

ФГОУ ВПО ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Быкова Ксения Игоревна

**Лучевое приближение напряженного состояния за
выпуклым препятствием за дифрагированной
волной в области тени**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук**

**Научный руководитель
д. т. н., проф. Вerveйко Н. Д.**

Воронеж – 2015

Содержание

Введение	4
Глава 1 Основные положения лучевой теории распространения и дифракции упругих волн	
1.1 Общие сведения из волновой динамики.....	26
1.2 Представление поведения перемещения $u(x,t)$ за фронтами волн.....	29
1.3 Отражение, преломление волн, дифракция.....	30
1.4 Общие сведения из дифференциальной геометрии.....	33
1.4.1 Кривая. Основные определения.....	33
1.4.2 Огибающая семейства кривых, зависящих от параметра.....	36
1.4.3 Поверхность. Основные определения.....	37
1.4.4 Геодезические кривые.....	39
1.5 Локальная система координат.....	41
1.6 Геометрические и кинематические условия совместности.....	42
1.7 Начальные и граничные условия.....	43
1.8 Математическая модель распространения упругих волн.....	45
1.9 Распространение сильных волн в неограниченной упругой среде....	46
1.10 Распространение слабых волн в неограниченной упругой среде.....	48
1.11 Лучевой метод решения задачи дифракции.....	49
Глава 2 Дифракция упругих волн на выпуклых плоских препятствиях	
2.1 Дифракция плоской упругой волны на цилиндре.....	56
2.2 Построение уравнения дифрагированного фронта для определения его кривизны в плоском случае.....	57
2.3 Случай представления уравнения дифрагированной поверхности в параметрическом виде.....	58
2.4 Определение интенсивности коротких дифрагированных волн на цилиндре в области тени.....	61

2.5 Распространение интенсивности на дифрагированном фронте.....	62
Глава 3 Пространственная задача дифракции. Дифракция упругих волн на выпуклых препятствиях	
3.1 Локальный подход к распространению дифрагированной волны вдоль препятствия в область тени.....	65
3.2 Дифракция плоской упругой волны на сфере.....	68
3.2.1 Постановка задачи расчета интенсивности дифрагированной волны на сфере.....	68
3.2.2 Вычисление интенсивности дифрагированной волны на сфере.....	71
3.2.3 Интенсивность напряжений за дифрагированной волной.....	73
3.2.4 Исследование напряженного состояния в материале сферы в окрестности внешних порожденных дифрагированных волн.....	74
3.3 Дифракция плоской упругой волны на эллипсоиде.....	79
3.3.1 Определение кривизн меридиан и параллелей эллипсоида.....	79
3.3.2 Вычисление главных начальных кривизн дифрагированной волны в момент ее зарождения на поверхности S	83
3.3.3 Перенос интенсивности дифрагированной волны вдоль поверхности эллипсоида.....	84
3.3.4 Перенос интенсивности дифрагированной волны от момента ее зарождения в область тени.....	88
Глава 4 Дифракция плоской продольной волны на клине и конусе	
4.1 Дифракция плоской продольной волны на клине.....	91
4.2 Дифракция плоской продольной волны на конусе.....	105
Заключение.....	118
Список использованных источников.....	120

Введение

Динамическая теория упругости – это классический раздел механики деформируемого твердого тела, отличающийся разнообразием и глубиной методов, которые имеют приложения в смежных разделах механики и физики. Особое место занимают в ней исследования, связанные с распространением упругих волн и их дифракцией в упругой среде.

Дифрагированные волны используют для выявления тектонических нарушений, при локализации мест выклинивания отдельных горизонтов, для определения сложной конфигурации геологических структур и т.д.

Актуальность проблем динамики деформируемых тел обусловлена развитием различных областей техники, созданием новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, а также проблемы геофизики, сейсмологии, газоразведки, нефтеразведки, добывающей промышленности, строительства гражданских и промышленных сооружений, а также ряд других тенденций научно-технического характера.

В силу практической важности упругого динамического деформирования материалов, изучению этого явления посвящено большое число фундаментальных исследований [15,17,34,43,47,53,55,62,63,65,67,69,71-73,79,81,83,86,103,110,119].

В качестве математического аппарата построения решения динамических задач теории упругости использованы аналитические точные методы [21,42,62,110,112] и численные методы [10,17,227,44,46,101], в частности, метод характеристик [63,72,97]. Для решения трехмерных нестационарных задач упруговязкопластичности может быть применен лучевой метод [39,40,41,43,112], позволяющий представить точное решение на фронте и приближенное – за фронтом волны. Лучевое приближение в расчете распространения сильных и слабых волн в упругих материалах успешно использовалось в [4,22,43,48]. Введение понятия разрывных

решений позволило рассмотреть также распространение волн в диссипативных средах [11].

Распространение волн напряжений в твердых телах описывает нелинейная динамическая теория упругости [21,70,97]. Распространение плоской волны, инициированной ударом по твердому материалу, рассмотрено в [122]. В теории упругости перемещение u_i непрерывно в пространстве и во времени, поэтому сильные разрывы могут появляться только в первых производных. В линейных теориях основные уравнения упрощаются, зависимости между деформациями и градиентами перемещений линеаризуются. Исследования, проводимые нелинейной динамической теорией упругости ограничивается материалом с простейшими свойствами, то есть упругим телом, поскольку оперирует с полными уравнениями.

Задачи распространения волн в упругой среде рассмотрены в [3,8,59,75,139,153,154,159].

Задачам распространения плоских нелинейных упругих волн посвящен ряд статей. В частности, в [140] авторы с помощью слабой нелинейной геометрической оптики получили асимптотические уравнения «переноса» для нелинейных упругих волн с высокой частотой и малой амплитудой в анизотропной среде. Ими подробно изучен простейший пример кубического кристалла, исследовано изменение уравнений при изменении направления волны. Быкова М.И., Вервейко Н.Д. [38] построили уравнение «переноса» сдвиговых волн для случая распространения плоских нелинейно-упругих волн в неограниченном пространстве.

Трепачевым В.В. [120] рассмотрена задача о генерации вторых гармоник при наличии скачка нелинейных модулей упругости третьего порядка. Найдены коэффициенты отражения и преломления волн, а также поле статических смещений, возникающих на комбинационной частоте, равной нулю. Вопросу распространения нелинейных квазипоперечных возмущений в проводящих средах посвящены работы [77,88], продольных волн – [104]. В [143] рассматривается задача о самопереключении плоских

волн в нелинейных упругих средах. Получены редуцированные и эволюционные уравнения, описывающие взаимодействие двух волн: волны накачки (мощная волна) и сигнальной волны (слабая волна). Решение выражается в эллиптических функциях Якоби. Вопросы нелинейной волны, распространяющейся в материале с микроструктурой, посвящена работа [105]. Показано, что структура полученных уравнений инвариантна относительно формы и размеров частиц. Микроповороты и моментные взаимодействия частиц приводят к появлению в этой среде волны микровращений. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. [68] дают систематическое изложение современной теории колебаний и волн, рассматривают волновые процессы в линейных и нелинейных системах.

Исследование напряженного состояния в упруговязкопластических телах посвящена работа [37] в вязкоупругих [66,80] и упруговязкопластических [33,44,45,46,110]. Авторы статьи [137] проводят теоретический анализ условий существования стационарных волн в пластическом материале с трением, используя условие текучести Мора-Кулона. Для построения математической модели волну рассматривают как поверхность разрыва скоростей перемещений и плотности. Материал полагается жесткопластическим с упрочнением или разупрочнением. Данилов В. Г. и др. [58] указывают на возможность существования такого типа волновых процессов, который связан с пластической деформацией, возникающей при равномерном растяжении и соответствует процессам самоорганизации в деформируемой среде. В работе [82] получено уравнение движения для линейно-вязкоупругой цилиндрической оболочки, проведен анализ этих уравнений асимптотическим методом многих масштабов, выведено эволюционное уравнение Кадомцева-Петвиашвили-Бюргера для уединенных волн в данной конструкции, найдено точное решение этого уравнения. Получена зависимость между скоростью продольной волны и физико-математическими параметрами линейно-вязкоупругой оболочки, что может быть использовано при диагностике повреждения материалов

акустическими методами. Авторы [141] рассматривают определяющие уравнения, моделирующие деформирование несжимаемого упругопластического материала. Качественно изучают свойства модельной системы уравнений в частных производных. Показывают, что исследуемую систему можно записать как систему двух консервативных уравнений второго порядка или, вводя подходящие потенциалы, как систему двух нелинейных уравнений второго порядка.

Отражение продольных волн от свободной поверхности с помощью метода конечных элементов и отражение продольных волн перемещения от плоской границы упругого пористого полупространства рассмотрены в [93] и [129], соответственно. Конечно-элементное моделирование для изучения распространения волн применили авторы работ [147] и [150].

Мероприятия по проведению глубоких горных выработок различной конфигурации и глубоких подземных резервуаров – хранилищ нефти и газа диктуют необходимость изучения вопроса о распространении волн в слоистых средах [1,2,100,109,113,127,130,133,134,135,145,148,149,156,162]. В частности, в [1] авторы представляют решение одномерной задачи о воздействии нормальной нагрузки на слой с деформируемым основанием из неупругого материала. Аналитический матричный метод построения решения плоских задач о распространении неустановившихся волн в упругой многослойной среде при действии нагрузок на поверхности раздела или в виде источника в слое представлен в работе [145]. Для решения задачи авторы применяют двойное интегральное преобразование, а также приводят сопоставление с экспериментальными результатами. Сферическая слоистая среда, подвергающаяся воздействию упругой нестационарной волны рассмотрена в [38]. Замечено, что упругие параметры среды скачкообразно меняются на сферических поверхностях, где имеются дефекты в виде трещин, либо тонких жестких включений. Введение новых неизвестных функций, линейно связанных со смещениями и напряжениями, и их

представление через решение волновых уравнений, позволяют решить задачу для произвольного числа слоев.

Распространение упругих волн в анизотропной среде исследовано в [14,16,96,107,111,123,125,157,161]. Бай Ю. П., Сторожев В.И., Шпак В.А. [12] рассмотрели нормальные волны в двухслойной анизотропной пластине, построили распределение кинематических и энергетических характеристик волны по толщине пластины, получили решение для произвольного направления распространения волны. Выведены предельные свойства дисперсионной функции.

Ряд авторов [18,85,155,158] при исследовании распространения волн используют метод комплексных переменных. В условиях набегающей антиплоской волны сдвига [155] ставится задача расчета коэффициентов концентрации динамических напряжений на кромке отверстия. Применяется метод комплексных переменных и процедура разложения по волновым функциям. Получены результаты динамического расчета пьезоэлектрической среды при различных волновых числах и характеристических параметрах. Белоконь О.А. [18] использует метод контурного интегрирования и методы теории функций комплексного переменного для построения точного решения задачи о распространении упругих волн в анизотропной полуплоскости.

Класс задач о распространении волн в упругом пространстве с включениями, различного рода дефектами является актуальным. Его строгим математическим изучением активно начали заниматься в последнее десятилетие. Подобный вид дефектов неоднородностей наиболее часто возникает в неравномерно упрочненных элементах конструкций, а также в слоисто-неоднородных геологических структурах. Большой вклад в решение связанных с этим проблем внесли как отечественные, так и зарубежные исследователи [7,13,19,49,54,57,84,89,91,95,106,108,115,136,138,144,146]. Бабешко В.А., Бужан В.В., Вильямс Р. [7] рассмотрели задачу о локализации вибрационного процесса в упругом пространстве с системой параллельно-ориентированных плоских жестких включений. Попов В.Г. [106] решил

задачу о взаимодействии волн продольного сдвига с упругим цилиндрическим включением, сцепленным с внешней средой. В работе определено волновое поле в среде при рассеивании на включении и исследовано динамическое напряженное состояние вблизи дефекта, расположенного на границе раздела сред. При этом использован метод разрывных решений уравнения Гельмгольца. В [19] предложен метод расчета отраженного волнового поля, возникающего при падении плоской продольной волны на трещину. Исследуется влияние длины трещины на коэффициент трансформации продольной волны. В [115] авторы рассматривают задачу о прохождении волновых пакетов через упругие среды с множественными системами дефектов. В работе предложен численный алгоритм решения задачи прохождения нормально падающей плоской скалярной волны сквозь периодическую систему произвольной формы. Литвин О.В., Попов В.Г. [84] исследуют вопрос о взаимодействии плоских гармонических волн, распространяющихся в неограниченной среде с тонким упругим включением в виде полосы. Изгибные перемещения включения найдены из уравнения изгиба упругих пластин. Граничные условия записаны с учетом поперечных сил и изгибающих моментов, приложенных к боковым кромкам включения. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно скачка нормальных напряжений на включении, которое решено численным методом механических квадратур. Авторы [160] предлагают математическую модель для описания упругих волн, распространяющихся в двумерном теле, содержащем двойной периодический параллелограммный набор круговых отверстий. В работе использован метод мультипольных разложений, учитывающих связь между сдвиговыми и дилатационными волнами через граничные условия. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы, анализирующей дисперсионные диаграммы и фильтрующие свойства структуры.

Особый интерес представляют собой исследования явления дифракции. В первой половине XIX века Юнг и Френель, занимаясь

изучением дифракции света, заложили основы теории дифракции. Весомый вклад в изучение явления дифракции внесли Гримальди, Гюйгенс, Араго, Пуассон, Гаусс, Фраерегофер, Бабинг, Кирхгоф, Ньютон, Аббе, Брэгг и др.

В 1927 г. Дэвиссон и Джермейн, обнаружив дифракцию частиц, подтвердили существование волн де Бройля и концепцию корпускулярно-волнового дуализма.

В XX-XXI веке продолжились исследования дифракции волн на сложных структурах.

Изучение явления дифракции упругих волн велось в трех основных направлениях [33]. Целью первого направления явилось точных аналитических решений задач без исследования напряженного состояния вблизи неоднородностей. Второе направление связано с сведением широкого класса задач дифракции упругих волн к системам многомерных сингулярных и регулярных интегральных уравнений с последующим доказательством существования и единственности решения. Третье направление - это развитие асимптотических методов решения задач дифракции упругих волн, что, обычно не позволяющее определить напряженное состояние вблизи неоднородностей.

Общие положения теории дифракции упругих волн изложены в [43,55,94]. Работа [78] посвящена изучению дифракции электромагнитных волн на периодических решетках из металлических лент.

Решению задач дифракции в угловых областях методом Зоммерфельда-Малюжинца посвящена работа [8].

Осипов Е.А., Плещинский Н.Б. [99] рассмотрели задачу дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе раздела сред. Авторам удалось разложить искомую волну по квазипериодическим волнам Флоке, что привело к парному суммарному функциональному уравнению, которое с помощью метода интегральных тождеств сведено к бесконечной системе линейных уравнений. Эта система может быть решена методом усечения. Доказано, что интегральное

тождество является необходимым и достаточным условием разрешимости вспомогательной переопределенной задачи дифференциальной системы уравнений теории упругости в полупространстве.

Задача дифракции гармонических волн на неподвижном трансверсально-изотропном шаре, находящемся в неограниченной упругой однородной изотропной среде рассмотрена в работе [55]. Задача решается в осесимметричной постановке, в предположении, что модули упругости и коэффициенты Пуассона материала шара зависят только от радиальной координаты и соответствуют трансверсально-изотропному случаю. На поверхности контакта 2-х сред заданы граничные условия сопряжения. Рассматривается дифракция как сферической, так и плоской волны. Задача решена методом неполного разделения переменных Фурье по угловой координате.

В [124] рассмотрена проблема дифракции стационарных и импульсных упругих волн на полостях в анизотропных средах. В работе решена задача о нормальном падении импульсной волны упругих смещений в форме треугольника на жестко подкрепленную неподвижную цилиндрическую полость кругового сечения в ортотропном массиве. При решении используется метод коррекции упругих постоянных анизотропной среды, а импульсное воздействие раскладывается в ряд Фурье, что позволило свести исходную задачу к ряду стационарных задач о деформировании тела статическими и установившимися динамическими воздействиями. Этим методом исследована задача о дифракции импульсной волны на подкрепленной цилиндрической полости сводчатого поперечного сечения в ортотропном массиве. Главный член асимптотики перемещений в случае многократных переотражений и трансформаций упругих волн на скоплении полостей, находящихся в бесконечной изотропной упругой среде получен в работе [23]. В [50] приводятся результаты численного исследования задачи нестационарной дифракции поперечной волны в упругой изотропной среде на бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочке. Численное

моделирование плоской задачи осуществляется на основе вариационно-разностной моментной схемы с консервативным сглаживанием. Расчеты проведены при различных условиях контакта оболочки с внешней средой. Полученные результаты сравниваются с аналогичными результатами для задачи взаимодействия оболочки с продольной волной.

Возможность дифракционной томографии волн в пластинах для восстановления неоднородностей изгиба пластины по результатам компьютерного моделирования исследуется в [152]. Результаты исследования показывают, что дифракционная томография волн в пластинах позволяет количественно восстановить положение, размер и значимость повреждения и дает возможность обнаружения коррозионного утончения, разломов и отслоений. Толоконников Л.А. [118] рассмотрел задачу дифракции плоской гармонической продольной упругой волны на радиально неоднородной толстостенной цилиндрической оболочке, материал которой обладает анизотропией общего вида. Бестужева А.Н., Обручева Т.С., Черкашин В.П. [20] исследуют дифракцию плоской упругой продольной волны на цилиндрической полости произвольного сечения. Глазова Е.Г., Зефирова С.В., Кочетков А.В. [50] приводят результаты численного исследования задачи нестационарной дифракции поперечной волны в упругой изотропной среде на бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочке. Численное моделирование плоской задачи авторы осуществляют на основе вариационно-разностной моментной схемы с консервативным сглаживанием. Задача дифракции упругих волн на пространственных трещинах [61] сведена к граничным интегральным уравнениям относительно неизвестного скачка смещений берегов трещины и решена вариационно-разностным методом. Анализ дифракции плоской волны на полубесконечной трещине в неограниченном твердом теле дан в работе [131]. Авторами рассмотрены два типа волн: продольные и поперечные. Получено точное решение для задач с начальными и смешанными условиями. Ortiz P.,

Sanchez E. [151] предложили в целях эффективного численного решения задачи дифракции использовать конечно-элементную модель разбиения объекта. Budaev B.V., Bogy D.B. [132] развивают подход к решению задач дифракции волн, комбинирующий физическую прозрачность лучевого метода с многосторонностью прямых численных методов. На начальном этапе анализ проводится по схеме, близкой к лучевому методу, а затем вместо поиска приближенных выражений для амплитуд декомпозиции Лиувилля получены их точные представления как математические ожидания некоторых функционалов на пространстве броуновских траекторий. Полученные решения дают прямые улучшения аппроксимаций лучевого метода к точным решениям. В работе [76] предложен и обоснован метод решения краевых задач дифракции термоупругих волн на объектах сложной формы, основанный на теории R -функций. Проведенные численные эксперименты для упругой среды с круговой полостью и с круговой полостью с выточкой показали эффективность метода. Гусенкова А.А. [56] получила интегральные уравнения двумерных задач дифракции упругой гармонической волны на дефекте, расположенном вдоль отрезка вещественной оси. При решении использовано преобразование Фурье. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Ехлаков А.В. [51] исследуют дифракцию плоских P - и S -волн, падающих под произвольным углом на пространственную трещину произвольной в плане формы. Трещина расположена в плоскости склейки двух упругих изотропных полупространств. Волновое поле предполагается установившимся гармоническим, берега трещины - свободными от напряжений. Исследуются отраженные и преломленные объемные волны, а также волны Стоунли, распространяющиеся вдоль границы склейки материалов при определенных соотношениях их упругих свойств.

Алексеева Л.А., Кайшибаева Г.К. [6] рассмотрели краевые задачи динамики упругих изотропных сред, ослабленных цилиндрическими полостями произвольной формы поперечного сечения. Разработан метод

сингулярных граничных интегральных уравнений для решения задач дифракции упругих плоских волн, среди которых могут быть и ударные, со скачком напряжений на фронте волны. Рассмотрены случаи при докритических и закритических углах падения волны, что влияет на построение ядер, разрешающих сингулярные граничные интегральные уравнения и их асимптотические свойства. Для построения определяющих соотношений использован аппарат теории обобщенных функций и теория граничных интегральных уравнений краевых задач теории упругости при действии стационарных бегущих нагрузок.

Ющенко Н.Л. в работе [128] показал определение дополнительных дифракционных поправок, полученных в результате обработки экспериментальных данных.

Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л. [24] исследуют дифракцию упругих гармонических волн на упругой неоднородной трансверсально-изотропной толстостенной сфере. Использование ранее известных аналитических решений для упругих однородных изотропных сред в сферической системе координат позволило авторам свести исходную задачу к интегрированию краевой задачи со специальным типом граничных условий, содержащих только функции неоднородной сферы. Приведены пространственные распределения параметров напряженно-деформированного состояния неоднородной для степенных зависимостей жесткостных параметров сферы. В работах [23], [24] авторы рассмотрели задачу дифракции гармонических волн на неподвижном трансверсально-изотропном шаре, находящемся в неограниченной упругой однородной изотропной среде. Предполагается, что модули упругости и коэффициенты Пуассона материала шара зависят только от радиальной координаты и соответствуют трансверсально-изотропному случаю. Задача решается в осесимметричной постановке. Задаются граничные условия сопряжения на поверхности стыка двух сред. Рассматривается дифракция как сферической, так и плоской волны. Требуется определить поле, рассеянное неоднородным

шаром. Для решения задачи используется метод неполного разделения переменных Фурье по угловой координате. Задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов рядов. Особенностью полученной системы является зависимость коэффициентов от пространственной координаты. С использованием известных аналитических решений для упругой среды для разрешающей системы уравнений получены граничные условия специального вида, содержащие только параметры для неоднородного шара и характеристики заданной падающей волны.

В работе [126] изучена осесимметричная задача о дифракции нестационарных волн. В качестве препятствия выбран абсолютно жесткий неподвижный шар в упругом полупространстве. Получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений в пространстве изображений преобразования Лапласа по времени. Исследовано напряженно-деформированное состояние среды в окрестности шара. Для задачи о дифракции нормальных мод на наклонной трещине в упругом слое [52] выведено интегральное уравнение с явным представлением Фурье-символа ядра в виде произведения матриц. Реализованный на основе полученных аналитических представлений алгоритм расчета волновых полей позволяет проводить быстрый параметрический анализ влияния размеров и ориентации трещины на прохождение бегущих волн.

Методом интегральных уравнений решается задача дифракции плоских гармонических волн в [94] на периодической системе жестких цилиндрических включений произвольного поперечного сечения. Полученные сингулярные интегральные уравнения реализуются численно. Проведен параметрический анализ напряженно-деформированного состояния среды на границе включений.

Рассеяние волн сжатия в многофазных композитах с металлической матрицей, содержащих сферические частицы со сферически изотропными промежуточными слоями рассмотрено в [142]. Предполагается, что

реализуется непрерывный переход поперек толщины межфазной зоны от частицы к матрице с изменением объемной дифракции одной из составляющих. Для межфазной структуры рассматривается многослойная модель, включающая как анизотропию, так и неоднородность. Для решения модального уравнения состояния применяется теорема разложения Тейлора, что приводит к глобальной передаточной матрице, которая непосредственно связывает граничные условия на внешней поверхности промежуточного слоя с условиями на внутренней поверхности. Численные расчеты обнаруживают существенное влияние межфазной анизотропии и неоднородности на полное поперечное сечение рассеяния и концентрацию динамических напряжений в умеренно широком диапазоне частот и толщин промежуточного слоя.

Медведский А. Л. [87] строит решение задачи о дифракции упругих нестационарных волн на неоднородной трансверсально - изотропной сфере. Автор использовал общий метод применения поверхностных функций влияния в задачах дифракции. Построена краевая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка с граничным интегральным оператором типа свертки по времени. Система решена с помощью конечно-разностной схемы первого порядка точности по временной и пространственным координатам типа Куранта-Изаксона-Риса. В работе также представлено решение внешней задачи о дифракции упругих волн, в которой в качестве препятствия выбрано неоднородное трансверсально-изотропное включение в форме сферы.

Мойсеенок А.П., Попов В.Г. [92] предлагают решение задачи о дифракции упругих нестационарных волн на тонком полосовидном отслоившемся жестком включении в неограниченной упругой среде. Задача решена в условиях плоской деформации. Рассмотрено включение, одна сторона которого полностью сцеплена со средой, а другая отслоилась и на ней выполнены условия гладкого контакта. Метод решения состоит в том, чтобы применить построенные ранее в пространстве изображений Лапласа разрывные решения уравнений движения Ламе к плоской деформации.

Задача сводится к решению системы трех сингулярных интегральных уравнений относительно изображений неизвестных скачков. Система решена численным методом, основанным на замене интеграла Меллина рядом Фурье.

В работе [90] авторы рассматривают задачу динамической теории упругости о дифракции гармонических волн на полостях цилиндрической формы с внутренними жесткими включениями сегментного сечения. Задача решена с использованием численно-аналитической методики. На границе контакта массива и абсолютно жесткой фиксированной неоднородности заданы краевые условия, накладывающие ограничения на сдвиговые волновые перемещения. В данной задаче свободной от напряжений является граничная поверхность внутри полости, не контактирующая с неоднородностью. В результате исследования сделаны выводы о влиянии величины относительной длины падающей волны и расположении включения (тыльная или фронтальная зона) на распределение поля рассеянных волн в окрестности полости.

Ершов Н.Е., Илларионова Л.В. [60] приводят численное решение пространственных задач распространения стационарных упругих колебаний в средах, содержащих трехмерные включения. Метод теории потенциала позволил свести рассмотренную задачу к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных внутренних и внешних плотностей вспомогательных источников волн. Полученная система интегральных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений, решение которой проводится численно. Приближенное решение исходной задачи получается путем аппроксимации интегральных уравнений системой линейных алгебраических уравнений, которая затем решается численно. При этом используется свойство "саморегуляризации" применяемого алгоритма, позволяющее находить численное решение без привлечения громоздких регуляризирующих алгоритмов. В работе рассмотрен метод разделения переменных и различные его обобщения посредством

применения теорем сложения специальных функций. Получено представление решения волнового уравнения в виде ряда с разделяемыми переменными для цилиндра произвольного односвязного поперечного сечения. Для нестационарных задач изложен метод сведения их к интегральному уравнению Вольтерра после неполного разделения переменных. Дан краткий анализ других методов. Полученные результаты численных расчетов и экспериментов подтверждают правильность применяемого метода для численного решения задач дифракции упругих волн в трехмерных постановках.

Общая характеристика диссертационной работы. В настоящей диссертационной работе исследована математическая модель распространения и дифракции упругих волн, рассмотрено применение лучевого метода для решения квазилинейной системы уравнений в частных производных гиперболического типа.

Рассмотрена задача дифракции плоской продольной волны на выпуклой поверхности. Получено выражение для кривизны фронта дифрагированной волны на препятствии, которое использовано в уравнении переноса. В качестве примеров рассмотрена дифракция плоской волны на круговом цилиндре. Изучено поведение дифрагированной пространственной волны на сфере и эллипсоиде. Получено выражение для интенсивности w/w_0 дифрагированной волны в зависимости от времени и параметров характеризующих размеры и форму препятствия.

Рассмотрена задача прямой дифракции упругой продольной волны на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки клина окружностью и вершины конуса сферой малого радиуса δ . Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Актуальность темы. Дифракция представляет собой универсальное волновое явление и характеризуется одними и теми же законами в случае волн разной природы. Явление дифракции волн используется в сейсмографии, геологии, космонавтике, мероприятиях по проведению глубоких горных выработок различной конфигурации и глубоких подземных резервуаров – хранилищ нефти и газа.

Проблема дифракции упругих волн на различных неоднородностях является одной из наиболее сложных и актуальных с точки зрения приложений проблем динамики деформируемых тел. Это связано с тем, что почти во всех возникающих задачах наличие неоднородности (включения, полости, вырезы, локального изменения свойств и т.д.) является неизменным условием и информация о напряженном состоянии возле этих неоднородностей необходима для различных целей. В состав классических задач динамики деформируемых тел входят задачи дифракции упругих волн на неоднородностях, их решение сопряжено со значительными трудностями и требует привлечения сложного математического аппарата.

Значительный вклад в развитие теории распространения волн в упругих, упруговязкопластических средах и жидкостях внесли отечественные ученые: Баскаков В. А., Бабич В.М., Белов Н. Н., Бугримов А. Л., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д., Ерофеев В. И., Захаров В.Е., Зельдович Я. Б., Исаков А. Л., Кадомцев Б. Б., Кудряшов В. Н., Кукуджанов В. Н., Никитин Л. В., Николаевский В. В., Рязанцева М. Ю., Сагомоян А. Я., Самарский А. А., Самсонов А. М., Филатов Г. Ф., Чернышов А. Д., Шабат А. Б., Яворович Л. В. и др.

Многие важные результаты в исследованиях по распространению волн получены зарубежными учеными: Acharya D. P. [129], Al-Khoury R. [130], Brock L. M. [131], Galan Jose M., Abascal Ramon [134], Gai Bing-Zheng [135], Guliyev Mugan S. [139], Domanski Wlodzimierz [140], Donato A. [141] и др.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ кафедры механики и компьютерного

моделирования Воронежского государственного университета в рамках темы: «Разработка математических моделей и эффективных аналитических и численных методов решения статических и динамических задач механики деформируемых сред сложной структуры». Исследование соответствует п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести», п. 8. «Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» (код по ГАСНТИ 30.19.23, 30.19.29).

Цели и задачи работы. Исследование дифракции плоских и пространственных упругих волн на выпуклых препятствиях: круговом цилиндре, сфере и эллипсоиде лучевым методом.

Поставленная цель достигается посредством решения следующих задач:

1. Оценка погрешности лучевого метода расчета дифрагированных волн.
2. Исследование распределения интенсивности дифрагированной волны за цилиндром.
3. Исследование распределения интенсивности плоских коротких дифрагированных волн за сферой.
4. Исследование вопроса распределения интенсивности напряженного состояния за пространственной дифрагированной волной, образованной в результате падения предельной плоской волны на сферу, эллипсоид.
5. Исследование интенсивности дифрагированных волн вблизи переднего фронта дифрагированных волн на клине и конусе путем приближенной замены острой кромки цилиндрической и сферической поверхностью малого радиуса δ .

Методы исследования. Методами исследования поставленной задачи являются аналитические точные и приближенные методы. Выполненные аналитические и численные расчеты обоснованы: строгой формулировкой

математической модели распространения и дифракции упругих волн на выпуклых препятствиях, корректной математической постановкой задачи, правильностью применения математического аппарата, и программного обеспечения.

Научная новизна.

1. Приведено точное решение уравнения для интенсивности дифрагированной волны за цилиндром в области тени для случая коротких волн. Показано, что значение интенсивности волны затухает вдоль фронта дифрагированной волны и уменьшается по времени.

2. Лучевым методом проведен расчет интенсивности напряженного состояния за пространственной дифрагированной волной, образованной в результате падения предельной плоской волны на сферу. Показано затухание интенсивности дифрагированной волны вдоль ее фронта и в процессе распространения волны.

3. Рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклым препятствием. Для случая эллипсоида при распространении дифрагированного фронта вдоль поверхности препятствия построено выражение для интенсивности волны в зависимости от времени, от расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны. Построены графики, отображающие эту зависимость для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида, которые показали экспоненциальное затухание интенсивности напряжений за дифрагированной волной в области тени за препятствием.

4. Лучевым методом проведено исследование интенсивности дифрагированных волн вблизи переднего фронта дифрагированных волн в окрестности вершины клина и конуса путем приближенной замены острой кромки клина и вершины конуса цилиндрической и сферической поверхностями малого радиуса δ , соответственно. Приведены графики значений безразмерных коэффициентов скачков отраженных продольной k_1

и сдвиговой k_2 волн из которых следует, что максимальное значение коэффициент k_1 принимает при $\varphi = \pi/2$, а коэффициент k_2 при $\varphi = \pi/4$.

Достоверность исследований, проведенных в диссертационной работе, основывается на физически строго сформулированной математической модели, правильности применения математического аппарата теории уравнений в частных производных. Достоверность проведенных исследований подтверждается тем, что полученные результаты соответствуют физическому смыслу процесса дифракции упругих волн.

Практическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы при создании новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, современных задачах геофизики, сейсмологии, газо-нефтегазразведки, добывающей промышленности. При подготовке магистров материал можно использовать при чтении спецкурсов по актуальным проблемам динамики деформируемых тел.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на: научных семинарах кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета 2011 – 2014гг.; на научных сессиях факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета 2011 – 2014гг.; на международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проходившей в Воронежском госуниверситете 2011г.; на международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», г.Воронеж, 2013г.; на международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий», Чебоксары, 2013г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 9 печатных работ, из них две в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации

основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 162 наименований. Работа изложена на 137 страницах машинного текста, содержит 37 рисунков.

Основное содержание работы. Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы и задачи исследования, научная новизна диссертационной работы, выносимые на защиту научные положения и результаты, дана краткая аннотация по главам и краткий обзор работ, касающихся темы диссертации.

В первой главе приведены общие сведения из волновой динамики, общие сведения из дифференциальной геометрии, построена математическая модель распространения упругих волн, рассмотрен лучевой подход решения задачи дифракции упругих волн.

Во второй главе исследована дифракция плоской упругой волны на цилиндре, построено уравнение дифрагированного фронта для определения его кривизны в плоском случае в параметрическом виде. Определена интенсивность коротких дифрагированных волн на цилиндре в области тени. Построены графики изменения относительной интенсивности дифрагированной волны на поверхности цилиндра и вне его в зависимости от времени t и параметра φ , определяющего положение точки на дифрагированном фронте.

