ФГБОУ ВПО «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

НГУЕН ВАН ЛОЙ

Методы направляющих и ограничивающих функций и их приложения к некоторым задачам дифференциальных уравнений и включений

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация

на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Воронеж — 2015

Оглавление

Автор глубоко признателен профессору В.В. Обуховскому и его научному семинару за постоянное внимание и советы к работе. Автор также выражит большую благодарсность коллективу Воронежского государственного педагогического университета за поддержку во времени выполнения работы.

Введение

Качественные и геометрические методы имеют давнюю традицию успешного применения к различным задачам теории дифференциальных уравнений. Эти методы и их приложения восходят к именам H. Poincaré, L.E.J. Brouwer'a, П.С. Александрова, H. Hopf'a, J. Leray, Ju. Schauder'a. Дальнейшие развития этих методов осуществлялись в трудах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, K. Deimling'a, J. Mawhin'a, W.V. Petryshyn'a, J.R.L. Webb'a и многих других исследователей.

Начиная со второй половины XX века, эти методы распространяются на теорию дифференциальных включений. Развитие теории дифференциальных включений связано с тем, что дифференциальные включения являются удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в различных разделах теории оптимального управления, математической физики, математической экономики и др. Различные задачи теории дифференциальных включений были изучены с помощью методов нелинейного и многозначного анализа в работах Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, М.И. Каменского, А.И. Поволоцкого, Ю.Е. Гликлиха, В.Г. Звягина, А.В. Арутюнова, В.Г. Задорожного, А.И. Булгакова, Е.Л. Тонкова, А.А. Толстоногова, В.В. Филиппова, J.-P. Aubin'a, A. Cellina, H. Frankowska, K. Deimling'a, C. Castaing'a, T. Pruszko, E. Tarafdar'a, S.K. Teo, L. Górniewicz'a, A. Granas'a, W. Kryszewski, D. Gabor'a, P. Nistri, S. Hu, N.P. Papageorgiou, P. Zecca, и других.

Важное место в исследовании дифференциальных уравнений и включений занимают краевые задачи, в том числе задача о существовании периодических решений. Весьма важной является также задача о глобальной структуре множества периодических решений.

Одним из наиболее эффективных средств решения задач о периодических колебаниях является метод направляющих функций, а для краевых задач - метод ограничивающих функций.

Метод направляющих функций был введен М.А. Красносельским и А.И. Перовым в 1958г. (см. [98, 99, 101]). М.А. Красносельский и А.И. Перов обобщили понятие функции Ляпунова для изучения существования периодических, ограниченных и почти периодических решений дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{0.0.1}$$

где $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - непрерывное отображение, которое является локально липщицевым по второму аргументу. Пусть $P(t,s)x$ обозначает оператор сдвига по траекториям уравнения (0.0.1) (см. [99, 101]). *Идея метода направляющих функций* состоит в следующем. Предположим, что отображение f - $T-$периодично по первому аргументу. Тогда $T-$периодическим решением уравнения (0.0.1) является неподвижная точка оператора $P(T,0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Следовательно, если удалось показать, что существует открытое ограниченное подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такое, что топологическая степень $deg\big(i - P(T,0), \overline{\Omega}\big)$ поля $i - P(T,0)$ отличается от нуля, то уравнение (0.0.1) имеет $T-$периодическое решение. Однако, $i - P(T,0)$ является оператором в неявном виде, и поэтому возможны трудности в оценке его степени. *Обоснованием метода направляющих функций* является следующее утверждение: *если векторные поля $f(0,\cdot)$ и $i - P(t,0)$ не имеют нулей на границе $\partial\Omega$ ограниченного подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ при всех*

$0 < t \leq T$, *то*

$$deg\big(i - P(T,0), \overline{\Omega}\big) = deg\big(-f(0,\cdot), \overline{\Omega}\big).$$

Напомним определение направляющей функции для уравнения (0.0.1) по Красносельскому и Перову. Непрерывно дифференцируемая функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *направляющей функцией* для уравнения (0.0.1), если существует $R > 0$ такое, что

$$\big\langle \nabla V(x), f(t,x) \big\rangle > 0 \text{ для всех } t \in [0,T]$$

и всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| \geq R$. Следовательно, вектор-градиент $\nabla V(x)$ и $f(t,x)$ не допускают противоположных направлений. Из этого определения непосредственно следует, что степень поля $i - P(T,0)$ может быть оценена через степень поля ∇V на сфере достаточно больших радиусов. Отметим, что эта техника тоже эффективна для изучения задачи существования ограниченных решений и почти периодических решений уравнения (0.0.1). Являющийся геометрически ясным и простым в применении, метод направляющих функций стал популярен среди многих ученых. Среди большого количества работ, относящихся к этому методу, мы напомним: работу J. Mawhin'a [114] касающуюся функционально-дифференциальных уравнений; работу A. Fond'a [59] где было введено понятие интегральных направляющих функций; работу L. Górniewicz'a и S. Plaskacz'a [71] (см. также [70]) с введением направляющих функций обобщеного вида для дифференциальных включений; работу Д. Рачинского [132] о многолистных направляющих функциях; понятие негладких направляющих функций для дифференциальных уравнений и включений было введено в работах F. de Blasi, L. Górniewicz, и G. Pianigiani [40]; M. Lewicka [111]; С. Корнева и В. Обуховского [93, 97]; M. Filippakis, L. Gasiński, N. Papageorgiou [58]; негладкие многолистные функций были введены в работе [95]; отметим также работу A. Alonso, C. Núñez и R. Obaya [7] с изучением полных направляющих

множеств для почти периодических дифференциальных уравнений.

Обобщая понятие направляющих функций, J. Mawhin в 1974г. [116] ввел метод ограничивающих функций для дифференциальных уравнений второго порядка в конечномерном пространстве (отметим, что ограничивающая функция типа $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(x) = \|x\|^2 - R^2$, была использована впервые P. Hartman'ом [79]). Этот метод затем был использован для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [65, 66]. Напомним основные идеи метода ограничивающих функций. Рассмотрим снова уравнение (0.0.1) для $t \in [a, b]$ с краевым условием

$$g\big(x(a), x(b)\big) = 0, \tag{0.0.2}$$

где f и g - непрерывные отображения. *Идея существования решений* задачи (0.0.1)-(0.0.2) заключается в принципе непрерывности Лере-Шаудера [110], в силу которого рассматривается *линеаризованная задача*

$$x'(t) = \lambda f(t, y(t)), \quad t \in (a, b), \tag{0.0.3}$$

с краевым условием (0.0.2), где $\lambda \in [0, 1]$ и $y \in C\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big)$ - фиксированная функция.

Предположим, что для всякой функции y задача (0.0.2)-(0.0.3) имеет единственное решение $T(y, \lambda)$ и, кроме того, отображение

$$T\colon C\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big) \times [0, 1] \to C\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big),$$

вполне непрерывно. Отметим, что неподвижная точка отображения $T(\cdot, 1)$ является решением задачи (0.0.1)-(0.0.2). Теперь, если существует открытое ограниченное множество $\Omega \subset C\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big)$ такое, что:

(a) $deg\big(i - T(\cdot, 0), \overline{\Omega}\big) \neq 0$;

(b) $x \neq T(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in \partial\Omega \times (0, 1)$,

то задача (0.0.1)-(0.0.2) имеет решение $x \in \overline{\Omega}$.

По J. Mawhin'у (см. [66]), C^1-функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *ограничивающей функцией* для уравнения (0.0.1), если

(i) множество $K = \{x \in \mathbb{R}^n\colon V(x) < 0\}$ ограничено и $V_{|\partial K} = 0$;

(ii) $\big\langle \nabla V(x), f(t,x) \big\rangle \neq 0$ для всех $t \in (a,b)$ и $x \in \partial K$.

Название *"ограничивающая функция"* следует из того, что если существует ограничивающая функция V и если существует неподвижная точка $x\colon [a,b] \to \overline{K}$ отображения $T(\cdot,\lambda)$, $\lambda \in (0,1)$ такая, что $x(a) \notin \partial K$ и $x(b) \notin \partial K$, то $x(t) \in K$ для всех $t \in [a,b]$ (см. [66]). Следовательно, множество Ω может быть выбрано как множество всех непрерывных функций $x\colon [a,b] \to K$. Условия $x(a) \notin \partial K$ и $x(b) \notin \partial K$ обычно вытекают из задания отображения g (см. [65, 66]).

Для получения условия (a) во многих работах используется K как выпуклое множество, содержащее 0. Тогда *линеаризованная задача* модифицируется так, что 0 является единственной неподвижной точкой отображения $T(\cdot,0)$, и следовательно, $deg\big(i - T(\cdot,0), \overline{\Omega}\big) = 1$.

Отметим некоторые важные вклады в развитие этого метода: работа V. Taddei [136] для негладких ограничивающих функций в конечномерном пространстве; работа G. Wang'a, M. Zhou и L. Sun'a [140] с применением метода ограничивающих функций для дифференциальных уравнений третьего порядка; работа J. Andres'a, L. Malaguti и V. Taddei [8] для ограничивающих функций в банаховом пространстве; работа I. Benedetti, L. Malaguti и V. Taddei [17] для ограничивающих функций в банаховом пространстве со слабой топологией.

Задача о существовании ветви нетривиальных решений операторных уравнений, выходящей из точки бифуркации была изучена М.А. Красносельским [100]. Теорема о глобальной структуре множества решений опе-

раторных уравнений была доказана в работе P. Rabinowitz'a [131]. Результаты М.А. Красносельского и P. Rabinowitz'a были обобщены в работе J.C. Alexander'a и P.M. Fitzpatrick'a [5] для включений с многомерными параметрами. Топологические методы в теории бифуркации применяли в своих работах также Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, М.И. Каменский, А.М. Красносельский, Ю.И. Сапронов, J. Ize, E. Dancer, J. Pejsachowicz, J.A. Yorke, J. Marsden, J. Mawhin, W.V. Petryshyn, L. Górniewicz, W. Kryszewski, M. Fečkan, M. Väth, D. Gabor, P. Benevieri, M. Furi, S.C. Welsh, J.R. Webb и многие другие исследователи.

Из отмеченного выше следует, что методы направляющих и ограничивающих функций являются эффективными средствами для изучения периодических и краевых задач. Однако до последнего времени в этих методах и их применениях можно было указать существенные пробелы. В частности, метод ограничивающих функций не применялся к изучению дифференциальных уравнений и включений с нелокальными начальными условиями. Метод направляющих функций рассматривался только для дифференциальных уравнений и включений в конечномерном пространстве. Применение метода направляющих функций к изучению задачи бифуркации периодических решений семейства дифференциальных включений было только намечено. Приложение метода направляющих функций к изучению задачи существования периодических решений и задачи бифуркации периодических решений семейства включений с нелинейными фредгольмовыми отображениями ранее не изучалось. Все перечисленные выше ограничения этих методов в значительной степени сняты в данной диссертации.

Цель диссертационной работы. В диссертации исследуются следующие главные задачи:

- приложение метода направляющих функций к изучению дифференциальных включений с обобщенным периодическим условием и их приме-

нений в теории дифференциальных игр;

- систематическое приложение метода направляющих функций к изучению задач бифуркации с многомерным параметром и их применение к исследованию бифуркации семейств периодических траекторий управляемых систем и дифференциальных вариационных неравенств;

- распространение метода направляющих функций на дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве;

- приложения метода направляющих функций к изучению задачи существования периодических траекторий и задачи бифуркации семейства периодических траекторий управляемых систем, описываемых в виде включений с нелинейными фредгольмовыми отображениями;

- приложение метода ограничивающих функций к изучению дифференциальных уравнений и включений с нелокальными начальными условиями;

- приложение метода ограничивающих функций к исследованию дифференциальных включений второго порядка.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, теории функционального анализа, теории многозначных отображений, теории топологической степени и теории бифуркаций.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Введено понятие направляющей функции для дифференциальных включений с обобщенным периодическим условием. Получены достаточные условия существования решений изучаемой задачи. Исследованы применения полученных результатов в теории дифференциальных игр.

