Воронеж, гос. ун-та, – 2000. – 368 с.
20. Задорожний, В. Г. Моментные функции оптимального управления линейной системой со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний, И. П. Якубенко // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ 2014), место издания М. : изд-во ИПУ РАН, С. 9530 – 9538
21. Задорожний, В. Г. О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными

коэффициентами / В. Г. Задорожний, Л. Н. Строева // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 3. – С. 377–385.

22. Задорожний, В. Г. Отыскание моментных функций решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка / В. Г. Задорожний, Т. Н. Смагина // Вестник ф-та ПММ, Воронеж, ВГУ, – 1998. С. 52–56.
23. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. М. : Наука, 1978. – 512 с.
24. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
25. Кляцкин, В. И. Динамика стохастических систем / В. И. Кляцкин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.
26. Коддингтон, Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М. : ИЛ, 1958. – 476 с.
27. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 543 с.
28. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М. : Наука, 1984. – 832 с.
29. Кострикин, А. Н. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра / А. Н. Кострикин. – М. : Физико-математическая литература, 2000. – 368 с.
30. Крылов, В. И. Вычислительные методы. Том II. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М : Наука, 1976. – 400 с.
31. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
32. Перов, А. И. Об ограниченных решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / А. И. Перов // Вест. Воронеж, ун-та. Сер. Физика, математика. 2003. – №1. – С. 165-168.
33. Поршнев, С. В. Численные методы на базе Mathcad / С. В. Поршнев, И. В. Беленкова. – СПб. : БХВ – Петербург, 2005. – 464 с.
34. Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачев. – М. : Физматлит, 2002. – 496 с.

35. Радченко, Т. А. Теория вероятностей и математическая статистика / Т. А. Радченко, Ю. С. Радченко. – Воронеж: ВГУ 1997. – 240 с.
36. Рапопорт, И. М. Обратная задача вариационного исчисления / И. М. Рапопорт Изв. физ.-мат. о-ва. 1939. – №11. – С. 47 - 69.
37. Розанов, Ю. А. Введение в теорию случайных процессов / Ю. А. Розанов, – М. : Наука. 1982. – 182 с.
38. Ряжских, В. И. Стохастическая модель структуры неподвижного слоя одинаковых шаров / В. И. Ряжских, В. В. Шитов, Д. А. Горьковенко // Известия вузов. Химия и химическая технология. – 2007. – Т. 50, вып. 11. – С. 113-117.
39. Семенов, М. Е. Математическое моделирование устойчивых периодических режимов в системах с гистерезисными нелинейностями / М. Е. Семенов. – Воронеж : Издательство ВГУ. – 2002. – 104 с.
40. Трифонов, А. Г. Постановка задачи оптимизации и численные методы ее решения [электронный ресурс] / А. Г. Трифонов // SoftLine Co. Свободный режим доступа: http://matlab. exponenta.ru/optimiz/book_2/index.php
41. Ускова, О. Ф. Программирование алгоритмов обработки данных / О. Ф. Ускова, Н. В. Огаркова, И. Е. Воронина. - СПб. : БХВ-Петербург, 2003. - 192 с.
42. Ускова, О. Ф. Программирование на языке Паскаль / О. Ф. Ускова. – СПб.: Питер, 2003, 336 с.
43. Фаронов, В.В. Delphi 4. Учебный курс / В. В. Фаронов. – М.: «Нолидж», 1999. – 464 с.
44. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань. 1999. – 464 с.
45. Черноусько, Ф. Л. Оптимальное управление при случайных возмущениях / Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский. – М. : Физматлит, 1978. 352 с.
46. Шилов, Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.

47. Шилов, Г. Е. Математический анализ. Специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1961. – 436 с.
48. Якубенко, И. П. Алгоритм поиска приближенного математического ожидания дифференциальных уравнений / И. П. Якубенко // Вопросы науки: Естественно-научные исследования и технический прогресс. Сборник статей по материалам III Международной научно-практической конференции (26 февраля 2015 г. Воронеж). – 2015. –Т. 2. – С. 6-8.
49. Якубенко, И.П. О задаче поиска второй моментной функции оптимального управления системы со случайными коэффициентами / И. П. Якубенко // Межвузовский сб. Теория и практика актуальных исследований в гуманитарных, правовых и экономических направлениях. – Воронеж: Воронежский ЦНТИ – филиал ФГБУ «РЭА», 2014. – С. 223-225.
50. Якубенко, И. П. Оптимальное управление и первая моментная функция управления линейной системой с квадратичным критерием качества / И. П. Якубенко // Естественно-научные исследования и технический прогресс. Сборник статей по материалам Всероссийской научно-практической конференции (15 декабря 2014 г. Воронеж). – 2014. – № 4(11). – С. 92.
51. Якубенко, И. П. Подходы к поиску оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием качества / И. П. Якубенко // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2015. – Вып. 10. – С. 277-291.
52. Якубенко, И. П. Постановка задачи оптимального управления линейной системы с квадратичным критерием качества со случайным процессом [Электронный ресурс] / И. П. Якубенко // Моделирование энергоинформационных процессов: Сборник материалов III международной научно-практической интернет-конференции (22-24.12.2014). – Режим доступа: http://www.vsuet.ru/science/conference.asp