Лучевым методом проведен расчет интенсивности напряженного состояния за пространственной дифрагированной волной, образованной в результате падения предельной плоской волны на сферу. Показано затухание интенсивности дифрагированной волны вдоль ее фронта и в процессе распространения волны. Рассмотрена задача дифракции предельной пластической волны на выпуклой поверхности в предположении, что

напряженное состояние за плоской продольной волной удовлетворяет условию пластичности Мизеса.

В третьей главе рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклым препятствием. В качестве препятствий выбраны сфера и эллипсоид. При распространении дифрагированного фронта вдоль поверхности препятствия интенсивность зависит от времени, от расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны. Построены графики, отображающие эту зависимость для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида которые показали факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

В четвертой главе рассмотрена задача прямой дифракции упругой продольной волны на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки клина окружностью и вершины конуса сферой малого радиуса δ . Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Заключение содержит оценку вклада автора в проведенные в диссертации исследования и значимости полученных результатов.

Основные результаты диссертации.

1. Приведено точное решение уравнения для интенсивности дифрагированной волны за цилиндром в области тени. Показано, что значение интенсивности волны затухает вдоль фронта дифрагированной волны и уменьшается по времени.

2. Рассмотрена задача дифракции предельной пластической волны на выпуклой поверхности в предположении, что напряженное состояние за плоской продольной волной удовлетворяет условию пластичности Мизеса. В качестве жесткой поверхности выбрана сферическая поверхность. Приведено точное решение уравнения для интенсивности дифрагированной волны за

цилиндром в области тени для случая коротких волн. Показано, что значение интенсивности волны затухает вдоль фронта дифрагированной волны и уменьшается по времени.

3. Рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклым препятствием. В качестве препятствия выбран эллипсоид. При распространении дифрагированного фронта вдоль поверхности препятствия интенсивность зависит от времени, от расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны. Построены графики, отображающие эту зависимость для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида. В результате проведенного исследования получил подтверждение физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

4. Рассмотрена задача прямой дифракции упругой продольной волны на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки клина окружностью и вершины конуса сферой малого радиуса δ . Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору технических наук, профессору Вервейко Николаю Дмитриевичу за постоянное внимание и оказанную помощь в работе.

Глава 1 Основные положения лучевой теории распространения и дифракции упругих волн

1.1 Общие сведения из волновой динамики

Целью исследования динамического поведения упругого материала является нахождение перемещений, скоростей и напряжений в точке пространства, так что задача является пространственно-временной и определяется системой уравнений в частных производных [70,97,112].

При деформировании тел происходит движение частиц, в связи с этим температура тела изменяется со временем и при переходе от точки к точке тела. Но передача тепла из одного участка тела в другой происходит очень медленно, поэтому каждый участок тела можно рассматривать как теплоизолированный. Приравняв силу внутренних напряжений $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ и массовые силы q_i произведению ускорения \ddot{u}_i на плотность ρ , получим уравнения движения упругой среды [78,81]:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho q_i. \quad (1.1)$$

Выражение (1.1) – это общий вид уравнения движения. Для изотропной упругой среды можно записать уравнение в виде:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{\bar{u}} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{grad div } \mathbf{\bar{u}} + \rho \mathbf{q}_i, \quad (1.2)$$

где E, ν -модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно.

Так как все деформации предполагаются малыми, то движения, которые рассматриваются в теории упругости, представляют собой упругие колебания или волны.

Рассмотрим плоскую упругую волну в неограниченной упругой среде [67]. Для плоской волны деформация является функцией одной координаты, например, x , тогда все производные по y и z в уравнении (1.2) равны нулю, поэтому уравнение (1.2) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{\tilde{c}_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{\tilde{c}_\perp^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\tilde{c}_\perp^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0, \quad (1.3)$$

где $\tilde{c}_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$, $\tilde{c}_\perp = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ - скорости распространения волн по направлению движения самой волны и в плоскости, перпендикулярной этому направлению соответственно.

Уравнения (1.3) позволяют сделать вывод, что упругие волны представляют собой две независимо распространяющиеся волны [81]. В одной из них смещение u_x направлено вдоль распространения самой волны, это продольная волна, распространяющаяся со скоростью \tilde{c}_l . В другой u_y, u_z - смещение направлено в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. Такая волна называется поперечной и распространяется со скоростью \tilde{c}_\perp . Сравнивая \tilde{c}_l и \tilde{c}_\perp , заметим, что $\tilde{c}_l > \tilde{c}_\perp$ [81].

При деформации изменение объема определяется суммой диагональных членов тензора деформации $u_{ii} = \text{div} \vec{u}$ [67]. В поперечной волне имеются только компоненты u_y и u_z и, поскольку они не зависят ни от y , ни от z , то для такой волны $\text{div} \vec{u} = 0$. Таким образом, поперечные волны не связаны с изменением объема отдельных участков тела. Для продольных же волн $\text{div} \vec{u} \neq 0$, эти волны сопровождаются сжатиями и расширениями в теле.

Разделение волны на две независимо распространяющиеся с разными скоростями части можно произвести не только для плоской, но и для произвольной упругой волны в неограниченном пространстве [81].

Особым видом упругих волн являются волны, которые распространяются вблизи поверхности тела, несущие возмущения и мало проникающие вглубь вещества, так называемые волны Рэлея [67].

Рэлеевские волны распространяются со скоростью, меньшей скоростей падающей поперечной и продольной волн. Амплитуды колебаний экспоненциально убывают в направлении нормали к поверхности препятствия. В рэлеевской волне частицы движутся по эллипсам, лежащим в

плоскости, проходящей через волновой вектор и нормаль к поверхности препятствия. В случае поверхностных волн разделение на две независимые части (продольные и поперечные волны) невозможно в связи с наличием граничных условий. Рэлеевские волны будучи наиболее распространенным типом поверхностных волн играют важную роль в сейсмических явлениях, так как они расходятся при распространении от источника возмущения только в двух измерениях и поэтому затухают обратно пропорционально корню из проходимого волной расстояния.

Полная система уравнений для упругой среды [67] состоит из уравнений движения, закона сохранения массы, соотношений Коши, выражающих тензор деформаций через компоненты вектора перемещений и уравнений состояния упругого тела. Исключая из перечисленных уравнений компоненты тензора напряжений σ_{ij} и компоненты тензора деформаций ε_{ij} , приходим к системе уравнений в частных производных гиперболического типа относительно компонент вектора перемещения.

В случае, когда данные задачи являются достаточно гладкими функциями, задача имеет решение $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемая по x и t . Однако далеко не всегда заданные функции обладают требуемой гладкостью [67]. Это приводит к необходимости рассматривать разрывные решения динамических задач, когда возникают движущиеся поверхности разрыва Σ . Эта движущаяся поверхность разрыва, отделяющая возмущенную область от невозмущенной, называется фронтом волны. Если на поверхности Σ претерпевают разрыв вторые производные $u(x,t)$, то такие решения называются волнами слабого разрыва, если на поверхности Σ претерпевают разрывы первые производные $u(x,t)$, то такие решения называются волнами сильного разрыва (ударные волны).

1.2 Представление поведения перемещения $u(x,t)$ за фронтами ВОЛН

Поведение перемещения $u(x,t)$ за фронтами волн удовлетворяет уравнениям движения (в одномерном случае (1.3)). Одним из вариантов представления $u(x,t)$ в окрестности фронта $\Sigma \quad \tilde{c}t - p(x) = const$ является использование ряда Тейлора [78,79,81]:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=\tilde{c}t} (x - \tilde{c}t)^k. \quad (1.4)$$

Здесь использовано свойство независимости скорости \tilde{c} упругих волн от интенсивности волн, поэтому $p(x) = x$.

В предположении разрывности решения системы (1.3) в силу непрерывности перемещений на фронте упругой волны (рис.1) нулевой член ряда (1.4) должен быть известен из поведения материала в невозмущенной области перед волной Σ , а следующие члены ряда (1.4) находятся как решение системы (1.3).

Для скорости перемещения точек сплошной упругой среды $v(x,t) = \frac{du(x,t)}{dt}$ ряда (1.4) будет иметь вид:

$$v(x,t) = \sum \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \Big|_{x=\tilde{c}t} (x - \tilde{c}t)^l. \quad (1.5)$$

Сохранение только нулевого члена ряда за фронтом на Σ в (1.5) отвечает приближенному представлению $v(x,t)$ вблизи Σ с погрешностью первого порядка по расстоянию $(x - \tilde{c}t)$ от самого фронта. Удержание членов более высокого порядка будет уменьшать погрешность (1.5). Таким образом, исследование интенсивностей волн сильного разрыва и слабого разрыва l -того порядка на Σ дает приближенное решение для скорости $v(x,t)$ вблизи Σ с погрешностью $r(x,t) = o(x - \tilde{c}t)^{l+1}$.

1.3 Отражение, преломление волн, дифракция

Рассмотрим отражение и преломление плоской упругой волны на границе раздела между двумя различными упругими средами [81]. Будем иметь в виду, что при отражении и преломлении характер волны меняется. Если на границу раздела падает чисто поперечная или чисто продольная волна, то, в результате получаются смешанные волны, содержащие как продольные, так и поперечные части. Характер волны не меняется только в случае перпендикулярного падения волны на поверхность раздела и в случае падения под произвольным углом поперечной волны с колебаниями, параллельными плоскости раздела. Соотношения, определяющие направления отраженной и преломленной волн, могут быть получены непосредственно из постоянства частоты и касательных к поверхности раздела компонент волнового вектора [81].

Пусть θ и θ' - угол падения и угол отражения (или преломления) соответственно, а \tilde{c} и \tilde{c}' - скорости обеих рассматриваемых волн [81].

Тогда:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\tilde{c}}{\tilde{c}'} \quad (1.6)$$

Соотношение (1.6) представляет собой математическую формулировку закона Снелла (рис.1).

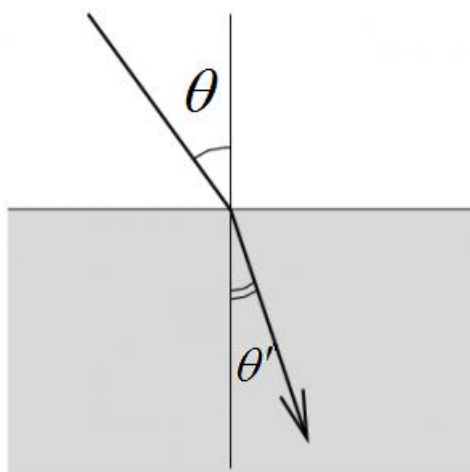


Рис.1. Закон Снелла

Пусть падающая волна является поперечной, тогда $\tilde{c} = \tilde{c}_{\perp 1}$ есть скорость поперечных волн в первой среде. Для поперечной же отраженной волны имеем $\tilde{c}' = \tilde{c}_{\perp 1}$, и потому (1.6) даст $\theta = \theta'$, то есть угол падения равен углу отражения. Для продольной отраженной волны имеем $\tilde{c}' = \tilde{c}_{\parallel 1}$ и потому

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\tilde{c}_{\perp 1}}{\tilde{c}_{\parallel 1}}.$$

Для поперечной части преломленной волны имеем $\tilde{c}' = \tilde{c}_{\perp 2}$ и при поперечной падающей волне имеем:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\tilde{c}_{\perp 1}}{c_{\perp 2}}.$$

Аналогично для продольной преломленной волны имеем:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\tilde{c}_{\perp 1}}{\tilde{c}_{\parallel 2}}.$$

Распространение волн в среде подчиняется принципу Ферма, согласно которому волны при распространении от одной точки к другой выбирают путь, которому соответствует наименьшее время распространения.

Пусть пространство, занятое средой, в которой распространяется волна, имеет границу S , причем такую, что существует область геометрической тени, т.е. область, куда не могут попасть прямые падающие лучи [67]. Явление дифракции состоит в том, что возмущения все же попадают в область геометрической тени. Этот факт объясняется принципом Гюйгенса, согласно которому каждая точка среды, до которой дошло возмущение, сама становится источником вторичных волн. Луч, попавший в точку D тени рис.2, не может пересечь фронт волны $\Sigma_{t'}$ в момент t' , так как, согласно принципу Ферма, он должен быть нормальным к $\Sigma_{t'}$. Поэтому луч должен пересечься с границей S в точке C , и должен касаться границы S . Фронт дифрагированной волны $\Sigma_{t'}$ может быть построен при соответствующей модификации известного способа Гюйгенса. Время прихода возмущения из точки A в точку тени D в однородной среде может быть вычислено, исходя из принципа Ферма [121], делением расстояния,

измеренного вдоль струны $ABCD$, на скорость звука, что справедливо, как в среде, состояние которой описывается одним гиперболическим (волновым) уравнением, так и для изотропной упругой среды.

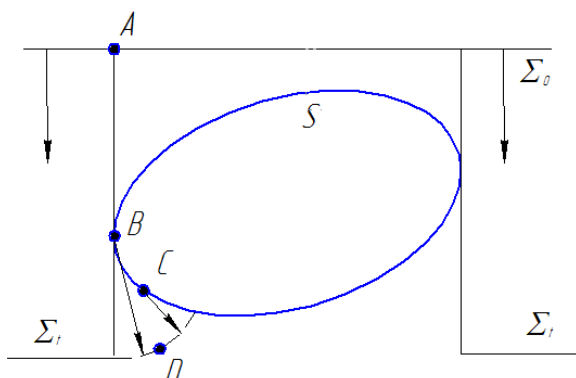


Рис.2. Схематическое изображение траектории прохождения криволинейного

луча вдоль струны $ABCD$ в область геометрической тени в точке D

Возможен случай, когда области тени нет. Тогда существуют только отраженные волны, которые могут быть найдены лучевым методом, когда падающая волна представляется в виде лучевого ряда [67]:

$$u_{nao}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) f_k(\tilde{c}t - p(x)), \quad (1.7)$$

где $\tilde{c}t - p(x) = 0$ - уравнение фронта падающей волны, а $\{f_k(\tau)\}$ - любая система функций, обладающая следующими свойствами:

- 1) $f_k'(\tau) = f_{k-1}(\tau)$,
- 2) если $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k(\tau)$, то $a_k = b_k$.

Отраженная волна так же ищется в виде (1.7) с неизвестными коэффициентами $A_k(x)$. Задача состоит в нахождении этих коэффициентов и фронта отраженной волны $\tilde{c}t - p_1(x) = 0$, определяемого геометрическим путем. Из уравнений лучевого метода следует, что если кривизна отражающей поверхности или ее производная m -го порядка терпит разрыв в некоторой точке, то $(m+1)$ -й член лучевого ряда для отраженной волны не

может быть определен без введения дополнительных волн, также называемых дифрагированными $(m+1)$ -го порядка.

Особенность математической формулировки задачи дифракции состоит в том, что в ней вместо начальных условий при $t = t_0$: $u = u_0(x)$, $\dot{u} = v_0(x)$ задана распространяющаяся в неограниченной области волна, достигающая в некоторый момент времени t_0 границы препятствия S . На поверхности S задаются граничные условия или другие, отражающие физические свойства препятствия и условия контакта со средой [81].

1.4 Общие сведения из дифференциальной геометрии

1.4.1 Кривая. Основные определения

Элементарной кривой в пространстве называется образ открытого интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ при его гомеоморфизме $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ в евклидово трехмерное пространство. Гомеоморфизм – взаимно-однозначное и непрерывное отображение топологических пространств, обратное к которому тоже непрерывно [117].

Общей кривой на плоскости называется подмножество евклидова пространства, локально гомеоморфное прямой [117].

Кривая γ задана неявным способом:

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \quad (1.8)$$

если координаты каждой точки кривой γ удовлетворяют обоим уравнениям (1.8).

Наиболее часто используются векторно-параметрическое представление $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (a, b)$ и координатно-параметрическое представление $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in (a, b)$.

Неявное задание (1.8) кривой регулярно в точке P , если матрица частных производных $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ имеет в этой точке ранг 2.

Направляющий вектор касательной – это производная $\vec{r}'(t)$, имеющая физический смысл скорости.

Нормальная плоскость кривой в точке P – это плоскость, проходящая через точку P ортогонально касательной [117].

Соприкасающейся плоскостью кривой в ее точке P (рис.3) называется содержащая эту точку плоскость α , удовлетворяющая соотношению $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\text{dist}(Q, \alpha)}{\text{dist}^2(Q, P)} = 0$, где Q – точка, принадлежащая элементарной окрестности точки P .

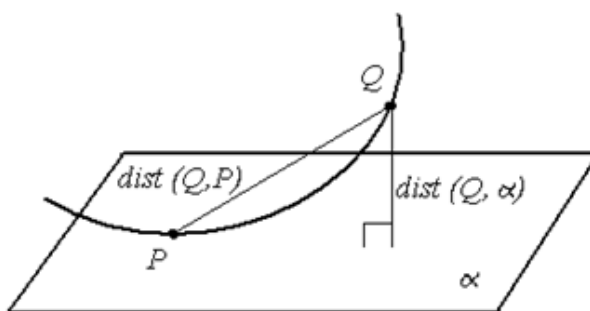
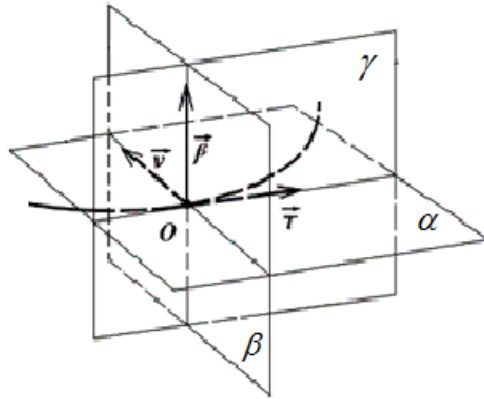


Рис.3. К определению соприкасающейся плоскости

Спрямляющей плоскостью кривой в ее точке P называется содержащая эту точку плоскость, ортогональная нормальной и соприкасающейся плоскостям в этой точке [117].

Прямые, ортогональные соприкасающейся и спрямляющей плоскостям в точке P , называются соответственно бинормалью и главной нормалью кривой в точке P .

Нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая плоскости образуют сопровождающий трехгранник кривой, или трехгранник Френе, в точке P , и называются его гранями. Касательная, бинормаль и главная нормаль называются ребрами сопровождающего трехгранника (рис.4) [117].



α - соприкасающаяся плоскость, β - нормальная плоскость, γ - спрямляющая плоскость.

Рис.4. Сопровождающий трехгранник кривой

Единичные векторы касательной и главной нормали могут быть вычислены по формулам:

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \quad \vec{n} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| \cdot |\vec{r}'(t)|}.$$

Пусть P и Q - две различные точки кривой γ , соответствующие значениям s и $s + \Delta s$ естественного параметра. Тогда $|\Delta s|$ - длина дуги кривой, заключенной между точками P и Q [117]. Пусть также $\Delta\theta$ - величина угла, образуемого касательной к кривой в точке Q с касательной в точке P .

Кривизна кривой γ в ее точке P - это предел $k = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$.

Кривизна пространственной кривой всегда положительна и в регулярной точке может быть вычислена по формулам:

$$k = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}, \quad \text{если параметризация произвольная и } k = |\vec{r}''(s)|, \quad \text{если}$$

параметризация естественная [117]. Или в координатной форме:

$$k = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.9)$$

1.4.2 Огибающая семейства кривых, зависящих от параметра

Пусть $S\{\gamma_\alpha\}$ - семейство гладких кривых на плоскости, зависящих от параметра α . Гладкая кривая γ называется огибающей семейства S , если она в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства и каждым своим отрезком касается бесконечного множества кривых семейства (рис.5).

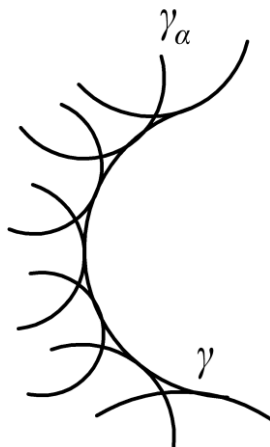


Рис.5. Огибающая семейства кривых

Например, гладкая кривая, не имеющая прямолинейных участков, является огибающей своих касательных [117].

Нижеследующая теорема в известной степени решает вопрос о нахождении огибающей [98]: пусть кривые γ_α семейства S в области G задаются уравнениями: $\varphi(x, y, \alpha) = 0$, $a \leq \alpha \leq b$, где φ - непрерывно дифференцируемая функция по всем аргументам, удовлетворяющая условию $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$.

Тогда огибающая γ семейства S , если она существует, задается уравнениями:
$$\begin{cases} \varphi(x, y, \alpha) = 0 \\ \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$
 в том смысле, что для каждой точки (x, y) огибающей можно указать такое α что системой значений x, y, α будут удовлетворяться оба уравнения $\varphi = 0$, $\varphi_\alpha = 0$ [98].

Кривая, определяемая системой уравнений $\begin{cases} \varphi(x, y, \alpha) = 0 \\ \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$, является

огibaющей, если она не состоит из особых точек кривых семейства.

1.4.3 Поверхность. Основные определения

Элементарной областью на плоскости переменных u, v называется область, гомеоморфная кругу [117]. Элементарной поверхностью в пространстве переменных x, y, z называется множество точек пространства, гомеоморфное элементарной области на плоскости. Функциональное задание гомеоморфизма $f: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$ называется параметрическим представлением поверхности. Образы прямых вида $u = u_0$ и $v = v_0$ называются координатными линиями на поверхности и задаются уравнениями $x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v), \quad z = z(u_0, v)$, или $x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0), \quad z = z(u, v_0)$, и каждой точке ставится в соответствие пара чисел (u_0, v_0) , называемая криволинейными координатами.

Общей поверхностью называется подмножество евклидова пространства, локально гомеоморфное евклидовой плоскости. Необходимое и достаточное условие локальной гомеоморфности отображения, задаваемого в области G плоскости переменных u, v регулярными функциями $x = x(u, v)$,

$y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$ это равенство $\text{rank} \begin{pmatrix} x_u & y & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$. Общая поверхность

допускает покрытие элементарными поверхностями.

Сеть координатных линий поверхности, или координатная сеть, называется правильной в точке P , если в этой точке выполнено условие $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$. Заметим, что частные производные \vec{r}_u и \vec{r}_v в данной точке (u_0, v_0) представляют собой касательные векторы к координатным линиям $u = u_0$ и $v = v_0$ соответственно. Условие правильности координатной сети в точке

требует, чтобы касательные векторы к координатным линиям в этой точке были неколлинеарны.

Поверхность C^k называется регулярной, если она обладает параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, имеющей непрерывные частные производные порядка k , причем в каждой точке выполнено условие $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$.

Поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, если координаты каждой ее точки $P(x, y, z)$ удовлетворяют этому уравнению.

Пусть P и Q - две различные точки на поверхности Φ . Касательной плоскостью поверхности Φ в точке P называется плоскость α , проходящая через точку P и удовлетворяющая соотношению $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\text{dist}(Q, \alpha)}{\text{dist}^2(Q, P)} = 0$.

Криволинейными координатами (u_0, v_0) может быть вычислено по формуле:

$((\vec{R} - \vec{r}(u_0, v_0)), \vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)) = 0$ при параметрическом задании и $(X - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (Y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (Z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ при неявном задании.

Нормаль поверхности в точке P - это прямая, ортогональная касательной плоскости, проведенной в этой точке поверхности. Уравнения нормали поверхности в точке P с криволинейными координатами (u_0, v_0) и декартовыми координатами (x_0, y_0, z_0) могут быть вычислены по формулам

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \text{ при параметрическом задании или}$$

$$\frac{X - x_0}{F_x} = \frac{Y - y_0}{F_y} = \frac{Z - z_0}{F_z} \text{ при неявном задании. Все частные производные в этих}$$

формулах вычислены в точке P [117].

1.4.4 Геодезические кривые

Рассмотрим на поверхности Φ кривую γ [5,117]. Пусть $\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к этой кривой в точке P , \vec{n} - единичный вектор нормали поверхности Φ в точке $P(x, y, z)$, $k\vec{v}$ - вектор кривизны кривой γ в точке P , s - естественный параметр кривой. Введем в рассмотрение вектор $\vec{n}_g = \vec{n} \times \vec{\tau}$, тогда тройка векторов $\vec{\tau}, \vec{n}_g, \vec{n}$ образует правый ортонормированный базис. В этом базисе разложим вектор кривизны $k\vec{v}$, получим:

$$k\vec{v} = p\vec{n}_g + q\vec{n}, \text{ где } q = (k\vec{v}, \vec{n}) = k_n.$$

Таким образом, кривизна рассматриваемой поверхности Φ в направлении кривой γ представляет собой проекцию вектора кривизны этой кривой на направление вектора нормали к данной поверхности.

Коэффициент $p = (k\vec{v}, \vec{n}_g) = (k\vec{v}, \vec{n}, \tau)$ называется геодезической кривизной k_g кривой γ в точке $P(x, y, z)$.

Геодезическую кривизну кривой на поверхности можно вычислить в естественной параметризации по формуле:

$$k_g = (\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{n}).$$

Геодезической линией, или просто геодезической, называется линия, геодезическая кривизна которой в каждой ее точке равна нулю.

Иными словами, геодезическая это кривая, направление которой в каждой ее точке совпадает с направлением нормального сечения поверхности [117]. Например, известно, что нормаль поверхности вращения принадлежит плоскости, содержащей ось вращения. Поэтому нормальные сечения поверхности вращения плоскостями, проходящими через ее ось, являются геодезическими (рис.6).

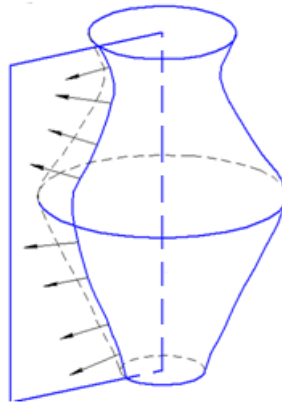


Рис.6. Нормальное сечение поверхности вращения плоскостью, проходящей через ось

Если кривая γ параметризована вектор – функцией $\vec{\varphi}(t)$, причем $p = \vec{\varphi}(t_0)$, то ее геодезическая кривизна в точке $P(x, y, z)$ может быть вычислена по формуле [5]:

$$k_g = \frac{|(\vec{\varphi}''(t_0), \vec{\varphi}'(t_0), \vec{n})|}{|\vec{\varphi}'(t_0)|^3}, \quad (1.10)$$

где \vec{n} - вектор нормали к поверхности γ в точке $P(x, y, z)$ или в координатной форме геодезическая кривизна может быть вычислена по формуле (1.9).

Выражение в числителе формулы (1.10) представляет собой смешанное произведение трех векторов, которое в правой декартовой системе координат (в ортонормированном базисе) равно определителю матрицы, составленной из координат перемножаемых векторов.

Через каждую точку регулярной поверхности можно провести геодезическую линию и притом только одну [117].

Перечислим некоторые из свойств геодезических:

а) замечательным свойством геодезической является то, что если точки P и Q геодезической линии достаточно близки, то дуга этой линии является кратчайшей среди всех дуг кривых на данной поверхности, соединяющих точки P и Q ;

б) вектор главной нормали кривой γ в каждой точке совпадает с вектором нормали к поверхности (с точностью до знака);

в) соприкасающаяся плоскость в каждой точке кривой γ проходит через нормаль к поверхности;

г) спрямляющая плоскость кривой γ в каждой точке совпадает с касательной плоскостью к поверхности;

д) кривая γ в каждой точке имеет наименьшую кривизну среди всех кривых, проходящих через эту же точку в том же направлении;

е) если $\vec{\varphi}(t)$ - параметризация кривой γ , то $(\vec{\varphi}''(t_0), \vec{\varphi}'(t_0), \vec{n}) \equiv 0$.

1.5 Локальная система координат

Выделим гладкую поверхность Σ без угловых точек, линий и складок, распространяющуюся с постоянной нормальной скоростью и отделяющую зону покоя материала от зоны деформирования [43]. Имея в виду в дальнейшем изучение поведения решения динамических задач в окрестности волновых фронтов Σ , удобно перейти от декартовой системы координат $x_1, x_2, x_3 (x_i, i=1,2,3)$ к локальной системе координат $y_1, y_2, n (y_\alpha, n, \alpha=1,2)$, связанной с некоторой рассматриваемой точкой M поверхности Σ .

Координаты y_1, y_2 можно считать криволинейными координатами на двумерной поверхности Σ . Подвижную поверхность определим уравнениями вида:

$$x_i = \varphi_i(y^1, y^2, t), i=1,2,3, \quad (1.11)$$

где t - время.

В силу гладкости поверхности Σ функция $\varphi_i(y^\alpha, t)$ будет непрерывно дифференцируемой по параметрам $y^\alpha (\alpha=1,2)$, ранг функциональной матрицы

$\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y^\alpha} \right\|$ всегда равен двум, поверхность Σ может быть локально представлена касательной поверхностью, а ее уравнение вида (1.11) разрешенным относительно x_i .

Далее будем различать ковариантные и контравариантные компоненты векторов и тензоров в системе координат x_i и символы будем писать только внизу. Однако, в криволинейной системе координат y^1, y^2 будем различать верхние (контравариантные) и нижние (ковариантные) индексы компонент векторов и тензоров.

Примем следующие обозначения для элементов первой квадратичной формы поверхности $\Sigma ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, $g_{\alpha\beta} = \varphi_{j,\alpha} \varphi_{j,\beta}$, где по повторяющемуся индексу $j=1,2,3$ предполагается суммирование, а запятая означает дифференцирование по составляющей криволинейной координате $\varphi_{j,\alpha} = x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha}$.

Вектор с координатами $x_{i,\alpha}$ (α - фиксировано) является вектором (касательным) по отношению к поверхности Σ с нормалью n , поэтому

$$x_{i,\alpha} n_i = 0. \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) представляют собой условие ортогональности нормали и касательной к Σ и условие единственности вектора нормали.

Запишем выражения для второй производной от $x_i = x_i(y^1, y^2, t)$ по криволинейным координатам y^α , т.е. первых производных от векторов касательной x_i и нормали n по y^α : $x_{i,\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} n_i$; $n_{i,\alpha} = -g^{\beta\gamma} b_{\beta\alpha} x_{i,\gamma}$, где $x_{i,\alpha\beta}$ - компоненты ковариантной производной вектора x_i , а $b_{\alpha\beta}$ - компоненты второй квадратичной формы поверхности.

1.6 Геометрические и кинематические условия совместности

При переходе от неподвижных координат к подвижным координатам $y^\alpha, n(\alpha=1,2)$ необходимо в дифференциальных уравнениях движения упругой среды заменить производные первого и второго и может быть более высоких порядков по координатам x_i через производные по локальным криволинейным координатам y^α и нормали n [43]. Соотношения,

связывающие производные от некоторой функции \bar{u} , заданной на поверхности Σ по x_i и производные от \bar{u} по y_α и n , называют геометрическими условиями совместности.

Геометрические условия совместности 1-го порядка имеют вид:

$$u_{q,i} = u_{q,n}n_i + g^{\mu\nu}u_{q,\mu}x_{i\nu}, \quad u_{q,n} = u_{q,\rho}n_\rho, \quad \text{где } g^{\mu\nu} - \text{метрический тензор.} \quad (1.13)$$

Выражение (1.13) представляет собой разложение вектора градиента перемещения $u_{q,i}$ по трем локальным направлениям y_1, y_2, n .

Геометрические условия совместности второго порядка получаются применением соотношения (1.13) к вектору градиента перемещения $u_{q,i}$ и использованием обычных правил дифференцирования в криволинейной системе координат [43]:

$$u_{q,ij} = u_{q,nn}n_in_j + g^{\alpha\beta}(u_{q,n\alpha} + g^{\beta\tau}b_{\alpha\sigma}u_{q,\tau})(n_ix_{j\beta} + n_jx_{i,\beta}) + g^{\alpha\beta}g^{\beta\tau}(u_{q,\alpha\sigma} - u_{q,n}b_{\alpha\sigma})x_{i\beta}x_{j\tau}.$$

При замене от функции заданной на Σ частных производных по времени, следует учесть, что они будут зависеть от времени как явно, так и неявно, так как $n = n_0 + \tilde{c}t$, \tilde{c} - скорость распространения фронта волны.

Соотношение вида: $\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\delta u_i}{\delta t} - u_{i,n}c$, $c = const$ называется обычно

кинематическим условием совместности первого порядка, которое связывает производную по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ от функции $\bar{u}(x_i, t)$ с производной по времени $\frac{\delta}{\delta t}$ от функции $\bar{u}(y_1, y_2, t)$ при $n = 0$ и ее нормальной производной по n при $n = 0$ на Σ [43]. Кинематические условия совместности имеют простой физический смысл: скорость материальной частицы складывается из локальной скорости $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ и конвективной скорости \tilde{c} по направлению нормали Σ .

1.7 Начальные и граничные условия

При математическом описании необходимо сформулировать условие, достаточное для однозначного определения процесса. Дифференциальные

уравнения в частных производных имеет бесчисленное множество решений, поэтому для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить дополнительные условия. Такими дополнительными условиями являются начальные и граничные условия [43].

Если упругая среда [67] занимает все пространство, то для однозначности решения достаточно задать перемещения и скорости перемещений в начальный момент времени $t = t_0$: $u_i|_s = u_s(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\frac{du_i}{dt} = v_s(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Такая задача называется задачей Коши.

