

Липецкий государственный технический университет

На правах рукописи

РЯЗАНЦЕВА ЕЛЕНА АНАТОЛЬЕВНА

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ ФИЗИЧЕСКОГО И
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Пеньков Виктор Борисович

Липецк – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1.1. Основные положения и особенности метода граничных состояний	12
1.2. Метод граничных состояний в плоских задачах теории упругости	17
1.3. Обзор задач теории упругости, содержащих особенности различного характера	20
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1	33
ГЛАВА 2. СИНГУЛЯРНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА	35
2.1. Классификация особенностей физического характера	35
2.2. Учет специального решения в задаче о сжатии тела прямоугольными отрезками встречных равномерно-распределенных усилий	39
2.3. Учет специального решения в задаче о сжатии кругового диска сосредоточенными силами	46
2.3.1. Сжатие кругового диска осевыми сосредоточенными силами	46
2.3.2. Деформирование диска внецентренными сосредоточенными воздействиями	52
2.4. Учет специального решения в задаче о растяжении диска воздействиями, распределенными по полуокружности	55
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2	60
ГЛАВА 3. СИНГУЛЯРНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА.....	62
3.1. Классификация особенностей геометрического типа	62
3.2. Учет специального решения в задаче о нагружении каплевидной области, имеющую клиновидную особенность.....	66

3.4. Учет специального решения в задаче о равномерном воздействии на многосвязную область, имеющую клиновидную особенности	74
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3	80
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	82
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	84
Приложение	102

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена развитию метода граничных состояний, заключающегося в разработке приема включения специального решения в задачах теории упругости, содержащих физические и геометрические особенности.

Актуальность темы исследования: увеличение прочности машин, сооружений является одной из важнейших проблем в области машиностроения и авиастроения. В фундаментальных исследованиях, позволяющих решить поставленные задачи прикладного характера, используются краевые задачи различного типа. Использование, для решения краевых задач математической физики в областях с кусочно-гладкими границами, численных методов связано с трудоемкостью аппроксимаций в окрестностях точек геометрической или физической сингулярности, следовательно, для достижения необходимой точности требуются большие вычислительные затраты. Кроме того, во многих случаях высокая градиентность решения около особых точек приводит к потере численной устойчивости решения или к большим отклонениям приближенных решений даже по мере удаления от сингулярных точек.

Пренебрежение же составляющими, определяющие сингулярные решения нередко приводит как к потере численной устойчивости и точности, так и к результатам, которые принципиально неверны. Для получения решения отражающего реальную картину, необходимо учитывать сингулярные составляющие, что улучшит эффективность того или иного метода.

В диссертационной работе методом граничных состояний исследованы двумерные граничные задачи статистической теории упругости в случае однородных изотропных тел с физическими и геометрическими особенностями.

Был предложен прием, основанный на включении в базис внутренних состояний специального решения, «схватывающего» особенность. В результате значительно сокращаются вычислительные затраты и повышается точность полученного решения, представленного в аналитической форме.

Целью диссертационной работы является развитие метода граничных состояний на задачи теории упругости, содержащих геометрические и физические особенности.

Задачи исследования следуют из поставленной цели:

- проведение классификации особых точек;
- выделение асимптотик специальных решений для конкретных особенностей;
- проверка возможности включения специального решения в базис внутреннего состояния;
- постановка краевых задач математической физики, содержащих физические и геометрические особенности в терминах метода граничных состояний;
- формирование счетных базисов пространств состояний для плоской задачи теории упругости с включением «специальных» решений;
- разработка вычислительных алгоритмов;
- решение цикла задач, содержащих особенности физического характера;
- решение цикла задач, содержащих особенности геометрического характера.

Методы исследований:

- методы функционального анализа;
- методы решения бесконечных систем линейных уравнений;
- методы компьютерной алгебры.

Научные результаты. На защиту выносятся следующие научные результаты:

- 1) методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения для тел, содержащих физические особенности (сосредоточенная силы, скачки усилий);
- 2) методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения для тел, содержащих, геометрические особенности (клин);
- 3) методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения для многополостных тел, содержащих, геометрические особенности (клин);
- 4) результаты решений задач теории упругости однородного, изотропного тела, содержащего физические или геометрические особенности, а также задачи, в которых присутствуют и физические, и геометрические сингулярности и многополостность.

Научная новизна:

1. Предложена новая методика генерирования базиса внутренних состояний для тел, содержащих физические и геометрические особенности, основанная на включение специальных решений, «схватывающих» особенности различного характера.
2. Метод граничных состояний распространен на класс задач теории упругости, имеющий сингулярности.
3. Выполнены тестовые и оригинальные расчеты для ряда задач, содержащих физические и геометрические особенности.
4. Решены задачи для тел разнообразных очертаний с различными особенностями:

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена:

- 1) строгостью математического обоснования метода граничных состояний;
- 2) обработкой и интерпретацией результатов в отношении точности;
- 3) самодостаточностью метода граничных состояний (определяющие соотношения удовлетворяются тождественно вплоть до границы, о качестве

решения можно судить по невязке результирующего граничного состояния с граничными условиями задачи и по насыщению суммы Бесселя, а также по сопоставлению восстановленных граничных условий с заданными).

Теоретическая ценность:

1. Метод граничных состояний усовершенствован на класс плоских задач теории упругости, содержащих физические и геометрические особенности.

2. Разработана методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения, схватывающего особенность физического характера.

3. Разработана методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения, схватывающего особенность геометрического характера.

4. Выполнена постановка задач математической физики в терминах метода граничных состояний для тел, содержащих физические и геометрические особенности.

Практическая ценность заключается в возможности использования новой модификации метода граничных состояний для решения задач изотропной теории упругости с физическими и геометрическими особенностями.

Разработан алгоритм наполнения базиса с учетом специального решения, «схватывающего» особенность физического и геометрического характера.

Разработанные программные алгоритмы вполне приемлемы для решения инженерных задач.

Решен ряд задач теории упругости для плоских, изотропных тел, содержащих физические и геометрические особенности:

- задача о сжатии кругового диска сосредоточенными силами;
- задача о сжатии прямоугольными отрезками встречных равномерно-распределенных усилий;

- задача о деформировании диска внецентренными сосредоточенными воздействиями;
- задача о растяжении диска воздействиями, распределенными по окружности;
- задача о нагружении каплевидной области, имеющей клиновидную особенность;
- задача о сосредоточенном воздействии на область, имеющей клиновидную особенность;
- задача о равномерном воздействии на многосвязную область, имеющую клиновидную особенность.

Вклад автора в разработку проблемы

1. Проведена классификация физических и геометрических особенностей.
2. Разработан прием включения специального решения, «схватывающего» особенность физического и геометрического характера, в формирование базиса пространств состояний.
3. Получено подтверждение актуальности использования методики формирования базиса пространств состояний с учетом специальных решений.
4. Разработаны вычислительные алгоритмы, использующие компьютерную алгебру.
5. Сформулированы плоские задачи теории упругости, содержащие физические и геометрические особенности в терминах метода граничных состояний.
6. Проведены методом граничных состояний расчеты краевых задач, содержащих особенности физического характера.
7. Осуществлены расчеты задач теории упругости, содержащих геометрические сингулярности методом граничных состояний.
8. Исследовано напряженно-деформированное состояние плоского двусвязного тела, имеющего геометрическую особенность.

Апробация работы. Основные результаты и материалы диссертации в целом докладывались на:

- 1) регулярных семинарах научной школы «Математические методы и модели механики» под руководством В. Б. Пенькова (Липецк, ЛГТУ);
- 2) межрегиональных конференции памяти А.Н. Кабелькова, г. Новочеркасск (20-23 сентября 2011 г.);
- 3) международных научных конференциях, г. Тула (сентябрь 2012г, 2013г, 2014г.);
- 4) международной конференции г. Воронеж (26-28 ноября 2012 г.);
- 5) XI международной заочной научно-практической конференции, г. Тамбов (31 октября 2013 г., 31 марта 2014 г., 31 октября 2014 г.)
- 6) Научно-методологическом семинаре кафедры «Математика и информатика» на базе Финансового университета при правительстве РФ, Липецкий филиал (февраль 2014 г, 2015 г.).

Публикации. Основное содержание и результаты диссертационной работы изложены в опубликованных работах [54, 55, 56, 58, 58, 59, 1, 1, 2, 61, 61, 4, 4, 6], в том числе статьи [55] в журнале «Вести высших учебных заведений Черноземья» и [56] в журнале «Наука и бизнес: пути развития, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертации. Работы [54, 55, 58, 58, 59, 1, 1, 2] выполнены в соавторстве с научным руководителем.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка и приложения. По каждой главе приведены основные выводы. Общий объём работы составляет 101 страница, в том числе 83 страницы основного текста. Список использованных источников содержит 159 наименования. Приложения составляют 1 страницу.

Содержание работы:

Первая глава. В первом параграфе приводится краткий обзор по основным энергетическим (вариационным) методам. Указаны основные

положения, а также преимущества и недостатки каждого из метода.

Приведен обзор работ, характеризующих различные методы решения задач математической физики.

Во втором параграфе излагаются основные положения метода граничных состояний, его отличительные особенности, а также приводится краткий обзор по развитию данного метода на класс различных задач.

В третьем параграфе представлен выборочный обзор научных работ по исследованию проблем особых точек и связанных с этим трудностей в решении задач теории упругости. Детально изучены как плоские, так и пространственные случаи выявления особенностей. Обзор позволил сделать вывод: для эффективного построения базисов состояний в методе граничных состояний можно использовать главные асимптотики особых точек.

Вторая глава. В первом параграфе дается выборочная классификация особенностей физического характера, отмечены основные положения решения задач, содержащих эти особенности.

Во втором параграфе приводится решение задачи, содержащей физическую особенность – скачок поверхностного усилия. С целью сравнения результатов, задача решалась двумя методами: без учета специального решения и с учетом специального решения, проходящего на этапе генерирования базиса внутренних состояний, также была рассчитана невязка между полученным граничным усилием и заданным в условии задачи, которая явилась косвенной характеристикой качества полученного решения, построены восстановленные граничные условия и произведен сравнительный анализ с заданными граничными условиями. Было установлено, что полученное решение с использованием специального решения дает практически точное решение.

В третьем параграфе рассматривается задача о сжатии кругового диска сосредоточенными силами (диаметральными и внецентренными). Применена методика формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения. Полученные результаты свидетельствуют о

корректности данной методики.

В четвертом параграфе изучается задача о растяжении диска воздействиями, распределенными по полуокружности.

Все полученные решения были протестированы на удовлетворение определяющим соотношениям теории упругости вплоть до границы, а также была вычислена невязка, показавшая качество полученных решений, которое практически совпадает с заданными граничными условиями.

Третья глава. В первом параграфе приводится классификация особенностей геометрического характера: клин, конус и угловая точка. Выделены главные асимптотики данных решений.

Во втором параграфе проводится решение задачи о нагружении каплевидной области, имеющую клиновидную особенность на основе включения специального решения в базис состояний. Полученные решения свидетельствуют о корректности решения. Проведен детальный анализ полученного решения, основанного на решении трансцендентного уравнения. Произведено вычисление суммы Бесселя, показавшая насыщение элементов базиса, что косвенно говорит о качестве полученного решения.

В третьем параграфе была решена задача, содержащая геометрическую сингулярность (клин) и физическую особенность (сосредоточенную силу) с применением методики формирования базиса со специальными решениями.

В четвертом параграфе решена задача о поверхностной нагрузке, заданной по параболе, на многосвязную область, имеющую клиновидную особенность. Приведен прием по формированию базиса пространства состояний с использованием включения главной асимптотики особенности геометрического характера типа «клин». Полученные решения представлены в графическом виде.

Заключение. В заключении приведены основные результаты, сформулированы и обоснованы выводы, основанные на проведенных исследованиях.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

1.1. Основные положения и особенности метода граничных состояний

Метод граничных состояний [50] является вариационным методом, основные положения которого были представлены Пеньковым В.В. в конце XX века. В основании которого лежит теория гильбертовых пространств, но имеет отличительные особенности в сравнение с иными вариационными методами: Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов, Канторовича, Треффца и их различные модификации.

Метод Ритца [32, 33] является прямым методом решения вариационных задач теории упругости. Он основан на аппроксимации квадратичного функционала рядами или разностными отношениями и приводит задачу к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, решение которой в общем виде возможно только при определенном характере коэффициентов системы. Чаще всего, на практике ограничиваются усечением до конечного числа членов ряда, что приводит к конечной системе алгебраических уравнений, и в результате строится приближенное решение задачи. Точность решения зависит от числа удерживаемых членов ряда, а также от удачного выбора аппроксимирующих функций. Оценка точности получаемого решения является самостоятельной, и достаточно сложной задачей.

В отличие от метода Ритца, метод Канторовича-Власова [27] приводит задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. сводит пространственную или плоскую задачу теории упругости к одномерной. Метод Канторовича-Власова обычно применяется к призматическим телам, ограниченными плоскостями $x_1 = const$ и $x_2 = const$ перпендикулярными оси x

Метод Бубнова-Галеркина [30] основан на понятии ортогональности функции.

Рассматривается операторное уравнение вида:

$$L(y) = f(x),$$

где L – дифференциальный оператор, описывающий обыкновенное линейное уравнение; $f(x)$ – заданная в области суммируемая с квадратом функция.

Приближенное решение y_n функции y ищется в виде:

$$y_n = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_0(x)$ – функция, удовлетворяющая заданным однородным граничным условиям; a_k – коэффициенты, которые необходимо определить; $\varphi_k(x)$ – базисные координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям. После получения приближенного решения, определяется функция невязки $F(x, a_k)$, ортогональная к n базисным функциям φ_k .

Михлиным С.Г. [39] было исследовано «пространство тензоров упругих напряжений». Основываясь на определении энергии внутренней деформации, было указано скалярное произведение. «Пространство тензоров упругих напряжений» удачно применялось для доказательства разрешимости энергетических методов.

Опираясь на понятие общего решения для среды относительно обобщённых кинематических напряжений возник метод Филоненко-Бородича [40], который основан на разбиении решения на основной и корректирующий тензоры, причём первый отвечает обобщённые кинематические напряжения, а корректирующий тензор определяет физические свойства материала при однородных граничных условиях. Данный метод удобен в решении задач для нелинейных сред. Недостатком метода является тот факт, что решение замыкается на численных процедурах.

Михлин С. Г [40] показал эквивалентность метода Филоненко-Бородича методу Ритца.

Метод Купрадзе (невариационный) [30] опирается на матрицы Грина, основанных на интегральных представлениях перемещений, сводит краевую

задачу к системе граничных интегральных уравнений (СГИУ) относительно перемещений или поверхностных усилий. Строится базис функций, основанный на фундаментальных решениях для среды, который успешно применяется для решения СГИУ. Основываясь на метод Купрадзе, разработаны методы решения задач с различными смешанными граничными условиями.

Метод Треффца используется в случаях, когда рассматриваемая область имеет сложно-очерченный контур, когда уравнение Эйлера–Остроградского является сравнительно простым [54]. Особенностью этого обратного вариационного метода является построение некоторого положительного функционала, минимум которого ищется в классе функций u_k , удовлетворяющих дифференциальному уравнению и приближающих граничных условий. Сложность обеспечения устойчивости решения является недостатком данного метода.

Метод наименьших квадратов [54, 33, 67] состоит в аппроксимации обобщенного решения u_n уравнения $Au = f$ в виде:

$$u_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i a_i,$$

где φ_i – функции, удовлетворяющие граничным условиям; постоянные a_i определяются из условия минимизации невязки соотношения:

$$\|Au_i - f\|^2 \rightarrow \min,$$

что приводит к разрешающей системе линейных алгебраических уравнений.

Метод граничных состояний (МГС) является прямым численным методом, основанный на разложении в ряд Фурье компонент внутренних и граничных состояний по задаваемому базису пространства. Суть метода состоит в том, чтобы свести изучение задач механики деформированного твердого тела к простой и известной математической схеме.

Изначально метод граничных состояний был реализован в виде эффективного средства решения линейных статических задач теории

упругости; применен для первой, второй, основной смешанной задач [50] и основной контактной задачи линейной теории упругости [52]. В последующем метод граничных состояний получил своё развитие в применении к другим задачам уравнений математической физики: «гармоническим» средам – в работах Харитоненко А. А. (электростатическое поле [74, 75], идеальная жидкость [76]); статическая термоупругость – в работах Саталкиной Л. В и Викторова Д. В. [47]; линейной упругости неоднородного тела – в исследованиях Саталкиной Л. В. [65, 48, 66]; анизотропии – в трудах. Иваннычева Д. А. [23, 24, 25, 26]; об установившиеся колебания изотропных тел – в работах Стебенева И.Н. [68, 69, 70, 71]. А также Шульминым А.С. были решены задачи: одноосное растяжение неограниченной среды с жестким шаровым включением в условиях сцепления, сжатие неограниченной среды с гладким шаровым включением в условиях контакта, основные смешанные задачи для сферической полости в упругом пространстве, было исследовано взаимовлияние сферических полостей и включений [73].

Метод граничных состояний в применимости к анизотропным телам был реализован Иваннычевым Д.А.. Решены основные плоские задачи теории упругости для односвязного [23] и многосвязного [24] тела. Решена обобщенная задача Сен-Венана для полого анизотропного стержня [25], а также была решена задача об осесимметричном равновесии трансверсально-изотропного тела [26]

Метод граничных состояний был применен к задаче о параллелепипеде, защемленным по одной грани (смешанная задача) [50]. Было проведено исследование прогиба срединной плоскости $z = 0$ в задачах об изгибе плиты [51]. В рамках метода граничных состояний исследовалась первая основная задача для прямой призмы с L -образным основанием рассматривалась первая основная задача на неоднородное по сечению одноосное растяжение [52].

Метод граничных состояний реализован в задачах электростатики [75].

Рассматривалась задача Дирихле, заключающаяся в восстановлении электростатического поля по заданному уровню потенциала на границе куба. Решен ряд задач для разнообразных граничных условий, такими как гладкие или непрерывные значения потенциала. Исследована электростатическая задача со смешанными граничными условиями.

Метод граничных состояний апробирован для случая учёта массовых сил [49]. В рамках данного исследования, были рассмотрены первая, вторая и основная контактная задачи для равномерно вращающегося изотропного линейно упругого шара:

- 1) на поверхности шара отсутствуют усилия;
- 2) поверхность шара свободна от перемещений;
- 3) на поверхности сохраняются условия гладкого контакта с внешней жёсткой сферой.

Метод граничных состояний расширен на класс задач «несвязанной» термоупругости при наличии объёмных сил и распределённых источников тепла [66]. В рамках данного исследования были решены первая и вторая основная задача для упругого шарового сектора, нагруженного объёмными силами и подверженному температурному воздействию вдоль границы (условие Дирихле).

Метод граничных состояний использовался при решении задач о колебаниях изотропных упругих тел [68, 69, 70, 71]. Было установлено, что в применении к динамическим задачам, термин «граничное состояние» не вполне точен: более удачным следует признать понятие «состояние», поскольку в состояние $\tilde{\gamma}$ входят как компоненты вектора поверхностных (внешних) усилий и компоненты вектора перемещений на поверхности тела, так и инерционные составляющие – компоненты вектора ускорений, распределённого по всему телу.

1.2. Метод граничных состояний в плоских задачах теории упругости

Рассматривается область V , занятая линейной сплошной средой, удовлетворяющая определяющим соотношениям (примем тензорно-индексную запись) [50]:

– закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \vartheta = \varepsilon_{kk}; \quad (1.1)$$

– уравнения равновесия при отсутствии массовых сил:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1.2)$$

– соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.3)$$

где σ_{ij} – напряжения, u_i – перемещения, ε_{ij} – деформации, λ, μ – параметры Ламе (функции координат), ϑ – объемная деформация. Все данные соотношения являются линейными.

Обозначим через ξ набор характеристик напряженно-деформированного состояния, определяющий произвольное состояние среды и удовлетворяющий соотношениям (1.1)-(1.3):

$$\xi^i = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}. \quad (1.4)$$

Пространство Ξ представляет собой совокупность всевозможных состояний среды ξ , которое является линейным в силу линейности определяющих соотношений.

Воспользуемся теоремой взаимности Бетти [18] для двух произвольных состояний ξ^1, ξ^2 пространства Ξ , которая используется как обеспечивающее коммутативность понятие для определения скалярного произведения. Условие линейности скалярного произведения по первому элементу, эрмитова симметричность и положительная определенность очевидны:

$$(\xi^1, \xi^2)_{\Xi} \equiv \int_V \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 dv = \int_V \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 dv = (\xi^2, \xi^1)_{\Xi} \quad (1.5)$$

Таким образом, пространство Ξ является евклидовым, в котором естественным образом определяется метрика элемента, которая позволит строить всевозможные фундаментальные последовательности состояний среды. Нужно отметить, что если пределы построенных фундаментальных последовательностей не удовлетворяют повсеместно в области V требованиям, которым подчинены элементы пространства Ξ , то они будут являться «точками прикосновения» данного пространства. Таким образом, пространство Ξ и его замыкание образует полное пространство. Подводя итог вышеизложенному, пространство внутренних состояний Ξ является гильбертовым.

Контур области V дает возможность в каждой точке границы указать внешнюю нормаль $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ и определить в ней внешнее усилие:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (1.6)$$

Граничное состояние – это совокупность функций точек границы $\gamma^i = \{u_i, p_i\}$. Множество всевозможных граничных состояний формирует пространство граничных состояний Γ , которое является линейным.

Разрешающие уравнения для среды и граничные условия необходимы при постановке краевых задач математической физики, причем наличие граничных условий позволяет выделить единственное решение из всевозможных.

Сформулируем теорему Бетти в терминах граничных состояний, используя принцип возможных перемещений:

$$\int_{\partial V} p_i^1 u_i^2 ds = \int_{\partial V} p_i^2 u_i^1 ds \quad (1.7)$$

Интегралы в формулах (1.5) и (1.7) равны между собой, что является основой для определения скалярного произведения элементов γ^1, γ^2 . В силу принципа возможных перемещений [18] справедливо равенство:

$$(\gamma^1, \gamma^2)_{\Gamma} = (\xi^1, \xi^2)_{\Xi}. \quad (1.8)$$

Как было установлено, элементы пространства граничных состояний представляют собой образы внутренних состояний, согласованных в механическом смысле. Тогда поле внутренних перемещений однозначно реконструируется по тождествам Сомильяны [18]: $\gamma \rightarrow \xi$. Причем между элементами внутренних состояний и граничных устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, пространства Ξ и Γ являются изоморфными, что позволяет изучение внутреннего состояния деформируемого тела свести к изучению соответствующего граничного состояния. При этом базисному набору элементов пространства Ξ будет однозначно соответствовать базисный набор элементов пространства Γ .

Представим внутреннее и граничное состояние в виде разложения в ряд Фурье по элементам ортонормированных, изоморфных базисов пространств Ξ и Γ соответственно:

$$\xi = \sum_k c_k \xi^{(k)}, \quad (1.9)$$

$$\gamma = \sum_k c_k \gamma^{(k)}, \quad (1.10)$$

где $c_k = (\gamma, \gamma^{(k)})$ – коэффициенты Фурье.

Таким образом, компоненты внутреннего и граничного состояний имеют вид:

– поле перемещений и усилий на границе тела:

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}; \quad (1.11)$$

– поле перемещений, напряжений и деформаций внутри тела:

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}. \quad (1.12)$$

В формулах (1.9) – (1.12) коэффициенты c_k являются общими.

В основу метода граничных состояний ложится возможность назначения счётных базисов пространств состояний, представимых набором характеристик среды, удовлетворяющих определяющим соотношениям. При генерировании счетного базиса используются либо общие решения для

классов задач, при помощи которых можно построить какое-нибудь внутреннее состояние тела, либо фундаментальное решение для среды.

Ортонормированный базис пространства внутренних состояний строится однократно и может использоваться для решения различных краевых задач, что является отличительной особенностью данного метода перед другими. Приближённое решение, построенное методом граничных состояний, удовлетворяет всем определяющим соотношениям среды вплоть до границы; поэтому заключение о корректности полученного решения можно сделать из сопоставления полученного граничного состояния с граничными условиями задачи.

1.3. Обзор задач теории упругости, содержащих особенности различного характера

Эллиптические уравнения обладают характерным свойством, таким как гладкость решения: граница области и граничные условия должны быть гладкими. Если нарушается хотя бы одно из них, то возникают особенности. Точки нарушения указанных условий называют особыми или сингулярными.

Сингулярность решения в математической физики проявляется в появлениях бесконечных напряжений в точках границы, где наблюдается смена типа краевых условий, контакт разнообразных материалов или происходит нарушение гладкости поверхности. Появление особых точек возможно не только на границе, но и внутри области, где не выполняется условие гладкости поверхности контакта различных материалов.

В задачах математической физики особые точки различного характера возникают достаточно часто. Окрестность сингулярных точек представляет собой зону концентрации напряжений, что и определяет практическую значимость данных решений. Присутствие сингулярностей существенно

усложняет конструирование решения, которое бы в полном объеме соответствовало распределению напряжений и деформаций.

Получение точных решений для задач механики деформированного твердого тела с границей на которой наблюдается присутствие особенностей, достаточна мала. Применение аналитических или численных приближенных методов обуславливает серию проблем, обусловленных в проявлении сингулярности во всех решениях, полученных приближенными методами, которые выразятся большими значениями самих напряжений или большими значениями дифференциалов в особых точках. Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод: наличие зоны ярко выраженной концентрации напряжений в точках говорит о возможности появления сингулярности в данной точке, решение в окрестности которых требует дополнительное исследование.

В зависимости от того, какое условие гладкости нарушено, особые точки можно подразделить на физические (сосредоточенные сила и пара сил, скачок усилия, излом усилия и т.д.) и геометрические особенности (клин, внутренний угол границы, точка возврата).

