ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Дуплищева Анастасия Юрьевна

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

профессор А. Г. Баскаков

Воронеж – 2015

Содержание

Обозначения 4

Введение 6

Глава 1. Некоторые сведения из теории операторов. 25

1.1. Линейные замкнутые операторы 25

1.2. Основные понятия спектральной теории операторов 27

1.3. Разбиение спектра 29

Глава 2. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка 32

2.1. Постановка задачи 33

2.2. Понятие состояний обратимости операторов 36

2.3. Эволюционные семейства и свойство экспоненциальной дихотомии 38

2.4. Спектральный анализ абстрактных операторов, отвечающих разностным операторам второго порядка 40

2.5. К вопросу обратимости и фредгольмовости разностных операторов второго порядка 49

Глава 3. О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка 59

3.1. Постановка задачи 59

3.2. Условие обратимости абстрактных замкнутых линейных операторов, отвечающих дифференциальным операторам второго порядка 61

3.3. Условие обратимости дифференциального оператора второго порядка 67

Глава 4. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений 68

4.1. Постановка задачи 68

4.2. Спектр Берлинга векторов и функций 70

4.3. Условие периодичности на бесконечности решений разностных уравнений 75

4.4. Достаточное условие существования ограниченных решений разностных уравнений 84

Литература 87

Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — группа целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ — множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел;

$\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ — единичная окружность (абелева группа комплексных чисел, модуль которых равен единице);

X, $\mathcal{X}$, $\mathfrak{X}$ — банаховы пространства;

$\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ — декартово произведение комплексных банаховых пространств $\mathfrak{X}$ с нормой $||(x_1, x_2)|| = \max\{||x_1||, ||x_2||\}, (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}^2$;

$End\,\mathfrak{X}$ — банахова алгебра линейных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$;

$C_b = C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на промежутке $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$;

$C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ — банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathfrak{X}$;

$C_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ - замкнутое подпространство функций $x \in C_{b,u}$ со свойством $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$ (исчезающих на бесконечности);

$L^p = L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$, $p \in [1, \infty)$ — банахово пространство суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ на промежутке $\mathbb{R}$ классов функций со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ и нормой $\|x\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p dt)^{1/p}$;

$L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ — банахово пространство существенно ограниченных на промежутке $\mathbb{R}$ классов функций со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ и нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$;

$C^l = C^l(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ — банахово пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, у которых

ограничены все производные порядка l и ниже, с нормой $\|x\|_{C^l} = \sum\limits_{|k|\le l} \|x^k\|_{C_b}$;

$W_p^l = W_p^l(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ — пространство Соболева $W_p^l = \{x \in C^{l-1}(\mathbb{R}) : x^{l-1}-$ абсолютно непрерывна, $x^l \in L^p\}$. Норма функции $f \in W_p^l$ определяется при помощи равенства $\|f\|_{W_p^l} = \sum_{|k|\le l} \|f^k\|_{L^p}$;

$l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $1 \le p \le \infty$, — банахово пространство двусторонних последовательностей векторов, суммируемых со степенью p с нормой

$$||x|| = ||x||_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||x(n)||^p)^{1/p}, \quad x \in l^p\,,\ p \in [1, \infty),$$

$$||x|| = ||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||x(n)||, \quad x \in l^\infty\,;$$

$\sigma(A)$ — спектр линейного оператора A;

$\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A;

$R(\cdot, A)$ — резольвента оператора A;

$r(A)$— спектральный радиус оператора A;

$Ker\, A$ — ядро оператора A;

$Im\, A$ — образ оператора A;

$\dim \mathfrak{X}$ — размерность пространства $\mathfrak{X}$;

$codim\, \mathfrak{X}$ — коразмерность пространства $\mathfrak{X}$;

$dist\,(x, \mathfrak{X}_1)$ — расстояние от вектора x до подпространства $\mathfrak{X}_1$;

$ind\, A = \dim Ker\, A - codim\ Im\, A$ — индекс фредгольмова оператора A;

$supp\, x$ — носитель функции x;

I — тождественный оператор;

Введение

Диссертация посвящена спектральной теории разностных операторов с операторными коэффициентами, действующими в банаховом пространстве векторных последовательностей.

Необходимость развития спектральной теории разностных операторов диктуется различными обстоятельствами. Разностные операторы широко используются при создании методов дискретизации дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Теория разностных уравнений широко используется в численном анализе, теории управления, компьютерных науках, а также применяется при изучении математических моделей, возникающих в механике сплошной среды, квантовой механике, при описании химических реакций и т. д.

Первые исследования, посвященные разностным операторам, появились еще в конце XIX – начале XX столетия. В работах О. Перрона и А. Пуанкаре изучались вопросы поведения на бесконечности некоторых типов разностных операторов, связанных с операторами взвешенного сдвига. Внимание к разностным уравнениям прежде всего обусловлено их применением в исследованиях разрешимости различных дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений (работы А. Б. Антоневича, А. Г. Баскакова, М. С. Бичегкуева, Р. Беллмана и К. Л. Кука, И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана, В. Г. Курбатова, Х. Л. Массера и Х. Х. Шеффера, Д. Хенри).

В монографиях З. Нитецки, П. Халмоша, Ю. Д. Латушкина и А. М. Степина отражено использование разностных операторов в спектральной теории динамических систем. Связь разностных операторов с задачами теории функций рассматривались в работах Ю. Ф. Коробейника, А. А. Миролюбова и М. А. Солдатова, Н. К. Никольского, А. Л. Шилдса.

Особенно важное значение спектральной теории разностных операторов

приобрело в последнее время при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами. Так в статьях А. Г. Баскакова [3] - [20] каждому линейному оператору, действующему в банаховом пространстве непрерывных ограниченных функций на всей оси (полуоси), ставится в соответствие разностный оператор, действующий в пространстве ограниченных векторных последовательностей. Установлено, что эти операторы одновременно обратимы, имеют одинаковой размерности ядра, имеют одинаковую коразмерность образов.

Многие свойства решений (ограниченность, почти периодичность, устойчивость) линейных разностных (дифференциальных) уравнений тесно связаны с соответствующими свойствами разностного (дифференциального) оператора, определяющего рассматриваемое уравнение и действующего в подходящем функциональном пространстве. Его свойства обратимости, корректности, фредгольмовости, а также структура спектра зависят от размерности ядра, коразмерности образа, их дополняемости.

Таким образом, тема диссертации является вполне актуальной.

Диссертация посвящена изучению разностных и дифференциальных операторов второго порядка, вопросам обратимости, описанию ядер, образов, проекторов на ядра и образы. Большое внимание уделяется описанию ограниченных решений разностных уравнений первого порядка, описана структура решений, получено достаточное условие существования решений.

Цель работы.

1. Изучение спектральных свойств разностных операторов второго порядка.

2. Изучение спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка.

3. Изучение качественной структуры решений разностных операторов пер-

вого порядка.

Методы исследования. Для исследования спектральных свойств рассматриваемых операторов используется спектральная теория дифференциальных и разностных операторов, теория полугрупп, теория гармонического анализа, прием сопоставление исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка и последующее использование теории разностных операторов первого порядка, определяемых этой операторной матрицей.

Научная новизна. Основные результаты диссертационной работы являются новыми. Из них выделим следующие:

1. Спектральный анализ разностных операторов (уравнений) второго порядка:

   - исследование свойства инъективности операторов, описание их ядер, проекторов на ядра операторов;
   - исследование свойства сюръективности, описание образов, проекторов на образы операторов;
   - получение условий обратимости, явного вида обратного оператора;
   - исследование условий фредгольмовости;
   - получение асимптотического представления решений однородного разностного уравнения.

2. Спектральный анализ дифференциальных операторов (уравнений) второго порядка:

   - исследование свойства инъективности операторов;
   - исследование свойства сюръективности операторов;
   - получение условий обратимости, явного вида обратного оператора.

3. Изучение качественной структуры разностных уравнений первого порядка:

   - получение формул асимптотического представления решений разностных уравнений первого порядка;
   - исследование вопросов существования ограниченных решений.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер и может быть использована при дальнейшем развитии спектральной теории разностных и дифференциальных операторов второго порядка, а также дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна 2014 [51], на весенней математической школе «Понтрягинские чтения XXV» 2014 [48], на Крымской осенней математической школе 2012 [46], на Крымской международной математической конференции 2013 [47], на математическом интернет-семинаре ISEM-2013 [91], ISEM-2014 (Германия, Блаубойрен), на международной конференции «Spectral Theory and Differential Equations», посвященной 100-летию Б. М. Левитана [93], на семинарах А.Г. Баскакова, а также на научных сессиях ВГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [20], [43] – [52], [91]-[93]. Работы [20], [44], [49], [50], [52] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместной публикации [20] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 110 наименований. Общий объем диссертации - 99 страниц.

Содержание диссертации

Прежде чем перейти к изложению основных результатов, отметим, что в диссертационной работе используется тройная нумерация теорем, лемм, следствий, замечаний, определений и формул. Причем первая цифра означает номер главы, вторая - номер параграфа, а третья - порядковый номер теоремы, леммы и т.д. в данном параграфе.

В первой главе диссертации приводятся основные понятия спектральной теории операторов, необходимые для изложения результатов диссертации.

Во второй главе в банаховом пространстве $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $1 \leq p \leq \infty$, двусторонних последовательностей векторов из комплексного банахова пространства $\mathfrak{X}$ с нормой

$$||x|| = ||x||_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||x(n)||^p)^{1/p}, \quad x \in l^p\,,\ p \in [1, \infty),$$

$$||x|| = ||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||x(n)||, \quad x \in l^\infty\,,$$

рассматривается разностное уравнение второго порядка вида:

$$x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $f \in l^p$, $B_k : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}$, $k = 1, 2$, – ограниченные операторнозначные функции, т. е. $B_k \in l^\infty(\mathbb{Z}, End\,\mathfrak{X})$, $k = 1, 2$. Символом S обозначим оператор сдвига последовательностей из l^p : $S \in End\,l^p$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$.

Любой последовательности $x \in l^p$ поставим в соответствие последовательность $y : \mathbb{Z} \to \mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ вида (в декартовом произведении $\mathfrak{X}^2$ рассматривается норма $||(x_1, x_2)|| = \max\{||x_1||, ||x_2||\}, (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}^2$): $y(n) = (x_1(n), x_2(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_1 = x$, $x_2 = Sx$. Непосредственно из определения последовательности y следует, что последовательность $x \in l^p$ есть решение

уравнения (1) тогда и только тогда, когда последовательность $y \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ удовлетворяет уравнению (рассматриваемому в $l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$):

$$z(n+1) + U(n)z(n) = \tilde{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\tilde{f} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$, $\tilde{f}(n) = (0, f(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, и операторнозначная функция $U : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}^2$ имеет вид: каждый оператор $U(n) \in End\,\mathfrak{X}^2$ задается (определяется) в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Уравнения (1) и (2) запишем в операторном виде:

$$\mathcal{D}x = f,\ f \in l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}),$$

$$\mathbb{D}y = g,\ g \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}), \tag{4}$$

где разностный оператор $\mathcal{D} \in End\,l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ определяется формулой:

$$\mathcal{D} = S^2 + \tilde{B}_1 S + \tilde{B}_2. \tag{5}$$

В этой формуле $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in End\,l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ – операторы умножения в $l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ на операторные функции $B_1, B_2 : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}$ соответственно, т. е.

$$(\tilde{B}_k x)(n) = B_k(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}),\ k = 1, 2.$$

Оператор $\mathbb{D} \in End\,l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ в (4) имеет вид:

$$\mathbb{D} = \mathbb{S} + \mathbb{B}, \tag{6}$$

где операторы $\mathbb{S}, \mathbb{B} \in End\,l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ определяются равенствами:

$$\mathbb{S}x = (Sx_1, Sx_2), (\mathbb{B}x)(n) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix},$$

$$n \in \mathbb{Z},\ x = (x_1, x_2) \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2) \simeq l^p\,(\mathbb{Z} \times \mathfrak{X}) \times l^p\,(\mathbb{Z} \times \mathfrak{X}).$$

Таким образом, оператор $\mathbb{D}$ определяется в $l^p \times l^p$ матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} S & -I \\ \tilde{B}_2 & S + \tilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Для соответствующих операторов приводятся условия их обратимости, фредгольмовости, получено асимптотическое представление решений однородного разностного уравнения. Основные результаты данной главы получены на основе сопоставления исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка и последующего использования теории разностных операторов первого порядка, определяемых этой операторной матрицей.

Во *втором параграфе* вводится понятие, играющее важную роль в классификации спектров операторов (более разнообразной, чем общепринятой), а именно, понятие состояний обратимости операторов, а также, понятие фредгольмовости операторов (в терминах вводимого определения состояний обратимости операторов).

Определение 2.2.1 Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство и $A \in End\,\mathcal{X}$. Рассмотрим следующие условия:

1) $Ker A = \{x \in \mathcal{X} : Ax = 0\} = \{0\}$ (т. е. A – инъективный оператор);

2) $1 \leq n = \dim\ Ker\,A < \infty$;

3) $Ker\,A$ – бесконечномерное подпространство в $\mathcal{X}$ ($\dim\ Ker\,A = \infty$);

4) $Ker\,A$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$;

5) $\overline{Im\,A} = Im\,A$ (образ оператора A замкнут в $\mathcal{X}$), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in \mathcal{X} \setminus Ker\,A} \frac{||Ax||}{dist(x, Ker\,A)},$$

где $dist\,(x, Ker\,A) = \inf\limits_{x_0 \in Ker\,A} ||x - x_0||$ – расстояние от вектора x до подпространства $Ker\,A$;

6) оператор A корректен (равномерно инъективен), т. е. $Ker\,A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$;

7) $Im\,A$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{X}$ конечной коразмерности, т. е.

$$codim\ Im\,A = m \geq 1;$$

8) $Im\,A$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$ бесконечной коразмерности, т. е.

$$codim\ Im\,A = \infty;$$

9) $Im\,A \neq \mathcal{X}$, $\overline{Im\,A} = \mathcal{X}$;

10) $\overline{Im\,A} \neq \mathcal{X}$;

11) $Im\,A = \mathcal{X}$ (A – сюръективный оператор);

12) оператор A обратим (т. е. $Ker\,A = \{0\}$ и $Im\,A = \mathcal{X}$).

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, i_2, \dots i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 12$, то будем говорить, что оператор A находится в *состоянии обратимости* σ. Множество всех состояний обратимости оператора A обозначим символом $St_{inv}A$.

Определение 2.2.2([1], [18], [85]) Если оператор $A \in End\,\mathcal{X}$ имеет конечномерное ядро (т. е. выполнено одно из условий 1), 2) определения 2.2.1), замкнутый образ конечной коразмерности(т. е. выполнено одно из условий 7), 11)), то оператор называется *фредгольмовым.* Если оператор A имеет замкнутый образ и конечномерно одно из чисел $\dim Ker\,A$, $codim\ Im\,A = \dim(\mathcal{X}/Im\,A)$, то оператор A называется *полуфредгольмовым.* Число $ind\,A = \dim Ker\,A - codim\ Im\,A$ называется *индексом* фредгольмова (полуфредгольмова) оператора A.

В *третьем параграфе* вводится понятие эволюционного семейства и экспоненциальной дихотомии.

В *четвертом параграфе* в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ рассматривается оператор $\mathcal{A} \in End\,\mathcal{X}$ вида

$$\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2 \in End\,\mathcal{X}.$$

Наряду с оператором $\mathcal{A}$ рассматривается оператор $\mathbb{A} \in End\,\mathcal{X}^2$, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + (A + C_1)x_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$.

Теорема 2.4.1 *Множество состояний обратимости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ совпадает: $St_{inv}\mathcal{A} = St_{inv}\mathbb{A}$.*

Для доказательства теоремы 2.4.1 далее приводится ряд вспомогательных утверждений.

При рассмотрении свойств, касающихся ядер операторов, получены следующие утверждения.

Лемма 2.4.1 *Ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор*

$$J : Ker\,\mathcal{A} \to Ker\,\mathbb{A},\ Jx = (x, Ax),\ x \in Ker\,\mathcal{A}.$$

Теорема 2.4.2 *Пусть $\mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$, $\mathcal{P}_{Ker\,\mathbb{A}}$ – множество непрерывных проекторов на ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ соответственно. Тогда верны следующие утверждения:*

1) Если $P \in \mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$, то проектор $\mathbb{P}$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathcal{P}_{Ker\,\mathbb{A}}$;

2) Если проектор $\tilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_{Ker\,\mathbb{A}}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$, то $\tilde{P} = P_{11} + P_{12}A$ – проектор из $\mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$.

При рассмотрении свойств, касающихся образов операторов, получены следующие утверждения.

Лемма 2.4.2 *Вектор $z \in \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда пара $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.*

Лемма 2.4.3 *Пара $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда вектор $y = y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$.*

Лемма 2.4.4 *Образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.*

Лемма 2.4.5 *Если $P \in \mathcal{P}_{Im\,\mathcal{A}}$, то проектор $\mathbb{P}$, заданный матрицей*

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(I-P)B & P \end{pmatrix}$$

принадлежит $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}$.

Следующая теорема отражает условие одновременной обратимости рассматриваемых операторов.

Теорема 2.4.3 *Операторы $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ обратимы одновременно и обратный к $\mathbb{A}$ оператор задается матрицей вида*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(A + C_1) & \mathcal{A}^{-1} \\ A\mathcal{A}^{-1}(A + C_1) - I & A\mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство свойств, касающихся образов рассматриваемых операторов, возможно с использованием иного подхода, основанного на использовании сопряженных к $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ операторов.

Лемма 2.4.7 *Ядра $Ker\,\mathcal{A}^*$, $Ker\,\mathbb{A}^*$ операторов $\mathcal{A}^*, \mathbb{A}^*$ изоморфны. Изоморфизм осуществляет оператор:*

$$J_1 : Ker\mathcal{A}^* \to Ker\,\mathbb{A}^*,\ J_1\xi = ((A^* + C_1^*)\xi, \xi),\ \xi \in Ker\,\mathcal{A}^*.$$

В *пятом параграфе* рассматриваются вопросы фредгольмовости и обратимости операторов. Соответственно получены следующие утверждения.

Для операторов, определяемых равенствами (5) и (6) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.1 *Множество состояний обратимости разностных операторов* $\mathcal{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $\mathbb{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ *совпадают, т.е.*

$$St_{inv}(\mathcal{D}) = St_{inv}(\mathbb{D}).$$

Теорема 2.5.3 *Разностный оператор* $\mathcal{D} \in End\, l^p$ *вида*

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p\,,$$

обратим тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, *построенных по операторнозначной функции* $U : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, *где оператор* $U(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ *задается матрицей вида (3), допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}$.

Теорема 2.5.4 *Операторы* $\mathcal{D}$ *и* $\mathbb{D}$ *одновременно обратимы и обратный к* $\mathbb{D}$ *имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) & \mathcal{D}^{-1} \\ S\mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) - I & S\mathcal{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим разностный оператор

$$\mathcal{D} : l^p \to l^p = l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}), (\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1 x(n+1) + B_2 x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l^p\,,$$

с постоянными операторными коэффициентами $B_1, B_2 \in End\,\mathfrak{X}$. Далее используется функция

$$H = H_{\mathcal{D}} : \mathbb{T} \to End\,\mathfrak{X}, H(\gamma) = \gamma^2 I + \gamma B_1 + B_2,\ \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$

которую назовем *характеристической функцией* оператора $\mathcal{D}$. Дополнение $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ к (открытому) множеству

$$\rho(H) = \{\gamma_0 \in \mathbb{T} : H(\gamma_0) \text{ - обратимый оператор из } End\,\mathfrak{X}\}.$$

назовем *сингулярным* множеством функции.