При наличии границы дополнительно к начальным условиям должны быть заданы граничные условия. Пусть упругая среда в начальный момент времени t_0 занимает некоторую область пространства с границей S . В результате деформации в некоторый момент времени t среда займет новую область с границей S_t . Если перемещения $u(y, t)$ малы, то граничные условия можно отнести к начальной поверхности S . Пусть граница S является гладкой и задана уравнением $S(y) = 0$. Поскольку поверхность S является гладкой, то в каждой ее точке существует единичная нормаль n .

Типы граничных условий:

1. На границе S задан вектор перемещений $\bar{u} = \bar{u}_s(y, t)$, $y \in S$.
2. На границе S задан полный вектор напряжения $\sigma^{ij}(u)n_j e_i = P_s^{(n)}(y, t)$. Для изотропной упругой среды имеет место соотношение
$$P^{(n)}(u) = \lambda \bar{n} \operatorname{div} \bar{u} + \mu (\bar{n} \times \operatorname{rot} \bar{u}) + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}.$$
3. На границе S заданы, например, одна составляющая вектора перемещения u и две составляющие вектора напряжения:

$u_n = u \cdot n = u_n|_S(y, t)$, $P^\tau = P^{(\tau)}|_S(y, t)$, $y \in S$ или $u_\tau = u^{(\tau)}|_S(y, t)$, $y \in S$. В зависимости от условия задачи на разных частях поверхности S могут быть поставлены граничные условия разных типов. Если граница S является кусочно-гладкой, то есть она имеет сингулярные точки, то помимо начальных и граничных

условий необходимо на искомые функции наложить дополнительные ограничения в окрестности таких точек.

1.8 Математическая модель распространения упругих волн

Построим замкнутую систему уравнений в перемещениях, описывающую деформирование упругого материала. Уравнения динамической теории упругости в случае малых деформаций определяются тремя законами - сохранения массы, сохранения количества движения и законом Гука, связывающим напряжения с деформациями [67,81]. Эти уравнения представимы в виде:

$$\rho = \rho_0 = const, \quad (1.14)$$

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j, \quad (1.15)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.16)$$

где деформации ε_{ij} определяются по формулам Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i), \quad (1.17)$$

u_i -компонента вектора перемещений, σ_{ij} -компонента тензора напряжений, ρ - плотность, λ, μ -упругие параметры Ламе.

В перемещениях уравнения движения (1.15) динамической теории упругости имеют известный вид в форме Ламе :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (1.18)$$

при отсутствии массовых сил.

В процессе распространения сильных или слабых волн, их интенсивность изменяется в соответствии с так называемым уравнением «переноса» [43]:

$$\delta W / \tilde{c} \delta t - \Omega W = F, \quad (1.19)$$

где W -интенсивность (скачок скорости) на переднем фронте волны,

$$\Omega = \frac{\Omega_0 - K_0 \tilde{c}t}{1 - 2\Omega_0 \tilde{c}t + K_0 \tilde{c}^2 t^2} - \text{средняя кривизна переднего фронта, } \Omega_0 = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2},$$

$K_0 = \chi_1 \chi_2$, χ_1, χ_2 - главные кривизны переднего фронта, c - скорость переднего фронта волны, t - время, $\delta/\delta t$ - производная по времени примененная к функции, заданной на переднем фронте бегущей волны, F - функция, определяющая диссипацию интенсивности волны за счет вязкости.

Для решения этого уравнения «переноса», необходимо задание начального условия:

$$W = W_0 \text{ при } t = t_0 \quad (1.20)$$

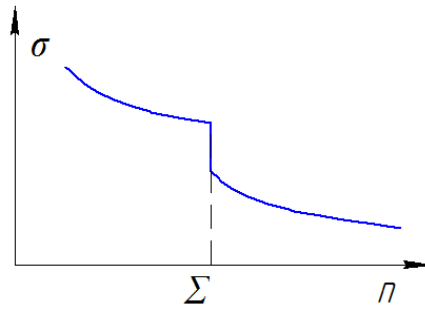
и знание начальных средней и Гауссовой кривизны: Ω_0 и K_0 [43].

Интенсивность сильных или слабых волн изменяется в процессе распространения волн за счет двух факторов: диссипация энергии на фронте волны и изменения геометрии переднего фронта волны, то есть свертывания или разворачивания переднего фронта, как геометрической поверхности.

Однако, использование лучевого приближения в задачах дифракции волн для построения геометрии дифрагированного фронта и соответствующего уравнения «переноса» интенсивности дифрагированных волн связано с определенными трудностями. Как видно из уравнения (1.19) и начальных условий (1.20) для определения интенсивности волны в любой ее точке необходимо задание начальных кривизн дифрагированной поверхности и начальной интенсивности.

1.9 Распространение сильных волн в неограниченной упругой среде

Рассмотрим распространение волн сильного разрыва в неограниченной упругой среде [43]. Под волной сильного разрыва будем понимать изолированную поверхность $\Sigma: x_i = \varphi_i(y_1, y_2, t)$, на которой перемещения u_i частиц сплошной среды непрерывны, а напряжения σ_{ij} и скорости v_i перемещений претерпевают разрыв (рис.7).

Рис.7. Скачок напряжений на поверхности Σ

Будем рассматривать поверхность сильного разрыва как предельное положение слоя толщины 2ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, в котором скорости перемещений напряжения изменяются от значений v_i^+ , σ_{ij}^+ до значений v_i^- , σ_{ij}^- монотонно непрерывны.

Кинематические соотношения 1-го порядка для вектора перемещений u_i и закон Гука имеют вид:

$$[v_i] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right], \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -[v_i]n_j / \tilde{c}, \quad (1.21)$$

$$[\sigma_{ij}] = \lambda [e_{kk}] \delta_{ij} + 2\mu [e_{ij}]. \quad (1.22)$$

$$\text{Из (1.21) и (1.22) следует } -\tilde{c} [\sigma_{ij}] = \lambda [v_k] n_k \delta_{ij} + \mu ([v_i] n_j + [v_j] n_i). \quad (1.23)$$

Интегрирование уравнения движения сплошной среды в напряжениях поперек переходного слоя толщиной 2ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к динамическим условиям совместности для скачков напряжений и скоростей:

$$[\sigma_{ij}] n_{ij} + \rho \tilde{c} [v_i] = 0. \quad (1.24)$$

Следует заметить, что скорость \tilde{c} распространения волны Σ и плотность материала по разные стороны от поверхности Σ различны.

Величина плотности ρ выражается через объемную деформацию e по формуле: $\rho = \rho_0(1-e)$ [43]. Но, в силу предположения о малости объемной деформации, ею можно пренебречь, тогда $\rho = \rho_0$. Из условия сохранения массы на фронте волны Σ следует, что $\rho^- \tilde{c}^- = \rho^+ \tilde{c}^+$ и, поскольку $\rho^- = \rho^+ = const$,

$\tilde{c}^- = \tilde{c}^+$, то есть скорость c волны непрерывна при переходе через Σ . Из условий (1.21) следует, что $v_i \square \tilde{c}$. Из (1.23), (1.24), получим:

$$(\lambda + \mu)[v_k]n_k n_i + (\mu - \rho\tilde{c}^2)[v_i] = 0. \quad (1.25)$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (1.25) имеет место при $[v_k]n_k = \omega_n \neq 0$ и $[v_i]\tau_i = \omega_\tau \neq 0$, где τ_i -вектор касательной к Σ , так что $n_i\tau_i = 0$, ω_n, ω_τ -скачки нормальной и касательной к Σ компонент скорости на фронте волны. Проектируя уравнения (1.25) на нормаль и касательную к Σ , получим:

$$(\lambda + 2\mu - \rho\tilde{c}^2)\omega_n = 0, \quad (\mu - \rho\tilde{c}^2)\omega_\tau = 0. \quad (1.26)$$

Из (1.26) следует, что в неограниченной упругой среде могут распространяться два типа волн - продольные и поперечные, на которых претерпевают разрыв продольная и поперечная компоненты скорости $[v_n] = [v_i]n_i$, $[v_\tau] = [v_i]\tau_i$. Эти волны распространяются соответственно со скоростями упругих волн $\tilde{c}_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $\tilde{c}_2 = \sqrt{\mu/\rho}$.

1.10 Распространение слабых волн в неограниченной упругой среде

Рассмотрим волновую поверхность Σ , на которой перемещения, скорости перемещений и напряжения непрерывны, а градиенты скоростей, напряжений и ускорения могут претерпевать разрыв [43]. Тогда реологические уравнения упругого материала для слабых волн можно записать в виде:

$$\left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right] = \lambda [v_{k,k}] \delta_{ij} + \mu ([v_{i,j}] + [v_{j,i}]), \quad [\sigma_{ij,j}] = \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.27)$$

Принимая во внимание кинематические условия совместности и следующие обозначения:

$$[\sigma_{ij,k}] = \mu_{ij} n_k, \quad [v_{ij}] = \lambda_i n_j, \quad \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right] = -G \mu_{ij}, \quad \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} \right] = -G \lambda_i. \quad (1.28)$$

Приведем систему (1.27) к следующему виду:

$$-G\mu_{ij} = \lambda\lambda_k n_k \delta_{ij} + \mu(\lambda_i n_j + \lambda_j n_i), \mu_{ij} n_j = -\rho G \lambda_i. \quad (1.29)$$

Исключая из (1.29) скачки градиентов напряжений, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно градиентов скорости λ_i по направлению нормали n к поверхности Σ :

$$(\lambda + \mu)\lambda_k n_k n_i + (\mu - \rho G^2)\lambda_i = 0. \quad (1.30)$$

Система уравнений (1.30) имеет нетривиальное решение в двух случаях: $\lambda_k n_k = \omega_m \neq 0$ при $\rho G^2 = \rho \tilde{c}_1^2 = \lambda + 2\mu$ и $\lambda_i \tau_i = \omega_m \neq 0$ при $\rho G^2 = \rho \tilde{c}_2^2 = \mu$. Это соответствует факту распространения в упругой среде двух типов слабых волн: продольных со скоростью фронта \tilde{c}_1 и сдвиговых со скоростью фронта волны \tilde{c}_2 .

Особенность математической формулировки задачи дифракции состоит в том, что в ней в качестве начальных условий $\vec{u} = \vec{u}_0(x)$, $\dot{\vec{u}} = \vec{v}_0(x)$ задана распространяющаяся в неограниченной области волна, достигающая в некоторый момент времени t_0 границы (препятствия) S . На поверхности задаются граничные условия типа $\vec{u} = \vec{u}_\varphi(x, t), x \in S$ или другие, отражающие физические свойства препятствия и условия контакта со средой [43].

1.11 Лучевой метод решения задач дифракции

Как уже говорилось, динамическое деформирование упругой среды описывается системой квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Для решения таких задач используются численные методы характеристик [47], [72], метод распада произвольного разрыва [46] и конечноразностные методы [44], [101].

Однако, для решения волновых задач может быть использован лучевой метод, имеющий глубокий физический смысл и фундаментальную теоретическую основу. Лучевой метод является одним из экономичных численных приближенных методов, который используется для построения

решения систем гиперболических уравнений в частных производных в окрестности фронтов с помощью ряда Тейлора [43,119].

Волновые фронты, являясь подвижными поверхностями, отделяющими в среде зону возмущения от зоны покоя, распространяются для ограниченных возмущений в соответствии с принципом Гюйгенса (каждая точка среды, до которой дошло возмущение сама становится источником вторичных волн) со скоростью звука в направлении нормали к волновой поверхности. Как известно из теории дифференциальных уравнений с частными производными, такие поверхности совпадают с характеристическими поверхностями системы линейных гиперболических уравнений. Их ортогональные траектории при распространении волн называются бихарактеристиками или лучами [112].

Функция, описывающая волновой процесс, существенно больше изменяется в направлении нормали к волновой поверхности, чем по направлению касательной к ней. Это позволяет в предположении малой толщины зоны быстрого изменения функции ввести понятие скачков самой функции, ее нормальных производных любого порядка и воспользоваться продолжением решения за волновой фронт в виде степенного ряда Тейлора.

Волны, для которых решение начинается с нулевого члена ряда Тейлора, а скачок функции при переходе через волновую поверхность отличен от нуля, называют сильными или ударными волнами.

Волны, для которых решение начинается с первого члена ряда Тейлора, а скачки функции равны нулю, называют слабыми волнами первого порядка. Знание одного или нескольких членов ряда Тейлора позволяет иметь приближенное решение с погрешностью, которая определяется отброшенными членами ряда, и использовать полученные приближенные решения для численного решения на сетке вдоль луча.

Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ - уравнение волновой поверхности Σ и $S(\varphi)$ - обобщенная функция [43]:

$$S(\varphi) = D^\alpha W(\varphi), \quad (1.31)$$

где α - положительное число, $D = d/d\varphi$, W - непрерывная функция. Можно ввести обобщенные функции S_ν такие, что

$$S'_\nu = DS_\nu = S_{\nu-1} \quad (1.32)$$

и S_ν можно определить как $(i - \alpha)$ раз проинтегрированную функцию $W(\varphi)$ в пределах от $\varphi = 0, S_\nu(0) = 0$ до φ .

В качестве примера рассмотрим функцию

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|), \quad (1.33)$$

$$\text{тогда } DW = \eta(\varphi) = \begin{cases} 1, \varphi > 0, \\ 0, \varphi < 0. \end{cases}$$

$D^2W = \delta(\varphi)$ - функция Дирака, $\eta(\varphi)$ - функция Хевисайда [43].

Пусть $L(\bar{u}) = 0$ - система линейных уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа, \bar{u} - вектор-функция. Представим решение в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^N S_\nu(\varphi) g_\nu(x, t) + R_N(x, t), \quad (1.34)$$

где n набирается исходя из необходимости описания особенности определенного типа на волновой поверхности Σ , $\varphi = 0$, $S_\nu(\varphi)$ - набор обобщенных функций, $g_\nu(x, t)$ - гладкие функции и $R_N(x, t)$ - остаточный член, представляющий гладкую функцию [43]. Такое представление не является единственным, но изменение типа особенностей за счет обобщенных функций $S_\nu(\varphi)$ компенсируется остаточным членом $R_N(x, t)$. Подставляя решение (1.34) в уравнение $L(u) = 0$ и приравнявая коэффициенты при одинаковых обобщенных функциях $S_\nu(\varphi)$, получим последовательность уравнений для определения гладких функций $g_\nu(x, t)$.

$$\begin{aligned} A^* g_\nu &= 0, \\ L(g_\nu) + A^* g_{\nu+1} &= 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ S_N L(g^N) + LR &= 0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

Здесь A^* - матрица системы линейных уравнений в частных производных.

$$A^* = A^i \varphi_i, \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad i = k \dots n \quad (1.36)$$

Вследствие требования нетривиального решения для g_ν определитель $|A^*|$ необходимо приравнять нулю [43].

$$|A^*| = 0. \quad (1.37)$$

Вектор функции g_0 представим в виде:

$$g_0 = \sigma \cdot r, \quad (1.38)$$

где σ - скаляр, r - правый нуль-вектор матрицы A^* . Умножая второе уравнение (1.35) на левый нуль-вектор I , получим:

$$IL(g_0) = 0. \quad (1.39)$$

Используя (1.38) и понятие производной вдоль луча, приведем (1.19) к виду при $\nu = 0$:

$$IL(g_0) = IL(\sigma r) = \dot{\sigma} + IL(r) \cdot \sigma = 0, \quad (1.40)$$

где точкой обозначена производная вдоль луча. Полагая $g_\nu \nu \neq 0$, получим аналогичные уравнения «переноса» для скаляров σ_ν , характеризующих g_ν :

$$\dot{\sigma}_\nu + IL(r) \sigma_\nu + k_{\nu-1} = 0, \quad g_\nu = \sigma_\nu \cdot r, \quad (1.41)$$

где k_ν определяется по предыдущему решению.

Построение решения в виде (1.34) и нахождение коэффициентов разложения $g_\nu(x, t)$ из дифференциальных уравнений «переноса» может быть применено для случая волнового решения, обладающего на Σ ($\varphi(x, t) = 0$) конечным разрывом функции и ее нормальных к Σ производных любого порядка.

Знание решения $u^+(x, t)$ впереди волновой поверхности Σ , скачков функции u и ее производных по нормали n на Σ позволит продолжить решение за Σ с использованием степенных рядов Тейлора.

При этом разрывное поведение функции и ее производных можно рассматривать как предельное поведение функции, быстро меняющийся в малой окрестности 2ε волнового фронта Σ , рис.8 [43].

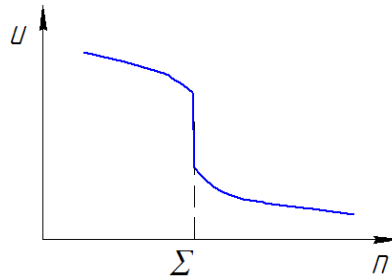


Рис.8. Графическое изображение решения $u(x,t)$ впереди и за поверхностью Σ

В случае применения лучевой теории и уравнения (1.19), к исследованию распространения дифрагированных волн, начальные средняя и гауссова кривизны дифрагированного фронта в момент его зарождения неограниченны, и хотя бы один из главных радиусов кривизны равен нулю [30]. Поэтому начальные положения дифрагированного волнового фронта сдвинем на малое расстояние δ в область возмущения за фронтом волны (рис.9) и тем самым избавимся от особенности геометрической характеристики волнового фронта. Такое предположение соответствует рассмотрению коротких волн по направлению нормали n за $\Sigma_{\text{диф}}$. В случае произвольного напряженно-деформированного состояния за фронтом падающей волны сделанные предположения о рассмотрении коротких волн соответствуют линейной интерполяции за фронтом волны с погрешностью порядка δ^2 .

На рис.9 изображено характерное поведение параметров дифрагированной волны, на которой $\frac{\partial u^-}{\partial n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow 0$ и поэтому для описания слабых особенных дифрагированных волн желательно взять в качестве ее интенсивности конечную величину. В качестве интенсивности особенной слабой волны предлагается ее линейная интерполяция в точке

$n = 0$ через ее значение на некотором расстоянии δ за фронтом. Так что при $n \rightarrow 0$ $\frac{\partial w}{\partial n} \rightarrow \infty$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\delta \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right) = w_f$. Величина w_f может быть принята за интенсивность слабой особенной дифрагированной волны, для которой начальное условие является конечным, что позволяет использовать лучевой метод исследования распространения волн (рис.9).

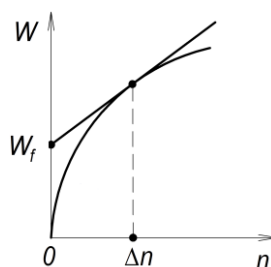


Рис.9. Схематическое изображение аппроксимации слабой особенной волны Σ_0 волной конечного разрыва w_f

Обозначим $[u] = u^+ - u^-$ скачок функции на поверхности Σ , $[u_{,n \dots n}^{(k)}] = u_{,n \dots n}^{(k)+} - u_{,n \dots n}^{(k)-}$ скачок нормальной производной от функции u на поверхности Σ . Тогда представление поведения функции u за Σ в виде ряда Тейлора называют обычно «лучевым» разложением

$$u(x, t) = \sum_{I=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial^I u}{\partial n^I} \right)^+ - \left[\frac{\partial^I u}{\partial n^I} \right] \right) \frac{h^I}{I!}, \quad (1.42)$$

здесь h - расстояние по нормали от Σ влево [43].

При практическом использовании лучевого разложения ряд (1.42) обрывают конечным числом членов $I = N$, так что остаточный член R_N определяется [43]:

$$R_N = M \frac{h^{N+1}}{N!}, \quad (1.43)$$

$$\text{где } M = \max_{\xi \in [0, h]} \left| \left(\frac{\partial^{N+1} u}{\partial n^{N+1}} \right)^+ - \left[\frac{\partial^{N+1} u}{\partial n^{N+1}} \right] \right|.$$

Существуют две возможности уменьшения R_N : за счет увеличения числа N членов лучевого разложения и за счет разбиения интервала H , на который продолжается решение за Σ на шаге $h = H/N$. Вопрос накопления погрешности при использовании фактически одношаговых методов построения решения задачи Коши подробно рассмотрен в [15] применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям, где даны оценки для максимальной ошибки.

Конечный отрезок лучевого разложения (1.42) может служить приближенным решением задачи Коши с условиями на волновой поверхности Σ с оценкой погрешности в виде [43]:

$$R_N \leq \exp(M_H H)(M_h H h^N + N\delta_0 + |R_0|). \quad (1.44)$$

Основные выводы по первой главе.

Исследована математическая модель распространения и дифракции упругих волн, рассмотрена возможность применения лучевого метода для решения квазилинейной системы уравнений в частных производных гиперболического типа.

Глава 2 Дифракция упругих волн на выпуклых плоских препятствиях

2.1 Дифракция плоской упругой волны на цилиндре

Рассмотрим задачу дифракции плоской продольной волны на выпуклой поверхности. На рис.10 представлена геометрическая картина падения плоской волны на выпуклую поверхность и продвижение этой волны в область тени. Для простоты в качестве жесткой поверхности выбрана цилиндрическая поверхность [26].

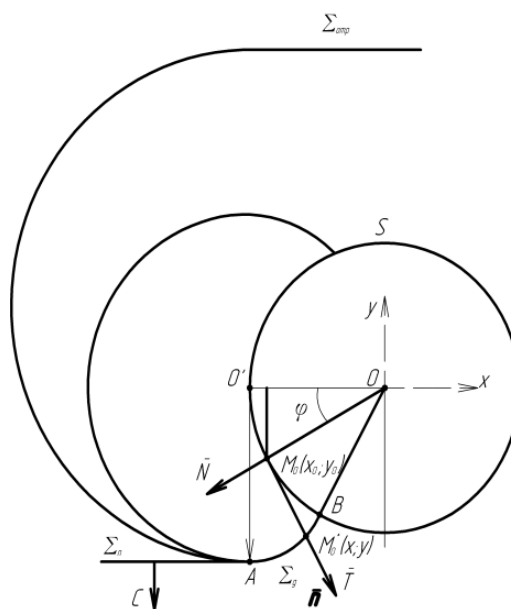


Рис.10. Схематическое изображение картины падения плоской волны на препятствие

В соответствии с принципом Ферма каждая точка поверхности S в момент достижения волнового фронта является источником возмущения так, что касательная \vec{T} к дифрагированной поверхности S является нормалью зарождающегося фронта, а нормаль \vec{N} к дифрагированной поверхности S является касательной к зарождающейся дифрагированной волне.

Таким образом, дифрагированный фронт Σ представляет собой огибающую семейства нормалей к поверхности S . В соответствии с

определением эволюты кривой, которая является линией, состоящей из центров кривизны всех точек данной кривой, эволюта является огибающей нормалей данной кривой.

Исходя из этого определения поверхности Σ дифрагированной волны, построим систему уравнений, задающую передний фронт дифрагированной волны.

2.2 Построение уравнения дифрагированного фронта для определения его кривизны в плоском случае

Зададим уравнение дифрагирующей поверхности S в явном виде $y = f(x)$, тогда градиент к поверхности S имеет компоненты:

$$\nabla f = (-f'(x), 1).$$

Вектор единичной нормали к S :

$$\vec{n} = \left(\frac{-f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \right). \quad (2.1)$$

Вектор касательной к S :

$$\vec{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}; \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}} \right), \quad (2.2)$$

причем $\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$.

Уравнение касательной к волновому фронту в точке его зарождения имеет вид:

$$y - y_0 = y'(M_0)(x - x_0), \quad (2.3)$$

где x_0, y_0 - начальное положение точки на поверхности S , а x, y - текущие координаты на касательной. Уравнение нормали к S , то есть уравнение касательной к Σ_0 представимо в виде:

$$G(x, y, x_0, y_0) = (x - x_0) + y'(M_0)(y - y_0) = 0, \text{ где } y_0 = f(x_0). \quad (2.4)$$

Положим, что точка M_0 на дифрагированной поверхности S задается некоторым параметром, например длиной дуги s или углом φ . Тогда для огибающей семейства нормалей \vec{N} справедливо условие:

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{-\partial x_0(s)}{\partial s} + \frac{\partial^2 y(x_0(s))}{\partial x \partial s} (y - y_0(s)) + \frac{\partial y(x_0(s))}{\partial x} \frac{\partial y_0(s)}{\partial s} = 0 \quad (2.5)$$

или $\partial G / \partial \varphi = 0$, $s = s(\varphi)$ и $s = \tilde{c}t$.

2.3 Случай представления уравнения дифрагированной поверхности в параметрическом виде

Построим уравнение дифрагированной поверхности (волны), когда уравнение дифрагирующей поверхности S представлено в виде:

$$\begin{cases} x = x(\varphi) = Q(\varphi), \\ y = y(\varphi) = G(\varphi). \end{cases} \quad (2.6)$$

Вектор касательной к кривой поверхности S имеет вид:

$$\vec{T} = \left(\frac{dx}{d\varphi}; \frac{dy}{d\varphi} \right), \text{ то есть } \vec{T} = \left(\frac{dQ}{d\varphi}; \frac{dG}{d\varphi} \right). \quad (2.7)$$

Вектор нормали к кривой поверхности S имеет вид:

$$\vec{N} = \left(\frac{dy}{d\varphi}; -\frac{dx}{d\varphi} \right), \text{ то есть } \vec{N} = \left(\frac{dG}{d\varphi}; -\frac{dQ}{d\varphi} \right). \quad (2.8)$$

Так как векторы касательной и нормали ортогональны, то:

$$\vec{N} \cdot \vec{T} = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности S , заданной в параметрическом виде в точке M_0 , представимо в форме:

$$P(x, y, \varphi) = \frac{dQ}{d\varphi} \Big|_0 (x - x_0(\varphi)) + \frac{dG}{d\varphi} \Big|_0 (y - y_0(\varphi)) = 0. \quad (2.9)$$

Огибающая к семейству нормалей поверхности S удовлетворяет условию:

$$\frac{dP}{d\varphi} = 0, \text{ то есть}$$

$$U = \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} \Big|_0 (x - x_0(\varphi)) - \frac{dQ}{d\varphi} \Big|_0 \cdot \frac{dx_0(\varphi)}{d\varphi} + \frac{d^2 G}{d\varphi^2} \Big|_0 (y - y_0(\varphi)) - \frac{dG}{d\varphi} \Big|_0 \frac{dy_0(\varphi)}{d\varphi} = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} x_0(\varphi) = Q(\varphi) \\ y_0(\varphi) = G(\varphi) \end{cases} \quad (2.11)$$

В качестве примера рассмотрим далее дифракцию плоской волны на круговом цилиндре, радиуса R . Предположим, что относительная поперечная толщина волн мала, т.е. $h/R \ll 1$, а кривизна волны вблизи поверхности S постоянна и определяется толщиной h волны $\Omega|_s = \Omega|_0 \approx -1/h$.

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \text{ или } \begin{cases} Q(\varphi) = R \cos \varphi \\ G(\varphi) = R \sin \varphi \end{cases} \quad (2.12)$$

Конкретизируем входящие в уравнение огибающей элементы для рассматриваемого примера:

$$\begin{cases} Q'' = -R \cos \varphi = -x_0 \\ G'' = -R \sin \varphi = -y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x'_0 = -R \sin \varphi = -y_0 \\ y'_0 = R \cos \varphi = x_0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

Дифрагированный фронт, то есть поверхность Σ есть огибающая касательных к ней, проведенных в точке M^* , а не нормалей к S или касательных к Σ , проведенных в точке M_0 и пересекающихся в точке O . Так что следует искать огибающую касательных в точке M^* , определяемую следующими уравнениями:

$$\begin{cases} U(x, y) = -x_0(x - R \cos \varphi) - (R \sin \varphi)^2 - y_0(y - R \sin \varphi) - (R \cos \varphi)^2 = 0, \\ P(x, y, \varphi) = R \sin \varphi(x - R \cos \varphi) - R \cos \varphi(y - R \sin \varphi) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Построим семейство касательных к Σ в точке M_0^* , для чего найдем координаты этой точки через φ и t . Уравнение (2.14) есть уравнение подвижной поверхности Σ_0 - дифрагированного фронта. Если отсчитывать время t от момента начала дифракции, т.е. $t=0$ при $\varphi=0$, $S = R\varphi = \tilde{c}t$, то фронт за время t пройдет путь $S = R\varphi$ и тогда $\varphi = \frac{\tilde{c}t}{R}$.

В случае параметрического задания поверхности S в виде окружности будем иметь:

$$\begin{cases} x_0^* = -R \cos \varphi + \tilde{c} \left(t - \frac{R\varphi}{\tilde{c}} \right) \cdot \frac{x'(\varphi)}{\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}}, \\ y_0^* = -R \sin \varphi - \tilde{c} \left(t - \frac{R\varphi}{\tilde{c}} \right) \cdot \frac{y'(\varphi)}{\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Уравнение касательной к дифрагированной поверхности Σ в точке M_0^* , где касательная параллельна нормали к S в точке M_0 есть:

$$G = (x - x_0^*(\varphi))x'_0(\varphi) + (y - y_0^*(\varphi))y'_0(\varphi) = 0, \text{ где} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} x_0^* = -R \cos \varphi + \tilde{c} \left(t - \frac{R\varphi}{\tilde{c}} \right) \sin \varphi, \\ y_0^* = -R \sin \varphi + \tilde{c} \left(t - \frac{R\varphi}{\tilde{c}} \right) \cos \varphi. \end{cases} \quad (2.17)$$

Подставив (2.13), (2.17) в (2.16), получим уравнение касательной к дифрагированной поверхности Σ в точке M_0^* в виде:

$$G = (x + R \cos \varphi - (\tilde{c}t - R\varphi) \sin \varphi) R \sin \varphi + (y + R \sin \varphi - (\tilde{c}t - R\varphi) \cos \varphi) (-R \cos \varphi) = 0. \quad (2.18)$$

Огибающая семейства нормалей к S определяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} G = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Эта система является линейной относительно x и y так, что выразив $x = x(\varphi, t) = P$ и $y = y(\varphi, t) = Q$, получим параметрическое представление через параметр φ дифрагированной волны:

$$\begin{cases} x = (\tilde{c}t - R\varphi)(\cos \varphi \sin 2\varphi + \sin \varphi) + R \cos 2\varphi \cos \varphi, \\ y = (\tilde{c}t - R\varphi)(\sin \varphi \sin 2\varphi + \cos \varphi) + R \cos 2\varphi \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.20)$$

Введем в рассмотрение вектор $\vec{r} \{x, y\}$, тогда $\vec{r}' \{x', y'\}$, $\vec{r}'' \{x'', y''\}$, где

$$\begin{cases} x' = -4R \sin 2\varphi \cos \varphi + 3(\tilde{c}t - R\varphi) \cos 2\varphi \cos \varphi, \\ y' = -4R \sin 2\varphi \sin \varphi + 3(\tilde{c}t - R\varphi) \cos 2\varphi \sin \varphi; \\ x'' = 4R \sin 2\varphi \sin \varphi - 11R \cos 2\varphi \cos \varphi - (\tilde{c}t - R\varphi)(6 \sin 2\varphi \cos \varphi + 3 \cos 2\varphi \sin \varphi), \\ y'' = -11R \cos 2\varphi \sin \varphi - 4R \sin 2\varphi \cos \varphi - (\tilde{c}t - R\varphi)(6 \sin 2\varphi \sin \varphi - 3 \cos 2\varphi \cos \varphi). \end{cases}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}, \vec{r}'' = x''\vec{i} + y''\vec{j}, [\vec{r}' \times \vec{r}''] = \vec{k}(x'y'' - y'x''), (\vec{r}' \times \vec{r}'')^2 = (x'y'' - y'x'')^2.$$

Кривизна фронта волны определяется выражением:

$$\Omega = \frac{\sqrt{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2}}{\sqrt{(\vec{r}'^2)^3}}. \quad (2.21)$$

Выполнив элементарные преобразования, получим выражение для кривизны построенного фронта волны Ω :

$$\Omega = \frac{1}{|4R \sin 2\varphi - 3 \cos 2\varphi (\tilde{c}t - R\varphi)|}, \quad (2.22)$$

что может быть использовано в уравнении переноса интенсивности (1.17) дифрагированной волны.

2.4 Определение интенсивности коротких дифрагированных волн на цилиндре в области тени

Аналитический подход к определению параметров дифрагированной волны на дифрагирующей поверхности S в области тени сводится к решению уравнения в частных производных гиперболического типа $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \tilde{c}^2 \Delta w$ в пространственно-временной области с переменной границей Σ , что представляется достаточно сложным и громоздким делом. В исследуемом случае дифрагирования коротких волн за цилиндром воспользуемся предположением, что относительная (h/R) поперечная толщина волн мала $h/R \ll 1$, а кривизна дифрагированной волны вблизи поверхности S постоянна и определяется толщиной h волны Σ , $\Omega|_s = \Omega|_0 \approx -1/h$ [30]. В таком случае уравнение переноса (1.19) принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\delta w_s}{\delta s} + \frac{1}{h} w_s = 0; \quad \delta s = R \delta \varphi. \quad (2.23)$$

Решение этого уравнения представимо в виде (рис.11):

$$w_{s|} w_0 = e^{\frac{-w}{h}} = e^{\left(\frac{-R}{h}\varphi\right)}. \quad (2.24)$$

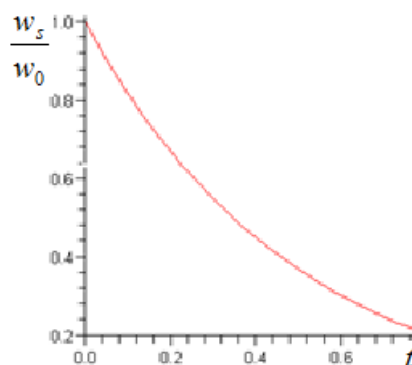


Рис.11. График изменения относительной интенсивности дифрагированной волны на поверхности S цилиндра

2.5 Распределение интенсивности волны на дифрагированном фронте

Распределение интенсивности w волны на дифрагированном фронте Σ определяется дифференциальным уравнением (1.17), в котором средняя кривизна Ω представлена выражением (2.22), а начальное условие задано выражением (2.24) при $\tilde{c}t = (R+h)\varphi$.

$$\frac{\delta w}{\tilde{c}\delta t} - \frac{w}{|4R \sin 2\varphi - 3 \cos 2\varphi (\tilde{c}t - R\varphi)|} = 0. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение по времени t , а угловая координата φ является параметром вдоль дифрагированного волнового фронта Σ . Начальное условие для уравнения (2.25) ставится не на поверхности $r = R$ для случая коротких волн, а на поверхности $r = R + h$, где кривизна не имеет особенности. Точное решение уравнения для интенсивности w дифрагированной волны за цилиндром с начальными условиями S имеет вид:

$$\frac{w_{\Sigma}}{w_0} = \exp\left(-\frac{R}{h}\varphi\right) \left| 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\tilde{c}t - R\varphi}{R} \operatorname{ctg} 2\varphi \right|^{\frac{-1}{3\cos 2\varphi}}. \quad (2.26)$$

Здесь w_0 - интенсивность плоской падающей волны $\Sigma_{пад}$.