В монографии Мухелишвили Н.И. [42] приведены основные уравнения механики упругого тела. Исследованы вопросы о единственности решения основных граничных статических задач плоского упругого тела, которые приведены к задачам теории функций комплексного переменного. Методы теории функции комплексного переменного и комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили были исследованы в работах Андреева А.В., Гольдштейна Р.В., Шитникова Ю.В. [17], в которых проведено исследование асимптотического поведения упругого поля в окрестности угловой точки, излома трещины на границе, раздела различных материалов, при учете контакта ее поверхности и возможности их взаимного скольжения с сухим трением. Задачи статики механики деформированного твердого тела для различных тел с дефектами детально

изучены в работах Панасюка В.В., Саврюка М.П., Дацыщина А.П. с помощью методов сингулярных интегральных уравнений [43]. Были рассмотрены плоские задачи математической теории трещин для изотропных тел, проведено исследование задач об упругом и предельном равновесии ограниченных и неограниченных пластин, ослабленных системой произвольно ориентированной системой трещин. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюка В.П. Саврюка М.П. [44] посвятили свое исследование изучению распределения напряжений около трещин в двумерных телах, рассмотрели плоские задачи с жесткими линейными включениями и трещинами, кроме того были рассмотрены задачи для продольного сдвига. На основании проведенных исследований была предложена методика вычисления вблизи произвольно-ориентированных включений и трещин в изотропной полуплоскости или плоскости коэффициентов интенсивности напряжений.

В работах Воровича И.И. [8, 9] использовался принцип возможных перемещений и условия конечности энергии для того, чтобы выделить группу решений, обладающих свойством единственности, при этом являлись физически осмысленными.

Мазья В.Г., Кондратьев В.А и Пламеневский Б.А. [29, 34]) внесли огромный вклад в исследовании поведения решений задач теории упругости в окрестности сингулярных точек границы. Авторы установили, что решение вблизи данных точек можно представить в виде разложения в асимптотический ряд гладкой функции. При рассмотрении однородных краевых задач для конуса и для клина, решение определяется асимптотическим рядом, слагаемые которого содержат специальные решения, зависящие только от локальных характеристик, таких как величина телесного и плоского угла и типа краевых условий,

Монографии Партон В.З., Перлина И.И. [45, 46] посвящена изучению особых решений краевых задач. Был установлен математический и

физический смысл сингулярных решений, проведен анализ результатов множества работ, освящавших проблематику особых решений.

Мазья В.Г. и Пламеневский Б.А. [34] рассмотрели задачу об определении неизвестных коэффициентов асимптотики в общей математической постановке, называемые коэффициентами интенсивности напряжений (КИН), обладающие значимостью в механике разрушения.

Нахождению точной структуры упругого поля вершины тела, так называемая задача на собственные числа и собственные векторы, были посвящены работы [129], [130]. Чен [104] исследовал задачу для клина, составленного из двух материалов, используя основы метода комплексных функций. В рамках данного исследования автор вычислил собственные значения и собственные вектора для клина. Работа [17] посвящена развитию метода конечных элементов на класс задач с использованием сингулярных конечных элементов для определения коэффициентов асимптотики в составных клиньях. Кроме этого, определение коэффициентов асимптотики в составных клиньях осуществлялось методом граничных интегральных уравнений [72]; численным методом, основанным на экстраполяции аналитических функций [137]; а также синтезированным методом, включающий в себя как метод интегрирования по контуру так и метод конечных элементов [154].

Работы [152], [153], [108], [109], [110], [146] используя метод сингулярных конечных элементов, обосновали способы нахождения неизвестных коэффициентов напряжений в вершине различных видов трещин. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений осуществлено в работе [46] с использованием метода граничных элементов в межплоскостной трещине.

Работа [55] посвящена расчетам коэффициента интенсивности напряжений для конуса с дисковой трещиной.

В работах [35], [36], [37], [38] рассматривается задача об определении критического значения коэффициента интенсивности в угле поверхности

раздела составного клина, значение которого будет использовано в качестве критерия разрушения.

Для реализации любого подхода исследования для определения неизвестных коэффициентов требуется знание показателя сингулярности напряжений.

Проблеме изучения напряженного состояния в окрестности вершины двумерных клиньев и в вершине трещины на границе раздела составной плоскости посвящен целый ряд работ для различных вариантов клиновидных тел: изотропные и анизотропные, однородные, составные, при различных граничных условиях, клинья из пьезоматериалов и другие [1], [2], [3], [4], [5], [13], [14], [15], [16], [19], [35], [36], [37], [38], [41], [53], [121], [128], [159], [155], [157], [152], [149], [154], [158]. Решения для трещин в изотропном материале получено в работах [141], [55], для межполостной трещины [28], [145], [108], [113], [148], для трещины в вязкоупругой среде [20].

При исследовании данных задач доминировали два аналитических подхода. Первый основан на конструировании решений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и однородным граничным условиям для тел, содержащих сингулярности различного вида. Одной из работ, посвященной данному приему решения является статья Вильямса [154]. При втором подходе используются преобразования Меллина и теория вычетов, как, например, в работах [88], [111].

Каждый из перечисленных подходов приводит рассматриваемую задачу к решению трансцендентного уравнения относительно показателя сингулярности. Характеристическое уравнение имеет счетное множество комплексных корней.

Нужно отметить, что вероятность возникновения напряженного состояния с сингулярностью в точке зависит от количества комплексных корней, для которых $\text{Re } \lambda_k < 1$. Чем больше указанных корней, тем выше вероятность. Данный факт используется для оценки характера сингулярности напряжений. При качественном анализе поля напряжений необходимо знать

характер первых корней этого уравнения: комплексные они или действительные.

Нужно отметить, что решение характеристического уравнения является самостоятельной, трудоемкой задачей, которая на сегодняшний день представляет интерес для многих исследователей, работа которых направлена на создание оптимального алгоритма численной реализации решения данного трансцендентного уравнения.

Подводя итог вышесказанному, сингулярности напряжений разделяют на два вида: бесконечные напряжения и напряжения, которые сами являются ограниченными, но имеют бесконечные производные. Второй вид сингулярности (логарифмическая сингулярность), изучен в работах [64], [155]. Кроме того, данный тип сингулярности изучался аналитически с использованием преобразования Меллина в работе [143] и в работе [93] с помощью использования функции напряжений Эри.

Саргисян [64] провел исследование возможности появления логарифмической особенности напряжений в антиплоских задачах математической физики для клина в зависимости от величины угла раствора и вида граничных условий. Получены условия, при которых в окрестности вершины клина возникают логарифмические особенности напряжений. Работа [131] содержит обобщенные полученные результаты и выводы, заключающиеся в том, что сингулярность напряжений логарифмического типа в угловых точках полигонального включения устраняется лишь для квадратного включения определенной ориентации.

Для объемных задач можно выделить два класса объектов:

- ребро пространственного клина (ребро не обязательно прямолинейное, угол раствора клина может изменяться вдоль ребра);
- вершина многогранного клина или вершина конуса.

Одной из первых работ, посвященной проблеме ребра пространственного клина была [38]. Автор рассмотрел плоскую и

антиплоскую задачу для клиньев, полученных путем соединения плоскостей, которые будут перпендикулярны ребру пространственного клина. Было показано, что в точках ребра, через которые проходят плоскости, наблюдается сингулярность соответствующего вида.

Работа [122] посвящена исследованию осесимметрического соединения, состоящего из двух скрепленных усеченных конусов. Установлена сингулярность напряжений на границе данного соединения. Сингулярность напряжений остается одинаковой при осесимметричной деформации и при плоско-деформируемом состоянии, кроме того асимптотическое распределение оказывается различным.

Авторы работ [131], [123] исследовали внутреннюю особую точку, образованной в осесимметрических скрепленных соединениях основываясь на подходе Вильямса. Данное исследование показало, что в двумерном случае показатели сингулярности напряжений зависят от угла соединения и параметров Дандерса, в трехмерном случае поле сингулярных напряжений определяются коэффициентами Пуассона и отношением коэффициентов сдвига.

Проводилось исследование кусочно-однородной среды с поверхностью раздела сред в виде кругового конуса с помощью метода представления перемещений через формулы Папковича-Нейбера с целью исследования особенностей, возникших в данном случае [133, 134, 135, 136].

Изучение сингулярности напряжений в пространственных задачах для конических выточек или включений (или вершине конуса) аналитически изучены в работах [29], [84], [85], [86], [133], [134], [135], [136], [145], [115], [116], [117], [137], [138], [139], [129], [45].

Визант и Кир [62] рассматривали конус с углом раствора больше $\frac{\pi}{2}$, определили, что коническая выточка порождает более слабую сингулярность в его вершине в сравнении с твердым коническим включением. Данное

утверждение справедливо для включения находящегося в транслопном материале.

Работа [115] посвящена исследованию особенности в вершине однородного кругового конуса при однородных граничных условиях в напряжениях и перемещениях на боковой поверхности в трехмерной постановке. Было построено аналитическое решение, на основе которого была исследована сингулярность напряжений.

Было проведено исследование асимптотики дальнего поля в задаче, где внешние силы сосредоточены в окрестности вершины конуса

Денисюк И.Т. [19] рассматривает упругое равновесие среды с коническими включениями, что предполагает анализ локального напряженного состояния вблизи особых точек.

Попов Г.Я. изучает задачу о кручении упругого, однородного и составного конуса при наличии центра вращения у острия конуса [53].

Работы [153], [150] посвящены задаче о трещине между плоскостями клина, выполненного из различных анизотропных композиционных материалов, со свободными гранями и с внутренней особой точкой [90].

Рассматривается полуаналитический подход, описанный в работе [87], который был использован для определения показателей сингулярности напряжений в угловой точке свободной поверхности с фронтом трещины в трехмерном случае. Результаты свидетельствуют о том, что сингулярность зависит от коэффициента Пуассона ν .

Для решения трехмерных задач о сингулярности напряжений кроме аналитических и полуаналитических методов также используются различные варианты численных методов. Классификацию работ, посвященных решению задач о нахождении сингулярности напряжений можно осуществить по двум признакам: вариант численного метода и геометрии рассматриваемой области. По второму классификационному признаку выделяют:

многогранный клин [35], [15], конус [115], [86], трещина [96], угол Фикера [80].

Угол Фикера – угол между тремя непараллельными плоскостями [95], или трехмерная область, которая описывается как куб, из которого удален куб меньшего размера [80].

Авторы работ [84], [87] изучили разнообразную геометрию поверхностного угла в однородных материалах, провели исследование показателей сингулярности напряжений. Работы [145], [82], [98], [99], [138], [110], [101] посвящены исследованию угловых точек фронта трещин, образованных при соединении двух различных материалов.

Нужно отметить, что дискретные методы легли в основу процедуры исследования сингулярности напряжений в трехмерных телах: метод конечных элементов [19], метод граничных элементов [11].

Базант [84] впервые, используя метод конечных элементов, осуществил основную численную процедуру для определения трехмерной сингулярности напряжений. Затем совместно с Естенсорро [85] был развит данный метод, позволивший определять порядок сингулярности напряжений в вершине прямолинейной трещины выходящей на поверхность.

Сомаратиа и Тинг [145] посвятили свое исследование применению метода конечных элементов, разработанный в [85] для определения угловых трещин в анизотропных материалах, были получены показатели сингулярности напряжений в слоистых композиционных материалах. Накамура и Паркс [128], также используя метод конечных элементов, определили, что сингулярность напряжений, возникшей в окрестности пересечения фронта трещины и свободной поверхности, зависит от коэффициента Пуассона в задаче определения трехмерного напряженного состояния в окрестности фронта сквозной трещины изотропной пластины. Кроме того, для исследования композитных трехмерных клиньев был использован метод конечных элементов. [114], [112], [156]. Авторами работ [81], [82] был предложен итерационный метод конечных элементов.

Работа [112] посвящена изучению многогранных клиньев с использованием метода конечных элементов. Данное исследование показало, что в вершине трехмерных соединений порядок сингулярности напряжений выше, чем в вершине двумерного соединения. Аналогичные результаты были достигнуты Лабосьером [118]. Зная значение показателя сингулярности, можно провести оценку коэффициента интенсивности напряжений в вершине соединения. В методе конечных элементов и методе граничных элементов сингулярность напряжения рассматривается в виде интерполяционной функции. Кроме этого, возможность получения коэффициента интенсивности напряжений для различных материалов можно осуществить, если показатель сингулярности напряжений определить на плоскости параметров Дандерса [141]. Установлена зависимость показателей сингулярности напряжений в пространственных клиньях от параметров упругости материалов.

Работа [96] посвящена разработке комбинированного численного метода решения пространственных задач механики разрушения, где метод граничных элементов используется для анализа полей напряжений в окрестности концевой зоны трещины, а метод конечных элементов – для определения напряжений и деформаций в оставшейся части исследуемого тела.

Авторами работы [15, 14, 16] была проведена классификация численных методов, основанная на дискретизации исходной задачи, на основании которой численные методы подразделяют на три группы: прямая аппроксимация исходной задачи (дискретизация по трем переменным); метод граничных элементов [113] или выделение в искомом решении r^λ в явном виде (дискретизация по двум переменным) [35]; применение преобразование Меллина к исходным плоским граничным интегральным уравнениям (сведение исходной задачи к одномерным интегральным уравнениям)[12].

Прямая аппроксимация, используя специальные сингулярные элементы и специальные базисные функции, сводит исходную задачу к системе

линейных алгебраических уравнений высокой размерности, решение которой требует значительных вычислительных затрат. [31], [184], [132], [89], [81], [87], [144], [103].

Выделение в искомом решения r^λ в явном виде является одним из самых распространенных численных методов по вычислению существенных характеристик сингулярности напряжений [147], [37], [80], [139], [121], [85], [94], [120], [78], [158]. Полученные уравнения численно реализуются с помощью принципа минимума потенциальной энергии [120], [119], [105], [98], вариационного принципа Лагранжа [139], [146], а также метода Галеркина [37], [95], [72]. Кроме того, для численной реализации возможно использование методов: конечных элементов, граничных элементов и конечных разностей.

Для определения особенности контактных напряжений в вершине клиновидного штампа, а также на случай клиновидных трещин и трещин, выходящих на двумерный график, и произвольных многогранных углов применяются преобразование Меллина к исходным плоским граничным интегральным уравнениям [3], [143], [101].

Работы [116], [117] посвящены спектральным свойствам задачи на собственные значения для системы уравнений Ламе.

Метод конечных элементов сводит поставленную задачу к отысканию комплексных собственных значений λ и собственных векторов алгебраической несимметричной матрицы, имеющей ленточную структуру.

Для определения собственных значений одним из подходов является метод Арнольди [141], [94], который в работе [80] исследуется в неявном виде. Другой подход основывается на методе Мюллера [37], [126]. Для расчета собственных векторов широко используется метод обратных итераций [120].

Точками бифуркаций называются точки, в которых два действительных собственных значения становятся парой комплексных сопряженных собственных значений, а точки пересечения – это точки в которых

пересекаются две или более кривых собственных значений. Кроме вычислений самих собственных значений, существует и проблема определения точек пересечения и бифуркаций. Например, если в собственных значениях, то возникает неустойчивость асимптотического разложения поля перемещений, (парадокс Стенберга-Койтера) [80], [140].

Использование вышеизложенных методов и приемов позволило решить большое число задач теории упругости.

В работе [151], используя метод граничных интегральных уравнений, была решена задача о клиновидной выточке или включении в упругом теле.

Работа Барсукова С.А. [4] посвящена методу выделения сингулярных составляющих линейно-упругого решения в окрестности узловых точек тела, который был разработан для штампов клиновидной формы и обобщен для произвольных многогранных углов, а также применен для исследования особенностей угловых точек фронта трещины, расположенных в плоскости соединения двух разнородных материалов. В основу метода легло сведение с помощью преобразования Меллина стандартных краевых задач в трехмерной постановке к спектральным задачам для одномерного интегрального оператора, что позволило выделить вид интегрального оператора в исследуемой задаче. Была осуществлена компьютерная реализация данного метода и проведено численное исследование того, как зависит характеристика сингулярного разложения от раствора угла трещины и от соотношения упругих параметров материала.

Метод плоских граничных уравнений был использован для решения задачи угловой сингулярности в вершине пирамидального включения [143], с помощью которого в работе [142] были получены результаты для угла Фикера в численной форме [145], для случая выточки или включения конической формы [136], а также выточки клиновидной формы в полупространстве [85].

Работа [83] посвящена анализу характера сингулярности напряжений на кончике трещины, расположенной на поверхности. Исследованы задачи

для разных углов пересечения трещины с поверхностью, типов граничных условий и материальных параметров. В работах [93], [121], [80], [139], [13] проведено исследование для изотропного материала, показавшее зависимость собственных значений от коэффициента Пуассона и от различных углов фронта трещины. Были обобщены полученные результаты и сделаны выводы, что относительно плоскости трещины получается одно симметричное и два антисимметричных решения, причем симметричное решение является действительным для всех собственных значений и коэффициентов Пуассона. Два антисимметричных решения являются комплексно-сопряженными. Частные случаи рассматриваемой задачи были исследованы в работах [80], [85], [95], [143], [145], [98].

Работы [94], [80]. посвящены исследованию трещины клиновидной формы на поверхности контакта двух материалов при граничных условиях в напряжениях. Установлена связь между показателями сингулярности напряжений и модулем Юнга и коэффициентом Пуассона

Авторы работ [37], [35] проявили интерес к изучению таких точек трехмерных тел, как вершина многогранного клина, обусловленного тем фактом, что анализ особенности напряжений не сводится к рассмотрению двумерных задач.

Также интерес вызывают показатели сингулярности напряжений в вершине трехмерных клиньев, которые исследуются в работах [110], [138], [100], [98], [83], [145], [85], [87]. Автор [91] решает задачу на основе представлений Лехницкого, учитывающих плоскую и антиплоскую деформации. Используя подход Вильямса, рассматривается задача о клине, на гранях которого заданы нулевые напряжения, в рамках которой были найдены показатели сингулярности напряжения. Было получено трансцендентное уравнение. Решение характеристического уравнения рассматривается как функция угла раствора клина. Было проведено исследование, которое установило зависимость показателя сингулярности напряжений от постоянных упругости, таких как модуль упругости и модуль

сдвига, а также от ориентации волокон. Сочетая метод конечных элементов с методом Стеклова в [158] для трещины в неоднородных материалах и соединений из разнообразных материалов с различными видами граничных условий получены собственные значения и собственные функции. В работе [125], используя преобразования Меллина, изучена зависимость сингулярности напряжений от упругих постоянных и геометрических параметров V-T-образных соединений.

В работе [97] проводилось исследование концентрации напряжений в тройном соединении, вызванной упругой анизотропией, было показано, что концентрация напряжений намного сильнее в пространственном случае, чем аналогичный, но в плоской постановке.

Используя метод конечных элементов, Пику и Гупта [138; 139] исследовали сингулярность напряжений в точке пересечения линии контакта тройного соединения со свободной границей в однофазных поликристаллах, а также была выявлена зависимость показателей сингулярности напряжений от углов различного раствора и разнообразных материалов тройного соединения.

Точка называется угловой, если она является точкой пересечения фронтов трехмерных трещин. Работа [127] содержит результаты подробного расчета сингулярности напряжений в угловой точке для сквозной и полукруглой трещин при нагружении по моде.

Метод предложенный Матвеевко В. П. и др. [36] позволяет изучить вершину конуса с эллиптическим основанием при однородных краевых условиях и выявить характер сингулярности напряжений в вершине.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

1. Проведен обзор существующих прямых и обратных, аналитических и численных методов решения задач математической физики. Перечислены

основные положения и отличительные особенности, преимущества и недостатки каждого из них.

2. Проанализирован относительно новый вариационный метод решения задач математической физики – метод граничных состояний, основанный на теории гильбертовых пространств. Перечислены основные направления проведенных исследований, основанных на данном методе, а также кратко изложены выводы по каждому из них. Представлены основные положения и отличительные особенности данного метода.

3. Осуществлен детальный обзор по исследованиям, посвященным изучению особых точек различного характера. Проанализированы и обобщены результаты, полученные в данных работах. Установлены основные направления исследований, отмечены положительные и отрицательные моменты полученных результатов.

4. Сложность решения задач, содержащих сингулярности физического и геометрического характера является одной из важных проблем фундаментальных исследований. Проведенный анализ показал важность правильного нахождения асимптотического разложения в окрестностях особых точек. Пренебрежение сингулярными составляющими решения может привести к потере точности и устойчивости полученного приближенного решения. Нужно отметить, что учитывая сингулярные составляющие, можно повысить эффективность метода и получить правильное решение в целом.

ГЛАВА 2. СИНГУЛЯРНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Традиционно в плоских задачах теории упругости особенности физического характера образуют сосредоточенные в точках границы силовые факторы (сосредоточенная сила и моменты), разрывы первого рода поверхностной нагрузки. Реже встречаются эффекты, связанные с разрывом второго рода (односторонние и двусторонние интегрируемые скачки усилий), изломы конечных усилий (непрерывные, но не гладкие усилия), изломы эпюр поверхностных перемещений.

2.1. Классификация особенностей физического характера

Сосредоточенная сила (рис. 2.1) является идеализированным понятием, характеризующим нагрузку, приложенную к поверхности тела на участке, величина которого мала по сравнению с размерами тела. Возникает особенность физического характера, заключающаяся в том, что перемещения в точке приложения сосредоточенной силы бесконечны, в то время как в остальных точках перемещения ограничены и убывают по мере удаления от особой точки [42].

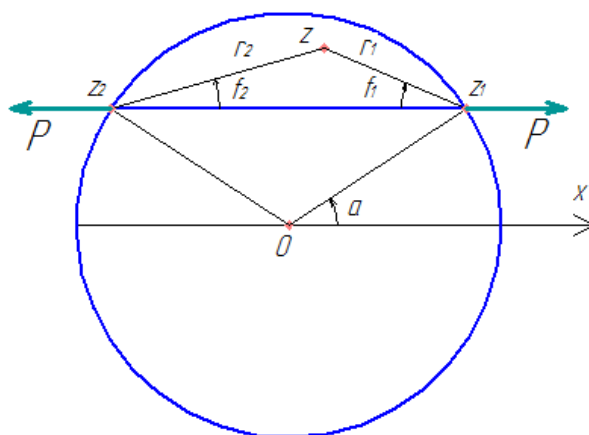


Рисунок 2.1 – Сосредоточенная сила

Главный вектор усилий, распределенных по любому замкнутому контуру C , содержащем точку $z = 0$, должен уравновешивать приложенную силу. Это соображение приводит к первому условию задачи:

$$\Delta_C(P+iQ) + X + iY = 0, \quad (2.1)$$

где $\Delta_C f$ – изменение функции f при обходе замкнутого контура, оставляющем обходимую область слева. Условие $\Delta_C f = 0$ выполняется, если функция f однозначна. В исследуемой задаче требование однозначности налагается на вектор перемещения:

$$\Delta_C(u + iv) = 0 \quad (2.2)$$

При выполнении условия (2.2), гарантируется однозначность напряжений и обращение в нуль главного момента m^0 распределенных по C усилий.

Заменяем в (2.2) выражение, стоящее в скобках, на представление Колосова-Мухелишвили:

$$\Delta_C(P + iQ) = -i\Delta_C[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})] \quad (2.3)$$

Эта величина будет иметь постоянное и, не зависящее от выбора контура C , содержащего внутри себя начало координат, значение для функций φ и ψ вида:

$$\varphi(z) = (\alpha + i\beta)\ln z, \quad \psi(z) = (\alpha' + i\beta')\ln z, \quad (2.4)$$

где $(\alpha + i\beta)$, $(\alpha' + i\beta')$ – постоянные.

Тогда

$$\Delta_C\varphi(z) = 2\pi i(\alpha + i\beta), \quad \Delta_C z\bar{\varphi}'(\bar{z}) = 0, \quad \Delta_C\bar{\psi}(\bar{z}) = 2\pi i(\alpha' - i\beta') \quad (2.5)$$

и по (2.1), (2.2), с учетом (2.5), получим:

$$2\mu(u + iv) = (3 - 4\nu)\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \psi(z) + 2\mu(u_0 + iv_0 + i\psi_0 z) \quad (2.6)$$

приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} -i[2\pi i(\alpha + i\beta) - 2\pi i(\alpha - i\beta)] + X + iY = 0, \\ 2\pi i(3 - 4\nu)(\alpha + i\beta) - 2\pi i(\alpha - i\beta) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из нее находим

$$(\alpha + i\beta) = -\frac{X + iY}{8\pi(1 - \nu)}, \quad (\alpha' - i\beta') = (3 - 4\nu)\frac{X + iY}{8\pi(1 - \nu)} \quad (2.8)$$

так что

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z, \quad \psi(z) = (3-4\nu) \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z \quad (2.9)$$

Напряжения через функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ однозначны; они определяются формулами:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -\frac{X \cos \theta + Y \sin \theta}{2\pi(1-\nu)r}, \quad (2.10)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{1}{\pi r} (X \cos \theta + Y \sin \theta) + i \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)r} (X \cos \theta - Y \sin \theta).$$

С точностью до не имеющего значения линейного по z слагаемого имеем также

$$U = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \left[-(X+iY)\bar{z} \ln z - (X-iY)z \ln \bar{z} + (3-4\nu)(X-iY) + (3-4\nu)(X+iY)\bar{z} \ln \bar{z}, \right] \quad (2.11)$$

аналогично проверяется однозначность выражения:

$$\Delta_c \left[U - \left(z \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \Delta_c m^0 = 0 \quad (2.12)$$

Вектор перемещения определяется равенством:

$$2\mu(u+iv) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[-(3-4\nu)(X+iY) \ln r + \frac{1}{2}(X-iY)e^{2i\theta} \right] \quad (2.13)$$

Аналогично рассматривается воздействие сосредоточенного момента (Рис. 2.2) [32].