Теорема 2.5.5 *Разностный оператор $\mathcal{D}$ (с постоянными операторными коэффициентами B_1, B_2) обратим тогда и только тогда, когда множество $s(H) = \varnothing$. Если $s(H) = \varnothing$, то обратный оператор $\mathcal{D}^{-1} \in End\, l^p$ представим в виде*

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(n) = (G * x)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G(n-m)x(m),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}).$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, End\,\mathfrak{X})$ (со сверткой функций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1}\gamma^n d\gamma,\ n \in \mathbb{Z}.$$

В условиях следующей теоремы будем полагать, что существуют (в равномерной операторной топологии) пределы

$$\lim_{n\to\pm\infty} B_1(n) = B_1^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}, \quad \lim_{n\to\pm\infty} B_2(n) = B_2^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}.$$

Спектры $\sigma(\mathbb{B}^{\pm})$ операторов $\mathbb{B}^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}^2$, определяемых операторными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2^{\pm} & B_1^{\pm} \end{pmatrix}$, совпадают со спектром $\sigma(L^{\pm})$ соответствующего операторного пучка $L^{\pm}(\lambda) = \lambda^2 I - B_1^{\pm}\lambda + B_2^{\pm},\ \lambda \in \mathbb{C}$. Отметим, что по определению

$$\sigma(L^{\pm}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L^{\pm}(\lambda) \text{ – необратимый оператор в алгебре } End\,\mathfrak{X}\}.$$

Имеет место

Теорема 2.5.8 *Разностный оператор* $\mathcal{D} \in End\, l^p$ *обратим, если спектральные радиусы* $r\,(L^{\pm}) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(L^{\pm})\}$ *операторных пучков* $L^{\pm}$ *меньше единицы.*

В условиях следующей теоремы будем полагать выполненным условие.

Предположение 2.5.1 *Существуют числа* $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, *такие, что семейство эволюционных операторов* $\mathcal{U}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на множествах*
$\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq a\}, \mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq b\}$ *с расщепляющими парами проекторнозначных функций* $P_-, Q_- : \mathbb{Z}_{-,a} \to End\,\mathbf{Y}$, $P_+, Q_+ : \mathbb{Z}_{b,+} \to End\,\mathbf{Y}$.

Теорема 2.5.10 *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– конечномерное пространство. Оператор* $\mathcal{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ *является фредгольмовым тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов* $\mathcal{U} : \Delta \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, *построенных по функции* $U : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, *определяемой матрицей вида (3), удовлетворяет условиям предположения 2.5.1.*

Теорема 2.5.11 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.8, операторы* $B_1(n)$, $B_2(n), n \in \mathbb{Z}$, *компактны и* $\sigma(\mathbb{B}^{\pm}) \bigcap \mathbb{T} = \emptyset$. *Тогда оператор* $\mathcal{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ *фредгольмов.*

Далее рассматривается однородное уравнение

$$x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

на $\mathbb{Z}_+$ и делается

Предположение 2.5.2 *Пусть функции* $B_1, B_2 : \mathbb{Z}_+ \to End\,\mathfrak{X}$ *являются постоянными* ($B_k(n) \equiv B_k \in End\,\mathfrak{X}, n \in \mathbb{Z}_+, k = 1, 2$) *и все решения однородного разностного уравнения, рассматриваемого на* $\mathbb{Z}_+$, *ограничены.*

Теорема 2.5.12 *Пусть выполнены предположения 2.5.2 и условие*

$$\sigma(\mathbb{B}) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}.$$

Тогда существуют операторнозначные функции $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, End\,\mathfrak{X}^2)\,, 1 \leq k \leq m$, *такие, что для любого решения* $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathfrak{X}$ *уравнения (7) имеют место следующие представления*

$$(x(n), x(n+1)) = (\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^n A_k(n))(x(0), x(1)), n \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции $A_k, 1 \leq k \leq m$, *обладают следующими свойствами:*

1) операторы $A_k(n) \in End\,\mathfrak{X}^2, n \in \mathbb{Z}_+$, *принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре* $\mathcal{A}_{\mathbb{B}}$ *из* $End\,\mathfrak{X}^2$, *содержащей оператор* $\mathbb{B}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ||A_k(n+1) - A_k(n)|| = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbb{B}A_k(n) - \gamma_k A_k(n)|| = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} ||A_k(n)A_j(n)|| = 0$ *для* $k \neq j,\ 1 \leq k,\ j \leq m$.

В третьей главе в пространстве L^p рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$\ddot{x} + B_1(t)\dot{x} + B_2(t)x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in W_p^2, p \in [1, \infty], \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{X}), \tag{8}$$

где $B_i \in L^\infty(\mathbb{R}, End\,\mathfrak{X}),\ i = 1, 2,\ \mathfrak{X}$ – комплексное банахово пространство. Далее путем замены

$$y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \dot{x}(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

дифференциальное уравнение вида (8) сводится к уравнению вида:

$$\dot{y} + \mathbb{B}(t)y = \tilde{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in W_p^1(\mathbb{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}), p \in [1, \infty], \quad \tilde{f} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}), \tag{10}$$

где функция $\mathbb{B} \in L^\infty(\mathbb{R}, End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}))$ имеет вид:

$$(\mathbb{B}y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\ \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Из способа задания уравнения (10) по уравнению (8) следует

Теорема 3.1.1 *Функция $x \in L^p$ является решением уравнения* (8) *тогда и только тогда, когда $y \in L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}\times\mathfrak{X})$, построенная по правилу* (9)*, является решением уравнения* (10)*.*

Во *втором параграфе* настоящей главы в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ рассматриваются операторы

$$\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2 : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X},$$

где $D(\mathcal{A}) = D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$ и оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, заданный в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ матрицей

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix},$$

т.е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Для доказательства одновременной обратимости рассматриваемых операторов получены следующие утверждения.

Лемма 3.2.1 *Ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор*

$$J : Ker\mathcal{A} \to Ker\mathbb{A},\ Jx = (x, Ax),\ x \in Ker\mathcal{A}.$$

Пусть операторы $\mathcal{A}^*$ и $\mathbb{A}^*$ – сопряженные к операторам $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ соответственно.

Лемма 3.2.2 *Ядра $Ker\mathcal{A}^*$, $Ker\mathbb{A}^*$ операторов $\mathcal{A}^*, \mathbb{A}^*$ изоморфны. Изоморфизм осуществляет оператор:*

$$J_1 : Ker\mathcal{A}^* \to Ker\mathbb{A}^*,\ J_1\xi = ((A + B_1)\xi, \xi),\ \xi \in Ker\mathcal{A}^*.$$

В двух следующих леммах отражены вспомогательные утверждения для доказательства одновременной замкнутости образа рассматриваемых операторов.

Лемма 3.2.3 *Произвольный элемент $z \in \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда пара $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.*

Лемма 3.2.4 *Пара $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда вектор $y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$.*

Одновременная замкнутость рассматриваемых операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ установлена в следующей лемме

Лемма 3.2.5 *Образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.* Одновременная сюръективность рассматриваемых операторов установлена в лемме

Лемма 3.2.6 *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ сюръективны одновременно.* В заключении настоящего параграфа получена теорема

Теорема 3.2.1 *Оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathbb{A}$.*

В *третьем параграфе* настоящей главы рассмотрены приложения полученных результатов.

В четвертой главе в конечномерном линейном нормированном пространстве X рассматривается разностное уравнение первого порядка вида:

$$x(t+1) = Bx(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где $B \in End\, X$ и $f \in C_0$.

Основным результатом данной главы является теорема о качественной структуре решения данного уравнения.

Теорема 4.1.1 *Если существует равномерно непрерывное ограниченное ре-*

шение $x : \mathbb{R} \to X$ *уравнения (11), то оно представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x_j \in C_{1,\infty}, 1 \leq j \leq m$, *а числа* φ_j *принадлежат промежутку* $[0, 2\pi)$, *причем*

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_m}\}, \qquad \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Во *втором параграфе* вводится понятие спектра Берлинга векторов и функций. Также приводятся результаты, содержащие сведения о структуре и свойствах спектра Берлинга векторов из комплексного банахова пространства $\mathfrak{X}$. Доказано необходимое и достаточное условие периодичности вектора x из банахова L^1 - модуля $\mathfrak{X}$.

В *третьем параграфе* получена теорема о поведении решений разностного уравнения (11) в случае, когда число 1 является единственной точкой спектра оператора B на единичной окружности.

Теорема 4.3.1 *Пусть* $B \in End\, X$ *- линейный оператор, спектр которого* $\sigma(B)$ *обладает свойством: число 1 является единственной точкой спектра оператора* B *на единичной окружности* $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. *Если существует ограниченное равномерно непрерывное решение* x_0 *уравнения (11), то оно является периодической на бесконечности периода 1 функцией, т.е.* $x_0 \in C_{1,\infty}$.

Для доказательства данного факта используется ряд вспомогательных утверждений. В них рассматриваются уравнения специального вида:

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, f \in C_0, \tag{12}$$

где оператор $A \in End\, X$ удовлетворяет одному из условий

$$\begin{aligned} &1) \quad r\,(A) \quad < 1, \\ &2) \quad r\,(A^{-1}) \quad < 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Лемма 4.3.1 *Любое равномерно непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение x_0 уравнения (12), где A удовлетворяет условию 1) из (13), принадлежит пространству C_0, единственно и представимо в виде:*

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n-1) f, \quad f \in C_0.$$

Лемма 4.3.2 *Равномерно непрерывное ограниченное решение уравнения (12), где A обратим и $r\,(A^{-1}) < 1$, единственно, принадлежит пространству C_0 и представимо в виде:*

$$x_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n) f, \quad f \in C_0.$$

Лемма 4.3.3 *Пусть $A \in End\,X$ - линейный оператор, спектр которого $\sigma(A)$ содержится в единичной окружности $\mathbb{T}$, причем*

$$\sigma(A) = \{e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_k}\},$$

где $\varphi_j \in [0, 2\pi), 1 \leq j \leq k$. Тогда каждое решение $x \in C_{b,u}$ уравнения

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},\ f \in C_0,$$

представимо в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{i\varphi_j t} x_{0,j}(t),$$

где $x_{0,j} \in C_{1,\infty}, j = \overline{1,k}$ (т. е. являются периодическими на бесконечности функциями периода 1).

В *четвертом параграфе* приводится достаточное условие существования ограниченных решений уравнения (11).

Теорема 4.4.1 *Пусть спектр оператора B обладает свойством:* $\sigma(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset \mathbb{T}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *- полупростые собственные значения, функция f принадлежит классу W_1. Тогда уравнение (11) имеет ограниченное непрерывное решение.*

Глава 1

Некоторые сведения из теории операторов.

Приводимые в данной главе понятия и результаты используются в работе. Найти их можно в монографиях [1]-[3], [21], [31]-[34], [36]-[38], [54]-[64], [66], [67], [69], [73], [76], [78], [79], [83]-[85], [94]-[101], [106], [108].

1.1. Линейные замкнутые операторы

Определение 1.1.1. Пусть D — линейное подпространство из банахова пространства $\mathfrak{X}$. *Линейный оператор* $A : D \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ — это отображение из D в $\mathfrak{X}$ такое, что $A(x+y) = Ax + Ay$ и $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для любых $x, y \in D(A)$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Подпространство D называют областью определения оператора A и обозначают символом $D(A)$.

Символом I будем обозначать *тождественный оператор*, то есть оператор $I : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ такой, что $Ix = x$, $x \in \mathfrak{X}$.

Определение 1.1.2. Оператор $B : D(B) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ называется *расширением* оператора $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, если $D(B) \subset D(A)$ и $Ax = Bx$, $\forall x \in D(A)$.

Определение 1.1.3. Оператор $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ называется *ограниченным*, если конечна величина $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1, x \in D(A)} \|Ax\|$, принимаемая за норму оператора A.

Теорема 1.1.1. *Если линейный оператор $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ ограничен на $D(A)$ и $D(A)$ плотно в $\mathfrak{X}$, то существует единственный оператор $A \in End\,\mathfrak{X}$, являющийся расширением A, причем $\|\overline{A}\| = \|A\|$.*

Отметим также, что *линейная комбинация* $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ двух операторов $A_i : D(A_i) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, определяется формулой $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x =$

$\alpha_1 A_1 x + \alpha_2 A_2 x$, но область определения этого оператора есть пересечение областей определения A_1 и A_2, то есть $D(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = D(A_1) \cap D(A_2)$.

Произведение $A_1 A_2$ операторов A_1 и A_2 определяется формулой $(A_1 A_2)x = A_1(A_2 x)$; его область определения $D(A_1 A_2)$ состоит из всех векторов $x \in D(A_2)$, таких, что $A_2 x \in D(A_1)$.

Определение 1.1.4. Оператор $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ *коммутирует* с оператором $T \in End\,\mathfrak{X}$, если $AT \supset TA$. Это означает, что всякий раз, когда $u \in D(A)$, вектор Tu также принадлежит $D(A)$ и $ATu = TAu$.

Определение 1.1.5. *Графиком* линейного оператора $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ называется подмножество векторов из $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ вида: (x, Ax), $x \in D(A)$.

Определение 1.1.6. Оператор A называется *замкнутым*, если его график (A) является замкнутым подмножеством из $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ (если, например, положить $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$). Это эквивалентно выполнению следующего свойства: из условий $(x_n) \subset D(A)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y_0$ следует, что $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$.

Замечание 1.1.1. Отметим замкнутость операторов из $End\,\mathfrak{X}$, а также операторов вида: $A + B$, где A – замкнутый оператор, $B \in End\,\mathfrak{X}$.

Определение 1.1.7. Множество векторов $y \in \mathcal{X}$, для которых найдется $x \in D(A)$ такой, что $y = Ax$, называется *образом* оператора A и обозначается через $Im\,A$. Символом $Ker\,A$ обозначается *ядро* оператора A, то есть множество $\{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

Замечание 1.1.2. Если A – замкнутый оператор, то $Ker\,A$ – замкнутое подпространство из $\mathfrak{X}$.

Теорема 1.1.2. *(Банах) Каждый замкнутый оператор с областью определения, совпадающей со всем пространством, ограничен.*

Определение 1.1.8. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ называется *обратимым*, если $Ker\, A = \{0\}$ и $Im\, A = \mathcal{X}$. Через $A^{-1} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ будем обозначать обратный к A оператор.

Если оператор A обратим, то существует оператор $B : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, обладающий свойством $BA \subset AB = I$. Оператор B называется *обратным* к A и обозначается символом A^{-1}.

Теорема 1.1.3. *Если $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ – замкнутый обратимый линейный оператор, то обратный A^{-1} принадлежит $End\, \mathfrak{X}$.*

Определение 1.1.9. Подпространство M из банахова пространства $\mathfrak{X}$ называется *инвариантным* относительно линейного оператора $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, если $Ax \in M$, $\forall x \in M \cap D(A)$.

Определение 1.1.10. Оператор $A_M : D(A_M) \subset M \to M$, определяемый формулой $x \mapsto A_M x = Ax : D(A_M) = D(A) \cap M \subset M \to M$, называется *частью* оператора A или *сужением* оператора A на M.

1.2. Основные понятия спектральной теории операторов

Определение 1.2.1. *Резольвентным множеством* $\rho(A)$ замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ называется множество точек $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный, то есть $(A - \lambda I)^{-1} \in End\, \mathfrak{X}$. При этом функция $R(\cdot, A) : \rho(A) \to End\, \mathfrak{X}$, $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A.

Определение 1.2.2. *Спектром* $\sigma(A)$ замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ называется дополнение к резольвентному множеству $\rho(A)$, то есть $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

Принята следующая классификация спектра операторов, связанная с существованием оператора $(A - \lambda I)^{-1}$.

Множество $\sigma(A)$ представляется в виде суммы:

$$\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

трех взаимно непересекающихся подмножеств.

Определение 1.2.3. Множество всех $\lambda \in \sigma(A)$, для которых отображение $A - \lambda I$ не является взаимно однозначным, то есть $Ker\,(A - \lambda I) \neq \{0\}$ (нарушено первое условие обратимости из определения 1.1.8), называется *дискретным спектром* оператора A и обозначается через $\sigma_d(A)$. Таким образом, $\lambda \in \sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого вектора $x \in D(A)$. Вектор x при этом называется *собственным вектором* оператора A, а число λ — *собственным значением.*

Определение 1.2.4. *Непрерывным спектром* оператора A называется множество

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}, Im\,(A - \lambda I) \neq \mathfrak{X}, \overline{Im\,(A - \lambda I)} = \mathfrak{X}\}.$$

Определение 1.2.5. *Остаточным спектром* оператора A называется множество $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}, \overline{Im\,(A - \lambda I)} \neq \mathfrak{X}\}$.

Множества $\rho(A)$, $\sigma_d(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ взаимно не пересекаются и $\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Теорема 1.2.1. *Если $\lambda, \mu \in \rho(T)$, где T – замкнутый оператор, то справедливо равенство:*

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T),$$

которое называется тождеством Гильберта.

Замечание 1.2.1. Если $A \in End\,\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – конечномерное линейное пространство, то $\sigma(A) = \sigma_d(A)$ – конечномерное множество с числом элементов, не превосходящим размерности $\dim \mathfrak{X}$ пространства $\mathfrak{X}$.

Определение 1.2.6. Оператор $T \in End\,\mathfrak{X}$ называется *компактным*, если множество $T(\overline{B}(0,1))$ относительно компактно в $\mathfrak{X}$ (здесь $\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathfrak{X} : \|x\| \leq 1\}$) – замкнутый шар с центром в точке $0 \in \mathfrak{X}$ с радиусом 1).

Теорема 1.2.2. *Пусть T – компактный оператор. Тогда $\sigma(T)$ – не более чем счетное множество, не имеющее предельных точек, отличных от нуля. Каждое число $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$, является собственным значением конечной кратности, т. е.* $\dim Ker\,(\lambda I - T) < \infty$.

Определение 1.2.7. Замкнутый оператор A называется *оператором с компактной резольвентой*, если для некоторого $\lambda_0 \in \rho(A)$ оператор $R(\lambda_0, A)$ компактен.

Замечание 1.2.2. Если A – оператор с компактной резольвентой, то все операторы вида $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$ компактны.

Теорема 1.2.3. *Если замкнутый оператор A – оператор с компактной резольвентой, то спектр $\sigma(A)$ – не более чем счетное множество, не имеющее ненулевых предельных точек, которые являются собственными значениями конечной кратности.*

1.3. Разбиение спектра

Определение 1.3.1. Линейный ограниченный оператор $P \in End\,\mathfrak{X}$ называется *проектором*, если $P^2 = P$.

Каждый проектор P индуцирует разложение банахова пространства $\mathfrak{X}$ в прямую сумму $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ (т. е. $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – замкнутые подпространства

из $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = \{0\}$, и любой вектор x представим в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{X}_1$, $x_2 \in \mathfrak{X}_2$). А именно, положим $\mathfrak{X}_1 = Im\, P$ и $\mathfrak{X}_2 = Ker\, P$. Оператор $I - P$ также является проектором, причем $\mathfrak{X}_1 = Ker\,(I - P)$ и $\mathfrak{X}_2 = Im\,(I - P)$. Следовательно, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$.

Обратно, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ – прямая сумма подпространств $\mathfrak{X}_i$, $i = 1, 2$, то существует проектор, осуществляющий это разложение. Следует положить $Px = x_1$, где вектор $x_1 \in \mathfrak{X}_1$ однозначно определяется из представления $x = x_1 + x_2$, $x_i \in \mathfrak{X}_i$, $i = 1, 2$. Оператор P называется *оператором проектирования* на $\mathfrak{X}_1$ параллельно $\mathfrak{X}_2$.

Определение 1.3.2. Если для замкнутого оператора A существуют инвариантные линейные подпространства $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, такие, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, то говорят, что A *приводится парой* $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$.

Вообще, оператор A *приводится семейством* линейных подпространств $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{X}_n$ и каждое $\mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, m$, инвариантно относительно A.

Замечание 1.3.1. Замкнутый оператор A приводится парой подпространств $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ тогда и только тогда, когда $AP \supset PA$, где P – оператор проектирования на $\mathfrak{X}_1$ параллельно $\mathfrak{X}_2$.

Определение 1.3.3. Будем говорить, что замкнутый оператор A допускает *разложение относительно прямой суммы* $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \ldots \mathfrak{X}_n$, если A приводится каждым из подпространств $\mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$, а именно, $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, где A_i – сужение A на $\mathfrak{X}_i$.

Определение 1.3.4. Предположим, что спектр замкнутого оператора A можно представить в виде: $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_i, $i = 1, 2$ – замкнутые непересекающиеся множества и σ_1 компактно. Тогда можно указать жорданову

замкнутую кривую (или конечное число таких кривых) γ, лежащую в $\rho(A)$, во внутренней части которой содержится σ_1, а во внешней – σ_2. Проектор

$$P(\sigma_1, A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R(\lambda, A)\, d\lambda.$$

называется *проектором Рисса*, построенным по изолированной части σ_1 спектра оператора A.