Интенсивность $w(t, \varphi)$ дифрагированной за окружностью S волны $\Sigma_{пад}$, задаваемая выражением (2.26) определена на части плоскости (t, φ) определяемой неравенством $\tilde{c}t \geq (R+h)\varphi$.

На рис.12 приведен пространственный график поверхности $w(t, \varphi)$, где под φ надо понимать параметр вдоль дифрагированной волны, который фиксирует точку на цилиндре в которой точка дифрагированного фронта зародилась, t -время существования данной точки дифрагированного фронта, $\tilde{c}t - (R+h)\varphi = n$ - расстояние, пройденное рассматриваемой точкой дифрагированной поверхности по направлению нормали.

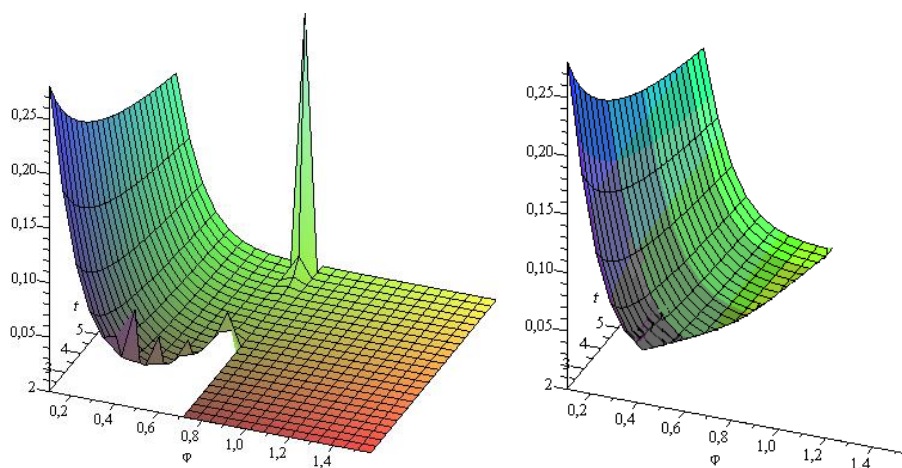


Рис.12. Зависимость интенсивности дифрагированной волны от времени t и параметра φ

Левый график представляет собой формально построенную поверхность в областях за и перед фронтом дифрагированной волны. Условие выделения области (x, t, φ) за фронтом волны $\tilde{c}t \geq (R+h)\varphi$ позволяет выделить представляющую интерес часть графика, изображенную в правой части рис.12, из которого следует экспоненциальное убывание интенсивности дифрагированной волны в область тени.

Основные выводы по второй главе.

Рассмотрена задача дифракции плоской продольной волны на выпуклой поверхности. Получено выражение для кривизны фронта дифрагированной волны, которое использовано в уравнении переноса. В качестве примера рассмотрена дифракция плоской волны на круговом цилиндре. Получено точное решение уравнения для интенсивности дифрагированной волны за цилиндром для случая коротких волн. Построен пространственный график зависимости интенсивности дифрагированной волны от времени и параметра вдоль дифрагированной волны. Показано, что значение интенсивности w/w_0 дифрагированной волны экспоненциально затухает вдоль $\Sigma_{диф}$ и уменьшается по времени.

Глава 3 Пространственная задача дифракции. Дифракция упругих волн на выпуклых препятствиях

3.1 Локальный подход к распространению дифрагированной волны вдоль препятствия в области тени

Расчет интенсивности дифрагированных упругих волн за выпуклым препятствием произвольной формы осложнен рядом обстоятельств.

Во-первых, на переднем фронте волны на дифрагированной поверхности Σ отсутствует разрыв скорости, а производная от скорости материальных частиц по направлению нормали к фронту волны неограниченна [55,67] (рис.13). Это не позволяет использовать в качестве характеристики дифрагированной волны Σ величину $\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\Sigma}$, которая неограниченна в точке $n=0$ на поверхности S . Это препятствие можно обойти введением в качестве характеристики таких волн величину $\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\Sigma_{\delta}}$, вычисленную на малом расстоянии δ от переднего фронта (рис.13), где $\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\Sigma_{\delta}}$

ограничено $\left(\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\Sigma_{\delta}} = \operatorname{tg} \gamma \right)$.

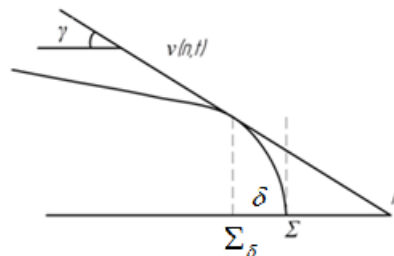


Рис.13. Схематическое представление поведения скорости материальных частиц за фронтом дифрагированной волны Σ

Таким образом, исследование поля скоростей лучевым методом за передним фронтом дифрагированной волны Σ переносится за подобную Σ поверхность Σ_δ .

Вторым обстоятельством, затрудняющим использование лучевого метода для описания дифрагированных волн, является определение траектории точки переднего фронта дифрагированной волны на выпуклом препятствии S . Волновой принцип Ферма состоит в том, что точка переднего фронта волны движется к своему следующему положению по направлению нормали \vec{n} к Σ по кратчайшему пути. Это приводит к тому, что нормальной траекторией волнового фронта дифрагированной волны на поверхности S является геодезическая линия L [5, 116], совпадающая с направлением движения фронта волны вдоль одной из взаимно ортогональных линий криволинейной системы координат (y_1, y_2) поверхности S , а именно, с y_1 (рис. 14).

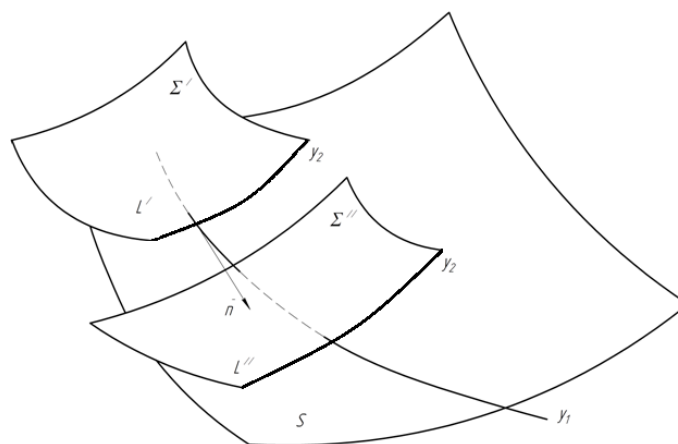


Рис.14. Схематическое изображение дифрагированной поверхности Σ вблизи поверхности препятствия S , где L' и L'' - следы волны на поверхности S препятствия

Использование локальных геодезических линий y_1, y_2 в окрестности точки M на поверхности S и выбор одной из этих линий, а именно, y_1 в качестве ортогональной траектории следа L волнового дифрагированного фронта на поверхности S приводит к возможности сведения общей задачи

дифракции к анализу дифракции за локальной осесимметричной поверхностью радиуса $R_2(y_1)$. Использование аппроксимации дифрагирующей поверхности S осесимметричной поверхностью оправдано тем, что в уравнение «переноса» интенсивности волн входят только главные кривизны самой волновой поверхности Σ и отражающей поверхности S .

Локальной осью вращения поверхности S в окрестности точки M является нормаль \vec{N} к плоскости, содержащей касательную к линии y_2 , и проходящей через центр кривизны геодезической линии y_2 .

Таким образом, задача нахождения начальных параметров дифрагированной волны на поверхности S будет рассматриваться локально, как задача распространения дифрагированной волны на локально осесимметричной поверхности вращения $S(M)$ вдоль y_1 (рис.15). Главные радиусы кривизны $\rho_L(u)$ и $\rho_\perp(v)$ будут рассматриваться в зависимости от параметров $u(y_2)$ и $v(y_1)$.

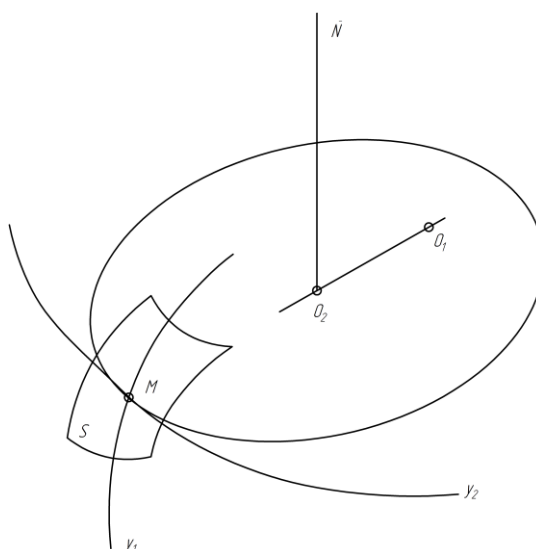


Рис.15. Схематическое изображение элемента препятствия, ограниченного поверхностью S со следами y_1 и y_2 геодезических линий, где дифрагированная поверхность Σ касается поверхности S по линии y_2

Здесь \vec{N} - нормаль к соприкасающемуся кругу геодезической линии y_2 в точке M , O_1 - центр кривизны геодезической линии y_1 , O_2 - центр кривизны геодезической линии y_2 .

3.2 Дифракция плоской упругой волны на сфере

3.2.1 Постановка задачи расчета интенсивности дифрагированной волны на сфере

Рассмотрим задачу дифракции предельной пластической волны на выпуклой поверхности [29,31]. Предположим, что напряженное состояние за плоской продольной волной удовлетворяет условию пластичности Мизеса [64]: $I_2^2(0) = 2k^2$. На рис.16 изображена геометрическая картина падения плоской волны на выпуклую поверхность и продвижение этой волны в область тени. Выберем в качестве жесткой поверхности сферическую поверхность. Каждая точка поверхности S в момент достижения волновым фронтом точки является источником возмущения в соответствии с принципом Гюйгенса [54,67,121]. Следствием этого является тот факт, что касательная \vec{T} к дифрагированной поверхности S становится нормалью зарождающегося фронта, а нормаль \vec{N} к дифрагированной поверхности S - касательной к нему [31].

Интенсивность слабых и сильных волн в процессе их распространения изменяется в соответствии с уравнением "переноса" (3.1) [43,119]:

$$\frac{\delta w}{\tilde{c} \delta t} - \Omega w = F, \quad (3.1)$$

где w - интенсивность на переднем фронте волны (под интенсивностью понимается скачок скорости); $\Omega = (\Omega_0 - K_0 \tilde{c} t) / (1 - 2\Omega_0 \tilde{c} t + K_0 \tilde{c}^2 t^2)$ - средняя кривизна переднего фронта [31,119], $\Omega_0 = (\chi_1 + \chi_2) / 2$ - начальная средняя

кривизна, $K_0 = \chi_1 \chi_2$ - начальная гауссова кривизна, χ_1, χ_2 - главные кривизны переднего фронта, \tilde{c} - скорость переднего фронта падающей волны, t - время (время t отсчитывается от начала рассмотрения задачи переноса интенсивности), $\delta/\delta t$ - производная по времени от функции, заданной на переднем фронте распространяющейся волны, F - функция, определяющая диссипацию интенсивности волны за счет вязкости. В рассматриваемом случае $F = 0$ [31]. Чтобы решить это уравнение необходимо задать начальные условия и знать значения начальных средней Ω_0 и гауссовой K_0 кривизн. Рассмотрим вопрос определения начальных геометрических и кинематических параметров дифрагированных волн [27].

Линиями главных кривизн являются сечения дифрагированной волны плоскостью $\varphi = const$ (L_φ) и плоскостью $z = const$ (L_z) (рис.16). Заметим, что L_φ задает линию долготы, а L_z линию широты [31].

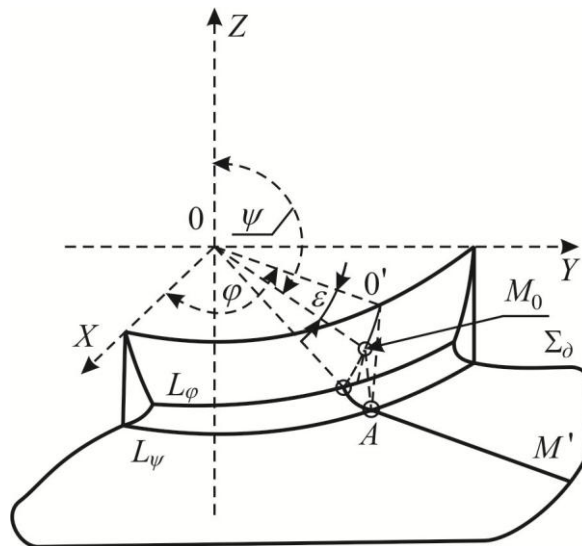


Рис.16. Схематическое изображение падающей и дифрагированной волн

При вычислении средней и гауссовой кривизн следует иметь в виду, что время t' существования определенной точки M_0^* поверхности Σ_0 определяется параметром ε , фиксирующим положение точки M_0 зарождения дифрагированной волны так, что:

$$t' = t - (R\varepsilon/\tilde{c}). \quad (3.2)$$

Положение текущей точки M_0^* определяется координатами ε и φ (рис. 16). При этом вторая координата φ является произвольной вследствие осесимметричности задачи, поэтому она не входит в выражения для средней и гауссовой кривизн. Таким образом, геометрические характеристики дифрагированной волны являются функциями времени t и параметра ε , то есть $\Omega_0 = \Omega_0(\varepsilon, t)$ и $K_0 = K_0(\varepsilon, t)$.

Радиус кривизны в точке M_0 дифрагированной поверхности в плоскости $z = -R \sin \varepsilon$ определяется соотношениями (рис.17).

$$R_1 = R \cos \varepsilon ; \chi_{0_1} = -1/R_1 = -1/R \cos \varepsilon . \quad (3.3)$$

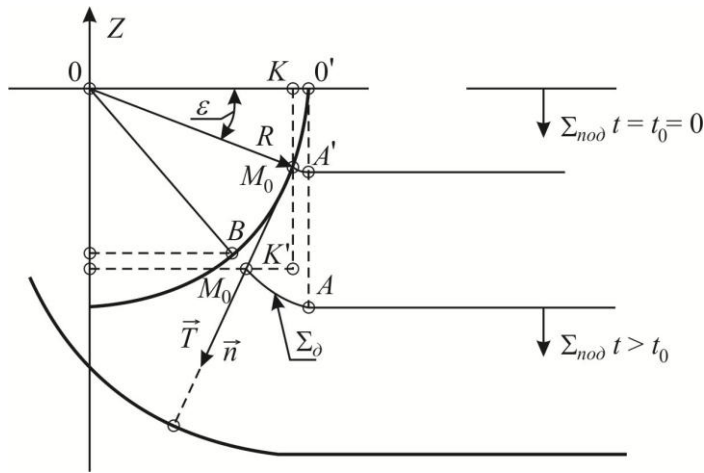


Рис. 17. Схематическое изображение дифрагированной волны

Радиус кривизны дифрагированной волны в плоскости $z = const$ вычисляется по формуле: $R_1(t, \varepsilon) = R \cos \varepsilon - (\tilde{c}t - R\varepsilon) \sin \varepsilon$, где $t = t' + R\varepsilon/\tilde{c}$ - произвольный момент времени. Отсюда

$$\chi_1(t, \varepsilon) = \frac{-1}{R_1(t, \varepsilon)} = \frac{-1}{R \cos \varepsilon - (\tilde{c}t - R\varepsilon) \sin \varepsilon}, \quad (3.4)$$

где $\chi_1(t, \varepsilon)$ - кривизна дифрагированной волны в плоскости $z = const$.

Рассмотрим дифрагированную поверхность Σ_0 в меридианальной плоскости [34]. Из рис.17 видно, что след дифрагированной волны в меридианальной плоскости представляет собой множество точек, образованных лучами, исходящими по касательному направлению \vec{T} к

окружности, и, следовательно, след дифрагированной волны в меридианальной плоскости есть огибающая нормалей \vec{n} к окружности, причем нормали образуют семейство прямых, начало которых на окружности бежит со скоростью \vec{c}_1 вдоль окружности. Значения радиусов кривизны этой линии в начальный и текущий моменты времени определяются соотношениями:

$$R_{2_0} = 4R \sin 2\varepsilon, \quad R_2(t, \varepsilon) = 4R \sin 2\varepsilon - 3(\tilde{c}t - R\varepsilon) \cos 2\varepsilon, \quad (3.5)$$

тогда соответствующие значения второй главной кривизны в начальный и текущий моменты времени известны.

$$\chi_{2_0} = \frac{-1}{4R \sin 2\varepsilon}; \quad \chi_2(t, \varepsilon) = \frac{-1}{4R \sin 2\varepsilon - 3(\tilde{c}t - R\varepsilon) \cos 2\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Знание первой и второй главных кривизн (3.4), (3.6) позволяет вычислить среднюю кривизну $\Omega(\varepsilon, t) = (\chi_1 + \chi_2)/2$ и решить задачу Коши для дифференциального уравнения «переноса» (3.1).

3.2.2 Вычисление интенсивности дифрагированной волны на сфере

Уравнение «переноса» позволяет вычислить интенсивность дифрагированной волны на поверхности сферы. Вычисления будем проводить вдоль криволинейных лучей, которыми являются образующие сферы. В этом случае уравнение «переноса» будет иметь вид:

$$\frac{\delta w_0(\varepsilon)}{R \delta \varepsilon} + \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} + \frac{1}{4 \sin 2\varepsilon} \right) w_0(\varepsilon) = 0 \quad (3.7)$$

Для решения поставленной задачи зададим начальные условия для $w_0(\varepsilon)$ в виде: $w(0) = w_0(0)$. Решением дифференциального уравнения (3.7) является:

$$\frac{w_0(\varepsilon)}{w_0(0)} = \exp \left(- \int_0^\varepsilon \frac{1}{2 \cos \psi} \left(1 + \frac{1}{8 \sin \psi} \right) d\psi \right) \quad (3.8)$$

Интенсивность дифрагированной волны от момента ее зарождения и до текущего момента времени t удовлетворяет уравнению (3.1) и выражается формулой [31]:

$$\frac{w(t, \varepsilon)}{w_0} = \exp\left(-\int_0^\varepsilon \frac{1}{2 \cos \psi} \left(1 + \frac{1}{8 \sin \psi}\right) d\psi - \int_0^{\xi-\varepsilon} \Omega_0\left(\frac{R}{c} \tau, \varepsilon\right) c d\tau\right), \quad (3.9)$$

где средняя кривизна дифрагированного фронта Ω_0 определяется по значениям ее главных кривизн $\chi_1(t, \varepsilon)$, $\chi_2(t, \varepsilon)$.

$$\Omega_0(t, \varepsilon) = \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{\cos \varepsilon - (\xi - \varepsilon) \sin \varepsilon} + \frac{1}{4 \sin 2\varepsilon - 3(\xi - \varepsilon) \cos 2\varepsilon} \right], \quad (3.10)$$

где $t > R\varepsilon/\tilde{c}$, $\xi = \tilde{c}t/R$.

Полученное выражение (3.9) позволяет сделать вывод, что интенсивность дифрагированной волны экспоненциально убывает за счет ее распространения вдоль меридиана по сфере и геометрического затухания разворачивания дифрагированного фронта. График изменения относительной интенсивности $w(t, \varepsilon)/w_0$ дифрагированной волны вдоль ее фронта в зависимости от времени t и угла ε , который характеризует положение точки на фронте дифрагированной волны в момент ее зарождения, представлен на рис. 18. Так как при $\varepsilon = \pi/2$ интенсивность продольной волны по направлению $\varphi = \pi/2$ становится равной 0 и для значений $\varepsilon > \pi/2$ будет распространяться волна слабого разрыва порядка больше, чем падающая, то представляет интерес интенсивность волны на ее фронте для значений $\varepsilon \in [0, \pi/2]$.

Выражение (3.9) позволяет сделать вывод, что интенсивность волны определяется интенсивностью дифрагированной волны на поверхности сферы и интенсивностью волны при ее распространении вдоль прямолинейных лучей, имеющих своим началом точки на поверхности сферы. Интенсивность дифрагированной волны совпадает с интенсивностью падающей волны в начальный момент зарождения дифрагированной волны и

далее экспоненциально убывает вдоль поверхности сферы и вдоль фронта волны, что подтверждается графиком, изображенным на рис. 18.

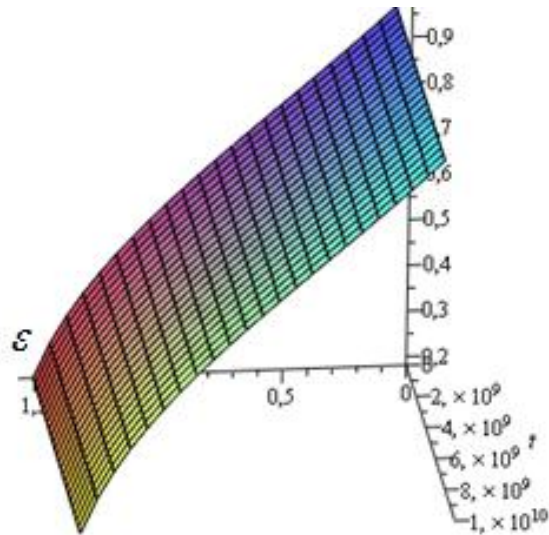


Рис.18. График зависимости интенсивности дифрагированной волны вдоль фронта волны от времени t и угла ε

3.2.3 Интенсивность напряжений за дифрагированной волной

Скорость продольного деформирования упругого материала среды порождает скачок напряженного состояния за фронтом дифрагированной волны, который определяется выражением [43]:

$$-\tilde{c}_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) w_n, i, j = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

В случае покоя материала перед фронтом дифрагированной волны имеет место соотношение $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}$, где σ_{ij} –напряжение за фронтом Σ_0 , поэтому:

$$\sigma_{ij} = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i n_j) \frac{w}{\tilde{c}_1}. \quad (3.12)$$

Интенсивность касательных напряжений за фронтом дифрагированной волны задается вторым инвариантом девиатора тензора напряжений I_2 [114] и определяется интенсивностью падающей волны:

$$I_2^2 = \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \mu (4\mu - 3\lambda) \cdot \left(\frac{w}{\tilde{c}_1} \right)^2, \quad (3.13)$$

где w – интенсивность дифрагированной волны. Будем считать, что при распространении падающей предельной пластической волны, напряженное состояние за ней удовлетворяет условию пластичности Мизеса: $I_2^2(0) = 2k^2$. В процессе распространения она становится упругой, и ее относительная интенсивность определяется интенсивностью скорости за фронтом волны (3.9).

$$\frac{I_2}{I_2(0)} = e^\alpha, \quad (3.14)$$

$$\text{где } \alpha = \left(\frac{1 - \sin \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2\varepsilon}{1 - \cos 2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{16}} (\cos \varepsilon - (\xi - \varepsilon) \sin \varepsilon)^{\frac{1}{2c \sin \varepsilon}} (8 \sin 2\varepsilon - 3(\xi - \varepsilon) \cos 2\varepsilon)^{\frac{1}{6c \cos 2\varepsilon}}.$$

Выражение (3.14) позволяет сделать вывод, что интенсивность касательных напряжений $I_2/I_2(0)$ асимптотически убывает за фронтом дифрагированных волн (рис.18).

3.2.4 Исследование напряженного состояния в материале сферы в окрестности внешних порожденных дифрагированных волн

Рассмотрим случай прохождения дифрагированной волны Σ_0 за упругим препятствием [31], ограниченным поверхностью S . Внутри этого препятствия дифрагированная волна порождает возмущение в виде двух волн: продольной Σ_1 и сдвиговой Σ_2 [33]. Локальное представление о состоянии волн в момент их совместного распространения изображено на рис.19.

Синусы углов, которые ориентируют поверхности Σ_1 и Σ_2 , определяются формулами (закон Снелла [70]):

$$\sin \theta = \frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_1} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda + 2\mu}} \leq 1, \quad \sin \gamma = \frac{\tilde{c}_{22}}{\tilde{c}_1} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\mu_1}{\lambda + 2\mu}} \leq 1. \quad (3.15)$$

Здесь \tilde{c}_1 , \tilde{c}_{12} , \tilde{c}_{22} - скорости дифрагированной, порожденной продольной, порожденной сдвиговой волн, соответственно. Индекс «1» будем относить к параметрам материала препятствия.

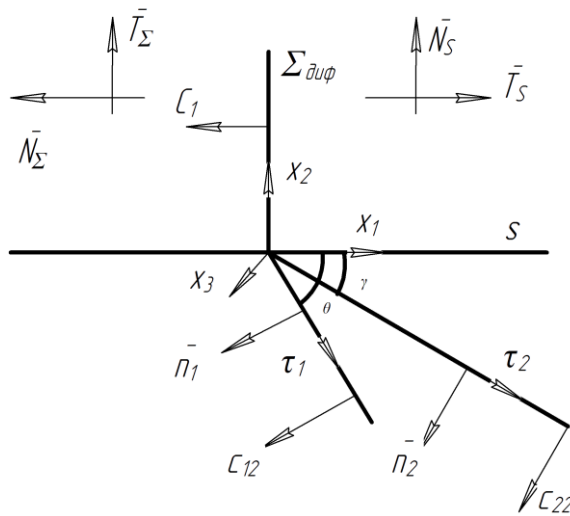


Рис.19. Схематическое изображение момента совместного распространения вдоль элемента поверхности S дифрагированной и двух порожденных в препятствии волн

Выражения для углов θ и γ позволяют сделать вывод, что предложенная геометрическая картина не всегда имеет место. Если $\rho < \rho_1$ или $\lambda_1 < \lambda$, $\mu_1 < \mu$, то порожденные волны Σ_1 и Σ_2 «убегают» вперед дифрагированной волны, а дифрагированная волна может порождать рэлеевские волны [81] в препятствии.

Условия непрерывности напряжений на поверхности S в области напряженного состояния материала имеют вид [33]:

$$\sigma_{\tau\tau\Sigma} = \sigma_{n^s n^s}^{\parallel}, \quad \sigma_{n^s \tau\Sigma} = 0. \quad (3.16)$$

Условия динамической совместности на продольной Σ_1 и сдвиговой Σ_2 волнах [33] запишутся в виде

$$[\sigma_{ij}]n_j + \rho\tilde{c}[v_i] = 0 \text{ - на } \Sigma_1 \text{ и на } \Sigma_2. \quad (3.17)$$

Воспользуемся формулами (3.16), (3.17) для расчета напряженного состояния сдвиговой Σ_2 и продольной Σ_1 волн. Для этого преобразуем условия (3.16), (3.17), введя интенсивности ω_1 и w_1 продольной и сдвиговой порожденных Σ_1 и Σ_2 волн так, что

$$v_i|_l = \omega_1 n_i^I, \text{ то есть } v_i|_l \cdot n_i^I = \omega_1, \quad (3.18)$$

$$[v_i]_{\Sigma_2} = w_1 \tau_i^{II} \text{ или}$$

$$(v_i^I - v_i^{II})\tau_i^{II} = w_1. \quad (3.19)$$

Выбрав локальную систему координат (x_1, x_2, x_3) так, чтобы направление x_1 совпало с направлением нормали дифрагированной поверхности Σ_0 , а направление x_2 с направлением нормали к элементу поверхности S , запишем систему балансовых уравнений для интенсивностей порожденных волн следующим образом [33]:

$$\sigma_{n_1 n_1}^I = -\rho_1 \tilde{c}_1 \omega_1, \quad (3.20)$$

$$\sigma_{n_1 \tau_1}^I = 0, \quad (3.21)$$

$$\sigma_{n_{II} n_{II}}^I - \sigma_{n_{II} n_{II}}^{II} = 0, \quad (3.22)$$

$$\sigma_{n_{II} \tau_{II}}^I - \sigma_{n_{II} \tau_{II}}^{II} = -\rho \tilde{c}_2^I w_1, \quad (3.23)$$

$$\sigma_{n^s \tau^s}^{II} = 0, \quad (3.24)$$

$$\sigma_{n^s n^s}^{II} = \sigma_{\tau\tau}^{II}|_{\Sigma} = -\frac{\lambda_1}{\tilde{c}} [v_{n^s}], \quad (3.25)$$

где $n_1(-\sin \theta, -\cos \theta, 0)$, $\tau_1(\cos \theta, -\sin \theta, 0)$, $n_2(-\sin \gamma, -\cos \gamma, 0)$, $\tau_2(\cos \gamma, -\sin \gamma, 0)$.

Балансовые уравнения на поверхности S и на фронтах Σ_1 , Σ_2 порожденных волн представляют собой [33]:

(3.20) - уравнение совместности напряжений и скорости волны на поверхности Σ_1 в проекции на нормаль к Σ_1 ;

(3.21) - условие совместности на поверхности Σ_2 в проекции на касательную к Σ_1 , то есть условие продольности волны Σ_1 и условие отсутствия касательных напряжений за ней;

(3.22) - условие непрерывности нормальных напряжений на границе раздела двух материалов, а именно, внешней среды и материала;

(3.23) - условие совместности напряжений и скорости волны на фронте сдвиговой волны Σ_2 ;

(3.24) - условие отсутствия касательных напряжений на границе раздела двух материалов;

(3.25) - условие динамической совместности на фронте дифрагированной волны Σ .

Из уравнений (3.21), (3.24) следует, что в материале препятствия отсутствует сдвиговая волна, а интенсивность продольной волны вычисляется по формуле:

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{c_{nad} \rho_1 \tilde{c}_1} \omega_{nad}, \quad \omega_1 = \omega_{nad} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\lambda^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda_1 + 2\mu_1)}} \quad (3.26)$$

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что продольная дифрагированная волна вызывает в материале препятствия только продольную волну. Ее интенсивность ω отличается от интенсивности дифрагированной волны коэффициентом, который зависит от отношения плотностей и отношения упругих параметров материала упругой среды и материала препятствия.

Дифрагированная волна вызывает в препятствии возмущение, область пространства которого определяется углом θ , зависящим от

отношения упругих параметров окружающей среды и материала препятствия в соответствии с законом Снелла.

Чтобы оценить напряженное состояние в материале препятствия, проведем вычислим второй инвариант девиатора тензора напряжений в материале и сравним его с пределом пластичности в соответствии с условием Мизеса.

Скорость продольного деформирования упругого материала за фронтом дифрагированной волны порождает напряженное состояние [33], определяемое скачком напряжений аналогично (3.11):

$$-\tilde{c}_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda_1 \delta_{ij} + 2\mu_1 n_i n_j) \omega_1, i, j = 1, 2, 3. \quad (3.27)$$

Поскольку $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}$ в случае покоя материала перед фронтом дифрагированной волны преобразуем (3.27) к виду: $\sigma_{ij} = (\lambda_1 \delta_{ij} + 2\mu_1 n_i n_j) \frac{\omega_1}{\tilde{c}_1}$.

Второй инвариант девиатора тензора напряжений определяется выражением:

$$I_2^2 = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \mu_1 (4\mu_1 - 3\lambda_1) \left(\frac{\omega_1}{\tilde{c}_1} \right)^2. \quad (3.28)$$

Предельная пластическая волна, которая распространяется в материале препятствия становится упругой, если вызванное ею напряженное состояние не удовлетворяет условию пластичности Мизеса $I_2^2(0) = 2k^2$. Тогда ее относительная интенсивность определяется из знания интенсивности ω_1 скорости за фронтом волны.

Из знания интенсивности продольной дифрагированной волны в материале можно подсчитать интенсивность напряжений в материале препятствия через интенсивность внешней дифрагированной волны w в текущий момент времени. Очевидно, интенсивность напряжений за продольной волной в материале препятствия будет определяться соотношением упругих параметров препятствия и окружающей среды.

$$\frac{I_{2\text{преп}}^2}{I_{2\text{над}}^2} = \frac{\lambda^2 \mu_1 (4\mu_1 - 3\lambda_1)}{\mu (4\mu - 3\lambda) (\lambda_1 + 2\mu_1)^2}. \quad (3.29)$$

В частном случае идеальной упругой среды, когда $\lambda = \mu$, $\lambda_1 = \mu_1$, интенсивность напряжений за дифрагированной волной в препятствии будет в три раза меньше, чем в окружающей среде $\frac{I_{2\text{преп}}}{I_{2\text{над}}} = \frac{1}{3}$.

