ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Гим Метак Хамза гим

Однопараметрические канонические полугруппы и корректные задачи без начальных условий для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

01.01.02 — дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук,

профессор Костин В.А.

В О Р О Н Е Ж — 2015

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена применению методов теории однопараметических полугрупп функций в банаховом пространстве к исследованию равномерно корректной разрешимости по С.Г. Крейну задач для дифференциальных уравнений математической физики, актуальных в механике, гидродинамике, тепломассопереносе и др. В частности, к задачам тепломассопереноса, отмеченным в работах Ю.И. Бабенко [1], [2], а также к исследованию многомерных уравнений, называемых С.Л. Соболевым полигармоническими, с точки зрения коэрцитивности систем соответствующих операторов, которые мы здесь также называем полигармоническими.

Таким образом, в диссертации используются следующие разделы функционального анализа и теории эволюционных уравнений:

а) методы теории однопараметрических канонических полугрупп

б) методы теории корректных задач по Ж. Адамару

в) методы теории равномерно корректных задач для дифференциальных уравнений С.Г. Крейна.

Как известно, активное применение теории полугрупп и групп к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными началось с работ Ж.Адамара, заметившего, что задача Коши для волнового уравнения приводит к некоторым группам преобразований. При этом, из групповых свойств вытекают определенные теоремы сложения. В случае же преобразований параболического типа, когда соответствующие явления необратимы, вместо групп появляются полугруппы.

В работах Хилле, Иосиды, Филлипса и Като были заложены основы теории дифференциальных уравнений вида $u'(t) = Au(t)$ с неограниченным оператором A, которая, после этого, становится самостоятельной областью исследования, привлекающая внимание многих авторов, в числе которых важное место занимают и воронежские математики: С.Г. Крейн, М.А. Красносельский, П.Е. Соболевский, А.Г. Баскакова и др. Этой тематике посвящены также работы и других Российских математиков: С.И. Пискарева, Г.А. Свиридюка, В.Е. Федорова и др.

Некоторые факты из монографий С.Г. Крейна [27]–[29] и М.А. Красносельского [26] мы используем в настоящей диссертации.

Прежде всего это относится к критериям равномерной корректности следующих задач для уравнений в банаховом пространстве E:

I. Задачи Коши для уравнений 1-го и 2-го порядков

$$a) \qquad \frac{du(t)}{dt} = A_1 u(t), \qquad u(0) = u_0, t \geq 0 \tag{0.1}$$

$$b) \qquad \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = A_2 v(t), \qquad v(0) = v_0, v'(0) = v_1. \tag{0.2}$$

II. Краевая задача для уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} = A_3 \omega(t), \qquad \omega(0) = \omega_0, \quad \lim_{t\to\infty} \|\omega(t)\| = 0, \tag{0.3}$$

где A_1, A_2, A_3 неограниченные в E операторы.

Диссертация состоит из введения и трех глав, в которые входят 19 параграфов.

Первая глава содержит необходимую терминологию, понятия и общие фундаментальные факты, связанные с теорией корректно разрешимых задач для уравнений в банаховом пространстве, которые соответствуют монографиям [13], [26], [28], [23], [50]. Здесь вводятся понятия векторных функций со значениями в банаховом пространстве. Указываются необходимые в дальнейшем их свойства, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости по Бохнеру.

Вводятся понятия сильно непрерывных полугрупп, групп и косинусных функций (КОФ) линейных преобразований, их генераторов и их связи с корректной разрешимостью начально–краевых задач для уравнений вида (0.1), (0.2).

Вводятся понятия решений этих уравнений (§1.2) и равномерно корректной разрешимости, в смысле С.Г. Крейна, задачи Коши для этих уравнений

$$u(0) = u_0 \in D(A), \tag{0.4}$$

в случае уравнения (0.1) и

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{0.5}$$

в случае уравнения (0.2).

Указывается, что задача Коши (0.1) равномерно корректна, когда оператор A является генератором (производящим оператором) сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Решение имеет вид $u(t) = T(t)u_0$.

В случае задачи Коши (0.2) указывается, что задача равномерно корректна тогда и только тогда когда оператор A является генератором сильно непрерывной косинус–функции $C(t)$, при этом решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = C(t)u_0 + \int_0^t C(s)u_1 ds.$$

Наряду с этим указываются критерии генераторов сильно непрерывных полугрупп (теорема Хилле–Филлипса с. 13) и теорема Совы–Куреппы, для косинусной функции). Отметим, что в Воронеже пионером в исследовании КОФ наряду с С.Г. Крейном является А.Г. Баскаков [4]. Позже к этой теме обратился В.А. Костин и его ученики [19], [20].

В §1.3, в соответствии с [50] определяются однопараметрические канонические полугруппы $T(t)$, соотношениями

$$T(t \oplus s) = T(t)T(s), \tag{0.6}$$

где операция $t \oplus s$ определяет различные сложения в системах действительных или комплексных чисел.

В §1.4 дается определение некоторых важных классов однопараметрических канонических полугрупп, элементарных полугрупп, впервые введенных в работах [15]–[23] В.А. Костина с соавторами.

Здесь же, в соответствии с [22], дается определение и производящих уравнений элементарных полугрупп, которые представляют собой уравнения с частными производными первого порядка с переменными коэффициентами имеющими особенность. Приводятся и некоторые важные примеры таких уравнений.

В §1.5 выделяются классы элементарных полугрупп с обычной операцией сложения

$$T(t + s) = T(t)T(s), \tag{0.7}$$

которые здесь называются арифметическими полугруппами. Они определяются на функциях $\varphi(x)$, определенных на интервале $x \in (a, b)$ и имеют представления

$$T_{\pm}(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) \pm t)], \tag{0.8}$$

где функция $h(x)$ такая, что $h(a) = -\infty$, $h(b) = \infty$, $h'(x) > 0$.

Как показано в [22], такие полугруппы являются сильно непрерывными в гипервесовых пространствах $\mathfrak{C}_{\omega,h}$ и их производящие операторы задаются выражениями

$$T'_{\pm}(t)\varphi(x)\Big|_{t=0} = \pm\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} \tag{0.9}$$

В §§1.6—1.8 даются понятия позитивного оператора

Определение 0.1. Оператор A с плотной областью определения будем называть *позитивным,* если при всех $t > 0$ существуют операторы $(A + tI)^{-1}$ и если

$$\|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + t} \tag{0.10}$$

Позитивные операторы не обязательно являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп.

Из (0.10) следует, что резольвентное множество $\rho(A)$ содержит все круги $|\lambda + t| < \frac{1+t}{C}$ $(t > 0)$ и, в частности, сектор

$$|\arg \lambda - \pi| < \arcsin \frac{1}{C} \tag{0.11}$$

В этом случае оператор A имеет обратный. При этом для $z \in G_1$ выполняется оценка

$$\|(A - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{dist(z, \partial G_1)}, \tag{0.12}$$

здесь $dist(z, \partial G_1)$– расстояние от точки z до границы ∂G_1 области G_1.

Определение 0.2. ([28], стр. 298) Оператор A называется *сильно позитивным,* если он удовлетворяет более сильному, чем условие (0.10) неравенству

$$(\|A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \qquad (Re\lambda \leq 0). \tag{0.13}$$

Для этих операторов можно определить отрицательные дробные степени формулой

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \lambda^{-\alpha} R(\lambda) d\lambda,$$

где $\Gamma(\alpha)$— контур ограничивающий спектр оператора.

Вторая глава диссертации содержит самостоятельные результаты и посвящена корректной разрешимости нестационарных задач для уравнения теплопроводности. Описываемые установившиеся процессы, начавшиеся так давно, что начальные данные не сказываются на поведении решения и поэтому, они называются задачами без начальных данных.

Здесь, сначала, дается постановка задачи для некоторого конкретного уравнения, а затем, с целью применения в исследованиях общей теории полугрупп, рассматриваемая задача формулируется в терминах общей теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

В качестве основного инструмента решения поставленной задачи в §2.2 вводятся и изучаются новые классы однопараметрических арифметических полугрупп, называемых здесь полугруппами переносов с деформациями. Доказывается сильная непрерывность таких полугрупп в специальных весовых пространствах функций, устанавливается вид производящего оператора.

§2.3 посвящен некоторым важным примерам таких полугрупп.

В §2.4 приводятся точные оценки решения рассматриваемых задач, и устанавливаются необходимые оценки характеризующие их равномерно корректную по С.Г. Крейну разрешимость для прямых и обратных задач без начальных условий для параболических уравнений с переменными коэффициентами, краевых задач для дифференциальных уравнений, описывающих процесс движения жидкости в пористой среде. В разделе 2.4.4 решается задача для уравнения с дробными производными, описывающая процессы субдиффузии по терминологии [48], стр. 242.

Третья глава диссертации посвящена изучению C_0– операторных многочленов вида

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m, \tag{0.14}$$

где A– генератор полугруппы класса C_0, a_m— действительные или комплексные коэффициенты.

Такие многочлены и их применения к изучению равномерной корректности начально–краевых задач рассматривались в работах В.А. Костина и его учеников [20]–[23].

В диссертации C_0– операторные многочлены изучаются с точки зрения коэрцитивности их систем.

Работы по проблемам коэрцитивности для систем дифференциальных операторов с частными производными были начаты Н. Ароншайном в пятидесятых годах прошлого века и развиты Л. Хермандером, М. Шехтером, Д.Ж.Фигуэрдо и другими зарубежными математиками. Дальнейшему изучению этой проблемы для дифференциальных операторов в пространствах С.Л. Соболева изотропных и анизотропных посвящены фундаментальные работы О.В. Бесова, С. М. Никольского, в соответствии со следующим определением: [5], стр. 159.

Система дифференциальных операторов $\{P_j(x,l)\}_1^N$ называется коэрцитивной в $\prod\limits_{s=1}^{S} W_p^{l^{(s)}}(G)$, если для всех $f \in \prod\limits_{s=1}^{S} W_p^{l^{(s)}}(G)$ выполнено неравенство

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{|\alpha;l^{(s)}|\le 1} \|D^\alpha f_s\|_{p,G} \le C \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \|P_j(D)f\|_{p,G} + \sum_{s=1}^{S} \|f_s\|_{p,G} \right), \quad (0.15)$$

с постоянной C не зависящей от f.

Здесь $l = (l_1,\dots,l_n)$— вектор с натуральными компанентами, $s = (f_1,\dots,S)$, m_s— натуральные числа, $|\alpha;l| = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{l_i}$, $l^{(s)} = m_s l$, $f(x) = (f_1(x),\dots,f_s(x))$, $p \in (1,\infty)$, $D = (D_1,\dots,D_n) = (\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$, $P_j(D)f = P_j(x,D)f = \sum\limits_{s=1}^{S} \sum\limits_{|\beta;l^{(s)}|\le 1} C_{js\beta}(x) D^\beta f_s(x)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, G— область удовлетворяющая сильному условию l– роста. Определение см. [5], стр. 117.

Справедлива

Теорема (коэрцитивности) ([5], стр. 159). Пусть многочлены с постоянными коэффициентами

$$P_j(\xi) = \sum_{|\beta;l|=1} C_{j\beta}\xi^{\beta} \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

не имеют общего комплексного корня, отличного от $\xi = 0$, область G удовлетворяет слабому условию l– роста. Тогда при $|\alpha; l| = 1$

$$\|D^{\alpha} f\|_{p,G} \leq C \cdot \left(h^{1-|\alpha;l|} \sum_{j=1}^{N} \|l_j(D) f\|_{p,G} + h^{-|\alpha;l|} \|f\|_{p,G} \right), \qquad (0.16)$$

где $0 < h < h_0(G)$, C— постоянная, не зависящая от f и h.

Отметим, что неравенствам вида (0.16) посвящены работы С.Г. Крейна, В.П. Глушко и др. П.Е. Соболевский получил неравенства коэрцитивности в абстрактном случае для задачи Коши

$$\frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = f(t), \qquad v(0) = v_0,\, t \in [0, T] \qquad (0.17)$$

в гельдеровых пространствах. Здесь $v(t)$ и $f(t)$— функции со значениями в E, $-A$— производящий оператор сильно непрерывной полугруппы.

По Соболевскому, для задачи (0.17) имеет место коэрцитивность, если для каждого $v_0 \in D(A)$ и $f \in C_0^{\alpha}(T)$ существует такое решение задачи (0.11), что выполнено неравенство

$$\left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{C^{\alpha}(T)} + \|Av\|_{C_0^{\alpha}(T)} \leq C(\alpha, T)(\|f\|_{C_0^{\alpha}} + \|Av_0\|_E).$$

В настоящей диссертации коэрцитивность устанавливается в соответствии со следующим определением.

Систему операторных многочленов (0.14) назовем коэрцитивной, если для всех $u \in D(A^N)$ выполняется неравенство

$$\sum_{n_k}^{N} \sum_{m_k=1}^{n_k} \|A^{m_k} u\|_E \leq M \sum_{k=1}^{N} \|A_k u\|. \tag{0.18}$$

В §3.4 доказана

Теорема 3.4.1. Система C_0–многочленов (0.14) является коэрцитивной, если корни $\lambda_{k,j}$ $(k = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, n_k)$ многчленов $P_{n_k}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию

$$\min_{k,j} Re\, \lambda_{k,j} = \lambda_0 > \omega.$$

Результаты применяются к равномерно корректной разрешимости полигармонических уравнений в смысле С.Л. Соболева [45], стр. 520.

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \Delta^k u(x) = f(x).$$

$x \subset \mathbb{R}^n$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\Delta u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$— лапласиан.

Глава 1

Однопараметрические канонические полугруппы

1.1 Вектор-функции со значениями в банаховом пространстве.

Содержание этого параграфа соответствует монографиям [26],[28],[29]. Здесь мы будем рассматривать *векторнозначные функции* $f(t)$ вещественного аргумента t, то есть функции, значения которых при каждом $t \in [a,b] \subset R^1$ являются элементами некоторого линейного банахова пространства E.

Определение 1.1.1. Функция $f(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0 , если $\|f(t) - f(t_0)\|_E \to 0$ при $t \to t_0$, и непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

При этом норма $\|f(t)\|_E$– есть скалярная непрерывная функция.

Замечание 1.1.1. Множество всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со значениями в E образуют линейную систему $C(E;[a,b])$, в которой можно ввести норму

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_E. \tag{1.1.1}$$

После чего $C(E;[a,b])$ становится линейным нормированным пространством.

При этом, если E– банахово пространство, то $C(E;[a,b])$ также банахово пространство (см. [29], стр. 96).

Кроме введенного понятия (сильной) непрерывности функции $f(t)$, можно ввести понятие слабой непрерывности.

Определение 1.1.2. Функция $f(t)$ называется *слабо непрерывной (в точке, на отрезке,* если для любого непрерывного линейного функционала $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ непрерывна в точке (на отрезке).

Из сильной непрерывности вытекает слабая. Обратное неверно.

Справедливо следующее утверждение (см. [29], стр. 96):

слабо непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(t)$ ограничена на нем; то есть

$$\|f(t)\| \leq M \qquad (a \leq t \leq b).$$

Определение 1.1.3. Функция $f(t)$ называется *дифференцируемой в точке* t_0*,* если существует такой элемент $f' \in E$, что

$$\|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'\|_E \to 0$$

при $h \to 0$. Элемент f' называется *производной* функции $f(t)$ в точке t_0 и обозначается $f' = f'(t_0)$.

Функция $f(t)$ *дифференцируема на отрезке* $[a,b]$*,* если она дифференцируема в каждой точке этого отрезка.

Если при этом производная $f'(t)$ непрерывна, то функция $f(t)$ называется *непрерывно дифференцируемой.*

Для непрерывно дифференцируемых функций справедливо утверждение (см. [29], стр. 96):

Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq (b - a) \sup_{a \leq t \leq b} \|f'(t)\|_E. \tag{1.1.2}$$

Это неравенство остается справедливым, если производная существует на отрезке $[a, b]$ всюду, за исключением счетного множества точек.

Определение 1.1.4. Говорят, что функция $f(t)$ имеет в точке t_0 *слабую производную* $f'(t_0)$, если при $h \to 0$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

слабо сходится при всяком $l \in E'$ к $f'(t_0)$.

Другими словами это означает, что при всяком $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ дифференцируема в точке t_0 и

$$[l(f(t_0))]' = l(f'(t_0)).$$

Если функция $f(t)$ имеет в каждой точке отрезка $[a, b]$ слабую производную, то сохраняется оценка (1.1.2).