2. Метод направляющих функций распространен на дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

3. Осуществлено систематическое приложение метода направляющих функций к задаче бифуркации для семейства периодических решений дифференциально-операторных включений с CJ-мультиотображениями и многомерным параметром.

4. Описана глобальная структура множества периодических решений для двупараметрических семейств управляемых систем.

5. Описана глобальная структура множества периодических решений для дифференциальных вариационных неравенств с двумя параметрами.

6. Введено понятие направляющей функции для включения с нелинейным фредгольмовым оператором. Изучена взаимосвязь между ориентированным индексом совпадения и индексом направляющей функции.

7. Получены достаточные условия существования периодической траектории для управляемой системы, содержащей нелинейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $CJ-$мультиотображение.

8. Описана глобальная структура множества периодических траекторий для управляемой системы, содержащей нелинейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $CJ-$мультиотображение.

9. Распространен метод ограничивающих функций на случай дифференциальных уравнений и включений с нелокальными начальными условиям в конечномерном и бесконечномерном гильбертовом пространствах.

10. Распространен метод ограничивающих функций на случай дифференциальных включений второго порядка в конечномерном и бесконечномерном гильбертовом пространствах.

Практическая и теоретическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться в теории дифференциальных уравнений и включений, теории оптимального управления, теории ветвления семейств решений динамических систем. Они могут также найти приложения в задачах математической экономики и теории игр.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной научной конференции "Общие проблемы управления и их приложения"(Тамбов, 2013г.); научной конференции физико-математического факультета ВГПУ (2014г. и 2015г.); International workshop on nonlinear and variational analysis (Kaohsiung, Taiwan 2014); International workshop on equilibrium and fixed point problems: Theory and algorithms (Ha Noi, Viet Nam 2014); на научных семинарах профессора L. Malaguti (университет Реджо-Эмилии и Модены, Италия, 2013г.), профессора I. Benedetti (университет Перуджи, Италия, 2013г.) и профессора P. Nistri (университет Сиены, Италия, 2013г.); во время стажировки диссертанта в университете Реджо-Эмилии и Модены (Италия, апрель-июль 2013г.), в национальном университете имени Сун Ят-Сена (Тайван, июнь-июль, 2014г.), а также во времени стажировки диссертанта в Воронежском государственном педагогическом университете (Воронеж, 2015г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 28 работ, из них 1 монография, 17 статей, опубликованных в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ и 6 тезисов докладов на международных научных конференциях. Из совместных работ [1], [3]-[9], [11]-[13], [15], [17]-[18] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 257 страницах и состоит из введения, пяти глав, разбитых в общей сложности на 19 параграфов, и списка цитируемой литературы, включающего 148 наименований.

Обозначения

Пусть X, Y - банаховы пространства. В диссертации используются следующие обозначения.

* $P(Y)$ - совокупность всех непустых подмножеств пространства Y.

* $Cv(Y)$ - совокупность всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства Y.

* $K(Y)$ - совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства Y.

* $Kv(Y)$ - совокупность всех непустых компактных выпуклых подмножеств пространства Y.

* $C([0,T];X)$ - пространство всех непрерывных функций $x\colon [0,T] \to X$ с нормой
$$\|x\|_C = \sup_{[0,T]} \|x(t)\|_X.$$

* $C_T([0,T];X)$ - пространство всех непрерывных функций $x\colon [0,T] \to X$ таких, что $x(0) = x(T)$.

* $L^p([0,T];X)$ - пространство всех $p-$суммируемых функций $x\colon [0,T] \to X$ с нормой
$$\|x\|_p = \Big(\int_0^T \|x(t)\|_X^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

* $W^{k,p}([0,T];X)$ - пространство Соболева с нормой
$$\|x\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^{k} \|x^{(i)}\|_p^p\right)^{1/p}.$$

* $W_T^{k,p}([0,T];X)$ - пространство всех функций $x \in W^{k,p}([0,T],X)$ таких, что $x(0) = x(T)$.

* $x_n \xrightarrow{X} x$: $\{x_n\}$ сходится (по норме) в пространстве X к x.

* $x_n \overset{X}{\rightharpoonup} x$: $\{x_n\}$ слабо сходится в пространстве X к x.

* $B_C(0,r) = \{x \in C([0,T];X) \colon \|x\|_C \leq r\}$.

* $|\cdot|$ - норма элемента в конечномерном пространстве.

* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение элементов в конечномерном пространстве.

* $B^n(0,r) = \{w \in \mathbb{R}^n \colon |w| \leq r\}$.

* $B^n = \{w \in \mathbb{R}^n \colon |w| \leq 1\}$.

* $intB^n(0,r) = \{w \in \mathbb{R}^n \colon |w| < r\}$.

* $S^{n-1}(0,r) = \{w \in \mathbb{R}^n \colon |w| = r\}$.

* $S^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n \colon |w| = 1\}$.

* $\partial\mathcal{O}$ - граница множества $\mathcal{O}$.

* $Coin(f,G) = \{x \colon f(x) \in G(x)\}$ - множество точек совпадения отображения f и многозначного отображения (мультиотображения) G.

* $Coin(f,G,U) = Coin(f,G) \cap U$.

* V_u' - частная производная функции V по аргументу u.

Глава 1

Предварительные сведения.

1.1 Сведения из функционального анализа

Пусть M - подмножество нормированного пространства.

Определение 1.1.1. *Множество* $co\, M$ *всевозможных конечных линейных комбинаций* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, *где* $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *и каждое* x_i *принадлежит* M, *называется выпуклой оболочкой множества* M.

Заметим, что $co\, M$ является наименьшим выпуклым множеством, содержащим M.

Множество $\overline{co}\, M = \overline{co\, M}$ называется выпуклым замыканием множества M. Известно, что это наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее M.

Теорема 1.1.1. ***(Мазура)***. *Если* E *- банахово пространство и* $M \subset E$ *- компактное множество, то* $\overline{co}\, M$ *также компактно.*

Определение 1.1.2. *Точка* $x \in E$ *называется неподвижной точкой отображения* $f\colon E \to E$, *если* $x = f(x)$.

Теорема 1.1.2. ***(Шаудера)***. *Пусть* E *- линейное нормированное пространство,* M *- выпуклое замкнутое множество в* E, $f\colon M \to M$ *- непрерывное отображение,* $f(M)$ *- относительно компактное множество. Тогда* f *имеет неподвижную точку.*

Определение 1.1.3. *Пусть E - линейное нормированное пространство, $M \subset E$ - непустое подмножество. Непрерывное отображение $f\colon M \to E$ называется вполне непрерывным, если всякое ограниченное подмножество множества M оно переводит в относительно компактное.*

Пусть $C(K, E)$ - пространство всех непрерывных отображений локально компактного метрического пространства K в нормированное пространство E, наделенное топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах.

Теорема 1.1.3. ***(Арцела-Асколи)***. *Для того, чтобы семейство функций $M \subset C(K, E)$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равностепенно непрерывным и множество $M(x) = \{f(x)\colon f \in M\} \subset E$ было относительно компактным для любого $x \in K$.*

Теорема 1.1.4. ***(Титце-Дугунджи)***. *Пусть M - замкнутое множество метрического пространства E, а E_1 - локально выпуклое пространство. Тогда всякое отображение $f\colon M \to E_1$ имеет непрерывное продолжение $\widetilde{f}\colon E \to E_1$. Более того, все значения этого продолжения $\widetilde{f}$ могут быть взяты из выпуклой оболочки $\operatorname{co} f(M)$ множества $f(M)$.*

Теорема 1.1.5. ***(Мазура)*** *(см., например [49]). Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность элементов нормированного пространства, слабо сходящаяся к u. Тогда найдется двойная последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_{ik}\}_{i=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:*

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik} = 1$ *для всех* $i = 1, 2, 3, \cdots$;

b) *для каждого* $i = 1, 2, \cdots$ *найдется номер* $k_0 = k(i)$ *такое, что* $\lambda_{ik} = 0$ *для всех* $k \geq k_0$;

c) последовательность выпуклых комбинаций $\{\widetilde{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\widetilde{u}_i = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik} u_k,$$

сходится к u *по норме.*

Теорема 1.1.6. *(см., например [133]). Пусть* E *- банахово пространство. Если последовательность функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T],E)$ *сходится по норме пространства* $L^1([0,T],E)$ *к функции* f*, то существует подпоследовательность* $\{f_{ni}\}$*, которая сходится к* f *почти всюду на* $[0,T]$*.*

Лемма 1.1.1. *(лемма Гроунулла, см. например [79]).*
Пусть $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *- непрерывные неотрицательные функции;* $C \geq 0$ *- константа и*

$$v(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда

$$v(t) \leq Ce^{\int_a^t u(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

Теперь напомним некоторые понятия негладкого анализа (см., например [20, 37]).

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ - открытое подмножество. Функция $V\colon U \to \mathbb{R}$ называется *липщицевой* с константой $L > 0$ если

$$|V(x) - V(y)| \leq L|x - y| \text{ для всех } x, y \in U.$$

Функция V называется *локально липщицевой* если для каждого $x \in U$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B^n(x,\varepsilon) \subset U$ и сужение $V_{|_{B^n(x,\varepsilon)}}$ является липщицевой.

Пусть $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - локально липщицева функция. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная $V^0(x_0;\nu)$ функции V в точке x_0 по на-

правлению ν определяется следующим образом

$$V^0(x_0;\nu) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}}} \frac{V(x+t\nu) - V(x)}{t}. \tag{1.1.1}$$

Обобщенный градиент $\partial V(x_0)$ функции V в точке x_0 определяется равенством:

$$\partial V(x_0) = \left\{ x \in R^n \colon \left\langle x, \nu \right\rangle \leq V^0(x_0;\nu) \textit{ для любого } \nu \in \mathbb{R}^n \right\},$$

где $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Известно (см., например [20, 37]), что мультиотображение

$$\partial V \colon \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$$

полунепрерывно сверху и имеет выпуклые компактные значения. В частности, отсюда вытекает, что для каждой непрерывной функции $x \colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ множество всех суммируемых со второй степеней сечений мультифункции $\partial V(x(t))$ непусто, т.е.

$$\left\{ f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^n) \colon f(t) \in \partial V(x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T] \right\} \neq \emptyset.$$

Локально липщицева функция $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если для каждых $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x,\nu)$ и $V'(x,\nu) = V^0(x,\nu)$. Отметим, что локально ограниченная выпуклая функция является регулярной.

1.2 Фредгольмовы операторы

1.2.1 Линейные фредгольмовы операторы

Пусть X, Y - банаховы пространства. Напомним теперь (см., например [65]) некоторые понятия из теории линейных фредгольмовых операторов.