3.3 Дифракция плоской упругой волны на эллипсоиде

3.3.1 Определение кривизн меридиан и параллелей эллипсоида

В качестве примера исследования интенсивности дифрагированных волн рассмотрим пространственное препятствие в виде эллипсоида (рис.20), заданного в параметрическом виде уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = \sin u \sin v, \\ z = -c \cos u. \end{cases} \quad (3.30)$$

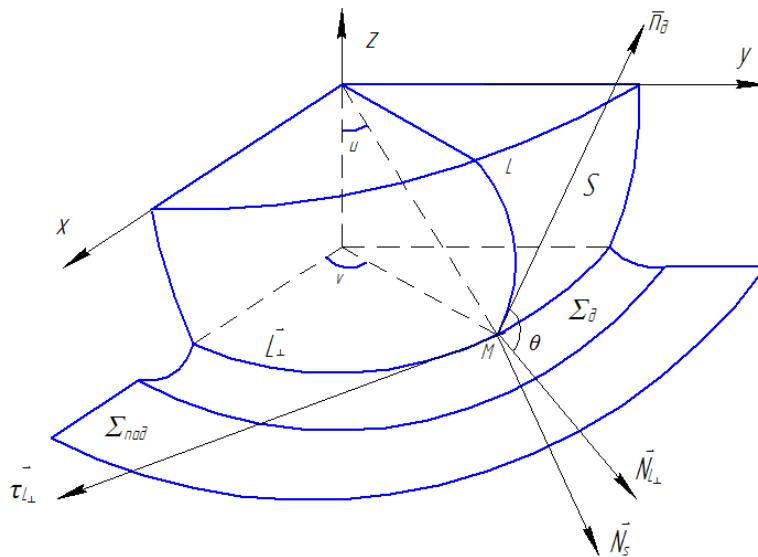


Рис. 20. Схематическое изображение падающей и дифрагированной волн на эллиптическую поверхность

Линиями главных кривизн являются сечения поверхности эллипсоида плоскостями $v = v_0$ (меридианы) и $u = u_0$ (параллели).

Параллель L_{\perp} ($u = u_0$) лежит в плоскости, перпендикулярной оси Z , и представлена уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \sin u_0 \cos v, \\ y = b \sin u_0 \sin v, \\ z = -c \cos u_0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Кривизна кривой, заданной параметрически, в регулярной точке вычисляется по формуле [5]:

$$\chi = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (3.32)$$

Для рассматриваемого эллипсоида имеем:

$$\begin{cases} x = -a \sin u_0 \sin v, \\ y = b \sin u_0 \cos v, \\ z = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} x = -a \sin u_0 \cos v, \\ y = -b \sin u_0 \sin v, \\ z = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Таким образом, с учетом (3.33) и (3.34) будем иметь:

$$z''y' - y''z' = 0, \quad (3.35)$$

$$x''z' - z''x' = 0, \quad (3.36)$$

$$y''x' - x''y' = ab \sin^2 v \sin^2 u_0 + ab \cos^2 v \sin^2 u_0 = ab \sin^2 u_0, \quad (3.37)$$

тогда:

$$(z''y' - y''z')^2 = 0, \quad (3.38)$$

$$(x''z' - z''x')^2 = 0, \quad (3.39)$$

$$(y''x' - x''y')^2 = a^2 b^2 \sin^4 u_0, \quad (3.40)$$

$$(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2 = a^2 b^2 \sin^4 u_0. \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} x'^2 = a^2 \sin^2 u_0 \sin^2 v, \\ y'^2 = b^2 \sin^2 u_0 \cos^2 v, \\ z = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Используя соотношения (3.33), получим:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sin^2 u_0 (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v). \quad (3.43)$$

Подставив (3.42) и (3.43) в (3.32) получим выражение для главной кривизны:

$$\chi_{\perp} = \frac{ab}{\sin u_0 (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.44)$$

Вектор касательной к кривой L_{\perp} имеет координаты:

$\vec{T}_{L_{\perp}}(-a \sin u_0 \sin v, b \sin u_0 \cos v, 0)$, его модуль определяется по формуле:

$|\vec{T}_{L_{\perp}}| = \sin u_0 \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}$. Обозначим $a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v = A$. Тогда

координаты единичного вектора касательной примут вид:

$$\vec{t}_{L_{\perp}} = \left(\frac{-a \sin v}{\sqrt{A}}, \frac{b \cos v}{\sqrt{A}}, 0 \right). \quad (3.45)$$

Единичный вектор нормали к L_{\perp} может быть вычислен следующим образом [117]:

$\vec{n} = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'}{|\vec{r}' \times \vec{r}''| \cdot |\vec{r}'|}$, тогда в координатной форме:

$$\vec{n}_{L_{\perp}} = \left(\frac{-b \cos v}{\sqrt{A}}, \frac{-a \sin v}{\sqrt{A}}, 0 \right). \quad (3.46)$$

где вектор нормали имеет координаты:

$$\vec{N}_{L_{\perp}}(-ab^2 \cos v \sin^3 u_0, -a^2 b \sin v \sin^3 u_0, 0), \quad (3.47)$$

а его модуль $|\vec{N}_{L_{\perp}}| = ab \sin^3 u_0 \sqrt{A}$.

Аналогично вычислим единичные векторы касательной и нормали к меридиану L ($v = v_0$), а также главную кривизну χ_L .

Параметрическое задание линии L имеет вид:

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v_0, \\ y = b \sin u \sin v_0, \\ z = -c \cos u. \end{cases} \quad (3.48)$$

Для определения координат векторов касательной и нормали вычислим:

$$\begin{cases} x' = -a \cos u \cos v_0, \\ y' = b \cos u \sin v_0, \\ z = c \sin u. \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} x'' = -a \sin u \cos v_0, \\ y'' = -b \sin u \sin v_0, \\ z'' = c \cos u. \end{cases} \quad (3.48)$$

$$z''y' - y''z' = -bc \sin v_0,$$

$$x''z' - z''x' = ac \cos v_0,$$

$$y''x' - x''y' = 0,$$

$$(y''x' - x''y')^2 = 0,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \cos^2 u \cos^2 v_0 + b^2 \cos^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \sin^2 u.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.32), определяющую кривизну кривой, получим:

$$\chi_L = \frac{c \sqrt{b^2 \sin^2 v_0 + a^2 \cos^2 v_0}}{(a^2 \cos^2 u \cos^2 v_0 + b^2 \cos^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.51)$$

Тогда вектор касательной к кривой L будет иметь координаты:

$$\vec{T}_L(a \cos u \cos v_0, b \cos u \sin v_0, c \sin u), \quad (3.52)$$

$$|\vec{T}_L| = \sqrt{a^2 \cos^2 u \cos^2 v_0 + b^2 \cos^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \sin^2 u} = \sqrt{C}, \text{ где} \quad (3.53)$$

$$C = a^2 \cos^2 u \cos^2 v_0 + b^2 \cos^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \sin^2 u,$$

Тогда единичный вектор касательной имеет координаты:

$$\vec{\tau}_L \left(\frac{a \cos u \cos v_0}{\sqrt{C}}, \frac{b \cos u \sin v_0}{\sqrt{C}}, \frac{c \sin u}{\sqrt{C}} \right), \quad (3.54)$$

Координаты вектора нормали к линии L имеют вид:

$$\vec{N}_L(-ac^2 \sin u \cos v_0, -bc^2 \sin u \sin v_0, c \cos u (b^2 \sin^2 v_0 + a^2 \cos^2 v_0)), \quad (3.55)$$

$$|\vec{N}_L| = \sqrt{a^2 c^4 \sin^2 u \cos^2 v_0 + b^2 c^4 \sin^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \cos^2 u (b^2 \sin^2 v_0 + a^2 \cos^2 v_0)^2}.$$

Введем обозначение:

$$D = a^2 c^4 \sin^2 u \cos^2 v_0 + b^2 c^4 \sin^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \cos^2 u (b^2 \sin^2 v_0 + a^2 \cos^2 v_0)^2, \quad (3.56)$$

тогда единичный вектор нормали:

$$\vec{n}_L \left(\frac{-ac^2 \sin u \cos v_0}{\sqrt{D}}, \frac{-bc^2 \sin u \sin v_0}{\sqrt{D}}, \frac{c \cos u (b^2 \sin^2 v_0 + a^2 \cos^2 v_0)}{\sqrt{D}} \right). \quad (3.57)$$

3.3.2 Вычисление главных начальных кривизн дифрагированной волны в момент ее зарождения на поверхности S

Для построения дифференциального уравнения «переноса» интенсивности дифрагированной волны необходимо знание начальных главных кривизн поверхности Σ_δ . Зафиксируем начальное положение точки M на дифрагированном фронте параметрами u_0, v_0 , и из геометрических соображений (рис.20) вычислим начальные главные кривизны волновой поверхности Σ_δ .

Начальный радиус кривизны ρ_2^0 можно вычислить зная радиус кривизны сечения эллипсоида плоскостью $z = const$, то есть параллели L_\perp , принадлежащей эллипсоиду, и дифрагированной поверхности Σ_δ . Нормалью \vec{n}_δ к дифрагированной поверхности Σ_δ в точке M является касательная $\vec{\tau}_L$ к поверхности эллипсоида в плоскости $v = v_0 = const$.

Линия L_\perp не является линией главной кривизны для поверхности Σ_δ , но знание ее радиуса кривизны ρ_\perp позволяет вычислить главный радиус кривизны ρ_{\perp_δ} дифрагированной поверхности Σ_δ .

Обозначим через θ угол между нормальями \vec{n}_{L_\perp} и \vec{n}_δ . Тогда $\rho_{\perp_\delta} = \rho_\perp \cos \theta$, где $\cos \theta = \vec{n}_{L_\perp} \cdot \vec{n}_\delta$.

Отсюда, с учетом последнего выражения (3.46) и (3.54), получим:

$$\cos \theta = - \frac{ab \cos u \cos(v - v_0)}{\sqrt{AC}}. \quad (3.58)$$

Таким образом, выражение для главной начальной кривизны дифрагированной поверхности Σ_0 представимо в виде:

$$\chi_2^0 = \frac{1}{\rho_{\perp_0}} = \frac{1}{\rho_{\perp} \cos \theta} = \frac{\chi_{\perp}}{\cos \theta}. \quad (3.59)$$

Используя формулы (3.44), (3.58), (3.59), будем иметь:

$$\chi_2^0 = \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}. \quad (3.60)$$

Вследствие особенностей зарождения фронта дифрагированной волны Σ_0 в точке M при ее распространении вдоль линии L начальный радиус кривизны равен 0, и кривизна неограниченна. Это объясняется тем, что в соответствии с принципом Гюйгенса, точка, в которую пришла волна, становится источником возмущения. Эта точка может рассматриваться как сфера бесконечно малого радиуса. Поэтому для проведения расчетов будем полагать начальный радиус кривизны $\rho_1^0 = \delta$, а $\chi_1^0 = \frac{1}{\delta}$.

Такое предположение соответствует сдвигу от поверхности эллипсоида на малое расстояние порядка δ .

3.3.3 Перенос интенсивности дифрагированной волны вдоль поверхности эллипсоида

Интенсивность фронта дифрагированной волны Σ_0 за эллипсоидом S является функцией времени, а, следовательно, функцией расстояния s , пройденного точкой волны Σ_0 , а также параметров u и v , характеризующих пространственное положение дифрагированной поверхности Σ_0 относительно поверхности эллипсоида.

Уравнение «переноса» интенсивности W_s зарождающейся дифрагированной волны вдоль линии L имеет вид [119]:

$$\frac{\delta W_s}{\tilde{c} \delta t} - \Omega W_s = 0, \text{ где } \Omega = \Omega_0 = \frac{\chi_1^0 + \chi_2^0}{2}. \quad (3.61)$$

Дифференциальное уравнение «переноса» вдоль поверхности S является обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль линии L так, что $\tilde{c}\delta t$ есть δs , где δs - элемент дуги L . Таким образом, интенсивность дифрагированной волны W_s определяется дифференциальным уравнением «переноса», где $\chi_1^0 = \frac{1}{\delta}$ - постоянная величина, а вторая кривизна есть функция параметра v , то есть $v = const$.

Элемент дуги представим в виде:

$$\delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} \delta u = \sqrt{(a \cos u \cos v_0)^2 + (b \cos u \sin v_0)^2 + (c \sin u)^2} \delta u.$$

Обозначив, $\sqrt{(a \cos u \cos v_0)^2 + (b \cos u \sin v_0)^2 + (c \sin u)^2} = Q$, получим $\delta s = Q \delta u$.

Учитывая, что $\chi_1^0 = \frac{1}{\delta}$, а χ_2^0 определяется как вторая главная кривизна дифрагированной поверхности по формуле (3.60), средняя кривизна Ω_0 относится к дифрагированной поверхности Σ_0 в точке, принадлежащей линии пересечения этой поверхности с поверхностью эллипсоида S .

Знание средней кривизны Ω_0 и элемента дуги δs , как функции угловых параметров u и v , позволяет записать решение дифференциального уравнения (3.61) для относительной интенсивности дифрагированной волны:

$$\frac{W_s}{W_s^0} = \exp\left(-\int_0^u \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\sqrt{C}}{A \cos x \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) \cdot Q \delta x\right). \quad (3.62)$$

$$A = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v, \quad C = a^2 \cos^2 u \cos^2 v_0 + b^2 \cos^2 u \sin^2 v_0 + c^2 \sin^2 u,$$

$$\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^u \left(\frac{-\sqrt{C}}{\delta} - \frac{C}{A \cos x \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) dx = \frac{1}{2\delta} \int_{\pi/2}^u (-\sqrt{C} dx) - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^u \frac{C dx}{A \cos x \sin u_0 \cos(v - v_0)}.$$

Для вычисления интеграла возьмем $a = b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, так как эти параметры сильно не влияют на характер кривой, являющейся графиком $\frac{W_s}{W_s^0}$.

$$\text{Тогда } C = \cos^2 u + \frac{1}{4} \sin^2 u, \quad A = 1,$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\delta} \int_{\pi/2}^u \left(\cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x \right)^{1/2} dx - \frac{1}{2 \sin u_0 \cos(v-v_0)} \int_{\pi/2}^u \left(\cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x \right) dx = \\
& = \frac{-1}{2\delta} \left(-\frac{4\pi}{9} \left(1 - \frac{3u}{2\pi} \right)^{3/2} + \frac{\pi}{18} \right) - \frac{1}{2 \sin u_0 \cos(v-v_0)} \left(\frac{5}{8} u + \frac{3}{16} \sin 2u - \frac{5\pi}{16} \right). \\
& \int_{\pi/2}^u \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x} dx = \int_{\pi/2}^u \sqrt{(1 - \sin^2 x) + \frac{1}{4} \sin^2 x} dx = \int_{\pi/2}^u \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 x} dx.
\end{aligned}$$

Полученный интеграл не берется в конечном виде, поэтому

воспользуемся линейной интерполяцией (рис.21): $\sin^2 x = \frac{2x}{\pi}$ для $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

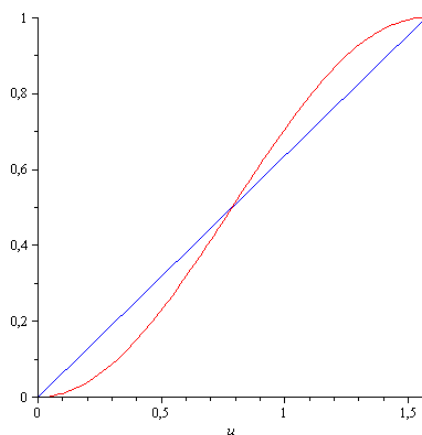


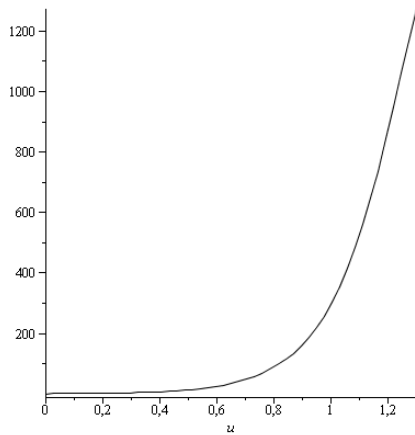
Рис.21. Линейная интерполяция функции $\sin^2 x$

Получим

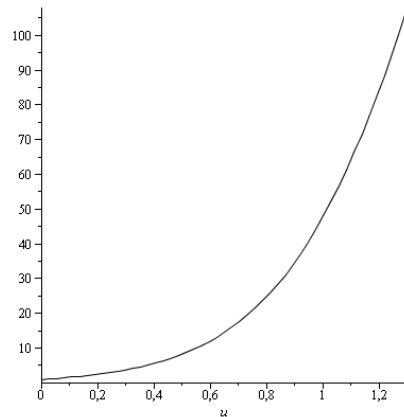
$$\begin{aligned}
& \int_{\pi/2}^u \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 x} dx = \int_{\pi/2}^u \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{2x}{\pi}} dx = \int_{\pi/2}^u \left(1 - \frac{3x}{2\pi} \right)^{1/2} dx = \int_{\pi/2}^u \left(1 - \frac{3x}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{d\left(1 - \frac{3x}{2\pi} \right)}{-\frac{3}{2\pi}} = \\
& = -\frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{3x}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \Big|_{\pi/2}^u = -\frac{4\pi}{9} \left(1 - \frac{3x}{2\pi} \right)^{3/2} \Big|_{\pi/2}^u = -\frac{4\pi}{9} \left(\left(1 - \frac{3u}{2\pi} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{3\pi}{4\pi} \right)^{3/2} \right) = \\
& = -\frac{4\pi}{9} \left(\left(1 - \frac{3u}{2\pi} \right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right) = -\frac{4\pi}{9} \left(1 - \frac{3u}{2\pi} \right)^{3/2} + \frac{4\pi}{72}. \\
& \int_{\pi/2}^u \left(\cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x \right) dx = \int_{\pi/2}^u \left(1 - \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x \right) dx = \int_{\pi/2}^u \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 x \right) dx = \int_{\pi/2}^u dx - \frac{3}{4} \int_{\pi/2}^u \sin^2 x dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \Big|_{\pi/2}^u - \frac{3}{4} \int_{\pi/2}^u \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = x \Big|_{\pi/2}^u - \frac{3}{8} \int_{\pi/2}^u dx + \frac{3}{8} \int_{\pi/2}^u \cos 2x dx = \\
&= \left(x - \frac{3}{8} x \right) \Big|_{\pi/2}^u + \frac{3}{8} \int_{\pi/2}^u \frac{\cos 2x d(2x)}{2} = \left(x - \frac{3}{8} x \right) \Big|_{\pi/2}^u + \frac{3}{16} \sin 2x \Big|_{\pi/2}^u = \\
&= \left(\frac{5}{8} x + \frac{3}{16} \sin 2x \right) \Big|_{\pi/2}^u = \frac{5}{8} u + \frac{3}{16} \sin 2u - \frac{5}{8} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{16} \sin \left(2 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{5u}{8} + \frac{3}{16} \sin 2u - \frac{5\pi}{16}.
\end{aligned}$$

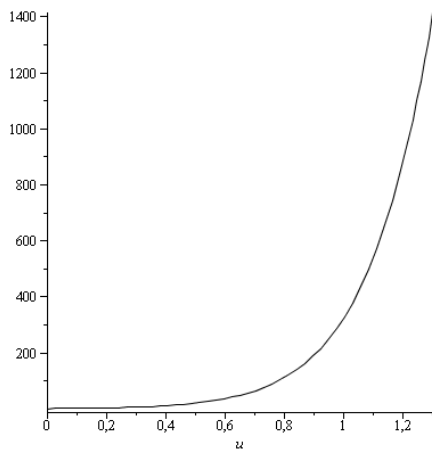
На рис.22 представлен график изменения относительной интенсивности дифрагированной волны для различных случаев ее движения по поверхности эллипсоида [34].



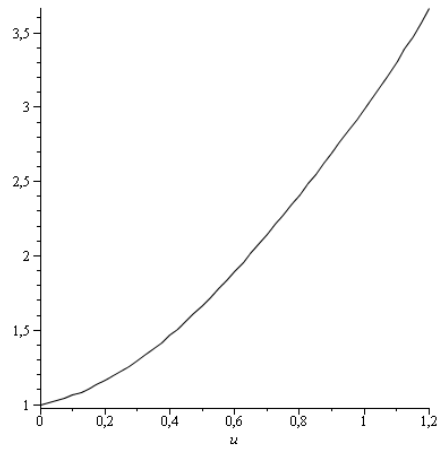
$$a = b = 1, c = 2, v = 0$$



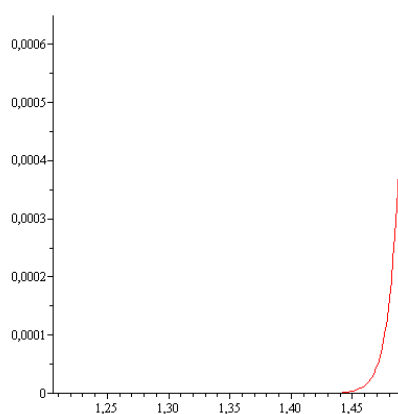
$$a = b = 1, c = 0.5, v = 0$$



$$a = c = 1, b = 2, v = \frac{\pi}{6}$$



$$a = c = 1, b = 2, v = \frac{3\pi}{8}$$



$$a = c = 1, b = 10, v = 0$$

Рис.22. Графики изменения интенсивности в зависимости от углового параметра u .

3.3.4 Перенос интенсивности дифрагированной волны от момента ее зарождения в области тени

Изменение интенсивности дифрагированной волны вне поверхности эллипсоида, распространяющейся свободно в неограниченном пространстве, описывается уравнением «переноса» (3.61), в котором кривизна Ω определяется выражением [119]:

$$\Omega = \frac{\Omega_0 - K_0 \tilde{c}t}{1 - 2\Omega_0 \tilde{c}t + K_0 \tilde{c}^2 t^2}, \quad (3.63)$$

где $K_0 = \chi_1^0 \chi_2^0$ – гауссова кривизна, $\Omega_0 = \frac{\chi_1^0 + \chi_2^0}{2}$ – средняя начальная кривизна:

\tilde{c} – скорость распространения дифрагированной волны.

Заметим, что в дифференциальном уравнении «переноса» средняя текущая кривизна Ω дифрагированной поверхности представлена для волновой поверхности, распространяющейся свободно в неограниченном пространстве. Для случая дифрагированной волны вдоль поверхности препятствия S :

$$K_0 = \frac{\sqrt{C}}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right), \text{ тогда, согласно}$$

(3.63):

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c} t}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}}{1 - \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) S + \frac{\sqrt{C} \tilde{c}^2 t^2}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}}, \\
\frac{\delta W_\Sigma}{\tilde{c} \delta t} - \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c} t}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}}{1 - \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) \tilde{c} t + \frac{\sqrt{C} \tilde{c}^2 t^2}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}} W_S &= 0, \\
\frac{\delta W_\Sigma}{W_\Sigma^0} &= \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c} t}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}}{1 - \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) \tilde{c} t + \frac{\sqrt{C} \tilde{c}^2 t^2}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}} \cdot \tilde{c} \delta t, \\
\frac{W_\Sigma}{W_\Sigma^0} &= \exp \left(\int_0^t \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c} \tau}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}}{1 - \left(-\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)} \right) \tilde{c} \tau + \frac{\sqrt{C} \tilde{c}^2 \tau^2}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v-v_0)}} \cdot \tilde{c} \delta \tau \right). \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Из выражения (3.64) следует, что вследствие зависимости начальных кривизн χ_1^0, χ_2^0 от координат точки зарождения дифрагированной волны u, v , интенсивность дифрагированной волны будет зависеть от параметров точки ее зарождения и пройденного расстояния $\tilde{c}t$ вдоль нормали к поверхности Σ_θ .

Из графического представления (рис.22) следует физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

Основные выводы по третьей главе.

Рассмотрена задача дифракции предельной пластической волны на сфере. Получено выражение для определения интенсивности дифрагированной волны от момента ее зарождения до текущего момента. Показано, что интенсивность дифрагированной волны экспоненциально убывает за счет ее распространения вдоль меридиана по сфере и геометрического затухания разворачивания дифрагированного фронта.

Рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклым препятствием. В качестве препятствия выбран эллипсоид. Построены графики, отображающие зависимость интенсивности от параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида. В результате проведенного исследования получил подтверждение физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

Из (3.57) следует, что величина второго инварианта девиатора тензора напряжений за порожденной волной в препятствии пропорциональна плотности внешней среды и обратно пропорциональна плотности материала препятствия, а также обратно пропорциональна скорости упругих волн препятствия, то есть чем «мягче» материал препятствия, тем большее напряженное состояние вызывает в нем дифрагированная волна.

Глава 4 Дифракция плоской продольной упругой волны на клине и конусе

4.1 Дифракция плоской продольной упругой волны на клине

Задачи дифракции упругих волн на острых краях препятствий рассматривались многими авторами, из которых сошлемся на работы, в которых приведен обширный список публикаций по рассматриваемой теме [8,55,67]. Как правило, исследования проводились аналитическим методом с возможным численным определением напряжений и деформаций вблизи неоднородности, порождающей дифрагированные волны.

Ниже лучевым методом проводится исследование интенсивности дифрагированных волн вблизи переднего фронта дифрагированных волн на клине путем приближенной замены острой кромки клина цилиндрической поверхностью малого радиуса δ (рис. 23).

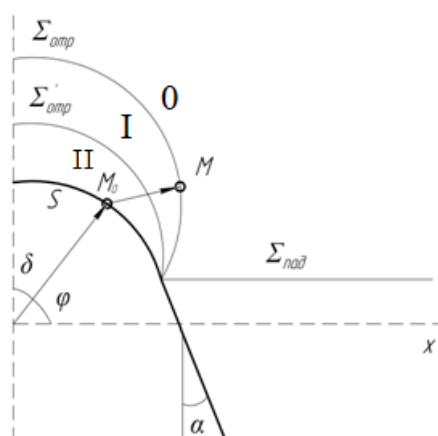


Рис. 23. Геометрия отражения продольной волны Σ_{nad} от цилиндра

Поведение перемещений и деформаций вблизи дифрагированной поверхности обладает особенностью на острие клина, а на фронте дифрагированной волны их градиент неограничен. Поэтому в качестве интенсивности дифрагированной волны можно выбирать ее значение w на некотором малом расстоянии ε за фронтом волны. На рис.24 представлено схематическое изображение поведения скоростей перемещений или

деформаций вблизи дифрагированного фронта из которого видно, что в качестве интенсивности можно выбирать скорости перемещения и градиенты скоростей перемещений в точке A ($w = u(\varepsilon)$, $w_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{n=\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha$).

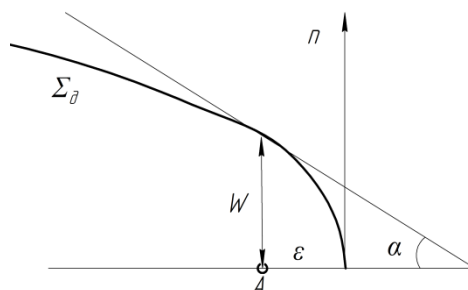


Рис.24. Схематическое изображение поведения скоростей перемещений $u(n)$ за фронтом дифрагированной волны Σ_δ

При использовании лучевого метода интенсивность волны на фронте в процессе его перемещения описывается дифференциальным уравнением «переноса»:

$$\delta W / \tilde{c} \delta t - \Omega W = F, \quad (4.1)$$

где W - интенсивность (скачок скорости) на переднем фронте волны,

$\Omega = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ - средняя кривизна переднего фронта, χ_1, χ_2 - главные кривизны переднего фронта, \tilde{c} - скорость переднего фронта волны, t - время, $\delta / \delta t$ - производная по времени, примененная к функции, заданной на переднем фронте бегущей волны. Для решения уравнения «переноса» $\delta W / \tilde{c} \delta t - \Omega W = F$ необходимо знание кроме средней кривизны: $\Omega = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ задание начальной интенсивности в момент зарождения фронта. Будем полагать, что дифрагированный фронт порождается отраженными волнами от цилиндра малого радиуса δ , поэтому дифрагированный фронт есть фронт отраженной волны от цилиндра малого радиуса δ , заменяющего особую точку клина.

Для построения уравнения фронта отраженной волны в параметрическом виде возьмем точку M отраженной от цилиндра волны,

которая определяется вектором \overline{OM}_0 точки зарождения этой волны и вектором \overline{MM}_0 , как расстоянием $\tilde{c}t$, пройденным фронтом волны по нормали к фронту волны в момент ее зарождения (рис. 23). Имея это в виду, уравнение продольной отраженной волны представимо в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi, \\ y = \delta \sin \varphi + \tilde{c}t \sin 2\varphi; \end{cases} \quad (4.2)$$

Уравнение отраженной сдвиговой волны имеет аналогичный вид, но угол 2φ надо заменить на угол $\varphi + \varphi'$ (рис. 25).

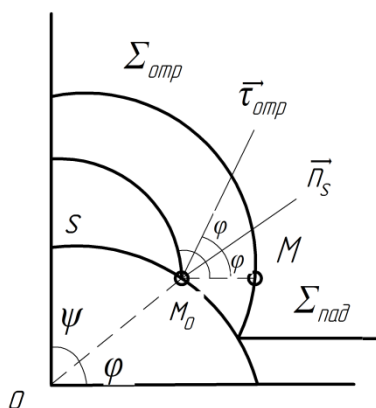


Рис.25. Геометрия отраженной продольной волны

$$\begin{cases} x = \delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos(\varphi + \varphi'), \\ y = \delta \sin \varphi + \tilde{c}t \sin(\varphi + \varphi'); \end{cases} \quad (4.3)$$

где φ' определяется из закона Снелла:

$$\frac{c_1}{\sin \varphi^*} = \frac{c_2}{\sin \varphi'^*}, \quad \sin \varphi'^* = \frac{c_2 \sin \varphi^*}{c_1}. \quad (4.4)$$

В наших обозначениях (рис.23) φ^* отсчитывается от нормали к поверхности S , так что в законе Снелла следует φ^* заменить на $90^\circ - \varphi$, а φ' на $90^\circ - \varphi'$, тогда получим: $\cos \varphi' = \frac{c_2}{c_1} \cos \varphi$.

Для удобства изменение угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$ примем замену $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

$$\begin{cases} x = \delta \sin \psi + \tilde{c}t \sin 2\psi, \\ y = \delta \cos \psi + \tilde{c}t \cos 2\psi; \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\tilde{c}t$ - расстояние, пройденное отраженной волной и $\tilde{c}t \geq \delta(1 - \cos \psi)$, $0 \leq \psi \leq \alpha$.

Проведем вычисление кривизны дифрагированного фронта:

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2}}{\sqrt{(\vec{r}'^2)^3}} - \text{Главная кривизна переднего фронта}, \quad \chi_2 = \frac{1}{\rho}, \rho \rightarrow \infty,$$

поэтому $\chi_2 = 0$.

Вычислим первые и вторые производные по параметру ψ от параметрического уравнения фронта (4.2):

$$\begin{cases} x' = \delta \cos \psi + 2\tilde{c}t \cos 2\psi, \\ y' = -\delta \sin \psi - 2\tilde{c}t \sin 2\psi; \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} x'' = -\delta \sin \psi - 4\tilde{c}t \sin 2\psi, \\ y'' = -\delta \cos \psi - 4\tilde{c}t \cos 2\psi; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$[\vec{r}' \times \vec{r}''] = \vec{k}(x'y'' - y'x''), \quad (4.8)$$

$$x'y'' = (\delta \cos \psi + 2\tilde{c}t \cos 2\psi)(-\delta \cos \psi - 4\tilde{c}t \cos 2\psi) = \quad (4.9)$$

$$= -(\delta^2 \cos^2 \psi + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi \cos 2\psi + 8\tilde{c}^2 t^2 \cos^2 2\psi),$$

$$y'x'' = (\delta \sin \psi + 2\tilde{c}t \sin 2\psi)(\delta \sin \psi + 4\tilde{c}t \sin 2\psi) =$$

$$= \delta^2 \sin^2 \psi + 6\tilde{c}t\delta \sin \psi \sin 2\psi + 8\tilde{c}^2 t^2 \sin^2 2\psi, \quad (4.10)$$

$$[\vec{r}' \times \vec{r}''] = -\vec{k}(\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2 t^2), \quad (4.11)$$

$$(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2 = -\vec{k}(\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2 t^2)^2, \quad (4.12)$$

$$(\vec{r}')^2 = x'^2 + y'^2 = \delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \psi + 4\tilde{c}^2 t^2, \quad (4.13)$$

$$\chi_1 = \frac{\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2 t^2}{(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \psi + 4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}}, \quad (4.14)$$

Дифференциальное уравнение «переноса» с учетом полученной кривизны примет вид:

$$\frac{\delta W}{\tilde{c} \delta t} = \frac{W(\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \psi + 8\tilde{c}^2 t^2)}{2(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \psi + 4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}}. \quad (4.15)$$

Дифференциальное уравнение «переноса» является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, имеющее точное решение с учетом начальных условий:

$$\ln \frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos\psi + 8\tilde{c}^2 t^2}{(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos\psi + 4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}} \tilde{c}\delta\tau. \quad (4.16)$$

Кривизна, как величина, обратная расстоянию от поверхности до центра кривизны есть скаляр, но поскольку мы рассматриваем развертывающиеся отраженные волны, то расстояние $\delta n = \tilde{c}\delta t$ откладывается в сторону, противоположную нормали и поэтому в уравнении «переноса» $\tilde{c}\delta t$ берется со знаком «-», или при положительном $\tilde{c}\delta t$ главная кривизна χ_1 будет отрицательной.