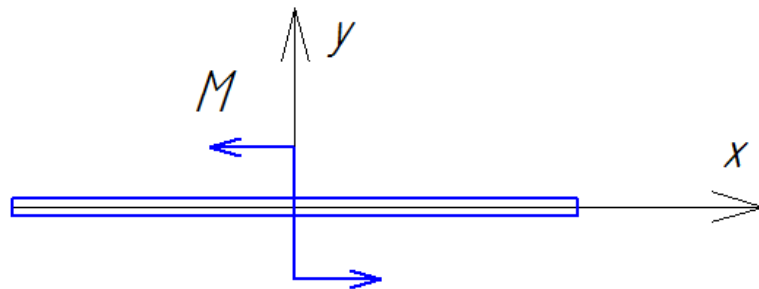


Рисунок 2.2 – Сосредоточенный момент

В данной задаче сохраняется условие (2.2), а уравнение статики (2.1) заменяется уравнением:

$$M^0 + m^0 = M^0 + \Delta_C \frac{1}{2} [\chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) - z\chi'(z) - \bar{z}\bar{\chi}'(\bar{z}) - z\bar{z}\varphi'(z) - z\bar{z}\bar{\varphi}'(\bar{z})] \quad (2.14)$$

Здесь M^0 – сосредоточенный в начале координат $z=0$ упругой плоскости момент, а главный момент напряжений m^0 по любому замкнутому контуру C , охватывающему точку $z=0$, который определяется по (2.15):

$$m^0 = \operatorname{Re}[\chi(z) - z\varphi(z) - \bar{z}\bar{z}\bar{\varphi}'(\bar{z})], \quad (2.15)$$

Для удовлетворения условию (2.14), примем

$$\chi(z) = (\alpha'' + i\beta'') \ln z, \quad \psi(z) = \chi'(z) = \frac{\alpha'' + i\beta''}{z}, \quad \varphi(z) = 0.$$

При этом выполняется и условие (2.2), поскольку $u + iv$ является однозначной функцией координат. Получаем

$$M^0 + \frac{1}{2} 2\pi i (\alpha'' + i\beta'' - \alpha'' + i\beta'') = 0,$$

так что α'' остается неопределенным, а $\beta'' = \frac{1}{2\pi} M^0$. Получаем

$$\chi(z) = \frac{iM^0}{2\pi} \ln z, \quad \psi(z) = \frac{iM^0}{2\pi z}, \quad \Psi(z) = -\frac{iM^0}{2\pi z^2} \quad (2.16)$$

Следующим видом особенностей физического характера является скачок равномерно-распределенного усилия (рис. 2.3) [42].

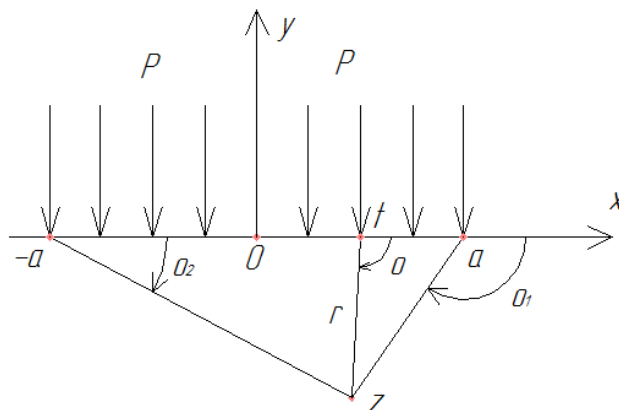


Рисунок 2.3 – Скачок равномерно-распределенной нагрузки по границе полуплоскости

Рассмотрим случай, когда отрезок $-a \leq t \leq a$ оси Ox подвержен равномерному давлению p , остальная же часть границы свободна от внешних усилий. Получим

$$\Phi(z) = \frac{p}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{dt}{t-z}, \quad \Psi(z) = -\frac{zp}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{dt}{(t-z)^2} \quad (2.17)$$

Откуда

$$\Phi(z) = \frac{p}{2\pi i} [\ln(z-t)]_{t=-a}^{t=+a} = \frac{p}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z+a}, \quad \Psi(z) = -\frac{zpa}{\pi i(z^2 - a^2)}. \quad (2.18)$$

Тогда компоненты напряжения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\operatorname{Re} \Phi(z), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

откуда

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{p}{\pi} (O_1 - O_2) + \frac{2pay(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi[(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2]}, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{p}{\pi} (O_1 - O_2) - \frac{2pay(x^2 - y^2 - a^2)}{\pi[(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2]}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{4pay^2x}{\pi[(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2]}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Формулы (2.20) показывают, что компоненты напряжения непрерывны вплоть до границы, если исключить точки $t = -a$, $t = +a$, где они перестают быть непрерывными, но ограниченными [8]. Аналогично вычисляются компоненты смещения, которые также будут непрерывными вплоть до всей границы, если не считать бесконечно удаленные точки.

2.2. Учет специального решения в задаче о сжатии тела прямоугольными отрезками встречных равномерно-распределенных усилий

В задачах рассматриваются безразмерная форма величин, а также область тел. Цвет фона на линиях уровня и двумерных графиках

соответствует нулевому уровню, более светлые тона определяют более высокий уровень, а темные тона соответствуют более низкому уровню.

Упругие постоянные задаются произвольно в виду того, что целью диссертации не является рассмотрение конкретных задач прикладного характера.

Ставится задача о нахождении напряженно-деформированного состояния тела нагруженного равномерно распределенной нагрузкой на отрезке $[-a; a]$ (рис. 2.4).

Для решения плоской задачи изотропной среды воспользуемся формулами комплексного представления Г.В. Колосова-Н.И. Мусхелишвили, дающие общее решение плоской задачи для изотропного тела (2.17):

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \varphi'(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} &= 2[\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $z = x + iy$ – комплексные координаты; $\varphi(z), \psi(z)$ – аналитические потенциалы Колосова - Мусхелишвили; G – модуль сдвига; $k = (3 - \mu)/(1 + \mu)$; u, v – компоненты вектора перемещений; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений

По теореме Вейштрасса: любую аналитическую функцию можно приблизить в виде суммы конечного числа многочленов.

Для построения базисных наборов было использовано общее решение Колосова-Мусхелишвили (2.17).

Регулярные базисные наборы внутренних состояний конструируются при помощи перебора возможных вариантов для аналитических функций:

$$\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz^n \end{pmatrix} \right\}, n = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Соответствующее упругое поле описывается функциями Колосова-Мусхелишвили:

$$\varphi(z) = (z - a) \ln \frac{z - a}{z + a}, \quad \psi(z) = \frac{i a \ln(-a^2 + z^2)}{2\pi} \quad (2.23)$$

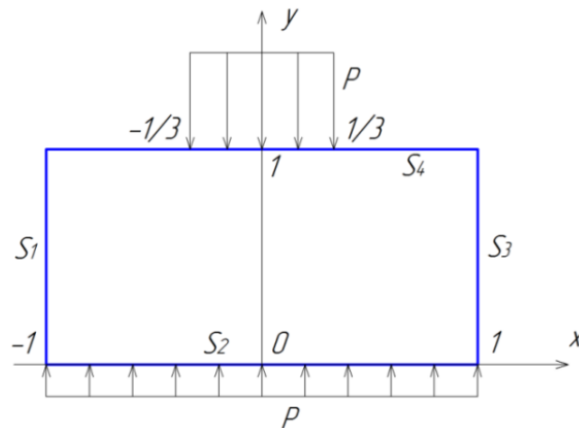


Рисунок 2.4 – Сжатие тела прямоугольными отрезками встречных равномерно-распределенных усилий

На рисунке 2.5 представлен контур тела в деформированном состоянии (для наглядности контур представлен в гипертрофированном виде).

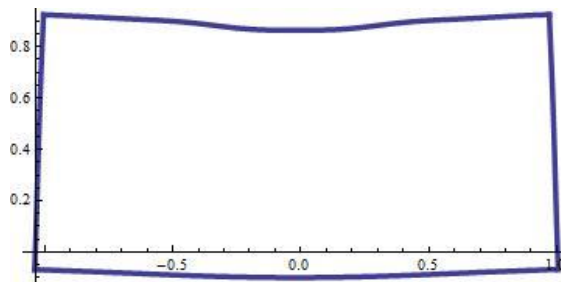


Рисунок 2.5 – Контур тела в деформированном состоянии

Рассматривается упругое изотропное прямоугольное тело, границу которого разделили на 4 сегмента, причем на первом и третьем сегменте тело освобождено от нагрузок, на границе S_2 действует усилие, равное $p = (0, 1)$, а на границе S_4 соответственно $p = (0, -3)$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние. Условия равновесия в исходных условиях выполняются.

Решение поставленной задачи проводится двумя способами:

- 1) без включения специального решения;
- 2) с включением в базис специального решения.

При решении задачи первым способом использовался регулярный базис (2.22) длиной в 159 элементов, и формирование ортонормированного базиса внутренних состояний заняло достаточно много времени.

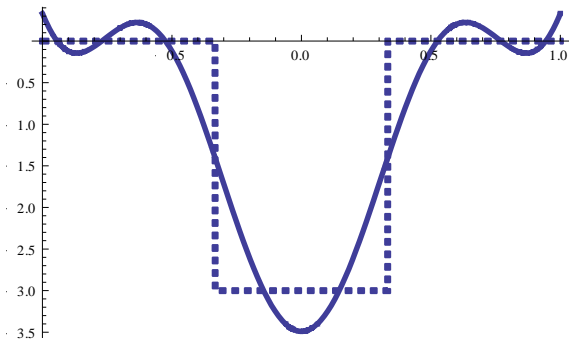
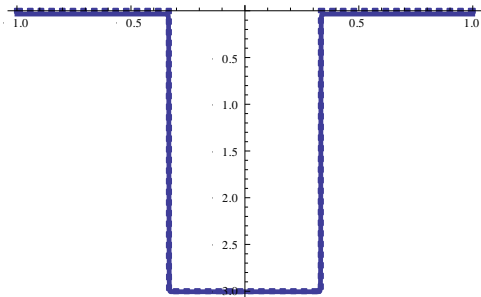
Решая задачу вторым способом, использовался базис с включением специального решения, которое происходит на этапе генерирования базиса. С учетом специального решения, был получен вид базиса с включением в него специального решения:

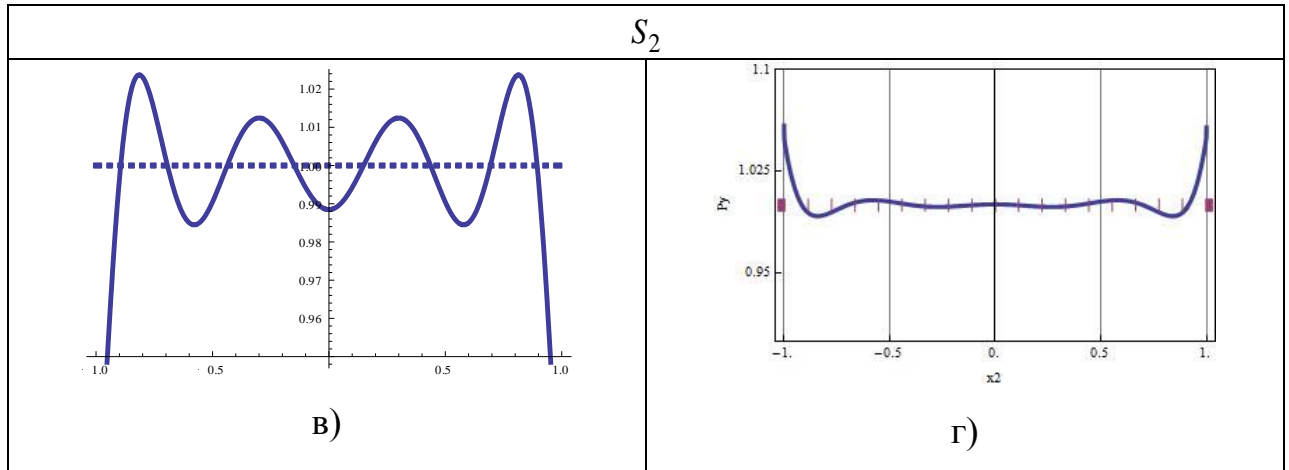
$$\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(z, z_0) \\ \psi(z, z_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz^n \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.24)$$

где z_0 - специальное решение, «схватывающее» особенность.

Специальное решение удерживалось в четырех точках: $x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$ на границе S_4 и $x_{3,4} = \pm 1$ на границе S_2 . Регулярная часть базиса ограничивалась многочленами второго порядка. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сравнительный анализ граничных условий

Усилия p_y на границах, полученные без использования специального решения	Усилия p_y на границах, полученные с использованием специального решения
S_4	
 <p style="text-align: center;">а)</p>	 <p style="text-align: center;">б)</p>



В таблице 1 представлены рисунки, на которых сопоставлены результаты решения (сплошная линия) и заданные граничные условия (прерывистая линия). Сравнивая полученные результаты, можно убедиться в том, что при использовании регулярного базиса (2.22), на границе S_2 и S_4 приемлемой точности решения не достигается, даже при большом количестве элементов в базисе. При приближении к сингулярным точкам воздействия наблюдается некоторая осцилляция, вызванная этими точками. Зато при включении в формирование базиса специального решения (2.24), на границе S_4 полученное решение практически совпадает с исходными граничными условиями, кажущееся несоответствие на границе S_2 вызвано присутствием геометрической особенности (клин), не учтенной в базисе. Но, несмотря на данный факт, результат свидетельствует об эффективности включения специального решения в формирование базиса.

Кроме того, для точности данных выводов, проведем вычисление невязки, которая является косвенной характеристикой качества полученного решения с помощью формулы:

$$\|\tilde{p}_i\| = \sqrt{\int_a^b (p_i - p_i^*)^2}, \quad (2.25)$$

где p_i – полученные компоненты усилий, p_i^* – заданные компоненты усилий.

Полученные решения представим в графической форме (рис. 2.6):

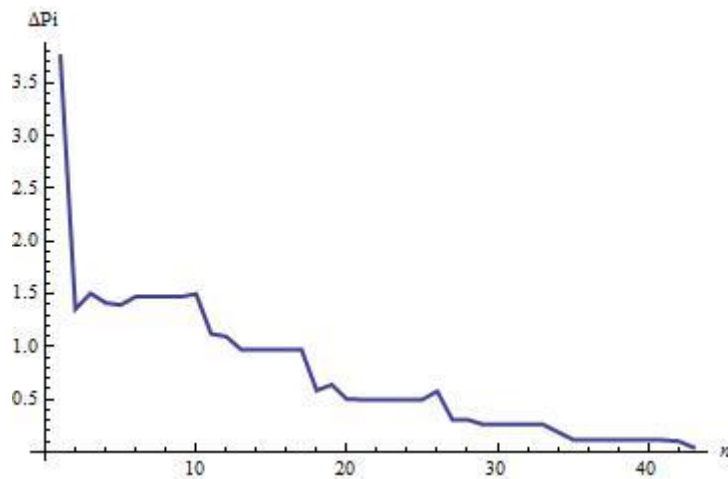


Рисунок 2.6 – Невязка полученного и заданного граничного условия

Данный результат свидетельствует, что полученное решение приближается к заданным граничным условиям, значения невязки стремятся к нулю, что показывает успешность методики формирования базиса с использованием приема включения специального решения.

Таким образом, сравнение позволяет говорить об эффективности включения специального решения в формировании базиса, что позволит не только улучшить сходимость, но и уменьшить время работы по нахождению решения.

В силу необозримости полученных аналитических форм, решения представим в виде механических полей соответствующих компонент вектора перемещения, тензора деформаций и тензора напряжений.

Более наглядная часть полученных механических полей представлена на рисунке 2.7, на котором изображены двумерные графики восстановленных механических полей: двумерные графики компонент перемещения u_x и u_y , а на рисунке 2.8 – двумерные графики компонент тензора напряжения σ_{xx} и σ_{yy} для решения задачи с включением специальных решений.

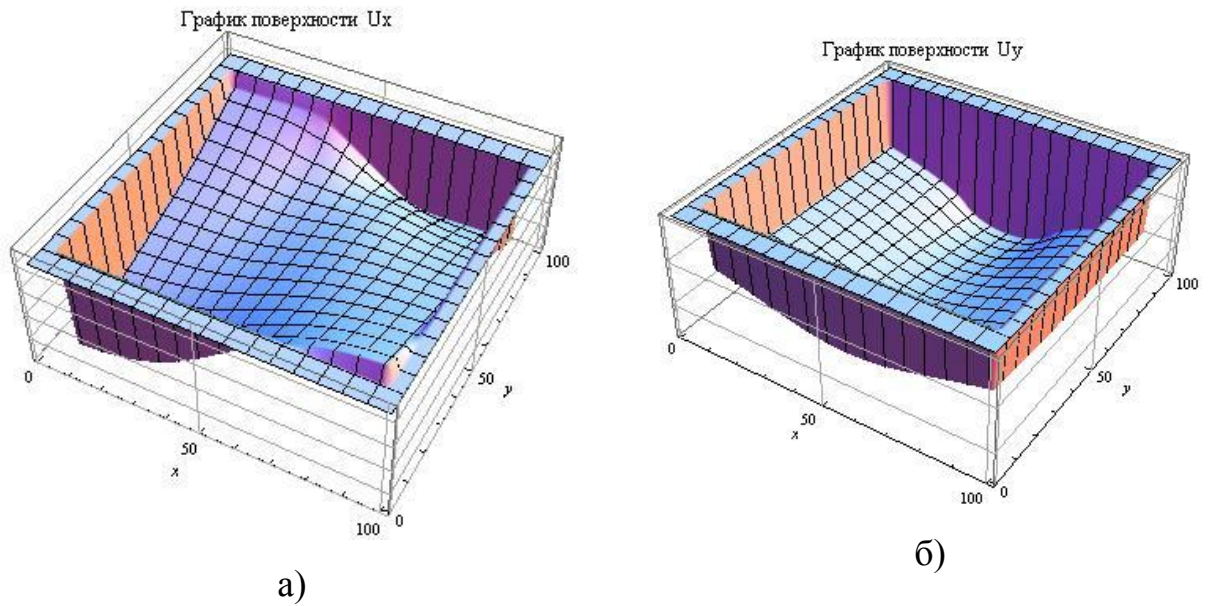


Рисунок 2.7 – Двумерные графики восстановленных механических полей:

а) двумерный график u_x ; б) двумерный график u_y

На рисунке поля перемещения u_x и u_y являются гладкими и не имеют разрывов.

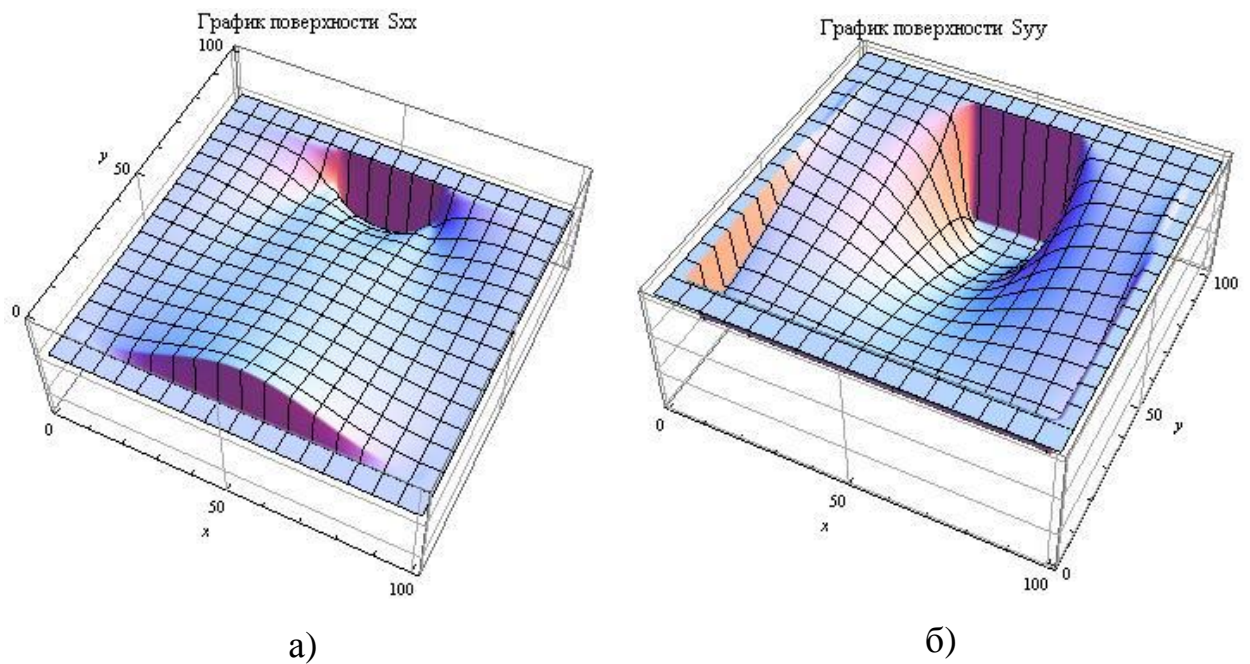


Рисунок 2.8 – Двумерные графики восстановленных механических полей: а) двумерный график σ_{xx} ; б) двумерный график σ_{yy}

Как видно из представленного двумерного графика уровня напряжения, компоненты σ_{yy} , наблюдается скачок в зоне резкой смены граничных условий на границе S_4 . Аналогичная ситуация прослеживается и для компоненты σ_{xx} .

Таким образом, данное исследование показало практическую значимость учета специального решения в задачах теории упругости с физическими особенностями, проявившуюся не только в точности и численной устойчивости данного решения, но и в значительном сокращении вычислительных ресурсов.

2.3. Учет специального решения в задаче о сжатии кругового диска сосредоточенными силами

2.3.1. Сжатие кругового диска осевыми сосредоточенными силами

Рассматривается упругий изотропный круговой диск единичного радиуса. Вдоль диаметра по оси абсцисс действуют две сжимающие единичные сосредоточенные силы. Требуется определить напряженно-деформированное состояние тела. Принимаются безразмерные параметры упругости $\mu=1$, $\nu=0,25$ (Рис. 2.9).

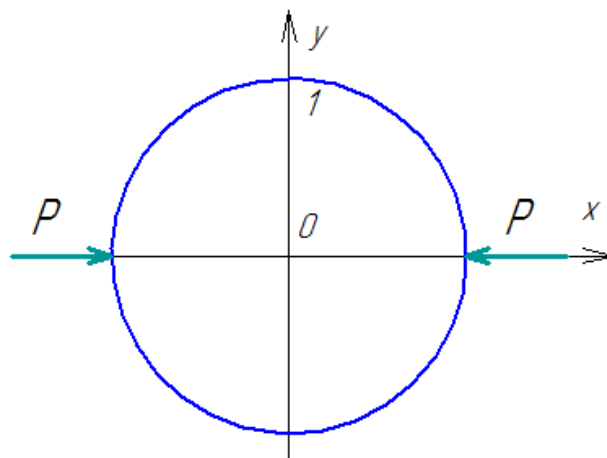


Рисунок 2.9 – Сжатие кругового диска осевыми сосредоточенными силами

На рисунке 2.10 представлен контур тела в деформированном состоянии.

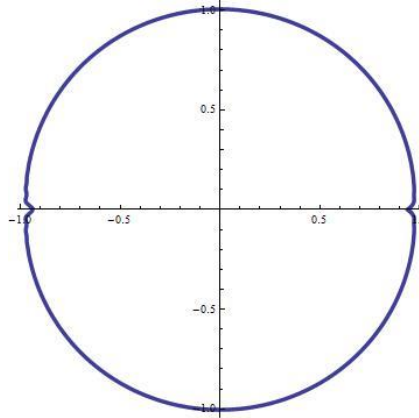


Рисунок 2.10 –. Контур тела в деформированном состоянии

Воспользуемся специальным решением для кругового диска под воздействием сосредоточенных сил (рис. 2.1), приложенных в точках z_1 и z_2 , выраженным через смещения [42]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{p}{4\mu\pi} \left(\frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \ln \frac{r_2}{r_1} + \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2 - \frac{2\mu \cos \alpha}{\lambda + \mu} \frac{x}{R} \right) \\ v &= \frac{p}{4\mu\pi} \left(\frac{2\mu}{\lambda + \mu} (\theta_1 + \theta_2) - \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2 - \frac{2\mu \cos \alpha}{\lambda + \mu} \frac{y}{R} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Базис генерируется по формулам (2.24), используя (2.26) в качестве специального решения.

Базис состоит из элементов, содержащий: 2 специальных элемента от сосредоточенных сил, направленных вдоль оси Ox , приложенных в точках $z_1 = 1,001$ и $z_2 = -1,001$, и 20 традиционных элементов, построенных на полиномах до пятого порядка включительно (1 из них линейно зависимый, откинут). Итого 21 базисный элемент.

Точки воздействия сосредоточенных усилий отодвинуты от границы на малую окрестность ε из-за того, что в противном случае интегралы в скалярном произведении не существуют в смысле Лебега, хотя существуют в смысле главного значения по Коши.

Получили следующие коэффициенты Фурье (представлены только ненулевые коэффициенты Фурье):

$c_1 = 1,01325$, $c_2 = 0,920954$, $c_3 = 0,0138871$, $c_4 = -0,0220416$, $c_5 = 0,237783$,
 $c_6 = 0,0025003$, $c_7 = 0,000848828$, $c_8 = 0,174215$, $c_9 = -0,00538217$,
 $c_{10} = 0,159778$, $c_{11} = -0,0091522$.

Которые показывают, что решение задачи о сжатии кругового диска осевыми равномерными нагрузками, распределенными на малом промежутке, полученные путем использования метода граничных состояний, уменьшаются, а, следовательно, решение является сходящимся.

На рисунке 2.11 приведены коэффициенты Фурье в графическом виде.

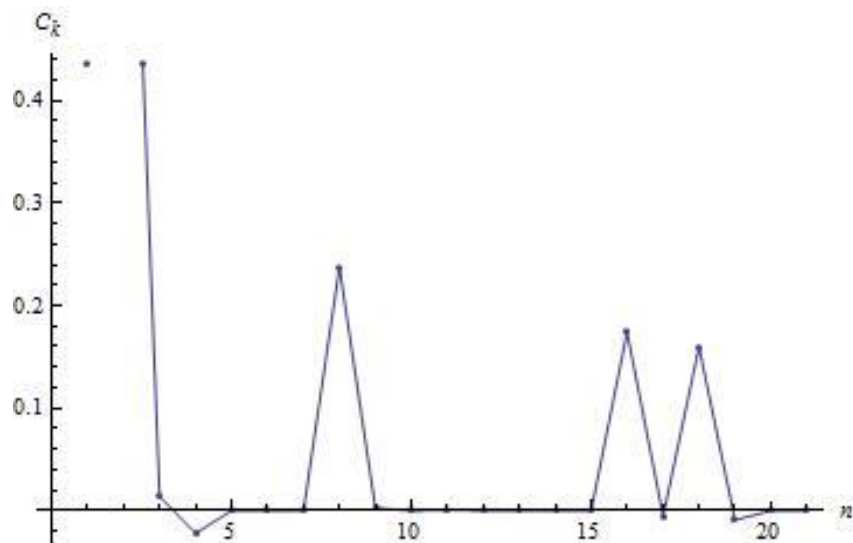


Рисунок 2.11 – Коэффициенты Фурье

Как видно из рисунка 2.11, коэффициенты Фурье с увеличением числа элементов в базисе уменьшаются, что свидетельствует о приемлемом качестве решения.