Теорема 1.3.1. *Пусть спектр замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ допускает описанное в определение 1.3.4 разбиение на части σ_1 и σ_2. Тогда оператор A допускает разложение $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_i = A|\mathfrak{X}_i$, $i = 1, 2$, — сужение A на $\mathfrak{X}_i$ относительно прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ инвариантных относительно A подпространств $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, причем $\mathfrak{X}_i = Im\, P_i$, $i = 1, 2$, $P_1 = P(\sigma_1, A)$ — спектральный проектор Рисса, построенный по изолированной части σ_1 спектра оператора A, а $P_2 = I - P_1$. Кроме того, $\sigma(A_i) = \sigma_i$, $i = 1, 2$, $\mathfrak{X}_1 \in D(A)$ и $A_1 \in End\, \mathfrak{X}$.*

Определение 1.3.5. Пусть λ_1 — изолированное собственное значение замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, и пусть $P_1 = P(\lambda_1, A)$ — спектральный проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda_1\}$. Число $\nu(\lambda_1) = dim\, \mathfrak{X}_1$, где $\mathfrak{X}_1 = Im\, P_1$, называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_1. Если $Ax = \lambda_1 x$ для любого $x \in \mathfrak{X}_1$, то есть $\mathfrak{X}_1 = Ker\, (A - \lambda_1 I)$, то собственное значение λ_1 называется *полупростым*. Если при этом $\nu(\lambda_1) = dim\, \mathfrak{X}_1 = 1$, то собственное значение λ_1 называется *простым*.

Замечание 1.3.2. Если $\mathfrak{X}$ – конечномерное пространство (и следовательно, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $m \leq \dim \mathfrak{X}$), то A допускает разложение $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ относительно прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{X}_m$, где $\mathfrak{X}_i = P(\{\lambda_i\}, A)$ и $\sigma(A|\mathfrak{X}_i) = \{\lambda_i\}$, $i = 1, \ldots, m$. Отсюда, оператор A допускает *спектральное представление* $A = (\lambda_1 I_1 + N_1) \oplus \cdots \oplus (\lambda_m I_m + N_m)$, где N_i – нильпотентный оператор из $End\, \mathfrak{X}_i$.

Глава 2

Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка

В данной главе рассматриваются линейные разностные операторы (уравнения) второго порядка. Приводятся условия их обратимости, фредгольмовости, получено асимптотическое представление решений однородного разностного уравнения. Основные результаты данной главы получены на основе сопоставления исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка и последующего использования теории разностных операторов первого порядка, определяемых этой операторной матрицей.

Во втором параграфе вводится понятие, играющее важную роль в классификации спектров операторов (более разнообразной, чем общепринятой), а именно, понятие состояний обратимости операторов, а также, понятие фредгольмовости операторов (в терминах вводимого определения состояний обратимости операторов).

В третьем параграфе рассматривается оператор вида (2.5). Его дальнейшее изучение проводится на основе вводимых в данном параграфе понятий эволюционного семейства и экспоненциальной дихотомии.

Четвертый параграф посвящен рассмотрению абстрактного случая, а именно, операторам вида 2.7 и 2.8. Основным результатом данного параграфа является теорема 2.4.1 о совпадении состояний обратимости изучаемых операторов. Приводимые далее утверждения доказывают каждое из условий, отраженных в определении 2.2.1. Одновременное выполнение условий 1 - 3 для оператора (2.7) и (2.8) следует из леммы 2.4.1, условие 4 немедленно вытекает из леммы 2.4.1 и теоремы 2.4.2, выполнение свойства 5 следует из леммы 2.4.4, лемма 2.4.4 и 2.4.1 обеспечивает свойство 6. Для доказательства

других свойств из определения 2.2.1 используется представление оператора (2.8) в виде (2.9). Одновременное выполнение свойств 7 - 11 можно получить из замечания 2.4.5. В теореме 2.4.3 получен явный вид для обратного к (2.8) оператора. Далее рассматривается иной подход к доказательству свойств 7 - 11, (лемма 2.4.8), а именно, переход к сопряженным. Итогом рассмотрения абстрактного случая является теорема 2.5.1, утверждающая совпадение состояний обратимости для вводимых в рассмотрение в параграфе 1 операторов.

Параграф 5 посвящен вопросам обратимости и фредгольмовости рассматриваемых операторов. Так в теореме 2.5.3 приводится условие обратимости разностного оператора вида 2.12. В теореме 2.5.4 утверждается об одновременной обратимости операторов, рассматриваемых в параграфе 1. Далее рассматривается оператор вида 2.13. В теореме 2.5.5 приведено условие обратимости оператора вида 2.13 с использованием вводимого понятия характеристической функции рассматриваемого оператора. В теореме 2.5.8 с учетом дополнительных ограничений приводится условие обратимости рассматриваемого в параграфе 1 оператора $\mathcal{D}$. Теоремы 2.5.10 и 2.5.11 отражают условия фредгольмовости оператора $\mathcal{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$. В теореме 2.5.12 получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения второго порядка (уравнения (2.1) с $f = 0$).

2.1. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{X}$ – комплексное банахово пространство. В банаховом пространстве $l^p = l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $1 \le p \le \infty$, двусторонних последовательностей векторов из $\mathfrak{X}$ с нормой

$$||x|| = ||x||_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} ||x(n)||^p)^{1/p}, \quad x \in l^p\,,\ p \in [1, \infty),$$

$$||x|| = ||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} ||x(n)||, \quad x \in l^\infty\,,$$

рассматривается разностное уравнение второго порядка вида:

$$x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

где $f \in l^p$, $B_k : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}$, $k = 1, 2$, – ограниченные операторнозначные функции, т. е. $B_k \in l^\infty(\mathbb{Z}, End\,\mathfrak{X})$, $k = 1, 2$. Символом S обозначим оператор сдвига последовательностей из l^p : $S \in End\,l^p$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$.

Любой последовательности $x \in l^p$ поставим в соответствие последовательность $y : \mathbb{Z} \to \mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ вида (в декартовом произведении $\mathfrak{X}^2$ рассматривается норма $||(x_1, x_2)|| = \max\{||x_1||, ||x_2||\}, (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}^2$): $y(n) = (x_1(n), x_2(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_1 = x$, $x_2 = Sx$. Непосредственно из определения последовательности y следует, что последовательность $x \in l^p$ есть решение уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда последовательность $y \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ удовлетворяет уравнению (рассматриваемому в $l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$):

$$z(n+1) + U(n)z(n) = \tilde{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

где $\tilde{f} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$, $\tilde{f}(n) = (0, f(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, и операторнозначная функция $U : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}^2$ имеет вид: каждый оператор $U(n) \in End\,\mathfrak{X}^2$ задается (определяется) в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Иногда будем отождествлять матрицу оператора, действующего в декартовом произведении банаховых пространств, с оператором, который задается этой матрицей (по возможности, постараемся этого избегать). Кроме того, используется канонический изоморфизм пространств $l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$, $l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}) \times l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$.

Прием, использующий сведение дифференциальных и разностных уравнений высокого порядка к соответствующим дифференциальным и разностным уравнениям первого порядка, широко применяется в теории дифференциальных и разностных уравнений и, более того, излагается в университетских курсах по теории дифференциальных и разностных уравнений.

Уравнения (2.1) и (2.2) запишем в операторном виде:

$$\mathcal{D}x = f,\ f \in l^p\ = l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}),$$

$$\mathbb{D}y = g,\ g \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}), \tag{2.4}$$

где разностный оператор $\mathcal{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ определяется формулой:

$$\mathcal{D} = S^2 + \tilde{B}_1 S + \tilde{B}_2.$$

В этой формуле $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ – операторы умножения в $l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ на операторные функции $B_1, B_2 : \mathbb{Z} \to End\, \mathfrak{X}$ соответственно, т. е.

$$(\tilde{B}_k x)(n) = B_k(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}),\ k = 1, 2.$$

Оператор $\mathbb{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ в (2.4) имеет вид:

$$\mathbb{D} = \mathbb{S} + \mathbb{B},$$

где операторы $\mathbb{S}, \mathbb{B} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ определяются равенствами:

$$\mathbb{S}x = (Sx_1, Sx_2), (\mathbb{B}x)(n) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix},$$

$$n \in \mathbb{Z},\ x = (x_1, x_2) \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2) \simeq l^p\,(\mathbb{Z} \times \mathfrak{X}) \times l^p\,(\mathbb{Z} \times \mathfrak{X}).$$

Таким образом, оператор $\mathbb{D}$ определяется в $l^p\ \times l^p$ матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} S & -I \\ \tilde{B}_2 & S + \tilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Понятие состояний обратимости операторов

При описанном выше подходе сведения уравнения (2.1) к уравнению (2.2), одновременно обратимы оператор $\mathcal{D}$ и оператор $\tilde{\mathbb{D}}$, имеющий вид:

$$\tilde{\mathbb{D}} : \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} S & -I \\ \tilde{B}_2 & S + \tilde{B}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix}, x \in l^p\,,$$

определенный на подпространстве $\{(x, Sx) \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2),\ x \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})\}$ со значениями в подпространстве $\{0\} \times l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$. Неудобство использования оператора $\tilde{\mathbb{D}}$ связано с тем, что он действует между разными пространствами, и отсутствуют работы по его изучению. В свою очередь, спектральные свойства оператора $\mathbb{D}$ достаточно хорошо изучены ([1], [5], [6], [8]-[10], [12]-[18], [22]-[27], [81], [85], [96]). Возникает естественный вопрос о близости таких свойств операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ как: совпадение размерности ядер, одновременной замкнутости их образов, совпадение размерности кообразов, одновременной их обратимости. При утвердительном ответе на эти вопросы изучение свойств разностного оператора $\mathcal{D}$ второго порядка, связанных с его обратимостью, сводятся к выяснению соответствующих свойств разностного оператора первого порядка $\mathbb{D}$. Следовательно появляется возможность применения результатов работ [1], [4], [5], [7]-[9], [15], [18], [19], [25], [27]-[30], [39]-[41], [53], [66], [68], [81], [85], [96].

Всюду далее используется следующее важное определение, рассматриваемое в статьях [15], [18], [40], [41].

Определение 2.2.1. Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство и $A \in End\,\mathcal{X}$. Рассмотрим следующие условия:

1) $KerA = \{x \in \mathcal{X} : Ax = 0\} = \{0\}$ (т. е. A – инъективный оператор);

2) $1 \leq n = \dim\ Ker\,A < \infty$;

3) $Ker\,A$ – бесконечномерное подпространство в $\mathcal{X}$ ($\dim\ Ker\,A = \infty$);

4) $Ker\,A$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$;

5) $\overline{Im\,A} = Im\,A$ (образ оператора A замкнут в $\mathcal{X}$), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in \mathcal{X} \setminus Ker\,A} \frac{||Ax||}{dist(x, Ker\,A)},$$

где $dist\,(x, Ker\,A) = \inf\limits_{x_0 \in Ker\,A} ||x - x_0||$ – расстояние от вектора x до подпространства $Ker\,A$;

6) оператор A корректен (равномерно инъективен), т. е. $Ker\,A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$;

7) $Im\,A$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{X}$ конечной коразмерности, т. е.

$$codim\ Im\,A = m \geq 1;$$

8) $Im\,A$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$ бесконечной коразмерности, т. е.

$$codim\ Im\,A = \infty;$$

9) $Im\,A \neq \mathcal{X}$, $\overline{Im\,A} = \mathcal{X}$;

10) $\overline{Im\,A} \neq \mathcal{X}$;

11) $Im\,A = \mathcal{X}$ (A – сюръективный оператор);

12) оператор A обратим (т. е. $Ker\,A = \{0\}$ и $Im\,A = \mathcal{X}$).

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 12$, то будем говорить, что оператор A находится в *состоянии обратимости* σ. Множество всех состояний обратимости оператора A обозначим символом $St_{inv}A$.

Определение 2.2.2. ([1], [18], [85]) Если оператор $A \in End\,\mathcal{X}$ имеет конечномерное ядро (т. е. выполнено одно из условий 1), 2) определения 2.2.1), замкнутый образ конечной коразмерности(т. е. выполнено одно из условий 7), 11)),

то оператор называется *фредгольмовым.* Если оператор A имеет замкнутый образ и конечномерно одно из чисел $\dim Ker\, A$, $codim\ Im\, A = \dim(\mathcal{X}/Im\, A)$, то оператор A называется *полуфредгольмовым.* Число $ind\, A = \dim Ker\, A - codim\ Im\, A$ называется *индексом* фредгольмова (полуфредгольмова) оператора A.

Вводимое понятие состояний обратимости оператора играет важную роль в классификации спектров операторов (более разнообразной, чем общепринятой [37]). Отметим, что аналогичное определение (без изменений) дается для линейного ограниченного оператора $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, действующего из банахова пространства $\mathcal{X}$ в другое банахово пространство $\mathcal{Y}$, и, более того, для линейных отношений [18], [15].

Для доказательства теорем и других формулируемых в этой главе утверждений (результатов) о разностном операторе $\mathcal{D} : l^p \to l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $(p \in [1, \infty])$, существенно используются результаты о разностном операторе $\mathbb{D} \in End\,(l^p \times l^p)$, которые получены в статьях [5], [8], [9], [15], [18], [19], [25], [27] для более общего разностного оператора $\mathfrak{D} \in End\, l^p(\mathbb{Z}, \mathbf{Y})$, где $p \in [1, \infty]$, вида:

$$(\mathfrak{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbf{Y}), \tag{2.5}$$

где $\mathbf{Y}$ – комплексное банахово пространство и $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, End\, \mathbf{Y})$.

2.3. Эволюционные семейства и свойство экспоненциальной дихотомии

Изучение оператора $\mathfrak{D}$ осуществляется с использованием ряда выписываемых далее понятий. По функции $U : \mathbb{Z} \to End\, \mathbf{Y}$ построим (дискретное) семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \triangle = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\} \to$

$End\,\mathbf{Y}$. Оно определяется равенствами:

$$\mathcal{U}(n,m) = \begin{cases} U(n)U(n-1)\dots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$. Исследование разностного оператора $\mathfrak{D}$ проводилось в [8], [9], [18] с существеннным использованием понятия экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}$.

Определение 2.3.1. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \triangle \to End\,\mathbf{Y}$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на подмножестве $\mathbb{J}$ из $\mathbb{Z}$, если существует ограниченная проекторнозначная функция $P : \mathbb{J} \to End\,\mathbf{Y}$ и постоянные $M_0 \geq 1$, $\gamma > 0$ такие, что выполнены следующие свойства:

1) $\mathcal{U}(n,m)P(m) = P(n)\mathcal{U}(n,m)$, $n \geq m$, $m, n \in \mathbb{J}$;

2) $||\mathcal{U}(n,m)P(m)|| \leq M_0 \exp(-\gamma(n-m))$ для $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{J}$;

3) для $m < n$, $m, n \in \mathbb{J}$, сужение $\mathcal{U}_{n,m} : \mathbf{Y}'(m) \to \mathbf{Y}'(n)$ оператора $\mathcal{U}(m,n)$ на область значений $\mathbf{Y}(m) = Im\,Q(m)$ дополнительного к $P(m)$ проектора $Q(m) = I - P(m)$ есть изоморфизм подпространств $\mathbf{Y}'(m)$ и $\mathbf{Y}'(n) = Im\,Q(n)$ (мы полагаем оператор $\mathcal{U}(m,n) \in End\,\mathbf{Y}$, равным $\mathcal{U}_{n,m}^{-1}$ на $\mathbf{Y}'(n)$ и равным нулевому оператору на $\mathbf{Y}(n) = Im\,P(n) \subset \mathbf{Y}$);

4) $||\mathcal{U}(m,n)|| \leq M_0 \exp\gamma(m-n)$ для всех $n \geq m$ из $\mathbb{J}$.

Пару проекторнозначных функций $P, Q : \mathbb{J} \to End\,\mathbf{Y}$, участвующих в определении 2.3.1, назовем *расщепляющей парой* для семейства $\mathcal{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathcal{U}$ имеет место *тривиальная экспоненциальная дихотомия* на $\mathbb{J}$.

2.4. Спектральный анализ абстрактных операторов, отвечающих разностным операторам второго порядка

Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство и A, C_1, C_2 – операторы из алгебры $End\,\mathcal{X}$. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2 \in End\,\mathcal{X}. \tag{2.7}$$

Наряду с оператором $\mathcal{A}$ рассмотрим оператор $\mathbb{A} \in End\,\mathcal{X}^2$, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

т. е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + (A + C_1)x_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$.

Теорема 2.4.1. *Множество состояний обратимости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ совпадает: $St_{inv}\mathcal{A} = St_{inv}\mathbb{A}$.*

Обратимся сначала к доказательству свойств, касающихся ядер операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$.

Лемма 2.4.1. *Ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор*

$$J : Ker\,\mathcal{A} \to Ker\,\mathbb{A},\ Jx = (x, Ax),\ x \in Ker\,\mathcal{A}.$$

Доказательство. Пусть $x \in Ker\,\mathcal{A}$. Поскольку $\mathbb{A}(x, Ax) = (0, \mathcal{A}x) = (0, 0)$, то $(x, Ax) \in Ker\,\mathbb{A}$, т. е. оператор J определен корректно. Очевидно, что он инъективен. Установим его сюръективность. Пусть $(x_1, x_2) \in Ker\,\mathbb{A}$. Тогда $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2) = (0, 0)$. Таким образом, $x_2 = Ax_1$.

Поэтому, $\mathcal{A}x_1 = C_2x_1 + A^2x_1 + C_1Ax_1 = 0$ и, следовательно, $Jx_1 = (x_1, x_2) = (x_1, Ax_1)$, $x_1 \in Ker\,\mathcal{A}$. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.4.1. Из леммы 2.4.1 следует, что условия 1-3 из определения 2.2.1 выполнены для оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда они выполнены для оператора $\mathbb{A}$. При этом $\dim\ Ker\,\mathcal{A} = \dim\ Ker\,\mathbb{A}$. Отметим, что ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ являются замкнутыми подпространствами в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^2 = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ соответственно.

Теперь рассмотрим вопрос дополняемости ядер операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$, $\mathcal{P}_{Ker\,\mathbb{A}}$ – множество непрерывных проекторов на ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ соответственно. Тогда верны следующие утверждения:*

1) Если $P \in \mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$, то проектор $\mathbb{P}$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix}$ принадлежит $\mathcal{P}_{Ker\,\mathbb{A}}$;

2) Если проектор $\tilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_{Ker\,\mathbb{A}}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$, то $\tilde{P} = P_{11} + P_{12}A$ – проектор из $\mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$.

Доказательство. Докажем 1). Пусть $P \in \mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$. Непосредственно проверяется, что оператор $\mathbb{P} \in End\,\mathcal{X}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix}$, является проектором. Докажем, что $\mathbb{P}$ – проектор на подпространство $Ker\,\mathbb{A}$ из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Включение $Im\,\mathbb{P} \subset Ker\,\mathbb{A}$ вытекает из следующих равенств:

$$\mathbb{A}\mathbb{P}x = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} AP - AP & 0 \\ \mathcal{A}P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Если $(x, Ax) \in Ker\,\mathbb{A}$, то $x \in Ker\,\mathcal{A}$ (см. лемму 2.4.1), и тогда

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ AP & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px \\ APx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}.$$

Итак, $Im\,\mathbb{P} = Ker\,\mathbb{A}$, т. е. $\mathbb{P}$ – проектор на ядро оператора $\mathbb{A}$.

Докажем 2). Пусть $\tilde{\mathbb{P}}$ – один из проекторов на $Ker\,\mathbb{A}$, определяемый матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. Докажем, что оператор $\tilde{P} = P_{11} + P_{12}A$ – проектор на $Ker\,\mathcal{A}$, т. е. $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{Ker\,\mathcal{A}}$.

Пусть x – произвольный вектор из $\mathcal{X}$. Тогда $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax) = (P_{11}x + P_{12}Ax, P_{21}x + P_{22}Ax) \in Ker\,\mathbb{A}$. Поэтому повторное применение проектора $\tilde{\mathbb{P}}$ к вектору $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax)$ даёт вектор $((P_{11} + P_{12}A)^2x, y) = ((P_{11} + P_{12}A)x, y)$, где $y = P_{21}x + P_{22}Ax$. Следовательно, $\tilde{P} = P_{11} + P_{12}A$ – проектор. Докажем, что $\tilde{P}$ – проектор на $Ker\,\mathcal{A}$.