В частности, если слабая производная равна нулю во всех точках отрезка $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна.

Аналогично определяются производные любого порядка от векторнозначных функций.

Если функция $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм:

$$\lim \sum_{k=1}^{N} f(t_k) \Delta t_k = \int_a^b f(t) dt.$$

Здесь предел понимается в смысле сходимости по норме пространства E, когда диаметр разбиения $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ стремится к нулю.

Предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка на части.

Справедлива оценка

$$\| \int_a^b f(t)dt \| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \tag{1.1.3}$$

и теорема о среднем

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\overline{f},$$

где $\overline{f}$– элемент замкнутой выпуклой оболочки множества значений функции $f(t)$ на отрезке $[a,b]$.

Функция

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

является непрерывно дифференцируемой и $F'(t) = f(t)$.

Для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(t)$ справедлива *формула Ньютона–Лейбница.*

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Так же, как и в классическом анализе, вводится понятие несобственного интеграла. Например, если функция непрерывна на $[a,b]$ при любом $b > a$, то под ее интегралом на $[a,\infty]$ понимают

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

Если предел по норме пространства E существует, то говорят, что интеграл сходится.

Интеграл абсолютно сходится, если

$$\int_a^\infty \|f(t)\| dt < \infty.$$

Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.

Можно рассматривать интегралы, зависящие от параметра. На них переносятся классические теоремы о непрерывной зависимости от параметра, об интегрировании и дифференцировании по параметру.

Наиболее употребительным обобщением интеграла Римана для функций со значениями в банаховом пространстве является *интеграл Бохнера*

Определение 1.1.5. Функция $f(t)$, заданная на отрезке $[a, b]$, со значениями в банаховом пространстве E, называется *простой,* если она принимает лишь конечное заданное число значений f_j на измеримых множествах Δ_j.

$$f(t) = f_j \quad (t \in \Delta_i), \qquad \bigcup \Delta_j = [a, b].$$

(При определении простой функции на множестве бесконечной меры требуется, чтобы $mes(\Delta_j) < \infty$ и чтобы $f(t) = 0$ на дополнении к $\bigcup \Delta_j$).

Определение 1.1.6. Функция $f(t)$ называется *сильно измеримой,* если существует последовательность простых функций $f_n(t)$, сильно сходящаяся почти всюду к функции $f(t)$, то есть

$$\|f_n(t) - f(t)\|_E \to 0,$$

при $n \to \infty$ для всех $t \in [a, b]$, за исключением множества меры нуль.

Определение 1.1.7. Функция $f(t)$ называется *слабо измеримой,* если для всякого $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ измерима на $[a, b]$.

Для всякого пространства E, содержащего счетное всюду плотное множество, понятия слабой и сильной измеримости совпадают ([29], стр. 100).

Справедливо утверждение, что если $f(t)$ сильно измерима, то ее норма $\|f(t)\|_E$ является измеримой скалярной функцией.

Для простых функций $f(t)$ интеграл определяется единственным образом:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum f_j mes \Delta_j.$$

Определение 1.1.8. Функция $f(t)$ называется *суммируемой (интегрируемой) по Бохнеру* на отрезке $[a, b]$, если существует сходящаяся к ней почти всюду последовательность простых функций $f_n(t)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_E dt = 0.$$

При этом интегралом суммируемой функции $f(t)$ называется предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Предел понимается в смысле сходимости по норме, то есть

$$\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\|_E \to 0$$

при $n \to \infty$.

Справедлива следующая

Теорема ([29], стр. 101). Для того, чтобы функция $f(t)$ была суммируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно измеримой и чтобы ее норма $\|f(t)\|$ была суммируемой.

Для интеграла Бохнера справедлива оценка (1.1.3).

Также функция $F(t)$, представимая неопределенным интегралом

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds$$

от суммируемой функции $f(t)$, почти во всех точках отрезка $[a, b]$ имеет сильную производную, причем в этих точках $F'(t) = f(t)$.

Если A– ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E в банахово пространство F, и $f(t)$– суммируемая функция со значениями в E, то

$$\int_a^b Af(t)dt = A \int_a^b f(t)dt.$$

Совокупность всех суммируемых на $[a, b]$ функций со значениями в банаховом пространстве E образуют линейную систему $L_1(E, [a, b])$, в которой вводится норма

$$\|f\|_{L_1(E;[a,b])} = \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

В этой норме пространство $L_1(E; [a, b])$ банахово.

Кроме того, аналогично скалярному случаю вводятся банаховы пространства $L_p(E; [a, b])$ $(1 \le p < \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(E;[a,b])} = [\int_a^b \|f(t)\|^p dt]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{L_\infty(E;[a,b])} = vrai\ sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|, \quad p = \infty.$$

Важное место в теории дифференциальных уравнений занимают функциональные пространства В.В. Степанова [15], [32], определенные как множество интегрируемых функций со степенью $p \ge 1$, на каждом интервале $\Delta \in \mathbb{R}$ функций $f(t)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{S_p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l} \int_t^{t+l} |f(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \ge 1, l > 0. \qquad (1.1.4)$$

Другие важные функциональные пространства вводятся и изучаются в главах 2 и 3 настоящей диссертации.

1.2 Оператор–функции.

Пусть E_1 и E_2 банаховы пространства. Оператор–функции $A(t)$ (то есть функции, значениями которых являются ограниченные операторы) являются частными примерами функций со значениями в банаховом пространстве ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2.

Для оператор–функций определяются три вида непрерывности: а) непрерывность по норме, б) сильная непрерывность, в) слабая непрерывность.

Определение 1.2.1. Будем говорить, что оператор–функция $A(t)$ *непрерывна по норме* в точке $t_0 \in [a, b]$, если

$$\lim_{t \to t_0} \|A(t) - A(t_0)\| = 0.$$

Определение 1.2.2. Оператор–функция $A(t)$ *сильно непрерывна* в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любом фиксированном $x \in E_1$

$$\lim_{t \to t_0} \|A(t)x - A(t_0)x\|_{E_2} = 0.$$

Определение 1.2.3. Оператор–функция $A(t)$ слабо непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любых фиксированных $x \in E_1$, $l \in E_2^*$

$$\lim_{t \to t_0} |l(A(t)x) - l(A(t_0)x| = 0.$$

Аналогично определяются понятия дифференцируемости (дифференцируемости по норме операторов), сильной дифференцируемости (дифференцируемости всех функций $A(t)x, x \in E_1$) и слабой дифференцируемости (дифференцируемости скалярной функции $l(A(t)x, x \in E_1, l \in E_2^*)$.

Справедлива

Теорема (Банах–Штейгауз). *Оператор–функция $A(t)$ сильно непрерывна при $t_0 \in [a, b]$ на всем E_1, если нормы ее равномерно ограничены, то есть*

$$\|A(t)\| \leq M,$$

и функции $A(t)x$ непрерывны для x из некоторого плотного в E_1 множества.

Неограниченные операторы. Пусть E– банахово пространство и A– линейный оператор, определенный на некотором линейном множестве $D(A) \subset E$ и принимающий значения в E.

Определение 1.2.4. Говорят, что A *замкнут*, если из того что $x_n \in D(A)$, $\|x_n - x_0\| \to 0$ и $\|Ax_n - y_0\| \to 0$ следует, что $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$.

Справедливы следующие утверждения: (см. [29], §13.2).

Если при некотором $\lambda \in C$ оператор $\lambda I + A$ имеет обратный, то оператор A замкнут.

Пусть значение функции $x(t)$ при каждом $t \in [a, b]$ принадлежат $D(A)$ и функция $Ax(t)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда выполняется равенство

$$A \int_a^b x(t)dt = \int_a^b Ax(t)dt.$$

Наиболее важными характеристиками линейных операторов, определенных на линейном многообразии $D(A)$ комплексного банахова пространства E и действующих в это же пространство E являются спектр и резольвента оператора.

Понятие спектра оператора связано с рассмотрением уравнения

$$Ax - \lambda x = y \qquad x \in D(A), y \in E), \tag{1.2.1}$$

где λ– комплексное число.

Определение 1.2.5. Число λ называется *регулярной точкой* оператора A, если уравнение (1.2.1) корректно и плотно разрешимо. То есть однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0$$

имеет только нулевое решение, для любого $x \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\|_E \leq k\|(A - \lambda I)x\|_E,$$

и замыкание области значений оператора $A - \lambda I$ совпадает с E.

Определение 1.2.6. Совокупность всех регулярных точек называется *резольвентным множеством* оператора A.

Определение 1.2.7. Дополнение на комплексной плоскости к резольвентному множеству называется *спектром оператора* A.

Если оператор A замкнут, то его резольвентное множество состоит из тех и только тех точек λ, для которых существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, заданный на всем пространстве E.

Определение 1.2.8. Определенный при регулярных λ, оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой оператора* A и обозначается $R(\lambda, A)$.

Для замкнутого оператора резольвентное множество является открытым подмножеством комплексной плоскости, спектр–замкнутое множество.

Резольвента $R(\lambda, A)$ является на резольвентном множестве аналитической функций со значениями в пространстве $L(E, E)$ линейных ограниченных операторов.

Для любых двух регулярных точек λ и μ справедливо *резольвентное тождество Гильберта*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Из этого тождества выводится формула для производных

$$\frac{d^k R(\lambda, A)}{d\lambda^k} = k!R^{k+1}(\lambda, A).$$

Классификация точек спектра. Приняты следующие определения.

1. λ принадлежит *точечному спектру*, если оператор $A-\lambda I$ не имеет обратного.

2. λ принадлежит *остаточному спектру*, если оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на не плотном множестве.

3. λ принадлежит *непрерывному спектру*, если оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на плотном множестве, но неограничен.

Таким образом, вся комплексная плоскость разлагается в сумму четырех взаимно непересекающихся множеств: резольвентное множество, точечный, остаточный и непрерывный спектры.

Если оператор задан каким–либо аналитическим выражением, то структура его спектра существенно зависит от того пространства, в котором он исследуется.

1.2.1. Экспоненциальная функция, группы и полугруппы операторов.

Начиная с фундаментальных работ Э. Хилле, Р. Филлипса и др. (см. [50]) в теории уравнений параболического типа важное место занимают однопараметрические полугруппы линейных преобразований $T(t)$, $t \geq 0$ называемыми *каноническими* и определяемые соотношением $T(\alpha \oplus \beta) = T(\alpha)T(\beta)$, α и β— действительные или комплексные числа. При этом в системе рассматриваемых чисел можно выделить множество полугрупп, соответствующим разнообразным операциям сложения.

Если оператор A, действующий в банаховом пространстве E, ограничен, то можно ввести с помощью ряда экспоненциальную функцию

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Эта функция непрерывна по t в смысле нормы оператора и удовлетворяет групповому соотношению

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}.$$

Оказывается, что вообще семейство операторов $T(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, *непрерывно по норме* зависящих от t и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} T(t)T(s) = T(t+s), \qquad (-\infty < t < \infty), \\ T(0) = I, \end{gathered} \tag{1.2.2}$$

представимо в виде e^{tA}, где A– ограниченный оператор.

Оператор A можно найти основываясь на том, что группа $T(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению для экспоненты

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t),$$

поэтому оператор A можно определить как производную от группы $T(t)$ в нуле, то есть

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(h) - I)x \tag{1.2.3}$$

В связи с этим оператор A называется *производящим оператором (или генератором) группы* $T(t)$.

Если отказаться от непрерывности по норме экспоненциальной функции и потребовать только ее *сильную непрерывность по* t, то объект оказывается значительно более богатым. Производящий оператор A снова вводится равенством (1.2.3) на всех тех $x \in E$, для которых предел существует. В этом случае он может быть уже неограниченным оператором, однако A является замкнутым и имеющим плотную в E область определения.

Дальнейшее обобщение понятия экспоненциальной функции от оператора связано с отказом от требования определения этой функции при $t < 0$.

В связи с этим возникли следующие определения:

Определение 1.2.9. Семейство ограниченных операторов $T(t)$ $(t > 0)$, действующих в банаховом пространстве E, называется *сильно непре-*

рывной однопараметрической полугруппой операторов , если $T(t)$ сильно непрерывно зависит от t и удовлетворяет условию $T(t)T(s) = T(t+s)$ $(t, s > 0)$.

Определение 1.2.10. Говорят, что $T(t)$– *полугруппа класса* C_0, если она сильно непрерывна и

$$\lim_{t\to 0+} \|T(t)x - x\|_E = 0 \tag{1.2.4}$$

при любом $x \in E$.

Для полугрупп класса C_0 также вводится понятие производящего оператора по формуле (1.2.3.) как производной справа от полугруппы в нуле.

Отметим, что если семейство ограниченных операторов $T(t)$ $(0 < t < \infty)$ обладает полугрупповым свойством, то из измеримости функций $T(t)x$ при каждом $x \in E$ следует сильная непрерывность полугруппы $T(t)$ при $t > 0$ (см. [6], [29]). Отсюда следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{ln\|T(t)\|}{t} = \omega,$$

называемого *типом полугруппы.*

Таким образом, требование сильной непрерывности полугруппы при $t > 0$ является естественным и оно влечет за собой определенный характер поведения полугруппы на бесконечности.

В связи с этим выделение новых типов полугрупп и их классификация в основном ведется по признаку поведения полугрупп в окрестности точки $t = 0$. Многочисленные результаты в этом направлении изложены в [50].

Существует классический критерий определения производящего оператора C_0– полугруппы, принадлежащий пяти авторам: Э. Хилле, Р. Филлипс, К.Иосида, В. Феллер, И. Миадера, который содержится в следующей теореме

Теорема (ХФИФМ) (см. [29], стр. 133.).

Для того чтобы линейный оператор A *был производящим оператором (генератором) полугруппы* $T(t)$ *класса* C_0*, необходимо и достаточно, чтобы он был замкнутым с плотной в* E *областью определения, имел спектр лежащий в полуплоскости* $Re\lambda \leq \omega$ *и резольвенту, удовлетворяющую условиям*

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{(\lambda-\omega)^m}, \quad \lambda > \omega \tag{1.2.5}$$

и $m = 1, 2, \dots$*, где* M *не зависит от* λ *и* m*.*

Отметим, что условия на все степени резольвенты трудно проверяемы. В связи с этим, крайне важным является достаточное условие на резольвенту

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda-\omega}, \quad \lambda > \omega, \tag{1.2.6}$$

из которого легко следует (1.2.5).

Для полугруппы $T(t)$ класса C_0 справедлива оценка

$$\|T(t)\| \leq Ke^{\omega t} \tag{1.2.7}$$

и если $\omega \leq 0$, то полугруппа удовлетворяет оценке

$$\|T(t)\| \leq K$$

и называется равномерно ограниченной C_0–полугруппой (см.[13], с.292).

Если $K = 1$, то полугруппа называется сжимающей C_0–полугруппой. Умножив C_0–полугруппу на $e^{-\omega t}$, очевидно получим новую полугруппу класса C_0 с условием равномерной ограниченности.

Построение полугруппы по производящему оператору можно произвести с помощью интеграла Коши

$$T(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, A)xd\lambda.$$

При $x \in D(A)$ и $t > 0$ этот интеграл сходится в смысле главного значения и определяет на плотном в E множестве $D(A)$ ограниченный оператор, который замыканием доопределяется на всем пространстве E. При этом $T(t)$ сильно сходится к I при $t \to +0$.

1.3 Канонические полугруппы

Как известно, начиная с фундаментальных работ Э.Хилле, Р.Филлипса и др. в теории уравнений параболического типа важное место занимают однопараметрические полугруппы линейных преобразований $U(t)$, $T \geq 0$, называемые каноническими и определяемые соотношением $U(\alpha \oplus \beta) \doteq U(\alpha)U(\beta)$, где α, β – действительные или комплексные числа [50], с.275. При этом в системе рассматриваемых чисел можно выделить множество полугрупп, соответствующих разнообразным операциям сложения.

Так в [50], с.275 показано, что если $F(x, y)$ функция $x, y \in \mathbb{R}$, такая, что $F(x, y) \in \mathbb{R}^+$ и

$$F(x,(F(y,z)) = F(F(x,y),z), \tag{1.3.1}$$

то формула $\alpha \oplus \beta = F(\alpha, \beta)$ может служить определением полугрупповой операции в $\mathbb{R}^+$. При этом введение таких операций связывается с теоремами сложения для некоторых элементарных функций.