Кроме того, для точности данных выводов, проведем вычисление суммы Бесселя, которая является косвенной характеристикой качества полученного решения с помощью формулы:

$$\sum_k c_k^2 \leq \|\xi\|^2, \quad (2.27)$$

где c_k – полученные в ходе решения коэффициенты Фурье.

Представим в графической форме сумму Бесселя (рис. 2.12):

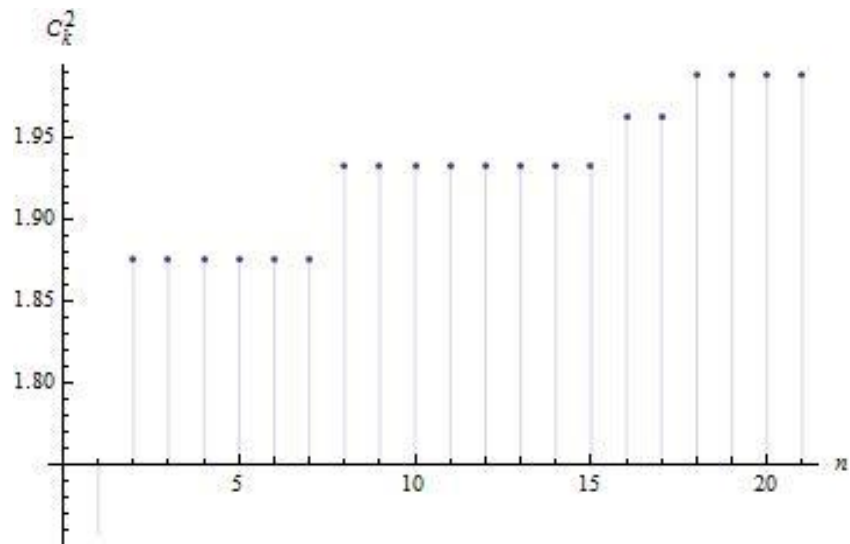


Рисунок 2.12 – Сумма Бесселя

Результаты свидетельствуют о том, что полученное решение является сходящимся: при увеличении числа элементов в базисе. Данный факт является одним из косвенных показателей, характеризующим качество решения.

В силу необозримости полученных решений, представим их в виде механических полей соответствующих компонент вектора перемещений (рис. 2.13 а и б).

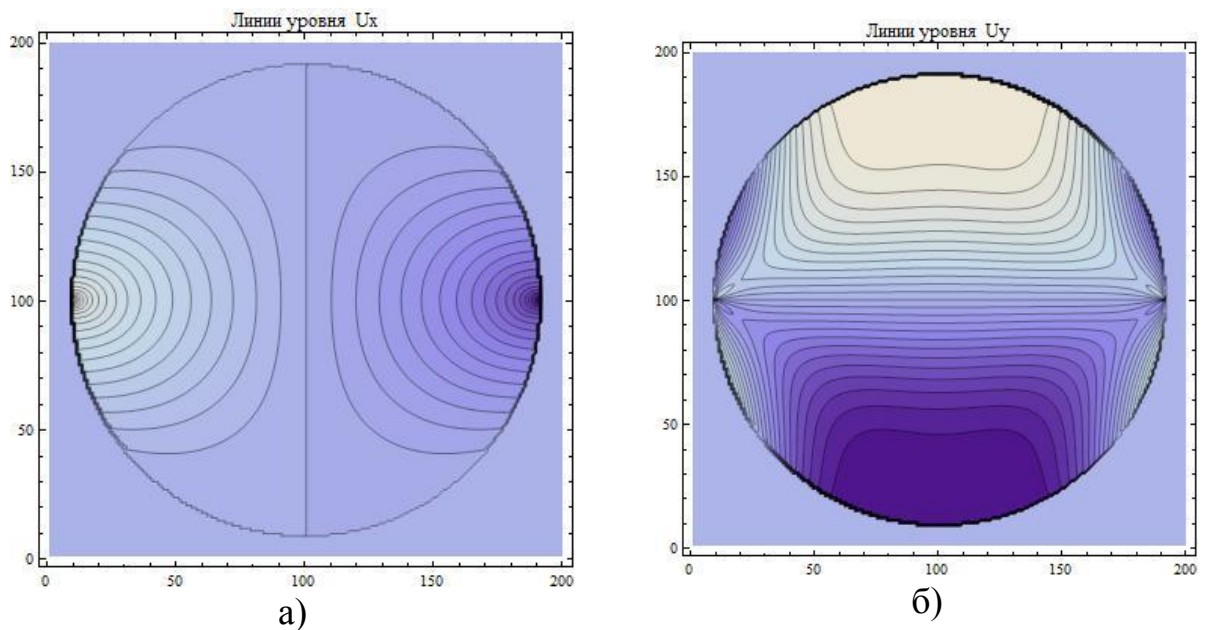


Рисунок 2.13 – Линии уровня: а) – компоненты вектора перемещения u_x ; б) – компоненты вектора перемещения u_y

Средняя часть тела и области примыкающая к вертикальной оси почти не смещена вдоль оси Ox . По мере приближения к точкам, в которых сосредоточено воздействие сил, уровень смещения увеличивается в направлении действия сил.

Сдавливание вдоль оси Ox вызывает перемещения материи в нормальном направлении, причем тем больше, чем больше точки тела удалены от оси Ox . Темные зоны вблизи точек воздействия свидетельствуют о том, что в их окрестности вертикальное смещение мало. Явно выделены смещения вдоль оси Oy в зонах, примыкающих к лучам $\approx \pm 40^\circ$, расходящимся от точек воздействия.

Изолинии компонент тензора напряжений представлены на рисунке 2.14.

На изолиниях наблюдается увеличение напряжения при приближении к точкам воздействия равномерной нагрузки на малом промежутке. На остальной области наблюдается равномерное распределение напряжения.

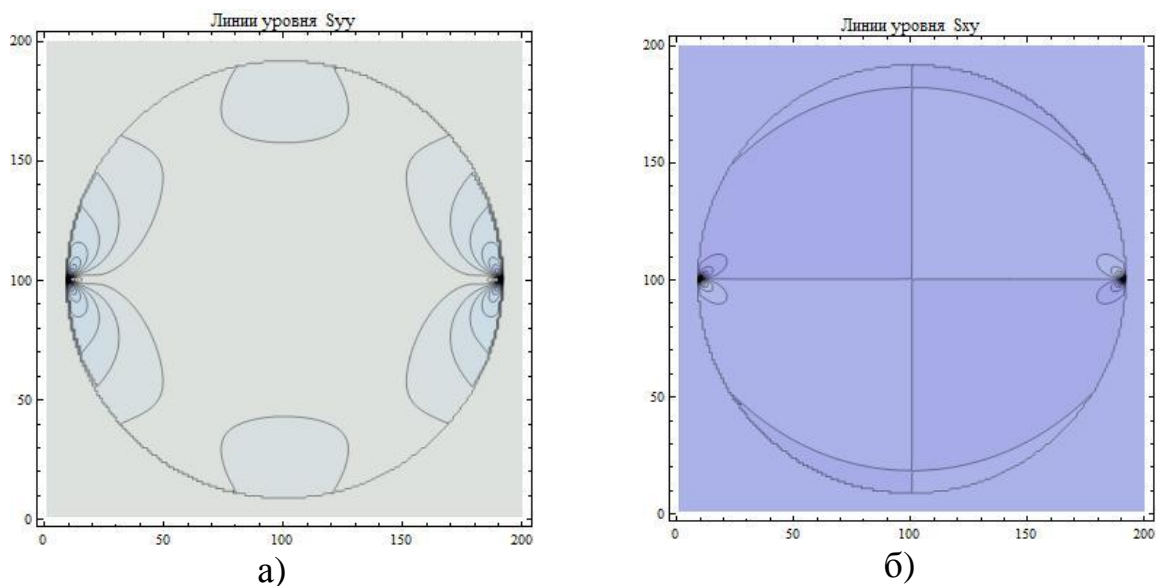


Рисунок 2.14 – Линии уровня: а) – компоненты тензора напряжения σ_{yy} ; б) – компоненты тензора напряжения σ_{xy} .

На линиях уровня наблюдается увеличение напряжения при приближении к точкам воздействия равномерной нагрузки на малом

промежутке. На остальной области наблюдается равномерное распределение напряжения.

На рисунке 2.15 представлены восстановленная в ходе решения компонента усилия p_x на границе при 21 удержанном коэффициенте ряда Фурье. На графиках обозначаются: $| \cdot | \cdot | \cdot | \cdot |$ – заданные значения; — – восстановленные значения.

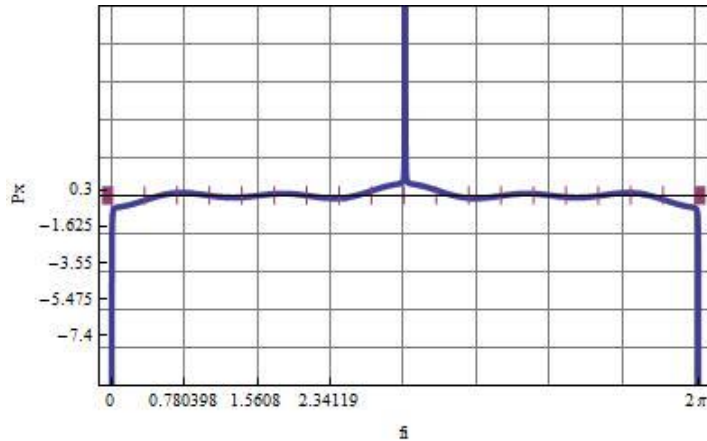


Рисунок 2.15 – Компонента p_x восстановленного усилия

На рисунке 2.15 можно наблюдать, что восстановленная в ходе решения методом граничных состояний компонента p_x практически совпадает с заданными граничными условиями, кроме точек воздействия равномерной нагрузки на малом промежутке.

На рисунке 2.16 изображена восстановленная в ходе решения компонента усилия p_y на границе.

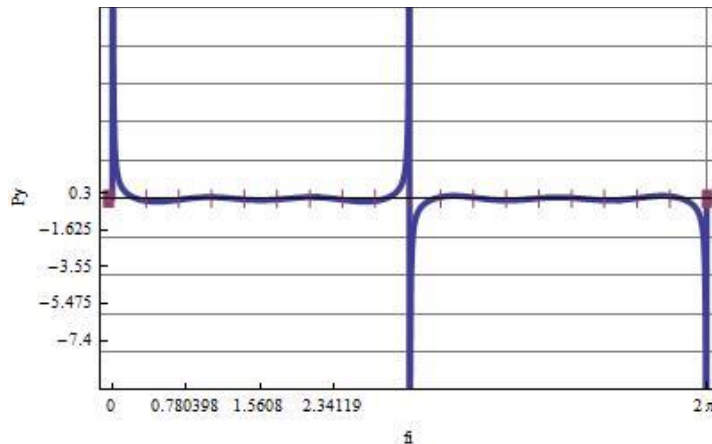


Рисунок 2.16 – Компонента p_y восстановленного усилия

Анализируя рисунок 2.16 можно отметить, что восстановленная компонента p_y совпадает с заданными значениями практически по всей границе, кроме точек воздействия сосредоточенных сил (π и 2π). Графически показано, что данные точки являются особыми в соответствии с приведенным выше определением.

2.3.2. Деформирование диска внецентренными сосредоточенными воздействиями

Интересным для исследования является задача нахождения напряженно-деформированного тела, в котором точки приложения сосредоточенных сил расположены не на диаметре, а смещены.

Рассматривается изотропный круговой диск единичного радиуса, в котором точки приложения сосредоточенных воздействий смещены из точек $z_{1,2} = \pm 1,001$ в точки $z_{3,4} = \pm\sqrt{3}/2 + i/2$ (Рис. 2.17). Упругие свойства тела определяют две упругие постоянные: модуль сдвига $G = 1$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$ [67]. Необходимо определить напряженно-деформированное состояние тела.

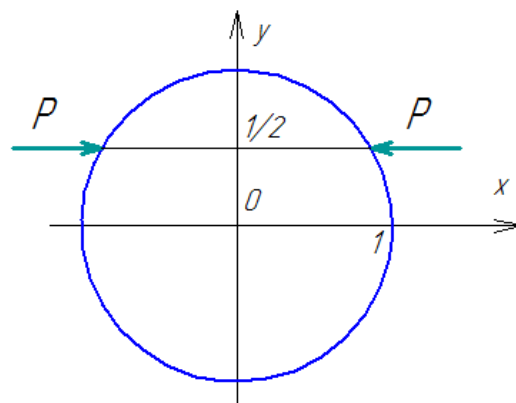


Рисунок 2.17 – Сжатие кругового диска внецентренными сосредоточенными силами

На рисунке 2.18 представлен контур тела в деформированном состоянии.

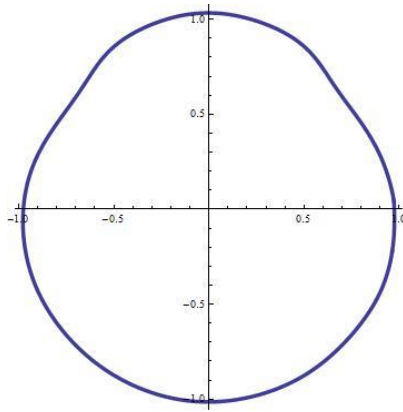


Рисунок 2.18 – Контур тела в деформированном состоянии

Решение данной задачи проходит аналогично решению задачи о сжатии кругового диска осевыми сосредоточенными силами в п. 2.3.1 при условии смещения точек воздействия сосредоточенных сил. Базис генерируется аналогично, и в качестве специальных элементов используем функции (2.25).

Базис состоит из элементов, содержащий: 2 специальных элемента от сосредоточенных сил, направленных вдоль оси Ox , приложенных в точках $z_3 = \sqrt{3}/2 + i/2$ и $z_4 = -\sqrt{3}/2 + i/2$, и 20 традиционных элементов, построенных на полиномах до пятого порядка включительно (1 из них линейно зависимый, откинут). Итого 21 базисный элемент.

Точки воздействия сосредоточенных усилий отодвинуты от границы на малую окрестность ε из-за того, что в противном случае интегралы в скалярном произведении не существуют в смысле Лебега, хотя существуют в смысле главного значения по Коши.

Полученное решение представлено в виде линий уровней, представленных на рисунке 2.19.

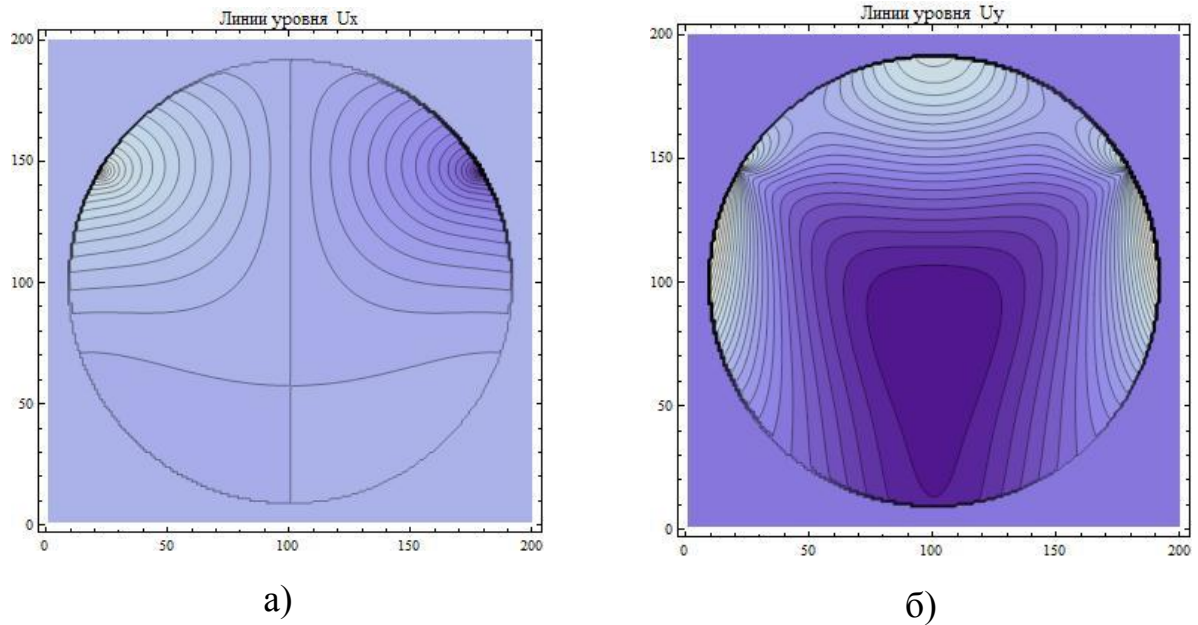


Рисунок 2.19 – Линии уровня: а) – компоненты вектора перемещения u_x ;
 б) – компоненты вектора перемещения u_y

По мере приближения к точкам, в которых сосредоточено воздействие сил, уровень смещения увеличивается в направлении действия сил.

На рисунке 2.20 приведены двумерные графики восстановленных компонент тензора напряжений.

Изображенные графики (рис. 2.20) компонент тензора напряжений демонстрируют резкое увеличение значений σ_{yy} и σ_{xy} по мере приближения к точкам сосредоточенного воздействия, но имеет ограниченный характер.

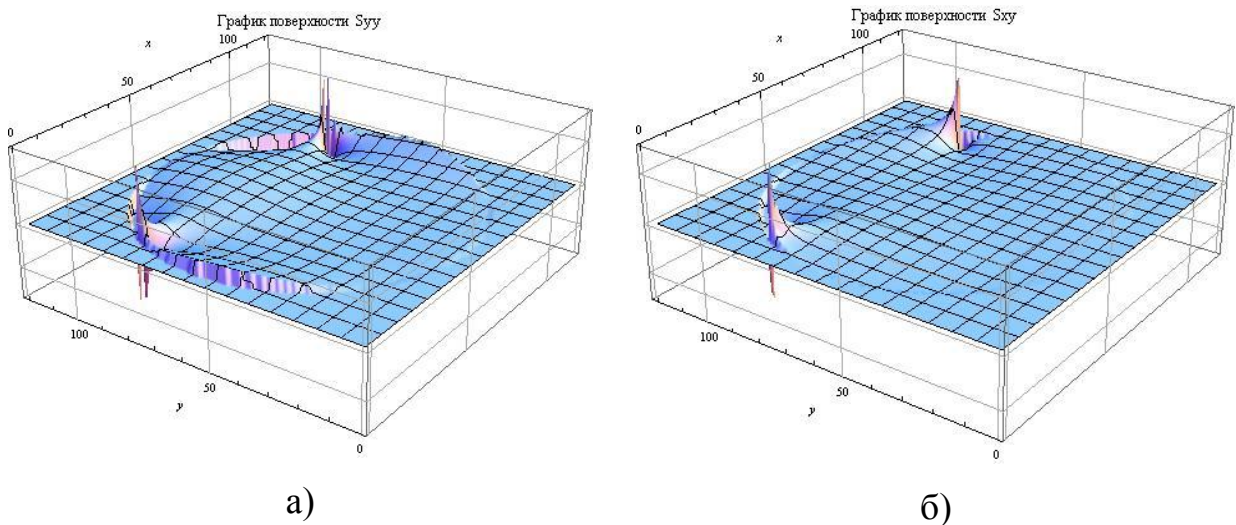


Рисунок 2.20 – Двумерные графики компонент тензора напряжений:

Это ограничение зависит только от количества используемых элементов базиса.

2.4. Учет специального решения в задаче о растяжении диска воздействиями, распределенными по полуокружности

Рассматривается круговое изотропное упругое тело единичного радиуса. На отрезке $[-1; 1]$ приложена к границе полуплоскости нагрузка, заданная по закону: $p_y = \begin{cases} \sin t, & t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0, & t \notin [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$. Принимались постоянные: модуль сдвига $\mu = 1$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние (рис. 2.21 а).

На рисунке 2.21 б представлен контур тела в деформированном состоянии.

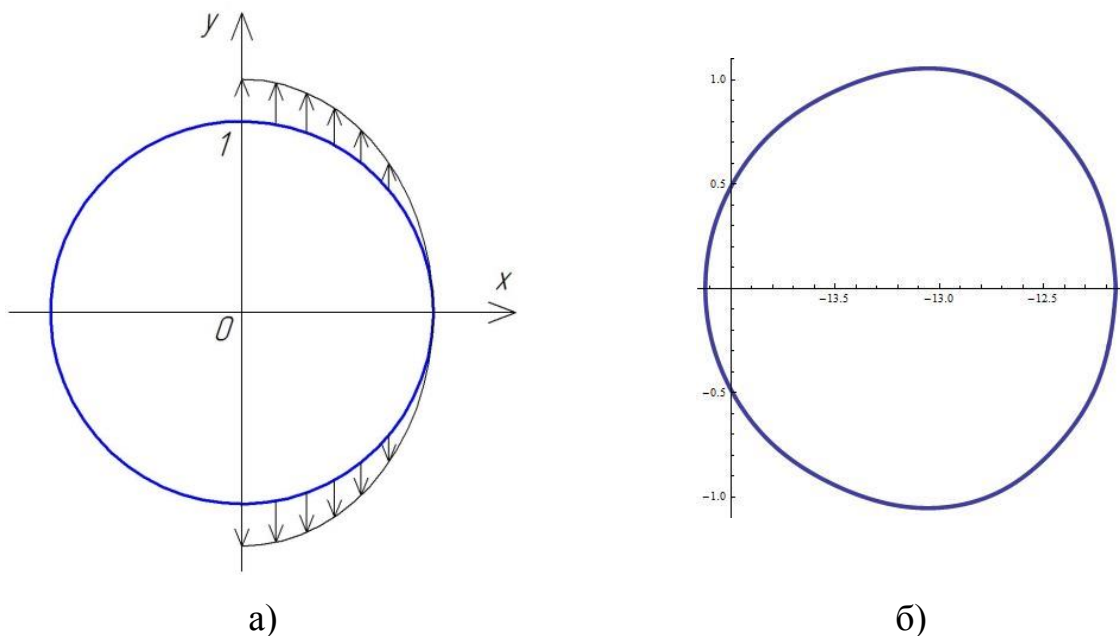


Рисунок 2.21 – Растяжение диска встречными воздействиями, распределенными по полуокружности (а) и его контур в деформированном состоянии (б)

Полуплоскость совмещается с планом тела D (рис. 2.22) таким образом, чтобы граница полуплоскости была направлена по касательной к

гладкому контуру тела, проведенной в точке сингулярного воздействия, при этом все тело оказывается накрытым полуплоскостью [42].

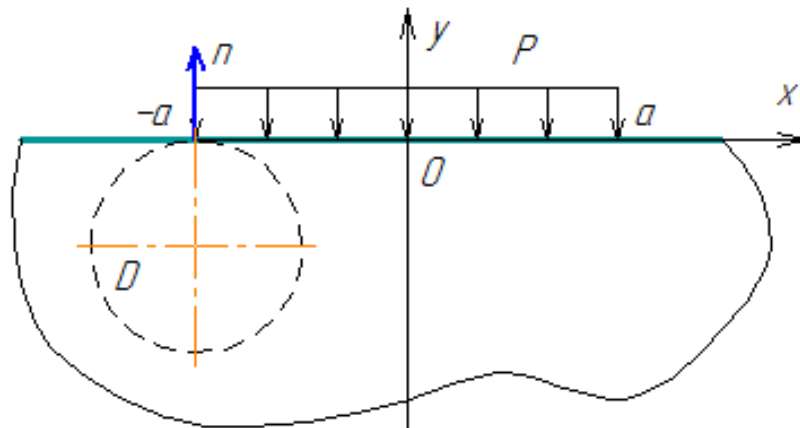


Рисунок 2.22 – Распределение равномерно-распределенной нагрузки

Для того чтобы выше указанный подход был справедлив и для невыпуклых тел, выберем параметр a достаточно большим так, чтобы вторая «сингулярная» точка не могла попасть в пределы области D . Значения параметра p принципиальной роли не играет, его можно положить равным 1.

Для преодоления технических трудностей, связанных с вычислением квадратур, точку сингулярного воздействия сместим в сторону внешней нормали границы тела на мало расстояние ε

Покажем, что такое смещение сказывается в решении лишь на окрестности точки сингулярного воздействия z_0 . Действительно, варьирование положение точки дает для вариации функции

$$\delta\varphi(z, a, z_0) = \frac{\partial\varphi(z, a, z_0)}{\partial z_0} \delta z_0. \quad \text{В точках, где } \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z_0} \right| < A = \text{const}, \quad \text{отличие}$$

функции по модулю от «несмещенного» состояния имеют величину порядка $A\varepsilon$. Таким образом, существенное отличие будет наблюдаться только в малой окрестности точки сингулярного воздействия.