Для случая малых δ уравнение «переноса» легко интегрируется:

$$\ln \frac{W}{W_0} = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{8\tilde{c}^2 t^2}{(4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}} \tilde{c}\delta\tau = \frac{1}{2} \ln \frac{t_0}{t}, \quad (4.17)$$

отсюда

$$\frac{W}{W_0} = \sqrt{\frac{\tilde{c}t_0}{\tilde{c}t}} = \sqrt{\frac{n_0}{n}}, \quad (4.18)$$

где n - расстояние, пройденное волной за время t .

Из (4.18) следует, интенсивность отраженной от цилиндра волны для случая малых радиусов δ затухает асимптотически по закону (4.18) обратно пропорционально квадратному корню из пройденного расстояния (рис. 26).

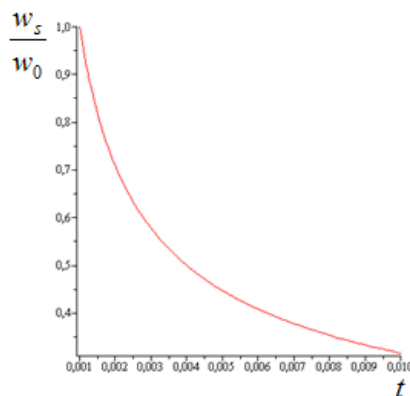


Рис. 26. График интенсивности продольной дифрагированной волны от острия клина

Начальная интенсивность отраженных продольных и сдвиговых волн для регулярного случая определяется из условий совместности на фронтах падающей и двух отраженных волн в момент их зарождения и граничных условий отсутствия нормальных и касательных напряжений на внутренней поверхности окружности радиуса δ , для случая свободной поверхности клиновидного выреза в упругом пространстве. Заметим, что коэффициенты отражения продольной и сдвиговой волны зависят только от угла φ , являющегося угловым параметром, не зависящим от времени распространения отраженных волн, поэтому не входят под знак интеграла в выражение для интенсивности волны в процессе ее распространения.

Далее рассмотрим закономерности отражения падающей на окружность продольной волны, воспользовавшись материалом работы [43].

Рассмотрим случай отражения плоской продольной волны Σ от границы свободного от напряжения полупространства в системе координат, движущейся вдоль границы вправо со скоростью $\frac{c_1}{\sin \varphi}$, где φ - угол между поверхностью падающей волны и границей полупространства. Как следует из закона Снелла $\sin \varphi^{*'} = \frac{c_2 \sin \varphi^*}{c_1}$.

Предположим, что материал перед волной Σ находится в покое и ненапряжен. Тогда, упругое напряженное состояние за падающей волной Σ определяется условиями совместности для напряжений и скоростей на фронте сильной волны:

$$-c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n, [v_i] N_i = \omega_n, [v_i] = \omega_n N_i, i = 1, 2, 3, \quad (4.19)$$

где $\mu = \rho c_2^2$, $\lambda + 2\mu = \rho c_1^2$, $\lambda = \rho c_1^2 - 2\rho c_2^2 \geq 0$, откуда $\frac{c_2^2}{c_1^2} \leq \frac{1}{2}$.

В случае покоя материала перед фронтом дифрагированной волны $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}^0$.

Скачки скоростей и напряжений на отраженных волнах Σ_1 и Σ_2 в окрестности точки M связаны соотношениями:

$$-c_1 [\sigma_{ij}]_I = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \omega^I, [v_i]_I = \omega^I n_i^I, n_i^I n_i^I = 1, \quad (4.20)$$

$$-c_2 [\sigma_{ij}]_{II} = \mu (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \omega^{II}, [v_i]_{II} = \omega^{II} \tau_i^{II}, \tau_i^{II} \tau_i^{II} = 1, \tau_i^{II} n_i^{II} = 0. \quad (4.21)$$

$$\text{При этом } [\sigma_{ij}^I] = \sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^I, [\sigma_{ij}^{II}] = \sigma_{ij}^I - \sigma_{ij}^{II}. \quad (4.22)$$

Дополним систему полученных уравнений (4.19)-(4.21) граничными условиями:

$$\sigma_{ij}^S n_j = 0, \text{ то есть } \sigma_{ij}^{II} n_j = 0. \quad (4.23)$$

Заметим, что $\vec{N} = (0, -1, 0)$, $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, $\vec{n}^I = (\sin 2\varphi, -\cos 2\varphi, 0)$, $\vec{n}^{II} = (\sin(\varphi + \varphi'), -\cos(\varphi + \varphi'), 0)$, $\vec{\tau}^{II} = (\cos(\varphi + \varphi'), \sin(\varphi + \varphi'), 0)$.

Согласно закону Снелла $\sin \varphi' = \frac{c_2}{c_1} \sin \varphi$, где φ - угол, отсчитываемый от отражающей поверхности S . Запишем соотношения (4.19)-(4.21) с учетом (4.22):

$$\begin{aligned} c_1 \sigma_{ij}^0 &= (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0, \\ -c_1 (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^I) &= (\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \omega^I, \\ -c_2 (\sigma_{ij}^I - \sigma_{ij}^{II}) &= \mu (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \omega^{II}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{(\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0}{c_1}, \quad (4.24)$$

$$-\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^I = \frac{(\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \omega^I}{c_1}, \quad (4.25)$$

$$-\sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} = \frac{\mu (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \omega^{II}}{c_2}. \quad (4.26)$$

Сложив (4.24)-(4.26) с учетом граничных условий (4.23), получим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0}{c_1} + \frac{(\lambda \delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \omega^I}{c_1} + \frac{\mu (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \omega^{II}}{c_2} \right) n_j = 0, \text{ или} \\ &(\lambda \delta_{ij} n_j + 2\mu N_i N_j n_j) \omega_n^0 + (\lambda \delta_{ij} n_j + 2\mu n_i^I n_j^I n_j) \omega^I + \frac{c_1}{c_2} \mu (\tau_i^{II} n_j^{II} n_j + \tau_j^{II} n_i^{II} n_j) \omega^{II} = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Вычислим скалярные произведения, входящие в уравнение (4.27):

$$\delta_{ij} n_j = n_i, N_j n_j = -\sin \varphi, n_j^I n_j = \sin \varphi, n_j^{II} n_j = \sin \varphi', \tau_j^{II} n_j = \cos \varphi'.$$

Подставим полученные соотношения в (4.27):

$$(\lambda n_i + 2\mu N_i(-\sin \varphi))\omega_n^0 + (\lambda n_i + 2\mu n_i^l \sin \varphi)\omega^l + \frac{c_1}{c_2} \mu(\tau_i^l \sin \varphi' + n_i^l \cos \varphi')\omega^l = 0. \quad (4.28)$$

Положив $i=1$ и $i=2$, получим систему двух линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов отражения k_1 и k_2 для продольной и сдвиговой волн:

$$\begin{cases} \lambda \cos \varphi + (\lambda \cos \varphi + 2\mu \sin 2\varphi \sin \varphi)k_1 + \frac{c_1}{c_2} \mu \sin(\varphi + 2\varphi')k_2 = 0, \\ \lambda \sin \varphi + 2\mu \sin \varphi + (\lambda \sin \varphi - 2\mu \cos 2\varphi \sin \varphi)k_1 + \frac{c_1}{c_2} \mu(-\cos(\varphi + 2\varphi'))k_2 = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\text{Здесь } k_1 = \frac{\omega^l}{\omega_n^0}, \quad k_2 = \frac{\omega^l}{\omega_n^0}.$$

Решая систему методом Крамера, получим:

$$k_1 = \frac{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 - 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 + 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}, \quad (4.30)$$

$$k_2 = \frac{-2 \frac{c_2}{c_1} \sin 2\varphi \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)}{\left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1\right)^2 + 2 \frac{c_2^3}{c_1^3} \sin 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}. \quad (4.31)$$

На рис. 27 представлены графики относительной интенсивности $\frac{\omega^l}{\omega_n^0}$ продольной дифрагированной волны на острое клина в зависимости от направления φ , $\varphi \in (0, \pi)$. Значение $\frac{\omega^l}{\omega_n^0}$ рассчитано на поверхности цилиндра малого радиуса δ при $\delta \rightarrow 0$ и это значение $\frac{\omega^l}{\omega_n^0}$ является ее начальным значением при распространении продольной дифрагированной волны с увеличением $\frac{c_2}{c_1}$, от значений $\frac{c_2}{c_1} = 0,2$ до $\frac{c_2}{c_1} = 0,5$ дифрагированное излучение $\frac{\omega^l}{\omega_n^0}$ становится более направленным по фронту в направлении $\varphi = \pi/2$.

Как и следовало ожидать, максимальное значение коэффициент $k_1 = 1$ принимает при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, минимальное $k_1 \neq 0$ при $\varphi \neq 0$, что не противоречит результатам [8,55,67], полученных для случая падения и отражения гармонических волн.

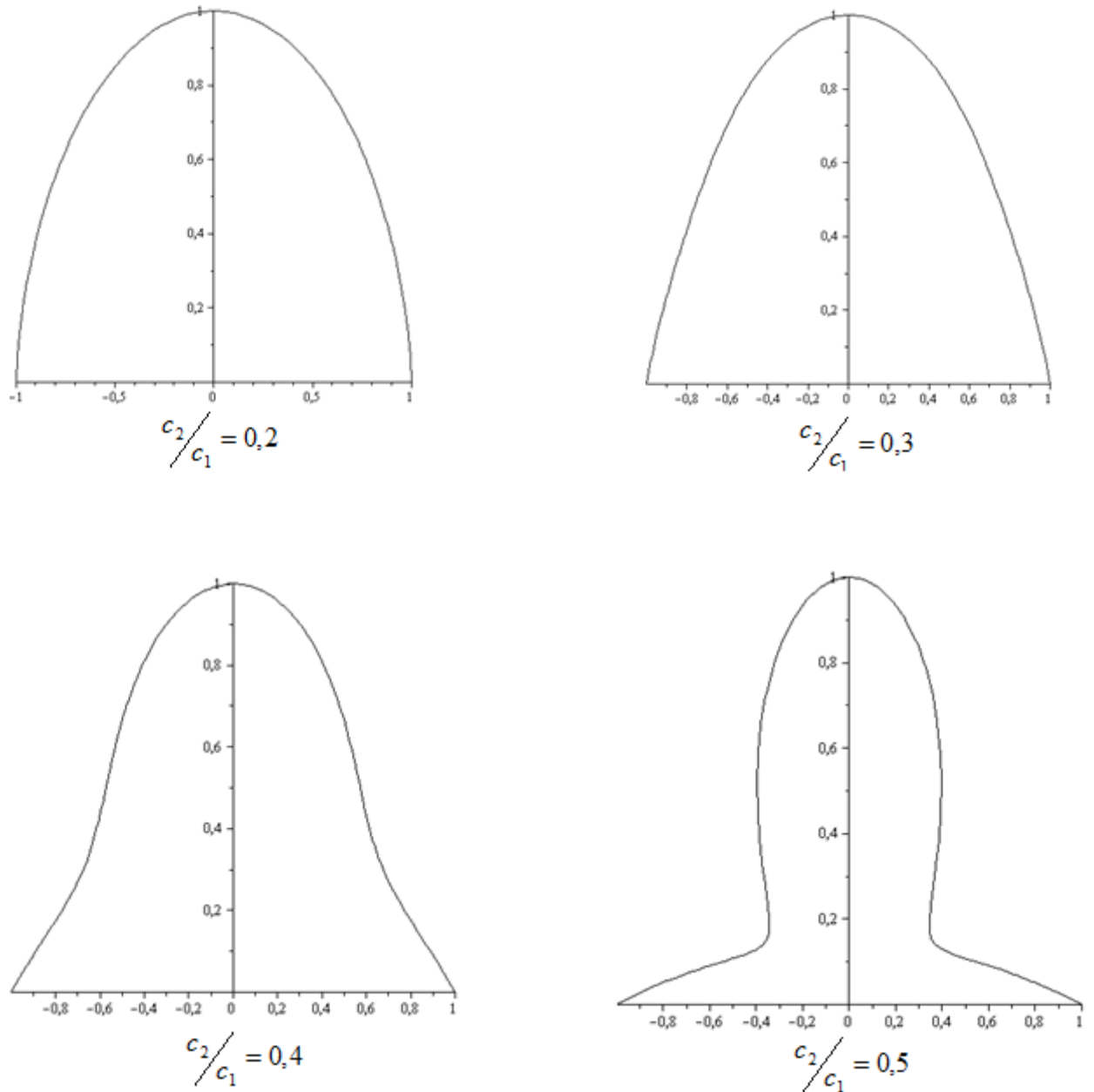


Рис.27. График значений коэффициента $k_1 = \frac{\omega^I}{\omega_n^0}$

в полярных координатах

На рис. 28 представлен график значений коэффициента относительной интенсивности $k_2 = \frac{\omega''}{\omega_n^0}$ отраженной сдвиговой волны, из которого следует симметрия интенсивности отраженной волны Σ_2 при $\varphi \in [\pi/2, \pi]$, а также следует, что максимальное значение интенсивности сдвиговой волны k_2 достигается при $\varphi \approx \frac{\pi}{6}$ и мало зависит от $\frac{c_2}{c_1}$, но само максимальное значение k_2 увеличивается от 0,3 до 0,8 с увеличением $\frac{c_2}{c_1}$ от 0,2 до 0,5.

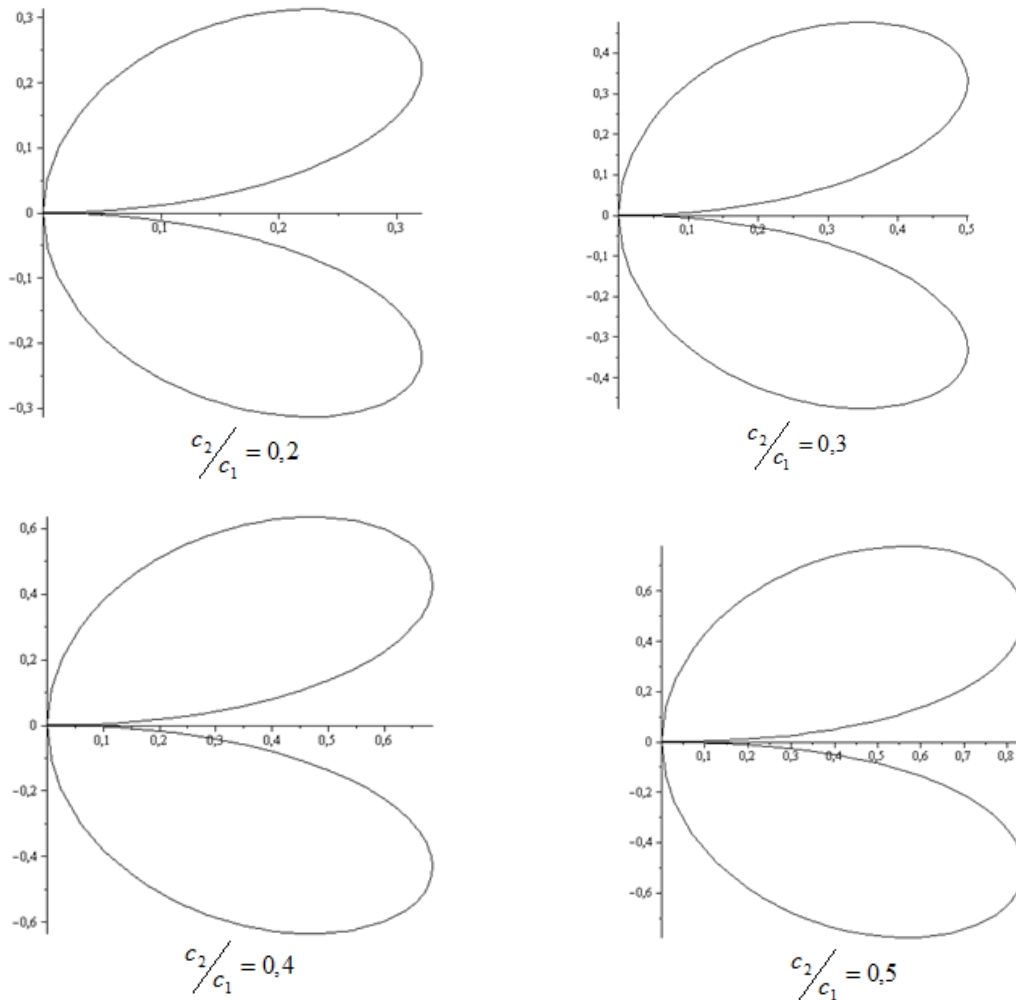


Рис.28. График значений коэффициента относительной интенсивности $k_2 = \frac{\omega''}{\omega_n^0}$ отраженной сдвиговой волны в полярных координатах

Знание коэффициентов отражения k_1 и k_2 для продольной и сдвиговой волн, соответственно, позволяет построить выражение для напряжений за продольной и сдвиговой волнами через интенсивность ω_n^0 падающей продольной волны.

Условия совместности напряжений на Σ_{omp} позволяют выразить напряжения за Σ_{omp} через интенсивность ω_n^0 падающей волны Σ_{nad}

$$-c_1 [\sigma_{ij}^0] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0, \quad (4.32)$$

$$-c_1 [\sigma_{kk}^0] = (3\lambda + 2\mu) \omega_n^0, \quad (4.33)$$

тогда

$$[\sigma_{ij}^{0'}] = [\sigma_{ij}^0] - \frac{1}{3} [\sigma_{kk}^0] \delta_{ij}, \quad (4.34)$$

$$-c_1 [\sigma_{ij}^{0'}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0 - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \omega_n^0 \delta_{ij}, \quad (4.35)$$

или

$$-c_1 [\sigma_{ij}^{0'}] = \omega_n^0 \left(-\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j \right) = 2\mu \omega_n^0 \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right). \quad (4.36)$$

Отсюда,

$$[\sigma_{ij}^{0'}] = -\frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j \right) = -2\mu \frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right), \quad (4.37)$$

Второй инвариант девиатора тензора напряжений $I_2^{0'}$ [114]

вычисляется:

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}^{0'}] [\sigma_{ij}^{0'}] &= 2\mu \frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) 2\mu \frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) = \\ &= 4\mu^2 \frac{\omega_n^0}{c_1^2} \left(\frac{1}{9} \cdot 3 - \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{8}{3} \mu^2 \frac{\omega_n^0}{c_1^2}, \text{ то есть} \end{aligned}$$

$$I_2^{0'} = \frac{8}{3} \mu^2 \frac{\omega_n^0}{c_1^2}. \quad (4.38)$$

Далее определим напряжения за Σ_{omp} :

$$\sigma_{ij}^{I'} = \sigma_{ij}^{0'} - [\sigma_{ij}^{0'}] = 2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) \frac{\omega_n^0}{c_1} + 2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + n_i^I n_j^I \right) \frac{\omega^I}{c_1}. \quad (4.39)$$

Второй инвариант девиатора тензора напряжений определяется выражением для зоны I:

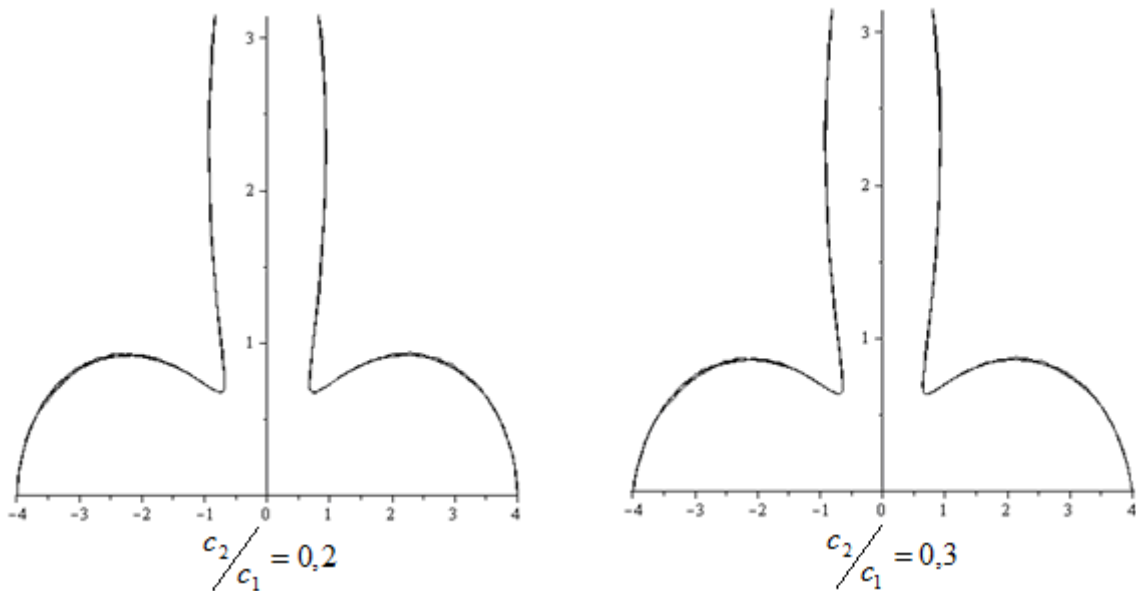
$$I_2^I = \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = \left(\sigma_{ij}^{0'} - [\sigma_{ij}'] \right) \left(\sigma_{ij}^{0'} - [\sigma_{ij}'] \right) = \sigma_{ij}^{0'} \sigma_{ij}^{0'} - 2 \sigma_{ij}^{0'} [\sigma_{ij}'] + [\sigma_{ij}'] [\sigma_{ij}']. \quad (4.40)$$

Подставим значения скалярных произведений в (4.39), получим:

$$I_2^I = \frac{8}{3} \frac{\mu^2}{c_1^2} \left((\omega_n^0)^2 + 3 \left(-\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) \omega_n^0 \omega^I + (\omega^I)^2 \right), \quad (4.41)$$

$$K_1 = \frac{I_2^I}{I_2^{0'}} = 1 + 3 \left(-\frac{1}{3} + \cos^2 2\varphi \right) k_1 + k_1^2. \quad (4.42)$$

На рис. 29, 30 представлены графики интенсивности напряженного состояния за отраженными продольной и сдвиговой волнами вблизи вершины клина. Наибольшее значение интенсивности напряженного состояния достигается в вершине клина при $\varphi = \pi/2$ за отраженной продольной и отраженной сдвиговой волной, что в случае падения предельной пластической волны ведет к увеличению максимального касательного напряжения и к необходимости учета пластической деформации вблизи вершины клина. Заметим, что $K_1(\pi/2) = 4$ и $K_2(\pi/2) = 4$.



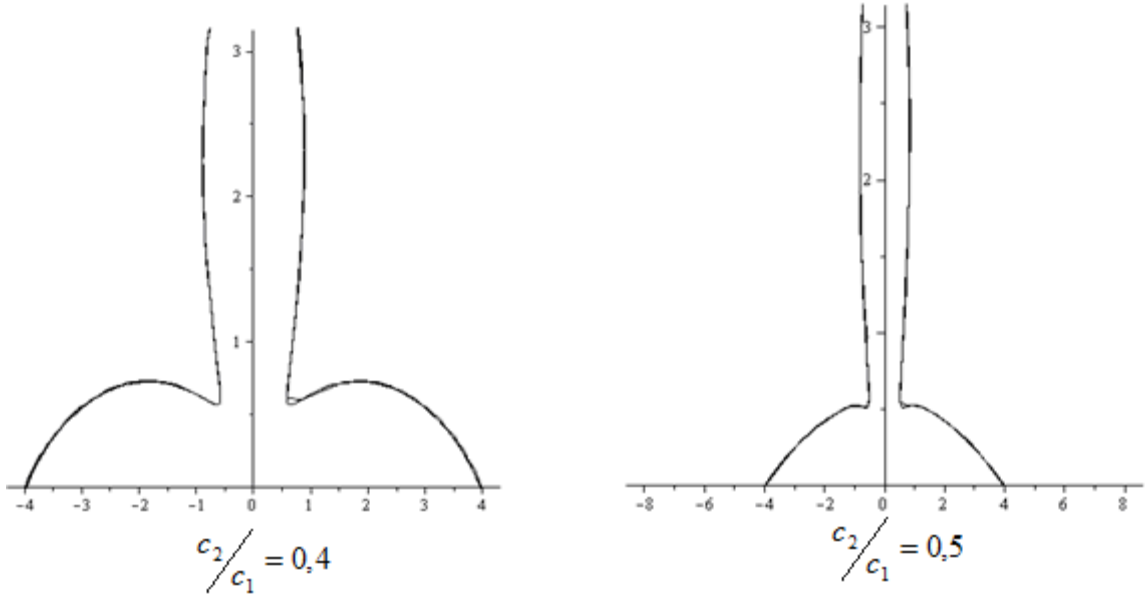


Рис.29. График относительной интенсивности $K_1 = \frac{I_2^I}{I_2^{0'}}$ интенсивности напряженного состояния за отраженной продольной волной в полярной системе координат

Второй инвариант девиатора тензора напряжений для зоны II определяется выражением:

$$I_2^{III} = \sigma_{ij}^{III} \sigma_{ij}^{III}, \text{ где}$$

$$\sigma_{ij}^{III} = \sigma_{ij}^{II} - \frac{1}{3} \sigma_{kk}^{II} \delta_{ij} = 2\mu \left(N_i N_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\omega_n^0}{c_1} + 2\mu \left(n_i^I n_j^I - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\omega^I}{c_1} + \mu (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \frac{\omega^{II}}{c_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2^{III} &= 4\mu^2 \left(N_i N_j N_i N_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} N_i N_j + \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{ij} \right) \frac{(\omega_n^0)^2}{c_1^2} + 4\mu^2 \left(n_i^I n_j^I n_i^I n_j^I - \frac{2}{3} \delta_{ij} n_i^I n_j^I + \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{ij} \right) \frac{(\omega^I)^2}{c_1^2} + \\ &+ \mu^2 (\tau_i^{II} n_j^{II} \tau_i^{II} n_j^{II} + 2\tau_i^{II} n_j^{II} \tau_j^{II} n_i^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II} \tau_j^{II} n_i^{II}) \frac{(\omega^{II})^2}{c_2^2} + 8\mu^2 \left(N_i N_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\omega_n^0}{c_1} \left(n_i^I n_j^I - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\omega^I}{c_1} + \\ &+ 4\mu^2 \left(N_i N_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\omega_n^0}{c_1} (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \frac{\omega^{II}}{c_2} + 4\mu^2 \left(n_i^I n_j^I - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\omega^I}{c_1} (\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \frac{\omega^{II}}{c_2} = \\ &= \frac{8}{3} \mu^2 \frac{(\omega_n^0)^2}{c_1^2} + \frac{8}{3} \mu^2 \frac{(\omega^I)^2}{c_1^2} + \frac{16}{3} \mu^2 \frac{\omega_n^0 \omega^I}{c_1^2} - 8\mu^2 \frac{\omega_n^0 \omega^{II}}{c_1 c_2} \sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi + \varphi') + 2\mu^2 \frac{(\omega^{II})^2}{c_2^2}. \end{aligned}$$

С учетом последнего:

$$K_2 = \frac{I_2^{III}}{I_2^0} = 1 + k_1^2 + 2k_1 - 3 \frac{c_1}{c_2} k_2 \sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi + \varphi') + \frac{3}{4} \frac{c_1^2}{c_2^2} k_2^2. \quad (4.43)$$

Окончательно,

$$K_2 = 1 + k_1^2 + 2k_1 - \frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} k_2 \left(\sin 2\varphi \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1 \right) + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi} \right) + \frac{3}{4} \frac{c_1^2}{c_2^2} k_2^2$$

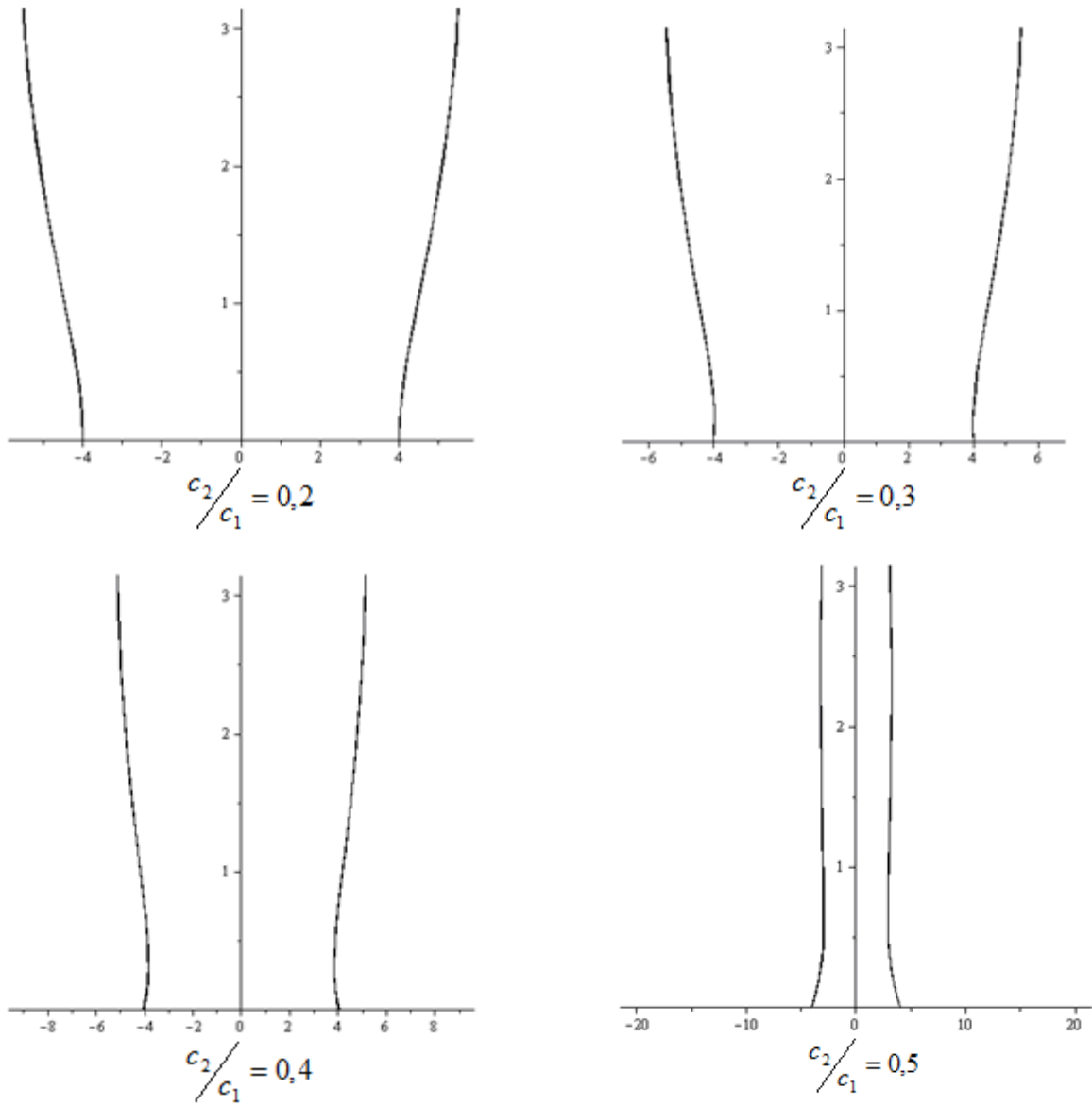


Рис.30. График относительной интенсивности $K_2 = \frac{I_2''}{I_2^0}$ напряженного состояния за отраженной сдвиговой волной в полярной системе координат

Коэффициенты K_1, K_2 можно сопоставить с аналогичными коэффициентами продольного сдвига [102], которые позволяют оценить возможность зарождения сдвигового разрушения материала (рис.31).

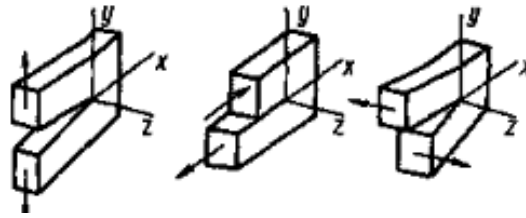


Рис.31. Основные виды деформаций берегов трещины

Максимальное значение наибольшего касательного напряжения за продольной и сдвиговой дифрагированной волнами вблизи вершины клина или конуса позволяет определить направление возможного образования трещины, возникающей при прямом падении продольной волны на клин или конус [102].

Интенсивность предельной продольной волны определим из условия пластичности Мизеса: $I_2'' = \sigma_{ij}^{0'} \sigma_{ij}^{0'} = 2k_0^2$, подставив в него значения $\sigma_{ij}^{0'}$, получим: $\omega_n^0 = \frac{\sqrt{3}k_0}{2\mu}$.

Вычислив интенсивность максимальных касательных напряжений I_2 , можно оценить возможность пластического ($K_2 > 1$) деформирования материала за отраженными продольной и сдвиговой волнами в зависимости от угла φ (определяющего точку встречи падающей волны и препятствия в виде цилиндра, заменяющего особую сингулярную точку вершины клина) продольной волны Σ и значения ν коэффициента Пуассона рассматриваемого материала.

4.2 Дифракция плоской продольной упругой волны на конусе

Для детального исследования дифрагированной волны на вершине конуса заменим вершину конуса сферой малого радиуса δ (рис. 32).