Вначале докажем, что $Im\,\tilde{P} \subset Ker\,\mathcal{A}$. Поскольку (в силу леммы 2.4.1) $Ker\,\mathbb{A} = \{(x, Ax), x \in Ker\,\mathcal{A}\}$, то $\tilde{\mathbb{P}}(x, 0) = (P_{11}x, P_{21}x) = (P_{11}x, AP_{11}x)$ для любого вектора $x \in \mathcal{X}$. Следовательно, $P_{21} = AP_{11}$. Применяя проектор $\tilde{\mathbb{P}}$ к вектору $(0, x)$, где $x \in \mathcal{X}$, аналогичным образом устанавливаем, что $P_{22} = AP_{12}$. Итак, проектор $\tilde{\mathbb{P}}$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ AP_{11} & AP_{12} \end{pmatrix}$. Из этого представления проектора $\tilde{\mathbb{P}}$ следует, что $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax) = (\tilde{P}x, A\tilde{P}x)$ для любого вектора $x \in \mathcal{X}$. Следовательно, из леммы 2.4.1 следует, что $Im\,\tilde{P} \subset Ker\,\mathcal{A}$.

Пусть теперь x – произвольный вектор из $Ker\,\mathcal{A}$. Тогда в силу леммы 2.4.1 вектор (x, Ax) принадлежит $Ker\,\mathbb{A}$. Поэтому $\tilde{\mathbb{P}}(x, Ax) = (\tilde{P}x, A\tilde{P}x) = (x, Ax)$. Следовательно, $\tilde{P}x = x$. Итак, $Im\,\tilde{P} = Ker\,\mathcal{A}$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2.4.2. Из леммы 2.4.1 (см. замечание 2.4.1) и теоремы 2.4.2 следует, что условия 1)-4) из определения 2.2.1 выполнены для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ одновременно.

Теперь приступим к рассмотрению свойств 5)-12) из определения 2.2.1 для образов операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$.

Лемма 2.4.2. *Вектор $z \in \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда пара $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $z \in Im\,\mathcal{A}$, и тогда найдется элемент $x \in \mathcal{X}$ такой, что $z = \mathcal{A}x$. Поскольку $\mathbb{A}(x, Ax) = (0, z)$, то $(0, z) \in Im\,\mathbb{A}$. *Достаточность.* Предположим теперь, что пара $(0, z)$ принадлежит $Im\,\mathbb{A}$. Тогда найдется пара $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ такая, что $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + (A + C_1)x_2) = (0, z)$. Из этих равенств следует, $\mathcal{A}x_1 = z$, т. е. $z \in Im\,\mathcal{A}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.4.3. *Пара $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда вектор $y = y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольную пару (y_1, y_2) из $Im\,\mathbb{A}$. Тогда найдется такая пара $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, что выполнены равенства: $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + (A + C_1)x_2) = (y_1, y_2)$. Следовательно, $x_2 = Ax_1 - y_1$, и поэтому $\mathcal{A}x_1 = y_2 + (A + C_1)y_1$. Итак, $y_2 + (A + C_1)y_1 \in Im\,\mathcal{A}$. *Достаточность.* Пусть пара (y_1, y_2) такова, что вектор $y = y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$. Поэтому существует вектор $x \in \mathcal{X}$ такой, что $\mathcal{A}x = y$. Свойство $(y_1, y_2) \in Im\,\mathbb{A}$ будет следовать из следующих равенств: $\mathbb{A}(x, Ax - y_1) = (Ax - Ax + y_1, C_2x + (A + C_1)(Ax - y_1)) = (y_1, \mathcal{A}x - (A + C_1)y_1) = (y_1, y_2)$. Лемма доказана. $\square$

Обратимся теперь к доказательству одновременной замкнутости образов операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$.

Лемма 2.4.4. *Образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут. Рассмотрим последовательность (u_n, v_n), $n \geq 1$, принадлежащую $Im\,\mathbb{A}$ и сходящуюся к элементу $(u_0, v_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Докажем, что $(u_0, v_0) \in Im\,\mathbb{A}$. В силу леммы 2.4.3 последовательность $v_n + (A + C_1)u_n$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$. В силу замкнутости подпространства $Im\,\mathcal{A}$ получаем, что $v_0 + (A + C_1)u_0$ принадлежит $Im\,\mathcal{A}$. Еще раз используя лемму 2.4.3, получаем, что $(u_0, v_0) \in Im\,\mathbb{A}$.

Достаточность. Пусть $\overline{Im\,\mathbb{A}} = Im\,\mathbb{A}$. Докажем замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$. Пусть последовательность (z_n) из $Im\,\mathcal{A}$ является сходящейся к элементу $z_0 \in \mathcal{X}$, и (x_n) – последовательность, для которой $z_n = \mathcal{A}x_n, n \geq 1$. Из леммы 2.4.2 следует, что последовательность $(0, z_n)$, $n \geq 1$, принадлежит $Im\,\mathbb{A}$ и сходится к $(0, z_0) \in Im\,\mathbb{A}$. Из той же леммы 2.4.2 следует, что $z_0 \in Im\,\mathcal{A}$. Лемма доказана. □

Замечание 2.4.3. Одновременное выполнение свойства 6) из определения 2.2.1 для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ следует из леммы 2.4.4 и леммы 2.4.1.

Для доказательства одновременного выполнения свойств 7)-12) из определения 2.2.1 для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ воспользуемся следующим представлением матрицы оператора $\mathbb{A}$ в виде:

$$\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & A + C_1 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ представим в виде произведения

$$\mathbb{A} = \mathcal{J}\mathbb{B}\mathcal{V} \tag{2.9}$$

трех операторов, где операторы $\mathcal{J}, \mathbb{B}, \mathcal{V} \in End\,(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ определяются соответствующими матрицами. При этом $\mathcal{J}^2 = I$; $\mathcal{J}, \mathcal{V}$ – обратимые операторы, матрица оператора $\mathbb{B}$ – верхнетреугольная.

Далее символами $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}, \mathcal{P}_{Im\,\mathcal{A}}, \mathcal{P}_{Im\,\mathbb{B}}$ будут обозначаться множества (непрерывных) проекторов на подпространства $Im\,\mathbb{A}, Im\,\mathcal{A}, Im\,\mathbb{B}$ соответственно.

Замечание 2.4.4. Непосредственно из представления (2.9) оператора $\mathbb{A}$ следует, что имеет место равенство:

$$Im\,\mathbb{A} = \mathcal{J}(Im\,\mathbb{B}).$$

Кроме того, если $\tilde{\mathbb{P}} \in End\,(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ – проектор на $Im\,\mathbb{B}$, то оператор

$$\mathbb{P} = \mathcal{J}\tilde{\mathbb{P}}\mathcal{J}^{-1}$$

есть проектор на $Im\,\mathbb{A}$.

Из замечания 2.4.4 следует, что при описании множества проекторов $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}$ можно остановиться на описании множества $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{B}}$. Далее оператор $A + C_1$ будет иногда обозначаться символом B.

Лемма 2.4.5. *Если $P \in \mathcal{P}_{Im\,\mathcal{A}}$, то проектор $\mathbb{P}$, заданный матрицей*

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(I-P)B & P \end{pmatrix}$$

принадлежит $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathbb{P}$ из $End\,(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(I-P)B & P \end{pmatrix}$. Непосредственная проверка показывает, что квадрат этой матрицы совпадает с этой матрицей. Следовательно, $\mathbb{P}$ – проектор.

Докажем теперь, что $Im\,\mathbb{P} = Im\,\mathbb{A}$. Пусть (y_1, y_2) – произвольная пара из образа оператора $\mathbb{A}$. Из леммы 2.4.3 получаем, что вектор $y = y_1 + (A + C_1)y_2$ принадлежит $Im\,\mathcal{A}$, и следовательно, $(I - P)y = 0$. Поэтому имеют место равенства: $\mathbb{P}(y_1, y_2) = (y_1, Py_2 - (I - P)(A + C_1)y_1) = (y_1, y_2 - (I - P)y) = (y_1, y_2)$. Итак, доказано включение $Im\,\mathbb{A} \subset Im\,\mathbb{P}$.

Докажем включение $Im\,\mathbb{P} \subset Im\,\mathbb{A}$. Пусть (z_1, z_2) – некоторая пара из $Im\,\mathbb{P}$. Следовательно, она может быть представима в виде: $z_1 = y_1, z_2 = Py_2 - (I-P)(A+C_1)y_1$. Для того, чтобы доказать включение $(z_1, z_2) \in Im\,\mathbb{A}$, следует согласно лемме 2.4.3 доказать, что вектор $z_2+(A+C_1)z_1$ принадлежит $Im\,\mathcal{A}$. Действительно, $z_2+(A+C_1)z_1 = Py_2-(I-P)(A+C_1)y_1+(A+C_1)y_1 = Py_2+P(A+C_1)y_1 = P(y_2+(A+C_1)y_1) \in Im\,\mathcal{A}$. Таким образом, установлено равенство $Im\,\mathbb{P} = Im\,\mathbb{A}$. Итак, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}$. Лемма доказана. □

Теорема 2.4.3. *Операторы $\mathcal{A}, \mathbb{A}$ обратимы одновременно и обратный к $\mathbb{A}$ оператор задается матрицей вида*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(A+C_1) & \mathcal{A}^{-1} \\ A\mathcal{A}^{-1}(A+C_1) - I & A\mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Из представления оператора $\mathbb{A}$ в виде (2.9) произведения трех обратимых операторов, следует, что $\mathbb{A}^{-1} = \mathcal{V}^{-1}\mathbb{B}^{-1}\mathcal{J}^{-1}$. Матрицы операторов $\mathcal{V}^{-1}, \mathbb{B}^{-1}, \mathcal{J}^{-1}$ имеют соответственно вид:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1} & \mathcal{A}^{-1}(A+C_1) \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому прямые вычисления ведут к представлению матрицы оператора $\mathbb{A}^{-1}$ в виде (2.10). Теорема доказана. □

В следующей лемме, фактически вытекающей из леммы 2.4.2, используется оператор $\mathbb{B}$ из равенства (2.9).

Лемма 2.4.6. *Если $Im\,\mathbb{B}$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, то $Im\,\mathcal{A}$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$. Размерности коразмерностей подпространств $Im\,\mathcal{A}$ и $Im\,\mathbb{B}$ совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathcal{U} \in End\,(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} I & A+C_1 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. Он обратим, и обратный к $\mathcal{U}$ оператор $\mathcal{U}^{-1}$ задается

матрицей $\begin{pmatrix} I & -(A+C_1) \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Пусть $\mathbb{P}$ – проектор на образ $Im\,\mathbb{B}$ оператора $\mathbb{B}$. Непосредственная проверка показывает, что оператор $\mathbb{P}_0 = \mathcal{U}\mathbb{P}\mathcal{U}^{-1}$, где $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$, является проектором (см. замечание 2.4.4) на образ $Im\,\mathbb{A}_0$ оператора $\mathbb{A}_0 \in End\,(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Пусть $\mathbb{P}_0$ задается матрицей $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$. Из равенства $\mathbb{P}_0\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_0$ следует, что $P_{11}\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $P_{12} = 0$, $P_{22} = I$, $P_{21}\mathcal{A} = 0$. Из равенства $\mathbb{P}_0^2 = \mathbb{P}_0$ вытекает, что $P_{11}^2 = P_{11}$, $P_{21}P_{11} = 0$, т.е. P_{11} – проектор. Включение $Im\,\mathcal{A} \subset Im\,P_{11}$ следует из равенства $P_{11}\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Докажем включение $Im\,P_{11} \subset Im\,\mathcal{A}$. Поскольку $Im\,\mathbb{A}_0 = Im\,\mathcal{A} \times \mathcal{X}$ и $\mathbb{P}_0(x_1, x_2) = (P_{11}x_1, P_{21}x_1 + x_2)$ для любой пары $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, то $P_{11}x_1 \in Im\,\mathcal{A}$ для любого вектора x_1 из $\mathcal{X}$. Итак, P_{11} – проектор на $Im\,\mathcal{A}$, т. е. подпространство $Im\,\mathcal{A}$ дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$. Из равенства $Im\,\mathbb{A}_0 = Im\,\mathcal{A} \times \mathcal{X}$ следует, что размерность подпространств (кообразов) $Im\,(I - \mathbb{P})$, $Im\,(I - \mathbb{P}_0)$ в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ и $Im\,\mathcal{A}$ в $\mathcal{X}$ совпадают. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.4.5. Из доказательства лемм 2.4.5, 2.4.6 и теоремы 2.4.3 выводится, что множество $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}$ проекторов на $Im\,\mathbb{A}$ описывается следующим образом. Для каждого проектора $\mathbb{P}$ из $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}$ найдется проектор $P \in \mathcal{P}_{Im\,\mathcal{A}}$ и оператор $C \in End\,\mathcal{X}$ со свойством $C\mathcal{A} = 0$, такие, что проектор $\mathbb{P}$ задается матрицей вида: $\begin{pmatrix} -CB + I & -C \\ PB + B(CB - I) & P + BC \end{pmatrix}$. В частности, если $P \in \mathcal{P}_{Im\,\mathcal{A}}$ и $C = 0$, то оператор, заданный матрицей $\begin{pmatrix} I & 0 \\ (P - I)B & P \end{pmatrix}$ является проектором на $Im\,\mathbb{A}$ (что соответствует лемме 2.4.5).

Одновременное выполнение свойств 7)-11) из определения 2.2.1 можно получить из взаимоотношений между множеством проекторов $\mathcal{P}_{Im\,\mathcal{A}}$ и $\mathcal{P}_{Im\,\mathbb{A}}$, отмеченных в замечании 2.4.5.

В следующей лемме используется другой подход, основанный на использовании сопряженных к $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ операторов. Сопряженный к $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{A}^*$ имеет вид:

$$\mathcal{A}^* = (A^*)^2 + (A^*C_1^* + C_2^*) \in End\,\mathcal{X}.$$

Для описания сопряженного оператора к $\mathbb{A}$ сопряженное $(\mathcal{X} \times \mathcal{X})^*$ к $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ пространство канонически отождествляется с пространством $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$ $((\xi_1, \xi_2)(x_1, x_2) = \xi_1(x_1) + \xi_2(x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},\ (\xi_1, \xi_2) = \xi \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*)$. Сопряженный к $\mathbb{A}$ оператор $\mathbb{A}^* \in End(\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*)$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} A^* & C_2^* \\ -I & A^* + C_1^* \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.4.7. *Ядра $Ker\,\mathcal{A}^*$, $Ker\,\mathbb{A}^*$ операторов $\mathcal{A}^*, \mathbb{A}^*$ изоморфны. Изоморфизм осуществляет оператор:*

$$J_1 : Ker\mathcal{A}^* \to Ker\,\mathbb{A}^*,\ J_1\xi = ((A^* + C_1^*)\xi, \xi),\ \xi \in Ker\,\mathcal{A}^*.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in Ker\,\mathcal{A}^*$. Поскольку $\mathbb{A}^*((A^*+C_1^*)\xi, \xi) = (0, 0)$, то $J_1\xi \in Ker\,\mathbb{A}^*$. Таким образом, оператор J_1 корректно определен. Поскольку оператор J_1 инъективен, то осталось доказать его сюръективность. Пусть $(\xi_1, \xi_2) \in Ker\,\mathbb{A}^*$, и поэтому,

$$\mathbb{A}^*(\xi_1, \xi_2) = (A^*\xi_1 + C_2^*\xi_2, -\xi_1 + (A^* + C_1^*)\xi_2) = (0, 0).$$

Следовательно, $\xi_1 = (A^* + C_1^*)\xi_2$ и $\mathcal{A}^*\xi_2 = 0$, т. е. $\xi_2 \in Ker\,\mathcal{A}^*$. Из этих равенств получаем, что $J_1\xi_1 = (\xi_1, \xi_2) = ((A^*+C_1^*)\xi_1, \xi_1)$. Лемма доказана. □

Для любого линейного подпространства M из $\mathcal{X}$ символом $M^\perp$ обозначим (замкнутое) подпространство из $\mathcal{X}^*$ вида: $\{\xi \in \mathcal{X}^* : \xi(x) = 0$ для любого $x \in M\}$. В следующей лемме используются равенства (см. теорему 4.12 в [76])

$$(Im\,\mathbb{A})^\perp = Ker\,\mathbb{A}^*,\ (Im\,\mathcal{A})^\perp = Ker\,\mathcal{A}^*. \tag{2.11}$$

Лемма 2.4.8. *Для операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ свойства 7)-11) для их образов выполняются одновременно.*

Доказательство. Из леммы 2.4.6 следует, что образы операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ одновременно дополняемы. При условии их дополняемости из равенства (2.11) и леммы 2.4.7 следует, что коразмерности образов операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ совпадают. Если один из операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ сюръективен (для определенности пусть $\mathcal{A}$), то образ $Im\,\mathbb{A}$ замкнут в силу леммы 2.4.4. Поэтому, из леммы 2.4.8 следует, что $Ker\,\mathbb{A}^* = \{0\}$, т. е. $Im\,\mathbb{A} = \mathcal{X}$.

При выполнении свойства 11) определения 2.2.1 для одного из операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ из равенств (2.11) следует, что ядро соответствующего оператора нулевое. Следовательно, нулевым будет ядро второго оператора и поэтому свойство 9) из определения 2.2.1 выполняется одновременно для обоих операторов (образ второго оператора не может совпасть со всем пространством, так как, тогда в силу доказанного и первый оператор был бы сюръективным). Одновременное выполнение свойства 10) из определения 2.2.1 для операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ следует из равенств (2.11) и изоморфности ядер их сопряженных операторов. □

2.5. К вопросу обратимости и фредгольмовости разностных операторов второго порядка

Теорема 2.5.1. *Множество состояний обратимости разностных операторов $\mathcal{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $\mathbb{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ совпадают, т.е.*

$$St_{inv}(\mathcal{D}) = St_{inv}(\mathbb{D}).$$

Доказательство. Теорема 2.5.1 следует из доказанной теоремы 2.4.1, примененной к операторам $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, $\mathbb{A} = \mathbb{D}$. Теорема доказана. □

В теореме 4 статьи [9] установлена

Теорема 2.5.2. *Для того, чтобы разностный оператор* $\mathfrak{D} \in End\, l^p(\mathbb{Z}, \mathbf{Y})$ *(определяемый функцией* $U \in l^\infty(\mathbb{Z}, End\, \mathbf{Y})$*) был обратим, необходимо и достаточно, чтобы семейство эволюционных операторов* $\mathcal{U}$ *допускало экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}$*. Если оператор* $\mathfrak{D}$ *обратим, то оператор* $\mathfrak{D}^{-1} \in End\, l^p$ *определяется формулой:*

$$(\mathfrak{D}^{-1}y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n,m)y(m),\ n \in \mathbb{Z},\ y \in l^p\,,$$

где функция Грина $G : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to End\, \mathbf{Y}$ *имеет вид:*

$$G(n,m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n,m)P(m), & m \le n, \\ -\mathcal{U}(n,m)Q(m), & m > n, \quad m,n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Имеет место

Теорема 2.5.3. *Разностный оператор* $\mathcal{D} \in End\, l^p$ *вида*

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p\,, \qquad (2.12)$$

обратим тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$*, построенных по операторнозначной функции* $U : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$*, где оператор* $U(n)$*,* $n \in \mathbb{Z}$ *задается матрицей вида (2.3), допускает экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Из теоремы 2.5.1 (из совпадения свойства 12) для операторов $\mathcal{D}$, $\mathbb{D}$) следует, что операторы $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ одновременно обратимы. Осталось к оператору $\mathbb{D}$ применить теорему 2.5.2. Теорема доказана. □

Теорема 2.5.4. *Операторы* $\mathcal{D}$ *и* $\mathbb{D}$ *одновременно обратимы и обратный к* $\mathbb{D}$ *имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) & \mathcal{D}^{-1} \\ S\mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) - I & S\mathcal{D}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Учитывая одновременную обратимость операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$, следует применить теорему 2.4.3 к операторам $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, $\mathbb{A} = \mathbb{D}$. Теорема доказана. $\square$

Теперь рассмотрим разностный оператор

$$\mathcal{D} : l^p \to l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}), (\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1 x(n+1) + B_2 x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l^p, \tag{2.13}$$

с постоянными операторными коэффициентами $B_1, B_2 \in End\,\mathfrak{X}$. Далее используется функция

$$H = H_{\mathcal{D}} : \mathbb{T} \to End\,\mathfrak{X}, H(\gamma) = \gamma^2 I + \gamma B_1 + B_2,\ \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$

которую назовем *характеристической функцией* оператора $\mathcal{D}$. Дополнение $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ к (открытому) множеству

$$\rho(H) = \{\gamma_0 \in \mathbb{T} : H(\gamma_0) \text{ - обратимый оператор из } End\,\mathfrak{X}\}.$$

назовем *сингулярным* множеством функции.