Определение 1.2.1. *Линейное ограниченное отображение* $L\colon X \to Y$ *называется фредгольмовым оператором индекса* k, *если*

(1i) ImL *замкнуто в* Y;

(2i) $KerL$ *и* $CokerL = Y/ImL$ *имеют конечные размерности и*

$$dim\ KerL - dim\ CokerL = k.$$

Пусть $L\colon domL \subseteq X \to Y$ - линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда существуют проекции $P\colon X \to X$ и $Q\colon Y \to Y$ такие, что $ImP = KerL$ и $KerQ = ImL$. Если оператор

$$L_P\colon domL \cap KerP \to ImL$$

определяется как сужение оператора L на $domL \cap KerP$, то L_P является линейным изоморфизмом и мы можем определить оператор

$$K_P\colon ImL \to domL, \quad K_P = L_P^{-1}.$$

Теперь пусть $\Pi\colon Y \to CokerL$ - канонический оператор проектирования

$$\Pi(z) = z + ImL,$$

и $\Lambda\colon CokerL \to KerL$ - линейный непрерывный изоморфизм, тогда уравнение

$$Lx = y,\ y \in Y$$

эквивалентно уравнению

$$(i - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})y,$$

где $K_{P,Q}\colon Y \to X$ определяется равенством

$$K_{P,Q} = K_P(i - Q),$$

а i - тождественное отображение.

1.2.2 Нелинейные фредгольмовы операторы

Обозначим через E, E' вещественные банаховы пространства и через $Y \subseteq E$ открытое множество. Напомним (см., например [27, 50, 147]), что:

Определение 1.2.2. *C^1-оператор $f : Y \to E'$ называется фредгольмовым оператором с индексом $k \geq 0$ $\left(f \in \Phi_k C^1(Y)\right)$ если для всех $y \in Y$ производный Фреше $f'(y)$ является линейным Фредгольмовым отображением индекса k.*

Определение 1.2.3. *Оператор $f : \overline{Y} \to E'$ называется собственным если множество $f^{-1}(\mathcal{K})$ является компактным для всех компактных множеств $\mathcal{K} \subset E'$.*

Атлас $\{(Y_i, \Psi_i)\}$ на Y называется *Фредгольмовым* если для каждых пересекающихся карт (Y_i, Ψ_i) и (Y_j, Ψ_j) и для каждого $y \in Y_i \cap Y_j$ выполнено

$$\left(\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}\right)'(\Psi_i(y)) \in CG\left(\widetilde{E}\right),$$

где $\widetilde{E}$ - соответствующее модельное пространство, $CG\left(\widetilde{E}\right)$ обозначает совокупность всех линейных обратимых операторов на $\widetilde{E}$ с формой $i + \ell$, где i - тождественное отображение и ℓ - компактный линейный оператор.

Множество $CG\left(\widetilde{E}\right)$ разбито на два связных компонента. Компонент, содержащий тождественное отображение, обознается через $CG^+\left(\widetilde{E}\right)$.

Два фредгольмовых атласа называются эквивалентными если их объединение тоже является фредгольмовым атласом. Класс эквивалентных атласов называется *фредгольмовой структурой.*

Фредгольмова структура на U называется согласованной к $\Phi_0 C^1$-отображению $f : U \to E'$ если она признавает атлас $\{(Y_i, \Psi_i)\}$ с модельным пространством E' для которого

$$\left(f \circ \Psi_i^{-1}\right)'(\Psi_i(y)) \in LC(E')$$

в каждой точке $y \in U$, где $LC\left(E'\right)$ обозначает совокупность всех линейных операторов в E', которые в виде: тождественный оператор плюс компактный оператор. Заметим, что каждое $\Phi_0 C^1$-отображение $f : U \to E'$ индуцирует фредгольмовую структуру на U, согласованную к f.

Фредгольмов атлас $\{(Y_i, \Psi_i)\}$ на Y называется *ориентированным* если для пересекающихся карт (Y_i, Ψ_i) и (Y_j, Ψ_j) и каждого $y \in Y_i \cap Y_j$ выполнено

$$\left(\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}\right)' \left(\Psi_i\left(y\right)\right) \in CG^+\left(\widetilde{E}\right) \ .$$

Два ориентированых фредгольмовых атласа называются эквивалентными если их объединение тоже является ориентированным атласом на Y. Класс эквивалентных ориентированых фредгольмовых атласов по этому отношению называется *ориентированной фредгольмовой структурой на* Y. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см. [27])

Свойство 1.2.1. *Пусть $f \in \Phi_k C^1\left(Y\right)$; $K \subset Y$ - компактное множество. Тогда существует открытая окрестность $\mathcal{O}$, $K \subset \mathcal{O} \subset Y$ и конечномерное подпространство $E'_n \subset E'$ такие, что*

$$f^{-1}\left(E'_n\right) \cap \mathcal{O} = M^{n+k} \, ,$$

где M^{n+k} - $(n+k)-$мерное многообразие. Кроме того, сужение $f_{|\mathcal{O}}$ трансверсально к E'_n, т.е. $f'\left(x\right) E + E'_n = E'$ для каждого $x \in \mathcal{O}$.

1.3 Многозначные отображения

1.3.1 Общие свойства

Приведем теперь некоторые понятия из теории многозначных отображений (см. [24, 26] и также [12, 41, 70, 87, 90] и др.).

Пусть X, Y - произвольные непустые множества и символ $P(Y)$ обозначает совокупность всех непустых подмножеств множества Y.

Под *многозначным отображением* (или коротко, *мультиотображением*) $\mathcal{F}$ из X в Y мы понимаем соотношение, которое сопоставляет каждому $x \in X$ непустое подмножество $\mathcal{F}(x) \subseteq Y$, называемое *значением* элемента x. Поэтому, мультиотображение $\mathcal{F}$ может быть описана в виде

$$\mathcal{F} : X \to P(Y).$$

Иногда мы тоже используем символы $x \multimap \mathcal{F}(x)$ и $\mathcal{F} : X \multimap Y$.

Если $A \subseteq X$, то множество

$$\mathcal{F}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{F}(x)$$

называется *образом* множества A под $\mathcal{F}$.

Множество $\Gamma_{\mathcal{F}} \subseteq X \times Y$, определенное равенством

$$\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : \ (x, y) \in X \times Y, \quad y \in \mathcal{F}(x)\}$$

называется *графиком* мультиотображения $\mathcal{F}$.

Для $D \subseteq Y$, *малым прообразом* $\mathcal{F}_+^{-1}(D)$ множества D называется множество

$$\mathcal{F}_+^{-1}(D) = \{x : \ x \in X, \ \mathcal{F}(x) \subseteq D\}.$$

Полным прообразом $\mathcal{F}_-^{-1}(D)$ множества D называется множество

$$\mathcal{F}_-^{-1}(D) = \{x \in X \ : \mathcal{F}(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Теперь, пусть X и Y - топологические пространства.

Определение 1.3.1. *Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ называется* полунепрерывным сверху *в точке $x \in X$, если для любого открытого мнодества $V \subset Y$ такого, что $\mathcal{F}(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $\mathcal{F}(U(x)) \subset V$.*
Мультиотображение $\mathcal{F}$ называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Приведем некоторые равносильные формулировки.

Свойство 1.3.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *мультиотображение* $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ *полунепрерывно сверху;*

(*ii*) *для любого открытого множества* $V \subset Y$ *множество* $\mathcal{F}_+^{-1}(V)$ *открыто в* X*;*

(*iii*) *для любого замкнутого множества* $Q \subset Y$ *множество* $\mathcal{F}_-^{-1}(Q)$ *замкнуто в* X*.*

Определение 1.3.2. *Мультиотображение* $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ *называется* полунепрерывным снизу *в точке* $x \in X$*, если для любого открытого множества* $V \subseteq Y$ *такого, что* $\mathcal{F}(x) \cap V \neq \emptyset$ *существует окрестность* $U(x)$ *точки* x *такая, что* $\mathcal{F}(x') \cap V \neq \emptyset$ *для всех* $x' \in V(x)$*.*
Мультиотображение $\mathcal{F}$ *называется полунепрерывным снизу, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке* $x \in X$*.*

Полунепрерывность снизу также допускает эквивалентные формулировки.

Теорема 1.3.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *мультиотображение* $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ *полунепрерывно снизу;*

(*ii*) *для любого открытого множества* $V \subset Y$ *множество* $\mathcal{F}_-^{-1}(V)$ *открыто в* X*;*

(*iii*) *для любого замкнутого множества* $Q \subset Y$ *множество* $\mathcal{F}_+^{-1}(Q)$ *замкнуто в* X*.*

Определение 1.3.3. *Мультиотображение* $\mathcal{F}$*, которое полунепрерывно и сверху и снизу, называется* непрерывным*.*

Рассмотрим еще один важный класс мультиотображений.

Определение 1.3.4. *Мультиотображение* $\mathcal{F}$ *называется* замкнутым*, если его график* $\Gamma_{\mathcal{F}}$ *является замкнутыи множеством в пространстве* $X \times Y$*.*

Свойство 1.3.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *мультиотображения* $\mathcal{F}$ *замкнуто;*

(*ii*) *для любых направленностей* $\{x_\alpha\} \subset X$, $\{y_\alpha\} \subset Y$ *таких, что* $y_\alpha \in \mathcal{F}(x_\alpha)$, *если* $x_\alpha \to x$ *и* $y_\alpha \to y$, *то* $y \in \mathcal{F}(x)$.

Отметим, что в последнем утверждении, обычно последовательности используются в случае, когда X и Y являются метрическими пространствами.

Введем следующие обозначения:

$$C(Y) = \{D \in P(Y) : D \text{ является замкнутым}\};$$

$$K(Y) = \{D \in P(Y) : D \text{ является компактным}\}.$$

Если Y является топологическим векторным пространством мы обозначим:

$$Pv(Y) = \{D \in P(Y) : D \text{ является выпуклым}\};$$

$$\begin{aligned} Cv(Y) &= Pv(Y) \cap C(Y) \\ &= \{D \in P(Y) : D \text{ является выпуклым и замкнутым}\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Kv(Y) &= Pv(Y) \cap K(Y) \\ &= \{D \in P(Y) : D \text{ является комапктным и выпуклым}\}. \end{aligned}$$

В случае, когда мультиотображение F действует в совокупности $C(Y)$, $K(Y)$, или $Pv(Y)$, мы говорим, что F имеет замкнутые, компактные или выпуклые значения, соответственно.

Из определения замкнутого мультиотображения следует, что оно имеет замкнутые значения.

Пусть Y - метрическое пространство. Функция $h : K(Y) \times K(Y) \to \mathbb{R}_+$,

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A)\},$$

где O_ε обозначает ε–окрестность множества, называется *метрикой Хаусдорфа* на $K(Y)$.

Свойство 1.3.3. *Пусть X - топологическое пространство, Y - метрическое пространство. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ является непрерывным тогда и только тогда, когда оно является непрерывным как однозначное отображение из X в метрическое пространство $(K(Y), h)$.*

Отношение между замкнутыми и полунепрерывными сверху мультиотображениями описывается в следующем утверждении.

Свойство 1.3.4. *Пусть X - топологическое пространство, Y - метрическое пространство и $\mathcal{F} : X \to C(Y)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение. Тогда $\mathcal{F}$ является замкнутым.*

Для формулировки достаточного условия полунепрерывности сверху замкнутого мультиотображения дадим следующие определения.

Определение 1.3.5. *Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ называется:*

(i) *компактным, если область значений $\mathcal{F}(X)$ относительно компактна в Y, т.е. $\overline{\mathcal{F}(X)}$ компактно в Y;*

(ii) *локально компактным, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью $U(x)$ такой, что сужение $\mathcal{F}$ на $U(x)$ компактно;*

(iii) *квазикомпактным, если его сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.*

Ясно, что $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$.

Свойство 1.3.5. *Пусть $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ - замкнутое локально компактное мультиотображение. Тогда $\mathcal{F}$ полунепрерывно сверху.*

Определение 1.3.6. *Пусть X - метрическое пространство. Полунепрерывное сверху мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$, сужение которого на любое ограниченное множество пространства X компактно, называется* вполне полунепрерывным сверху.