К таким сложениям, например, относятся [50], с.275:

$$1)\, \alpha+\beta,\ \ 2)\, \alpha\cdot\beta,\ \ 3)\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta},\ \ 4)\, \alpha(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+\beta(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3.2}$$

соответствующие функциям: $1)\, x,\ 2)\ \ln x,\ 3)\ \operatorname{th} x,\ 4)\ \operatorname{sh} x$.

В настоящей диссертации мы используем другой подход и вводим широкие классы канонических полугрупп, как решений простейших уравнений с частными производными первого порядка.

1.4 Элементарные полугруппы и их производящие уравнения

1.4.1 Элементарные полугруппы

Пусть $t \in (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$; $\rho(t)$ и $h(t)$ — действительнозначные функции с областями определения $D(\rho) = (t_1, t_2)$, $D(h) = (a, b)$, непрерывно дифференцируемые и строго монотонные. Кроме того, $h(x) + \rho(t) \in D(h^{-1}) \bigcap D(\rho^{-1})$, где ρ^{-1} и h^{-1} — соответствующие обратные функции.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\rho'(t)} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{h'(x)} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}. \tag{1.4.1}$$

Нетрудно видеть, что общее решение этого уравнения имеет вид:

$$u(t,x) = \psi[h(x) + \rho(t)], \tag{1.4.2}$$

где ψ – произвольная дифференцируемая функция.

Используя функции h^{-1} и ρ^{-1}, выражение (1.4.2) можно записать как

$$u(t,x) = \psi_1[h^{-1}(h(x) + \rho(t))] \text{ или } u(t,x) = \psi_2[\rho^{-1}(h(x) + \rho(t))], \tag{1.4.3}$$

где $\psi_1 = \psi h, \ \psi_2 = \psi\rho$ – также произвольные функции.

Имея в дальнейшем ввиду t и x как временную и пространственную переменные, поставим в соответствие уравнению (1.4.1) однопараметрическое семейство операторов

$$U_{\rho,h}(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + \rho(t))], \tag{1.4.4}$$

в предположении, что φ принадлежит пространству непрерывных и ограниченных функций $\mathfrak{C}(a, b)$ с нормой $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in(a,b)} |\varphi(x)|$.

Далее рассмотрим функцию

$$F(\alpha,\beta) = \rho^{-1}[\rho(\alpha) + \rho(\beta)]. \tag{1.4.5}$$

Нетрудно проверить, что она удовлетворяет условиям (1.3.1) и, таким образом, определяет сложение по правилу

$$x \oplus^{\rho} t = \rho^{-1}[\rho(x) + \rho(t)]. \tag{1.4.6}$$

Лемма 1.4.1. Операторное семейство $U_{\rho,h}(t)$, определенное (1.4), является полугруппой линейных и ограниченных в $\mathfrak{C}(a,b)$ операторов со сложением (1.4.6).

Доказательство. Ограниченность следует из оценки

$$\|U_{\rho,h}(t)\varphi\| = \|\varphi[h^{-1}(x) + h(t)]\| \le \|\varphi\|. \tag{1.4.7}$$

Кроме того, легко видеть, что $\|\varphi\| = 1$.

Далее имеем

$$\begin{gathered} U_{\rho,h}(t)U_{\rho,h}(s)\varphi(x) = U_{\rho,h}(t)\varphi[h^{-1}(h(x) + \rho(s))] = \\ \varphi[h^{-1}[h(x) + \rho(t) + \rho(s)] = \varphi\left[h^{-1}[h(x) + \rho[\rho^{-1}(\rho(t) + \rho(s))]]\right] = \\ \varphi[h^{-1}(h(x) + \rho(t \oplus^{\rho} s))] = U_{\rho,h}(t \oplus^{\rho} s)\varphi(x). \end{gathered} \tag{1.4.8}$$

Что и дает полугрупповое свойство.

Замечание 1.4.1. Нетрудно проверить, что при заданной $\rho(t)$ полугруппы $U_{\rho,h}(t)$ инвариантны относительно замены $h(x)$ на $h(x) + c$, где c – константа.

1.4.2 Производящие уравнения

Определение 1.4.1 Полугруппу $U_{\rho,h}(t)$ будем называть (ρ,h)–полугруппой, а уравнение (1.4.1) ее производящим уравнением.

Заметим, что так как функцию $\rho(t)$ можно выбирать с точностью до постоянного слагаемого, то уравнение (1.4.1) порождает однопараметрическое семейство (ρ, h)-полугрупп.

В связи с этим справедлива

Лемма 1.4.2. (ρ, h)-полугруппа порожденная уравнением (1.1) однозначно определяется некоторой точкой $t_0 \in (t_1, t_2)$, в которой $U_{\rho,h}(t_0)\varphi(x) = \varphi(x)$.

Доказательство следует из непрерывности и монотонности функции $\rho_c(t) = \rho(t) + c$, которая, при соответствующем выборе константы c, обращается в ноль в единственной точке $t_0 \in (t_1, t_2)$. При этом, в силу замечания 1.1, добавление произвольной константы к $h(x)$ полугруппу не меняет.

Отсюда следует, что задача Коши для уравнения (1.4.1) с начальным условием $u(t_0, x) = \varphi(x)$ при каждом $\varphi \in \mathfrak{C}(a, b)$ имеет единственное решение и оно представимо в виде:

$$u(t, x) = U_{\rho,h}(t)\varphi(x). \tag{1.4.9}$$

В связи с этим, точку t_0 будем называть *точкой Коши.*

Далее заметим, что если законы задания функций ρ и h одинаковые, то соответствующие (ρ, h)–полугруппы можно записать в виде

$$U_{h,h}(t)\varphi(x) = \varphi(x \oplus^h t). \tag{1.4.10}$$

Такие полугруппы будем называть h–симметричными, а соответствующие уравнения (1.4.1) — *симметричными производящими уравнениями.*

Лемма 1.4.3. В семействе полугрупп производимых симметричным дифференциальным уравнением, содержится лишь одна симметричная полугруппа.

Доказательство. Пусть $U_h(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}[h(x)+h(t)]]$. Тогда для любых $c \neq 0$ и $h_c = h(t) + c$ имеем $U_{h+c}(t)\varphi(x) = \varphi[h_c^{-1}[h_c(t) + h_c(x)]] = \varphi[h^{-1}[h(x)+h(t)+c]]$. То есть U_{h+c} не является симметричной при $c \neq 0$.

1.4.3 Примеры

Среди разнообразных (ρ, h)–полугрупп отметим следующие:

I. Все полугруппы со сложением (1.3.2) являются h–симметричными с точкой Коши $t_0 = 0$ и производящими уравнениями:

1) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},\ h(x) = x,\ x \geq 0,\ t \geq 0;$

2) $t\frac{\partial u}{\partial t} = x\frac{\partial u}{\partial x},\ h(x) = \ln x,\ x > 0,\ t \geq 0;$

3) $(1-t^2)\frac{\partial u}{\partial t} = (1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x},\ h(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ 0 \leq x < 1\ 0 \leq t < 1$

4) $(1+t^2)\frac{\partial u}{\partial t} = (1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x},\ h(x) = x + \sqrt{1+x^2},\ x \geq 0,\ t \geq 0;$

5) Среди несимметричных (ρ, h)–полугрупп отметим $U_{\rho,h}\varphi(x) = \varphi[xe^{\rho(t)}]$, $h(x) = \ln x$, с уравнением $\frac{1}{\rho'(t)}\frac{\partial u}{\partial t} = x\frac{\partial u}{\partial x}$.

II. Идемпотентные полугруппы В.П. Маслова.

Интересные классы полугрупп связаны с исследованиями академика В.П. Маслова по идемпотентному анализу [6], [7] со сложениями $t \oplus^\delta x = -\delta\ln(e^{-\frac{t}{\delta}} + e^{-\frac{x}{\delta}})$, которые порождают симметричные полугруппы вида:

$$M_\delta(t)\varphi(x) = \varphi[-\delta\ln(e^{-\frac{t}{\delta}} + e^{-\frac{x}{\delta}})] = \varphi(t \oplus^\delta x),\ (t \geq 0,\ x \geq 0) \qquad (1.4.11)$$

Будем рассматривать классы $M_\delta^+(t)$ при $\delta > 0$ и $M_\delta^-(t)$, $\delta < 0$. Нетрудно видеть, что полугруппы $M_\delta^+(t)$ имеют точку Коши $t_0 = \infty$, а полугруппы $M_\delta^-(t)$ такой точки не имеют.

В то же время, несимметричные полугруппы $M_{\delta,c}(t)\varphi = \varphi[-\delta\ln(e^{-\frac{x}{\delta}} + e^{-\frac{t}{\delta}} - c)]$, порожденные уравнением (1.4.11), всегда имеют точку Коши $t_0 = -\delta\ln c$.

Наконец, следующие интересные примеры дают нам предельные сложения Маслова

$$t \oplus x = \lim_{\delta \to 0} (t \oplus^{\delta} x) = \begin{cases} \min(t, x), & \delta > 0; \\ \max(t, x), & \delta < 0. \end{cases} \tag{1.4.12}$$

которым соответствуют полугруппы

$$M_0^+(t)\varphi(x) = \varphi(\min(x, t)), \qquad M_0^-(t)\varphi(x) = \varphi(\max(x, t)) \tag{1.4.13}$$

с производящими уравнениями

$$\chi(t - x)\frac{\partial u}{\partial t} = \chi(x - t)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.4.14}$$

в случае M_0^+,

$$\chi(x - t)\frac{\partial u}{\partial t} = \chi(t - x)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.4.15}$$

в случае M_0^-.

Здесь χ— функция Хевисайда.

Отсюда следует, что для уравнений (1.4.14) и (1.4.15) задача с условием $u(t_0, x) = \varphi(t)$ имеет единственное решение.

1.5 Арифметические полугруппы и из производящие операторы

Для дальнейшего изучения элементарных полугрупп с точки зрения их сильной непрерывности введем следующие понятия.

Определение 1.5.1. Полугруппу $U_{\rho,h}(t)$ будем называть сильно непрерывной в точке $t_0 \in (t_1, t_2)$, если для любого $\varphi \in E$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \downarrow t_0} \|U_{\rho,h}(t)\varphi - \varphi\|_E = 0. \tag{1.5.1}$$

Используя полугрупповое свойство, нетрудно показать, что для непрерывности полугруппы в любой точке $t \in (t_1, t_2)$ необходима и достаточна ее сильная непрерывность в точке Коши.

Определение 1.5.2. Пусть $f(t)$ – векторнозначная функция, определённая при $t \in (t_1, t_2)$ со значениями в E. И $\mu(t)$ – скалярная функция, определенная на $D(\mu) \in \mathbb{R}$ и с областью значений $R(\mu) = (t_1, t_2)$ строго монотонная. Суперпозицию $g(t) = f(\mu(t))$ будем называть μ-деформацией функции $f(t)$.

Определение 1.5.3. Полугруппы $U_h^{(0)}(t)$ со сложением $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$ будем называть арифметическими.

К таким классам относятся (ρ, h)– полугруппы, когда $\rho(t) = t$. То есть

$$U_h^{(0)}(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(t) + t)]. \qquad (1.5.2)$$

В соответствии с этими определениями, всякая (ρ, h)–полугруппа является ρ–деформацией арифметической полугруппы $U_h^{(0)}(t)$.

Кроме того, отсюда следует, что полугруппы $U_{\rho,h}(t)$ сильно непрерывны в точке Коши t_0, тогда и только тогда, когда арифметическая полугруппа $U_{\rho,h}(t)$ сильно непрерывна в точке $t = 0$.

Определение 1.5.4. Функцию $\varphi \in \mathfrak{C}(a, b)$ будем называть μ–равномерно непрерывной, если ее μ^{-1}–деформация $\psi = \varphi(\mu(x))$ является ограниченной и равномерно непрерывной функцией.

Очевидно, что при этом имеем соотношение

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{C}(a,b)} = \sup_{x \in (a,b)} |\varphi(x)| = \sup_{s \in (\mu^{-1}(a), \mu^{-1}(b))} |\varphi(\mu(s))| = \|\psi\|_{\mathfrak{C}\mu}.$$

То есть, пространства $\mathfrak{C}(a, b)$ и $\mathfrak{C}\mu$ изоморфны. И, следовательно, пространства μ–равномерно непрерывных функций с нормой $\mathfrak{C}\mu$ является банаховыми.

Лемма 1.5.1. Всякая $U_h^{(0)}(t)$–полугруппа сильно непрерывна в пространстве h^{-1}-равномерно непрерывных функций.

Доказательство следует из соотношений

$$\|U_h^{(0)}(t)\varphi(x)-\varphi(x)\| = \sup_{x\in(a,b)} |\varphi[h^{-1}[h(x)+t]-\varphi[h^{-1}(h(x))]]| =$$

$$= \sup_{\tau\in(h^{-1}(a),h^{-1}(b))} |\psi(\tau+t)-\psi(\tau)| = \|\psi(\tau+t-\psi(\tau)\| \to 0, \text{ при } t\to 0^+.$$

Таким образом, полугруппы $U_h^{(0)}(t)$ имеют производящие операторы $A_h^{(0)}\varphi = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{U_t^{(0)}\varphi-\varphi}{t}$ с областью определения $D(A_h^{(0)})$, плотной в $\mathfrak{C}_{h^{-1}}$ (см.[26], с.258).

Теорема 1.5.1. Производящий оператор полугруппы $U_h^{(0)}(t)$ задается дифференциальным выражением $L\varphi(x) = \frac{1}{h'(x)}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и областью определения $D(A_h^{(0)}) = \{\varphi : \varphi\in\mathfrak{C}_{h^{-1}},\ L\varphi\in\mathfrak{C}_{h^{-1}}\}$.

В заключение отметим, что термин "элементарные полугруппы" введен здесь в связи с возможностью использования таких полугрупп при конструировании более сложных аналогичных объектов— полугрупп, групп, косинус–функций, например, по следующей схеме:

а) если A— генератор C_0– полугруппы $U(t,A)$, $t\geq 0$, а $(-A)$— генератор C_0– полугруппы $\widetilde{U}(-t,A)$, $t\leq 0$, действующий в E, то семейство $S(t)=U(t,A)$ при $t\geq 0$ и $S(t)=\widetilde{U}(-t,A)$, при $t,\leq 0$ является группой с генератором A, и $S(t)S(s)=S(t+s)$, $-\infty<t,s<\infty$ (см. [13], с. 347).

б) далее, в соответствии с ([7], с. 179 оператор $A_a = A^2+aI$ порождает операторную косинус–функцию $C_a(t)f = C_0(t)f + at\int_0^t (t^2-s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2-s^2)]^{\frac{1}{2}} C_0(s)ds$, где $C_0(t)=\frac{1}{2}[S(t)+S(-t)]$, I_1— функция Бесселя, a— const.

в) тогда, в силу результатов [15], операторы A_a^{2n+1} $(n=0,1,\dots)$ также являются генераторами косинус–функций $C(t,A_a^{2n+1})$, а, следовательно и генераторами C_0– полугрупп вида

$$U(t,A_a^{2n+1})f = \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s,A_a^{2n+1})f ds.$$

Следует также указать и на возможности конструирования C_0– полугрупп в рамках теории дробных степеней операторов развитой в работах [13],[26], [27].

1.6 Позитивные операторы и их дробные степени

В исследовании корректной разрешимости начально–краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторами важное место занимают дробные степени этих операторов. В частности, это относится к так называемы позитивным операторам см. [28], с. 135.

Определение 1.6.1. Оператор A с плотной областью определения будем называть *позитивным,* если при всех $t > 0$ существуют операторы $(A + tI)^{-1}$ и если

$$\|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + t} \tag{1.6.1}$$

Позитивные операторы не обязательно являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп.

Оказывается, что для введения дробных степеней можно ослабить условие позитивности.

Как известно, для производящих операторов C_0-полугрупп, удовлетворяющих оценке

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega > 0, t > 0, M > 0, \tag{1.6.5}$$

определены дробные степени $(-A)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой Балакришнана (см. [13], с. 358)

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{(T(t) - I)x}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (x \in D(A)). \tag{1.6.6}$$

И для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ справедливо представление

$$(\mu I - A_\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty (rI - A)^{-1} \frac{r^\alpha dr}{\mu^2 - 2\mu r^2 \cos \alpha\pi + r^{2\alpha}}. \qquad (1.6.7)$$

Оператор A_α является производящим оператором аналитической полугруппы $T_\alpha(t)$, равностепенно непрерывной и удовлетворяющей C_0- условию.