Теорема 2.5.5. *Разностный оператор $\mathcal{D}$ (с постоянными операторными коэффициентами B_1, B_2) обратим тогда и только тогда, когда множество $s(H) = \varnothing$. Если $s(H) = \varnothing$, то обратный оператор $\mathcal{D}^{-1} \in End\,l^p$ представим в виде*

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(n) = (G * x)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n-m)x(m),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}). \tag{2.14}$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, End\,\mathfrak{X})$ (со сверткой функций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n d\gamma,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Согласно теоремы 2.4.3 оператор $\mathcal{D}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим соответствующий ему оператор $\mathbb{D} \in End\, l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ с постоянным операторным коэффициентом $\mathbb{B} \in End\, \mathfrak{X}^2$, заданным в $\mathfrak{X}^2$ матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$. Согласно теореме 7 в статье [9] оператор $\mathbb{D}$ (и, следовательно, $\mathcal{D}$) обратим тогда и только тогда, когда спектр $\sigma(\mathbb{B})$ оператора $\mathbb{B}$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\mathbb{B}) \cap \mathbb{T} = \emptyset. \tag{2.16}$$

В силу теоремы 2.4.3 условие (2.16) эквивалентно выполнению условия $s(H) = \emptyset$.

Если $s(H) = \emptyset$, то непосредственная проверка показывает, что обратный оператор $\mathcal{D}^{-1}$ определяется с помощью формул (2.14), (2.15). Отметим, что в этих формулах функция $\gamma \mapsto H^{-1}(\gamma) : \mathbb{T} \to End\, \mathfrak{X}$ является преобразованием Фурье функции G. Теорема доказана. $\square$

Вернемся к рассмотрению оператора $\mathfrak{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathbf{Y})$, и семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \triangle \to End\, \mathbf{Y}$, построенного по U. Далее считается выполненным следующее

Предположение 2.5.1. *Существуют числа $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, такие, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множествах*
$\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq a\}, \mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq b\}$ *с расщепляющими парами проекторнозначных функций $P_-, Q_- : \mathbb{Z}_{-,a} \to End\, \mathbf{Y}$, $P_+, Q_+ : \mathbb{Z}_{b,+} \to End\, \mathbf{Y}$.*

Введем в рассмотрение линейный оператор

$$\mathcal{N}_{b,a} : Im\, Q_-(a) \to Im\, Q_+(b),\ \mathcal{N}_{b,a} x = Q_+(b)\mathcal{U}(b,a)x, x \in Im\, Q_-(a).$$

Если $a = b$, то полагается $\mathcal{U}(b,a) = I$. Он был определен в статьях [8], [18] и

назван *"узловым"*. Важность его рассмотрения обусловлена тем, что он действует между подпространствами "фазового"пространства $\mathbf{Y}$, а не в $l^p(\mathbb{Z}, \mathbf{Y})$.

В теореме 1.12 статьи [18] установлена

Теорема 2.5.6. *Пусть выполнено предположение 2.5.1. Тогда*

$$St_{inv}\mathfrak{D} = St_{inv}\mathcal{N}_{b,a}.$$

В частности, оператор $\mathfrak{D}$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}$. Если оператор $\mathfrak{D}$ фредгольмов, то

$$\dim Ker\,\mathcal{D} = \dim Ker\,\mathcal{N}_{b,a},\ codim\,Im\,\mathcal{D} = codim\,Im\,\mathcal{N}_{b,a},\ ind\,\mathcal{D} = ind\,\mathcal{N}_{b,a}.$$

Кроме того, в теореме 5.4 статьи [18] установлена

Теорема 2.5.7. *Пусть выполнено предположение 2.5.1 с $Q^{\pm} = 0$. Тогда оператор $\mathfrak{D}$ обратим.*

В условиях следующей теоремы будем полагать, что существуют (в равномерной операторной топологии) пределы

$$\lim_{n\to\pm\infty} B_1(n) = B_1^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}, \quad \lim_{n\to\pm\infty} B_2(n) = B_2^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}.$$

Спектры $\sigma(\mathbb{B}^{\pm})$ операторов $\mathbb{B}^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}^2$, определяемых операторными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2^{\pm} & B_1^{\pm} \end{pmatrix}$, совпадают со спектром $\sigma(L^{\pm})$ соответствующего операторного пучка $L^{\pm}(\lambda) = \lambda^2 I - B_1^{\pm}\lambda + B_2^{\pm}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Отметим, что по определению

$$\sigma(L^{\pm}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L^{\pm}(\lambda) \text{ – необратимый оператор в алгебре } End\,\mathfrak{X}\}.$$

В свою очередь, равенства $\sigma(\mathbb{B}^{\pm}) = \sigma(L^{\pm})$ непосредственно следуют из теоремы 2.5.1.

Имеет место

Теорема 2.5.8. *Разностный оператор* $\mathcal{D} \in End\, l^p$ *обратим, если спектральные радиусы* $r\,(L^{\pm}) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(L^{\pm})\}$ *операторных пучков* $L^{\pm}$ *меньше единицы.*

Доказательство. Рассмотрим наряду с оператором $\mathcal{D}$ оператор $\mathbb{D} \in End\, l^p(\mathbb{Z}, End\, \mathfrak{X}^2)$. Они одновременно обратимы в силу теоремы 2.4.3. Оператор $\mathbb{D}$ задается операторной функцией $U : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ из условий этой теоремы. Из условий теоремы также следует, что в равномерной операторной топологии существует $\lim\limits_{n\to\pm\infty} U(n) = \mathbb{B}^{\pm} \in End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, определяемые операторными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2^{\pm} & B_1^{\pm} \end{pmatrix}$. Как отмечалось перед формулировкой этой теоремы, спектры $\sigma(\mathbb{B}^{\pm})$ операторов $\mathbb{B}^{\pm}$ совпадают со спектрами $\sigma(L^{\pm})$ соответствующих операторных пучков $L^{\pm}$. По условию теоремы спектральные радиусы $r\,(\mathbb{B}^{\pm})$ операторов меньше единицы.

Введем в рассмотрение последовательность разностных операторов $\mathcal{D}_k \in End l^p(\mathbb{Z}_+, \mathfrak{X})$, $n \geq 1$, где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, вида $\mathcal{D}_n = I - \mathcal{D}_n^0$

$$(\mathcal{D}_n^0 x)(k) = \begin{cases} \mathcal{U}(n+k)x(k-1), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Она сходится в равномерной операторной топологии к оператору $\mathcal{D}_0 \in End\, l^p(\mathbb{Z}_+, \mathfrak{X})$, $\mathcal{D}_0 = I - \tilde{\mathcal{D}}_0$, где

$$(\tilde{\mathcal{D}}_0 x)(k) = \begin{cases} B^+ x(k-1), & k \geq 1,\ x \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}) \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Операторы $(\tilde{\mathcal{D}}_0)^m$, $m \geq 1$, имеют вид:

$$(\tilde{\mathcal{D}_0}^m x)(k) = \begin{cases} (B^+)^m x(k-m),\ k \geq m, \\ 0,\ 0 \leq k \leq m, \end{cases}$$

где $x \in l^p(\mathbb{Z}_+, \mathfrak{X})$. Имеют место равенства $||\tilde{\mathcal{D}}_0^m|| = ||(B^+)^m||$, $m \geq 1$, и поэтому, $r\,(\tilde{\mathcal{D}}_0) = r(B^+) < 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathcal{D}_n^0 - \tilde{\mathcal{D}}_0|| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n+1} ||U(k) - B^+|| =$

0, то существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $r(\mathcal{D}_n^0) < 1$ для всех $n \geq n_0$. Следовательно, операторы $\mathcal{D}_n = I - \mathcal{D}_n^0$, $n \geq n_0$, обратимы. Из условия $r\left(\mathcal{D}_n^0\right) < 1$ (более подробно, см. теорему 5 статьи [4]) следует, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta \to End\,\mathfrak{X}$, построенное по рассматриваемой функции $U : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}$, допускает тривиально экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{N}_m^+ = m_+ + \mathbb{N}$ при достаточно большом m_+. При этом расщепляющая пара $P_+, Q_+ \in End\,\mathfrak{X}$ имеет вид $P_+(n) = I, Q_+(n) = 0, n \geq m_+ + 1$. Аналогичным образом устанавливается, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множества $\mathbb{N}_{m,-} = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq m_-\}$ при некотором m_+ из $\mathbb{Z}$ с расщепляющей парой $P_-(n) = I, n \in \mathbb{N}_{m,-}$, $Q_-(n) = 0, n \leq m_-$. Таким образом, выполнены условия теоремы 2.5.7, из которой следует обратимость оператора $\mathbb{D}$ и, следовательно, оператора $\mathcal{D}$. Теорема доказана. $\square$

Следующая теорема 1.6, установленная в статье [18], может служить основой для получения необходимых и достаточных условий фредгольмовости изучаемого оператора $\mathcal{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$.

Теорема 2.5.9. *Оператор* $\mathfrak{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathbf{Y})$, *определяемый формулой* $(\mathfrak{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), n \in \mathbb{Z}, x \in l^p$, *является фредгольмовым тогда и только тогда, когда для семейства эволюционных операторов* $\mathcal{U} : \Delta \to End\,\mathbf{Y}$, *определенных равенствами (2.6), выполнено предположение 2.5.1 и узловой оператор* $\mathcal{N}_{b,a} : Im\,Q_-(a) \to Im\,Q_+(b)$ *является фредгольмовым. При условии фредгольмовости одного из них их индексы совпадают, а также совпадают размерности ядер и коразмерности образов.*

Имеют место следующие утверждения

Теорема 2.5.10. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– конечномерное пространство. Оператор* $\mathcal{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ *является фредгольмовым тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов* $\mathcal{U} : \Delta \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, *построенных равен-*

ствами (2.6) по функции $U : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, *определяемой матрицей вида (2.3), удовлетворяет условиям предположения 2.5.1.*

Доказательство. Учитывая теоремы 2.5.7 и 2.5.9, условие фредгольмовости оператора $\mathcal{D}$ сводится к условиям фредгольмовости узлового оператора $\mathcal{N}_{b,a} :_{-} (a) \to_{+} (b)$. Поскольку $\mathfrak{X}$ – конечномерное пространство, то $Im\,Q_{-}(a)$, $Im\,Q_{+}(b)$ - конечномерные пространства. Поэтому, $\mathcal{N}_{b,a}$ – фредгольмов оператор. Теорема доказана. □

Теорема 2.5.11. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.8, операторы* $B_1(n)$, $B_2(n), n \in \mathbb{Z}$, *компактны и* $\sigma(\mathbb{B}^{\pm}) \bigcap \mathbb{T} = \emptyset$. *Тогда оператор* $\mathcal{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ *фредгольмов.*

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 2.5.8 рассмотрим (используются обозначения из ее доказательства) последовательность разностных операторов $\mathcal{D}_n = I - D_n^0, n \geq 1$. Она сходится в равномерной операторной топологии к оператору $\mathcal{D}_0 = I - \tilde{\mathcal{D}}_0$. Оператор $\mathcal{D}_0 \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ является корректным (равномерно инъективным) в силу леммы 7 и теоремы 7 из статьи [7] (см. также [15]), причем он обратим слева. Из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathcal{D}_n - \mathcal{D}_0|| = 0$ следует обратимость слева операторов $\mathcal{D}_n, n \geq n_0$, для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Еще раз используя указанные результаты из [7] получаем, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, построенное по операторной функции $U : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ (определяемой с помощью матричной функции (2.3)) допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{J}_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$, с некоторой расщепляющей парой $P_+, Q_+ : \mathbb{J}_0 \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$. Непосредственно из свойства 3 определения 2.3.1 экспоненциальной дихотомии следует, что операторы $\mathcal{U}_{n,m} : \mathbf{Y}(m) \to \mathbf{Y}(n), n, m \in \mathbb{J}_0$, где $\mathbf{Y} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, осуществляют изоморфизм пространств $\mathbf{Y}(m) = Im\,Q_+(m), \mathbf{Y}(n) = Im\,Q_+(n)$. Поскольку операторы $\mathcal{U}(n, m)$ при $n - m \geq 2$ являются компактными (при $n - m = 1$ они не компактны), то все

подпространства $\mathbf{Y}(k), k \geq n_0$, конечномерны. Такие же рассуждения проводятся для $n \leq 0$. В итоге получаем, что узловой оператор $\mathcal{N}_{b,a}$ (для достаточно больших $b, |a|, a < b$) действует между конечномерными пространствами $Im\, Q_-(a)$, $Im\, Q_+(b)$, и поэтому является фредгольмовым. Теперь непосредственно из теоремы 2.5.3 следует фредгольмовость оператора $\mathbb{D}$. Следовательно, согласно теореме 2.5.1 фредгольмовым будет оператор $\mathcal{D}$. Теорема доказана. $\square$

В теореме 2.5.12 получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения второго порядка (уравнения (2.1) с $f = 0$).

Далее рассматривается однородное уравнение (2.1) (т. е. при $f = 0$) на $\mathbb{Z}_+$ и делается

Предположение 2.5.2. *Пусть функции $B_1, B_2 : \mathbb{Z}_+ \to End\, \mathfrak{X}$ являются постоянными ($B_k(n) \equiv B_k \in End\, \mathfrak{X}, n \in \mathbb{Z}_+, k = 1, 2$) и все решения однородного (т. е. $f = 0$) разностного уравнения (2.1), рассматриваемого на $\mathbb{Z}_+$, ограничены.*

При сделанном предположении 2.5.2 любое решение $x \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathfrak{X})$ уравнения (2.1) (с $f = 0$), удовлетворяет равенствам:

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \end{pmatrix}, n \geq 0. \tag{2.17}$$

Из ограниченности всех решений уравнения (2.1) и представления (2.17), а также принципа равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза ([37], гл. II), следует, что

$$\sup_{n \geq 0} ||\mathbb{B}^n|| = M(\mathbb{B}) < \infty, \tag{2.18}$$

где $\mathbb{B}$ - оператор из $End\,(\mathfrak{X}\times\mathfrak{X})$, определяемый матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$. Из (2.18) следует, что спектральный радиус оператора $\mathbb{B}$ не превосходит единицы, т. е.

$$\sigma(\mathbb{B})\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq 1\}.$$

Теорема 2.5.12. *Пусть выполнены предположения 2.5.2 и условие*

$$\sigma(\mathbb{B})\cap\mathbb{T}=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_m\}.$$

Тогда существуют операторнозначные функции $A_k\in l^\infty(\mathbb{Z}_+,End\,\mathfrak{X}^2)\,,1\leq k\leq m$, *такие, что для любого решения* $x:\mathbb{Z}_+\to\mathfrak{X}$ *уравнения (2.1) имеют место следующие представления*

$$(x(n),x(n+1))=(\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^n A_k(n))(x(0),x(1)),n\in\mathbb{Z}_+.$$

Функции $A_k,1\leq k\leq m$, *обладают следующими свойствами:*

1) операторы $A_k(n)\in End\,\mathfrak{X}^2,n\in\mathbb{Z}_+$, *принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре* $\mathcal{A}_{\mathbb{B}}$ *из* $End\,\mathfrak{X}^2$, *содержащей оператор* $\mathbb{B}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}||A_k(n+1)-A_k(n)||=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}||\mathbb{B}A_k(n)-\gamma_kA_k(n)||=0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}||A_k(n)A_j(n)||=0$ *для* $k\neq j,\ 1\leq k,\ j\leq m$.

Сформулированная теорема непосредственно следует из теоремы 1 статьи [19].

В заключении данной главы отметим, что в случае, если в уравнении (2.1) присутствует множитель $B_0(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, стоящий перед $x(n+2)$, причем операторные коэффициенты необратимы, то соответствующее ему уравнение (2.2) содержит неограниченный операторный коэффициент $U_0(n)$ перед $z(n+1)$. В этом случае имеется аналог излагаемой здесь теории, где для изучения возникающих здесь разностных операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ применяется теория линейных отношений, развиваемая в статье [11].

Глава 3

О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка

В данной главе рассматриваются линейные дифференциальные операторы (уравнения) второго порядка. Приводится условие их обратимости. Основные результаты данной главы получены на основе сопоставления исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка и последующего использования теории дифференциальных операторов первого порядка, определяемых этой операторной матрицей.

Параграф 2 посвящен рассмотрению абстрактного случая. В теореме 3.2.1 приводится условие одновременной обратимости рассматриваемых операторов, наличие изоморфизма ядер рассматриваемых операторов отражен в лемме 3.2.1 и 3.2.2, условие одновременной замкнутости образов рассматриваемых операторов отражено в лемме 3.2.5. Условие обратимости рассматриваемых операторов, отраженное в теореме 3.1.2, непосредственно вытекает из теоремы 3.2.1.

Параграф 3 содержит приложения полученных результатов.

3.1. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{X}$ – комплексное банахово пространство. Рассмотрим в пространстве L^p дифференциальное уравнение вида:

$$\ddot{x} + B_1(t)\dot{x} + B_2(t)x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in W_p^2, \quad p \in [1, \infty], \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{X}), \tag{3.1}$$

где $B_i \in L^\infty(\mathbb{R}, End\,\mathfrak{X})$, $i = 1, 2$.

Далее путем замены

$$y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \dot{x}(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

дифференциальное уравнение вида (3.1) сводится к уравнению вида:

$$\dot{y}+\mathbb{B}(t)y = \tilde{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in W_p^1(\mathbb{R}, \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}), \quad p \in [1, \infty], \quad \tilde{f} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}), \tag{3.3}$$

где функция $\mathbb{B} \in L^\infty(\mathbb{R}, End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}))$ имеет вид:

$$(\mathbb{B}y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\ \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Из способа задания уравнения (3.3) по уравнению (3.1) следует

Теорема 3.1.1. *Функция $x \in L^p$ является решением уравнения* (3.1) *тогда и только тогда, когда $y \in L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, построенная по правилу* (3.2), *является решением уравнения* (3.3).

Используя операторный подход, уравнение (3.1) запишем в виде:

$$\mathcal{D}x = f,$$

где оператор $\mathcal{D} \in W_p^2(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \subset L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \to L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ определяется формулой:

$$\mathcal{D}x = \ddot{x} + \tilde{B}_1\dot{x} + \tilde{B}_2 x.$$

Операторы $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in End\,W_p^2$ есть операторы умножения в W_p^2 на операторные функции $B_1, B_2 : \mathbb{R} \to End\,\mathfrak{X}$ соответственно, т. е.

$$(\tilde{B}_k x)(t) = B_k(t)x(t), t \in \mathbb{R}, x \in W_p^2.$$

Уравнение (3.3) также запишем в операторном виде:

$$\mathbb{D}y = \tilde{f},$$

где $\mathbb{D} \in W_p^1 \times W_p^1 \subset \widetilde{L^p} \to \widetilde{L^p} = L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ представим в виде $\mathbb{D}y = \dot{y} + \mathbb{B}y$, где $\dot{y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$, если $y = (y_1, y_2) \in W_p^1(\mathbb{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ и оператор $\mathbb{B} \in End\, L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ определяется равенствами:

$$(\mathbb{B}x)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Естественным образом возникает вопрос об одновременной обратимости операторов $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$. Следующая теорема является одним из основных результатов данной главы.

Теорема 3.1.2. *Оператор* $\mathcal{D} \in W_p^2(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \subset L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \to L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ *обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор* $\mathbb{D} \in W_p^1 \times W_p^1 \subset \widetilde{L^p} \to \widetilde{L^p} = L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$.

Для линейных операторов и, более того, для линейных отношений в статьях [15], [18], [41], [42], [49] было введено понятие состояний обратимости, которое характеризует определенные свойства ядер и образов линейных операторов (их размерность, дополняемость и т. д.). В данном случае, следуя указанным статьям, можно также доказать (получить) совпадение множества состояний обратимости рассматриваемых операторов.

3.2. Условие обратимости абстрактных замкнутых линейных операторов, отвечающих дифференциальным операторам второго порядка

Пусть $\mathcal{X}$ - банахово пространство. Рассмотрим более общую задачу: $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ - линейный замкнутый оператор, действующий в ком-

плексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$, C_1, C_2 - операторы из алгебры $End\,\mathcal{X}$. По ним построим оператор вида:

$$\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2 : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X},$$

где $D(\mathcal{A}) = D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$.