Специальное решение удерживается в двух точках, соответствующих значениям параметра $t = \pm\pi/2$. Регулярная часть базиса принималась довольно грубо (ограничение многочленами пятого порядка). Таким образом, отрезок базиса пространств внутренних состояний составил всего лишь 21

элемент. Представим коэффициенты Фурье в графическом виде на рисунке 2.23

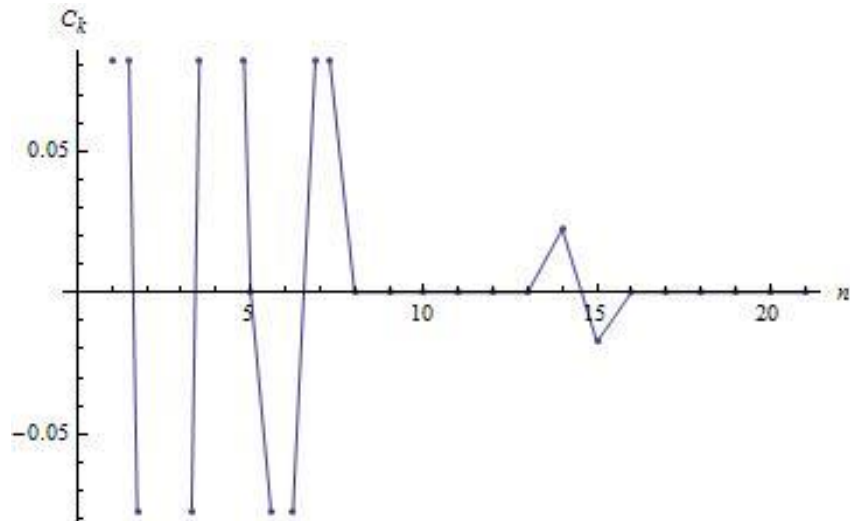
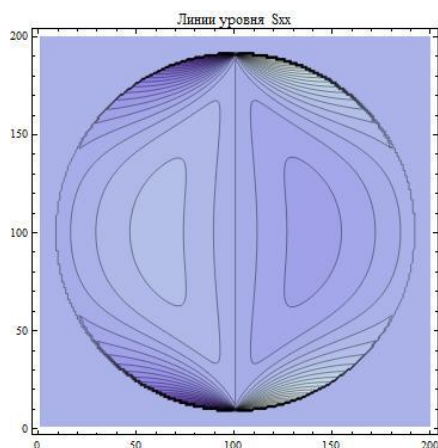


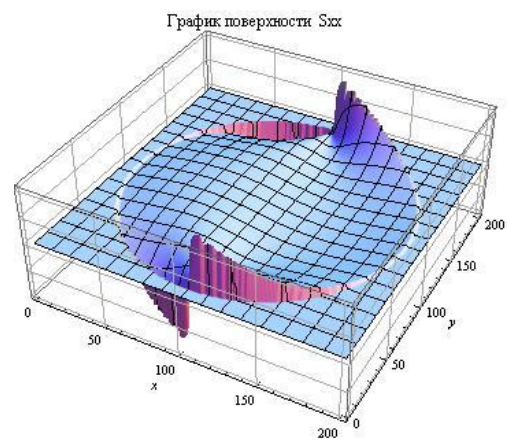
Рисунок 2.23 – Коэффициенты Фурье

Решение дало следующие коэффициенты Фурье (округлено до сотых, приведены ненулевые коэффициенты): $c_1 = 0.41$, $c_2 = -0.26$, $c_3 = -0.28$, $c_4 = 0.43$, $c_5 = 0.41$, $c_6 = -0.13$, $c_7 = 0.11$, $c_{14} = 0.02$, $c_{15} = -0.02$.

Полученное решение имеет аналитический вид, но в силу необозримости полученных компонент вектора перемещения и тензоров напряжений и деформаций, решение будем представлять в виде двумерных графиков механических полей (рис.2.24) и (рис. 2.25).



а)



б)

Рисунок 2.24 – Компонента тензора напряжений σ_{xx} : а) изолиния,

б) двумерный график;

В точках смены граничных условий наблюдается значительный скачок напряжения, что свидетельствует о наличии особенности.

Компонента тензора напряжений σ_{xy} , представленная на рисунке 2.25, внутри области имеет конечные значения, а приближаясь к точкам воздействия, увеличивает свои значения и прослеживается зона ярко выраженной концентрации напряжений.

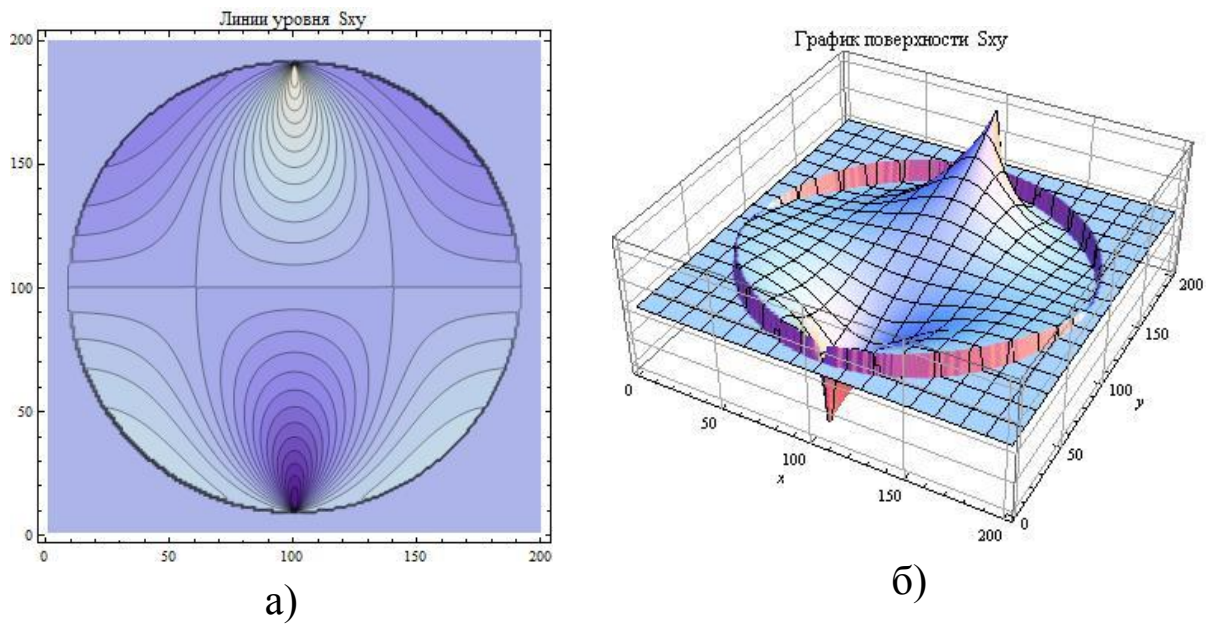


Рисунок 2.25 –Компонента тензора напряжений σ_{xy} : а) изолиния, б) двумерный график;

Для утверждения о численной устойчивости и точности решения, были построены графики восстановленных усилий, где введено обозначение: |||| – заданные значения; ———— – восстановленные значения (рис. 2.26).

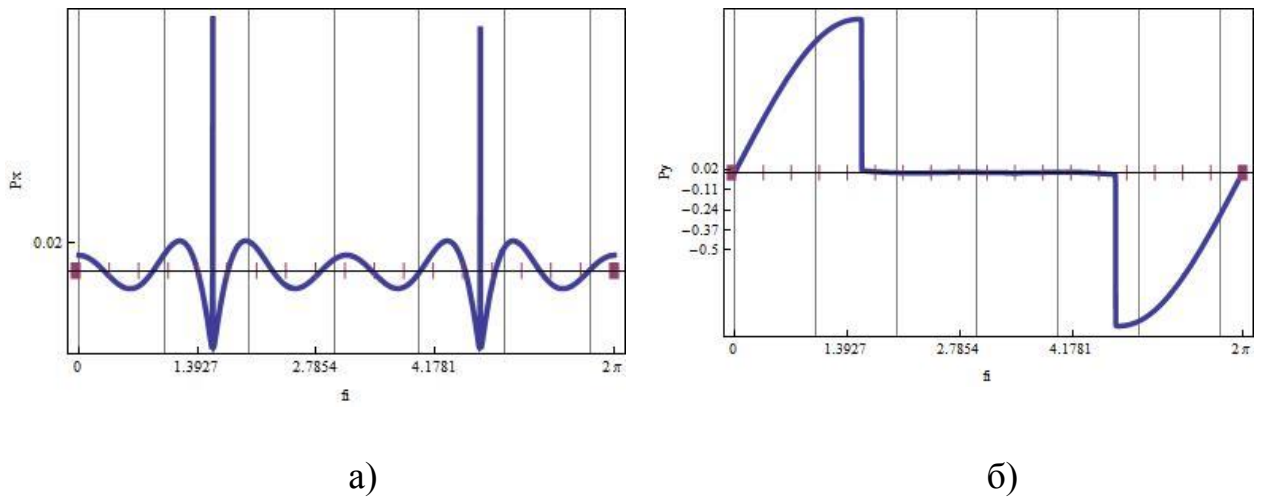


Рисунок 2.26 – Восстановленные усилия: а) – на нагруженной границе; б) – на свободной границе

Графики восстановленных усилий при 21 удержанном коэффициенте ряда Фурье показывают, что полученное решение с учетом специальных решений, с удовлетворительной степенью точности приближает решение к заданным граничным условиям и дает практически точное решение.

Было проведено вычисление суммы Бесселя (2.27), которая является косвенной характеристикой качества полученного решения.

Представим в графической форме сумму Бесселя (рис. 2.26):

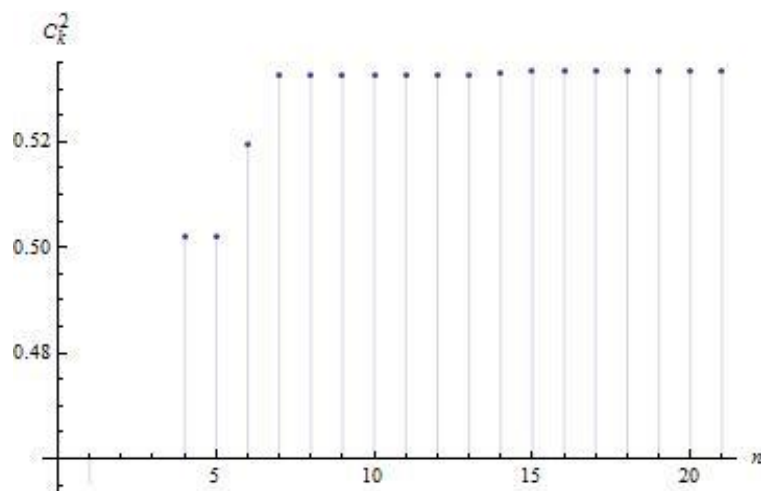


Рисунок 2.26 – Сумма Бесселя

Результаты свидетельствуют о том, что полученное решение является сходящимся: при увеличении числа элементов в базисе. Данный факт является одним из косвенных показателей, характеризующим качество решения.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

1. Проведена классификация особенностей физического характера, приведены основные, выраженные в аналитической форме, решения, определяющие соответствующие особенности, таких как сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, скачок усилия.

2. Разработана методика формирования базиса внутренних состояний с учетом особенностей физического характера, заключающаяся во включении специального решения, «схватывающего» особенность того или иного вида.

3. Выполнены постановки в терминах метода граничных состояний для задачи о сжатии кругового диска сосредоточенными силами; для задачи о сжатии прямоугольными отрезками встречных равномерно-распределенных усилий; для задачи о деформировании диска внецентренными сосредоточенными воздействиями; для задачи о растяжении диска встречными воздействиями, распределенными по окружности;

4. Выполнены расчеты для

- задачи о сжатии кругового диска сосредоточенными силами;
- задачи о сжатии прямоугольными отрезками встречных равномерно-распределенных усилий;
- задачи о деформировании диска внецентренными сосредоточенными воздействиями;
- задачи о растяжении диска воздействиями, распределенными по окружности.

5. Полученные решения имеют аналитическую форму, но в силу необозримости, результаты представлены в виде механических полей: изолиний или двумерных графиков соответствующих компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений, показавшие наличие сингулярности в каждой из задач.

6. Проведена апробация методики включения специального решения в генерирование базиса, полученные результаты, представленные в виде сравнительных графиков восстановленных усилий с заданными граничными условиями, свидетельствуют об эффективности включения специального решения «схватывающего» особенность.

7. Установлено улучшение качества решения и сокращение вычислительных ресурсов с использованием разработанной методики, путем проведения соответствующих сравнений результирующих графиков.

8. Вычислена среднеквадратическая невязка, показавшая, что решение, полученное путем использования методики формирования базиса с учетом специального решения, обладает численной устойчивостью и требуемой точностью.

9. Приведены в аналитической форме полученные коэффициенты Фурье, а также построены графики, установившие, что решения полученные методом граничных состояний являются сходящимися.

10. Вычислены суммы Бесселя, полученные результаты представлены в графической форме, показавшие насыщение суммы Бесселя, что свидетельствует о том, что полученное методом граничных состояний с использованием методики формирования базиса состояний с учетом специальных решений решение достигает приемлемой точности.

ГЛАВА 3. СИНГУЛЯРНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

3.1. Классификация особенностей геометрического типа

В плоских задачах теории упругости особенность геометрического характера представляется как клин, конус, угловая точка. Реже встречаются так называемые точки возврата.

В дифференциальном уравнении с постоянными коэффициентами нужно удерживать лишь главные члены, т.к. остальные не влияют на структуру особенности. В связи с этим, изучение особенностей геометрического характера производится на простейших областях: конусах и клиньях.

Рассматривается клин с углом раствора 2α [45]. Уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta} = 0 \quad (3.1)$$

Решение, которого имеет вид:

$$u(r, \theta) = r^\lambda f(\theta) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(\theta)$. Тогда окончательное решение:

$$u(r, \theta) = r^\lambda (A \cos \lambda \theta + B \sin \lambda \theta) \quad (3.3)$$

При рассмотрении задачи Дирихле предположим равными нулю значения функции на гранях, тогда однородная система примет вид:

$$\begin{aligned} A \cos \lambda \theta + B \sin \lambda \theta &= 0, \\ A \cos \lambda \theta - B \sin \lambda \theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

которая разрешима при условии

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda \theta & \sin \lambda \theta \\ \cos \lambda \theta & -\sin \lambda \theta \end{vmatrix} = 0, \quad (3.5)$$

Полученное уравнение (3.3) будет иметь решение вида $\lambda = \frac{\pi}{2\alpha} n$, при

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Где коэффициенты системы определены следующим образом:

$$\begin{cases} A = 0, B \neq 0, \text{ при } n = 2k \\ A \neq 0, B = 0, \text{ при } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Таким образом, решение однородной задачи Дирихле для клина примет вид:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} A_n r^{\frac{\pi}{2\alpha} n} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} n\theta\right) + \sum_{n=\pm 2, \pm 4, \dots} B_n r^{\frac{\pi}{2\alpha} n} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} n\theta\right) \quad (3.7)$$

Ввиду конечности энергии, необходимо отказаться от членов с отрицательными значениями n . Тогда (3.7) примет вид:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1, 3, \dots} A_n r^{\frac{\pi}{2\alpha} n} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} n\theta\right) + \sum_{n=2, 4, \dots} B_n r^{\frac{\pi}{2\alpha} n} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} n\theta\right) \quad (3.8)$$

Неограниченная в вершине производная будет определяться лишь одним слагаемым

$$A_1 r^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \theta\right), \text{ если } \alpha > \frac{\pi}{2}. \quad (3.9)$$

Исследование задачи Неймана проводится с использованием равенства

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\theta=\pm\alpha} = 0, \text{ что также приводит к (3.5), только с условием:}$$

$$\begin{cases} A \neq 0, B = 0, \text{ при } n = 2k \\ A = 0, B \neq 0, \text{ при } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Тогда неограниченная при подходе к вершине при условии $\alpha > \frac{\pi}{2}$ производная определяется:

$$B_1 r^{\frac{\pi}{2\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} \theta\right) \quad (3.11)$$

Нужно отметить, что появление в уравнении (3.1) других слагаемых меньшего порядка не влияет на характер особенности, что показано в монографии [45].

Следующей особенностью геометрического характера является область с угловой точкой.

Рассматриваются уравнения Ламе в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение будет искажаться в виде произведения функций:

$$u_r(r, \theta) = r^\lambda f(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = r^\lambda g(\theta) \quad (3.13)$$

Подставим (3.12) в (3.11), получим систему дифференциальных уравнений, решение которой будет иметь вид:

$$f = A \cos[(1 + \lambda)\theta] + B \sin[(1 + \lambda)\theta] + C \cos[(1 - \lambda)\theta] + D \sin[(1 - \lambda)\theta], \quad (3.14)$$

$$g = B \cos[(1 + \lambda)\theta] - A \sin[(1 + \lambda)\theta] + \nu_2 D \cos[(1 - \lambda)\theta] - \nu_2 C \sin[(1 - \lambda)\theta],$$

$$\text{где } \nu_2 = \frac{3 + \lambda - 4\nu}{3 - \lambda - 4\nu}.$$

Тогда выражения для смещений и напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} r^{-\lambda} u_r &= A \cos[(1 + \lambda)\theta] + B \sin[(1 + \lambda)\theta] + C \cos[(1 - \lambda)\theta] + D \sin[(1 - \lambda)\theta], \\ r^{-\lambda} u_\theta &= B \cos[(1 + \lambda)\theta] - A \sin[(1 + \lambda)\theta] + \nu_2 D \cos[(1 - \lambda)\theta] - \\ &- \nu_2 C \sin[(1 - \lambda)\theta]; \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mu^{-1} r^{1-\lambda} \sigma_\theta &= -2\lambda A \cos[(1 + \lambda)\theta] - 2\lambda B \sin[(1 + \lambda)\theta] - (1 + \lambda)(1 - \nu_2) C \cos[(1 - \lambda)\theta] - \\ &- (1 + \lambda)(1 - \nu_2) D \sin[(1 - \lambda)\theta], \\ \mu^{-1} r^{1-\lambda} \tau_{r\theta} &= -2\lambda A \sin[(1 + \lambda)\theta] + 2\lambda B \cos[(1 + \lambda)\theta] - (1 - \lambda)(1 - \nu_2) C \sin[(1 - \lambda)\theta] + \\ &+ (1 - \lambda)(1 - \nu_2) D \cos[(1 - \lambda)\theta]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Рассматривая вторую основную задачу, необходимо приравнять нулю выражения (3.15) при $\theta = \pm\alpha$, что приводит к однородной системе уравнений, которая распадается на две системы второго порядка:

$$\begin{aligned} -2\lambda A \cos[(1 + \lambda)\alpha] - (1 + \lambda)(1 - \nu_2) C \cos[(1 - \lambda)\alpha] &= 0, \\ 2\lambda A \sin[(1 + \lambda)\alpha] + (1 - \lambda)(1 - \nu_2) C \sin[(1 - \lambda)\alpha] &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda B \sin[(1 + \lambda)\alpha] + (1 + \lambda)(1 - \nu_2) D \sin[(1 - \lambda)\alpha] &= 0, \\ 2\lambda B \cos[(1 + \lambda)\alpha] + (1 - \lambda)(1 - \nu_2) D \cos[(1 - \lambda)\alpha] &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Условиями наличия нетривиального решения (3.15) являются равенство нулю двух определителей систем (3.16) и (3.17), представленных в виде следующих уравнений:

$$\sin 2\alpha + \frac{1}{\lambda} \sin(2\alpha\lambda) = 0, \quad (3.19)$$

$$\sin 2\alpha - \frac{1}{\lambda} \sin(2\alpha\lambda) = 0. \quad (3.20)$$

При этом для λ , являющегося корнем уравнения (3.18) надо удерживать слагаемые с коэффициентами А и С, при предположении, что $B=D=0$:

$$A = \frac{(1 + \lambda)(\nu_2 - 1) \cos[(1 - \lambda)\alpha]}{2\lambda \cos[(1 + \lambda)\alpha]} C \quad (3.21)$$

А для λ , являющегося корнем уравнения (3.19) надо удерживать слагаемые с коэффициентами В и D, а $A=C=0$, тогда

$$B = \frac{(1 + \lambda)(\nu_2 - 1) \sin[(1 - \lambda)\alpha]}{2\lambda \sin[(1 + \lambda)\alpha]} D \quad (3.22)$$

С учетом вышеизложенного, получим трансцендентное уравнение, определяющее решение для клина в данном предположении:

$$\sin 2\alpha = \pm \lambda \sin(2\alpha) \quad (3.23)$$

В (3.22) могут содержаться комплексные корни.

Выделяют ряд частных случаев:

– задача, в которой на сторонах клина полагаются равными нулю смещения, тогда соответствующее трансцендентное уравнение имеет вид:

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\lambda}{\chi} \sin(2\alpha), \quad (3.24)$$

где $\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$;

– задача, в которой на сторонах клина предполагается равными нулю касательные напряжения и нормальное смещение:

$$\sin 2\alpha = \pm \sin(2\alpha). \quad (3.25)$$

Также рассматриваются различные смешанные условия различного вида, которые комбинируются из вышеизложенных [45].

3.2. Учет специального решения в задаче о нагружении каплевидной области, имеющую клиновидную особенность

Рассматривается задача о воздействии усилия заданного по закону параболы на клин с углом раствора $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3.1 а). Необходимо определить напряженно-деформированное состояние каплевидного тела с клиновидной особенностью.

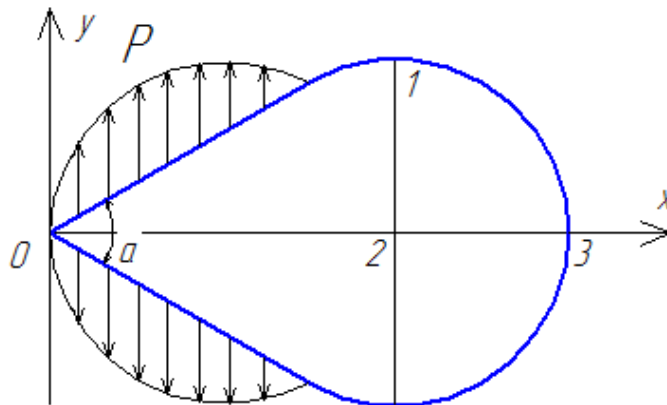


Рисунок 3.1 – Нагружение каплевидной области, имеющую клиновидную особенность

На рисунке 3.2 представлено тело в деформированном состоянии.

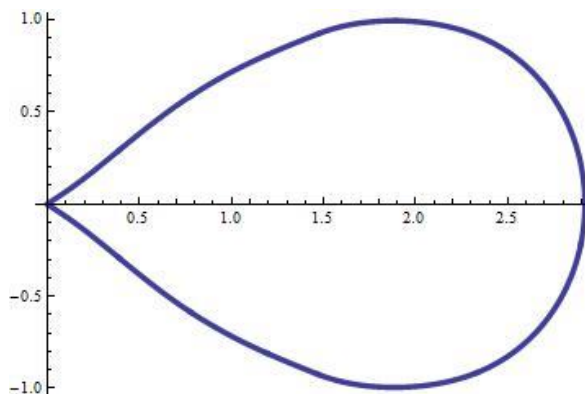


Рисунок 3.2 – Контур тела в деформированном состоянии

Воспользуемся решениями, представленными формулами (3.12), (3.13) и (3.14) для определения соответствующих компонент перемещения:

$$\begin{aligned}
 u_r &= r^{0.795785} (\cos[0.204215 \cdot \theta] + 2.51494 \cos[1.79579 \cdot \theta]), \\
 u_\theta &= r^{0.795785} (-2.32167 \cdot \sin[0.204215 \cdot \theta] - 2.51494 \sin[1.79579 \cdot \theta])
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

После определения компонент перемещения, проводится обратная параметризация и осуществляется переход к декартовой системе координат. Затем используя соотношения Коши, определяются соответствующие компоненты тензора деформации (1.3).

Для нахождения компонент тензора напряжений, воспользуемся законом Гука (1.1).

Полученные значения компонент тензора напряжения тестируем проверкой на удовлетворение условиям равновесия (1.2).

Ввиду необозримости полученных значений компонент тензоров деформаций и напряжений, они представлены в виде механических полей.

Аналитические выражения найденных компонент вектора перемещения, тензора деформаций и тензора напряжений удовлетворяют линейным соотношениям теории упругости (1.1)-(1.3) и могут быть включены в формируемый базис в качестве первых элементов.

На рисунке 3.2 представлена компонента вектора перемещений, полученная в ходе решения в виде механических полей.