Запишем уравнение продольной дифрагированной волны в параметрическом виде. Нормаль к дифрагированному фронту в текущей точке M имеет координаты:

$$\begin{cases} n_x = \cos 2\varphi \cos \theta, \\ n_y = \cos 2\varphi \sin \theta, \\ n_z = \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (4.44)$$

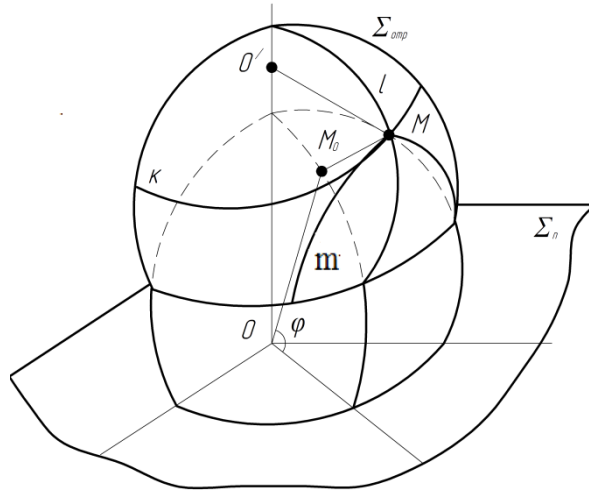


Рис.32. Геометрия дифрагированной волны от вершины сферы

Используя знание положения начальной точки отражения M_0 и расстояния $\tilde{c}t$, пройденное волной по направлению \vec{n} , представим уравнение дифрагированной волны в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \delta \cos \varphi \cos \theta + \tilde{c}t \cdot n_x, \\ y = \delta \cos \varphi \sin \theta + \tilde{c}t \cdot n_y, \\ z = \delta \sin \varphi + \tilde{c}t \cdot n_z. \end{cases} \quad (4.45)$$

Для определения средней кривизны Ω дифрагированной волны Σ_0 выделим две ортогональные линии на поверхности для подсчета их кривизн в текущий момент времени. Одной из линий главных кривизн является сечение дифрагированной волны плоскостью $\theta = const$ (линия l на рис. 32). Второй линией главной кривизны является сечение дифрагированного фронта плоскостью, содержащей нормаль \vec{n} и перпендикулярной линии l . Кривизна линии l находилась в предыдущей задаче отражения плоской волны от цилиндра так, что для того, чтобы получить кривизну χ_L , необходимо в уравнениях для линии l зафиксировать угол θ .

Радиус кривизны и кривизну второй линии главной кривизны m поверхности Σ_0 можно найти из геометрических соображений (геометрии рисунка).

Радиус кривизны $O'M$ линии k имеет следующий вид:

$$O'M = \delta \cos \varphi + \tilde{c}t \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi = \rho_k. \quad (4.46)$$

Радиус кривизны ρ_m для линии главной кривизны m связан с радиусом ρ_k следующим образом:

$\rho_k = \rho_m \cos \gamma$, где γ - угол между нормалью \vec{n} и плоскостью xu , так что $\cos \gamma = \cos 2\varphi$. Таким образом, $\rho_m = \frac{\delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}$, а кривизна

$$\chi_{\perp} = \chi_m = \frac{1}{\rho_m} = \frac{\cos 2\varphi}{\delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi}. \quad (4.47)$$

Запишем (4.45) с учетом (4.44) в виде:

$$\begin{cases} x = \delta \cos \varphi \cos \theta + \tilde{c}t \cos 2\varphi \cos \theta, \\ y = \delta \cos \varphi \sin \theta + \tilde{c}t \cos 2\varphi \sin \theta, \\ z = \delta \sin \varphi + \tilde{c}t \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (4.48)$$

Запишем выражение для кривизны линии l [98]:

$$\chi_L = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (4.49)$$

Вычислим первые и вторые производные по φ :

$$\begin{cases} x' = \cos \theta_0 (-\delta \sin \varphi - 2\tilde{c}t \sin 2\varphi), \\ y' = \sin \theta_0 (-\delta \sin \varphi - 2\tilde{c}t \sin 2\varphi), \\ z' = \delta \cos \varphi + 2\tilde{c}t \cos 2\varphi. \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\begin{cases} x'' = \cos \theta_0 (-\delta \cos \varphi - 4\tilde{c}t \cos 2\varphi), \\ y'' = \sin \theta_0 (-\delta \cos \varphi - 4\tilde{c}t \cos 2\varphi), \\ z'' = -\delta \sin \varphi - 4\tilde{c}t \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} z''y' &= (\delta \sin \varphi + 4\tilde{c}t \sin 2\varphi)(\delta \sin \varphi + 2\tilde{c}t \sin 2\varphi) \sin \theta_0 = \\ &= (\delta^2 \sin^2 \varphi + 6\tilde{c}t \delta \sin 2\varphi \sin \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2 \sin^2 2\varphi) \sin \theta_0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} y''z' &= -\sin \theta_0 (\delta \cos \varphi + 4\tilde{c}t \cos 2\varphi)(\delta \cos \varphi + 2\tilde{c}t \cos 2\varphi) = \\ &= -\sin \theta_0 (\delta^2 \cos^2 \varphi + 6\tilde{c}t \delta \cos 2\varphi \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2 \cos^2 2\varphi), \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$z''y' - y''z' = \sin \theta_0 (\delta^2 + 6\tilde{c}t \delta \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2), \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} x''z' &= -\cos \theta_0 (\delta \cos \varphi + 4\tilde{c}t \cos 2\varphi)(\delta \cos \varphi + 2\tilde{c}t \cos 2\varphi) = \\ &= -\cos \theta (\delta^2 \cos^2 \varphi + 6\tilde{c}t\delta \cos 2\varphi \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2 \cos^2 2\varphi), \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} z''x' &= (\delta \sin \varphi + 4\tilde{c}t \sin 2\varphi)(\delta \sin \varphi + 2\tilde{c}t \sin 2\varphi) \cos \theta_0 = \\ &= -\cos \theta_0 (\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2), \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} x''z' - z''x' &= -\cos \theta_0 (\delta^2 \cos^2 \varphi + 6\tilde{c}t\delta \cos 2\varphi \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2 \cos^2 2\varphi) = \\ &= -\cos \theta_0 (\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} y''x' &= \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\delta^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tilde{c}t\delta \sin 2\varphi \cos \varphi + \\ &+ 4\tilde{c}t\delta \sin \varphi \cos 2\varphi + 8\tilde{c}^2 t^2 \cos 2\varphi \sin 2\varphi), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} x''y' &= \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\delta^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tilde{c}t\delta \sin 2\varphi \cos \varphi + \\ &+ 4\tilde{c}t\delta \cos 2\varphi \sin \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2 \cos 2\varphi \sin 2\varphi), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$y''x' - x''y' = 0, \quad (4.60)$$

$$x'^2 = \cos^2 \theta_0 (\delta^2 \sin^2 \varphi + 4\tilde{c}t\delta \sin 2\varphi \sin \varphi + 4\tilde{c}^2 t^2 \sin^2 2\varphi), \quad (4.61)$$

$$y'^2 = \sin^2 \theta_0 (\delta^2 \sin^2 \varphi + 4\tilde{c}t\delta \sin 2\varphi \sin \varphi + 4\tilde{c}^2 t^2 \sin^2 2\varphi) \quad (4.62)$$

$$z'^2 = \delta^2 \cos^2 \varphi + 4\tilde{c}t\delta \cos 2\varphi \cos \varphi + 4\tilde{c}^2 t^2 \cos^2 2\varphi, \quad (4.63)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 4\tilde{c}^2 t^2. \quad (4.64)$$

Подставив (4.50)-(4.64) в (4.49), получим:

$$\chi_L = \frac{\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2}{(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}}. \quad (4.65)$$

Тогда средняя кривизна вычисляется по формуле:

$$\Omega = \frac{\chi_L + \chi_{\perp}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2\varphi}{\delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi} + \frac{\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2}{(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}} \right). \quad (4.66)$$

Дифференциальное уравнение «переноса» с учетом полученной кривизны имеет вид:

$$\frac{\delta W}{\tilde{c}t} = \frac{W}{2} \left(\frac{\cos 2\varphi}{\delta \cos \varphi + \tilde{c}t \cos 2\varphi} + \frac{\delta^2 + 6\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 8\tilde{c}^2 t^2}{(\delta^2 + 4\tilde{c}t\delta \cos \varphi + 4\tilde{c}^2 t^2)^{3/2}} \right). \quad (4.67)$$

Решим дифференциальное уравнение (4.67) при $\delta \rightarrow 0$, получим:

$$\frac{W}{W_0} = \frac{\tilde{c}t_0}{\tilde{c}t} = \frac{n_0}{n}, \quad (4.68)$$

где n - пройденное волной расстояние за время t .

Из (4.68) следует, что интенсивность отраженной волны для случая малых радиусов δ затухает асимптотически по закону (4.68) обратно пропорционально пройденному расстоянию (рис. 33).

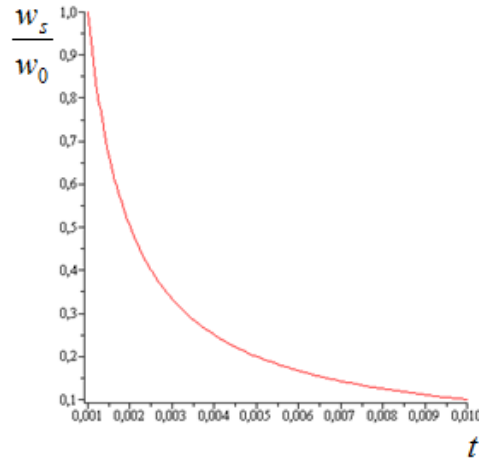


Рис. 33. График интенсивности продольной дифрагированной волны на вершине конуса

Далее рассмотрим закономерности отражения падающей на окружность продольной волны, воспользовавшись материалом работы [43].

Предположим, что материал перед волной Σ находится в покое и ненапряжен. Тогда, упругое напряженное состояние за падающей волной Σ определяется условиями совместности для напряжений и скоростей на фронте сильной волны:

$$-c_1 [\sigma_{ij}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n, \quad [v_i] N_i = \omega_n, \quad [v_i] = \omega_n N_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.69)$$

где $\mu = \rho c_2^2$, $\lambda + 2\mu = \rho c_1^2$, $\lambda = \rho c_1^2 - 2\rho c_2^2 \geq 0$, откуда $\frac{c_2^2}{c_1^2} \leq \frac{1}{2}$.

Заметим, что:

$$\vec{N} = (0, 0, -1), \quad \vec{n} = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi), \quad \vec{n}^l = (\cos 2\varphi \cos \theta, \cos 2\varphi \sin \theta, \sin 2\varphi),$$

$$\vec{n}'' = (\cos(\varphi + \varphi') \cos \theta, \cos(\varphi + \varphi') \sin \theta, \sin(\varphi + \varphi')),$$

$$\vec{\tau}'' = (\sin(\varphi + \varphi') \cos \theta, \sin(\varphi + \varphi') \sin \theta, -\cos(\varphi + \varphi')).$$

Условия совместности для случая препятствия в форме конуса:

$$\begin{aligned}
-c_1(\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^0) &= (\lambda\delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0, \quad -c_1(\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^I) = (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \omega^I, \\
-c_2(\sigma_{ij}^I - \sigma_{ij}^{II}) &= \mu(\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \omega^{II}.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Граничные условия на свободной границе имеют вид:

$$\sigma_{ij}^{II} n_j = 0. \tag{4.71}$$

В случае покоя материала препятствия перед фронтом дифрагированной волны $[\sigma_{ij}] = -\sigma_{ij}^0$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^0 &= (\lambda\delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \frac{\omega_n^0}{c_1}, \quad -\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^I = (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \frac{\omega^I}{c_1}, \\
-\sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} &= \mu(\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \frac{\omega^{II}}{c_2}.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Складывая эти три уравнения, получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^I &= (\lambda\delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \frac{\omega_n^0}{c_1} + (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \frac{\omega^I}{c_1}, \\
\sigma_{ij}^{II} &= (\lambda\delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \frac{\omega_n^0}{c_1} + (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \frac{\omega^I}{c_1} + \mu(\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \frac{\omega^{II}}{c_2}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Подставив полученное σ_{ij}^{II} в граничное условие, получим:

$$\begin{aligned}
\left[(\lambda\delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \frac{\omega_n^0}{c_1} + (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i^I n_j^I) \frac{\omega^I}{c_1} + \mu(\tau_i^{II} n_j^{II} + \tau_j^{II} n_i^{II}) \frac{\omega^{II}}{c_2} \right] n_j &= 0, \\
(\lambda\delta_{ij} n_j + 2\mu N_i N_j n_j) \frac{\omega_n^0}{c_1} + (\lambda\delta_{ij} n_j + 2\mu n_i^I n_j^I n_j) \frac{\omega^I}{c_1} + \mu(\tau_i^{II} n_j^{II} n_j + \tau_j^{II} n_i^{II} n_j) \frac{\omega^{II}}{c_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Вычислим скалярные произведения, входящие в уравнение (4.74):

$$\delta_{ij} n_j = n_i, \quad N_j n_j = -\sin \varphi, \quad n_j^I n_j = \cos \varphi, \quad n_j^{II} n_j = \cos \varphi', \quad \tau_j^{II} n_j = \sin \varphi'.$$

Положив $i=1$ и $i=2$, получим систему двух линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов отражения k_1 и k_2 для продольной и сдвиговой волн:

$$\begin{cases}
\lambda \cos \varphi \cos \theta + (\lambda \cos \varphi \cos \theta + 2\mu \cos 2\varphi \cos \theta \cos \varphi) k_1 + \\
+ \mu k_2 \frac{c_1}{c_2} (\sin(\varphi + \varphi') \cos \theta \cos \varphi' + \cos(\varphi + \varphi') \cos \theta \sin \varphi') = 0, \\
\lambda \cos \varphi \sin \theta + (\lambda \cos \varphi \sin \theta + 2\mu \cos 2\varphi \sin \theta \cos \varphi) k_1 + \\
+ \mu k_2 \frac{c_1}{c_2} (\sin(\varphi + \varphi') \sin \theta \cos \varphi' + \cos(\varphi + \varphi') \sin \theta \sin \varphi') = 0, \\
\lambda \sin \theta + 2\mu \sin \varphi + (\lambda \sin \varphi + 2\mu \sin 2\varphi \cos \varphi) k_1 + \\
+ \mu k_2 \frac{c_1}{c_2} (-\cos \varphi' \cos(\varphi + \varphi') + \sin(\varphi + \varphi') \sin \varphi') = 0.
\end{cases} \quad (4.75)$$

Здесь $k_1 = \frac{\omega^I}{\omega_n^0}$, $k_2 = \frac{\omega^{II}}{\omega_n^0}$.

Решая систему методом Крамера, получим:

$$k_1 = \frac{\lambda \cos 2\varphi' + 2\mu \sin \varphi \sin(\varphi + 2\varphi')}{\lambda \cos 2\varphi' + 2\mu \cos \varphi \cos(2\varphi' - \varphi)}, \quad (4.76)$$

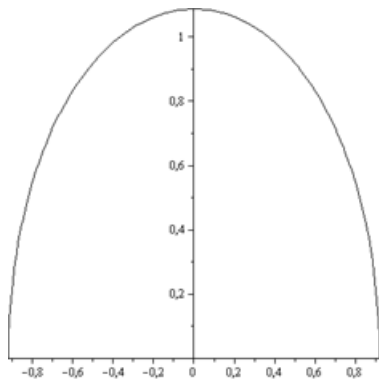
$$k_2 = \frac{4\mu \cos 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi}{-\lambda \frac{c_1}{c_2} \cos 2\varphi' - 2\mu \frac{c_1}{c_2} \cos \varphi \cos(2\varphi' - \varphi)}. \quad (4.77)$$

Переходя от λ, μ, φ' к φ , где $\mu = \rho c_2^2$, $\lambda + 2\mu = \rho c_1^2$, $\lambda = \rho c_1^2 - 2\rho c_2^2 \geq 0$,

откуда $\frac{c_2^2}{c_1^2} \leq \frac{1}{2}$, получим:

$$k_1 = \frac{4 \cos^2 \varphi - 4 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^4 \varphi - \frac{c_1^2}{c_2^2} + 4 \sin \varphi \cos^2 \varphi \frac{c_2}{c_1} \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}{-\frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 2\varphi - \frac{c_1^2}{c_2^2} + 2 + 4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{c_2}{c_1} \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}, \quad (4.78)$$

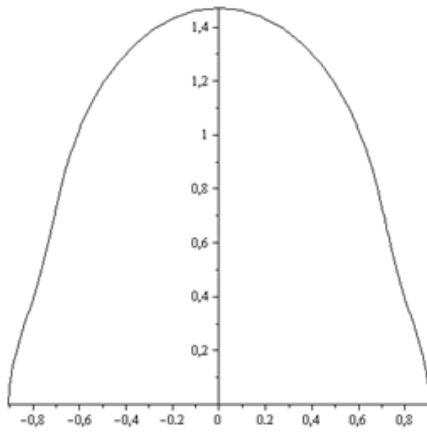
$$k_2 = \frac{\frac{c_2}{c_1} \sin 4\varphi}{\frac{c_1^2}{c_2^2} + \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 2\varphi - 2 - 4 \frac{c_2}{c_1} \sin \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi}}. \quad (4.79)$$



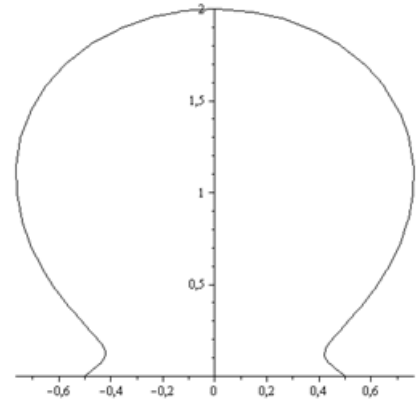
$$c_2/c_1 = 0,2$$



$$c_2/c_1 = 0,3$$

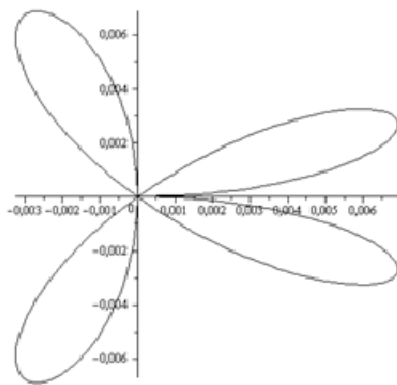


$$c_2/c_1 = 0,4$$

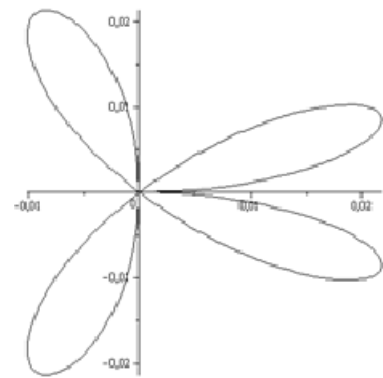


$$c_2/c_1 = 0,5$$

Рис.34. График значений коэффициента $k_1 = \frac{\omega^I}{\omega_n^0}$ в полярных координатах



$$c_2/c_1 = 0,2$$



$$c_2/c_1 = 0,3$$

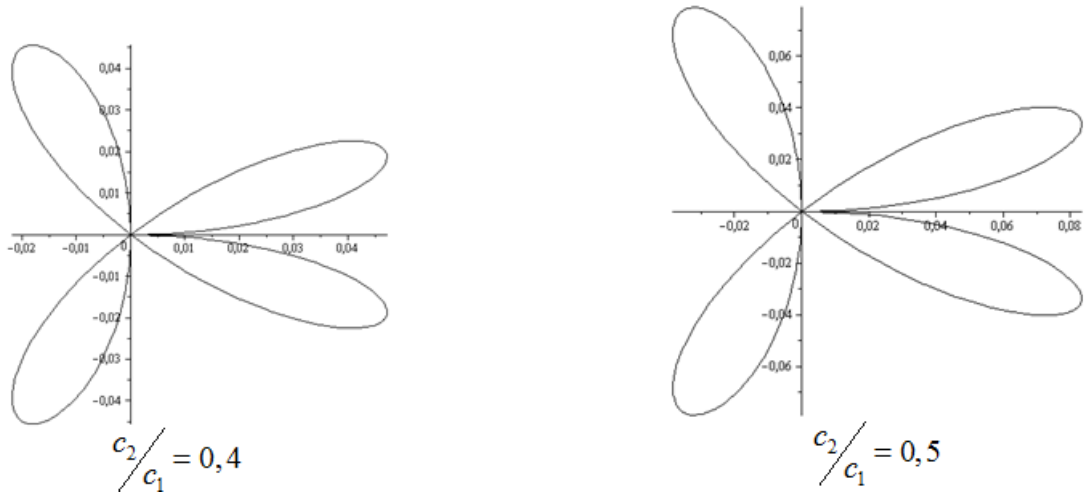


Рис.35. График значений коэффициента относительной интенсивности

$$k_2 = \frac{\omega''}{\omega_n^0} \text{ отраженной сдвиговой волны в полярных координатах}$$

Из графиков рис. 34,35 интенсивностей продольной и поперечной сдвиговых дифрагированных волн следует симметрия для $\varphi \in (0, \pi)$, максимальное значение интенсивности продольной дифрагированной волны для $\varphi = \pi/2$, для которого интенсивность сдвиговой волны равна нулю.

Знание коэффициентов отражения k_1 и k_2 для продольной и сдвиговой волн, соответственно, позволяет построить выражение для напряжений за продольной и сдвиговой волнами через ω_n^0 падающей продольной волны.

Второй инвариант девиатора тензора напряжений [80] определяется выражением для зоны I:

$$I_2' = \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = \left(\sigma_{ij}^{0'} - [\sigma_{ij}'] \right) \left(\sigma_{ij}^{0'} - [\sigma_{ij}'] \right) = \sigma_{ij}^{0'} \sigma_{ij}^{0'} - 2\sigma_{ij}^{0'} [\sigma_{ij}'] + [\sigma_{ij}'] [\sigma_{ij}'].$$

Скачок девиатора тензора напряжений имеет вид:

$$[\sigma_{ij}^{0'}] = [\sigma_{ij}^0] - \frac{1}{3} [\sigma_{kk}^0] \delta_{ij}, \text{ а условие совместности напряжений на } \Sigma:$$

$$-c_1 [\sigma_{ij}^{0'}] = -c_1 \left([\sigma_{ij}^0] - \frac{1}{3} [\sigma_{kk}^0] \delta_{ij} \right), \text{ где}$$

$$-c_1 [\sigma_{ij}^0] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0,$$

$$-c_1 [\sigma_{kk}^0] = (3\lambda + 2\mu) \omega_n^0, \text{ тогда}$$

$$-c_1 [\sigma_{ij}^{0'}] = (\lambda \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j) \omega_n^0 - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \omega_n^0 \delta_{ij} \text{ или}$$

$$-c_1 [\sigma_{ij}^{0'}] = \omega_n^0 \left(-\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j \right) = 2\mu \omega_n^0 \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right).$$

Отсюда,

$$[\sigma_{ij}^{0'}] = -\frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} + 2\mu N_i N_j \right) = -2\mu \frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right),$$

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij}^{0'}][\sigma_{ij}^{0'}] &= 2\mu \frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) 2\mu \frac{\omega_n^0}{c_1} \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) = \\ &= 4\mu^2 \frac{\omega_n^0}{c_1^2} \left(\frac{1}{9} \cdot 3 - \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{8}{3} \mu^2 \frac{\omega_n^0}{c_1^2}, \text{ то есть } I_2^{0'} = \frac{8}{3} \mu^2 \frac{\omega_n^0}{c_1^2}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\sigma_{ij}^{I'} = \sigma_{ij}^{0'} - [\sigma_{ij}^{I'}] = 2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) \frac{\omega_n^0}{c_1} + 2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + n_i^I n_j^I \right) \frac{\omega^I}{c_1}.$$

Второй инвариант девиатора тензора напряжений в зоне I имеет вид:

$$\begin{aligned} I_2^I &= \sigma_{ij}^{I'} \sigma_{ij}^{I'} = \left(2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) \frac{\omega_n^0}{c_1} + 2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + n_i^I n_j^I \right) \frac{\omega^I}{c_1} \right) \times \\ &\times \left(2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + N_i N_j \right) \frac{\omega_n^0}{c_1} + 2\mu \left(-\frac{1}{3} \delta_{ij} + n_i^I n_j^I \right) \frac{\omega^I}{c_1} \right) = \\ &= 4\mu^2 \left(\frac{2}{3} \frac{(\omega_n^0)^2}{c_1^2} + \frac{2}{3} \frac{(\omega^I)^2}{c_1^2} + 2 \left(-\frac{1}{3} + \sin^2 2\varphi \right) \frac{\omega_n^0 \omega^I}{c_1^2} \right). \end{aligned}$$

Знание вторых инвариантов девиаторов тензоров напряжений в зонах 0, I, II позволяют вычислить интенсивности напряженного состояния за отраженными продольной и сдвиговой волнами вблизи вершины конуса.

$$K_1 = \frac{I_2^I}{I_2^{0'}} = 1 + 3 \left(-\frac{1}{3} + \sin^2 2\varphi \right) k_1 + k_1^2.$$

$$K_2 = \frac{I_2^{II}}{I_2^0} = 1 + k_1^2 + \frac{3}{4} k_2^2 + 3k_1 \left(-\frac{1}{3} + \sin^2 2\varphi \right) - \frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} k_2 \sin 2(\varphi + \varphi') + \frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} k_2 k_1 \sin 2(\varphi' - \varphi)$$

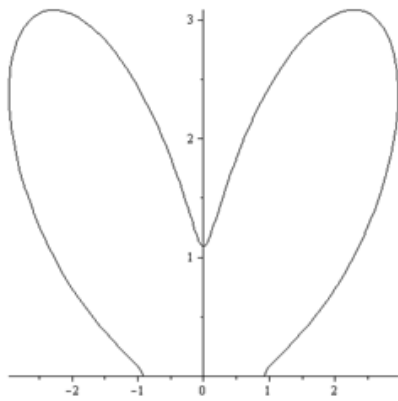
Так как

$$\sin 2(\varphi' - \varphi) = \sin 2\varphi' \cos 2\varphi - \cos 2\varphi' \sin 2\varphi = 2 \frac{c_2}{c_1} \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi} \cos 2\varphi - \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1 \right) \sin 2\varphi,$$

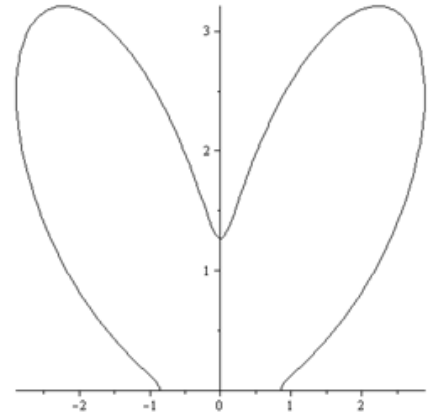
$$\text{то } K_2 = 1 + k_1^2 + \frac{3}{4} k_2^2 + 3k_1 \left(-\frac{1}{3} + \sin^2 2\varphi \right) -$$

$$-\frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} k_2 \left(\sin 2\varphi \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1 \right) + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos 2\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi} \right) +$$

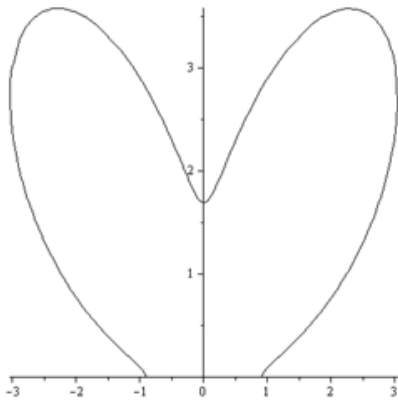
$$+\frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} k_2 k_1 \left(2 \frac{c_2}{c_1} \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi} \cos 2\varphi - \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \cos^2 \varphi - 1 \right) \sin 2\varphi \right).$$



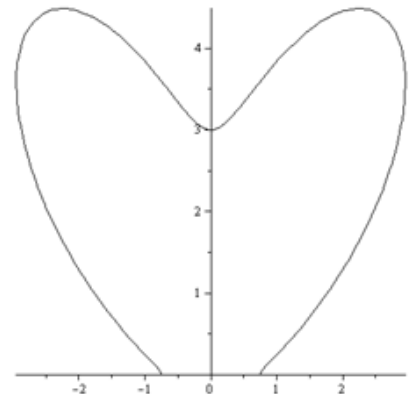
$$\frac{c_2}{c_1} = 0,2$$



$$\frac{c_2}{c_1} = 0,3$$



$$\frac{c_2}{c_1} = 0,4$$



$$\frac{c_2}{c_1} = 0,5$$

Рис.36. График интенсивности напряженного состояния за отраженной продольной волной в полярной системе координат

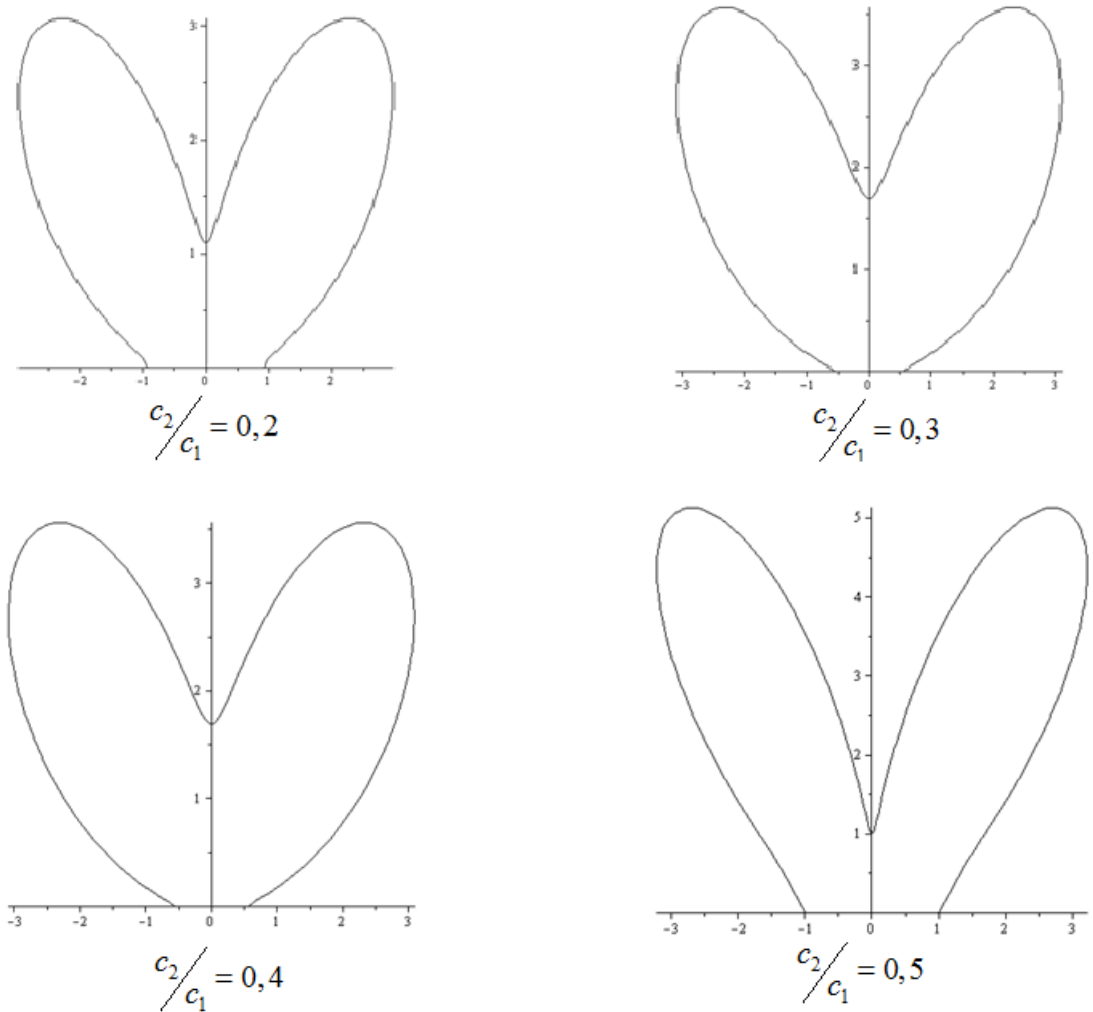


Рис.37. График интенсивности напряженного состояния за отраженной сдвиговой волной в полярной системе координат

Графики интенсивности напряженного состояния за продольной и сдвиговой дифрагированными волнами показывают, что максимальное значение K_1 , K_2 достигается по направлению $\varphi \approx \pi/3$ в зависимости от соотношения скоростей c_2/c_1 по которому следует ожидать распространение возможных трещин после падения продольной волны.

Вычислив интенсивность максимальных касательных напряжений I_2 , можно оценить деформирование материала за отраженными продольной и сдвиговой волнами в зависимости от угла падения φ продольной волны Σ и значения ν коэффициента Пуассона рассматриваемого материала.

Основные выводы по четвертой главе:

Рассмотрена задача прямой дифракции упругой продольной волны на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки клина окружностью и вершины конуса сферой малого радиуса δ . Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Наибольшее значение интенсивности напряженного состояния достигается в вершине клина, что ведет в случае падения предельной пластической волны к увеличению максимального касательного напряжения и к необходимости учета пластической деформации вблизи вершины клина.

Построенные графики интенсивности напряженного состояния за продольной и сдвиговой дифрагированными волнами показывают, что максимальное значение K_1 , K_2 достигается по направлению $\varphi \approx \pi/3$ в зависимости от соотношения скоростей c_2/c_1 по которому следует ожидать распространение возможных трещин после падения продольной волны.

Заключение

В результате выполнения диссертационного исследования получены следующие основные результаты:

1. Приведено точное решение уравнения для интенсивности дифрагированной волны за цилиндром в области тени. Показано, что значение интенсивности волны затухает вдоль фронта дифрагированной волны и уменьшается по времени.