Наряду с оператором $\mathcal{A}$, рассмотрим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, заданный в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ матрицей $\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}$, т.е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

В дальнейшем, как правило, для задания оператора $\mathbb{A}$ будем использовать запись:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}).$$

Обратимся сначала к доказательству инъективности операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$.

Лемма 3.2.1. *Ядра операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор*

$$J : Ker\mathcal{A} \to Ker\mathbb{A},\ Jx = (x, Ax),\ x \in Ker\mathcal{A}.$$

Доказательство. Пусть $x \in Ker\mathcal{A}$. Поскольку $\mathbb{A}(x, Ax) = (0, \mathcal{A}x) = (0, 0)$, то $(x, Ax) \in Ker\mathbb{A}$, т. е. оператор J определен корректно. Очевидно, что он инъективен. Установим его сюръективность. Пусть $(x_1, x_2) \in Ker\mathbb{A}$. Тогда $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2) = (0, 0)$. Таким образом, $x_2 = Ax_1$. Поэтому, $\mathcal{A}x_1 = C_2 x_1 + A^2 x_1 + C_1 A x_1 = 0$ и, следовательно, $Jx_1 = (x_1, x_2) = (x_1, Ax_1)$, $x_1 \in Ker\mathcal{A}$. $\square$

В следующей лемме используется другой подход, основанный на использовании сопряженных к $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ операторов. Сопряженный к $\mathcal{A}$ оператор A^* имеет вид:

$$\mathcal{A}^* = (A^*)^2 + (A^*B_1^* + B_2^*) : D(\mathcal{A}^*) \subset \mathcal{X}^* \to \mathcal{X}^*,$$

где $D(\mathcal{A}^*) = D((A^*)^2) = \{x \in D(A^*) : A^*x \in D(A^*)\}$. Для описания сопряженного оператора к $\mathbb{A}$ сопряженное $(\mathcal{X} \times \mathcal{X})^*$ к $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ пространство канонически отождествляется с пространством $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$ $((\xi_1, \xi_2)(x_1, x_2) = = \xi_1(x_1) + \xi_2(x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},\ (\xi_1, \xi_2) = \xi \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*)$. Сопряженный к $\mathbb{A}$ оператор $\mathbb{A}^* \in End(\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*)$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} A^* & B_2^* \\ -I & A^* + B_1^* \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.2.2. *Ядра $Ker\mathcal{A}^*$, $Ker\mathbb{A}^*$ операторов $\mathcal{A}^*, \mathbb{A}^*$ изоморфны. Изоморфизм осуществляет оператор:*

$$J_1 : Ker\mathcal{A}^* \to Ker\mathbb{A}^*,\ J_1\xi = ((A + B_1)\xi, \xi),\ \xi \in Ker\mathcal{A}^*.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in Ker\mathcal{A}^*$. Поскольку $\mathbb{A}^*((A^* + B_1^*)\xi, \xi) = (0, 0)$, то $J_1\xi \in Ker\mathbb{A}^*$. Таким образом, оператор J_1 корректно определен. Поскольку оператор J_1 инъективен, то осталось доказать его сюръективность. Пусть $(\xi_1, \xi_2) \in Ker\mathbb{A}^*$, и поэтому,

$$\mathbb{A}^*(\xi_1, \xi_2) = (A^*\xi_1 + B_2^*\xi_2, -\xi_1 + (A^* + B_1^*)\xi_2) = (0, 0).$$

Следовательно, $\xi_1 = (A^* + B_1)\xi_2$ и $\mathcal{A}^*\xi_2 = 0$, т. е. $\xi_2 \in Ker\mathcal{A}^*$. Из этих равенств получаем, что $J_1\xi_1 = (\xi_1, \xi_2) = ((A^* + B_1^*)\xi_1, \xi_1)$. □

В двух следующих леммах отражены вспомогательные утверждения для доказательства одновременной замкнутости образа рассматриваемых операторов.

Лемма 3.2.3. *Произвольный элемент $z \in \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда пара $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $z \in Im\mathcal{A}$, то есть найдется элемент $x \in \mathcal{X}$ такой, что $z = \mathcal{A}x = (A^2 + C_1A + C_2)x$. Имеют место равенства:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - Ax \\ C_2x + (A + C_1)Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Следовательно, устанавливаем, что пара $(0, z)$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.

Достаточность. Предположим теперь, что пара $(0, z) \in Im\,\mathbb{A}$. Тогда найдется пара $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ такая, что

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2x_1 + (A + C_1)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Откуда ясно, что $\mathcal{A}x_1 = z$, т. е. z принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$. □

Лемма 3.2.4. *Пара $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда вектор $y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольную пару (y_1, y_2) из образа оператора $\mathbb{A}$. Тогда найдется такая пара $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, что выполнены равенства:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2x_1 + (A + C_1)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_2 = Ax_1 - y_1$, и поэтому, $\mathcal{A}x_1 = y_2 + (A + C_1)y_1$, т. е. образ оператора $\mathcal{A}$ представим в требуемом виде.

Достаточность. Пусть пара (y_1, y_2) такова, что $y_2+(A+C_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$, т. е. найдется некоторый элемент $x \in \mathcal{X}$, что выполняется равенство: $\mathcal{A}x = y_2 + (A + C_1)y_1$. Докажем, что пара (y_1, y_2) принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$, т. е. найдется такая пара (x_1, x_2) из пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, что $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. В качестве пары (x_1, x_2) возьмем пару $(x, Ax - y_1)$ из пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Рассмотрим цепочку равенств:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x \\ Ax - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ Ax - y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Ax - Ax + y_1 \\ C_2x + (A + C_1)(Ax - y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \mathcal{A}x - (A + C_1)y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + (A + C_1)y_1 - (A + C_1)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

□

Обратимся теперь к доказательству одновременной замкнутости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$.

Лемма 3.2.5. *Образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Необходимость. Для доказательства, воспользуемся результатами леммы 3.2.3 и леммы 3.2.4. Пусть образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут. Рассмотрим последовательность (u_n, v_n), $n \geq 1$, принадлежащую образу оператора $\mathbb{A}$ и сходящуюся к элементу (u_0, v_0) из пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Покажем, что (u_0, v_0) принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$. В силу леммы 3.2.4 последовательность $v_n + (A + C_1)u_n$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$. В силу замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$ и сходимости $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ получаем, что $v_0 + (A + C_1)u_0$ принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$. Используя вновь результаты леммы 3.2.4, устанавливаем, что пара (u_0, v_0) принадлежит образу

оператора $\mathbb{A}$, что и доказывает замкнутость образа оператора $\mathbb{A}$.

Достаточность. Предположим, что образ оператора $\mathbb{A}$ - замкнутое подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Докажем замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$. Пусть произвольная последовательность $z_n = \mathcal{A}x_n, n \geq 1, x_n \in \mathcal{X}$ сходится к $z_0 \in \mathcal{X}$. Тогда пара $(0, z_n)$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ и сходится к элементу $(0, z_0)$, принадлежащему образу оператора $\mathbb{A}$. В силу леммы 3.2.3 ясно, что z_0 принадлежит образу оператора $\mathcal{A}$. □

Лемма 3.2.6. *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ сюръективны одновременно.*

Доказательство. Из сюръективности одного из операторов $\mathcal{A}$, $\mathbb{A}$ из леммы 3.2.5 следует замкнутость образа второго. Докажем, что он сюръективен. Для любого линейного подпространства M из $\mathcal{X}$ символом $M^{\perp}$ обозначим (замкнутое) подпространство из $\mathcal{X}^*$ вида: $\{\xi \in \mathcal{X}^* : \xi(x) = 0$ для любого $x \in M\}$. Следовательно из равенств (теорема 4.12 в [76])

$$(Im\mathbb{A})^{\perp} = Ker\,\mathbb{A}^*,\ (Im\,\mathcal{A})^{\perp} = Ker\,\mathcal{A}^*.$$

следует сюръективность другого оператора. □

Теорема 3.2.1. *Оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathbb{A}$.*

Доказательство. В силу одновременной инъективности и сюръективности операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$, верно утверждение об их одновременной обратимости. Кроме того, если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то непосредственной проверкой убеждаемся в том, что обратный к оператору $\mathbb{A}$ определяется матрицей:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(A + C_1) & \mathcal{A}^{-1} \\ A\mathcal{A}^{-1}(A + C_1) - I & A\mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

3.3. Условие обратимости дифференциального оператора второго порядка

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_p : W_p^2(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \subset L_p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \to L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$, $\mathcal{L}_p x = \ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x$, $x \in W_p^2$, $p \in [1, \infty]$ и поставим ему в соответствие оператор

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}_p = \frac{d}{dt} - \widetilde{A} : W_p^1 \times W_p^1 \subset \widetilde{L}_p \to \widetilde{L}_p = L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{X}),$$

где операторнозначная функция $\widetilde{A} : \mathbb{R} \to End(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ задаётся с помощью матричной функции

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ A(t) & B(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3.3.1. *Операторы*

$$\mathcal{L}_p : W_p^2 \subset L^p \to L^p,$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_p : W_p^1 \times W_p^1 \subset L^p \times L^p \to L^p \times L^p,$$

$p \in [1, \infty]$, *обратимы одновременно.*

В частном случае, когда $\mathfrak{X}$ - конечномерное пространство, а операторнозначные функции A и B почти периодичны, утверждение теоремы 3.3.1 приведено в монографии [60].

Глава 4

О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений

В данной главе рассматриваются разностные уравнения первого порядка с постоянными операторными коэффициентами. С помощью теории гармонического анализа исследуется качественная структура решений таких уравнений.

Во втором параграфе вводится понятие спектра Берлинга векторов и функций. Также приводятся результаты, содержащие сведения о структуре и свойствах спектра Берлинга векторов из комплексного банахова пространства $\mathfrak{X}$. Доказано необходимое и достаточное условие периодичности вектора x из банахова L^1 - модуля $\mathfrak{X}$.

В третьем параграфе получен результат (теорема 4.3.1) о поведении ограниченных равномерно непрерывных решений разностного уравнения (4.2) в случае, когда число 1 является единственной точкой спектра оператора B на единичной окружности. Кроме того, доказана теорема 4.1.1, которая является обобщением теоремы 4.3.1, т. е. отсутствуют какие-либо ограничения на спектр оператора B.

В четвертом параграфе приводится достаточное условие существования ограниченных непрерывных решений уравнения (4.2).

4.1. Постановка задачи

Пусть X - конечномерное линейное нормированное пространство, $End\, X$ - банахова алгебра линейных операторов, действующих в X. Через $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство равномерно непрерывных и огра-

ниченных функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в X, $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ - замкнутое подпространство функций $x \in C_{b,u}$ со свойством $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$ (исчезающих на бесконечности). Через $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ обозначается банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со сверткой функций в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds, \quad f, g \in L^1. \tag{4.1}$$

В банаховом пространстве $C_{b,u}$ рассмотрим сильно непрерывную группу изометрических операторов:

$$S : \mathbb{R} \to End\, C_{b,u}, (S(t)x)(s) = x(s+t), \quad s,\, t \in \mathbb{R},\, x \in C_{b,u}.$$

Определение 4.1.1. Функцию $x \in C_{b,u}$ назовем *периодической на бесконечности функцией периода* $\omega > 0$ (относительно подпространства C_0), если $S(\omega)x - x \in C_0$.

Множество таких функций будем обозначать через $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определения 4.1.1 следует

Лемма 4.1.1. *Множество периодических на бесконечности функций $C_{\omega,\infty}$ образует банахову алгебру.*

Рассмотрим разностное уравнение вида:

$$x(t+1) = Bx(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

где $B \in End\, X$ и $f \in C_0$.

Основным результатом данной главы является

Теорема 4.1.1. *Если существует равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (4.2), то оно представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

где $x_j \in C_{1,\infty}, 1 \leq j \leq m$, *а числа* φ_j *принадлежат промежутку* $[0, 2\pi)$, *причем*

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_m}\}, \qquad \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

4.2. Спектр Берлинга векторов и функций

Сформулируем и докажем некоторые используемые далее свойства спектра Берлинга векторов из банаховых L^1 - модулей.

Пусть $\mathfrak{X}$ – комплексное банахово пространство, являющееся пространством изометрического сильно непрерывного представления $T : \mathbb{R} \to End\,\mathfrak{X}$. Банахово пространство $\mathfrak{X}$ наделяется структурой банахова L^1 - модуля с помощью формулы

$$fx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) T(-\tau) x \, d\tau, \quad f \in L^1, \quad x \in \mathfrak{X}. \tag{4.4}$$

В частности, если $\mathfrak{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ и $T = S$, то пространство $C_{b,u}$ наделяется структурой банахова L^1 - модуля с помощью свертки (4.1).

Определение 4.2.1. [3]. *Спектром Берлинга вектора* $x \in \mathfrak{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R}$: существует функция $f_0 \in L^1$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$, где $\hat{f}_0$ - преобразование Фурье (см. [3]) функции f_0 в точке $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Заметим, что определение спектра Берлинга зависит от представления T.

Определение 4.2.2. [3]. *Ограниченной аппроксимативной единицей (сокращенно, о.а.е.)* будем называть ограниченную последовательность функций (f_n) из алгебры L^1 со свойствами: 1)$\hat{f}_n(0) = 1, n \geq 1$; 2)$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{|t|\geq\alpha} |f_n(t)|\, dt = 0$ для любого $\alpha > 0$.

Отметим, что имеет место

Лемма 4.2.1. *(Лемма Диткина [34]). Если $\widehat{f}(\lambda_0) = 0$ для функции $f \in L^1$, то существует последовательность (f_n) из L^1 такая, что $\widehat{f_n}(\lambda) = 1$ в окрестности точки λ_0, $\lim\limits_{n\to\infty} dist(\lambda_0, supp\widehat{f_n}) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n * f = 0$.*

Приведем далее ряд утверждений из [3], используемых для доказательства основных результатов.

Лемма 4.2.2. *Для любых $f, g \in L^1$ и любого вектора $x \in \mathfrak{X}$ имеет место равенство*

$$f(gx) = (f * g)x. \tag{4.5}$$

Лемма 4.2.3. *Для любого вектора $x \in \mathfrak{X}$ линейное подпространство $I(x) = \{f \in L^1 : fx = 0\} \subset L^1$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры L^1.*

Лемма 4.2.4. *Если идеал $I(x)$ обладает свойством: для любого λ_0 из $\mathbb{R}$ существует функция f из $I(x)$ такая, что $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$, то $I(x) = L^1$.*

Лемма 4.2.5. *Если множество $\Lambda(y)$ представимо в виде $\Lambda(y) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где σ_0, σ_1 - замкнутые взаимно непересекающиеся множества, то вектор y представим в виде $y = y_0 + y_1$ с $\Lambda(y_0) = \sigma_0$ и $\Lambda(y_1) = \sigma_1$.*

Лемма 4.2.6. *Имеют место следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова L^1- модуля $\mathfrak{X}$:*

1) $\Lambda(x)$ - *замкнутое подмножество из* $\mathbb{R}$ *и* $\Lambda(x) = \varnothing \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\Lambda(fx) \subset supp\, \widehat{f} \cap \Lambda(x)$, $f \in L^1$, $x \in \mathfrak{X}$;

3) $fx = 0$, *если* $supp\, \widehat{f} \cap \Lambda(x) = \varnothing$.

Лемма 4.2.7. *Для векторов из банахова* L^1 *- модуля справедливо равенство:* $fx = 0$, *если* $\widehat{f} = 0$ *на множестве* $\Lambda(x)$ *и множество* $supp\, \widehat{f} \cap \Lambda(x)$ *не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $y = fx$, где $\widehat{f} = 0$ на $\Lambda(x)$ и множество $supp\, \widehat{f} \bigcap \Lambda(x)$ не более чем счетно. Множество $\Lambda(y)$ замкнуто и, ввиду включения $\Lambda(y) \subset supp\ \widehat{f} \cap \Lambda(x)$, не более чем счетно. Если $\Lambda(y) = \emptyset$, то $y = fx = 0$. Допустим, что оно не пусто. Тогда оно содержит некоторую изолированную точку λ_0 и $\Lambda(y) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где $\sigma_0 = \{\lambda_0\}$ и $\lambda_0 \overline{\in} \sigma_1$. В этом случае, согласно леммы 4.2.5, вектор y представим в виде $y = y_0 + y_1$, где $\Lambda(y_0) = \{\lambda_0\}, \Lambda(y_1) = \sigma_1$. По лемме Диткина, существует последовательность функций (f_n) из L^1 такая, что $\widehat{f_n} = 1$ в окрестности точки λ_0, $supp\, \widehat{f_n} \cap \sigma_1 = \emptyset, n \geq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n * f = 0$. Тогда из свойств 2) и 3) леммы 4.2.6 получаем

$$f_n y = f_n y_0 + f_n y_1 = f_n y_0 = y_0, \quad n \geq 1.$$

Поэтому, $y_0 = f_n y_0 = (f_n * f)x \to 0, n \to \infty$, т. е. $y_0 = 0$. Следовательно, $\lambda_0 \overline{\in} \Lambda(y)$. Получаем противоречие в связи с предположением, что $\lambda_0 \in \Lambda(y)$. Лемма доказана. □

Лемма 4.2.8. *Идеал из алгебры* L^1 *вида* $I = \{f \in L^1 : \hat{f}(\frac{2\pi n}{\omega}) = 0, n \in \mathbb{Z}, \omega > 0\}$ *совпадает с замыканием в* L^1 *идеала* $I_\omega = \{S(\omega)f - f, f \in I, \omega > 0\}$.

Доказательство. Отметим, что идеал I_ω содержится в идеале I, т. е. $I_\omega \subset I \subset L^1$. Действительно, если g - элемент из I_ω, то функция g представима в виде: $g = S(\omega)f - f, f \in I$. Следовательно, ее преобразование Фурье имеет вид:

$$\widehat{g}(\lambda) = e^{i\omega\lambda}\widehat{f}(\lambda) - \widehat{f}(\lambda) = (e^{i\omega\lambda} - 1)\widehat{f}(\lambda).$$

Тогда $\widehat{g}(\frac{2\pi n}{\omega}) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, т. е. $g \in I$.

Рассмотрим замыкание $\overline{I_\omega}$ идеала I_ω. Поскольку I - замкнутый идеал, то $\overline{I_\omega} \subset I$. Допустим, что $\overline{I_\omega}$ не совпадает с I, т. е. $\overline{I_\omega} \neq I$.

Далее используется изометрический изоморфизм сопряженного к L^1 банахова пространства L^{1*} банахову пространству существенно ограниченных функций $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R})$ (см. [73]). Согласно изоморфизму каждый функционал $\xi \in L^{1*}$ представим в виде:

$$\xi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(\tau)a(\tau)\,d\tau, \tag{4.6}$$

где $a \in L^\infty$ и $\|\xi\| = \|a\|$. Поскольку $\overline{I_\omega} \neq I$, то по теореме Хана-Банаха (см. [58]) существует функционал ξ, представимый в виде (4.6), который является нулевым на $\overline{I_\omega}$ и ненулевой на I.

Отметим, что идеал $\overline{I_\omega}$ инвариантен относительно всех операторов сдвига $S(t), t \in \mathbb{R}$. Этот факт следует из равенств

$$S(t)(S(\omega)f - f) = S(\omega)S(t)f - S(t)f, \quad t \in \mathbb{R}, f \in I.$$

Пользуясь равенством (4.6) и доказанным свойством, получаем следующее равенство, где участвует рассматриваемый функционал ξ:

$$\xi(S(t)x) = \int\limits_{\mathbb{R}} (S(t)x)(\tau)a(\tau)\,d\tau = 0, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \overline{I_\omega}. \tag{4.7}$$

Из равенств (4.7) следует, что имеет место равенство

$$x * b = 0, \tag{4.8}$$

для любой функции $x \in \overline{I_\omega}$ и функции $b(\tau) = a(-\tau), \tau \in \mathbb{R}$.