Справедлива следующая

Теорема 1.6.1. Если A - генератор C_0-полугруппы, удовлетворяющей оценке (1.6.5), то для полугрупп $T_\alpha(t)$, генераторами которых являются операторы $-(-A)^\alpha$, справедлива оценка

$$\|T_\alpha(t)\| \leq M e^{-\omega^\alpha t}, \qquad (1.6.8)$$

где константы M и ω из (1.6.5).

Доказательство этого факта см. в [23].

Лемма 1.6.1. Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 1.5.1, то для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ имеет место оценка

$$\|(\mu I - A_\alpha)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\mu + \omega^\alpha)^n}, \qquad (1.6.9)$$

где константы M и ω из (1.6.5).

1.7 Задачи корректные по Ж.Адамару

Целью исследований настоящей диссертации является применение теории однопараметрических полугрупп и установление корректной разрешимости некоторых краевых задач для эволюционных уравнений с переменными коэффициентами, и, в частности, для уравнений с дробными производными.

Как известно, согласно Ж.Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения $Au = f$, $(f \in F)$ корректно поставлена на паре (U, F) метрических пространств U и F с метриками ρ_U и ρ_F соответственно, если выполнены условия:

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$— решение уравнения, б) решение определяется однозначно, в) задача устойчива на пространствах (F, U), то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$, следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Однако устойчивость задачи зависит от выбранных топологий в F и U и, вообще говоря, подходящим выбором топологий формально можно добиться непрерывности оператора A^{-1}, существование которого обеспечивают условия а) и б). Так, в случае линейного взаимооднозначного соответствия оператора A и нормированных пространств U и F, устойчивость будет иметь место, если пространство F наделить нормой $\|f\|_F = \|A^{-1}f\| = \|u\|_U$, и тогда $\|A^{-1}f\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|} = 1$ (см. [31], с.12).

В связи с этим возникает следующая проблема выбора топологий в U и F.

1. С одной стороны важно, чтобы эти топологии не зависели от оператора A. Например, в случае когда $A = A(\lambda)$— оператор зависящий от некоторого параметра λ, важно чтобы область определения обратного оператора $A^{-1}(\lambda)$ (например резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ была не зависящей от λ).

2. С другой стороны желательно иметь наиболее широкий класс начальных данных F при которых решение задачи $u \in U$ сохраняло хорошие свойства.

Таким образом, установление устойчивости существенно зависит от выбора функциональных пространств, в которых ищется решение и в которых соответствующие обратные операторы ограничены.

В связи с этим, в классе корректных по Адамару задач важное место занимают задачи в которых U и F плотно вложены в некоторое банахово пространство E и сходимость понимается в смысле $\|\cdot\|_E$. Такие задачи мы называем равномерно корректными.

1.8 Задачи для дифференциальных уравнений, равномерно корректные по С.Г. Крейну

Следующие факты связывают понятия (C_0)– полугруппы и (C_0)– косинус функции с корректной разрешимостью задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве первого и второго порядков.

$$u'(t) = Au(t) \tag{1.8.1}$$

$$u''(t) = Au(t) \tag{1.8.2}$$

Определение 1.8.1 ([28], с. 38). Решением уравнения (1.8.1) на отрезке $[0.t_0]$ называется функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, t_0]$, 2) в каждой точке $t \in [0, t_0]$ существует сильная производная $u'(t)$, 3) уравнение (1.8.1) удовлетворяется при всех $t \in [0, t_0]$.

Под задачей Коши на $[0, t_0]$ понимают задачу о нахождении решения уравнения (1.8.1), удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0 \in D(A). \tag{1.8.3}$$

Определение 1.8.2. Задача Коши поставлена корректно на отрезке $[0, t_0]$ если: 1) при любом $u_0 \in D(A)$ существует ее единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $x_0(0) \to 0$ следует, что $x_n(t) \to 0$ равномерно по t на каждом компакте из $[0, t_0]$.

Теорема 1.8.1. ([28], с. 64) Задача (1.8.1)—(1.8.3) равномерно корректна тогда и только тогда когда A является генератором (C_0)– полугруппы $T(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = T(t)\varphi \tag{1.8.4}$$

и существуют константы M и ω, не зависящие от φ такие, что выполняется оценка

$$\|u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|\varphi\|. \tag{1.8.5}$$

1.8.2. Краевые задачи для уравнения 2–го порядка

В банаховом пространстве E рассматривается однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{1.8.6}$$

где A–линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в E, с областью определения $D(A)$.

Приведем необходимые нам известные результаты связанные с корректной разрешимостью краевых задач для уравнения (1.8.6), изложенные в [28] гл.III.

В [28] уравнение (1.8.6) рассматривается в предположении сильной позитивности оператора A в соответствии со следующим определением

Определение 1.8.3. Решением уравнения (1.8.6) будем называть функцию $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (1.8.6) на отрезке $[0, T]$.

Так как сильная позитивность оператора A гарантирует существование его дробных степеней и, в частности, операторов $A^{-\frac{1}{2}}$ и $A^{\frac{1}{2}}$, причем оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором полугруппы $V(t)$ класса C_0. При этом для $z_0 \in D(A)$ и $w_T \in D(A)$ функции

$$z(t) = V(t)z_0 \qquad w(t) = V(T-t)w_T \tag{1.8.7}$$

порождают решения уравнения (1.8.6). Однако решения уравнения (1.8.6) на интервале $0 < t < T$ будут бесконечно дифференцируемы при любых $z_0, w_T \in E$.

В связи с этим вводятся следующие определения, классифицирующие понятие решения в зависимости от поведения на концах отрезка $[0, T]$.

Определение 1.8.4. Функция $u(t)$ называется *ослабленным решением* уравнения (1.8.6) если: 1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$u'(t) \in C[0, T], u'' \in C(0, T); \tag{1.8.8}$$

2) ее значения принадлежат $D(A)$ при $0 < t < T$, а функция $A^{\frac{1}{2}}u(t)$ непрерывна на всем отрезке $[0, T]$, то есть

$$u(t) \in D(A), \qquad 0 < t < T; \tag{1.8.9}$$

$$A^{\frac{1}{2}}u(t) \in C[0, T]; \tag{1.8.10}$$

3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.8.6) в интервале $(0, T)$, то есть

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad t \in (0, T). \tag{1.8.11}$$

Определение 1.8.5. Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1.8.6), если: 1) она удовлетворяет условиям (1.8.8), а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$A^{-\frac{1}{2}}u(t) \in C^1[0, T]; \tag{1.8.12}$$

2) она удовлетворяет условиям (1.8.9), (1.8.11).

В [28] рассматриваются лишь ослабленные или обобщенные решения уравнения (1.8.6).

Справедлива следующая

Теорема 1.8.2. ([28], стр.307) Всякое обобщенное решение уравнения (1.8.6) имеет вид

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)w_T \tag{1.8.13}$$

и наоборот, функция вида (1.8.13) является обобщенным решением уравнения (1.8.6) при любых $z_0, w_T \in E$.

Для того чтобы обобщенное решение (1.8.13) было ослабленным, необходимо и достаточно, чтобы $z_0, w_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Все обобщенные решения уравнения (1.8.6) являются аналитическими функциями от t при $0 < t < T$.

Краевая задача.

Введем в рассмотрение систему краевых условий вида

$$L_1(u) = \alpha_{11}u_0 + \alpha_{12}u_0' + \beta_{11}u_T + \beta_{12}u_T' = f_1;$$

$$L_2(u) = \alpha_{21}u_0 + \alpha_{22}u_0' + \beta_{21}u_T + \beta_{22}u_T' = f_2, \tag{1.8.14}$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} (i, j = 1, 2)$–комплексные числа, f_1, f_2–заданные элементы пространства E, $u_0 = u(0), u_0' = u'(0), u_T = u(T), u_T' = u'(T)$. Формы $L_1(u)$ и $L_2(u)$ предполагаются линейно независимыми.

Определение 1.8.6. Если ослабленное решение $u(t)$ уравнения (1.8.6) удовлетворяет краевым условиям (1.8.14), то оно называется *ослабленным решением* краевой задачи (1.8.6)–(1.8.14).

Обозначая $A^{\frac{1}{2}}z_0 = g_1$ и $A^{\frac{1}{2}}w_T = g_2$, любое ослабленное решение уравнения (1.8.6) можно записать в виде

$$u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2, \tag{1.8.15}$$

где $V_1(t) = V(t)A^{-\frac{1}{2}}$ и $V_2(t) = V(T-t)A^{-\frac{1}{2}}$, и g_1 и g_2–некоторые элементы из E.

Вводя операторный определитель

$$D = \begin{vmatrix} L_1(V_1) & L_1(V_2) \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) \end{vmatrix}, \tag{1.8.16}$$

называемый *характеристическим определителем*, для решения задачи (1.8.6)–(1.8.14) получается представление

$$Du(t) = S_1(t)f_1 + S_2(t)f_2, \tag{1.8.17}$$

где

$$S_1(t) = V_1(t)L_2(V_2) - V_2(t)L_2(V_1),$$
$$S_2(t) = -V_1(t)L_1(V_2) + V_2(t)L_1(V_1). \tag{1.8.18}$$

Оператор D является линейным ограниченным в E оператором коммутирующим с операторами $A^{-\frac{1}{2}}$, $V(T)$,$V(T)A^{-\frac{1}{2}}$.

Определение 1.8.7. Всякую непрерывную на $[0,T]$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую соотношению (1.8.17), называют *обобщенным решением* краевой задачи (1.8.6)–(1.8.14).

Таким образом, для представления решения задачи (1.8.6)–(1.8.14), необходимо исследовать вопрос о существовании обратного оператора

D^{-1} и его связи с операторами $L_i(V_j)$. Здесь возникают разные возможности, связанные с различными свойствами краевой задачи.

Равномерно корректные краевые задачи. Регулярные краевые условия

Определение 1.8.8. Краевая задача (1.8.6)–(1.8.14) называется *равномерно корректной*, если для всяких f_1 и f_2 из E существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее в норме пространства $C(E)$ от f_1 и $f_2 \in E$.

Справедлива следующая

Теорема 1.8.3. ([28], с. 316) *Для того, чтобы задача (1.8.6)–(1.8.14) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы операторы $D^{-1}S_1(t)$ и $D^{-1}S_2(t)$ были равномерно ограниченными на $[0, T]$.*

Для равномерной корректности задачи, также как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, существенную роль играет свойство регулярности краевых условий.

В рассматриваемом случае краевые условия регулярны лишь когда выполнено одно из условий

1. $d_{24} \neq 0$,

$$d_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

2. $d_{24} = 0$, но $|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0$ и

$$d_{23} - d_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1.8.19)$$

3. $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, но $d_{13} \neq 0$,

$$d_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Примерами регулярных краевых условий являются условие Дирихле

$$u(0) = f_1, u(T) = f_2$$

и условие Неймана

$$u'(0) = f_1, u'(T) = f_2.$$

Справедливы следующие теоремы

Теорема 1.8.4. ([28], с. 318) Пусть краевые условия задачи (1.8.6)–(1.8.14) регулярны. Тогда оператор D может быть представлен в одной из следующих форм

$$\begin{aligned} &1. D = c(1 - R), \\ &2. D = cA^{-\frac{1}{2}}(I - R), \\ &3. D = cA^{-\frac{1}{2}}(I - R), \end{aligned} \tag{1.8.20}$$

где R–ограниченный оператор в каждом случае свой, а c– константы.

Если единица не является точкой спектра оператора R, то краевая задача (1.8.6)–(1.8.14) равномерно корректна на отрезке $[0, T]$. Все обобщенные решения задачи являются обобщенными решениями уравнения (1.8.6).

Теорема 1.8.5. В условиях теоремы 1.8.3 обобщенное решение будет ослабленным при любых f_1 и $f_2 \in E$ в случае 1) из (1.8.20). Для того, чтобы оно было ослабленным в остальных случаях достаточно, чтобы $f_1, f_2 \in D(A^{\frac{1}{2}})$.

Ограниченные на бесконечности решения

Пусть $u(t)$—обобщенное решение уравнения (1.8.6), определенное на $[0, \infty)$. Предположим, что оно ограничено:

$$\sup_{t \in [0,\infty)} \|u(t)\| < \infty. \tag{1.8.21}$$

Тогда справедлива

Теорема 1.8.6. ([28], с. 324) Для всякого $u_0 \in E$ существует единственное, ограниченное на полуоси $[0, \infty)$ обобщенное решение уравнения (1.8.6), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u_0$. Это решение задается формулой

$$u(t) = V(t)u_0, \tag{1.8.22}$$

где $V(t)$– полугруппа класса C_0, генератором которой является оператор $A^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, из выше сказанного следует, что при подходе С.Г.Крейна к исследованию краевых задач для уравнения (1.8.6) необходимо существование операторов $A^{-\frac{1}{2}}$ и $A^{\frac{1}{2}}$, в терминах которых формулируются понятия ослабленного и обобщенного решения.

Глава 2

Задачи без начальных условий и их корректная разрешимость

2.1 Постановка задачи

Многие процессы тепло– и массопереноса описываются нестационарной задачей

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \qquad t \in (-\infty, \infty), x \in (0, \infty). \tag{2.1.1}$$

$$u(t,0) = u_0(t), \qquad u(t,\infty) = 0. \tag{2.1.2}$$

t— время, x— пространственная координата, $u(t,x)$— температура.

Требуется определить выражение для теплового потока, т.е. производную от температуры по координате x на границе области

$$q(t) = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{2.1.3}$$

Частный случай такой задачи (когда $u_0(t)$— периодическая функция или заданная рядом Фурье) рассмотрен в [1], с. 57. Здесь она называется задачей без начальных условий.

Следует отметить, что решение этих задач в [1] формально осуществляется с помощью функциональных рядов, членами которых являются интегро–дифференциальные конструкции дробного порядка. При этом, вопросы сходимости приближенных решений к точному и их устойчивость к погрешностям исходных данных не обсуждается. То есть, не обсуждается проблема корректной разрешимости по Ж.Адамару рассматриваемых задач, требующая введения соответствующих метрик.

В настоящей диссертации методами теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов рассматривается более общая задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \gamma(t)u(t,x), \qquad (2.1.4)$$

$x \in (0,\infty)$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$u(t,0) = u_0(t), \qquad u(t,\infty) = 0, \qquad (2.1.5)$$

где $\alpha(t)$, $\gamma(t)$— произвольные непрерывные на (a,b)– функции, $u_0(t)$— элементы некоторого банахова пространства.

Здесь устанавливается равномерно корректная разрешимость, в смысле С.Г. Крейна [28], с. 305, с использованием методов сильно непрерывных полугрупп.

2.2 Необходимые факты из общей теории

В банаховом пространстве E рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad t \in [0,\infty), \qquad (2.2.1)$$

где оператор A такой, что $-A$ является генератором полугруппы $(T,-A)$ класса C_0 с оценкой

$$\|T(t,-A)\| \leq e^{-\omega t} \quad (\omega \geq 0). \qquad (2.2.2)$$

и, следовательно, по К. Иосида [13],с. 358, определены отрицательный $A^{-\frac{1}{2}}$ и положительный. Квадратные корни

$$A^{-\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}T(t,-A)\varphi dt, \qquad (2.2.3)$$

$$A^{\frac{1}{2}}\varphi = A\cdot A^{-\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}T(t,-A)A\varphi dt, \qquad (2.2.4)$$

если $\varphi \in D(A)$.

При этом оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является генератором полугруппы класса C_0 вида

$$T(t,-A^{\frac{1}{2}})\varphi = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}}\exp(-\frac{t^2}{4s})T(s,-A)\varphi ds \qquad (2.2.5)$$

(см. [13], с. 369, [2], с. 120).

Далее, согласно С.Г. Крейну [28], с. 306 дадим

Определение 2.2.1. Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (2.2.1), если

1) она непрерывна на $[0,\infty)$, имеет непрерывную вторую производную на $(0,\infty)$, а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную первую производную на $[0,\infty)$.

2) значения $u(t)$ на $(0,\infty)$ принадлежат $D(A)$.

3) она удовлетворяет уравнению (2.2.1).