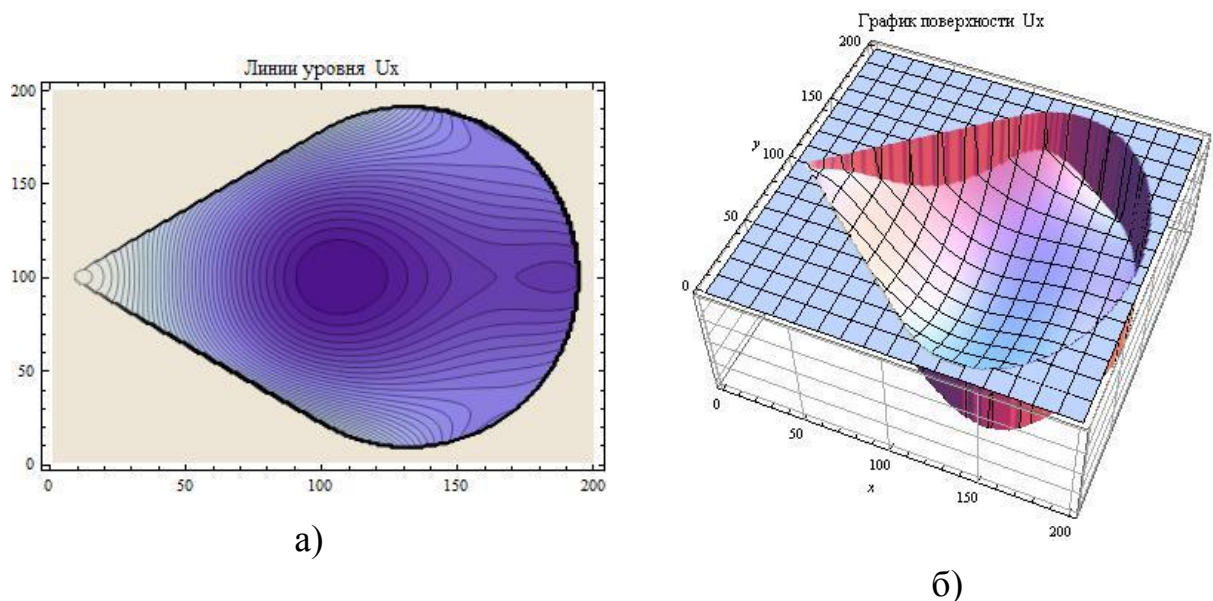


Рисунок 3.2 – Компонента вектора перемещений: а) изолиния u_x ; б) двумерный график u_x

На рисунке 3.3 изображены изолинии и двумерные графики компоненты вектора перемещений u_y ,

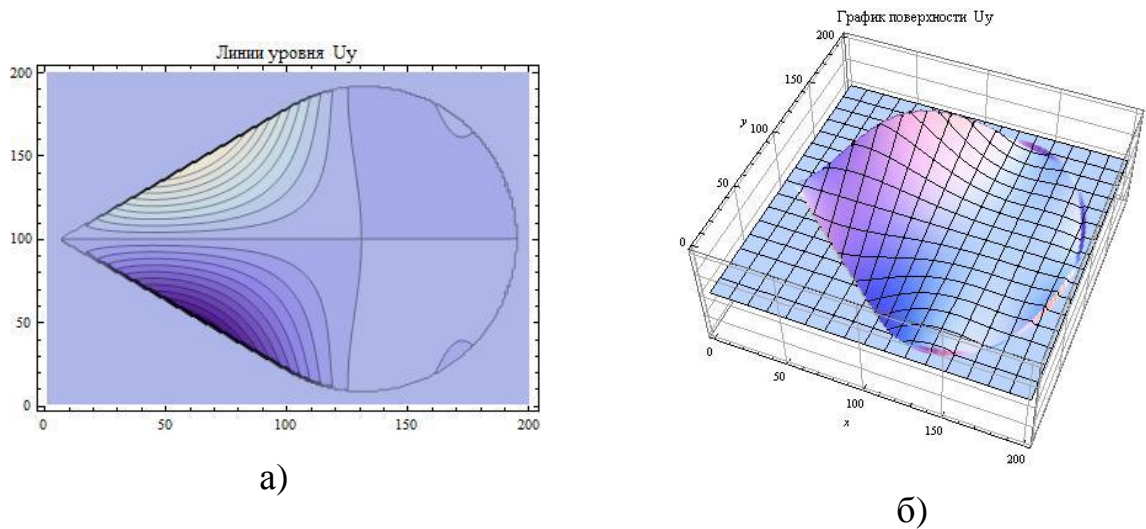


Рисунок 3.3 – Компоненты вектора перемещений: а) изолиния u_y ;
 б) двумерный график u_y

Как видно из Рисунка 3.3, перемещение u_y удовлетворяет принципу Сен-Венана; перемещения вдоль оси Oy в правой части области удаленной от действия нагрузки, близки к нулю, о чем свидетельствует совпадение цветов фона этой области и за ее пределами.

В соответствии с принципом Сен-Венана [18] система уравновешенных сил, которая воздействует на некоторую область линейного изотропного тела, побуждает появление в нём неравномерного распределения напряжений.

Однако такое распределение напряжений по мере удаления от области воздействия будет достаточно быстро уменьшаться, что и происходит при распределении компоненты напряжения σ_{yy} (рис. 3.4 д и е). Касательное напряжение σ_{xy} распределяется традиционным образом при растяжении образца (рис. 3.4 в и г). Компонента напряжения σ_{xx} имеет наибольшие значения в наинизшей и наивысшей точках области (рис. 3.4 а и б).

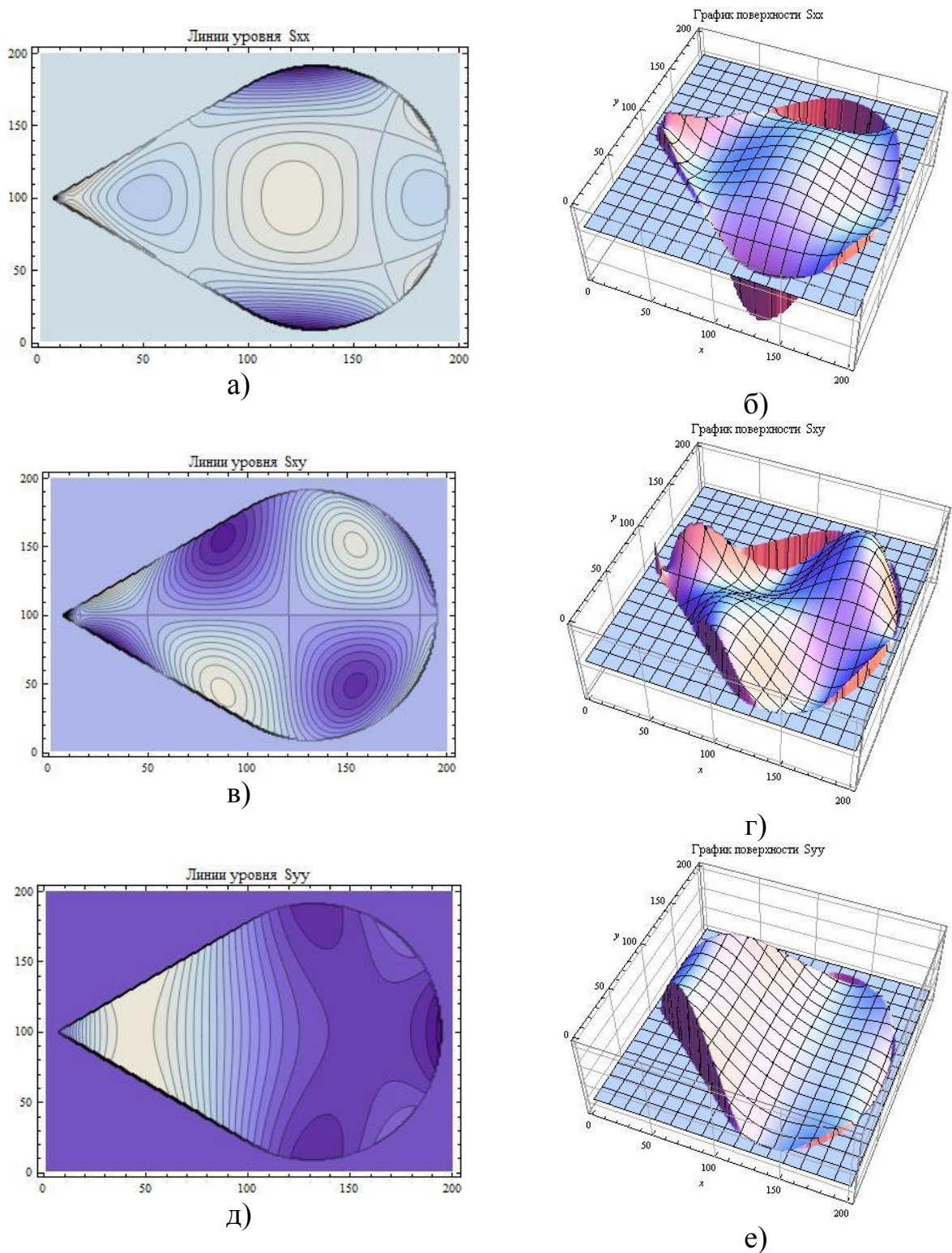


Рисунок 3.4 – Компоненты тензора напряжений: а) изолиния σ_{xx} ; б) двумерный график, σ_{xx} в) изолиния σ_{xy} , г) двумерный график σ_{xy} , д) изолиния σ_{yy} , е) двумерный график σ_{yy}

Полученные в ходе решения данной задачи методом граничных состояний коэффициенты Фурье представим в графическом виде на рисунке 3.5.

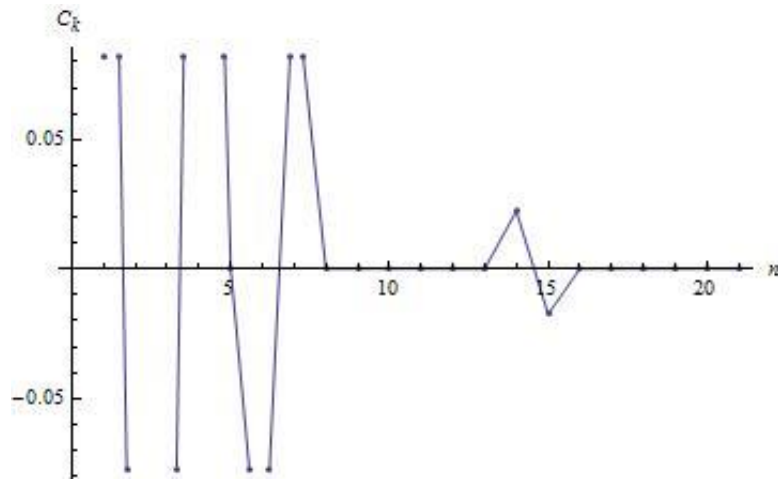


Рисунок 3.5 – Коэффициенты Фурье

О качестве решения можно судить по насыщению суммы Бесселя, посчитанной по формуле (2.26) и изображенной на рисунке 3.6

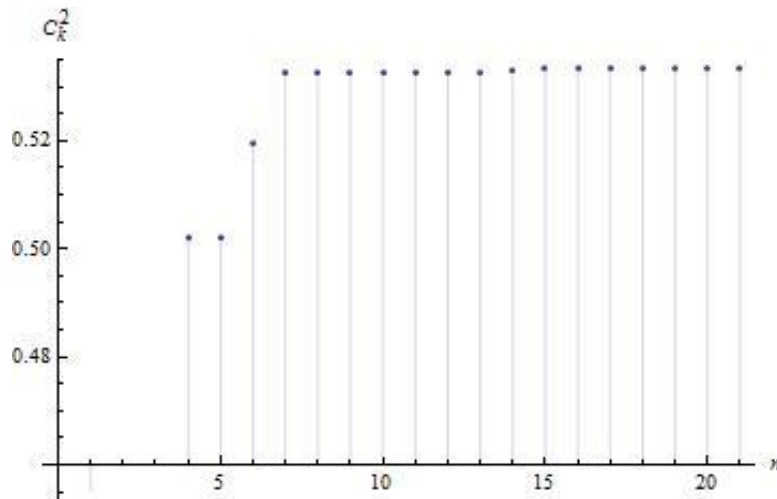
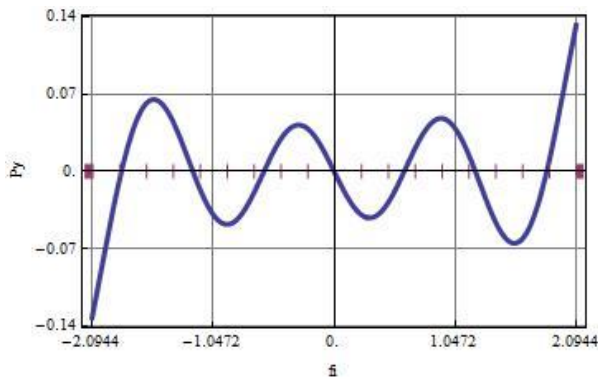


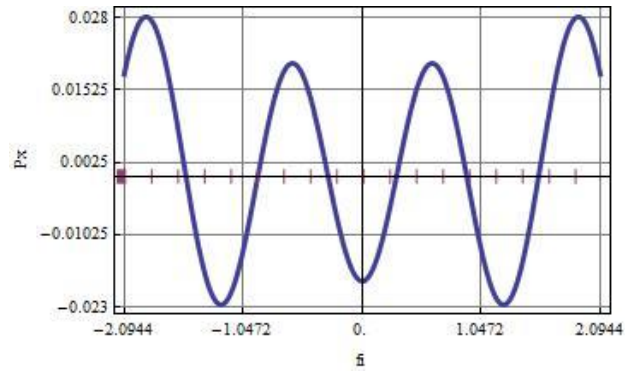
Рисунок 3.6 – Сумма Бесселя

Таким образом, из данного графика можно сделать вывод о насыщении суммы Бесселя, начиная с седьмого базисного элемента, что свидетельствует о приемлемом качестве полученного решения даже при использовании базиса с малой длиной.

Так как определяющие соотношения удовлетворяются тождественно вплоть до границы, то проведем сравнительный анализ полученных методом граничных состояний с использованием методики формирования базиса путем учета специального решения восстановленных компонент усилия с заданными граничными условиями (рис 3.7).



а)

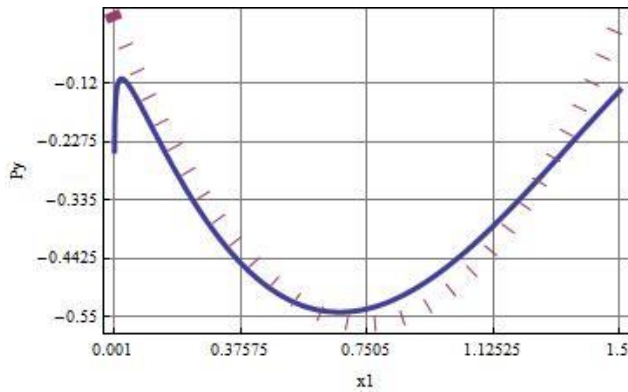


б)

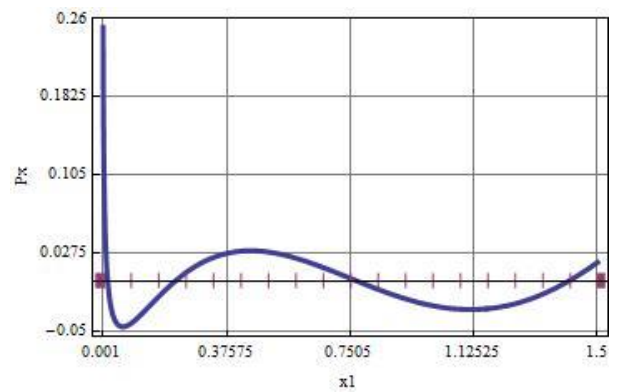
Рисунок 3.7 – Восстановленные усилия на границе S_3

Сравнение позволяет говорить, что на свободной границе отклонение компоненты усилия p_x не превышает по абсолютной величине 0,02, а отклонение усилия p_y всюду в области составляет 0,07, но приближаясь к границе, на которой распределена нагрузка, увеличиваются соответствующие значения.

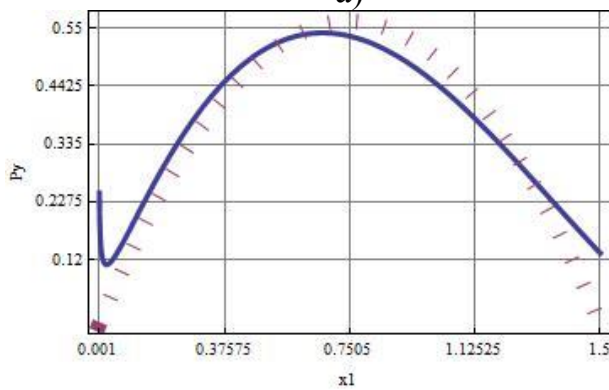
Представим восстановленные усилия на границе S_1 и S_2 на рисунке 3.8



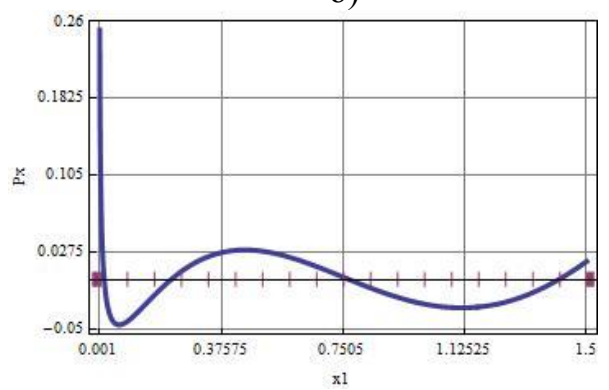
а)



б)



в)



г)

Рисунок 3. 8 – Восстановленные усилия на границе S_1 и S_2

Анализ представленных рисунков позволяет говорить о приемлемости полученного решения.

3.3. Учет специального решения в задаче о сосредоточенном воздействии на область, имеющую клиновидную особенность

Рассматривается изотропное, упругое клиновидное тело, на которое действуют две сжимающие сосредоточенные единичные силы, направленные вдоль оси Ox (упругие постоянные примем $G = 1$, $\nu = 0,25$) (рис. 3.9). Необходимо определить напряженно-деформированное состояние.

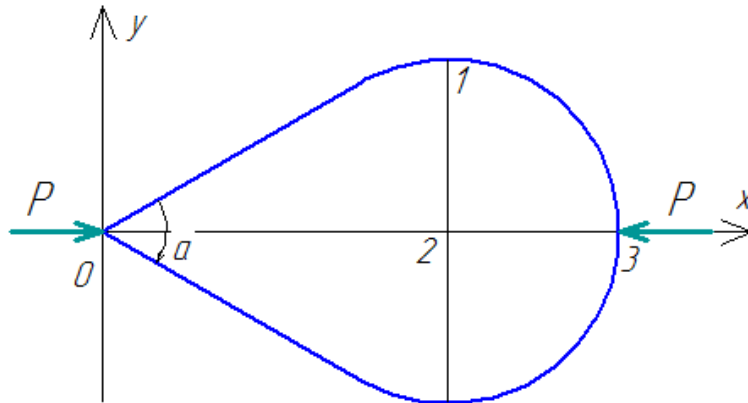


Рисунок 3.9 – Воздействие сосредоточенных сил на тело, имеющее клиновидную особенность

При формировании базиса вида (2.24) были учтены три особые точки, в которых проявляются две особенности: физического характера (сосредоточенное воздействие в двух точках) и одна геометрического характера (клин).

Таким образом, при формировании базиса используется общее решение Колосова-Мусхелишвили (2.21), а также решение в перемещениях для клина (3.14) и решение для сосредоточенного воздействия, выраженное также в перемещениях (2.25).

Нужно отметить, что исходный базис состоит из элементов, содержащих: 2 специальных элемента, определяемые сосредоточенными силами, направленными вдоль оси Ox , один специальный элемент, являющийся асимптотикой решения задачи о клине, а также 17 традиционных элементов, участвующих в построении базиса и общее

количество элементов составило 20. Если не использовать специальные решения, то для решения подобной задачи необходим отрезок базиса намного больший по длине.

Точки воздействия сосредоточенных усилий отодвинуты от границы из-за того, что в противном случае интегралы в скалярном произведении не существуют в смысле Лебега, хотя существуют в смысле главного значения по Коши.

Наиболее показательные двумерные графики с линиями уровня представлены на рисунке 3.10.

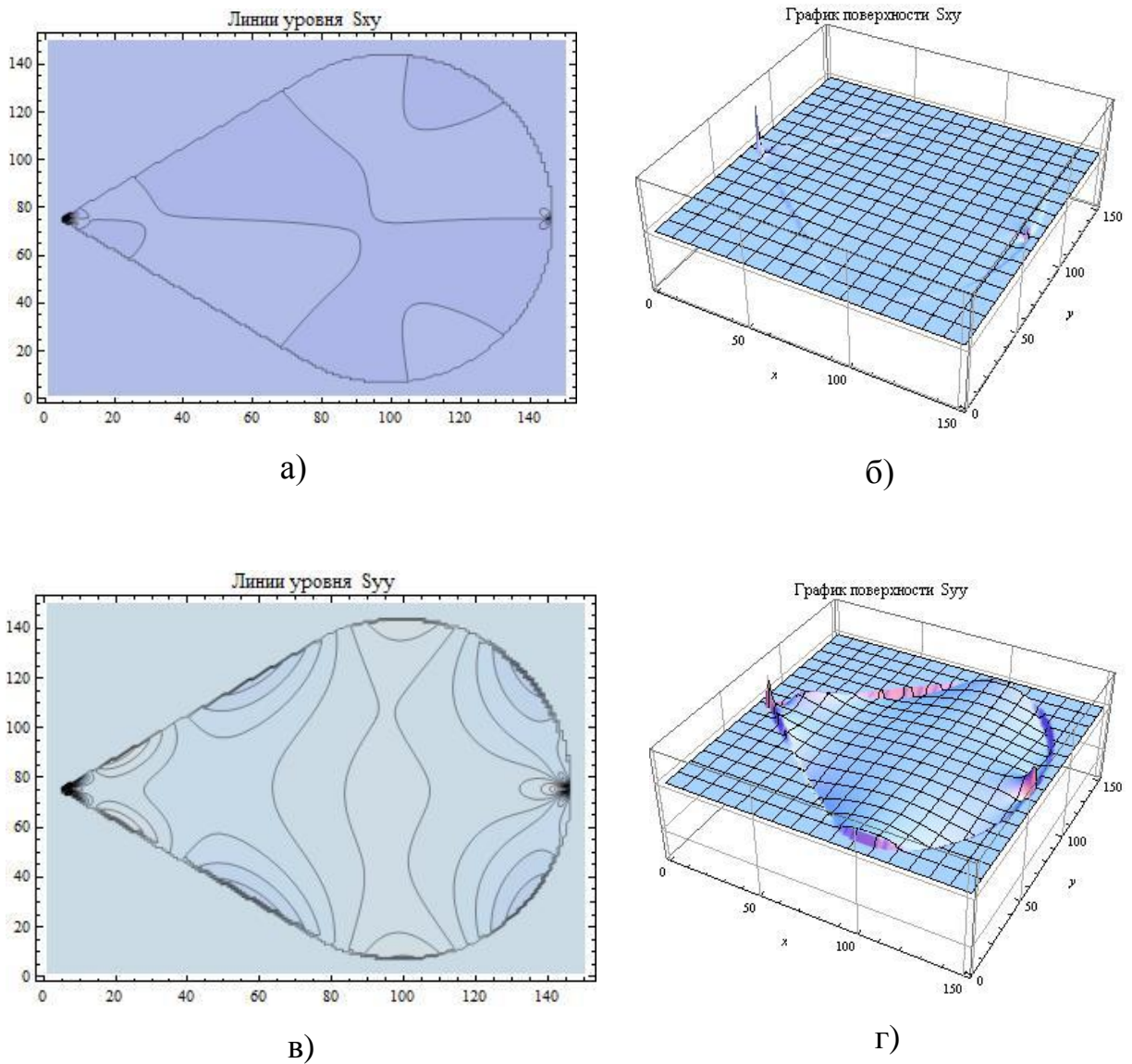


Рисунок 3.11 – Компоненты тензора напряжений

В ходе решения были получены следующие коэффициенты Фурье (представим ненулевые):

$$c_1 = 0,409919, c_2 = -0,264649, c_3 = -0,284813, c_4 = 0,4277, c_5 = 0,409919, \\ c_6 = -0,131554, c_7 = 0,114495, c_8 = 0,0223205, c_9 = -0,0174492.$$

Кроме того, для точности данных выводов, проведем вычисление суммы Бесселя, которая является косвенной характеристикой качества полученного решения с помощью формулы:

$$\sum_k c_k^2 \leq \|\xi\|^2, \quad (3.27)$$

где c_k – полученные в ходе решения коэффициенты Фурье.

Представим в графической форме сумму Бесселя (рис. 3.12):

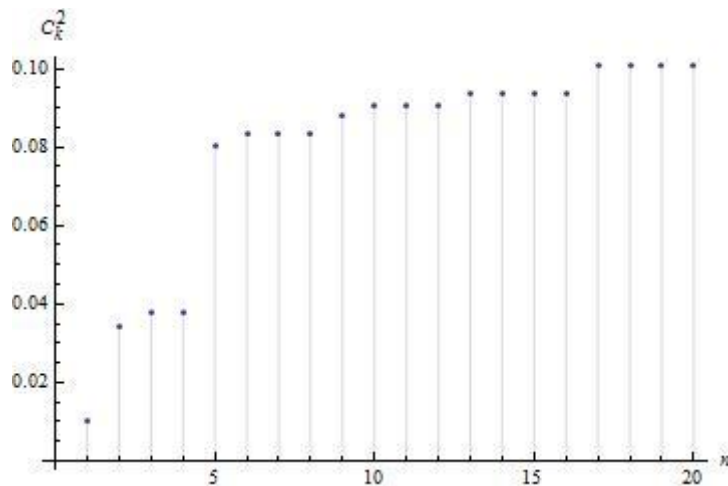


Рисунок 3.12 – Насыщение суммы Бесселя

Результаты свидетельствуют о том, что полученное решение является сходящимся: при увеличении числа элементов в базисе. Данный факт является одним из косвенных показателей, характеризующим качество решения.

3.4. Учет специального решения в задаче о равномерном воздействии на многосвязную область, имеющую клиновидную особенности

Рассматривается изотропное упругое клиновидное тело с круговой полостью (Рис. 3.13). На боковой поверхности задаются растягивающие

усилия, заданные по параболическому закону. Необходимо найти напряженно-деформированное состояние тела при заданных начальных и граничных условиях.

Упругие постоянные принимаем в безразмерном виде: модуль сдвига $\mu = 1$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

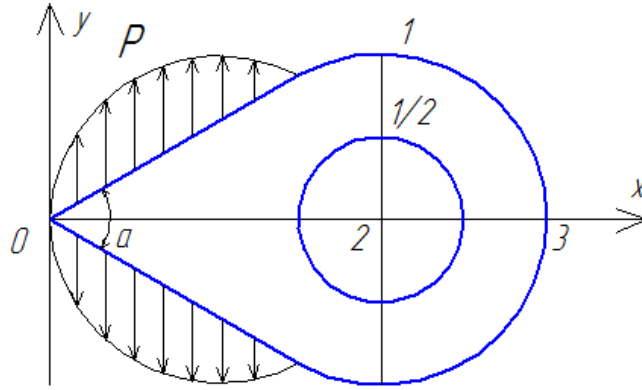


Рисунок 3.13 – Граничные условия для клинообразного тела с полостью

Для наглядности приведем контур тела в деформированном состоянии в гипертрофированном виде. На рисунке 3.14 представлен контур тела в деформированном состоянии.