Напомним одно важное свойство полунепрерывных сверху мультиотображений.

Свойство 1.3.6. *Пусть $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение. Если $A \subset X$ - компактное множество, то его образ $\mathcal{F}(A)$ является компактным множеством в Y*

Следующие утверждения представляют свойства сохранения непрерывности мультиотображений при различных операциях над ними.

Пусть X, Y, и Z - топологические пространства.

Свойство 1.3.7. *Если мультиотображения $\mathcal{F}_0 : X \to P(Y)$, и $\mathcal{F}_1 : Y \to P(Z)$ полунепрерывны сверху (полунепрерывны снизу), то их композиция $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_0 : X \to P(Z)$,*

$$(\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_0)(x) = \mathcal{F}_1 (\mathcal{F}_0 (x)),$$

тоже полунепрерывна сверху (соответственно, полунепрерывна снизу).

Свойство 1.3.8. *Если мультиотображения $\mathcal{F}_0 : X \to K(Y)$ и $\mathcal{F}_1 : X \to K(Z)$ полунепрерывны сверху (полунепрерывны снизу), то их декартово произведение $\mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_1 : X \to K(Y \times Z)$,*

$$(\mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_1)(x) = \mathcal{F}_0(x) \times \mathcal{F}_1(x)$$

тоже полунепрерывно сверху (соответственно, полунепрерывно снизу).

Свойство 1.3.9. *Пусть $F_0 : X \to C(Y)$ - замкнутое мультиотображение, $F_1 : X \to K(Y)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение и*

$$F_0(x) \cap F_1(x) \neq \emptyset, \forall x \in X.$$

Тогда их пересечение $F_0 \cap F_1 : X \to K(Y)$, $(F_0 \cap F_1)(x) = F_0(x) \cap F_1(x)$ тоже полунепрерывно сверху.

Теперь, пусть X - топологическое пространство и Y - топологическое векторное пространство.

Свойство 1.3.10. *Если мультиотображения $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1 : X \to K(Y)$ полунепрерывны сверху (полунепрерывны снизу), то их сумма $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 : X \to K(Y)$,*

$$(\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1)(x) = \mathcal{F}_0(x) + \mathcal{F}_1(x)$$

тоже полунепрерывна сверху (соответственно, полунепрерывна снизу)

Свойство 1.3.11. *Если мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу), и функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, то их произведение $f \cdot \mathcal{F} : X \to K(Y)$,*

$$(f \cdot \mathcal{F})(x) = f(x) \cdot \mathcal{F}(x)$$

полунепрерывно сверху (соответственно, полунепрерывно снизу).

1.3.2 Измеримые мультифункции и мультиоператор суперпозиции

Напомним теперь основные свойства измеримых мультифункций и мультиоператор суперпозиции, порожденный верхним мультиотображением Каратеодори (см., например [11, 24, 26, 32, 41, 70, 87, 90] и др.).

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ - компактный интервал, μ - мера Лебега на I и E - банахово пространство.

Определение 1.3.7. *Мультифункция $F : I \to K(E)$ называется измеримой, если для любого открытого множества $V \subset E$ малый прообраз $F_+^{-1}(V)$ является измеримым.*

Ясно, что эквивалентным определением является измеримость полного прообраза $F_-^{-1}(Q)$ каждого замкнутого множества $Q \subset E$. Следующее свойство дает другие эквивалентные определения измеримости мультифункции.

Свойство 1.3.12. *Мультифункция $F : I \to K(E)$ измерима тогда и только тогда, когда:*

(i) *для любого замкнутого множества $Q \subset E$ малый прообраз $F_+^{-1}(Q)$ измерим;*

(ii) *для любого открытого множества $V \subset E$ полный прообраз $F_-^{-1}(V)$ измерим.*

Заметим, что из определения выше и Свойства 1.3.12 вытекает, что полунепрерывная сверху (или полунепрерывная снизу) мультифункция измерима.

Введем следующее понятие.

Определение 1.3.8. *Функция $f : I \to E$ называется измеримым сечением мультифункции $F : I \to K(E)$, если f измерима и*

$$f(t) \in F(t) \quad \text{для } \mu\text{-п.в.} \quad t \in I.$$

Множество всех измеримых сечений F обозначается символом $\mathbf{S}(F)$.

Определение 1.3.9. *Счетное семейство* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{S}(F)$ *называется представлением Кастена для* F*, если*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f(t)} = F(t)$$

для μ*-п.в.* $t \in I$*.*

Мультифункцию $\widetilde{F} : I \to K(E)$ называют ступенчатой, если существует разбиение I на конечное семейство непересекающихся измеримых подмножеств $\{I_j\}$, $\cup_j I_j = I$ такое, что $\widetilde{F}$ постоянно на каждом I_j.

Определение 1.3.10. *Мультифункция* $F : I \to K(E)$ *называется сильно измеримой, если существует последовательность* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ступенчатых мультифункций такая, что*

$$h(F_n(t), F(t)) \ \to \ 0$$

при $n \to \infty$ *для* μ*-п.в.* $t \in I$*, где* h *- метрика Хаусдорфа в* $K(E)$*.*

Понятие сильно измеримой функции, и следовательно сильно измеримого сечения, может быть определено аналогично. Отметим, что измеримая мультифункция не является, вообще говоря, сильно измеримой (см., например [41]). Но для мультифункций с компактными значениями в сепарабельном банаховом пространстве эти понятия совпадают. Это становится ясно из следующего утверждения, описывающего основные свойства измеримых мультифункций (см., например [26, 90]).

Свойство 1.3.13. *Пусть* E *- сепарабельное банахово пространство. Тогда для мультифункции* $F : I \to K(E)$ *следующие условия эквивалентны:*

(a) F *измерима;*

(b) *для любого счетного плотного множества* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *пространства* E *функции* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$*,*

$$\varphi_n(t) = dist(x_n, F(t))$$

измеримы;

(c) *F обладает представлением Кастена;*

(d) *F сильно измерима;*

(e) *F измерима как однозначная функция из I в метрическое пространство $(K(E), h)$;*

(f) *F обладает свойством Лузина: для каждого $\delta > 0$ существует замкнутое подмножество $I_\delta \subset I$ такое, что $\mu(I \setminus I_\delta) \leq \delta$ и сужение F на I_δ непрерывно.*

В случае, когда E является произвольным (несепарабельным) банаховым пространством, справедливо следующее утверждение (см., например [26]).

Свойство 1.3.14. *Пусть E - банахово пространство и $F : I \to K(E)$ - сильно измеримая мультифункция. Тогда F измерима и обладает представлением Кастена, состоящим из сильно измеримых функций.*

Пусть E - банахово пространство и $F : I \to P(E)$ - мультифункция. Символом $\mathbf{S}^1(F)$ мы будем обозначать множество всех интегрируемых по Бохнеру сечений, т.е.

$$\mathbf{S}^1(F) = \left\{ f \in L^1(I; E) : f(t) \in F(t) \quad \text{для} \quad \mu - \text{п.в. } t \in I \right\} .$$

Если $\mathbf{S}^1(F) \neq \emptyset$, то мультифункция F называется *интегрируемой* и ее интеграл определяется следующим образом:

$$\int_\tau F(s)\, ds = \left\{ \int_\tau f(s)\, ds \ : f \in \mathbf{S}^1(F) \right\}$$

для любого измеримого подмножества $\tau \subset I$.

Ясно, что если мультифункция $F : I \to K(E)$ сильно измерима и интегрально ограничена, т.е. существует суммируемая функция $\nu \in L^1_+(I)$ такая, что

$$\|F(t)\|_E := \max \{ \|y\|_E : y \in F(t) \} \leq \nu(t) \quad \text{для} \quad \mu - \text{п.в.}\, t \in I,$$

то F интегрируема.

Замечание 1.3.1. *Отметим, что если мультифункция F постоянна, т.е. $F(t) \equiv A \in Kv(E)$, то $\int_I F(s)\,ds = A\mu(I)$.*

Пусть теперь E - банахово пространство и E_0 - нормированное пространство.

Определение 1.3.11. *Мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(Y)$ называется верхним Каратеодори мультиотображением, если:*

$(F1)$ *для каждого $x \in E_0$, мультифункция*

$$F(\cdot, x) : I \to K\,(E)$$

сильно измерима;

$(F2)$ *для п.в. $t \in I$ мультиотображение $F : E_0 \to K\,(E)$ полунепрерывным сверху.*

Замечание 1.3.2. *a) Из Свойства 1.3.13 следует, что в случае, когда пространство E сепарабельно, "сильно измерима"в условии $(F1)$ становится "измерима".*

b) Если верхнее Каратеодори мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(Y)$ является однозначным отображением, то его будем называть отображением Каратеодори.

Основным свойством верхнего Каратеодори мультиотображения является следующее утверждение.

Свойство 1.3.15. *(см., например [26, 41, 90]) Если $F : I \times E_0 \to K(E)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение, то для каждой сильно измеримой функции $q : I \to E_0$ существует сильно измеримое сечение $f : I \to E$ мультифункции $\Phi : I \to K(E)$,*

$$\Phi(t) = F(t, q(t)).$$

Определение 1.3.12. *Для целого числа $p \geq 1$, $F : I \times E_0 \to K(E)$ называется* мультиотображением с L^p-ростом, *если оно удовлетворяет условию:*

$(F3)$ *для любого ограниченного множества $\Omega \subset E_0$ существует функция $\nu_\Omega \in L^p_+(I)$ такая, что*

$$\|F(t,x)\|_E \leq \nu_\Omega(t) \quad \text{для } \mu - \text{п.в. } t \in I$$

и для всех $x \in \Omega$.

Если мультиотображение удовлетворяет следующему условию:

$(F3)'$ *существует функция* $\nu \in L^p_+(I)$ *такая, что*

$$\|F(t,x)\|_E \leq \nu(t)(1 + \|x\|_{E_0}) \quad \text{для } \mu - \text{п.в. } t \in I$$

и для всех $x \in E_0$*, то* F *называется* мультиотображением с L^p-подлинейным ростом.

Каждое верхнее Каратеодори мультиотображение с L^p–ростом

$$F : I \times E_0 \to K(E)$$

порождает *мультиоператор суперпозиции* $\mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to P(L^p(I, E))$,

$$\mathcal{P}_F(x) = \big\{ f \in L^p(I, E) : f(t) \in F(t, x(t)) \text{ для } \mu - \text{п.в. } t \in I \big\}.$$

Под дополнительным предположением, что мультиотображение F имеет выпуклые значения, мы обладаем следующим свойством мультиоператора суперпозиции (см., например [26, 90])

Свойство 1.3.16. *Пусть* $F : I \times E_0 \to Kv(E)$ *- верхнее Каратеодори мультиотображение с* L^p*–ростом,* E_1 *- нормированное пространство и* $A : L^p(I; E) \to E_1$ *- линейный ограниченный оператор. Тогда композиция*

$$A \circ \mathcal{P}_F : C(I; E_0) \longrightarrow Cv(E_1)$$

является замкнутым мультиотображением.

1.3.3 Однозначные аппроксимации

Пусть (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) - метрические пространства.