В дальнейшем будет использована

Теорема 2.2.1 (С.Г. Крейн [5], с. 324). Если оператор A удовлетворяет выше приведенным условиям, то для всякого $u_0 \in E$ существует единственное ограниченное на полуоси $[0,\infty)$ обобщенное решение уравнения (2.2.1), удовлетворяющее условию $u(0) = u_0$.

Это решение задается формулой

$$u(t) = T(t,-A^{\frac{1}{2}})u_0. \qquad (2.2.6)$$

2.3 Полугруппы переносов с деформациями

а) Полугруппы $T^{+}_{h,\rho}(t)$.

На интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$— конечном или бесконечном, введем непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$ такую, что $h'(x)>0$, $\lim\limits_{x\to b}h(x)=\infty$.

Через $L^{+}_{p,\omega,h}$ будем обозначать пространства функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|=\|\varphi\|_{p,\omega,h,g}=\left[\int_a^b|\exp[\omega h(x)]g(x)\varphi(x)|^p dh(x)\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.3.1)$$

$p\ge 1$, $\omega>0$, $g(x)>0$, $g'(x)>0$. Введем обозначения $h(x)\oplus t=h^{-1}[h(x)+t]$.

Пусть $\rho(x)\ge 0$ локально интегрируемая на (a,b) функция. Будем рассматривать операторное семейство

$$T^{+}_{h,\rho}(t)\varphi(x)=\exp\left[\int_{h(x)\oplus t}^{x}\rho(\xi)dh(\xi)\right]\varphi[h(x)\oplus t]. \qquad (2.3.2)$$

Теорема 2.3.1. Операторное семейство $T^{+}_{h,\rho}(t)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой действующей в пространстве $L_{p,\omega,h}$, удовлетворяющей оценке

$$\|T^{+}(t)\|\le\exp(-\frac{\omega}{p}t). \qquad (2.3.3)$$

Доказательство. Сначала оценим

$$\|T^{+}_{h,\rho}(t)\varphi\|^p_{p,\omega,h,g}=\int_a^b\exp[\omega h(x)+p\int_{h(x)\oplus t}^{x}\rho(\xi)dh(\xi)]g(x)|\varphi[h(x)\oplus t]|^p dh(x)\le$$

$$\le\int_a^b g(x)\exp[\omega h(x)]|\varphi(h(x)\oplus t)|^p dh(x). \qquad (2.3.4)$$

После замены $h(x)\oplus t=\tau$ неравенство (2.3.4) принимает вид

$$\|T^{+}_{h,\rho}(t)\varphi\|^p_{p,\omega,h,g}\le\exp(-\omega t)\int_{h(a)\oplus t}^{b}\exp[\omega h(\tau)]g[h^{-1}(h(\tau)-t)]|\varphi(\tau)|^p dh(\tau)\le$$

$$\leq \exp(-\omega t)\int_a^b \exp[\omega h(\tau)]g(\tau)|\varphi(\tau)|^p dh(\tau).$$

Отсюда следует ограниченность полугруппы

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi\|^p_{p,\omega,h,g} \leq \exp(-\frac{\omega}{p}t)\|\varphi\|. \qquad (2.3.5)$$

Свойство $T^+_{h,\rho}(0)\varphi = \varphi$ очевидно.

Для установления полугруппового соотношения $T(t)T(s) = T(t+s)$ проведем следующие вычисления

$$T^+_{h,\rho}(t)T^+_{h,\rho}(s)\varphi(x) = T_{h,\rho}(t)\exp\left[\int_{h(x)\oplus s}^x \rho(s)d(\xi)\right]\varphi[h(x)\oplus s] =$$

$$= \exp\left[\int_{h(x)\oplus t}^x \rho(\xi)dh(\xi)\right]\exp\left[\int_{h(x)\oplus(t+s)}^{h(x)\oplus t} \rho(\xi)dh(\xi)\right]\varphi[h(x)\oplus t+s] =$$

$$= \exp\left[\int_{h(x)\oplus(t+s)}^x \rho(\xi)dh(\xi)\right]\varphi[h(x)\oplus t+s] = T^+_{h,\rho}(t+s)\varphi(x). \qquad (2.3.6)$$

Теперь установим сильную непрерывность полугруппы

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi - \varphi\| \leq \left[\int_{x(a)\oplus t}^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)]|\exp[\int_{h^{-1}(t+\tau)}^{h^{-1}(\tau)} \rho(\xi)dh(\xi)]\times\right.$$

$$\left.\times\varphi[h^{-1}(\tau+t)] - \varphi[h^{-1}(\tau)]|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, положим $\varphi[h^{-1}(t)] = \psi(t)$, $\rho[h^{-1}(s)] = \mu(s)$ и, используя метод "прибавить–отнять с применением неравенства Коши–Буняковского, получаем

$$\|T^+_{h,\rho}(t)\varphi - \varphi\| \leq \left[\int_{h(a)}^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)]\exp[\int_{t+\tau}^\tau \mu(s)ds]|\psi(t+\tau) - \psi(\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left[\int_{h(a)}^\infty \exp[\omega h^{-1}(\tau)]|\exp[p\int_{t+\tau}^\tau \mu(s)ds] - 1|\cdot|\psi(\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}} = S_1(t) + S_2(t).$$

Покажем, что $\lim\limits_{t\to 0} S_1(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} S_2(t) = 0$.

В случае $S_1(t)$ этот факт следует из непрерывности в целом L_p– весовых норм.

В случае $S_2(t)$, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ запишем $S_2^p(t)$ в виде суммы

$$S_2^p(t) = \int_{h(a)}^{N} \exp[\omega h^{-1}(\tau)] | \exp[p \int_{t+\tau}^{\tau} \mu(s)ds] - 1| \cdot |\psi(\tau)|^p d\tau +$$
$$+ \int_{N}^{\infty} \exp[\omega h^{-1}(\tau)] | \exp[p \int_{t+\tau}^{\tau} \mu(s)ds] - 1| \cdot |\psi(\tau)|^p d\tau = S_1^{(N)}(t) + S_2^{(N)}(t), \tag{2.3.7}$$

где N выбрано так, что выполняется неравенство $S_2^{(N)}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Затем, учитывая конечность интервала интегрирования, выбирая t_0 такое, что при всех $t > t_0$ выполняется оценка $S_1^{(N)}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует соотношение $\lim\limits_{t\to 0} S_2(t) = 0$, а из (2.3.7) получаем выполнение сильной непрерывности полугруппы $T_{h,\rho}(t)$

$$\lim_{h\to 0} \|T_{h,\rho}^{+}(t)\varphi - \varphi\| = 0, \quad \forall \varphi \in L_{p,h,\rho}. \tag{2.3.8}$$

Это завершает доказательство теоремы.

Таким образом, семейство $T_{h,p}^{+}$ является сильно непрерывной полугруппой с оценкой (2.3.5).

б) Полугруппы $T_{h,\rho}^{-}(t)$.

Рассмотрим случай когда функция $h(x)$, $x \in (a, b)$ удовлетворяет условиям: $h'(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$.

Через $L_{p,\omega,h,g}^{-}$ обозначим пространства функций с нормой

$$\|\varphi\|^{-} = \|\varphi\|_{p,\omega,h,g}^{-} = \left[\int_a^b \exp(-\omega h(x)) g(x) |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3.9}$$

$p \geq 1$, $\omega > 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) < 0$.

Пусть $h(x) \ominus t = h^{-1}[h(x) - t]$. Рассмотрим операторные семейства

$$T_{h,\rho}^{-}(t)\varphi(x) = \exp\left[\int_x^{h(x)\ominus t} \rho(\xi) dh(\xi) \right] \varphi[h(x) \ominus t]. \tag{2.3.10}$$

Для этих семейств аналогично $T^+_{h,\rho}$ доказывается

Теорема 2.3.2. Операторное семейство (2.3.10) является сильно непрерывной полугруппой действующей в пространстве $L^-_{p,\omega,h,g}$ и удовлетворяющей оценке

$$\|T^-(t)\|^-_{p,\omega,h,d} \leq \exp(-\frac{\omega}{p}t). \tag{2.3.11}$$

2.4 Производящие операторы полугрупп с деформациями

Из теоремы 2.3.1 и результатов [28], с. 258, [3], с. 327 следует, что для полугруппы $T^+_{h,\rho}(t)$ определен производящий оператор как сильный предел

$$A^+_{h,\rho} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}[T^+_{h,\rho}(t) - I]\varphi(x).$$

Его область определения $D(A^+_{h,\rho})$ плотна в $L^+_{p,h,\omega,g}$ и он замкнут.

В соответствии с [28], с. 258 значение производящего оператора можно определить как правую производную полугруппы в точке $t = 0$, то есть

$$A^+_{h,\rho}\varphi(x) = \frac{d}{dt}T^+_{h,\rho}(t)\varphi(x)\bigg|_{t=0} = \frac{d\varphi(x)}{dh(x)} - \rho(x)\varphi(x) = \mathfrak{D}^+_{h,\rho}\varphi(x). \tag{2.4.1}$$

Таким образом, производящим оператором полугруппы $T^+_{h,\rho}(t)$ является оператор $A^+_{h,\rho}$, заданный выражением $\mathfrak{D}^+_{h,\rho}\varphi(x)$ и областью определения $D(A^+_{h,\rho}) = \{\varphi \in L^+_{p,\omega,h,g}, \mathfrak{D}^+_{h,\rho}\varphi(x) \in L^+_{p,\omega,h,g}\}$.

б) Полугруппы $T^-_{h,\rho}(t)$.

Рассмотрим случай когда функция $h(x)$, $x \in (a,b)$ удовлетворяет условиям: $h'(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$.

Рассмотрим операторные семейства

$$T^-_{h,\rho}(t)\varphi(x) = \exp\left[\int_x^{h(x)\ominus t} \rho(\xi)dh(\xi)\right]\varphi[h(x)\ominus t]. \tag{2.4.2}$$

Для этих семейств аналогично $T^+_{h,\rho}$ доказывается

Теорема 2.4.1. Операторное семейство (2.4.2) является сильно непрерывной полугруппой действующей в пространстве $L^-_{p,\omega,h,g}$ и удовлетворяющей оценке

$$\|T^-(t)\|^-_{p,\omega,h,d} \leq \exp(-\frac{\omega}{p}t). \tag{2.4.3}$$

Ее генератором является оператор $A^-_{h,p}$, заданный выражением

$$\mathfrak{D}^-_{h,\rho}\varphi = -\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} - \rho(x)\varphi(x), \tag{2.4.4}$$

с областью определения $D(A^-_{h,\rho}) = \{\varphi \in L^-_{p,\omega,h,g}, \mathfrak{D}^-_{h,\rho}\varphi \in^-_{p,\omega,h,g}\}$.

2.5 Примеры полугрупп с деформациями

В этом параграфе рассмотрим некоторые примеры.

1. Если оператор $A^+_{h,\rho}$ задан выражением (2.4.1), $\rho(x) = \mu \cdot h(x)$, $\mu \geq 0$, то производящая его полугруппа имеет вид

$$T^+_h(t)\varphi(x) = \left(\frac{h(x)}{h(x)+t}\right)^{\mu} \varphi[h^{-1}(h(x)+t)]. \tag{2.5.1}$$

Она является сильно непрерывной в пространстве $L^+_{p,\omega,h,g}$ с нормой (2.3.1).

2. Если $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $\mu = 0$, то из (2.5.1) следует, что $T^+_h(t)\varphi(x) = \varphi(x+t)$ является полугруппой правых сдвигов в пространстве $L^+_{p,\omega}$ с нормой

$$\|\varphi\|^+ = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x} g(x)|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5.2}$$

Аналогично, полугруппа левых сдвигов $T^-_h(t)\varphi(x) = \varphi(x-t)$ является сильно непрерывной в пространствах $L^-_{p,\omega,h,g}$ с нормой

$$\|\varphi\|^- = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x} g(x)|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5.3}$$

Здесь $\omega > 0$. Заметим, что при $\omega = 0$ эти факты не справедливы.

3. Если в (2.5.1), $(a, b) = (0, \infty)$, $\mu > 0$, то соответствующая полугруппа имеет вид

$$T^{+}_{h,\rho}(t)\varphi(x) = \left(\frac{x}{x+t}\right)^{\mu} \varphi(x+t). \tag{2.5.4}$$

4. Полугруппы Адамара. Если $(a, b) = (0, \infty)$, $h(x) = \ln x$, $\mu = 0$, то полугруппы имеют вид

$$T^{+}_{h}(t)\varphi(x) = \varphi(xe^{t}), \tag{2.5.5}$$

$$T^{-}_{h}(t)\varphi(x) = \varphi(xe^{-t}). \tag{2.5.6}$$

Эти полугруппы сильно непрерывны в пространствах с нормами:

$$\|\varphi\|^{+} = \left[\int_0^\infty x^{\omega}|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \omega > 0, \tag{2.5.7}$$

$$\|\varphi\|^{-} = \left[\int_0^\infty x^{-\omega}|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \omega > 0, \tag{2.5.8}$$

Производящими операторами этих полугрупп являются операторы: A^{+}_{α}, заданный выражением $\mathfrak{D}^{+}_{\alpha}\varphi = x\frac{d\varphi}{dx}$, с областью определения $D(A^{+}_{\alpha}) = \{\varphi \in L^{+}_{\omega,p}, \mathfrak{D}^{+}_{\alpha}\varphi \in L^{+}_{\omega,p}\}$ и соответственно A^{-}_{α}, заданный выражением $\mathfrak{D}^{-}_{\alpha}\varphi = -x\frac{d\varphi}{dx}$, с областью определения $D(A^{-}_{\alpha}) = \{\varphi \in L^{-}_{\omega,p}, \mathfrak{D}^{-}_{\alpha}\varphi \in L^{-}_{\omega,p}\}$

Следуя [28], эти операторы мы называем операторами Адамара, а соответствующие полугруппы— полугруппами Адамара.

5. Гиперболические полугруппы. Если $(a, b) = (0, 1)$, $h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, $\mu = 0$, то нетрудно видеть, что в этом случае мы имеем полугруппу

$$T_h(t)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x+t}{1+xt}\right), \tag{2.5.9}$$

которая в [50], с. 275 называется гиперболической.

Из наших результатов следует, что эта полугруппа сильно-непрерывна в пространствах с нормой

$$\|\varphi\|_{\omega,p} = \left[\int_0^1 \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{\omega}{2}} |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.5.10)$$

2.6 Нестационарные задачи без начальных условий

Прямые и обратные задачи для параболических уравнений с переменными коэффициентами

В предположении $\alpha(t) > 0$, $\gamma(t) \geq 0$, $h'(t) = \alpha(t)$, $\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ будем рассматривать два вида уравнения (0.4).

$$\frac{\partial^2 u_+(t,x)}{\partial x^2} = \frac{\partial u_+(t,x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u^+(t,x), \qquad (2.6.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_-(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_-(t,x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u^-(t,x), \qquad (2.6.2)$$

Поменяв местами параметры t и x, уравнения (2.6.1) и (2.6.2) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} = -\mathfrak{D}^+_{h,\rho} u_+(t,x), \qquad (2.6.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} - = -\mathfrak{D}^-_{h,\rho} u_-(t,x), \qquad (2.6.4)$$

При этом краевые условия принимают вид

$$u_\pm(0,x) = u_0(x); \qquad u_\pm(\infty,x) = 0. \qquad (2.6.5)$$

Считая $u_\pm(t,x)$ векторнозначными функциями $u_\pm(t)$ со значениями в пространствах $L^+_{p,\omega,h,g}$ или $L^-_{p,\omega,h,g}$ соответственно, можно записать задачи (2.6.3)—(2.6.5) в операторной форме

$$\frac{d^2 u_\pm}{dt^2} = A^+ u_\pm(t), \qquad (2.6.6)$$

$$u_{\pm}(0) = u_0, \qquad u_0 \in L^+_{p,\omega,h,g}$$

в пространствах $L^+_{p,\omega,h,g}(L^+_{p,\omega,h,g})$, то из теоремы 1.8.6 следует

Теорема 2.6.1. Пусть $t_0 \in (a,b)$, $h(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds$, $\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$, тогда:

1) для каждого $u_0 \in L^+_{p,\omega,h,g}$ существует единственное обобщенное решение задачи (2.6.3)–(2.6.5), и оно представимо в виде

$$u_+(t) = T^+_{h,\rho}[t, -(A^+_{h,\rho})^{\frac{1}{2}}]u_0 = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) T^+_{h,\rho}(s, -A^+_{h,\rho})u_0 ds \tag{2.6.7}$$

2) для каждого $u_0 \in L^-_{p,\omega,h,g}$ существует единственное обобщенное решение задачи (2.6.4)–(2.6.5), и оно представимо в виде

$$u_-(t) = T^-_{h,\rho}[t, -(A^-_{h,\rho})^{\frac{1}{2}}]u_0 = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right) T^-_{h,\rho}(s, -A^-_{h,\rho})u_0 ds \tag{2.6.8}$$

Теперь, переходя к обозначениям уравнений (2.6.1) и (2.6.2) и возвращаясь к задачам (2.6.1)—(2.6.3), (2.6.2)—(2.6.3), получаем их решения

$$u_+(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^+(s, -A^+_{h,\rho})u_0(t)ds =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) \exp\left[\int_{h(x)\oplus s}^{x} \rho(\xi)dh(\xi)\right] u_0[h^{-1}(h(s)+x)]ds \tag{2.6.9}$$

$$u_-(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^-(s, -A^-_{h,\rho})u_0(t)ds =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) \exp\left[\int_{x}^{h(x)\ominus s} \rho(\xi)dh(\xi)\right] u_0[h^{-1}(h(s)-x)]ds \tag{2.6.10}$$

Из (2.6.9) и (2.6.10), в частности, следуют представления соответствующих тепловых потоков

$$q_+(t) = \left.\frac{\partial u_+}{\partial x}\right|_{x=0} = -(A^+_{\rho,h})^{\frac{1}{2}}u_0(t), \tag{2.6.11}$$

$$q_-(t) = \left.\frac{\partial u_-}{\partial x}\right|_{x=0} = -(A^-_{\rho,h})^{\frac{1}{2}} u_0(t), \tag{2.6.12}$$

В заключении заметим, что результаты, полученные в настоящей диссертации, являются новыми даже в простейшем случае $h(x) = x$, $\rho(x) \equiv 0$, когда $T\pm(t)\varphi(x) = \varphi(x\pm t)$— полугруппы сдвигов, а операторы $(-A^{\pm})^{\frac{1}{2}}$ определяются дробными производными Римана–Лиувилля.