53. Якубенко, И. П. Расчёт первых моментных функций траектории и управления линейной системой с квадратичным критерием качества с применением Mathcad / И. П. Якубенко // Вопросы науки: Естественно-научные исследования и технический прогресс. Сборник статей по материалам III Международной научно-практической конференции (26 февраля 2015 г. Воронеж). – 2015. – Т. 2. – С. 9-13.
54. Bryson, A.E. Applied Optimal Control / A.E. Bryson, Yu-Chi Ho, Waltham. – Massachusetts : Blaisdell Publishing Company, 1975, – 496 p.
55. Dem'yanov, V. F. The Minimization of a Smooth Convex Functional on a Convex Set / V. F. Dem'yanov, A. M. Rubinov, J. SIAM Control, 6, 1967. – P. 280-294.
56. Gilbert, E. G. An Iterative Procedure for Computing the Minimum of a Quadratic Form on a Convex Set / E. G. Gilbert, SIAM J. Contr. 4, 1966, 1. – P. 61-80.
57. Kalman, R. E. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory / R. E. Kalman, R. A. Bucy, Journal of Basic Engineering, No. 1, 1960. – P. 95-108.
58. Kalman, R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems / R. E. Kalman, Journal of Basic Engineering, No. 1, 1960 .– P. 35-45.
59. Luh, J. Y. S. Suboptimal Closed-Loop Controller Design for Minimum Probability of Inequality Constraints Violation / J. Y. S. Luh, M. P. Lukas, IEEE Transactions on Automatic Control, No. 5, 1969. – P. 449-457.
60. Skelton, G. B., Launch Booster Gust Alleviation / G. B. Skelton, AIAA Third Annual Meeting, 1966 .– P. 66
61. Wonham, W. M. On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control / W. M. Wonham, SIAM Journal on Control, No. 4, 1968. – P. 681-697.
62. Wonham, W. M., Stochastic Problems in Optimal Control / W. M. Wonham, IEEE International Convention Record, Part 5, 1970. – P. 97-113.

Приложение

Вид программы для исследований дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами Рисунок 44.

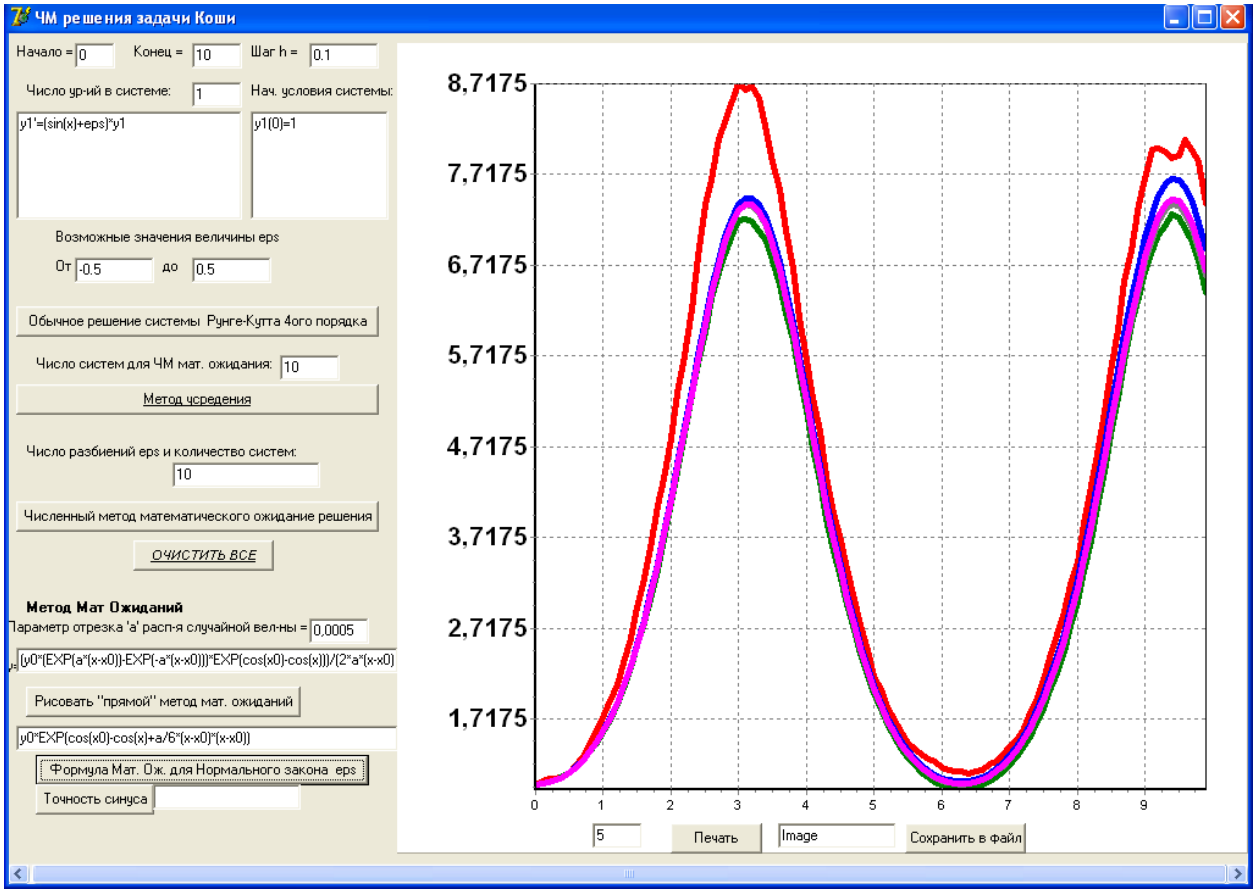


Рисунок 44.