Определение 1.3.13. *Пусть* $F\colon X \to P(Y)$ *- некоторое мультиотображение метрических пространств. Непрерывное отображение* $f_\varepsilon\colon X \to Y$*, где* $\varepsilon > 0$*, называется* $\varepsilon-$*аппроксимацией мультиотображения* F*, если для каждого* $x \in X$ *найдется* $x' \in O_\varepsilon(x)$ *такое, что*

$$f_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon(F(x')),$$

где $O_\varepsilon(x)$ *-* $\varepsilon-$*окрестность точки* x*.*

Ясно, что это понятие может быть равносильно выражено условием:

$$f_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon\big(F(O_\varepsilon(x))\big), \text{ для всех } x \in X$$

или, что

$$\Gamma_{f_\varepsilon} \subset O_\varepsilon(\Gamma_F),$$

где Γ_{f_ε}, Γ_F - графики отображений f_ε и F, соответственно, а метрика в $X \times Y$ определена как

$$\rho\big((x,y),(x',y')\big) = \max\{\rho_X(x,x'), \rho_Y(y,y')\}.$$

Справедливо следующее утверждение о существовании ε-аппроксимации (см., например [26, 70, 90]).

Свойство 1.3.17. *Пусть (X,ϱ) - метрическое пространство, Y - нормированное пространство. Для всякого полунепрерывного сверху мультиотображения $\mathcal{F} : X \to Cv(Y)$ и $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ такое, что*

(i) *для каждого $x \in X$ найдется $x' \in X$ такое, что $\varrho(x,x') < \varepsilon$ и*

$$f_\varepsilon(x) \cup \mathcal{F}(x) \subset V_\varepsilon(\mathcal{F}(x'));$$

(ii)

$$f_\varepsilon(X) \subset co\,\mathcal{F}(X)$$

.

Определение 1.3.14. *Однозначная ε-аппроксимация, удовлетворяющая (ii) Свойства 1.3.17, называется регулярной.*

Тот факт, что отображение $f : X \to Y$ является ε–аппроксимацией мультиотображения $\mathcal{F} : X \to P(Y)$, обозначается символом $f \in a(\mathcal{F},\varepsilon)$.

Напомним следующие важные свойства однозначных аппроксимаций (см., например [26, 70]).

Свойство 1.3.18. *Пусть $\Sigma : X \to K\,(Y)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение.*

(i) *Пусть X_1 - компактное подмножество X. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\sigma \in a(\Sigma, \delta)$ следует, что $\sigma_{|X_1} \in a\left(\Sigma_{|X_1}, \varepsilon\right)$;*

(ii) *Пусть X - компактное, Z - метрическое пространство и $\varphi : Y \to Z$ - непрерывное отображение. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\sigma \in a(\Sigma, \delta)$ следует, что $\varphi \circ \sigma \in a(\varphi \circ \Sigma, \varepsilon)$.*

Свойство 1.3.19. *(см. [121]). Пусть X, X', Z - метрические пространства; $f : X \to X'$ и $\varphi : Z \to X'$ - непрерывные отображения; $\Sigma : X \to K(Z)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение. Предположим, что $X_1 \subseteq X$ - компактное подмножество такое, что*

$$Coin(f, \varphi \circ \Sigma) \cap X_1 = \emptyset,$$

где $Coin(f, \varphi \circ \Sigma) = \{x \in X : f(x) \in \varphi \circ \Sigma(x)\}$ является множеством точек совпадения. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$, то

$$Coin(f, \varphi \circ \sigma_\varepsilon) \cap X_1 = \emptyset$$

Доказательство. Предположим противное, что существуют последовательности $\{x_n\} \subset X_1$ и $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$ такие, что

$$f(x_n) = \varphi\sigma_{\varepsilon_n}(x_n), \tag{1.3.1}$$

где $\sigma_{\varepsilon_n} \in a(\Sigma, \varepsilon_n)$.
Из Свойства 1.3.18 мы можем предполагать (без потери общности), что отображения $\varphi\sigma_{\varepsilon_n|X_1}$ образуют последовательность δ_n-аппроксимаций $\varphi\Sigma_{|X_1}$, где $\delta_n \to 0$ и отсюда

$$(x_n, \varphi\sigma_{\varepsilon_n}(x_n)) \in O_{\delta_n}\left(\Gamma_{\varphi\Sigma_{|X_1}}\right).$$

График полунепрерывного сверху мультиотображения $\varphi\Sigma_{|X_1}$ является компактным множеством (см. Свойство 1.3.6), и поэтому, мы снова можем предполагать (без потери общности), что

$$(x_n, \varphi\sigma_{\varepsilon_n}(x_n)) \underset{n\to\infty}{\to} (x_0, y_0) \in \Gamma_{\varphi\Sigma_{|X_1}}$$

т.е. $y_0 \in \varphi\Sigma(x_0)$.
Приходя к пределу в (1.3.1) получаем, что

$$f(x_0) = y_0 \in \varphi\Sigma(x_0),$$

т.е. $x_0 \in Coin(f, \varphi\Sigma)$, что есть противоречие. □

Наша задача теперь - описать класс мультиотображений с невыпуклыми значениями, которые допускают однозначные аппроксимации. Для этого, введем следующие понятия.

Определение 1.3.15. *(см. [88]). Компактное метрическое пространство A называется R_δ-множеством, если существует убывающая последовательность $\{A_n\}$ компактных стягиваемых множеств такая, что*

$$A = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

Отметим, что R_δ-множество может не быть стягиваемым (см. пример в [70]).

Определение 1.3.16. *(см. [118]). Непустое компактное подмножество метрического пространства X называется асферичным, если для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \epsilon)$ такое, что для всякого $n = 0, 1, ...$ любое непрерывное отображение $g : S^n \to U_\delta(A)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\widetilde{g} : B^{n+1} \to U_\epsilon(A)$, где*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}, \quad B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}.$$

Определение 1.3.17. *Подмножество A топологического пространства X называется ретрактом пространства X, если существует непрерывное отображение (ретракт) $r : X \to A$, сужение которого на A является тождественным, т.е. $r(x) = x$ для всех $x \in A$.*

Из Теоремы Титце-Дугунджи (см., например [28]) следует, что каждое замкнутое выпуклое подмножество метризуемого локально выпуклого топологического векторного пространства является ретрактом этого пространства.

Определение 1.3.18. *Подмножество A топологического пространства X называется окрестностным ретрактом, если существует ретракт $r : U(A) \to A$, где $U(A)$ - некоторая окрестность множества A.*

Определение 1.3.19. *Вложением пространства X в пространство Y является отображение $h : X \to Y$ со свойством:*

(i) $h(X) \subset Y$ *замкнуто;*

(ii) *отображение* $\hat{h} : X \to h(X)$ *является гомеоморфизмом.*

Определение 1.3.20. *Пространство* X *называется абсолютным ретрактом (или* AR*–пространством), если для каждого метрического пространства* Y *и любого вложения* $h : X \to Y$ *множество* $h(X)$ *является ретрактом пространства* Y*. Если множество* $h(X)$ *является окрестностным ретрактом, то пространство* X *называется абсолютным окрестностныи ретрактом (или* ANR*–пространством).*

Отметим, что класс ANR-пространств достаточно широк. Например, объединение конечных замкнутых выпуклых подмножеств нормированного пространства является ANR–пространством. В частности, каждый конечный многогранник является ANR-пространством.

Кроме того, конечномерное компактное пространство является ANR-пространством тогда и только тогда когда оно является локально стягиваемым (см. [28]). В частности, из Теоремы вложения Whitney (см., например [85]) вытекает, что каждое компактное конечномерное многообразие является ANR-пространством.

Важным фактом является то, что для компактных подмножеств ANR-пространства понятия асферичного множества и R_δ–множества совпадают:

Свойство 1.3.20. *(см. [88]). Если* M *- компактное подмножество* ANR*–пространства, то следующие свойства эквивалентны:*

(i) M *является* R_δ*–множеством;*

(ii) M *является асферичным.*

Пусть X, Y - метрические пространства.

Определение 1.3.21. *Полунепрерывное всерху мультиотображение* $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ *называется* J*–мультиотображением (или* $\mathcal{F} \in J(X, Y)$*), если каждое множество* $\mathcal{F}(x)$, $x \in X$*, является асферичным.*

Свойство 1.3.21. *Пусть* Y *-* ANR*–пространство. Тогда полунепрерывное сверху мультиотображение* $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ *называется* J*–мультиотображением в каждом следующем случае:*
для каждого $x \in X$ *множество* $\mathcal{F}(x)$ *является*

(*i*) *выпуклым;*

(*ii*) *AR-пространством;*

(*iii*) *стягиваемым множеством;*

(*iv*) *R_δ–множеством.*

В частности, каждое непрерывное однозначное отображение $f : X \to Y$ является J–мультиотображением.

Определение 1.3.22. *Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ называется аппроксимируемым, если для любого $\varepsilon > 0$ оно обладает однозначной ε–аппроксимацией и, кроме того, существует $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для любых δ–аппроксимаций $f_\delta, \widetilde{f}_\delta : X \to Y$ мультиотображения $\mathcal{F}$ $(0 < \delta < \delta_\varepsilon)$ существует такое непрерывное отображение $h : X \times [0,1] \to Y$, что*

(*i*) $h(x,0) = f_\delta(x), \;\; h(x,1) = \widetilde{f}_\delta(x) \quad$ *для всех* $\;x \in X$;

(*ii*) $h(\cdot,\lambda) \in a(\mathcal{F},\varepsilon)$ *для каждого* $\lambda \in [0,1]$.

Основным свойством J–мультиотображений является следующее утверждение (см. [72, 70, 118]).

Свойство 1.3.22. *Пусть X - компактное ANR–пространство, Y - метрическое пространство. Тогда каждое J–мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ является аппроксимируемым.*

Определение 1.3.23. *Символом $CJ(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ мы обозначаем совокупность всех мультиотображений $G\colon \mathcal{X} \to K(\mathcal{Z})$, которые могут быть представлены в виде композиции $G = \varphi \circ \Sigma$, где $\Sigma \in J(\mathcal{X},\mathcal{X}')$ для некоторого метрического пространства $\mathcal{X}'$ и $\varphi\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{Z}$ - непрерывное отображение. Композиция $\varphi \circ \Sigma$ называется разложением мультиотображения G.*

Определение 1.3.24. *Символ $J^c(X,Y)$ обозначает совокупность всех мультиотображений $F\colon X \to K(Y)$, которые могут быть представлены в виде композиции*

$$F = \Sigma_q \circ \cdots \circ \Sigma_1,$$

где $\Sigma_i \in \; J(X_{i-1},X_i)$, $i = 1 \cdots q$, $X_0 = X$, $X_q = Y$, и X_i $(0 < i < q)$ - нормированные пространства. Композиция $\Sigma_q \circ \cdots \circ \Sigma_1$ называется разложением мультиотображения G.

Отметим (см. [70]), что одно мультиотображение может иметь различные разложения и $J(X,Y) \subset CJ(X,Y) \subset J^c(X,Y)$.

1.4 Топологическая степень

Введем в этом параграфе понятие топологической степени для $CJ-$мультиотображений. Топологическая степень для J^c-мультиотображений определяется аналогично.

Пусть $X \subseteq Y$ - некоторые множества и $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ - мультиотображение. Точка $x \in X$ называется*неподвижной точкой* мультиотображения $\mathcal{F}$, если $x \in \mathcal{F}(x)$. *Множество всех неподвижных точек* $\mathcal{F}$ обозначается символом $Fix\mathcal{F}$.