Дифференциальное уравнение, описывающее движение жидкости в пористой среде

В практических исследованиях, при описании переходных процессов, начавшихся так давно, что начальные данные не сказываются на поведении решения, рассматриваются так называемые задачи без начальных данных. К ним, в частности, относятся рассматриваемые здесь задачи.

При $t \in (-\infty, +\infty), x \geq 0$, ставятся задачи отыскания решения уравнения

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2 \int_0^t e^{\gamma(s-t)} p(s,x)ds = \mathrm{L}_p p(t,x) \tag{2.6.13}$$

и краевые условия

$$p(t,0) = q(t), \lim_{x\to\infty} |p(t,x)| = 0, \tag{2.6.14}$$

где $q \in C_{[-\infty,+\infty]}$.

Здесь $C_{[-\infty,+\infty]}$–банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $(-\infty,+\infty)$ функций с нормой $\|q\|_C = \sup_{t\in(-\infty,+\infty)} |q(t)|$. Здесь ν-доля объема проточных зон, γ-константа массообмена между проточными и застойными зонами, a- коэффициент пьезопроводимости.

Требуется найти градиент давления у границы области.

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = \varphi(t). \qquad (2.6.15)$$

Ниже доказывается следующая

Теорема 2.6.2. Задача (2.6.13)–(2.6.14) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$p(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4s}} U(s,-A)q(t)ds.$$

где

$$U(x,-A)q(t) = e^{-\frac{1-\nu}{a}x} \int_0^\infty I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})e^{-\gamma s}q(t-\frac{\nu}{a}x-s)ds,$$

где $I_1(z)$–функция Бесселя первого рода. При этом справедливы оценки

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |p(t,x)| \le e^{[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]^{\frac{1}{2}}x} \|q\|_C.$$

Доказательство.

Здесь мы используем довольно общий метод С.Г.Крейна решения краевых задач для уравнений эллиптического типа в банаховом пространстве ([28], с.322). Аналогичные исследования с применением теории полугрупп проводились в [17], [18], [19].

При таком подходе систему (2.6.13)-(2.6.14) запишем в операторной форме

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = Ap(x), x > 0 \qquad (2.6.16)$$

$$p(0) = q, \lim_{x\to\infty} \|p(x)\|_C = 0, \qquad (2.6.17)$$

где оператор A задается интегро-дифференциальным выражением $\frac{1}{a}\mathrm{L}_p$ и областью определения

$$D(A) = \{u \in C_{[-\infty,\infty]}, \frac{du}{dt} \in C_{[-\infty,\infty]}\}, \qquad (2.6.18)$$

$C_{[-\infty,\infty]}$-пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $[-\infty,\infty]$ функций с нормой $\|u\| = \sup_{t\in(-\infty,\infty)} |u(t)|$. Тогда, если для оператора A определен оператор $\sqrt{A}$, то решение задачи (2.6.16)-(2.6.17) по теореме С.Г.Крейна ([28], с.323) имеет вид

$$p(x) = U(x, -\sqrt{A})q, \tag{2.6.19}$$

где $U(x, -\sqrt{A})$— сильно непрерывная в $C_{[-\infty,\infty]}$ полугруппа линейных преобразований с генератором $-\sqrt{A}$.

И задача вычисления функции $\varphi(t)$ сводится к вычислению

$$\frac{dp}{dx}|_{x=0} = -\sqrt{A}q = -AA^{-\frac{1}{2}}q. \tag{2.6.20}$$

Таким образом, для получения решений задач (2.6.13)-(2.6.14) и (2.6.15) необходимо построить оператор $A^{\frac{1}{2}}$ и полугруппы $U(x, -\sqrt{A})$, имеющую, в силу [4], представление

$$U(x, -\sqrt{A})q = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\frac{x^2}{4s})}{s^{\frac{3}{2}}} U(s, -A)qds =$$

$$= -\frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} U(s, -A)qds, \tag{2.6.21}$$

где $U(x, -A)$— сильно непрерывная полугруппа с генератором $-A$.

Оператор A представим в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где оператор A_1 задается дифференциальным выражением

$$l_1u(t) = \frac{\nu}{a}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1-\nu}{a}u(t) \tag{2.6.22}$$

и областью определения $D(A_1) = \{u \in C_{[-\infty,\infty]}, l_1u \in C_{[-\infty,\infty]}\}$. Оператор A_2 зададим интегральным оператором

$$A_2u(t) = -\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(s-t)}u(s)ds =$$

$$= -\frac{1-\nu}{a} \int_{0}^{\infty} e^{\gamma\tau}u(t-\tau)d\tau. \tag{2.6.23}$$

Нетрудно видеть, что оператор A_2 ограничен в $C_{[-\infty,\infty]}$ в силу очевидной оценки

$$\|A_2 u\| \leq \frac{1-\nu}{a}\gamma\|u\|, u(t) \equiv 1, \|A_2\| = \frac{1-\nu}{a}\gamma \qquad (2.6.24)$$

Заметим, что операторы A_1 и A_2 коммутируют на $D(A_1)$. Это следует из легко проверяемого равенства

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(s-t)}u'(s)ds = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(s-t)}u(s)ds. \qquad (2.6.25)$$

Полугруппа $U(x, -A_1)$ с генератором A_1 имеет вид

$$U(x, -A_1)u(t) = e^{-\frac{1-\nu}{a}x}u(t - \frac{\nu}{a}x). \qquad (2.6.26)$$

Отсюда следует равенство

$$\|U(x, -A_1)\| = e^{-\frac{1-\nu}{a}x}. \qquad (2.6.27)$$

Далее для получения представления полугруппы $U(x, -A_2)$ воспользуемся рядом

$$U(x, -A_2)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-A_2)^n u(t), \qquad (2.6.28)$$

где

$$(-A_2)^n u(t) = \begin{cases} \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int_0^t e^{-\gamma s}s^{n-1}u(t-s)ds, & n = 1, 2, ...; \\ I, & n = 0. \end{cases} \qquad (2.6.29)$$

I— тождественный оператор.

Это дает оценку

$$\|A_2^n u\| \leq \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int_0^{\infty} e^{-\gamma s}s^{n-1}ds\|u\| = (\frac{1-\nu}{a})^n\gamma^n\|u\|. \qquad (2.6.30)$$

Оценивая полугруппу (2.6.28), используя (2.6.29), получаем оценку

$$\|U(x, -A_2)u\| \leq \|u\|\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-\nu}{a})^n\frac{\gamma^n x^n}{n!} = e^{\frac{(1-\nu)\gamma}{a}x}\|u\|. \qquad (2.6.31)$$

Теперь нетрудно видеть, что из (2.6.27) и (2.6.31) следует оценка

$$\|U(x,-A)\| \leq \|U(x,-A_1)\|\|U(x,-A_2)\| \leq exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]. \tag{2.6.32}$$

Далее, пользуясь (2.6.29) в (.2.6.28), получаем представление

$$U(x,-A_2)u(t) = u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n}{a^n (n-1)! n!} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma s} s^{n-1} u(t-s) ds =$$

$$= u(t) + \int_{-\infty}^{t} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n s^{n-1}}{a^n (n-1)! n!}) e^{-\gamma s} u(t-s) ds =$$

$$= u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_{-\infty}^{t} (\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{\frac{1-\nu}{a} xs}\gamma]^{2m}}{m!(m+1)!}) e^{-\gamma s} u(t-s) ds =$$

$$u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma s} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a} xs}) u(t-s) ds.$$

Здесь мы воспользовались соответствующим представлением функции Бесселя $I_1(z)$ первого рода (см [30] с.642).

Теперь, пользуясь (2.6.26), получаем выражение для композиции полугрупп

$$U(x,-A)u(t) = U(x,-A_1)U(x,-A_2)u(t) =$$

$$= e^{-\frac{1-\nu}{a}x} \int_{0}^{\infty} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a} xs}) e^{-\gamma s} u(t - \frac{\nu}{a}x - s) ds. \tag{2.6.33}$$

Используя (2.6.30) в (2.6.20) получаем представление для градиента решения задачи (2.6.13)-(2.6.14)

$$\varphi(t) = A^{\frac{1}{2}} q(t) = \frac{1}{\pi} A \int_{0}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} U(s,-A) q(t) ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} U(s,-A) A q(t) ds. \tag{2.6.34}$$

В последнем равенстве учтено условие $q(0) = 0$. Из (2.6.34), (2.6.31) и (2.6.27), в частности для $q \in \mathrm{D}(A)$ следует оценка

$$\|\varphi\| \leq \frac{1}{\pi}\|Aq\| \int_{0}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}s} ds =$$

$$= (\frac{a}{\pi(1-\nu)(1-\gamma)})^{\frac{1}{2}} \|Aq\|. \qquad (2.6.35)$$

Задача без начальных данных для уравнения субдиффузии на оси

В [1], стр. 242 рассматривается задача Коши

$$_0D_t^\alpha u(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \qquad (2.6.36)$$

$x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$ при условии

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0 \qquad (2.6.37)$$

$$_0D_t^{\alpha-1} u(t,x)\Big|_{t=o} = \varphi(x), \quad 0 < \alpha < 1, \qquad (2.6.38)$$

где

$$_0D_t^\alpha u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} ds$$

дробная производная по Капуто для функций с условием $u(0,x) = 0$.

Уравнение (1) в [1] называется уравнением субдиффузии на оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

В [2], с. 57 отмечается, что наряду с задачей Коши, важное место занимают задачи без начальных условий, описывающие установившиеся процессы начавшиеся так давно, что начальные условия не сказываются на поведении их решения.

Здесь рассматриваются неоднородные уравнения субдиффузии для $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$_\pm D_t^\alpha u(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \qquad (2.6.39)$$

где операторы

$$_\pm D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^\infty s^{\alpha-1} \varphi(s \pm t) ds \qquad (2.6.40)$$

правые и левые производные Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$.

С помощью норм

$$\|f\|_{+} = \sup_{t,x\in\mathbb{R}} e^{\omega t} g_{+}(t)|f(t,x)|;$$

$$\|f\|_{-} = \sup_{t,x\in\mathbb{R}} e^{-\omega t} g_{-}(t)|f(t,x)|$$

введем банаховы пространства $C^{\pm}_{g,\omega}$— соответственно.

Определение 2.6.1. Решением уравнения (2.6.39) будем называть функцию $u(t,x)$ такую, что $u_{+} \in C^{+}_{g,\omega}$, $D^{\alpha}_{+}u_{+} \in C^{+}_{g,\omega}$ и удовлетворяющую уравнению (2.6.39) при $f \in C^{+}_{g,\omega}$.

Определение 2.6.2. Решением уравнения (2.6.39) будем называть функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую условиям $u_{-} \in C^{-}_{g,\omega}$, $D^{\alpha}_{-} \in C^{-}_{g,\omega}$ и удовлетворяющую уравнению (2.6.39) при $f \in C^{-}_{g,\omega}$.

Теорема 2.6.3. Уравнение (2.6.39) имеет единственное решение $u_{+} \in C^{+}_{\omega,g}$, и справедлива оценка

$$\|u^{+}\|_{\omega,g} \le \frac{\|h\|_{\omega,g}}{\omega^{\alpha}}. \tag{2.6.41}$$

Теорема 2.6.4. Уравнение (2.6.39) имеет единственное решение $u \in C^{-}_{g,\omega}$, и справедлива оценка

$$\|u^{-}\|_{\omega,g} \le \frac{\|f\|_{\omega,g}}{\omega^{\alpha}}. \tag{2.6.42}$$

Доказательство проведем для теоремы 2.6.3, для теоремы 2.6.4 оно аналогичное.

Заметим, что оператор $D^{+}_{t}\varphi(t)$, заданный выражением $D^{+}_{t}\varphi(t) = -\frac{d\varphi}{dt}$ является генератором C_0–полугруппы переносов $T(s,D^{-})\varphi(t) = \varphi(t-s)$ в пространствах $C^{-}_{g\omega}$ с оценкой

$$\|T(s,D^{-})\varphi\|_{g,\omega} \le e^{-\omega s}\|\varphi\|_{\omega,g}, \tag{2.6.43}$$

то для оператора $D_+\varphi(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ определены дробные степени $D_+^\alpha\varphi$, которые являются генераторами C_0– полугрупп $T(t, -D^\alpha)\varphi$ для которых справедлива оценка

$$\|T(t, -D^\alpha)\varphi\|_{g,\omega} \le e^{-\omega^\alpha s}\|\varphi\|_{\omega,g}. \tag{2.6.44}$$

В свою очередь оператор $\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2}$, с областью определения $D(\Delta) = \{\psi \in C_{[-\infty,\infty]}, \Delta^+ \in C_{[-\infty,\infty]}\}$, является генератором полугруппы Гаусса–Вейерштрасса

$$w(t)\psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\psi(s)ds,$$

с оценкой

$$\|w(t)\psi(x)\|_{C_{[-\infty,\infty]}} \le \|\psi\|_{C_{[-\infty,\infty]}}. \tag{2.6.45}$$

Далее, учитывая, что полугруппа $T(t, -D^\alpha)$ и $w(t)$ коммутируют, заключаем, что решение уравнения (2.6.39) имеет вид

$$u(t,x) = \int_0^\infty T(t, -D^\alpha)w(\tau, \Delta)f(t,x)d\tau. \tag{2.6.46}$$

Отсюда, в силу (2.6.43) и (2.6.44) получаем оценку

$$\|u\|_{\omega,g} \le \int_0^\infty e^{-\omega^2\tau}d\tau \cdot \|f\|_{g,\omega} = \frac{\|f\|_{\omega,g}}{\omega^\alpha}.$$

Теорема (2.6.3) доказана. Доказательство теоремы (2.6.4) аналогично.

Глава 3

C_0– операторные многочлены и их коэрцитивность

3.1 Проблемы коэрцитивности. История вопроса

Работы по проблемам коэрцитивности для систем дифференциальных операторов с частными производными были начаты Н. Ароншайном в пятидесятых годах прошлого века развиты Л. Хермандером, М. Шехтером, Д.Ж.Фигуэрдо и другими зарубежными математиками. Дальнейшему изучению этой проблемы для дифференциальных операторов в пространствах С.Л. Соболева изотропных и анизотропных посвящены фундаментальные работы О.В. Бесова, С.М. Никольского. Проблема коэрцитивности для эволюционных уравнений с оператором в банаховом пространстве исследовалась в работах П.Е. Соболевского.