Докажем, что $\Lambda(b) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $f \in L^1$, для которой $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $(supp\,\hat{f}) \cap \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z} = \emptyset$. Тогда функция $g =$

$S(\omega)f - f$ обладает свойствами: $\hat{g}(\lambda_0) = (e^{i\lambda_0\omega} - 1)\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$, $supp\,\hat{g} = supp\,\hat{f}$. Следовательно, $g \in I_\omega$. Тогда, из равенства (4.8) следует, что $g * b = 0$. Поэтому из определения спектра Берлинга следует, что $\lambda_0 \overline{\in} \Lambda(b)$. Таким образом, имеет место включение $\Lambda(b) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Теперь, пользуясь леммой 4.2.7 получаем, что равенство (4.8) имеет место для любой функции x из идеала I. Следовательно, ξ - нулевой функционал на идеале I. Получено противоречие в связи с предположением, что $I_\omega \neq I$. Поэтому, $I_\omega = I$. Лемма доказана. □

Определение 4.2.3. Вектор x из L^1 - модуля $\mathfrak{X}$ называется *периодическим периода* $\omega > 0$, если $T(\omega)x = x$.

Лемма 4.2.9. *Для того, чтобы вектор $x \in \mathfrak{X}$ обладал свойством $T(\omega)x = x$, $\omega > 0$ (был периодическим) необходимо и достаточно, чтобы спектр $\Lambda(x)$ вектора x содержался в множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор $x \in \mathfrak{X}$ обладает свойством $T(\omega)x = x$. Тогда $f(T(\omega)x - x) = (S(\omega)f - f)x = 0$ для любой $f \in L^1$, т. е. $gx = 0$, $\forall g \in \overline{I_\omega}$. Теперь из леммы 4.2.8 получаем, что $gx = 0$ для любой функции g из идеала I. Если $\lambda_0 \overline{\in} \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, то существует $f \in L^1$ такая, что $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $supp\,\hat{f} \cap \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z} = \emptyset$. Следовательно, $f \in I$ и поэтому $fx = 0$. Из определения 4.2.1 следует, что $\lambda_0 \overline{\in} \Lambda(x)$, т. е. $\Lambda(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.
Достаточность. Пусть спектр вектора $x \in \mathfrak{X}$ содержится в множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Докажем, что вектор $y = T(\omega)x - x$ нулевой. Для доказательства (в силу свойства 1) леммы 4.2.6 достаточно установить, что $y = f(T(\omega)x - x) = 0$ для любой функции f из алгебры L^1. Вектор y запишем в виде $y = gx$, где $g = S(\omega)f - f$ принадлежит идеалу I_ω. Поскольку преобразование Фурье $\hat{g}$ обращается в нуль на множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, то из леммы 4.2.7 следует, что $y = gx = 0$. Итак, $T(\omega)x = x$. Лемма доказана. □

Замечание 4.2.1. Рассмотрим факторпространство $C_{b,u}/C_0$. Оно является банаховым L^1 - модулем, структура которого определяется формулой (4.4) по изометрическому сильно непрерывному представлению $T : \mathbb{R} \to End\,\mathfrak{X}$, $T(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}$, где $\tilde{x} = x + C_0$ - класс эквивалентности из $\mathfrak{X}$, содержащий функцию $x \in C_{b,u}$. Непосредственно из определений 4.1.1 и 4.2.1 следует, что функция $x \in C_{b,u}$ периодична на бесконечности с периодом $\omega > 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{x}$ - периодический периода ω вектор из L^1 - модуля $\mathfrak{X} = C_{b,u}/Co$, т. е. $\widetilde{S(\omega)x} = \tilde{x}$.

4.3. Условие периодичности на бесконечности решений разностных уравнений

Перейдем теперь к результатам, связанным со свойствами решений разностных уравнений. Вначале докажем теорему 4.1.1 для случая, когда число 1 является единственной точкой спектра оператора B на единичной окружности.

Теорема 4.3.1. *Пусть $B \in End\,X$ - линейный оператор, спектр которого $\sigma(B)$ обладает свойством: число 1 является единственной точкой спектра оператора B на единичной окружности $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Если существует ограниченное равномерно непрерывное решение x_0 уравнения (4.2), то оно является периодической на бесконечности периода 1 функцией, т.е. $x_0 \in C_{1,\infty}$.*

Доказательство теоремы использует две приводимые ниже леммы. В них рассматриваются уравнения специального вида:

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, f \in C_0, \tag{4.9}$$

где оператор $A \in End\,X$ удовлетворяет одному из условий

$$\begin{aligned} &1) \quad r\,(A) \quad < 1, \\ &2) \quad r\,(A^{-1}) \quad < 1, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где во втором условии оператор A обратим и $r\,(A)$, и $r\,(A^{-1})$ обозначает спектральный радиус операторов A, A^{-1}.

Лемма 4.3.1. *Любое равномерно непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение x_0 уравнения (4.9), где A удовлетворяет условию 1) из (4.10), принадлежит пространству C_0, единственно и представимо в виде:*

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n-1) f, \quad f \in C_0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Уравнение (4.9) перепишем в эквивалентном виде:

$$x = AS(-1)x + S(-1)f. \tag{4.12}$$

После чего окончательно соотношение (4.12) запишем так:

$$(I - \tilde{A})x = S(-1)f, \tag{4.13}$$

где $\tilde{A} = AS(-1) \in End\, C_{b,u}$.

Поскольку S(-1) - обратимая изометрия, перестановочная с оператором умножения в $C_{b,u}$ на оператор A, то $r\,(\tilde{A}) = r\,(A) < 1$. Поэтому (см.[56]), оператор $I - \tilde{A} \in End\, C_{b,u}$ непрерывно обратим и обратный имеет вид

$$(I - \tilde{A})^{-1} y = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}^n y = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n) y, \quad y \in C_{b,u}.$$

В частности, уравнение (4.9) имеет единственное решение x_0 из $C_{b,u}$ и представимо в виде (4.11). Ясно, что $x_0 \in C_0$. Лемма доказана. □

Лемма 4.3.2. *Равномерно непрерывное ограниченное решение уравнения (4.9), где A обратим и $r\left(A^{-1}\right) < 1$, единственно, принадлежит пространству C_0 и представимо в виде:*

$$x_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n) f, \quad f \in C_0. \tag{4.14}$$

Доказательство. Применяя к обеим частям уравнения (4.9) оператор A^{-1}, перепишем его в эквивалентном виде:

$$x = A^{-1} S(1) x - A^{-1} f. \tag{4.15}$$

После чего, окончательно соотношение (4.9) запишем так:

$$(I - \tilde{A}) x = -A^{-1} f, \tag{4.16}$$

где $\tilde{A} = A^{-1} S(1)$.

Проводя аналогичные рассуждения (см. лемму 4.3.1), получаем, что оператор $I - \tilde{A}$ – обратим, причем обратный имеет вид: $(I - \tilde{A})^{-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n)$. Следовательно, ограниченное равномерно непрерывное решение x_0 уравнения (4.9) единственно и представимо в виде (4.15). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4.3.1. В силу конечномерности пространства X, спектр $\sigma(B)$ оператора B конечен и пусть $\sigma(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, k}$. Представим его в виде: $\sigma(B) = \sigma_0 \cup \tilde{\sigma_0}$, где $\sigma_0 = \{1\}$, $1 \overline{\in} \tilde{\sigma_0}$. Тогда пространство X есть прямая сумма $X = X_0 \oplus \tilde{X_0}$ двух инвариантных относительно оператора B подпространств X_0, $\tilde{X_0}$. Рассмотрим проекторы P_0, $\tilde{P_0}$ со свойствами: 1) $Im\, P_0 = X_0$, $Im\, \tilde{P_0} = \tilde{X_0}$; 2)$P_0 + \tilde{P_0} = I$ - разложение единицы. Отметим, что

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (B - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

где γ - жорданова замкнутая кривая (см. [37]), во внутренней части которой содержится σ_0, а во внешней - $\tilde{\sigma}_0$ (см. [3]). Следовательно, оператор B разлагается в прямую сумму операторов $B = B_0 \oplus \tilde{B}_0$, где $B_0 = B|X_0$, $\tilde{B}_0 = B|\tilde{X}_0$, $\sigma(B_0) = \sigma_0$, $\sigma(\tilde{B}_0) = \tilde{\sigma}_0$.

Пусть $x \in C_{b,u}$ – решение уравнения (4.2). Представим его в виде: $x = x_0 + \tilde{x}_0$, где $x_0(t) = P_0 x(t)$, $\tilde{x}_0(t) = \tilde{P}_0 x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Применяя проекторы P_0 и $\tilde{P}_0$ к обеим частям уравнения (4.2) получим:

$$x_0(t+1) = B_0 x_0(t) + f_0(t),$$

$$\tilde{x}_0(t+1) = \tilde{B}_0 \tilde{x}_0(t) + \tilde{f}_0(t), \tag{4.17}$$

где $f_0(t) = P_0 f(t)$, $\tilde{f}_0(t) = \tilde{P}_0 f(t)$, $f_0, \tilde{f}_0 \in C_0$.

В силу того, что $\sigma(B_0) = \sigma_0 = \{1\}$, оператор B_0 имеет вид: $B_0 = I + Q_0$, где Q_0 – нильпотентный оператор (см. [56]). Спектр оператора $\tilde{B}_0$ представим следующим образом: $\sigma(\tilde{B}_0) = \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_{int} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| > 1\}$. Пусть $P_{int}, P_{out} \in End\, X_0$ - проекторы Рисса, построенные по оператору $\tilde{B}_0$ и по спектральным множествам σ_{int} и σ_{out} соответственно. Пусть $X_{int} = Im\, P_{int}$ и $X_{out} = Im\, P_{out}$ - образы проекторов P_{int} и P_{out} соответственно. Согласно [3], оператор $\tilde{B}_0$ есть прямая сумма операторов $\tilde{B}_0 = B_1 \oplus B_2$ относительно прямой суммы подпространств $\tilde{X}_0 = X_{int} \oplus X_{out}$, где $B_1 = \tilde{B}_0|X_{int}$, $B_2 = \tilde{B}_0|X_{out}$. Пусть $P_{int} + P_{out} = I$ – соответствующее разложение единицы. Применяя проекторы P_{int}, P_{out} ко второму равенству из (4.17), получаем:

$$x_1(t+1) = B_1 x_1(t) + f_1(t),$$

$$x_2(t+1) = B_2 x_1(t) + f_2(t), \tag{4.18}$$

причем $x_1(t) = P_{int}\, \tilde{x}_0(t), x_2(t) = P_{out}\, \tilde{x}_0(t), f_1(t) = P_{int}\, \tilde{f}_0(t), f_2(t) = P_{out}\, \tilde{f}_0(t)$.

Соотношение (4.17), учитывая (4.18), перепишем в виде:

$$
\begin{aligned}
x_0(t+1) &= B_0 x_0(t) + f_0(t) \\
x_1(t+1) &= B_1 x_1(t) + f_1(t) \\
x_2(t+1) &= B_2 x_1(t) + f_2(t).
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Пользуясь определением, из первого равенства соотношения (4.19) делаем вывод, что x_0 – периодическая на бесконечности периода 1 функция. По результатам выше доказанных лемм 4.3.1 и 4.3.2 имеем, что $x_1, x_2 \in C_0$, т. е. являются убывающими на бесконечности функциями. Окончательно получаем, что равномерно непрерывное ограниченное решение уравнения (4.2) является периодической на бесконечности периода 1 функцией. Из всего сказанного следует, что: $x(t) = P_0 x(t) + P_{int}\, x(t) + P_{out}\, x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$, где

$$
x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_1^n f_1(t-n-1), \quad t \in \mathbb{R},
$$

$$
x_2(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} B_2^{-n-1} f_2(t+n), \quad t \in \mathbb{R}.
$$

Теорема доказана. □

Используя доказанные выше утверждения о спектре Берлинга периодических на бесконечности функций, будет доказано следующее утверждение:

Лемма 4.3.3. *Пусть $A \in End\, X$ - линейный оператор, спектр которого $\sigma(A)$ содержится в единичной окружности $\mathbb{T}$, причем*

$$
\sigma(A) = \{e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_k}\},
$$

где $\varphi_j \in [0, 2\pi), 1 \le j \le k$. Тогда каждое решение $x \in C_{b,u}$ уравнения

$$
x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},\ f \in C_0, \tag{4.20}
$$

представимо в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{i\varphi_j t} x_{0,j}(t), \tag{4.21}$$

где $x_{0,j} \in C_{1,\infty}, j = \overline{1,k}$ *(т. е. являются периодическими на бесконечности функциями периода 1).*

Доказательство. В силу конечномерности пространства X, спектр $\sigma(A)$ оператора A конечен. Тогда $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ - разложение пространства X в прямую сумму, причем $X_j, j = \overline{1,k}$ - инвариантные подпространства относительно оператора A, $\sigma(A_j) = \lambda_j, 1 \leq j \leq k$, где $A_j = A|X_j$ - сужение оператора A на X_j. Через $P_j, 1 \leq j \leq k$ обозначим проекторы со свойством: $Im\, P_j = X_j, 1 \leq j \leq k$. Тогда $I = P_1 + \quad + P_k$ - разложение единицы. В данном случае, каждый из операторов $A_j, 1 \leq j \leq k$ представим в виде: $A_j = \lambda_j I_j + Q_j$, где I_j - тождественный оператор в X_j и Q_j - нильпотентный оператор.

Допустим, что уравнение (4.20) имеет непрерывное решение $x : \mathbb{R} \to X$, принадлежащее пространству $C_{b,u}$. Положим $x_j(t) = P_j x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$. Тогда оно представимо в виде $x = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j$. Применяя проекторы $P_j, 1 \leq j \leq k$, к обеим частям уравнения (4.20), получим:

$$\begin{gathered} P_1 x(t+1) = P_1(Ax(t) + f(t)), \\ \dots \\ P_k x(t+1) = P_k(Ax(t) + f(t)). \end{gathered} \tag{4.22}$$

Поскольку $P_j A = A P_j = \lambda_j I + Q_j$, $1 \leq j \leq k$, то соотношения (4.22) перепишутся в виде:

$$\begin{gathered} x_1(t+1) = \lambda_1 x_1(t) + Q_1 x_1(t) + f_1(t), \\ \dots \\ x_k(t+1) = \lambda_k x_k(t) + Q_k x_k(t) + f_k(t). \end{gathered} \tag{4.23}$$

Рассмотрим функции $x_{0,j}(t) = x_j(t)e^{-i\varphi_j t}, 1 \leq j \leq n$. Ясно, что $x_j(t) = x_{0,j}(t)e^{i\varphi_j t}$, $j = \overline{1,k}$. Подставляя полученные соотношения в (4.23), получим:

$$\begin{gathered} x_{0,1}(t+1)e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_1 t} - e^{i\varphi_1}x_{0,1}(t)e^{i\varphi_1 t} = Q_1 x_{0,1}(t)e^{i\varphi_1 t} + f_1(t), \\ \dots \\ x_{0,k}(t+1)e^{i\varphi_k}e^{i\varphi_k t} - e^{i\varphi_k}x_{0,1}(t)e^{i\varphi_k t} = Q_k x_{0,k}(t)e^{i\varphi_k t} + f_k(t). \end{gathered} \tag{4.24}$$

Домножив обе части равенств соотношения (4.24) на $e^{-i\varphi_j(t+1)}, j = \overline{1,k}$, получим:

$$\begin{gathered} x_{0,1}(t+1) - x_{0,1}(t) = Q_1 x_{0,1}(t)e^{-i\varphi_1} + f_1(t)e^{-i\varphi_1(t+1)}, \\ \dots \\ x_{0,k}(t+1) - x_{0,k}(t) = Q_k x_{0,k}(t)e^{-i\varphi_k} + f_k(t)e^{-i\varphi_k(t+1)}. \end{gathered} \tag{4.25}$$

Рассмотрим первое равенство из (4.25) и применим к обеим его частям оператор Q_1^{m-1}, где m - индекс нильпотентности оператора Q:

$$Q_1^{m-1}x_{0,1}(t+1) = Q_1^{m-1}x_{0,1}(t) + Q_1^{m-1}f_0^1(t), \tag{4.26}$$

где $f_{0,1}(t) = f_1(t)e^{-i\varphi_1(t+1)}$. Пусть $y_m(t) = Q_1^{m-1}x_{0,1}(t)$. Тогда равенство (4.26) примет вид:

$$y_m(t+1) = y_m(t) + g_m(t), \tag{4.27}$$

где $g_m(t) = Q_1^{m-1}f_{0,1}(t)$, причем $g_m \in C_0$. Пользуясь определением периодической на бесконечности функции периода 1 получаем, что $y_m \in C_{1,\infty}$.

Теперь, применив к первому равенству системы (4.25) оператор Q_1^{m-2}, приходим к равенству:

$$Q_1^{m-2}x_{0,1}(t+1) = Q_1^{m-2}x_{0,1}(t) + Q_1^{m-1}x_{0,1}(t)e^{-i\varphi_1} + Q_1^{m-2}f_1(t). \tag{4.28}$$

Рассмотрим функции: $y_{m-1}(t) = Q_1^{m-2}x_{0,1}(t), g_{m-1}(t) = Q_1^{m-1}x_{0,1}(t)e^{-i\varphi_1} + Q_1^{m-2}f_1(t)$. Ясно, что $g_{m-1} \in C_{1,\infty}$. Уравнение (4.28) перепишется в виде:

$$y_{m-1}(t+1) - y_{m-1}(t) = g_{m-1}(t). \tag{4.29}$$

Возьмем произвольную функцию $f \in L^1$ такую, что $\hat{f}(2\pi n) = 0, n \in \mathbb{Z}$, т. е. f принадлежит идеалу I, введенному в рассмотрение в лемме 4.2.8 (где $\omega = 1$). Из замечания 4.2.1 следует, что $\tilde{g}_{m-1} = f * g_{m-1} \in C_0$. Рассматривая свертку функции f с обеими частями равенства (4.29), получим, что

$$(S(1)f - f) * y_{m-1} = \tilde{g}_{m-1} \in C_0. \tag{4.30}$$

Функция $S(1)f - f$ принадлежит идеалу $I_1 = I_\omega$ (здесь $\omega = 1$), рассмотренному в лемме 4.2.8 и поэтому из (4.30) следует, что $g * y_{m-1} \in C_0$, для любой функции $g \in \overline{I}_1$. Поскольку $I_1 = I$ (см. лемму 4.2.8), то из замечания 4.2.1 следует, что $y_{m-1} \in C_{1,\infty}$. Далее рассматривая последовательно функции $y_{m-2} = Q_1 y_{m-1}, \ldots, y_0 = Q_1 y_1$, где $y_k(t) = Q_1^{k+1}x_{0,1}(t), k = \overline{0,m}$, и, проводя аналогичные рассуждения, получим, что все эти функции принадлежат пространству $C_{1,\infty}$. В частности, ему принадлежит функция $y_0(t) = Q_1 x_{0,1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Итак, первое уравнение из системы уравнений (4.25) запишется в виде:

$$y_0(t+1) - y_0(t) = g_0(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.31}$$

где $g_0 \in C_{1,\infty}$. Оно относится к уравнениям вида (4.29), и поэтому, проводя те же рассуждения, что были проведены при доказательстве принадлежности функции y_{m-1} пространству $C_{1,\infty}$, получим, что $y_0 \in C_{1,\infty}$. Теперь из первого равенства в соотношениях (4.25) видно, что функция $x_{0,1} \in C_{1,\infty}$, т. к. оно относится к уравнениям вида (4.29).

Аналогичным образом устанавливается, что решения $x_{0,j}, 2 \leq j \leq m$, последующих уравнений являются периодическими на бесконечности функциями периода 1. Поскольку решение x представимо в виде $x = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j$, то $x \in C_{1,\infty}$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.1.1. Спектр $\sigma(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \lambda_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,n}$, оператора B конечен. Представим его в виде: $\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \sigma_{int} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \sigma_{out} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$. Тогда $X = X_0 \oplus X_{int} \oplus X_{out}$ - разложение пространства X в прямую сумму, $I = P_0 + P_{int} + P_{out}$ - соответствующее разложение единицы. Следовательно, оператор B разлагается в прямую сумму операторов: $B = B_0 \oplus B_{int} \oplus B_{out}$, $B_0 = B|X_0$, $B_{int} = B|X_{int}$, $B_{out} = B|X_{out}$, $\sigma(B_0) = \sigma_0$, $\sigma(B_{int}) = \sigma_{int}$, $\sigma(B_{out}) = \sigma_{out}$.