Теперь пусть E - банахово пространство и $X \subseteq E$. Каждое мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(E)$ порождает мультиотображение $\Phi : X \to P(E)$,

$$\Phi(x) = x - \mathcal{F}(x),$$

которое называется *многозначным векторным полем* или *мультиполем*, соответствующим $\mathcal{F}$. Обозначая $i : X \to E$ отображение вложения, мы перепишем Φ в виде

$$\Phi = i - \mathcal{F}.$$

Если Λ - пространство параметров и $\mathcal{G} : X \times \Lambda \to P(E)$ - семейство мультиотображений, тогда $\Psi : X \times \Lambda \to P(E)$,

$$\Psi(x, \lambda) = x - \mathcal{G}(x, \lambda),$$

называется *семейством мультиполей.*

Точка $x \in \Phi(x)$ такая, что

$$0 \in \Phi(x)$$

называется *особой точкой* мультиполя Φ. Ясно, что точка x является особой точкой мультиполя $\Phi = i - \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиотображения $\mathcal{F}$.

В дальнейшем нам понадобится понятие классической топологической степени Брауэра для непрерывных однозначных отображений в конечномерном пространстве (см., например [42, 101, 144]).

Теперь, пусть $U \subset E$ - ограниченное открытое подмножество, замыкание и граница которого обозначаются $\overline{U}$ и ∂U, соответственно. Пусть $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E)$ - компактное CJ–мультиотображение такое, что

$$Fix\mathcal{F} \cap \partial U = \emptyset. \tag{1.4.1}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\mathcal{F} = (\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}})$ является *конечномерным*, т.е. существует конечномерное подпространство $E' \subset E$ такое, что $\mathcal{F}(\overline{U}) \subset E'$. Предположим (без потери общности), что множество $U' = U \cap E'$ непусто.

Нетрудно видеть, что $Fix\mathcal{F}$ является компактным подмножеством множества U'.

Лемма 1.4.1. *Существует $\kappa_0 > 0$ такое, что если $\mathcal{O}_\kappa$ является κ-окрестностью множества $Fix\mathcal{F}$ в E', где $0 < \kappa < \kappa_0$, то $\overline{\mathcal{O}}_\kappa \subset U'$ и мультиотображение $\widetilde{\mathcal{F}}$ аппроксимируемо на $\overline{\mathcal{O}}_\kappa$.*

Доказательство. Существует открытая окрестность $\mathcal{N} \subset U'$ множества $Fix\mathcal{F}$ такая, что $\overline{\mathcal{N}}$ является ANR-пространством. В самом деле, в качестве $\mathcal{N}$, мы можем взять конечное объединение открытых шаров в E', покрывающих $Fix\mathcal{F}$. Тогда из Свойств 1.3.18(i) и 1.3.22 следует, что каждая κ-окрестность $\mathcal{O}_\kappa$ множества $Fix\mathcal{F}$ такая, что $\overline{\mathcal{O}}_\kappa \subset \mathcal{N}$ является искомой. □

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.4.2. *Если $\mathcal{O}_\kappa$ является κ-окрестностью множества $Fix\mathcal{F}$, удовлетворяющей условиям Леммы 1.4.1, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждой ε-аппроксимации $f_\varepsilon : \overline{\mathcal{O}}_\kappa \to Z$ мультиотображения $\widetilde{F}$, где*

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *отображение* $\varphi \circ f_\varepsilon : \overline{\mathcal{O}}_\kappa \to E$ *не имеет неподвижных точек* $(x \neq \varphi \circ f_\varepsilon(x))$ *на* $\partial\mathcal{O}_\kappa$.

Эта лемма нам позволяет определить топологическую степень для мультиполя, соответствующего конечномерному CJ–мультиотображению, следующим образом.

Определение 1.4.1. *Пусть* $\mathcal{F} = (\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}}) : \overline{U} \to K(E)$ *- компактное конечномерное* CJ*–мультиотображение, удовлетворяющее (1.4.1). Под топологической степенью*

$$deg(i - \mathcal{F}, \overline{U})$$

мультиполя $i - \mathcal{F}$ *на* $\overline{U}$ *мы понимаем топологическую степень однозначного поля*

$$deg(i - \varphi \circ f_\varepsilon, \overline{\mathcal{O}}_\kappa),$$

где $\mathcal{O}_\kappa$ *- окрестность множества* $Fix\mathcal{F}$*, удовлетворяющая условиям Леммы 1.4.1 и* f_ε *-* ε*-аппроксимация* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *при достаточно малых* $\varepsilon > 0$.

Используя элементарные свойства топологической степени Брауэра нам нетрудно проверить, что это определение корректно опрелелено, т.е. значение $deg(i - \mathcal{F}, \overline{U})$ не зависит от выбора окрестности $\mathcal{O}_\kappa$ и ε-аппроксимации f_ε (при достаточно малых κ и ε). В то же время, отметим, что $deg(i - \mathcal{F}, \overline{U})$ зависит от разложения $(\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}})$: одинаковое мультиотображение $\mathcal{F}$ может обладать различными разложениями и топологические степени, соответсвующие этим раэложениям, могут быть (вообще говоря) различны (см. например [70]).

Теперь, рассмотрим случай, когда $\mathcal{F} = (\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}}) : \overline{U} \to K(E)$ является произвольным компактным CJ–мультиотображением, удовлетворяющим условию (1.4.1).

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1.4.3. *Если* $\Phi = i - \mathcal{F}$ *является мультиполем, соответствующим мультиотображению* $\mathcal{F}$*, то множество* $\Phi(\partial U)$ *замкнуто в* E.

Так как множество $\Phi(\partial U)$ не содержит нулей, то значение

$$\delta_0 = dist(0, \Phi(\partial U))$$

положительно.

Возьмем компактное множество $K = \overline{\mathcal{F}(\overline{U})}$ и выбираем $0 < \delta < \delta_0$, конечномерное подпространство $E' \subset E$ и непрерывное отображение $\pi : K \to E'$ такие, что

$$\|x - \pi(x)\| < \delta. \tag{1.4.2}$$

В качестве отображения π мы можем взять проекцию Шаудера (см., например [110, 101]).

Теперь определим конечномерное CJ–мультиотображение $\mathcal{F}' : \overline{U} \to K(E)$,

$$\mathcal{F}' = (\pi\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}}),$$

которое называется конечномерной аппроксимацией $\mathcal{F} = (\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}})$.

Определение 1.4.2. *Под топологической степенью*

$$deg(i - \mathcal{F}, \overline{U})$$

мультиполя $i - \mathcal{F}$ понимаем топологическую степень его конечномерной аппроксимации:

$$deg(i - \mathcal{F}', \overline{U}).$$

Мы снова можем доказать, что значение $deg(i - \mathcal{F}, \overline{U})$ не зависит от выбора конечномерного пространства E' и проекции π.

В дальнешем, через символ $CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$ мы обозначаем совокупность всех компактных CJ–мультиотображений $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E)$, удовлетворяющих условию (1.4.1).

Опишем теперь основные ствойства топологической степени, определенной выше. Для этого, введем следующее определение.

Определение 1.4.3. *Мультиотображения* $\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_1 \in CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$;

$$\mathcal{F}_0 = (\varphi_0 \circ \widetilde{\mathcal{F}}_0),\ \ \mathcal{F}_1 = (\varphi_1 \circ \widetilde{\mathcal{F}}_1)$$

и соответствующие мультиполя $\Phi_0 = i - \mathcal{F}_0,\ \Phi_1 = i - \mathcal{F}_1$ *называются гомотопическими*

$$\Phi_0 \sim \Phi_1,$$

если существуют мультиотображение $H \in J(\overline{U} \times [0,1], Z)$ *и непрерывное отображение* $k : Z \times [0,1] \to E$, *удовлетворяющие условиям:*

(i) $H(\cdot, 0) = \widetilde{\mathcal{F}}_0,\ H(\cdot, 1) = \widetilde{\mathcal{F}}_1$;

(ii) $k(\cdot, 0) = \varphi_0,\ k(\cdot, 1) = \varphi_1$;

(iii) *мультиотображение* $k \circ H : \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$,

$$(k \circ H)(x, \lambda) = k(H(x, \lambda), \lambda) \quad \text{для всех } (x, \lambda) \in \overline{U} \times [0,1],$$

компактно и не имеет неподвижных точек на $\partial U \times [0,1]$:

$$x \notin H(x, \lambda), \quad \forall (x, \lambda) \in \partial U \times [0,1].$$

Мультиотображение $k \circ H$ *называется гомотопией в классе* $CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$ *соединяющей мультиотображения* $\mathcal{F}_0$ *и* $\mathcal{F}_1$ *(и соответствующие мультиполя* Φ_0 *и* Φ_1*).*

1) *Свойство гомотопической инвариантности.* Пусть

$$\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_1 \in CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$$

и соответствующие мультиполя $\Phi_0 = i - \mathcal{F}_0$ и $\Phi_1 = i - \mathcal{F}_1$ гомотопны. Тогда

$$\deg(\Phi_0, \overline{U}) = \deg(\Phi_1, \overline{U}).$$

Напомним два достаточных условий для гомотопических мультиполей. Первое условие показано устойчивость топологической степени под “малыми” возмущениями.

Лемма 1.4.4. *Пусть* $\mathcal{F}_0 \in CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$ *и* $\widetilde{\mathcal{F}} : \overline{U} \to K(E)$ *такие, что*

$$\left\|\widetilde{\mathcal{F}}(x)\right\| \leq \min\{\|z\| \ : z \in \Phi_0(x)\}, \ \forall x \in \partial U \ ,$$

где $\Phi_0 = i - \mathcal{F}_0$.
Тогда, для мультиотображения $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \widetilde{\mathcal{F}}$ *имеем* $\mathcal{F}_1 \in CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$ *и*

$$\Phi_1 = i - \mathcal{F}_1 \sim \Phi_0,$$

т.е. $deg(\Phi_0, \overline{U}) = deg(\Phi_1, \overline{U})$.

Второе условие показано гомотопическое свойство мультиполей, котороые не допускают противоположных направлений на ∂U.

Лемма 1.4.5. *Пусть мультиотображения* $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$ *удовлетворяют условию*

$$\frac{z_0}{\|z_0\|} \neq -\frac{z_1}{\|z_1\|}$$

для всех $z_0 \in \Phi_0(x)$, $z_1 \in \Phi_1(x)$, $x \in \partial U$, *где* $\Phi_k = i - \mathcal{F}_k$, $k = 0, 1$.
Тогда, $\Phi_0 \sim \Phi_1$, *т.е.*

$$deg(\Phi_0, \overline{U}) = deg(\Phi_1, \overline{U}) \ .$$

2) *Аддитивная независимость от области.* Пусть$\{U_j\}_{j=1}^m$ - семейство открытых непересакающыхся подмножеств множества U и $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(Y)$ - компактное CJ–мультиотображение, которое не имеет неподвижных точек на $\overline{U} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$. Тогда

$$\deg(i - \mathcal{F}, \overline{U}) = \sum_{j=1}^{m} \deg(i - \mathcal{F}, \overline{U}_j).$$

3) *Принцип сужения отображения.* Пусть $E_1 \subset E$ - замкнутое подпространство и мультиотображение $\mathcal{F} \in CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$ такое, что $\mathcal{F}(\overline{U}) \subset E_1$. Тогда

$$\deg(i - \mathcal{F}, \overline{U}) = \deg_{E_1}(i - \mathcal{F}, \overline{U}_1),$$

где $U_1 = U \cap E_1$ и $\deg_{E_1}$ означает, что степень высчитывается в пространстве E_1.

4) *Принцип неподвижной точки.* Пусть $\mathcal{F} \in CJ_{\partial U}(\overline{U}, E)$ и

$$\deg(i - \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0.$$

Тогда $\emptyset \neq Fix\mathcal{F} \subset U$.

Приведенные выше принципы позволяют проводить простое доказательство многих теорем о неподвижной точке. Например, теорема Боненбласта-Карлина о неподвижной точке (см. [22]).