В диссертации, по аналогии с системами дифференциальных операторов Бесова–Никольского вводятся системы C_0– операторных многочленов, то есть многочленов над полем комплексных чисел от производящего оператора сильно непрерывной полугруппы линейных операторов в банаховом пространстве.

Здесь указываются условия, при которых рассматриваемые системы коэрцитивны. Доказываются необходимые и достаточные условия на весовые пространства непрерывных на действительной оси функций, в которой производящие операторы полугрупп левых и правых переносов являются сильно непрерывными, и, следовательно, системы многочленов с генераторами таких полугрупп являются коэрцитивными.

3.2 C_0– операторные многочлены

Пусть E— банахово пространство и оператор A, с областью определения $D(A)$, является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U(t,A), t \geq 0$. То есть, для $f \in E$ выполняются соотношения:
1) $U(0,A)f = f$,
2) $U(t+S,A)f = U(t,A)U(S,A)f$,
3) $\lim\limits_{t \to 0+} \|U(t,A)f - f\|_E = 0$,
4) $\frac{dU(t,A)}{dt}|_{t=0} f = Af$, для $f \in D(A)$.
Для полугруппы $U(t,A)$, которую мы здесь называем C_0–полугруппой, выполняется неравенство

$$\|U(t,A)f\|_E \leq Me^{\omega t} \cdot \|f\|_E \tag{3.2.1}$$

где M и ω от t и f не зависят.

В [21] для $u \in D(A^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ рассматриваются операторные многочлены

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u, \quad u \in E \tag{3.2.2}$$

которые, используя терминологию из [23], мы называем C_0 - операторными многочленами. В [21] показывается, что если λ_k — корни скалярного многочлена $P_n(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}$— комплексная плоскость, удовлетворяют условию

$$Re\lambda_k = \lambda_0 > \omega. \tag{3.2.3}$$

то оператор $\mathbb{A}$ определен на всем E и ограничен.

Настоящая диссертация посвящена установлению коэрцитивности системы C_0– операторных многочленов $\{\mathbb{A}_k\}_{R=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}$ - натуральные числа

$$\mathbb{A}_k u = \sum_{m_{k=1}}^{n_k} a_{m_k} A^{m_k} u. \tag{3.2.4}$$

Отметим, что начало работ по проблемам коэрцитивности было положено Ароншайном, Агмоном, Инхтером, Хермандером и другими.

Дальнейшее изучение проблем в пространствах С. Л. Соболева было продолжено О. В. Бесовым С. М Никольским в русле этой проблемы местами работали П. Е. Соболевский, В. П. Орлов.

В предлагаемой работе приводятся новые примеры систем дифференциальных операторов для которых имеет место коэрцитивность.

3.3 $\chi(t)$ функция Хевисайда и $q(t)$- функция Грина

Рассмотрим некоторые вспомогательные факты, необходимые в дальнейшем.

Пусть $\delta(t)$— дельта функция Дирака, действующая на непрерывную функцию $\varphi(t)$ по правилу

$$(\delta, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

Тесно связанную с ней единичную функцию Хевисайда (функцию скачка), определяют соотношением

$$\chi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(s)ds \tag{3.3.1}$$

см. [12], с. 193. Отсюда следует, что $\chi(t) \equiv 0$, при $t < 0$ и $\chi(t) \equiv 1$, при $t > 0$.

Вопрос о значении $\chi(t)$ при $t = 0$ остается открытым. В разных случаях принимаются $\chi(0) = 1, \chi(0) = \frac{1}{2}, \chi(0) = 0$. Последнему свойству придерживается А.Н. Колмогоров и С.Г. Фомин [24], с. 197. Корректность этого выбора, с нашей точки зрения, объясняется тем, что интегрирование в (3.3.1) осуществляется в положительном направлении (слева направо), поэтому естественно считать $\chi(0)$ левым пределом, то есть $\chi(0) = \lim\limits_{t\to 0+} \chi(t) = 0$. Также функцию Хевисайда будем обозначать $\chi_0(t)$.

В таком случае, функция $\chi_0(t)$ является обычным (не обобщенным) решением задачи Коши

$$u'(t) = \delta(t), t \in [0, \infty) \tag{3.3.2}$$

$$u(0) = 0 \tag{3.3.3}$$

Далее рассмотрим C_0– операторное уравнение

$$P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f, \tag{3.3.4}$$

$f \in E, a_m \in \mathbb{C}$. И поставим ему в соответствие дифференциальное уравнение

$$P_n(-\frac{d}{dt})q(t) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m a_m \frac{d^m q(t)}{dt^m} = \delta(t),\ t \geq 0. \tag{3.3.5}$$

Определение 3.3.1. Решение уравнения (3.3.5), удовлетворяющие начальным условиям Коши

$$q(0) = q'(0) = \ldots = q^{(n-1)}(0) = 0, \tag{3.3.6}$$

будем называть $q(t)$— функцией Грина уравнения (3.3.5).

Это связанно с тем, что при выполнении условия (3.2.3), как показано в [21], уравнение (3.3.5) имеет единственное решение $u \in D(A^n)$ и оно представимо в виде

$$u = \int\limits_0^\infty q(t)U(t)f dt. \tag{3.3.7}$$

При этом, в соответствии с [11], с. 231, имеем соотношение

$$q(t) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{n=1}^{m} \frac{B_{m,k}}{(k-1)!}t^{k-1} \cdot e^{-\lambda_m t} = \sum_{m=1}^{n} Q_m(t)e^{-\lambda_m t} \tag{3.3.8}$$

$B_{m,k}$— известные константы, и, следовательно, $Q_m(t)$— многочлены степени $(m-1)$

Из (3.3.7), в частности получаем равенство

$$Au = \int\limits_0^\infty q(t)AU(t)f dt = \int\limits_0^\infty q(t)\frac{dU(t)}{dt} f dt =$$

$$= q(t)U(t)f\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty q'(t)U(t)f dt =$$

$$= -\int\limits_0^\infty q'(t)U(t)f dt = \int\limits_0^\infty \delta(t)U(t)f df = f. \tag{3.3.9}$$

таким образом из (3.3.5)–(3.3.7) следует

Лемма 3.3.1. Функция $q(t) = -\chi_0(t)$ является функцией Грина для уравнения

$$Au = f \tag{3.3.10}$$

Действительно, в этом случае задача (3.3.5)–(3.3.6) имеет вид

$$-q'(t) = \delta(t), \tag{3.3.11}$$

$$q(0) = 0 \tag{3.3.12}$$

и следовательно $q(t) = -\chi_0(t)$.

3.4 Теорема коэрцитивности

Определение 3.4.1. Систему операторных многочленов (3.3.4) назовем коэрцитивной, если для всех $u \in D(A^N)$ выполняется неравенство

$$\sum_{n_k=1}^{N} \sum_{m_k=1}^{n_k} \| A^{m_k} u \|_E \leq M_2 \sum_{k=1}^{N} \| A_k u \|_E, \tag{3.4.1}$$

Теорема 3.4.1. Система C_0– многочленов (3.3.4) является коэрцитивной, если корни $\lambda_{k,j} (k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, n_k)$ многочленов $P_{n_k}(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$\min_{k,j} Re\lambda_{k,j} = \lambda_0 > \omega. \tag{3.4.2}$$

Доказательство. Из соотношений (3.3.4)–(3.3.8) и замкнутости оператора A вытекает равенство

$$A^m u = \int_0^\infty q(t) A^m U(t, A) f dt = \int_0^\infty q(t) \frac{dU^m(t, A)}{dt^m} f dt =$$

$$= (-1)^m \int_0^\infty q^{(m)}(t) U(t, A) f dt \tag{3.4.3}$$

Далее, пользуясь (3.3.8) и (3.4.2), получаем оценки

$$\|A^m u\|_E \leq M \int\limits_0^\infty |q(t)| e^{(\omega t)} dt \cdot \|f\|_E \leq$$

$$\leq M_3 \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_0 - \omega)t} dt \cdot \parallel f \parallel_E = \frac{M_3}{\lambda_0 - \omega} \|f\|_E = M_4 \cdot \|\mathbb{A} u\|_E.$$

Отсюда, следует оценка

$$\sum_{m=1}^{n} \|A^m u\|_E \leq M_4 \|\mathbb{A} u\|_E \tag{3.4.4}$$

теперь, применяя (3.4.4) к каждому оператору $\mathbb{A}_k$, получаем неравенство (3.4.1) и доказательство теоремы.

Заметим что из (3.4.3) следует и отличное от [21] доказательство того, что элемент u, заданный соотношением (3.3.7), является решением уравнения (3.3.4).

Для этого достаточно умножить обе части равенства (3.4.3) на a_m и просуммировать

$$\sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m q^{(m)}(t) U(t, A) f dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \delta(t) U(t, A) f dt = U(0, A) f = f \tag{3.4.5}$$

3.5 Представление решений некоторых задач без начальных условий для уравнений высокого порядка

3.5.1. Уравнения с оператором $\frac{du}{dt}$

Применим теорему 2.4.1 к операторам связанным с дифференциальным выражением $l = \frac{d}{dx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Для того, в соответствии с [52], введем банаховы пространства $C^{\pm}_{\omega,g}$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций определенных нормами

$$\|\varphi\|^{+}_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{\omega x} g(x)|\varphi(x)|,\ \omega \geq 0,\ g(x) > 0, g'(x) > 0; \tag{3.5.1}$$

в случае $C^{+}_{\omega,g}$,

$$\|\varphi\|^{-}_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-\omega x} g(x)|\varphi(x)|,\ \omega > 0,\ g(x) > 0, g'(x) < 0; \tag{3.5.2}$$

в случае $C^{-}_{\omega,g}$

В этих пространствах рассмотрим полугруппы сдвигов

$$U^{+}(t)\varphi(t) = \varphi(x+t), \text{если} \varphi \in C^{+}_{\omega,g},$$

$$U^{-}(t)\varphi(x) = \varphi(x-t), \text{если} \varphi \in C^{-}_{\omega,g}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$\|U^{\pm}(t)\varphi\|^{\pm}_{\omega,g} \leq e^{-\omega t}\|\varphi\|^{\pm}_{\omega,g} \tag{3.5.3}$$

Действительно. Например, для норм $C^{+}_{\omega,g}$ имеем

$$e^{\omega x} g(x)|U^{+}(t)\varphi(x)| = e^{\omega x} g(x)\varphi(x+t) = e^{\omega t} \cdot e^{\omega\tau} g(\tau - t)|\varphi(\tau)| \leq$$

$$\leq e^{-\omega t}\|\varphi\|^{+}_{\omega,g} \tag{3.5.4}$$

и, переходя, к $\sup\ \omega$ при $x \in \mathbb{R}$ в левой части (3.5.4), получаем (3.5.3).

Для норм $C^{-}_{\omega,g}$ доказательство аналогичное. Генераторами этих полугрупп являются операторы $A^{\pm}$ заданные, соответственно дифференциальными выражениями

$$\left.\frac{dU^{\pm}(t)}{dt}\varphi(x)\right|_{t=0} = \pm\frac{d\varphi}{dx} \tag{3.5.5}$$

и областями определения $D(A^{\pm}) = \{\varphi : \varphi \in C^{\pm}_{\omega,g}, \frac{d\varphi}{dx} \in C^{\pm}_{\omega,g}\}$.

Справедлива

Теорема 3.5.1. Система многочленов

$$\mathbb{A}_k u = \sum_{m_k=1}^{n_k} a_{m_k} \left(\pm\frac{d}{dx}\right)^{m_k} u(x) \qquad (3.5.6)$$

является коэрцитивной в $C^{+}_{\omega,g}$ если соответственно корни $\lambda_{k,j}$ многочленов $P_{n_k}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию

$$\min_{k,j} Re\lambda_{k,j} = \lambda_0 > -\omega. \qquad (3.5.7).$$

В качестве следствия также получаем, что уравнение

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m u(x)}{dx^m} = f(x), \qquad (3.5.8)$$

имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$a) \qquad u(x) = \int\limits_0^{\infty} q(t) f(x+t) dt = \int\limits_x^{\infty} q(\tau - x) f(\tau) d\tau, \qquad (3.5.9)$$

где $f \in C^{+}_{\omega,g}$, $q(\tau)-$ решение задачи Коши

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m \frac{d^m q}{dx^m} = \delta(x),\ q(0) = \ldots = q^{n-1}_{(0)} = 0. \qquad (3.5.10)$$

$$\delta) \qquad u(x) = \int\limits_0^{\infty} q(t) f(x-t) dt = \int\limits_{-\infty}^{x} q(x-\tau) f(\tau) d\tau, \qquad (3.5.11)$$

где $f \in C^{-}_{\omega,g}$, $q(\tau)-$ решение задачи Коши

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m q(x)}{dx^m} = \delta(x),\ q(0) = \ldots = q^{(n-1)}_{(0)} = 0. \qquad (3.5.12)$$

В частности, решение задачи $u'(x) = f(x)$ в пространствах $C^{+}_{\omega,g}$ имеет вид $u(x) = -\int\limits_x^{\infty} f(x) d\tau$, а решение задачи $-u'(x) = f(x)$ в $C^{-}_{\omega,g}$ имеет вид

$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(s)ds$. При этом справедливы оценки

$$\|u\|^{\pm}_{\omega,g} \leq \frac{\|f\|^{\pm}_{\omega,g}}{\omega} \tag{3.5.13}$$

Замечание 3.5.1. Заметим, что пространства $C^{\pm}_{\omega,g}$ здесь являются оптимальными, в том смысле, что если неравенства (3.5.13) выполняются для норм более общего вида

$$\|f\|^{+}_{\rho} = \sup_{x} \frac{|f(x)|}{\rho(x)},\ \|f\|^{-}_{\rho} = \sup_{x} \rho(x)|f(x)|, \tag{3.5.14}$$

где $\rho(x) \geq 0$, $\rho'(x) > 0$,$\rho(-\infty) = 0$. то необходимо чтобы $\rho(x)$ имело вид $\rho(x) = e^{\omega x}\|g(x)\|$, $\omega > 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) \geq 0$.

Действительно. Пусть $J_{+}\varphi = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(s)ds$ выполнено неравенство

$$\|J_{+}\varphi\| \leq M\|\varphi\|_{\rho} \tag{3.5.15}$$

для всех $\rho \in C^{+}_{s}$, а, следовательно и для $\varphi(x) = \rho(x)$.

Но тогда из (3.5.15) следует неравенство

$$\frac{1}{\rho(x)} \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(s)ds \leq M. \tag{3.5.16}$$

Отсюда, используя правило Лопиталя для пределов заключим, что конечны пределы.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\rho(x)} \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(s)ds = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\rho(x)}{\rho'(x)} \leq M_1. \tag{3.5.17}$$

Это дает оценки

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \geq \frac{1}{M_1} \quad \text{и } \rho(x) \geq M_2 e^{\frac{t}{M_1}}. \tag{3.5.18}$$

То есть, для $\rho(x)$ справедливо представление $\rho(x) = M_2 e^{\frac{t}{M_1}} \cdot g(x)$, где $g'(x) = M_2 e^{-\frac{t}{M_1}} \left(\rho'(x) - \frac{\rho}{M_1} \right) \geq 0$. Что и доказывает наше утверждение.

Для интеграла J_- оно доказывается аналогично.

3.5.2. Пример с оператором Адамара $\mathbb{D}_1 = x\frac{d}{dx}$

Следующие примеры показывают корректную разрешимость задач без начальных условий для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка

Пример 3.5.1. Пусть оператор A задается дифференциальными выражением $\mathbb{D}_1\varphi(x) = x\frac{d}{dx}$, $x > 0$, в пространстве функций $C^+_{g\omega}$ с нормой

$$\|\varphi_{g,\omega}\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} x^\omega g(x)|\varphi(x)|, \tag{3.5.19}$$

$\omega > 0$, $g'(x) > 0$.

Рассмотрим задачу об отыскании решения уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathbb{D}_1^m u(x) = f(x). \tag{3.5.20}$$

Определение 3.5.1. Решением уравнения (3.5.20) называется функция $u \in C^+_{g,\omega}$, такая, что $\mathbb{D}_1^k u \in C^+_{\omega,g}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и, удовлетворяющая уравнению (3.5.20).