Пусть x - непрерывное решение уравнения (4.2), принадлежащее пространству $C_{b,u}$. Тогда оно представимо в виде: $x = x_0 + x_{int} + x_{out}$, где $x_0(t) = P_0 x(t)$, $x_{int}(t) = P_{int}\, x(t)$, $x_{out}(t) = P_{out}\, x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Применяя проекторы P_0, P_{int}, P_{out} к обеим частям уравнения (4.2) получим:

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= B_0 x_0(t) + f_0(t), \\ x_{int}(t+1) &= B_{int} x_{int}(t) + f_{int}(t), \\ x_{out}(t+1) &= B_{out} x_{out}(t) + f_{out}(t). \end{aligned}$$

Пользуясь ранее доказанными леммами 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 получаем:

$$x_0(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{i\varphi_j t} x_{0,j}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x_{0,j} \in C_{1,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq j \leq k$, $x_{int}, x_{out} \in C_0$.

Тогда решение представимо в виде: $x = x_0 + x_1$, где $x_1 = x_{int} + x_{out}$. Так как $x_1 \in C_0$, то решение уравнения (4.2) можно представить в виде:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x_j \in C_{1,\infty}$, $1 \le j \le m$, $\varphi_j \in [0; 2\pi)$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.3.1. Отметим, что из доказательства теоремы 4.1.1 следует, что представление (4.3) не является единственным. Однако, если

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{x_j}(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

то $x_j - \tilde{x_j} \in C_0$.

4.4. Достаточное условие существования ограниченных решений разностных уравнений

Символом $W_1 = W_1(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство функций из C_0, для которых конечна величина

$$\|y\|_* = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|y(t-k)\| = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|y(t-k)\|.$$

Этот класс функций близок к классу функций, определенных в [33], и его содержит.

Например, скалярная функция $x(t) = \frac{sin2\pi t}{t}$ не принадлежит введенному классу $W_1 = W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, а функция вида $\tilde{x}(t) = \left(\frac{sin2\pi t}{t}\right)^2$ принадлежит.

Эти функции образуют банахово пространство и незамкнутое подпространство, плотное в C_0.

Определение 4.4.1. [56]. Собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$ оператора $B \in End\, X$ назовем *полупростым*, если собственные векторы не имеют присоединенных.

Теорема 4.4.1. *Пусть спектр оператора B обладает свойством: $\sigma(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset \mathbb{T}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - полупростые собственные значения, функция f принадлежит классу W_1. Тогда уравнение (4.2) имеет ограниченное непрерывное решение.*

Доказательство. Пусть $P_j, j = \overline{1,m}$ - проекторы Рисса, для которых $BP_j = \lambda_j P_j, j = \overline{1,m}$.

Так как $B = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$, то $B^k = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^k P_j$ и поэтому

$$\|B^k\| = \|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k P_j\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|P_j\|, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.32}$$

Докажем, что функция вида:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t-k-1), \quad t \in \mathbb{R},\ f \in W_1, \tag{4.33}$$

есть ограниченное решение уравнения (4.2). Действительно,

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t-k)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| \|f(t-k)\| < \infty.$$

Покажем теперь, что функция x является решением уравнения (4.2). Из принадлежности функции f классу W_1 и оценок (4.32) следует абсолютная сходимость рядов в следующих равенствах:

$$x(t+1) - Bx(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t+1-k-1) - \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} f(t-k-1) = f(t),$$

где $f \in W_1, x \in C_{b,u}$. Теорема доказана. □

Замечание 4.4.1. Находясь в условиях теоремы 4.4.1 и, пользуясь ее обозначениями, покажем, что решение (4.33) представимо в виде (4.21). Для этого рассмотрим цепочку равенств:

$$x(t) = (P_1 + \cdots + P_m)(\sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t-k-1)) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t),$$

где $f_j(t-k-1) = P_j f(t-k-1)$, $x_j(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1), 1 \leq j \leq m$.

Представим теперь каждую функцию $x_j, 1 \leq j \leq m$ в виде:

$$x_j(t) = x_j^0(t) e^{i\varphi_j t},$$

где $x_j^0(t) = e^{-i\varphi_j t} \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1)$ и покажем, что $x_j^0 \in C_{1,\infty}$.

Для этого воспользуемся определением 4.1.1. Действительно, $S(1)x_j^0(t)-x_j^0(t) = e^{-i\varphi_j(t+1)}\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1+1) - e^{-i\varphi_j t}\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1) = e^{-i\varphi_j t}(e^{-i\varphi_j}\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k) - \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1)) = e^{-i\varphi_j t}(e^{-i\varphi_j} f_j(t) + f_j(t-1) + e^{i\varphi_j} f_j(t-2) + e^{2i\varphi_j} f_j(t-3) + \cdots - f_j(t-1) - e^{i\varphi_j} f_j(t-2) - e^{2i\varphi_j} f_j(t-3) - \dots) = e^{-i\varphi_j(t+1)} f_j(t) \in C_0$.

Таким образом, делаем вывод, что решение (4.33) представимо в виде (4.21), а именно: $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^0(t) e^{i\varphi_j t}$, где $x_j^0 \in C_{1,\infty}$.

Замечание 4.4.2. Обратимся к более общему случаю, рассматривая уравнение (4.2) с $f \in W_1$. Пусть $\sigma(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \lambda_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,n}$ - спектр оператора B. Представим его в виде: $\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \sigma_{int} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \sigma_{out} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$. Тогда $X = X_0 \oplus X_{int} \oplus X_{out}$ - разложение пространства X в прямую сумму, $I = P_0 + P_{int} + P_{out}$ - соответствующее разложение единицы. Следовательно, оператор B разлагается в прямую сумму операторов: $B = B_0 \oplus B_{int} \oplus B_{out}$, $B_0 = B|X_0$, $B_{int} = B|X_{int}$, $B_{out} = B|X_{out}$, $\sigma(B_0) = \sigma_0$, $\sigma(B_{int}) = \sigma_{int}$, $\sigma(B_{out}) = \sigma_{out}$. В силу лемм 4.3.1, 4.3.2, а также, теоремы 4.4.1, ограниченное решение x уравнения (4.2) существует и представимо в виде:

$$x = x_0 + x_{int} + x_{out},$$

где

$$x_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_0^k P_0 f(t-k-1),$$

$$x_{int}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} {B_{int}}^k f_{int}(t-k-1),$$

$$x_{out}(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} {B_{out}}^{-k-1} f_{out}(t+k),$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x_0(t) = P_0 x(t)$, $x_{int}(t) = P_{int}\, x(t)$, $x_{out}(t) = P_{out}\, x(t)$, $f_0(t) = P_0 f(t)$, $f_0 \in W_1$, $f_{int}(t) = P_{int}\, f(t)$, $f_{out}(t) = P_{out}\, f(t)$.

Литература

1. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневич — Минск: Университетское, 1988. — 233 с.

2. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон — М.: Мир, 1968. — 750 с.

3. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж: ВГУ, 1987. — 165 с.

4. Баскаков А.Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов /А.Г. Баскаков // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59. — № 6. — С. 811–820.

5. Баскаков А.Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А.Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30. — № 3. — С. 1–11.

6. Баскаков А.Г. Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов / А. Г. Баскаков // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т.33. — № 10. — С. 1299-–1306.

7. Баскаков А.Г. О корректности линейных дифференциальных операторов / А.Г. Баскаков // Матем. сб. — 1999. — Т.190. — № 3. — С. 3—28.

8. Баскаков А.Г. Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов / А.Г. Баскаков // Мат. заметки. — 2000. — Т.67. — № 6. — С. 816—827.

9. Баскаков А.Г. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А.Г. Баскаков, А.И. Пастухов // Сиб. матем. журн. — 2001. — Т. 42, — № 6. — С. 1231–1243.

10. Баскаков А.Г. Об обратимости и фредгольмовости параболических дифференциальных операторов / А.Г. Баскаков // Докл. РАН. — 2002. — Т.383. — № 5. — С. 583—585.

11. Баскаков А.Г. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А.Г. Баскаков, К.И. Чернышов // Матем. сборник. — 2002. — Т. 193, — № 11. — С. 3–42.

12. Баскаков А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений / А.Г. Баскаков // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т.39. — С. 413–415.

13. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А.Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — Т. 9. — 2004. — С. 3–151.

14. Баскаков А.Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал //Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69. — № 3. — С. 3–54.

15. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений / А.Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73. — № 2. — С. 3–68.

16. Баскаков А.Г. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений / А.Г. Баскаков, Ю.Н. Синтяев // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т.46. — № 2. — С. 1–10.

17. Баскаков А.Г. Оценки оператора вложения пространства Соболева периодических функций и оценки решений дифференциальных уравнений с

периодическими коэффициентами / А.Г. Баскаков, К.С. Кобычев // Дифференц. уравнения — 2011. — Т. 47, — №5. — С. 611—620.

18. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений/А.Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68. — № 1. — С. 77–128.

19. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве /А.Г. Баскаков // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97. — № 2. — С. 174–190.

20. Баскаков А.Г. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка / А.Г. Баскаков, А.Ю. Дуплищева // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79. — № 2. — С. 3–20.

21. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К.Л. Кук — М.:Мир, 1967. — 548 с.

22. Бичегкуев М.С. Об ослабленной задаче Коши для линейного дифференциального включения / М.С. Бичегкуев // Матем. заметки. — 2006. — Т. 79. — № 4. — С. 483–487.

23. Бичегкуев М.С. Условия разрешимости разностных включений / М.С. Бичегкуев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2008. — Т. 72, — № 4. — С. 25–36.

24. Бичегкуев М.С. Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах / М.С. Бичегкуев // Матем. заметки. — 2009. — Т. 86. — № 5. — С. 673–680.

25. Бичегкуев М.С. О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах / М.С. Бичегкуев // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44. — № 1. — С. 80–83.

26. Бичегкуев М.С. Об условиях разрешимости разностных уравнений с начальным условием из подпространства / М.С. Бичегкуев // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51. — № 4. — С. 751–768.

27. Бичегкуев М.С. К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах / М.С. Бичегкуев // Матем. сб. — 2013. — Т. 204. — № 1. — С. 3-20.

28. Брук В.М. Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах / В.М. Брук // Функциональный анализ. Ульяновск. — 1988. — № 28. — С. 17–22.

29. Брук В.М. О спектре дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / В.М. Брук // Изв. вузов. Матем. — 1989. — № 8. — С. 15–21.

30. Брук В.М. О спектре операторов, порожденных абстрактными граничными задачами в банаховом пространстве / В.М. Брук // Функциональный анализ. Ульяновск. — 1990. — № 31. — С. 35–41.

31. Бурбаки Н. Спектральная теория / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1972. — 317 с.

32. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1977. — 600 с.

33. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. / Н.Винер. — М.:Физматгиз, 1963. — 256 с.

34. Гельфанд И.М. Коммутативные нормированные кольца. / И.М. Гельфанд, Д.А. Райков, Г.Е. Шилов. — М.:Физматгиз, 1960. — 315 с.

35. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.- М.: Физматгиз, 1963. — 100 с.

36. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн — М: Наука, 1970. — 536 с.

37. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц — М: ИЛ, 1962. — Т1. — 895 с.

38. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: Мир, 1966. — 1064 с.

39. Демиденко Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга. — 1998. — 438 с.

40. Диденко В.Б. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением / В.Б. Диденко // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89. — № 2. — С. 226–240.

41. Диденко В.Б. О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями / В.Б. Диденко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2013.. —Т. 77. — № 1. — С. 5-22.

42. Диденко В.Б. О состояниях обратимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами / В.Б.

Диденко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика, Информатика. — 2014. — Т. 14. — № 2. — С. 5–22.

43. Дуплищева А.Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А.Ю. Дуплищева // Вестник ПММ. — 2010. — № 8. — С. 203–209.

44. Дуплищева А.Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А.Ю. Дуплищева // Вестник ВГУ. Физика. Математика. — 2012. — № 1. — С. 110–117.

45. Дуплищева А.Ю. О решении разностных уравнений / А.Ю. Дуплищева // Международный научный журнал. Спектральные и эволюционные задачи. — 2012. —Т. 22. С. 62–65.

46. Дуплищева А.Ю. Спектральный анализ разностных операторов / А.Ю. Дуплищева // Международная конференция КРОМШ. Сборник тезисов. — 2012. — С. 23–24.

47. Дуплищева А.Ю. Разностные операторы и матрицы второго порядка / А.Ю. Дуплищева // Сборник тезисов КММК-2013. — 2013. — С. 56–57.

48. Дуплищева А.Ю. К вопросу обратимости разностных операторов второго порядка / А.Ю. Дуплищева // Современные методы краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXV» - Воронеж, 2014. — 2014. — С. 58.

49. Дуплищева А. Ю. Матрицы второго порядка в исследовании операторных уравнений / А.Ю. Дуплищева // Научные ведомости БГУ. Математика, физика. — 2014. — В. 34. — № 5(176). — С. 12–16.

50. Дуплищева А. Ю. Об условиях обратимости разностных операторов второго порядка / А.Ю. Дуплищева // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.. — 2014. — Т. 14,. — № 4. — С. 44–49.

51. Дуплищева А.Ю. Разностные операторы и матрицы второго порядка / А.Ю. Дуплищева // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2014». — 2014. — С. 122.

52. Дуплищева А. Ю. О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка / А.Ю. Дуплищева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15,. — № 1. — С. 31-37.

53. Жиков В.В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения / В.В. Жиков // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1976. — Т. 40. — № 6. — С. 1380–1408.

54. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд.- М.: Мир, 1965. — Т.1. — 264 с.

55. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида.- М.: Мир, 1967. — 624 с.

56. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като.- М.: Мир, 1972. — 740 С.

57. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье / Ж.-П. Кахан.- М.: Мир, 1985. — 264 С.

58. Колмогоров А.Н. Элементы теории функции и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.- М.: Наука, 1968. — 543 с.

59. Красносельский М.А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский — М.: Наука, 1966. — 499 с.

60. Красносельский М. А. Нелинейные почти периодические колебания / М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов.- М.: Наука, 1970.- 351 с.

61. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн — М.: Наука, 1967. — 464 с.

62. Крейн С.Г. Функциональный анализ / С.Г. Крейн.- М.: Наука, 1972.

63. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные операторы / В.Г. Курбатов — Воронеж: изд-во ВГУ, 1990. — 168 с.

64. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа / С.С. Кутателадзе — Новосибирск: изд-во ин-та математики, 2000. — 336 с.

65. Латушкин Ю.Д. Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем / Ю.Д. Латушкин, А.М. Степин // УМН. — 1991. — Т.46. — № 2. — С.85—143.

66. Левитан Б.М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения / Б.М. Левитан, В.В. Жиков — М: Изд-во МГУ, 1978. — 205 с.

67. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев.- М.: Наука, 1965. — 520 с.

68. Майзель А. Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений / А.Д. Майзель// Тр. Уральск. политехн. ин-та. Сер. мат. — 1954. — № 51. — С.820—50.

69. Массера Х.Л. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер — М.: Мир, 1970. — 456 с.

70. Миролюбов А.А. Линейные однородные разностные уравнения / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов — М.: Наука, 1981. — 208 с.

71. Миролюбов А.А. Линейные неоднородные разностные уравнения / А.А. Миролюбов, М.А. Солдатов — М.: Наука, 1986. — 130 с.

72. Мухамадиев Э.М. Исследование по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений / Э.М. Мухамадиев— Автореферат дисс. на соискагин ученой степени докт. физ.-мат. наук, Ленинград 1979.

73. Наймарк М.А. Нормированные кольца./ М.А. Наймарк //М.:Наука, — 1968. — 664 с.

74. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк.- М.: Наука, — 1969. — 527 с.

75. Перов А.И. Частотные признаки существования ограниченных решений / А.И. Перов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т.43. — № 7. — С.896–904.

76. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин.- М.:Мир, 1975. — 449 с.

77. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета.- М.:Наука, 1985. — 144 с.

78. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев.- М.: Наука, 1988. — 336 С.

79. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин.- М.: Наука,- 1980. — 306 С.

80. Тюрин В.М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах / В.М. Тюрин // Сиб. матем. журн. — 1991. — Т.32. — № 3. — С. 160–165.

81. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

82. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.

83. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении / Р. Эдвардс.- М.:Мир, 1969.- 1070 с.

84. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс.- М.:Мир, 1985.- Т.1. - 264 с.

85. Antonevich A., Lebedev A. Functional-differential equations. I. C^* - theory / A. Antonevich, A. Lebedev — Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., Longman, Harlow, 1994. —70 p.

86. Arens R. Operational calculus of linear relations / R. Arens // Pacific J. Math — 1961. — Vol. 11. — P. 9–23.

87. Aubin J.-P. Optimal impulse control problems and quasi-variational inequalities thirty years later: a viability approach / J.-P. Aubin // Optimal control and partial differential equations — IOS Press. — 2001. — P. 311–324.

88. Baskakov A. Spectral analysis of operators with the two-point Bohr spectrum / A. Baskakov, I. Krishtal // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — V38. — P. 420-439.

89. Chicone C.C. Evolution semigroups in dynamical systems and differential

equations / C.C. Chicone, Y. Latushkin — American Mathematical Soc., 1999. — 361 p.

90. Coffman S. V. Dichotomies for linear difference equations / S. V. Coffman, J. J. Schaffer — Math. Ann., 1967. — V.172. — P. 139–166.

91. Duplishcheva A.Yu. Approximation theorems for operator semigroups / A.Yu. Duplishcheva // Operator Semigroups and Dispersive Equations. Workshop of the 16th Internet Seminar on Evaluation Equations, Blaubeuren, Germany. — 2013. — P. 11–12.

92. Duplishcheva A.Yu. Difference equations and matrix of the second order / A.Yu. Duplishcheva // International Scientific Journal. Spectral and Evoluation problems: Proceedings of the Twenty Second Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. — 2013. — Vol. 23 — P. 168–170.

93. Duplishcheva A.Yu. About difference equations and matrix of the second Order/ A.Yu. Duplishcheva // Спектральная теория и дифференциальные уравнения – Москва, 2014. — 2014. — С. 8–10.

94. Engel K.J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel — New York: Springer-Verlag, 2000. — 586 p.

95. Engel K.J. A short course of operator semigroups / K.-J. Engel, R. Nagel — Universitext, Springer, New York, 2006. — 590 p.

96. Gil' M. I. Difference Equations in Normed Spaces: Stability and Oscillations / M. I. Gil' — North Holland, Mathematics Studies, 2007. — 206 p.

97. Gohberg I. Classes of linear operators / I. Gohberg, S. Goldberg, M. Kaashoek // Birhäuser, vol. I, Oper. Theory Adv. Appl., 49, Basel, Boston, Berlin, 1990.

98. Gohberg I. Basic classes of linear operators / I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek — Birkhauser, 2003 — 423 p.

99. Goldberg S. Unbounded linear operators. Theory and applications / S. Goldberg //McGraw-Hill, New York–Toronto, 1966.

100. Hille E. Functional analysis and semi-groups / E. Hille, R.S. Phillips, // American Mathematical Society Colloquium Publications.- 1975.- V.31.- №1.

101. Kurbatov V.G. Functional Differential Operators and Equations / V.G. Kurbatov — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers. — 1999. — 454 p.

102. Megan M. Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families / M. Megan, A. L. Sasu, B. Sasu // Discrete Contin. Dyn. Syst.- 2003.- V.9.- №2.- P.383–397.

103. Rabiger F. The spectral mapping theorem for evolution semigroups on spaces of vector-valued functions / F. Rabiger, R. Schnaubelt // Semigroup Forum. — 1996. — Vol. 52. —№1. — P. 225–239.

104. Van Minh N. Exponential stability, exponential expansiveness, and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line / N. Van Minh, F. Räbiger, R. Schnaubelt // Integral Equations and Operator Theory.- 1998.- V.32.- №3.- P.332-353.

105. Van Minh N. Characterizations of dichotomies of evolution equations on the half-line / N. Van Minh, N. Th. Huy // J. Math. Anal. Appl.- 2001.- V.261.- №1.- P.28–44.

106. Nagel R. Semigroup methods for nonautonomous Cauchy problems /

R. Nagel //Lecture Notes in Pure and Appl. Math.- V.168.- Dekker.- New York.- 1995.- P.301–316.

107. Pruss J. On the spectrum of C_0 - semigroups / J. Pruss // Trans. Amer. Math. Soc.- 1984.- V.284.- P.847-857.

108. Taylor A.E. Introduction to functional analysis / A.E. Taylor // John Wiley andSons.- New York.- 1958.

109. Perron O. Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Mathematische Zeitschrift.- 1930.- V.32.- №5.- P.703–728.

110. Perron O. Über eine Matrixtransformation / O. Perron // Mathematische Zeitschrift.- 1930.- V.32.- №1.- P.465–473.