Свойство 1.4.1. *Пусть M - непустое замкнутое и выпуклое множество пространства E и $\mathcal{F} : M \to K(M)$ - компактное CJ– мультиотображение. Тогда $Fix\mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ имеет разложение $\mathcal{F} = (\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}})$. Возьмем произвольно открытое ограниченное выпуклое множество $U \subset E$, содержащее компактное выпуклое множество $M_1 = \overline{co}\mathcal{F}(M)$. Рассмотрим сужение $\rho : \overline{U} \to M_1$ и мультиотображение $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \circ \rho : \overline{U} \multimap M_1$. Ясно, что $\mathcal{F}_1$ - компактное CJ–мультиотображение с разложением $\mathcal{F}_1 = (\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}} \circ \rho)$ и его неподвижные точки совпадают с неподвижными точками мультиотображения $\mathcal{F}$.

Возьмем произвольно $x_0 \in U$ и рассмотрим деформацию $k : Z \times [0,1] \to E$,

$$k(z, \lambda) = (1 - \lambda)\varphi(z) + \lambda x_0$$

и мультиотображение $H : \overline{U} \times [0,1] \to K(Z)$,

$$H(x, \lambda) = \widetilde{\mathcal{F}} \circ \rho(x), \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Тогда $k \circ H$ определяет гомотопию, соединяющую мультиотображение $\mathcal{F}_1$ и постоянное отображение $H(\cdot, 1) \equiv x_0$. Следовательно,

$$\deg(i - \mathcal{F}_1, \overline{U}) = \deg(i - H(\cdot, 1), \overline{U}) = 1,$$

отсюда следует, что $Fix\mathcal{F}_1 = Fix\mathcal{F}$ непусто. □

Аналогично, мы можем доказать следующие свойства.

Свойство 1.4.2. *Пусть $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E)$ - компактное CJ–мультиотображение, $\Phi = i - \mathcal{F}$ - соответствующее мультиполе. Предположим, что для заданной точки $a \in U$ имеем*

$$\Phi(x) \cap L_x^a = \emptyset, \quad \textit{для каждого } x \in \partial U,$$

где

$$L_x^a = \{y \in E : \ y = \mu(x-a), \ \mu \leq 0\}.$$

Тогда $\deg(\Phi, \overline{U}) = 1$, *и следовательно,* $\emptyset \neq Fix\mathcal{F} \subset U$.

Свойство 1.4.3. *Пусть* U *- открытая ограниченная окрестность нуля и* $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E)$ *- компактное* CJ*–мультиотображение, удовлетворяющее условию*

$$x \notin \lambda\mathcal{F}(x)$$

для всех $x \in \partial U$ *and* $0 < \lambda \leq 1$.
Тогда $\deg(\Phi, \overline{U}) = 1$, *и следовательно,* $\emptyset \neq Fix\mathcal{F} \subset U$.

Свойство 1.4.4. *Пусть* U *- симметричная ограниченная окрестность нуля,* $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E)$ *- компактное* CJ*–мультиотображение такое, что мультиполе* $\Phi = i - \mathcal{F}$ *удовлетворяет условию:*

$$\Phi(x) \cap \mu\Phi(-x) = \emptyset \quad \text{для всех } \ x \in \partial U, \ 0 \leq \mu \leq 1.$$

Тогда

$$\deg(\Phi, \overline{U}) \equiv 1 \ (mod\ 2),$$

и следовательно, $\emptyset \neq Fix\mathcal{F} \subset U$.

1.5 Индекс совпадения для включений с линейными фредгольмовыми операторами нулевого индекса

Применяя конструкцию, введенную J. Mawhin'ом (см. [65, 115]) мы напомним в этом параграфе индекс совпадения для $CJ-$включений с линейными фредгольмовыми операторами нулевого индекса.

Пусть E_1 и E_2 - банаховы пространства и $L : Dom\, L \subseteq E_1 \to E_2$ - линейный фредгольмов оператор нулевого индекса.

Пусть $U \subset E_1$ - открытое ограниченное множество.

Определение 1.5.1. *CJ–мультиотображение $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E_2)$ называется L-компактным, если композиция*

$$(\Lambda\Pi + K_{P,Q}) \circ \mathcal{F} : \overline{U} \to K(E_1)$$

является компактным мультиотображением, где операторы Λ, Π и $K_{P,Q}$ определены в параграфе 1.2.

Замечание 1.5.1. *Определение L–компактного мультиотображения не зависит от выбора проекций $P : E_1 \to E_1$, $Q : E_2 \to E_2$, и изоморфизма $\Lambda : Coker\, L \to Ker\, L$.*

Определение 1.5.2. *Точка $x \in Dom\, L$ называется точкой совпадения оператора L и мультиотображения $\mathcal{F}$, если*

$$Lx \in \mathcal{F}(x).$$

Множество всех точек совпадения L и $\mathcal{F}$ обозначается символом $Coin\,(L, \mathcal{F})$.

Рассмотрим теперь мультиотображение $\mathcal{G} : \overline{U} \to K(E_1)$ типа

$$\mathcal{G}(x) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q}) \circ \mathcal{F}(x), \quad x \in \overline{U}. \tag{1.5.1}$$

Ясно, что множество $Fix\, \mathcal{G}$ совпадает с множеством $Coin\,(L, \mathcal{F})$.

Лемма 1.5.1. *Мультиотображение $\mathcal{G}$, определенное в (1.5.1), является компактным CJ–мультиотображением.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\mathcal{F} = (\varphi \circ \widetilde{\mathcal{F}})$, $\widetilde{\mathcal{F}} : \overline{U} \to K(Z)$ и $\varphi : Z \to E_1$, - разложение мультиотображения $\mathcal{F}$. Нетрудно видеть, что мультиотображение $\widehat{F} : \overline{U} \to K(E_1 \times Z)$,

$$\widehat{F}(x) = \{x\} \times \widetilde{F}(x)$$

является J–мультиотображением.

Далее, определим отображение $\Psi : E_1 \times Z \to E_1$,

$$\Psi(x, z) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(z).$$

Тогда $\mathcal{G}$ может быть разложено в виде $(\Psi \circ \widehat{F})$. Компактность мультиотображения $\mathcal{G}$ следует из L–компактности мультиотображения $\mathcal{F}$ и того, что проекция P принимает конечномерные значения. □

Обозначим через $CJ^L(\overline{U}, E_2)$ класс всех L–компактных CJ–мультиотображений $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E_2)$. Подкласс $CJ^L(\overline{U}, E_2)$, содержащий все мультиотображения $\mathcal{F}$ такие, что

$$Coin\,(L, \mathcal{F}) \bigcap (\partial U \cap Dom\, L) = \emptyset,$$

обозначается символом $CJ^L_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$.

Определение 1.5.3. *Под индексом совпадения Мавена*

$$Ind(L, \mathcal{F}, \overline{U})$$

пары $(L, \mathcal{F})$, *где* $\mathcal{F} \in CJ^L_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ *мы понимаем топологическую степень* $\deg(\Phi, \overline{U})$ *мультиполя* $\Phi = i - \mathcal{G}$, *соответствующего мультиотображению* $\mathcal{G} : \overline{U} \to K(E_1)$, *определенному в (1.5.1).*

Приведем основные свойства индекса совпадения Мавена.

Определение 1.5.4. *Мультиотображения* $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1 \in CJ^L_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$,

$$\mathcal{F}_0 = (\varphi_0 \circ \widetilde{\mathcal{F}}_0),\ \mathcal{F}_1 = (\varphi_1 \circ \widetilde{\mathcal{F}}_1)$$

называются L*-гомотопическими*

$$\mathcal{F}_0 \overset{L}{\sim} \mathcal{F}_1,$$

если существуют мультиотображение $H \in J(\overline{U} \times [0, 1], Z)$ *и непрерывное отображение* $k : Z \times [0, 1] \to E_2$ *такие, что:*

(*i*) $H(\cdot,0)=\widetilde{\mathcal{F}}_0,\ H(\cdot,1)=\widetilde{\mathcal{F}}_1$;

(*ii*) $k(\cdot,0)=\varphi_0,\ k(\cdot,1)=\varphi_1$;

(*iii*) *мультиотображение* $k\circ H:\overline{U}\times[0,1]\to K(E_2)$,

$$(k\circ H)(x,\lambda)=k(H(x,\lambda),\lambda)\quad \text{для всех}\ \ (x,\lambda)\in\overline{U}\times[0,1],$$

является L*–компактным и*

$$Lx\notin H(x,\lambda),\quad \forall(x,\lambda)\in(\partial U\cap Dom\,L)\times[0,1].$$

Свойство 1.5.1. *Если* $\mathcal{F}_0\overset{L}{\sim}\mathcal{F}_1$, *то*

$$Ind(L,\mathcal{F}_0,\overline{U})=Ind(L,\mathcal{F}_1,\overline{U}).$$

Свойство 1.5.2. *Пусть* $\{U_j\}_{j=1}^m$ *- семейство неперекающихся открытых подмножеств множества* U *и* $\mathcal{F}\in CJ(\overline{U},E_2)$ *-* L*–компактное мультиотображение такое, что*

$$Coin(L,\mathcal{F})\bigcap\Big((\overline{U}\setminus\bigcup_{j=1}^m U_j)\cap Dom\,L\Big)=\emptyset.$$

Тогда

$$Ind(L,\mathcal{F},\overline{U})=\sum_{j=1}^m Ind(L,\mathcal{F},\overline{U}_j).$$

Свойство 1.5.3. *Пусть* $\mathcal{F}\in CJ^L_{\partial U}(\overline{U},E_2)$ *и*

$$Ind(L,\mathcal{F},\overline{U})\neq 0.$$

Тогда $\emptyset\neq Coin(L,\mathcal{F},\overline{U})\subset(U\cap Dom\,L)$.

В качестве применения приведенных свойств выше мы докажем следующую теорему о существовании точек совпадения.

Теорема 1.5.1. *Пусть* $\mathcal{F}:\overline{U}\to K(E_2)$ *-* CJ*–мультиотображение такое, что мультиотображения* $\Pi\circ\mathcal{F}$ *и* $K_{P,Q}\circ\mathcal{F}$ *компактны и выполнены следующие условия:*

(i) $Lx\notin\lambda\mathcal{F}(x)$ *для всех* $\lambda\in(0,1]$, $x\in Dom\,L\cap\partial U$;

(ii) $0\notin\Pi\circ\mathcal{F}(x)$ *для всех* $x\in Ker\,L\cap\partial U$;

(iii)

$$\deg_{Ker\,L}(\Lambda\Pi \circ \mathcal{F}|_{\overline{U}_{Ker\,L}}, \overline{U}_{Ker\,L}) \neq 0,$$

где символ $\deg_{Ker\,L}$ *обозначает топологическая степень, высчитывающая в* $Ker\,L$, *и* $\overline{U}_{Ker\,L} = \overline{U} \cap Ker\,L$.

Тогда $\emptyset \neq Coin(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \subset (U \cap Dom\,L)$.

Доказательство. Рассмотрим деформацию $\Psi : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_1)$,

$$\Psi(x, \lambda) = Px + (\Lambda\Pi + \lambda K_{P,Q}) \circ \mathcal{F}(x), \quad (x, \lambda) \in \overline{U} \times [0,1].$$

Для $\lambda \in (0,1]$ и $x \in Dom\,L \cap \partial U$, из условия (i) следует, что

$$x \notin \Psi(x, \lambda).$$

С другой стороны, условие (ii) вытекает, что

$$x \notin \Psi(x, 0)$$

для всех $x \in Dom\,L \cap \partial U$.