Из того, что оператор $\mathbb{D}_1$ является генератором полугруппы $T(t)$ класса C_0, имеющей вид

$$T(t)\varphi(x) = \varphi(xe^t). \tag{3.5.21}$$

В силу 3.3.7 следует, что уравнение (3.5.20) имеет единственное решение, удовлетворяющее всем условиям теоремы и для него справедливо представление

$$u(x) = \int_0^\infty q(t)T(t)\varphi(x)dt = \int_0^\infty q(t)\varphi(xe^t)dt$$

и оценка

$$\|u\|_{\omega,g} \leq \frac{M}{(\lambda_0 - \omega)}\|f\|_{\omega,g},$$

где $\lambda_0 = \min\limits_i R\lambda_i > \omega$, λ_i— корни многочлена $P_n(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m\lambda^m$.

Пример 3.5.2. В этом примере для полинома $P_n(\lambda)$ из первого примера, рассмотрим оператор A, заданный дифференциальным оператором

$$\mathbb{D}_2\varphi(x) = (1-x^2)\frac{d\varphi(x)}{dx}. \tag{3.5.22}$$

Нетрудно видеть, что это выражение можно записать в виде

$$\mathbb{D}_2\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dh(x)}, \tag{3.5.23}$$

где $h(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. При этом $h^{-1}(x) = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Следовательно, в силу представления (3.5.23), оператор $\mathbb{D}_2$ является генератором C_0– полугруппы вида

$$T(t,\mathbb{D}_2)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x + \operatorname{th} t}{1 + x\operatorname{th} t}\right), \tag{3.5.24}$$

со сложением $t \oplus s = h^{-1}[h(s)+t]$, которая является сильно непрерывной в пространствах функций с нормой

$$\|\varphi\|_{\omega,g} = \sup_{x\in(-1,1)} e^{\omega h(x)}g(x)|\varphi(x)| = \sup_{x\in(-1,1)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\omega}{2}} g_1(x)|\varphi(x)|,$$

здесь $g_1(x)$— произвольная положительная функция, такая, что $g_2'(x) > 0$, в силу того, что $g'(x) > 0$.

Таким образом, уравнение

$$P_n\mathbb{D}_2u(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m\mathbb{D}_2^m = f(x)$$

для каждого $f \in C_{\omega,g}[-1,1]$ имеет единственное решение $u(x)$, и оно представимо в виде

$$u(x) = \int_0^\infty q(t)T(t,\mathbb{D}_2)f\,dt = \int_0^\infty q(t)f\left(\frac{x+\operatorname{th} t}{1+x\operatorname{th} t}\right)dt.$$

При этом, также как и в примере 3.5.1, справедлива оценка

$$\|u\|_{\omega,g} \le \frac{\|f\|_{\omega,g}}{\lambda_0 - \omega}.$$

Замечание. В случае сложения $t \oplus s = h^{-1}[h(s) + h(t)]$ полугруппа (3.5.24) имеет вид $\varphi\left(\frac{x+t}{1+xt}\right)$

Пример 3.5.3. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $E = L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \ge 1$, $\|f\|_p = \left[\int |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Оператор A зададим лапласианом $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ определим в пространстве С. Л. Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^2} = \|u\|_{L_p} + \left[\sum_{R=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}\|^p\right]^{\frac{1}{p}},\ (p \ge 1)$$

Так определенный оператор A является генератором полугруппы класса C_0 Гауса-Вейерштрасса

$$U(t)f(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{|x-s|^2}{4t}} f(s)ds \qquad (3.5.25)$$

действующий в $L_p(\mathbb{R}^n)$, при этом $\omega = 0$. Применение теоремы (3.4.1) к этим операторам дает следующий результат.

Теорема 3.5.2. Система многочленов

$$\{\mathbb{A}_k u\}_{k=1}^{N},\ \mathbb{A}_k u = \sum_{m_k=1}^{n_k} a_{m_k} \Delta^{m_k} u \qquad (3.5.26)$$

является коэрцитивной и удовлетворяет соотношениям (3.4.1), если корни $\lambda_{k,j}(k = 1, \ldots, N, i = 1, \ldots, u_k)$ многочленов $P_{n_k}(\lambda)$ расположены в положительной комплексной полуплоскости.

Теорема 3.5.3. Уравнение

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \Delta^m u = f, \qquad (3.5.27)$$

при $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$, для него справедливы представления

$$u(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(s) \int\limits_{0}^{\infty} t^{k-\frac{n}{2}-1} e^{-\lambda_m t - \frac{|x-s|^2}{4t}} dt ds =$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x-s|}{2\lambda_m} \right)^{k-\frac{n}{2}} \cdot K_{\frac{n}{2}-k}(\lambda_m |x-s|) f(s) ds =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{m=1}^{N} \lambda_m^{\frac{n}{2}-k} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_m^{\frac{n}{2}-k} A_{k,m}}{2^{k-1}(k-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-s|^{k-\frac{n}{2}} \cdot K_{\frac{n}{2}-k}(\lambda_m |x-s|) f(s) ds$$

Здесь $K_v(z)$ — функция Макдональда $|f|^{k-\frac{n}{2}} \cdot K_{\frac{n}{2}-k}(\lambda_m |f|) \cdot f(s)$

Для частного случая полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = f(x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3.5.28}$$

рассматриваемого в [44] с. 558, где f— обобщенная функция, из наших результатов следует

Теорема 3.5.4. Если выполняется условие $n > 2m$, то для всякого $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение (3.5.28) имеем единственное решение $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ для него справедливо представление

$$u(x) = G_{m,n} \cdot f(x); \tag{3.5.29}$$

где

$$G_{m,n}(x) = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n}{2} - m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{\frac{n}{2}}} |x|^{2m-n} \tag{3.5.30}$$

[44], с.523.

В качестве применения теоремы 3.5.1 приведем некоторые примеры, характеризующие точность полученных оценок.

1. Для $x \in \mathbb{R}^+$ рассмотрим, сначала формально, уравнение

$$u'(x) = f(x) \tag{3.5.31}$$

Для постановки задачи в виде (3.3.4) используем весовое пространство $C_{\omega,g}$ с нормой

$$\|f\|_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{\omega x} g(x)|f(x)|,\ (\omega > 0) \tag{3.5.32}$$

где $g(x)$ положительная, монотонно возрастающая функция. Оператор $\mathbb{A}$ зададим дифференциальным выражением $lu = \frac{du}{dx}$ и областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \{u \in C_{\omega,g},\ lu \in C_{\omega,g}\}$$

В таком случае оператор $\mathbb{A}$ является генератором полугруппы сдвигов $U(t)f(x) = f(x+t)$, $t \geq 0$ пространства $C_{\omega,g}$ с оценкой

$$\begin{aligned} \|U(t)f\|_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{\omega x} g(x) U(t) f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{\omega x} g(x) f(x+t)| = \\ = \sup_{\tau\in\mathbb{R}} e^{\omega(\tau - t)} g(\tau - t)|f(\tau)| \leq \\ \leq e^{-\omega t} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} e^{\omega\tau} g(\tau)|f(\tau)| = e^{-\omega t}\|f\|_{\omega,g} \end{aligned} \tag{3.5.33}$$

Таким образом, записывая уравнение (3.5.31) в виде (3.3.4), где $f \in C_{p,g}$, приходим к следующей задаче: найти непрерывно-дифференцируемую функцию $u(x)$, такую, что $u \in C_{\omega,g},\ \frac{du}{dx} \in C_{\omega,g}$, удовлетворяющую (3.5.31) при всяком $f \in C_{\omega,g}$.

Из теоремы 3.5.1 и соотношения (3.4.5) следует, что эта задача имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$u(x) = -\int_x^\infty f(s)ds$$

Действительно. В этом случае для функции $q(t)$ имеем задачу

$$-q'(t) = \delta(t),\ q(0) = 0$$

и следовательно $G(t) = -\chi(t)$, и (3.3.7) имеет вид

$$u(x) = \int\limits_0^\infty \chi(t)U(t)f(x)dt = -\int\limits_0^\infty f(x+t)dt = -\int\limits_x^\infty f(s)ds.$$

Таким образом, приведенные примеры демонстрируют методы теории сильно непрерывных полугрупп преобразований, при исследовании вопроса о корректной разрешимости задач без начальных условий, характерных для уравнений с особенностями.

При этом, показывается и точность общих методов, используемых в диссертации.

Литература

[1] Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. // Ю.И. Бабенко.— СПБ.: НПО "Профессионал 2009.— 584 с.

[2] Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков.// Ю.И. Бабенко.— Л.: Химия, 1986.— 144 с.

[3] Боровских А.В. Лекции по дифференциальным уравнениям.// А.В. Боровских, А.И. Перов.— Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика Институт компьютерных исследований, 2004.— 540 с.

[4] Баскаков А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторной функций/ А.Г. Баскаков.— Мат. сб, 1984.—124 (166), N I(15).— с. 68–95.

[5] Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В.Бесов,В.П.Ильин, С.М.Никольский. — Глав.Ред.Физ.-мат.литер. Наука, 1975 — 480 с.

[6] В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 28, ВИНИТИ, М., 1990, 87–202 978–966-02

[7] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения //Дж. Голдстейн.— Киев: Высща школа, 1989.— 347 с.

[8] Голубев В.С. Уравнения движения жидкости в пористой среде с застойными зонами /В.С.Голубев — ДАН СССР, 1978, т. 238, № 6, с.1318-1320

[9] Горбачук В.И. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. //В.И. Горбачук, А.И. Князюк.— Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 3 (267). С. 55—91.

[10] Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.// Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн.— Физмат. лит., 1970. 534 с.

[11] Евграфов М.А. Аналитические функции/ М.А. Евграфов.— М.: Наука, 1968.— 471 с.

[12] Зельдович Я.Б. Элементы прикладной математики/ Я.Б. зельдович, А.Д. Мышкис.— М.: Наука, 1972.— 592 с.

[13] Иосида К. Функциональный анализ: Учебник// К. Иосида, пер. с анг. В.М. Волосова.– М.: Мир, 1967—624 с.

[14] Князюк А.В. Граничные значения эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук.// А.В. Князюк — Киев. 1985. 115 с.

[15] Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова// А.В. Костин, В.А. Костин.– Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007. 259 с.

[16] Костин А.В. S–весовые пространства Степанова и некоторые модели тепломассопереноса./ А.В.Костин, В.А.Костин – Воронеж:2009. 35 с.

[17] Костин А.В. Гипервесовые пространства Степанова и интегралы дробного порядка Риммана-Лиувилля на R/ А.В. Костин, Материалы Воронежской весенней математической школы "Потрягинские чтения XXIII" Воронеж: Изд-во ВГУ, 2012, с. 94-95

[18] Костин В.А. О равномерно корректной разрешимости краевых задач для абстрактных уравнений с оператором Келдыша-Феллера. // В.А. Костин. – Дифференциальные уравнения. – Т.7, 31, №8. с.1419 — 1425.

[19] Костин В.А. Об аналитических полугруппах и сильно непрерывных косинус–функциях/ В.А. Костин.— ДАН СССР, 1989, Т. 307, №4, с. 796–799.

[20] Костин В.А. C_0–операторный интеграл Лапласа / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин.— ДАН, 2011, Т. 441, №1,с. 10–13.

[21] Костин В.А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин.— ДАН. - 2013. -Т.452, №4. - с.367-370

[22] Костин В.А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин// ДАН. — 2014. - Т.455 №2 с.142-146

[23] Костин В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнений второго порядка /В.А. Костин, М.Н.Небольсина.— ДАН. - 2009. - Т.428 №1 с.20-23.

[24] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.— М.: Наука, 1972.— 496 с.

[25] Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики //Н.С.Кошляков, Э.Б.Глиннер, М.М.Смирнов. - М: Физ-мат. лит., 1962. 767с.

[26] Красносельский М. А., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций// М.А. Красносельский.— М., Наука, 1966, 499 с.

[27] Крейн С. Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Итоги науки и техники/ С.Г. Крейн, М.И. Хазан.— Мат. анализ, Т.21 130—264.

[28] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве/ С.Г. Крейн.– М.: Наука, 1967.—464 с.

[29] Функциональный анализ/ под редакцией С.Г Крейна.М.: Наука, 1979, 418 с.

[30] Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного// М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат.— М.: Наука, 1973.—736 с.

[31] Лаврентьев М.М. Одномерные обратные задачи математической физики // М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г.Яхно. — Наука,Сибир.отд. Новосибирск, 1982, 88 с.

[32] Левитан Б.М. Почти-периодические функции// Б.М. Левитан.—М.: Тех-лит, 1953. 396 с.

[33] Mainardi F. The time fractional diffusion equation / F. Mainardi.— Изв. ВУЗов, Радиофизика, т.87, №1-2, 1995

[34] Мартыненко Н.А. Конечные интегральные преобразования и их применение// Н.А. Мартыненко, Л.М. Пустыльников.–М.: Наука, 1986. 301 с.

[35] Маслов В.П. Операторные методы// В.П. Маслов.— М.: Наука, 1973. 543 с.

[36] Маслов В.П. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса// В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов.— М.:Наука, 1987. 352 с.

[37] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений// В.П. Маслов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 312 с.

[38] Большой математический словарь. Математика. Науч. изд. БСЭ, М.: 2000, 847 с.

[39] Небольсина М.Н. Задача Неймана для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве и ортогональные многочлены / М.Н. Небольсина.— Математические модели и операторные уравнения – Воронеж: ВорГу, 2007. Т. 4. С. 104—115.

[40] Orlovsky D., Piskarev S. Approximation of inverse Bitzadze-Samarskii problem for elliptic equation with Dirichlet conditions. // Differential Equations, 2013, V. 49, N 7, p. 923-935.

[41] Pastor J., Piskarev S. The exponential dichotomy for discretization on general approximation scheme// Journal of mathematical sciences. 2013, 193, N 4, p. 548-565.

[42] Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения// С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.– Минск: Наука и техника, 1987, 687 с.

[43] Свиридюк Г.А. Полугруппы операторов с ядрами //Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров – Вестник Челяб. ун-та. Серия3, Математика. Механика. Информатика, 2002, No1. С. 42–70.

[44] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул/ С.Л. Соболев Главная редакция физико–математической литературы изд–ва "Наука М., 1974 г. 808 с.

[45] Соболевский П.Е. Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений / П.Е. Соболевский// Докл. Академии наук СССР.— 1964.— Т. 157, №1.— С. 52-55.

[46] Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач // А.Н. Тихонов, В.Я.Арсенин —М: Наука,Гл. ред физ-мат. лит. 1986. –288 с.

[47] Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа, т. 2/ Э.Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, пер с англ. под ред. Ф.В. Широкого.— М.: Физ-мат. лит., 1963.—515 с.

[48] Учайкин В.В. Методы дробных производных// В.В. Учайкин.— Ульяновск, Изд. "Логос 2002.— 512 с.

[49] Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов //В.Е. Федоров, Алгебра и анализ . 2000. Т.12, вып.3. С.173–200.

[50] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы// Э. Хилле, Р.Филлипс.— М.: Издательство иностранной литературы, 1962 – 829с.

[51] Гим М.Х. О коэрцитивности систем C_0– операторных многочленов // М.Х. Гим, В.А. Костин, М.В. Муковнин.— Вестник ВГУ, Математика, Физика, №4, 2014, с. 150–159.

[52] Гим М.Х. О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач без начальных условий// М.Х. Гим, В.А. Костин, М.В. Муковнин.— Белгород: Научные ведомости БелГУ, серия Математика, Физика №25(196). Вып. 37, с.

[53] Гим М.Х. Об одной нестационарной задаче без начальных данных // М.Х. Гим, М.Н. Небольсина

[54] Гим М.Х. Об одной нестационарной задаче для уравнения тепломассопереноса с особенностью// М.Х. Гим, М.В. Муковнин Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1), 2014 г., с. 34-36.

[55] Гим М.Х. О дробных степенях одного класса интегральных операторов// М.Х. Гим, М.В. Муковнин Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1), 2014 г., с. 43-46.

[56] Гим М.Х. Задача без начальных данных для уравнения субдиффузии на оси// М.Х. Гим, В.А. Костин, Д.А. Фахат Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1), 2014 г., с. 43-46.

[57] Гим М.Х. C_0– операторные уравнения и полугрупповое представление их решений//М.Х. Гим, В.А. Костин, Д.В. Костин Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1), 2014 г., с. 67-68.

[58] Гим М.Х. О точном решении одного полигармонического уравнения в пространствах Степанова// М.Х. Гим, А. Шихаб, Материалы международной конференции С.Г. Крейна ВЗМШ 2014, с. 412–413.