2. Рассмотрена задача дифракции предельной пластической волны на сфере. Получено выражение для определения интенсивности дифрагированной волны от момента ее зарождения до текущего момента. Показано, что интенсивность дифрагированной волны экспоненциально убывает за счет ее распространения вдоль меридиана по сфере и геометрического затухания разворачивания дифрагированного фронта.

3. Рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклым препятствием. В качестве препятствия выбран эллипсоид. При распространении дифрагированного фронта вдоль поверхности препятствия интенсивность зависит от времени, от расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны. Построены графики, отображающие эту зависимость для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида. В результате проведенного исследования получил подтверждение физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

4. Рассмотрена задача прямой дифракции упругой продольной волны на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки клина окружностью и вершины конуса сферой малого радиуса δ . Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности

дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Список использованных источников

1. Авершьев С.П. О распространении волн в слоистых упругопластических средах / С.П. Авершьев, А. Джаббаров, Н. Мамадалиев, Р.Г. Могинов // Космонавт. и ракетостр. – 2002. – №27. – С. 126-134.
2. Азатян Л.Д. Расчет плотности слоистой пластинки-полосы, взаимодействующей с магнитозвуковой волной. / Л.Д. Азатян // Изв. АН Армении. Мех. – 2000. – №3. – Т.53. – С. 20-28.
3. Акбаров С.Д. О влиянии начальных конечных деформаций на распространение осесимметричных продольных волн в круговом цилиндре, находящемся в бесконечно сжимаемом упругом теле / С.Д. Акбаров // Докл. НАН Азербайджана. – 2008. – №2. – Т.64. – С. 19-28.
4. Аксенова Л.И. Расчет гидроудара в разветвленной линии лучевым мето-дом / Л.И. Аксенова, Н.Д. Вервейко, С.И. Маринина и др. // Изв. вузов. Машиностроения. –1986. – №6. – С.72-82.
5. Александров А.Д. Геометрия / А.Д. Александров // Учебное пособие. – М.: Наука. Гл.ред. ФИЗМАТЛИТ, 1990. – 672 с.
6. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций на протяженных цилиндрических полостях в упругих средах / Л.А. Алексеева, Г. К. Кайшибаева // 9 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Нижний Новгород. – 22-28 авг. 2006. – С.14.
7. Бабешко В.А. К проблеме локализации вибрационного процесса в упругом твердом теле с совокупностью плоских жестких включений. / В.А. Бабешко, В.В. Бужан, Р. Вильямс // Докл. РАН. – 2002. – № 6. – Т.382. – С. 765-767.
8. Бабич В.М. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции / В.М. Бабич, М.А. Лялинов, В.Э. Грикуров // СПб. ВВМ, 2004. – 103 с.
9. Бабичев А.И. Определение перемещений, массовых скоростей и напряжений упругой среды в области, примыкающей к фронту распространяющейся в ней одномерной цилиндрической волны /

А.И. Бабичев, Р.С. Кадыров // Космонавт. и ракетостр. – 2002. – № 27. – С. 120-125.

10. Бабичева Л.А. Лучевой метод решения динамических задач упруговязкопластической среды / Л.А. Бабичева, Г.И. Быковцев, Н.Д. Вервейко // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т.37. – Вып.1. – С. 77-87.

11. Баева А.Э. Переходные процессы в цилиндрической оболочке с жидкостью под действием ударной нагрузки / А.Е. Баева, В.Д. Кубенко, В.В. Кришталева // Прикладная механика. – 1987. – №1. – Т.23. – С.30-36.

12. Бай Ю.П. Локализованные волны в поперечно-анизотропном волноводе / Ю.П. Бай, В.И. Сторожев, В.А. Шпак // Совр. пробл. мех. сплош. среды. – 2000. – С. 16-19.

13. Баранов И.В. Построение волнового поля в ортотропной упругой плоскости с трещиной / И.В. Баранов, И.А. Гусева // Соврем. пробл. мех. сплош. Среда. – 2000. – С. 17-21.

14. Баскаков В.А. Особенности распространения гармонических волн в анизотропной среде Коссера с кубической симметрией / В.А. Баскаков, Н.П. Бестужева // Проблемы механики неупругих деформаций. – 2001. – С. 52-61.

15. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов // М.: Наука, 1973. – 631с.

16. Бахвалов Н. С. О дисперсии волн в микронеоднородных средах / Н.С. Бахвалов, М.Э. Эглит // 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Пермь. – 23-29 авг. 2001. – С. 83-84.

17. Безгласный П.А. О распространении ударных волн в упруговязкопластической среде / П.А. Безгласный, Н.Д. Вервейко // Механика твердого тела. – 1971. – №5. – С. 71-76.

18. Белоконов В.А. Применение метода контурного интегрирования в задачах о распространении волн в анизотропной полуплоскости: диссертация

кандидата физико-математических наук: 01.02.04 / В.А. Белоконь. – Краснодар, 2001. – 157 с.

19. Белянкова Т.И. Об одном методе расчета отраженного волнового поля, возникающего при падении волны на трещину / Т.И. Белянкова, И.А. Зайцева, И.Б. Полякова, Ю.Е. Пузанов // *Соврем. пробл. мех. сплош. среды*. – 2000. – С. 43-47.

20. Бестужева А.Н. Дифракция плоской упругой продольной волны на цилиндрической полости произвольного поперечного сечения / А.Н. Бестужева, Т.С. Обручева, В.П. Черкашин // *Вторые Поляховские чтения*. – 2000. – С. 113-114.

21. Бленд Д. Нелинейная динамика теории упругости / Д. Бленд. – М.: Мир, 1972. – 183 с.

22. Боев Н.В. Рассеяние высокочастотных упругих волн с учетом многократных переотражений и трансформаций / Н.В. Боев, М.А. Сумбатян // *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела*. – 2006. – С. 175-177.

23. Бригадирова Т.Е. Дифракция гармонических волн на неподвижном трансверсально-изотропном неоднородном шаре / Т.Е. Бригадирова, А.Л. Медведский // *Пятая Международная конференция «Авиация и космонавтика-2006»*. – Москва. – 23-26 окт. 2006. – С. 115.

24. Бригадирова Т.Е. Дифракция гармонических упругих волн на неоднородной трансверсально-изотропной сфере / Т.Е. Бригадирова, А.Л. Медведский // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2006. – № 4. – Т.12. – С.530-540.

25. Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства / А.А. Буренин // *Прикладная механика*. – 1985. – №5. – Т.21. – С. 3-8.

26. Быкова К.И. Распределение интенсивности волны на дифрагированном фронте за цилиндром / К.И. Быкова // *Труды молодых ученых: секция математика*. – 2011. – Выпуск 1-2. – С. 19-25.

27. Быкова К.И. Лучевое приближение задачи дифракции плоской волны на сфере / К.И. Быкова // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики.- Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета. – 2013г. – Вып. 9. – Ч.1. – С. 73-79.

28. Быкова К.И. Лучевое приближение плоской задачи дифракции / К.И. Быкова, М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Сборник трудов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж. – 2011. – С. 93-98.

29. Быкова К.И. Предельное напряженное состояние за дифрагированной пластической короткой волной на сфере / К.И. Быкова // Международная научно-практическая конференция. Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий. – Чебоксары. – 2013. – С.43-49.

30. Быкова К.И. К дифракции предельной плоской продольной пластической волны за выпуклым препятствием / К.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Материалы Международной конференции. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж. – 2013. – С. 65-68.

31. Быкова К.И. Интенсивность напряженно-деформированного состояния за дифрагированной волной на сфере и за порожденной упругой волной в шаре / К.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары. – 2014. – №3(21). – С. 149-159.

32. Быкова К.И. Перенос интенсивности дифрагированной волны на теневой стороне выпуклого препятствия [Электронный ресурс] / К.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Nauka-Rastudent.ru: электронный научно-практический журнал. –Уфа.–2015.–№13.–С.1-7. – Режим доступа: <http://nauka-rastudent.ru/13/2391/>.

33. Быкова К.И. Исследование напряженного состояния в окрестности порожденных дифрагированных волн / К.И. Быкова, М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Научный журнал «Молодой ученый». – Казань. – 2015. – №3(1). – С.104-107.

34. Быкова К.И. Лучевое представление дифракции плоской упругой волны за выпуклым препятствием / К.И. Быкова, М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, Математика. – Воронеж. – 2015. – №1. – С.18-26.

35. Быкова М.И. Деформирование нелинейно-упругой среды вблизи сдвигового волнового фронта / М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Труды 3 международной научно-технической конференции «Авиакосмические технологии». – Воронеж. – 29 окт. – 1 нояб. 2002. – С. 96-98.

36. Быковцев Г.И. О распространении волн в упруговязкопластической среде / Г.И. Быковцев, Н.Д. Вервейко // Механика твердого тела. – 1965. – №4. – С.111-123.

37. Быковцев Г.И. О распространении волн в трехмерных упругопластических телах при условии полной пластичности / Г.И. Быковцев, А.А. Калужин, Л.Д. Кретьева // Инж. журнал МГТ. – 1967. – №3. – С.13-20.

38. Вайсфельд Н. Нестационарные задачи дифракции упругих волн на дефектах в сферических слоистых средах / Н. Вайсфельд // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – 2000. – С. 169-172.

39. Вервейко Н.Д. Лучевой метод расчета гидроудара в линии с сопротивлением / Н.Д. Вервейко // Изв. вузов. Машиностроение. – 1983. – №10. – С.65-69.

40. Вервейко Н.Д. Затухание головной волны гидроудара в линии переменного сечения. / Н.Д. Вервейко // Изв. вузов. Машиностроение. – 1984. – №9. – С.70-73.

41. Вервейко Н.Д. Расчет головной волны гидроудара в линии с переменными параметрами / Н.Д. Вервейко // Дифференциальные уравнения и их приложения: Сб. науч. тр. – Воронеж. – 1985. – С.3-7.

42. Вервейко Н.Д. О напряженном состоянии трубопровода при гидроударе / Н.Д. Вервейко // Изв. вузов. Машиностроения. – №1. – С.70-74.

43. Вервейко Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н.Д. Вервейко // Изд-во Воронежского госуниверситета. – Воронеж, 1997. – 204 с.

44. Вервейко Н.Д. Распространение волн в тонких упруговязкопластических слоях / Н.Д. Вервейко // Прикладная механика. – 1985. – №12. – Т.21. – С.63-67.

45. Вервейко Н.Д. Преломление траектории твердого тела при входе в упруговязкопластическое полупространство / Н.Д. Вервейко // Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1986. – 10. – Деп. в ВВИНТИ 7.02.1986, №889-В.

46. Вервейко Н.Д. О распространение одномерных волн в упруговязкопластической среде при конечных деформациях / Н.Д. Вервейко, И.Ю. Маринина // Прикладная механика. – 1987. – №7. – Т.23. – С.72-77.

47. Воеводин А.Ф. Численные методы расчета одномерных систем / А.Ф.Воеводин, С.М. Шугрин // Новосибирск: Наука, 1981. – 205 с.

48. Воробьев А.М. Расчет параметров ударных волн в каналах переменного сечения / А.М. Воробьев, Ю.Н. Крюков, Г.Н. Никулин и др. // Гидрогазодинамика одной и многофазных сред. – Ташкент. – 1986. – С.57-67.

49. Гасратова Н.А. Напряженно-деформированное состояние упругого пространства со сферическим жестким включением / Н.А. Гасратова // Вестн. С. – Петербург. ун-та. Сер. 10. – 2009. – № 1. – С.14-18.

50. Глазова Е.Г. Взаимодействие цилиндрической оболочки с поперечной волной в упругой среде / Е.Г. Глазова, С.В. Зефирова, А.В. Кочетков // Прикл. пробл. прочн. и пластич. – 2001. – № 63. – С. 163-169.

51. Глушков Е.В. Дифракция упругих волн на интерфейсной трещине / Е.В. Глушков, Н. В. Глушкова, А. В. Ехлаков // Материалы 4-го Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». – Ярополец. – 14-18 февраля 2000. – С. 11.
52. Глушков Е.В. Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, М.В. Голуб // Прикл. мат. и мех. – 2007. – №4. – Т.71. – С. 702-715.
53. Годунов С.К. Разностные схемы. Введение в теорию / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
54. Гузь А.Н. Круговая трещина в плоскости сцепления упругих полупространств при нагружении волной сдвига / А.Н. Гузь, И.А. Гузь, А.В. Меньшиков, В.А. Меньшиков // Прикл. мех. – 2009. – № 5. – Т.45. – С. 80-87.
55. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко // Киев: Наукова думка, 1978. – 308 с.
56. Гусенкова А.А. Интегральные уравнения плоской задачи дифракции упругой гармонической волны на дефекте / А.А. Гусенкова // Исслед. по прикл. мат. и информат. – 2001. – №23. – С. 55-56.
57. Даниленко В.А. Резонансні режими поширення нелінійних хвильових полів у середовищах з коливними включеннями / В.А. Даниленко, С.І. Скуратівський // Доп. Нац. АН Україн. – 2008. – № 11. – С. 108-112.
58. Данилов В.И. Наблюдение нового типа волн в твердых телах / В.И. Данилов, К.В. Гончиков, И.Ю. Зыков // Труды 13 научно-практической конференции, посвященной 100-летию начала учебных занятий в ТПУ. – Юрга. – 27-28 апр. 2000. – С. 20-21.
59. Данилов Г.В. Алгоритм расчета траекторий распространения продольных упругих волн в эйкональном приближении трехмерной модели / Г.В. Данилов // Обзорение прикл. и пром. мат. – 2006. – № 4. – Т. 13. – С. 634-637.

60. Ершов Н.Е. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции упругих волн / Н.Е. Ершов, Л.В. Илларионова // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 2010. – № 3. – Т.50. – С.486-502.
61. Ехлаков А.В. Рассеяние упругих волн пространственными интерфейсными трещинами / А.В. Ехлаков // Кубанский гос. ун-т. Краснодар, 2001. – 31 с. – Деп. в ВИНТИ 15.02.01, №409-В2001.
62. Жарий О.Ю. Распространение и торможение упругих импульсов в конических стержнях / О.Ю. Жарий, А.Ф. Уметко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №2. – С.171-175.
63. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский // М.:Гостехиздат, 1949. – 89 с.
64. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред / Д.Д. Ивлев. – М.: ФизМатЛит, 2001. – Т.1. – 448 с.
65. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик // М.:Машиностроение, 1975. – 559 с.
66. Ильясов М.Х. Нестационарные SH волны в вязкоупругом слое, лежащем на вязкоупругом полупространстве / М.Х. Ильясов, Э.Г. Мамедгасанов // Вестн. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Информат. – 2008. – № 2. – Т.14. – С.72-83.
67. Исраилов М. Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн / М. Ш. Исраилов // Москва, Издательство МГУ, 1999г. – 208 с.
68. Карлов Н.Е. Колебания, волны, структуры / Н.Е. Карлов, Н.А. Кириченко // Изд-во: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 497 с.
69. Картвешвили Н.А. Неустановившиеся режимы в силовых узлах гидроэлектрических станций / Н.А. Картвешвили // М.: Госэнергоиздат, 1951. – 136 с.
70. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М.: Изд.-во иностр. лит., 1955. – 190 с.

71. Кондауров В.И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями / В.И. Кондауров // Прикл. механика и техн. физика. – 1982. – №4. – С.133-139.

72. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсивных и подвижных нагрузках / С.С. Кохманюк, Б.Г. Янютин, Л.Г. Романенко // Киев: Наука. Думка, 1980. – 230 с.

73. Кукуджанов В.А. Распространение волн в стержнях из неоднородного упруговязкопластического материала / В.А. Кукуджанов, Л.В. Никитин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – №4. – С.53-59.

74. Кукуджанов В.А. Удар о жесткую преграду стержня с кусочно-постоянным пределом текучести / В.А. Кукуджанов, Л.В. Никитин // Инж. механика твердого тела. – 1961. – №1. – С.177-183.

75. Курбацкий Е.Н. Распространение волн в упругой среде от точечных источников / Е.Н. Курбацкий, Хейн Аунг Мо, Тун Сан Лин // Изв. ОрелГТУ. Сер. Стр-во и реконструкция. – 2010. – №1. – С.40-46.

76. Кравченко В.Ф. Применение теории R-функций к задачам дифракции термоупругих волн на объектах сложной формы / В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, В.Л. Рвачев, Н.Д. Сизова // Докл. РАН 4. – 2000. – Т. 372. – С. 487-489.

77. Куликовский А.Г. Влияние изменения энтропии на форму ударной адиабаты квазипоперечных упругих волн / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова // Прикл. мат. и мех. – 2003. – №1. – Т.67. – С. 88-98.

78. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.: ГТТИ, 1945. – 620 с.

79. Курант Р. Уравнение с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

80. Курбанов Н.Т. Решение задачи распространения нестационарных волн для вязкоупругого шара и сферической оболочки / Н.Т. Курбанов,

В.Г. Бабаджанова, А.Б. Гасанов // Актуал. пробл. соврем. Науки. – 2009. – №5. – С. 159-164.

81. Ландау Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 2 изд. – М., 1954. – 795 с.

82. Лаптев С.В. Уединенные волны в линейно-вязкоупругой цилиндрической оболочке / С.В. Лаптев // Краснодарский юридический институт МВД РФ. Краснодар. – 2000. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ. 26.04.2000. №1219-В00.

83. Лемаев Б.Ф. Стационарные и переходные процессы в сложных гидросистемах / Б.Ф. Лемаев, Г.П. Небольсин, В.А. Нелюбов. – Л.: Машиностроение, 1978. – 192 с.

84. Литвин О.В. Изгибные колебания тонкого упругого включения в неограниченной среде при взаимодействии с упругими волнами / О.В. Литвин, В.Г. Попов // Теор. и прикл. мех. – 2002. – № 36. – С. 131-140.

85. Лозицкий Д.Н. Распространение волн Релея по границе упругого тела / Д. Н. Лозицкий // Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова. – Владивосток. – 25-31 авг. 2002. – С. 83.

86. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский // М.: Гос. издат. технико – теорет. лит., 1957. – 784 с.

87. Медведский А.Л. Задача о дифракции нестационарных упругих волн на неоднородной трансверсально изотропной сфере / А.Л. Медведский // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 2008. – № 3. – Т.14. – С.473-489.

88. Минасян М.М. Распространение нелинейных квазипоперечных возмущений в упругих проводящих средах / М.М. Минасян // Изв. АН Армении. Мех. – 2000. – №4. – Т. 53. – С.30-37.

89. Михаськив В.В. Эффекты рассеяния упругих гармонических волн в дальнюю зону пространственной трещиной / В.В. Михаськив, Н.Д. Грилицкий, И.О. Бутрак // Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстрегача НАН Украины. – Львов. – 2006. – №4. – С.115-123.

90. Моисеенко Р.П. Дифракционное рассеяние волн продольного сдвига на туннельной цилиндрической полости с жесткими включениями сегментного сечения / Р.П. Моисеенко // Мех. тверд. тела. – 2008. – № 38. – С.189-196.

91. Моисеенко Р.П. Дифракция волн плоской и антиплоской деформаций на включениях сегментного сечения в туннельных цилиндрических полостях / Р.П. Моисеенко // Прикл. мех. – 2009. – № 3. – Т. 45. – С. 123.

92. Мойсеенок А.П. Дифракция плоских упругих нестационарных волн на отслоившемся включении в случае гладкого контакта в области отслоения / А.П. Мойсеенок, В.Г. Попов // Прикл. мат. и мех. – 2008. – №5. – Т.72. – С.788-797.

93. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности / В.К. Мусаев // Вестн. РУДН. Сер. Пробл. комплекс. безоп. – 2008. – № 1. – С.43-51.

94. Назаренко А.М. Дифракция плоских гармонических волн на периодической системе жестких цилиндров / А.М. Назаренко, А.М. Ложкин // Динам. Системы. – 2006. – № 20. – С.59-67.

95. Назаров В.В. Нелинейные волновые процессы в средах с трещинами, частично заполненными вязкой жидкостью / В.В. Назаров, А.В. Радостин. – Препр. – 2002. – № 595. – С.1-18.

96. Наседкин А.В. Исследования волновых полей в анизотропных упругих средах при движущихся осциллирующих источниках / А.В. Наседкин // 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Пермь. – 23-29 авг. 2001. – С. 447-448.

97. Новацкий В. Теория упругости / В.Новацкий. – М.: Мир,1975. – 872 с.

98. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии / А.П. Норден. – М.: ФизМатГиз, 1958. – 244 с.

99. Осипов Е.А. Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах / Е.А. Осипов, Н.Б. Плещинский // Известия вузов. Математика. – 2008. – №9. – С.76-82.
100. Панасюк О.Н. Распространение плоских упругих волн в композитных слоистых материалах с начальными напряжениями при условии проскальзывания слоев / О.Н. Панасюк // Прикл. мех. – 2009. – № 3. – Т.45. – С. 120.
101. Паркин В.Р. Ударные волны в воде с пузырьками газа / В.Р. Паркин, Ф.Р. Гилмор, Г.Л. Бруд // Подводные и подземные взрывы. – 1979. – С.152-258.
102. Партон В.З. Динамика хрупкого разрушения / В.З. Партон, В.Г. Борисковский. – М.:Машиностроение, 1988. – 240 с.
103. Положий Р.Н. Уравнения математической физики / Р.Н. Положий. – М.: Высш. школа, 1964. – 600 с.
104. Порубов А.В. Модельные уравнения для существенно-нелинейных продольных волн деформации / А.В. Порубов // Нелинейн. Мир. – 2009. – №10. – Т.7. – С.796-801.
105. Потапов А.И. Нелинейные волны и микроструктура материалов / А.И. Потапов // 6 научная конференция «Нелинейные колебания механических систем». – Нижний Новгород. – 16–19 сент. 2002. – С. 125.
106. Попов В.Г. Взаимодействие упругих волн продольного сдвига с частично отслоившимся упругим цилиндрическим включением / В.Г. Попов // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2000. – № 5. – С. 143-150.
107. Пряхина О.Д. Изолированные резонансы при контактном взаимодействии массивных тел с полуограниченными средами / О.Д. Пряхина, Е.И. Ворович, О.М. Тукодова // Механика контактных взаимодействий. – 2001. – С. 320-330.
108. Пряхина О.Д. К исследованию волноводных свойств пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений / О.Д. Пряхина,

А.В. Смирнова // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2009. – № 3. – С.55-65.

109. Пухлий В.А. Об одном типе волн в слоистых средах /

В.А. Пухлий // Пробл. машиностр. и надеж. Машин. – 2002. – №6. – С. 90-99.

110. Рахматулин Х.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках / Х.А. Рахматулин, Ю.А. Демьянов. – М.: ФизМатГиз, 1961. – 439 с.

111. Саакян С.Л. Распространение спиновых волн в периодической слоистой среде / С.Л.Саакян // Изв. АН Армении. Мех. – 2001. – №3. – Т.54. – С.47-53.

112. Сагомоян А.Я. Волны напряжений в сплошных средах /

А.Я. Сагомоян // М.: Изд-во МГУ, 1985. – 415 с.

113. Сарайкин В.А. Распространение низкочастотной составляющей волны в модели блочной среды / В.А. Сарайкин // Прикл. мех. и техн. физ. – 2009. – № 6. – Т.50. – С.177-185.

114. Седов Л.И. Механика сплошной среды /Л.И. Седов // М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 568 с.

115. Сумбатян М.А. Теоретическое исследование прохождения плоских волн через периодические системы дефектов / М.А. Сумбатян, А.А. Чупахин // Соврем.пробл. мех. сплош. среды. – 1999. – С. 177-181.

116. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков / Схоутен Я.А. – М.: Изд. «Наука», 1965. – 456 с.

117. Тимофеева Н.В. Дифференциальная геометрия и элементы топологии в задачах, рисунках и комментариях (учебное пособие) / Н.В. Тимофеева. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. – 55 с.

118. Толоконников Л.А. Дифракция упругих волн на неоднородной анизотропной цилиндрической оболочке / Л.А. Толоконников // 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – Пермь. – 23-29 авг. 2001. – С. 561-562.

119. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.

120. Трепачев В.В. Отражение и преломление нелинейных упругих волн на границе раздела / В.В. Трепачев // Современные проблемы механики сплошной среды. – 2001. – С. 212-215.

121. Фриндлер Ф. Звуковые импульсы / Ф. Фриндлер. – М.: Иностран. лит., 1962. – 234 с.

122. Хантулева Т.А. Релаксация волн, распространяющихся в конденсированной среде / Т.А. Хантулева, Н.А. Серебрянская // Изв. вузов. Физ. – 2009. – № 2. – Т. 52. – С. 165-171.

123. Шадрина Н.Н. О математической модели линейных динамических процессов в неоднородных анизотропных средах / Н.Н. Шадрина // Обозрение прикл. и пром. мат. – 2009. – №3. – Т.16. – С. 571-572.

124. Шкодина Л.Н. Дифракция импульсной волны на подкрепленной полости с криволинейным сечением в ортотропном массиве / Л.Н. Шкодина, В.И. Сторожев // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. – 2006. – С.316-318.

125. Шувалов А.Л. (Shuvalov A.L.) On the theory of wave propagation in anisotropic plates / А.Л.Шувалов // Proc. Roy. Soc. – London. – 2000. – №2001. – V.456. – P. 2197-2222.

126. Шукуров А.М. Дифракция нестационарных волн на абсолютно жестком шаре в упругом полупространстве / А.М. Шукуров // Докл. Акад. наук Респ. – Узбекистан. – 2006. – № 4-5. – С.48-51.

127. Эглит М.Э. Дисперсия волн в неоднородных средах и структурах / М.Э. Эглит // Современные проблемы механики сплошной среды. – 2009. – С.282-296.

128. Ющенко Н.Л. Определение дифракционных поправок в твердых средах с помощью уравнений упругости / Н.Л. Ющенко // Проблемы теоретической и прикладной математики. – 2006. – С.92-95.

129. Acharya D.P. Reflection of longitudinal displacement plane waves from the flat boundary of a solid elastic half-space containing a distribution of a

void pores / D.P. Acharya, A. Mondal // *Int. J. Appl. Mech. and Eng.* – 2008. – №3. – V.13. – P. 609-625.

130. Al-Khoury R. Poroelastic spectral element for wave propagation and parameter identification in multy-layer systems / R. Al-Khoury, C. Kasbergen, A. Scarpas, J. Blaauwendraad // *Int. J. Solids and Struct.* – 2002. – №15. – V.39. – P. 4073-4091.

131. Brock L.M. An exact transient analysis of plane wave diffraction by a crack in an orthotropic or transversely isotropic solid / L.M. Brock, M.T. Hanson // *Int. J. Solids and Struct.* – 2002. – № 21-22. – V.39. – P. 5393-5408.

132. Budaev B.V. Random walk methods and wave diffraction / B. V. Budaev, D. B. Bogy // *Int. J. Solids and Struct.* – 2002. – № 21-22. – V.39. – P. 5547-5570.

133. Chen Xiao, Wan Mingxi. Квазирэлеевские волны в твердых слоистых средах со слабой связью на границе раздела. / Chen Xiao // *Shengxue xuebao.* – 2001. – №6. – V.26. – P. 507-510.

134. Galan Jose M., Abascal Ramon. Numerical simulation of Lamb wave scattering in semifinite plates / Galan Jose M. // *Int. J. Numer. Eng.* – 2002. – V.53. – P.1145-1173.

135. Gai Bing-zheng. Effects of interlayer on SH wave propagations / Gai Bing-zheng // *J. Harbin Inst. Techn.* – 2002. – №3. – V.9. – P. 229-233.

136. Gai Bing-Zheng. BEM analysis of interaction of elastic waves with unilateral interface crack / Gai Bing-Zheng, Chen Qing-Cai // *ICTAM 2000.* – 2000. – P. 75.

137. Garagash Dmitry. Stationary shock in cohesive-frictional materials / D. Garagash, A. Drescher, E. Detournay // *Mech. Cohesive-Friction. Mater.* – 2000. – №3. – V. 5. – P. 195-214.

138. Guenneau Sebastian. Probleme spectral pour la propagation conique des ondes elastiques dans un reseau de galeriaes / Guenneau Sebastian, Poulton Chris, Movchan Alexander // *C. r. Mec.* – 2002. – №7. – V. 330. – P. 491-497.

139. Guliyev Mugan S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in circular cylinder embedded with compressible elastic medium with initial finite compressing strains / S. Guliyev Mugan // *Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. – Techn. and Math. Sci.* – 2007. – №7. – V. 27. – P. 157-166.
140. Domanski Wlodzimierz. Asymptotic equations for weakly nonlinear elastic waves in a cubic crystal/ Wlodzimierz Domanski // *Hyperbolic Problems: Theory. Numerics. Applications.* – 1999. – P. 233-241.
141. Donato A. Waves features related to a mathematical model of hypoplasticity / A. Donato, A. Palumbo // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 1999. – №1. – V. 34. – P.179-184.
142. Hasheminejad Seyyed M., Maleki M. Diffraction of elastic waves by a spherical inclusion with an anisotropic graded interfacial layer and dynamic stress concentrations / M. Hasheminejad Seyyed, M. Maleki // *J. Nondestruct. Eval.* – 2006. – № 2. – V. 25. – P. 67-81.
143. Jeremiah Jeremiah. Self-switching of displacement waves in elastic nonlinearly deformed materials / Jeremiah Jeremiah // *C. r. Mec.* – 2002. – №3. – P. 175-180.
144. Keller J.B. Rays, wave and asymptotics. *Bus. AM. Math. Soc.* 84. – 1978. – P.727.
145. Lee G.-S. Transient elastic waves propagating in a multy-layered medium subjected to in-plane dynamic loadings. I. Theory / Lee G.-S., Ma C.-C. // *Proc. Roy. Soc. – London.* – 2000. – №1998. – V.456. – P. 1355-1374.
146. Leutenegger Tobias. Numerical modeling of the influence of cracks on wave propagation in cylindrical structures / Leutenegger Tobias, Dual Jurg // *ICTAM 2000.* – 2000. – P. 163.
147. Mace Brian R. Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis / R. Mace Brian, Manconi Elisabetta // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – № 4-5. – V. 318. – P. 884-902.

148. Mal Ajit. Elastic waves from localized sources in composite laminates. / Mal Ajit // *Int. J. Solids and Structures*. – 2002. – №21-22. – V. 39. – P.5481-5494.
149. Mamedgasanov Elkhan G. Transient SH waves in elastic layer lying, on elastic half-space / G. Mamedgasanov Elkhan // *Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phis.-Techn. and Math.Sci.* – 2007. – №7. – V.27. – P. 167-176.
150. Marzani Alessandro. A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides / Marzani Alessandro, Viola Erasmo, Bartoli Ivan, Lanza di Scalea Francesco, Rizzo Piervincenzo // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – № 3. – V. 318. – P. 488-505.
151. Ortiz P. An improved partition of unity finite element model for diffraction problems / P. Ortiz, E. Sanohez // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2001. – № 12. – V. 50. – P. 2727-2740.
152. Rohde A.H. A computer simulation study of imaging flexural inhomogeneities using plate-wave diffraction tomography / A.H. Rohde, M. Veidt, L.R.F. Rose, J. Homer // *Ultrasonics*. – 2008. – № 1. – V.48. – P. 6-15.
153. Sharma J.N. On the propagation of elasto-thermodiffusive surface waves in heat-conducting materials / J.N. Sharma, Y.D. Sharma, P.K. Sharma // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – № 4-5. – V. 315. – P. 927-938.
154. Sharma J.N. Flexural and transversal wave motion in homogeneous isotropic thermoelastic plates by using asymptotic method / J.N. Sharma, P.K. Sharma, S.K. Rana // *J. Sound and Vibr.* – 2010. – № 7. – V. 329. – P. 804-818.
155. Song Tian-shu. Рассеяние SH-волны и концентрация динамических напряжений в пьезоэлектрической среде с круговым отверстием / Song Tian-shu, Liu Dian-kui, Yu Xin-hua // *Harbin gongcheng daxue xuebao*. – Пер. с китайского. – 2002. – №1. – V.23. – P. 120-123.
156. Sue Xian-Yue, Nian Jia-Yong, Yih-Hsing. Application of the reverberation-ray matrix to the propagation of the elastic waves in a layered solid. / Sue Xian-Yue // *Int. J. Solids and Structures*. – 2002. – №21-22. – V. 39. – P. 5447-5463.

157. Ting T.C.T. An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy. / Ting T.C.T. // *Quart. J. Mech. And Appl. Math.* – 2002. – №2. – V. 55. – P.297-311.

158. Wang Jian-Hua. Complex variable function method for the scattering of plane waves by an arbitrary hole in a porous medium / Wang Jian-Hua, Lu Jian-Fei, Zhou Xiang-Lian // *Eur. J. Mech.* – 2009. – №3. – V. 28. – P. 582-590.

159. Yang Ke. On a single solution to the problem of propagation of longitudinal waves in an elastic rod / Yang Ke // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – №1-2. – V.314.– P.307-329.

160. Zalipaev V.V. Elastic waves and homogenization in oblique periodic structures / V.V. Zalipaev, A.B. Movchan, C.G. Poulton, R.C. McPhedran // *Proc. Roy. Soc. London.* – 2002. – №2024. – V.458. – P. 1887-1912.

161. Zhang Guang-Ying. Численное моделирование упругих волн, распространяющихся в анизотропной неоднородной среде псевдоспектральным методом / Zhang Guang-ying, Zeng Xin-wu // *Guofang keji daxue xuebao.* – 2002. – №3. – V.24. – P.18-22.

162. Zhong Wanxie. Precise solutions for surface wave propagation in stratified material / Zhong Wanxie, Howson W. P., Williams . W. // *Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust.* – 2001. – № 2. – V.123. – P. 198-204.