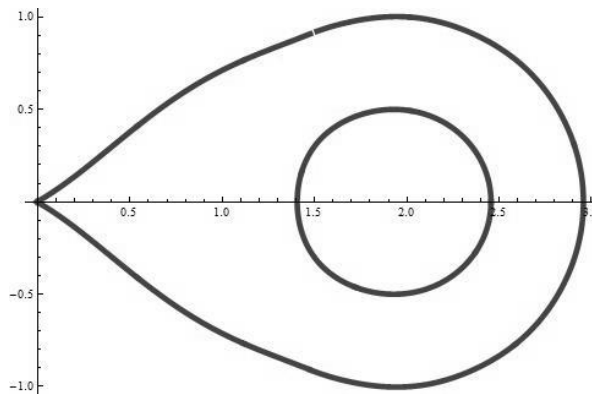


Рисунок 3.14 – Контур тела в деформированном состоянии

Для решения данной задачи вводится понятие многосвязности области и соответствующее решение.

Пусть определен на каждом внутреннем контуре многосвязной области главный вектор приложенных сил $J_k = X_k + iY_k$ (рис.3.15) [42].

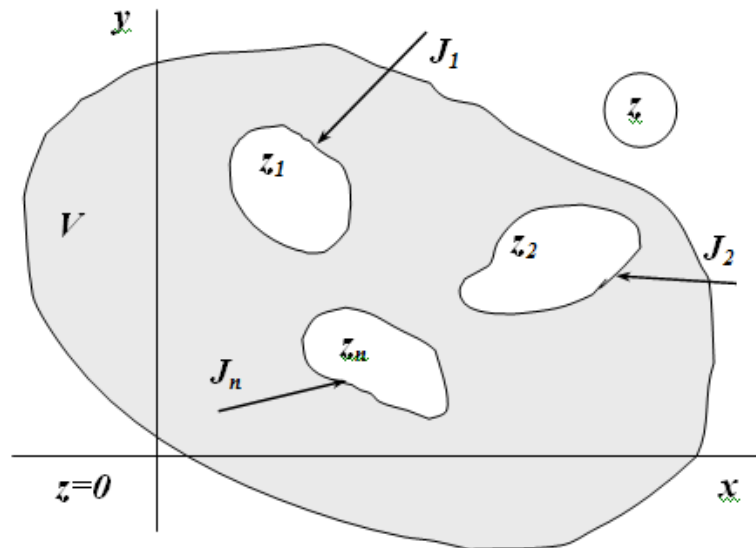


Рисунок 3.15 – Многосвязная область

Представление для функций Колосова – Мусхелишвили следующее [42]:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+k)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \ln(z - z_k) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j; \\ \psi(z) &= -\frac{k}{2\pi(1+k)} \sum_{k=1}^n (X_k - iY_k) \ln(z - z_k) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j,\end{aligned}\quad (3.28)$$

где X_k и Y_k – составляющие главного вектора внешних усилий, действующих на внутреннем контуре k -ого отверстия. Если $J_k \neq 0$, то система не уравновешена на контуре. Пусть совокупность векторов J_k составляют уравновешенную систему, т.е. $\sum_k J_k = 0$

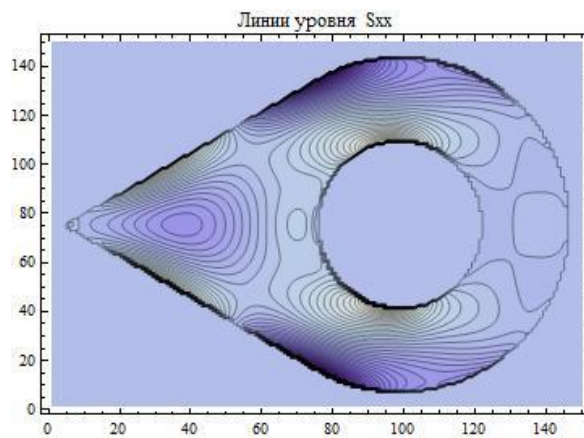
Для многосвязной области регулярный базис имеет вид:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{pmatrix} \in & \left\{ \begin{pmatrix} z^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz^k \end{pmatrix}, \dots \right. \\ & \dots, \begin{pmatrix} (z - z_1)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (z - z_1)^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i(z - z_1)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i(z - z_1)^{-1} \end{pmatrix}, \dots, \\ & \left. \dots, \begin{pmatrix} (z - z_n)^{-k} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (z - z_n)^{-k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i(z - z_n)^{-k} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i(z - z_n)^{-k} \end{pmatrix} \right\}, k = 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (3.29)$$

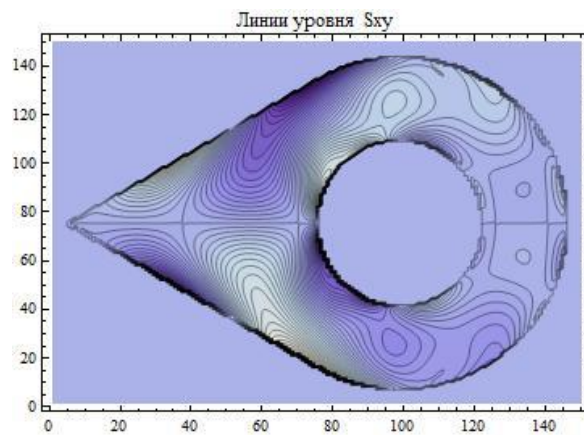
Применим методику формирования базиса с учетом специального решения, который примет вид (3.30):

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{pmatrix} \in \\ & \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(z, z_0) \\ \psi(z, z_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ iz^k \end{pmatrix}, \dots \right. \\ & \quad \dots, \begin{pmatrix} (z - z_1)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (z - z_1)^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i(z - z_1)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i(z - z_1)^{-1} \end{pmatrix}, \dots, \\ & \quad \left. \dots, \begin{pmatrix} (z - z_n)^{-k} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (z - z_n)^{-k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i(z - z_n)^{-k} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i(z - z_n)^{-k} \end{pmatrix} \right\}, k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.30)$$

На рисунке 3.16 приведены изолинии компонент тензора напряжений.



а)



б)

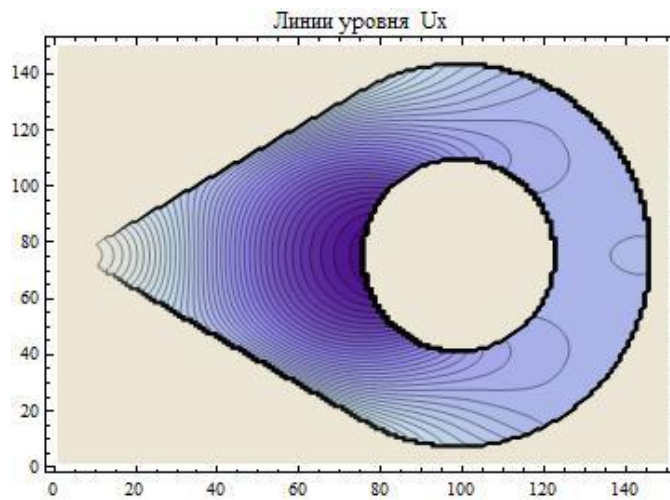
Рисунок 3.16 – Изолинии: а)– изолинии компоненты напряжения σ_x ;

б) – изолинии компоненты напряжения σ_{xy} .

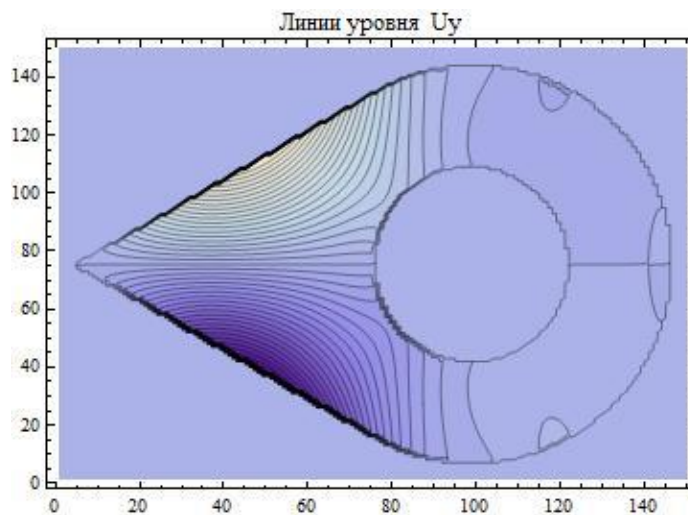
Таким образом, при формировании базиса вида (3.30) необходимо включить специальное решение, определяемое (3.14). Следует отметить,

решение данной задачи требует использование достаточно "длинного" базиса внутренних состояний (до 120 элементов).

На рисунке 3.17 приведены изолинии компонент вектора перемещений.



а)



б)

Рисунок 3.17 – Изолинии: а) – компоненты вектора перемещения u_x ,

б) – компоненты вектора перемещения u_y

Составляющая перемещения u_y удовлетворяет принципу Сен-Венана. Круговое отверстие вносит качественный и количественный вклад в распределение напряжений по области тела.

На рисунке 3.18 изображены графики сопоставления полученных методом граничных состояний усилий с заданными граничными условиями. Граница S_4 является контуром полости внутри тела.

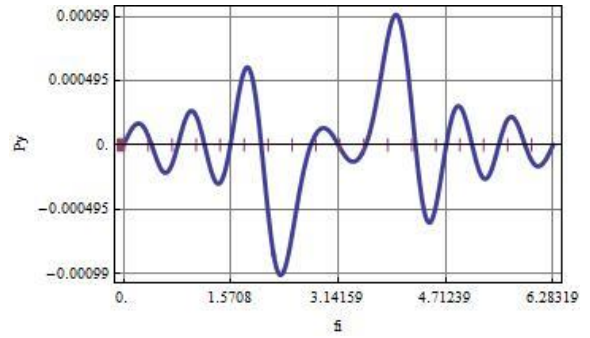
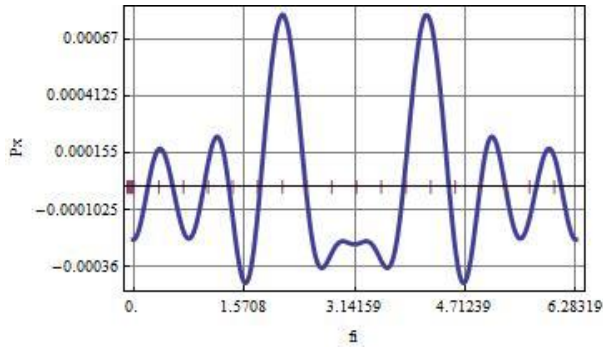
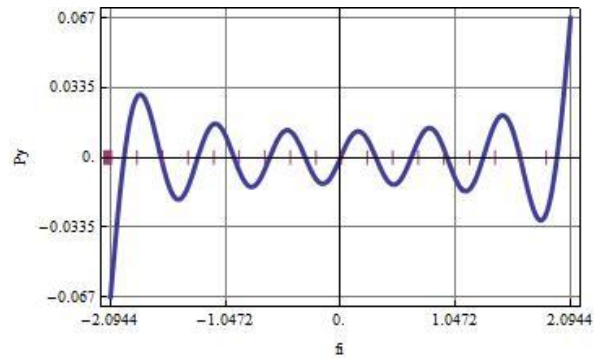
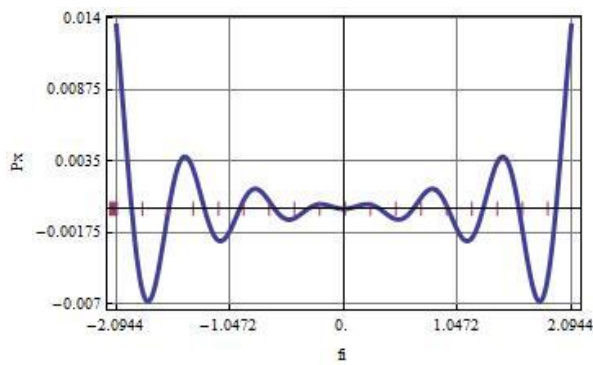
S_4  S_2 

Рисунок 3.18 – Граничные условия для сегментов S_4 и S_2

На рисунках 3.18 и 3.19 представлены восстановленные в ходе решения усилия, где $| \quad | \quad |$ – заданные значения; — – восстановленные значения.

На рисунке 3.19 представлена полная граница S_3

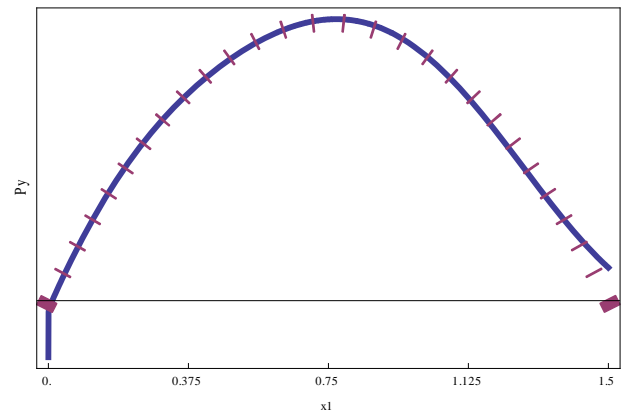
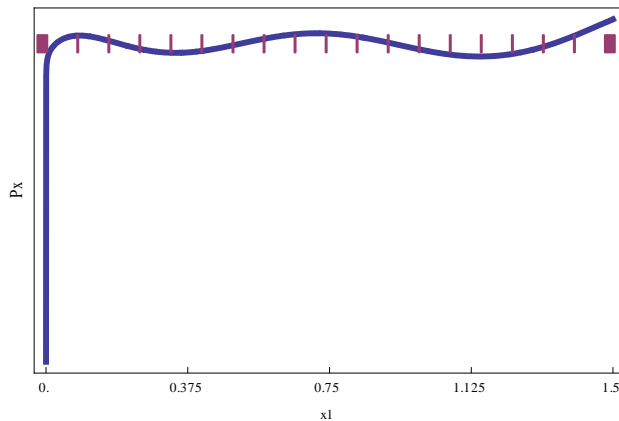


Рисунок 3.19 – Компоненты восстановленных усилий на границе S_3

Также для сравнения приведены восстановленные в ходе решения компоненты усилия на границе S_3 с отступом от вершины клина на 0,0001 (рис. 3.20).

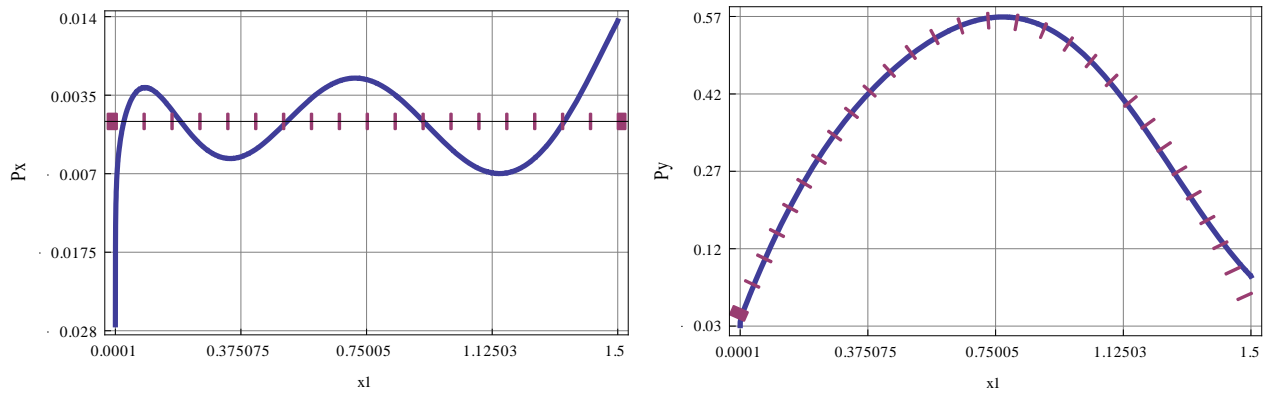


Рисунок 3.20 – Компоненты восстановленных усилий на границе S_3
(с отступом от вершины на 10^{-4})

Визуализация результатов показала, что усилия при приближении к точке геометрической сингулярности (клин) стремятся к граничным в этой точке, в нашем случае к нулю, а не осциллируют. Осцилляция наблюдается в самой точке $(0, 0)$, что естественно, так как предел $1/r$ при стремлении последнего к нулю, равен бесконечности (рис.3.20).

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3

1. Проведена классификация особенностей геометрического характера, приведены основные, представленные в аналитической форме решения.
2. Разработана методика формирования базиса внутренних состояний, заключающаяся во включении на этапе генерирования базиса, специального решения, «схватывающего» особенность геометрического характера.
3. Проведена апробация методики включения специального решения «схватывающего» особенность геометрического характера в генерирование базиса.
4. Реализованы алгоритмы для решения многосвязной области, содержащей геометрическую особенность. Предложен вид базиса внутренних состояний с учетом специального решения.
5. Выполнены постановки в терминах граничных состояний для

задач о нагружении каплевидной области, имеющей клиновидную особенность; о сосредоточенном воздействии на область, имеющей клиновидную особенность; о равномерном воздействии на многосвязную область, имеющую клиновидную особенность.

6. Произведены расчеты методом граничных состояний с учетом специального решения в

– задаче о нагружении каплевидной области, имеющей клиновидную особенность;

– задаче о сосредоточенном воздействии на область, имеющей клиновидную особенность;

– задаче о равномерном воздействии на многосвязную область, имеющую клиновидную особенность.

7. Полученные результаты, представлены в виде механических полей компонент вектора перемещений, тензора деформаций и тензора напряжений.

8. Установлено улучшение качества решения и сокращение вычислительных ресурсов с использованием разработанной методики, путем проведения соответствующих сравнений графиков полученных граничных усилий с заданными граничными условиями. Полученные результаты свидетельствуют о возможности применения предложенной методики в силу того, что полученные решения обладают приемлемой точностью.

9. Вычислена сумма Бесселя, показавшая, что решение, полученное путем использования методики формирования базиса с учетом специального решения, обладает численной устойчивостью и требуемой точностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе

1. Развита метод граничных состояний на двумерные задачи теории упругости однородной, изотропной среды с физическими и геометрическими особенностями, а также с многополостностью.

2. Проведена классификация особенностей физического (сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, скачок усилия, излом усилия) и геометрического (клин, конус, угловая точка, точки возврата) характера; приведены, представленные в аналитической форме, основные решения, а также выделены главные асимптотики сингулярных решений.

3. Разработана методика формирования базиса внутреннего состояния с включением специального элемента, «схватывающего» особенность физического или геометрического характера в структуру базиса. Наработаны эффективные алгоритмы назначения базисов.

4. Проведен сравнительный анализ решения задач, содержащей особенность (на примере скачка поверхностных усилий) с использованием регулярного базиса и с использованием методики формирования базиса с учетом специального решения. Установлено, что при использовании предложенной в диссертационной работе методики, значительно сокращаются вычислительные ресурсы, а также повышается точность решения.

5. Выполнены постановки в терминах метода граничных состояний для двумерных задач теории упругости однородного изотропного тела с физическими и геометрическими особенностями (плоская задача под воздействием осевых и внецентренных сосредоточенных сил; скачок усилия; плоское тело клиновидной формы под воздействием равномерно-распределенной нагрузки, плоское тело клиновидной формы под воздействием сосредоточенных сил; для тел каплевидной формы с полостью под воздействием равномерно распределенной нагрузки).

6. Выполнены расчеты для задач теории упругости с физическими

особенностями с учетом специального решения в задачах: сжатие встречными равномерно-распределенными по контуру усилиями, сжатие кругового диска сосредоточенными силами, сжатии диска встречными воздействиями, распределенными по полуокружности.

7. Произведены расчеты для задач теории упругости с геометрическими особенностями с учетом специального решения в задачах: нагружения каплевидной плоской области, имеющей клиновидную область, сосредоточенного воздействия на область, имеющую клиновидную область, а также равномерное воздействие на многосвязную область, имеющую клиновидную область.

8. Установлено, что определяющие соотношения удовлетворяются тождественно, показано насыщение суммы Бесселя, что говорит о качественно верном решении

Отметим некоторые ближайшие перспективы развития метода граничных состояний с использованием методики формирования базиса состояний среды с учетом специального решения:

- решение плоских задач теории упругости, в которых происходит смена контакта внутри области;
- разработка методологии учета особенностей в пространственных задачах математической физики;
- исследования, посвященные усложнению моделей на предмет учёта анизотропии тел, а также рассмотрение термодинамических задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, В.М. О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной в плане формы [Текст] /В.М. Александров, В.А. Бабешко В.А // ПММ. 1972. Т. 36. С. 88-93.
2. Бабешко, В.А. К определению особенности поля напряжений в окрестности вершин упругих многогранников. [Текст] /В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова// Кубанский гос.ун-т. Краснодар, 1988. 21с.
3. Бабешко, В.А. Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах [Текст] / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова // ДАН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 289-294.
4. Барсуков, С.А. Сингулярность напряжений в угловых точках фронта трещины, находящейся на границе раздела двух сред. [Текст] /С.А. Барсуков, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова // МТТ. 2002. №.2. С. 77-85.
5. Боджи, Д.Б. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединений вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. [Текст] /Д.Б. Боджи// Прикладная механика. Труды Американского общества инженеров-механиков. 1971. №.2. С.87-96.
6. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. [Текст] /Н.Н. Бухгольц – М.: Наука, 1969. –332 с.
7. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике. [Текст] /В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. –320 с.
8. Ворович, И.И. О поведении решений особых краевых задач теории упругости в окрестности особых точек границы. [Текст] /И.И. Ворович // Тез.докл. III Всесоюз. Съезда по теорет. к прикл. механике. 1968. С.80.
9. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости. [Текст] /И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с
10. Ворович, И.И. Динамические смешанные задачи теории

упругости для неклассических областей. [Текст] /И.И. Ворович, В.А. Бабешко.– М.: Наука, 1979. – 320 с.

11. Вреббия, К. С. Применение метода граничных элементов в технике. [Текст] /К. Вреббия, С. Уокер. – М.: Мир, 1982. – 218 с.

12. Глушков, Е.В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости: учеб. пособие. [Текст] /Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова. – Кубанский госуниверситет, Краснодар, 1990. – 72 с.

13. Глушков, Е.В. Об особенностях поля напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины. [Текст] /Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова// Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. 1992. № 4. С. 82-86.

14. Глушков, Е.В. Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на двумерный график. [Текст] /Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, О.Н. Лапина// М.: Изв. РАН. Мех. твердого тела. 1998. № 5. С. 146-153.

15. Глушкова, Н.В. Сингулярность напряжений и многогранных угловых точках упругих разномодульных соединений. [Текст] /Н.В. Глушкова, Е.В. Глушков, П Хофф П.// М.: ДАН. 2000. Т. 370. №.2. С.181-185.

16. Глушкова, Н.В. Асимптотическое представление термоупругих напряжений в угловых точках разномодульных соединений [Текст] /Н.В. Глушкова// Изв. РАН. Мех. твердого тела. 1998. № 2. С. 69-77.

17. Гольдштейн, Р.В. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости [Текст] /Р.В. Гольдштейн, И.С. Клейн, Г.И. Эскин // Препринт 33. ИПМ АН СССР. М. 1973. 55 с.

18. Горшков, А.Г. Соппротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. [Текст] /А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.

19. Денисюк, И.Т. Напряжения вблизи конической точки поверхности главаа сред. [Текст]/ И.Т. Денисюк //М.: Изв. РАН. МТТ. №.3 С.

68-77.

20. Дьяконов, М.Б. Сдвиговые волны в упругом полубесконечном слое с разрезами [Текст]/ М.Б. Дьяконов, Ю.А. Устинов //М.: Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 3. С. 421-426.

21. Захарова, С.В. Решение смешанной задачи теории упругости для полуполосы [Текст]/ С.В. Захарова, С.П. Пельц // М.: Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 5. С. 1077-1081.

22. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст]/ О. Зенкевич, К. Морган //М.: Мир, 1986. 318 с.

23. Иванычев, Д.А. Решение плоских задач анизотропной упругости методом граничных состояний / Д.А. Иванычев, В.Б. Пеньков// Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – Липецк, ЛГТУ. – №2 (20) – 2010. – С.31–35.

24. Иванычев, Д.А. Решение задач анизотропной упругости для многосвязной плоской области методом граничных состояний / Д.А. Иванычев// Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – Липецк, ЛГТУ. – №1 –2014. С.19-26.

25. Иванычев, Д.А. Решение обобщенной задачи Сен-Венана для полых анизотропных стержней /Д.А. Иванычев //Наука и бизнес: пути развития. 2014. № 5 (35). С. 66-69.

26. Иванычев, Д.А. Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для анизотропных тел / Д.А. Иванычев, О.П. Бузина// Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – Липецк, ЛГТУ. – №4 (26) – 2011. – С.25–29.

27. Канторович, Л.В. Функциональный анализ. [Текст] /Л.В. Канторович, Г.П. Акилов // М.: Наука, 1977. 744 с.

28. Капцов, А.В. Решение динамических задач об эллиптической трещине в упругом пространстве с помощью аппроксимаций Паде [Текст] /А.В. Капцов, Е.И. Шифрин// М.: ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 511-519.

29. Кондратьев, В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. [Текст] /В.А. Кондратьев// Тр. ММО.1967. Т.16. С.209-292.
30. Купрадзе, В.Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. [Текст] /В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе// М.: Наука, 1976. 663 с.
31. Лущик, О.Н. Сингулярные конечные элементы. Обзор и классификация [Текст] /О.Н. Лущик// Изв. РАН. МТТ. 2000. №.2. С. 103-114.
32. Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости. [Текст] /А.И. Лурье// М.:Гостехиздат, 1955. 492 с.
33. Ляв, А. Математическая теория упругости. [Текст] /А. Ляв// М., Л.: ОНТИ, 1935.— 674 с
34. Мазья, В.Г. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра [Текст] /В.Г. Мазья, Б.А. Пламеневский// ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 1.
35. Матвеевко, В.П. Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел. [Текст] /В.П. Матвеевко// М.: Изв. РАН. МТТ. 1995. №.5. С.71-77.
36. Матвеевко, В.П. Исследование сингулярности напряжений в вершине эллиптического конуса [Текст] /В.П. Матвеевко, Т.О. Накарякова, П.В. Севодина, И.И. Шардакова // ДАН. 2006. Т. 411, №.3, С. 326-329.
37. Матвеевко, В.П., Численный анализ сингулярности напряжений в вершине трехгранного упругого угла. [Текст] /В.П. Матвеевко, С.Г. Минакова// Механика и прикладная математика. Тула. 1988. С.38-42.
38. Михайлов, С.Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам. [Текст] /С.Е. Михайлов// Изв. Ан СССР. МТТ. 1979. №.5 С. 103-110.
39. Михлин, С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. [Текст]

/С.Г. Михлин// М.-Л.: Гостехиздат, 1947. - 304 с.

40. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике. [Текст] /С.Г. Михлин// М.: Наука, 1970. 512 с.

41. Мовчан, Н.В. Асимптотика показателей сингулярностей для угловых в плане трещин. [Текст] /Н.В. Мовчан, С.А. Назаров// Вестник ЛГУ. 1990. Сер. 1. Вып. 3. С. 34-38.

42. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. [Текст] /Н.И. Мухелишвили// М.: Наука, 1966. 708с.

43. Панасюк, В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочек [Текст] /В. В. Панасюк, М. М.П, Саврук, А.П. Дацышин //, "Наукова думка", Киев, 1976, 443с.

44. Панасюк, В.В. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями [Текст] /В. В. Панасюк, М. М. Стадник, В. П. Силованюк// АН УССР, Физ.-мех. ин-т им. Г. В. Карпенко. - К. : Наукова думка, 1986. - 216 с.

45. Партон, В.З. Методы математической теории упругости. [Текст] /В.З. Партон, П.И. Перлин// М.: Наука, 1981. 688 с.

46. Партон, В.З. Интегральные уравнения теории упругости. [Текст] /В.З. Партон, П.И. Перлин// М.: Наука, 1977. 312 с

47. Пеньков, В. Б. Развитие метода граничных состояний на класс задач термоупругости [Текст] / В. Б. Пеньков, Д. В. Викторов, Л. В. Саталкина // Соврем. проблемы математики, механики, информатики : сб. докл. междунар. науч. конф., 20–22 нояб. 2008 г. – Тула, 2008. – С. 274–277.

48. Пеньков, В. Б. Стационарная задача термоупругости со связанными граничными условиями [Текст] / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина, Д. В. Викторов // Авиакосмические технологии «АКТ – 2008» : тр. IX Всерос. науч.-техн. конф. и шк. молодых учёных, аспирантов и студентов, 10–12 сент. 2008 г. – М., 2008. – С. 173–177.

49. Пеньков, В. Б. Эффективные алгоритмы метода граничных

состояний [Текст] / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина // Вестн. ТулГУ. Сер. Актуальн. вопр. механики / под общ.ред. проф. В. Д. Кухаря. – Вып. 6. – Тула, 2010. – С. 91–96.

50. Пеньков, В. В. Метод граничных состояний в задачах линейной механики [Текст]: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / В. В. Пеньков. – Тула, 2002. – 98 с.

51. Пеньков, В. В. Метод граничных состояний: формирование базиса пространства внутренних состояний среды [Текст] / В. В. Пеньков // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика : сб. науч. тр. / под общ. ред. проф. В. Д. Кухаря. – Т. 4. – Вып. 2. – Тула, 1998. – С. 128–134.

52. Пеньков, В. В. Оценка точности метода граничных состояний для тел сложной конфигурации [Текст] / Трещев А. А., Пеньков В. В. // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика : сб. науч. тр. / под общ. ред. проф. В. Д. Кухаря. – Т. 6. – Вып. 2. – Тула, 2000. – С. 153–159.

53. Попов Г.Я. Напряженное состояние упругого составного конуса при наличии центра вращения у острия конуса. /Г.Я. Попов // М.: ПММ.2006. Т.70. №.4. С.660-672.

54. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела [Текст] / Ю. Н. Работнов// М.: Наука, 1988. 712 с.

55. Рязанцева, Е.А. Метод граничных состояний: сосредоточенные силы [Текст] / Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Рязанцева Е.А.// Современные проблемы механики и ее преподавания в вузах Российской Федерации: доклады Межрегиональной конференции памяти А.Н. Кабелькова, г. Новочеркасск, 20-23 сентября 2011 г./Юж.-Рос. гос. Техн.ун-т.-Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2011 – С. 126-130.

56. Рязанцева, Е.А. Специальное решение как инструмент качества сходимости решения задач математической физики [Текст] / Пеньков В.Б., Рязанцева Е.А.// Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал – Липецк, ЛГТУ. – №2 (32)- июнь 2013 – С. 47-52.

57. Рязанцева, Е.А. Решение краевых задач теории упругости для тел клиновидной формы, имеющих полость [Текст] / Рязанцева Е.А., Иванычев Д.А.//: Наука и бизнес: пути развития. Научно-практический журнал №4 (34) 2014 – С. 64-70.

58. Рязанцева, Е.А. О применении метода граничных состояний в задачах теории упругости с геометрическими и физическими особенностями по границе [Текст] /Рязанцева Е.А., Пеньков В.Б.// Современные проблемы математики, механики, информатики, Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию Тульского государственного университета, 2010 – С.184-186.

59. Рязанцева, Е.А. Метод граничных состояний: сосредоточенные силы [Текст] /Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Рязанцева Е.А.// Современные проблемы механики и ее преподавания в вузах Российской Федерации: доклады Межрегиональной конференции памяти А.Н. Кабелькова, г. Новочеркасск, 20-23 сентября 2011 г./Юж.-Рос. гос. Техн.ун-т.-Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2011 – С. 126-130.

60. Рязанцева, Е.А. Развитие метода граничных состояний на класс задач с разрывным усилием вдоль границы [Текст] // Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Рязанцева Е.А.// Вестник ТулГУ. Серия "Актуальные вопросы механики" – 2011. Вып. 7.-Тула: Изд-во ТулГУ – С. 134-138.

1. Рязанцева, Е.А. Проблема применения теорем вложения к областям с негладкой границей [Текст] // Пеньков В.Б., Рязанцева Е.А.// Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". г. Тула: Изд-во ТулГУ, 2012 – С.212-215.

2. Рязанцева, Е.А. Теорема Соболева: краевые задачи с сингулярностями физической природы [Текст] // Пеньков В.Б., Рязанцева Е.А.// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28

ноября 2012 г. : в 2 ч. Ч. 1. – Воронеж :Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012 – С.302-307.

3. Рязанцева, Е.А. Специальные элементы базиса состояний как надежный фактор сокращения вычислительных ресурсов при анализе упругих полей [Текст] /Пеньков В.Б., Рязанцева Е.А.// Энерго- и ресурсосбережение XXI век: материалы XI международной научно-практической интернет-конференции, г. Орёл, 2013 – С. 250-253.

61. Рязанцева, Е.А. Использование специального решения для задач, содержащих сингулярности физического и геометрического характера, [Текст] /Рязанцева Е.А., Пеньков В.Б. //Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» г. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013 – С. 451-455.

62. Рязанцева, Е.А. Использование метода граничных состояний для решения задач теории упругости, имеющих геометрическую особенность [Текст] /Рязанцева Е.А.// Современные тенденции в образовании и науке: материалы международной заочной научно-практической конференции, Тамбов, 31 октября 2013 – С. 101-103.

4. Рязанцева, Е.А. Применение метода граничных состояний для клина, находящегося под воздействием сосредоточенной силы [Текст] /Рязанцева Е.А.// Наука, образование, общество: проблемы и перспективы развития: материалы международной заочной научно-практической конференции, Тамбов, 28 февраля 2014 – С. 132-135

5. Рязанцева, Е.А. Специальное решение как эффективный инструментарий для решения задач теории упругости для тел клиновидной формы, имеющих полость [Текст] /Рязанцева Е.А., Иванычев Д.А.//Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» г. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014 – С. 391-396.

6. Рязанцева, Е.А. Решение смешанных задач теории упругости для тела с полостью и особенностью геометрического характера [Текст]

/Рязанцева Е.А. // Наука и образование в XXI веке: материалы международной заочной научно-практической конференции, Тамбов, – С. 126-128.

63. Саврук, М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст]: монография / М. П. Саврук ; Физ.-мех. ин-т АН УССР. - К. : Наук. думка, 1981. - 324 с.

64. Саргисян, А.М. О логарифмической особенности напряжений в антиплоской задаче теории упругости для клина. [Текст] /А.М. Саргисян// Изв. АН Армении. Мех. 2004. Е.57. №.2, С.11-17.

65. Саталкина, Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями в линейных задачах для неоднородных сред [Текст] / Л. В. Саталкина// Перспективы науки. – 2010. – N 3 (05). – С. 48–51.

66. Саталкина, Л. В. Несвязанная задача нелинейной термоупругости для тела с сингулярной границей [Текст] / Л. В. Саталкина // Вестн.ТулГУ. Сер. Актуальн. вопр. механики / под общ.ред. проф. В. Д. Кухаря. – Вып. 5. – Тула, 2009. – С. 157–160.

67. Седов, Л. И. Механика сплошной среды [Текст]. В 2 т. Т. 1 / Л. И. Седов//М.: Наука, 1970, 492 с.

68. Стебеньев, И. Н. Общее решение уравнений Кильчевского для плоских колебаний [Текст] / И. Н. Стебеньев // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания: сб. тр., 24–25 сент. 2008 г. – Липецк, 2008. – С. 264–267.

69. Стебеньев, И. Н. Применение метода граничных состояний для решения задач вынужденных колебаний упругого изотропного тела [Текст] / И. Н. Стебеньев // Актуальн. проблемы прикл. математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. конф., 20–22 сент. 2010 г. – Воронеж, 2010. – С. 333–342.

70. Стебеньев, И. Н. Решение основной смешанной задачи вынужденных колебаний изотропного тела методом граничных состояний [Текст] / И. Н. Стебеньев // Соврем.проблемы математики, механики,

информатики : сб. докл. междунар. науч. конф., 19–23 сент. 2011 г. – Тула, 2011. – С. 199–204.

71. Стебеньев, И. Н. Решение основной смешанной задачи стационарных колебаний изотропного тела методом граничных состояний [Текст] / И. Н. Стебеньев // Актуальн. проблемы прикл. математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. конф., 26–28 сент. 2011 г. – Воронеж, 2011. – С. 376–382.

72. Стренг Г. Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Дж. Фикс // М.: Мир. 1977. -349 с.

73. Шульмин, А.С. Взаимодействие упругого слоя с жесткой сфероидальной полостью [Текст] / С. С. Теплова, В. Б. Пеньков, А. С. Шульмин // Современн. проблемы математики, механики, информатики : сб. докл. междунар. науч. конф., 17–21 сент. 2012 г. – Тула, 2012. – С. 225–227.

74. Харитоненко, А. А. Анализ кручения призматического тела методом граничных состояний [Текст] / А. А. Харитоненко // Прогрессивные технологии и оборудование в машиностроении и металлургии : сб. науч. тр. междунар. науч.-техн. конф., 11–12 мая 2006 г. В 2 ч. Ч. 2. – Липецк, 2006. – С. 252–255.

75. Харитоненко, А. А. Новый метод анализа электростатических полей [Текст] / А. А. Харитоненко // Энергетика и энергоэффективн. технологии : сб. докл. междунар. науч.-техн. конф., посвящён. 50-летию ЛГТУ, 18–20 окт. 2006 г. В 2 ч. Ч. 1. – Липецк, 2006. – С. 130–134.

76. Харитоненко, А. А. Особенности применения нового энергетического метода для расчёта электростатического поля [Текст] / А. А. Харитоненко // Современная металлургия начала нового тысячелетия : сб. докл. междунар. науч.-технич. конф., посвящ. 50-летию ЛГТУ, 31 окт.–3 нояб. 2006 г. В 4 ч. Ч. 4. – Липецк, 2006. – С. 80–84.

77. Штернберг, Э. О понятии сосредоточенных нагрузок и расширении области применения теоремы единственности в линейной теории упругости. [Текст] / Э. Штернберг, Р. Юбанкс // Механика, 1966. № 5

(39).

78. Abdei –Messei, Y.S. Estimating the form of some three- dimensional singularities/ Abdei-Messei Y.S., Thatcher R.W.// Commun. Appl. Numer. Meth. 1990. No.6. P .333-341.

79. Akisanya, A.R. Initiation of fracture at the interface corner of bi- material joints / Akisanya A.R., Meng C.S.// Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003. No.51. P.27 46.

80. Apel T. Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities./Apel T., Mehrmann V., Watkins D. // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2002. No. 191. P.4459-4473.

81. Barsaoum, R.S. Theoretical basis of the finite element iterative method for the eigenvalue problem in stationary cracks.// Int.J.Numer. Meth. in . Engng. 1988. No.26. P.531-539.

82. Barsoum R.S. Asymptotic fields at interfaces using the finite element iterative method.// Comput. Struct. 1990. No.35. P.285-292.

83. Barsoum R.S., Chen T. Three-dimensional surface singularity of an interface crack.// Int.J. Fract. 1991. No.50. P.221-237.

84. Bazant Z. P. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general numerical method.// Int. J. Eng. Sci. 1974. No.12. P.221-243.

85. Bazant Z.P., Estenssoro L.F. Surface singularity and crack propagation. // Int. J. Solids Struct. 1979. No.15. P.405-426.

86. Bazant Z.P., Keer. L.M. Singularities of elastic stresses and of harmonic functions at conical notches and inclusions.// Int.J.Solids Struct. 1974. No.10. P.957-964.

87. Benthem J.P. The quarter-infinte crack in a half-space; alternative and additional solutions.// Int. J.Solids Struct. 1980. No.16. P. 119-130.

88. Chen D. H., Nisitani H. Logarithmic singular stress field in bonded wedges.// Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers Series A. 1993. No.59. P.2687-2693.

89. Chen M.C., Sze K.Y. A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problems.// *Engng. Fract. Mech.* 2001. No.68. P.1463-1476.
90. Chen H.P. Stress singularities in anisotropic multi-material w edges and junctions.// *Int. J. Solids Struct.* 1998. N.35. P.1057-1073.
91. Chue C.H., Liu C.I. A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge.// *J. Appl. Mech.* 2001. No.38. P.6889-6906.
92. Costabel M., Dauge M., Lafranche Y. Fast semi-analytic computation of elastic edge singularities.// *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001. No.190. P.2111- 2134.
93. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge.// *Journal of Elasticity.* 1979. No.9. P.273-391.
94. Dimitrov A., Andra H., Schnack E. Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity.// *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 2001. No.52. P.805-827.
95. Dimitrov A., Andra H., Schnack E. Singularities near three-dimensional corners in composite laminates.// *Int. J. Fract.* 2002. No.115. P.361-375.
96. Frangi A., Novati G. BEM-FEM coupling for 3D fracture mechanics applications.// *Comput.Mech.* 2003. V.32. No.4-6. C.415-422.
97. Gelard C.F., Wheatley P.O. *Applied Numerical Analysis.*// Addison-Wesley. Reading. MA. 1984.
98. Ghahermani F. A numerical variational method for extracting 3D singularities.// *Int. J. Solids and Struct.* 1991. V.27. P.1371-1386.
99. Ghahermani F., Hutchinson J.W., Tvegard V. Three-dimensional effects in microcrack nucleation in brittle polycrystals.// *J. Amer. Ceram. Soc.* 1990. No.73. P.1548-1554.
100. Ghahremani F., Shih C.F. Corner singularities of three-dimensional planar interface cracks.// *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1992. V. 59. No.1. P.61-68.

101. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Lapina O.N. 3D elastic stress singularity at polyhedral corner points.// *Int. J. Solids Struct.* 1999. No.36. P.1105-1128.
102. Gudmudson P., Ostlund S. Stress singularities at the free surface of a dynamically growing crack.// *J. Appl. Mech.* 1990. No.57. P. 112-116.
103. Guzina B.B., Pak R., Martinez-Castro A. Singular boundary elements for three-dimensional elasticity problems.// *Engng. Analyss wih BE.* 2006. No.30. P.623-639.
104. Hein V.L., Erdogan F. Stress singularities in a two-material wedge.// *Int. J. Fract.* 1971. No.7. P.317-330.
105. Im.S. Application of the two-stste M-integral for computing an intensity of singular near-tip field for a generic composite wedge.// *J. Mech. Phys. Solids.* 2000. No.48. P.129-151.
106. Imanaka M., Ishii K., Nakayama H. Evaluation of fatigue strength of adhesively bonded single and single step double lap joints based on stress singularity parameters.// *Engineering Fracture Mechanics.* 1999. No.62. P.409-424
107. Karp, S. N. and Karal, F.C.J. The elastic field in the neighbourhood of a crack of arbitrary angle.// *Commun. Pure Appl. Math.* 1962. No.15. P.413-421.
108. Kassir MK, Sih GC. Three Dimensional Crack Problems. *Mechanics of Fracture Noordhoff: Leiden, 1975.*
109. Khalil S.A., Hwang W.C. Application of a hybrid finite element method to determine stress intencity factors in unidirectional composites.// *Int. J. Fract.* 1986. No.31. P.37-51.
110. Koguchi, H., Muramoto, T., Ihara, I. Analysis for stress singularity leld at a vertex in three-dimensional bonded structures.// *JSME Int. J.* 1999. No.42. P.80-89.
111. Koguchi, H., Muramoto, T., 2000. The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints.// *Int. J. Solids Struct.* V.37. P.4737-4762.
112. Koguchi, H. Stress singularity analysis in three-dimensional bonded structure.// *Int. J. Solids Struct.* 1997. V.34. No.4. P.461-480.

113. Koguchi, H., Tadanobu, I., Toshio, Y. Stress singularity at the apex in three phase bonded structure.// Transactions of JSME Series A. 1993. No.59. P.163-170.
114. Koguchi H., Inoue T., Yada T. Stress singularity in three-phase bonded structure.// J. Appl. Mech. 1995. No.63. P.252-258.
115. Kozlov V.A., Mazya V.G., Rossmann J., Spectral properties of operator pencils generated by elliptic boundary value problems for the Lamé system.// Rostocker Math. Kollog. 1997. No.51. P.5-24.
116. Kozlov V.A., Mazya V.G., Rossmann J., Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations, American Mathematical Society.// Providence. RI. 2001.
117. Kozlov V.A., Mazya V.G., Schwab C., On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone.// Arch. Ration. Mech. Anal. 1992. No.119. P.197-227.
118. Labossiere P.E.W., Dunn M.L. Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners.// J. Mech. Phys. Solids. 2001. No.49. P.609-634.
119. Lee Y., Jeon I., Im S. The stress intensities of three-dimensional corner singularities in a laminated composite.//Int. J. Solids and Str. 2006. V.43. P.2710-2722.
120. Lee Yongwoo, Im Seyoung. On the computation of the near-tip stress intensities for three-dimensional wedges via two-state M-integral.//J.Mech. and Phys. of Solids. 2003. V.51. P.825-850.
121. Leguillon D, Sanchez-Palencia E. Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity.// Masson. Wiley: Paris. 1987.
122. Li Y.L., Hu S.Y., Yang Y.Y. Stresses around the bond edges of axisymmetric deformation joints.// Engng. Fract. Mech. 2000. P.153-170.
123. Liu Y.H., Xu J.Q., Ding H.J. Order of singularity and singular stress field about an axisymmetric interface corner in three dimensional isotropic elasticity.// Int. J. Solids Struct. 1999. No.36. P.4425-4445.

124. Meerbergen K., Tisseur F., The quadratic eigenvalue problem// *SIAM Rev.* 43 (2001) 235-286
125. Mikhailov S. E., Namestnikova I. V. Stress-singularity analysis in space junctions of thin plates.// *J. Engn. Math.* 2000. No.37. P.327-341.
126. Muller D.E. A method for solving algebraic equation using an automatic computer.// *Mathematical Table.* 1956. P.208-215.
127. Murakami Y., Natsume H. Stress singularity at the corner point of 3-D surface crack under mode II loading.// *JSME Int. J. A.* 2002. V.45. No.2. P.161-169.
128. Nakamura T., Parks D.M. Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate.// *ASME J. Appl. Mech.* 1988. No.55. P.805-813.
129. Nkemzi B. On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points.// *Math. Methods Appl. Sciences* 2005. V28. iss.1. P.29-41.
130. Noda N., Tsuji T. Stress singularities in edge-bonded dissimilar wedges (three-dimensional axisymmetrical elastic problems).// *Trans JSME (in Japanese)* 1992. V.58. No.546. P.123-129.
131. Nozaki H., Horibe T., Taya M. Stress field caused by polygonal inclusion.// *JSME Int. J.A.* 2001. V.44. No. 4. P.4T2-482.
132. Pageau S. S., Biggers S. B. (Jr). A finite element approach to three-dimensional singular stress states in anisotropic multimaterial wedges and junctions. // *Int. J. Solids and Struct.* 1996. V.33. No.1. P.33-4T.
133. Parihar K.S., Keer L.M. Singularity at the vertex of pyramidal notches with three equal angles.// *Q.J. Appl. Math.* 1977. No.35. P.401-405.
134. Parihar K.S., Keer L.M. The singularity at the corner of a wedge-shaped crack or inclusion.// *J.Appl.Mech.* 1978. N.45. P.791-796
135. Parihar K.S., Keer L.M. Elastic stress singularities at conical inclusions.// *Int. J. Solids Struct.* 1978. V.14. P.261-263.
136. Parihar K.S., Keer, L.M. The singularity at the apex of a boundary wedge-shaped stamp.// *J.Appl.Mech.* 1979. No.46.

137. Picu C.R. Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces.// *Int. J. Solids Structures*. 1996. V.33 No.17, P.2453-2457.
138. Picu C. R., Gupta V. Singularities at grain triple junction in two dimensional polycrystals with cubic and orthotropic grains.// *J. Appl. Mech.* 1994.
139. Picu C. R., Gupta V. Three-dimensional stress singularities at the tip of a grain triple junction line intersecting the free surface.// *J.Mech. Phys. Solids*, 1997. V.45, No.9, P.1495-1520.
140. Rossle A., Sandig A.-M., Stress singularities in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading.// *Comput.Mater. Sci.* 1996. No.7 P.48-55.
141. Saad Y. Variations on Arnoldi' method for computing eigenvalues of large unsymmetric matrices.// *Linear Algebra and Its Applications*. 1980. No.34. P.269-295.
142. Savruk M.P., Shkaraev S.V. Stress singularities for three-dimensional corners using the boundary integral equation method.// *Theoretical and applied Mechanics*. 2001. No.36. P.263-275.
143. Schmitz H., Volk K., Wendland W.L. On three-dimensional singularities of elastic fields near vertices.// *Numer. Meth. Partial Diff. Equat.* 1993. No.9. P.323-337.
144. Seweryn A. Modeling of singular stress fields using finite element method.// *Int. J. Solids and Struct.* 2002. No.39. P.4787-4804.
145. Somaranta N., Ting T. C. T. Three dimensional stress singularities at conical notches and inclusions in transversely isotropic materials.// *J. Appl. Mech.* 1986. No.53. P.89-96.
146. Sze K.Y., Wang H-T. A simple finite element formulation for computing stress singularities at bimaterial interfaces.// *Finite Elements in Analysis and Design*. 2000. No.35. P.97-118.
147. Thatcher R.W. Estimating the form of an elastic vertex singularity with mixed boundary conditions.// *In Boundary Value Problems and Integral*

Equations in Nonsmooth Domains. Proc. Conf. CIRM. N.Y.: M.Dekker. 1995. P.285-298.

148. Theocaris P.S. The order of singularity at a multi-wedge corner of a composite plate.// International Journal of Engineering Science. 1974. No.12. P.107-120.

149. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Axisymmetric stress and deformation in a solid of revolution.// Theory of elasticity, 3rd ed. Kogakusha: McGraw-Hill. 1970. P.428-437 Chap. 12.

150. Ting, T.C.T., Chou, S.C. Edge singularities in anisotropic composites.// Int. J. Solids and Str. 1981. V.17. No.11. P.1057-1068.

151. Tong P., Pian T., Lasary S.J. A hybrid-element to crack problems in plane elasticity.// Int. J. Numer. Meth. Enghg. 1973. No.7. P. 297-308.

152. Tranter C.J. The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in ah infinite wedge.// Quaterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1948. No.1. P.125-130.

153. Wang S.S., Choi I. The interface crack between dissimilar anisotropic composite material.// J. Appl. Mech. 1982. No.49. P.541-548.

154. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. // J. Appl.Mech. 1952. V.19. No.4. P.526-528.

155. Xiao F., Hui C.Y. A boundary element method for calculating the K fields for cracks along a bimaterial interface.// Comput. Mech. 1994. No.15. P.58-78.

156. Hamada Y., Okumura H. Analysis of local stress in composite materials by the 3-D finite element.// Proceedings of the Japan -U.S. Conference. Tokio. P.55-64.

157. Yin W. L. Anisotropic Elasticity and Multi-Material Singularities.// J. Elasticity. 2003. No.71. P.263-292.

158. Yosibash Z. Computing edge singularities in elastic anisotropic three - dimensional domains// Int. J. Fracture 1997. No.86. P.221-245.

159. Zhang N., Joseph P. F. A nonlinear finite element eigenanalysis of singular plane stress fields in bimaterial wedges including complex eigenvalues. // Int. J. Fract. 1998. V.90. No.3. P.175-207.

Обезразмеривание физических параметров

Проведём масштабирование соотношений линейной упругой среды (выражения с «крышкой» являются безразмерными). Для каждой размерной величины вводится свой безразмерный параметр:

Известно, что перемещения u и координаты x_j измеряются в метрах [м], а напряжения σ_{ij} , параметры Ламе λ и μ в $[\frac{H}{M^2}]$. Тогда

$$\sigma_{ij} = \mu_0 \hat{\sigma}_{ij}, \quad (1)$$

$$u_i = R_0 \hat{u}_i, \quad (2)$$

$$x_j = R_0 \hat{x}_j. \quad (3)$$

$$\mu = \mu_0 \hat{\mu} \quad (4)$$

$$\lambda = \mu_0 \hat{\lambda} \quad (5)$$

Подставим полученные выражения (2) и (3) в соотношения Коши, получим:

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right).$$

Подставим (1), (4) и (5) в закон Гука:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\mu_0} = \frac{\lambda}{\mu_0} \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \frac{\mu}{\mu_0} \varepsilon_{ij},$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\lambda} \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \hat{\mu} \varepsilon_{ij}.$$

Аналогично, обезразмериваются уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial \hat{x}_j} = 0$$