Поэтому, Ψ является гомотопией, и следовательно,

$$Ind(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \deg(i - P - \Lambda\Pi \circ \mathcal{F}, \overline{U}).$$

Применяя принцип сужения отображения получаем, что

$$\deg(i - P - \Lambda\Pi \circ \mathcal{F}, \overline{U}) = \deg_{Ker\,L}(-\Lambda\Pi \circ \mathcal{F}|_{\overline{U}_{Ker\,L}}, \overline{U}_{Ker\,L}).$$

Теперь используя условие (iii) и Свойство 1.5.3 мы завершим наше доказательство. □

1.6 Индекс совпадения для включений с линейными фредгольмовыми операторами положительного индекса

Напомним теперь определение индекса совпадения для включений с линейными фредгольмовыми операторами положительного индекса, представленное в [106] (см. также [60]-[62]). Сначала, повторяем определение

топологической степени непрерывных отображений между двумя конечномерными пространствами (для определений гомотопических групп и когомотопических множеств мы ссылаем на книги [86, 135]).

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ - открытое ограниченное множество и $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ - непрерывное отображение, где $m \geq n \geq 1$. Предположим, что $f(x) \neq 0$ для всех $x \in \partial U$. Следовательно, растояние $d(0, f(\partial U))$ от 0 до множества $f(\partial U)$ в $\mathbb{R}^n$ положительно. Пусть $\rho = \frac{1}{2}d(0, f(\partial U))$, тогда

$$f(\partial U) \subset \mathbb{R}^n \setminus B^n(0, \rho).$$

Отсюда, отображение

$$f\colon \big(\overline{U}, \partial U\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B^n(0, \rho)\,\big)$$

порождает отображение между когомотопическими множествами:

$$f^\sharp\colon \pi^n\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B^n(0, \rho)\,\big) \longrightarrow \pi^n\big(\overline{U}, \partial U\big).$$

Рассмотрим последовательность отображений

$$\pi^n\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B^n(0, \rho)\,\big) \xrightarrow{f^\sharp} \pi^n\big(\overline{U}, \partial U\big) \xleftarrow{i_1^\sharp}$$
$$\xleftarrow{i_1^\sharp} \pi^n\big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus U\big) \xrightarrow{i_2^\sharp} \pi^n\big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B^m(0, r)\,\big),$$

где $r > 0$ такое, что $U \subset B^m(0, r)$,

$$i_1\colon \big(\overline{U}, \partial U\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus U\big),$$

и

$$i_2\colon \big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B^m(0, r)\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus U\big)$$

- отображения вложения.

Отображение $i_1^\sharp$ биективно, следовательно в связи с отношениями

$$\pi^n(S^n) = \pi^n\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B^n(0, \rho)\big) \;\text{ и }\; \pi^n(S^m) = \pi^n\big(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B^m(0, r)\big),$$

отображение

$$\omega_f = i_2^\sharp \circ (i_1^\sharp)^{-1} \circ f^\sharp \colon \pi^n(S^n) \longrightarrow \pi^n(S^m)$$

корректно определено и не зависит от выбора $r > 0$.

Определение 1.6.1. *Элемент* $\omega_f(\mathbf{1}) \in \pi^n(S^m) = \pi_m(S^n)$ *называется* топологической степенью *отображения* f *на* $\overline{U}$ *и обозначается символом* $deg\,(f, \overline{U})$, *где* $\mathbf{1}$ *- гомотопический класс тождественного отображения* $id\colon S^n \to S^n$ *в* $\pi^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример (см. [63, Пример 4.1]).

Пример 1.6.1. *Пусть* $U = B^m$ *и* $\overline{f} = f_{|_{S^{m-1}}} \colon S^{m-1} \to \mathbb{R}^n \setminus B^n(0,\rho)$, *где* ρ *выбрано как выше. Рассмотрим диаграмм*

$$\begin{tikzcd}
\pi^n(S^n) \cong \pi^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B^n(0,\rho)) \arrow[r, "f^\sharp"] & \pi^n(\overline{B^m}, S^{m-1}) \cong \pi^n(S^m) \arrow[r, "="] & \pi_m(S^n) \\
\pi^{n-1}(S^{n-1}) \cong \pi^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus B^n(0,\rho)) \arrow[r, "\overline{f}^\sharp"] \arrow[u, "\delta_1", "\cong"'] & \pi^{n-1}(S^{m-1}) \arrow[r, "="] \arrow[u, "\delta"] & \pi_{m-1}(S^{n-1}) \arrow[u, "\Sigma"]
\end{tikzcd}$$

где δ, δ_1 *- кограничные операторы и* Σ *- гомоморфизм надстройки. Этот диаграмм коммутативен. Следовательно, если* $f\colon (\overline{B^m}, S^{m-1}) \to (\mathbb{R}^n, S^{n-1})$, *то* $deg(f, \overline{B^m}) = \Sigma([\overline{f}]) \in \pi_m(S^n)$, *где* $[\overline{f}] \in \pi_{m-1}(S^{n-1})$ *является гомотопическим классом отображения* $\overline{f}\colon S^{m-1} \to S^{n-1}$.

Теперь пусть X, Y - банаховы пространства; $U \subset X$ - открытое ограниченное множество; $L\colon X \to Y$ - линейное фредгольмово отображение индекса $q \geq 0$ и $F \in CJ(\overline{U}, Y)$ - компактное мультиотображение такое, что $Lx \notin F(x)$ для всех $x \in \partial U$. Пусть $C = \{x \in U\colon Lx \in F(x)\}$ - множество точек совпадения L и F. Так как сужение $L_{|_{\overline{U}}}$ собствено, множество C компактно. Отсюда, существует открытое ограниченное множество N такое, что

(a) $C \subset N \subset \overline{N} \subset U$;

(b) $\overline{N}$ является компактным $ANR-$пространством.

Пусть $\delta = \frac{1}{2} dist_Y\big(0, (L-F)(\partial N)\big)$. Для $\varepsilon \in (0, \delta]$ пусть $p_\varepsilon \colon \overline{F(N)} \to Y$ - проекция Шаудера из $\overline{F(N)}$ в конечномерное подпространство Z пространства Y такая, что $\|p_\varepsilon y - y\| < \varepsilon$ для всех $y \in \overline{F(N)}$. Обозначим через W' конечномерное подпространство пространства $Im\, L$ такое, что $Z \subset W = W' \oplus Im(Q_L)$. Пусть $T = L^{-1}(W)$, $N_T = N \cap T$. Ясно, что $L_{|_T} \colon T \to W$ является фредгольмовым оператором индекса q и

$$dimT = dimW + q.$$

Не потеряя общности предположим, что $dimW = n \geq q + 2$. Тогда индекс совпадения $Ind(L, F, \overline{U})$ определяется следующим образом:

Определение 1.6.2.

$$Ind(L, F, \overline{U}) := deg(L - p_\varepsilon \circ f_\kappa, \overline{N_T}) \in \pi^n(S^{n+q}) \cong \Pi_q,$$

где f_κ является $\kappa-$аппроксимацией мультиотображения F на $\overline{N_T}$ при этом $\kappa \in (0, \varepsilon)$ - достаточно малое и Π_q обозначает $q-$ая стабильная гомотопическая группа сфер.

Индекс совпадения, определенное выше, имеет следующие свойства.

(i) (Существование точки совпадения) Если $Ind(L, F, \overline{U}) \neq 0 \in \Pi_q$, то существует $x \in U$ такой, что $Lx \in F(x)$.

(ii) (Локализация) Если $U' \subset U$ - открытое множество и

$$C := \{x \in U \colon Lx \in F(x)\} \subset U',$$

то $Ind(L, F, \overline{U}) = Ind(L, F, \overline{U'})$.

(ii) (Аддитивность) Если U_1, U_2 - открытые ограниченные непересекающихся подмножества пространства X и $U = U_1 \cup U_2$, то

$$Ind(L, F, \overline{U}) = Ind(L, F, \overline{U_1}) + Ind(L, F, \overline{U_2}).$$

(iii) (Сужение) Если $F(\overline{U})$ принадлежит подпространству Y' пространства Y, то

$$Ind(L, F, \overline{U}) = Ind(L, F, \overline{U_T}),$$

где $U_T = U \cap T$, $T = L^{-1}(Y')$.

(iii) (Гомотопическая инвариантность) Если существует компактное $CJ-$мультиотображение $\Phi\colon \overline{U} \times [0,1] \to K(Y)$ такое, что $Lx \notin G(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in \partial U \times [0,1]$, то

$$Ind\big(L, \Phi(\cdot, 0), \overline{U}\big) = Ind\big(L, \Phi(\cdot, 1), \overline{U}\big).$$

1.7 Ориентированный индекс совпадения для включений с нелинейными фредгольмовыми операторами нулевого индекса

Представляем теперь понятие ориентированного индекса совпадения, введенного в работе В. Обуховского, П. Дзекка и В. Звягина (см. [148, 121]).

Пусть E и E' - банаховы пространства; Y - открытое ограниченное множество $U \subseteq E$ (случай (i)) или $U_* \subseteq E \times [0,1]$ (случай (ii)).

Определение 1.7.1. *Отображение $f : \overline{Y} \to E'$, мультиотображение $G = (\varphi \circ \Sigma) \in CJ\left(\overline{Y}, E'\right)$ и пространство $\overline{Y}$ образуют компактную тройку $\left(f, G, \overline{Y}\right)_C$ если выполняются следующие условия:*

$(h1)$ *f - непрерывное собственное отображение, $f_{|Y} \in \Phi_k C^1(Y)$, где $k = 0$ в случае (i), $k = 1$ в случае (ii); и фредгольмова структура на Y, индуцированная отображением f, ориентирована;*

$(h2)$ *мультиотображение G компактно, т.е. $G\left(\overline{Y}\right)$ является относительно компактным в E';*

$(h3)$ $Coin\,(f, G) \cap \partial Y = \emptyset$.

Компактная тройка в конечномерном пространстве.

Пусть тройка $\left(f, G, \overline{Y}\right)_C$, из Свойства 1.2.1 вытекает, что существует открытая окрестность $\mathcal{O} \subset Y$ множества $Q = Coin\,(f, G)$ и $n-$мерное подпространство $E'_n \subset E'$ такие, что $f^{-1}\left(E'_n\right) \cap \mathcal{O} = M$, где M - $n-$мерное многообразие (случай (i)) и $(n+1)-$мерное многообразие (случай (ii)).

Предположим теперь, что мультиотображение $G = \varphi \circ \Sigma$ является конечномерным, т.е. существует конечномерное подпространство $E'_m \subset E'$ такое, что $G\left(\overline{Y}\right) \subset E'_m$. Предположим без потери общности, что $E'_m \subset E'_n$. Тогда, $Q \subset M$. Отметим, что ориентация на Y индусирует ориентацию на M.

Компактная тройка $\left(f, G, \overline{Y}\right)_C$, в которой G является конечномерным, обозначается символом $\left(f, G, \overline{Y}\right)_{C_m}$.

Лемма 1.7.1. *Для $\left(f, G = (\varphi \circ \Sigma), \overline{Y}\right)_{C_m}$, пусть $O_\varkappa$ - $\varkappa-$окрестность множества Q. Тогда, $\Sigma_{|\overline{O}_\varkappa}$ является аппроксимируемым при достаточно малых $\varkappa > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим открытое ограниченное множество N, удовлетворяющее условиям:
i) $Q \subset N \subset \overline{N} \subset M$;
ii) $\overline{N}$ является компактным ANR-пространством.
Отметим, что в качестве множества N мы можем взять конечное объединение шаров, покрывающих множество Q.
Возьмем $\varkappa > 0$ такое, что $O_\varkappa \subset N$. Тогда лемма доказана применением Свойства 1.3.22 и Свойства 1.3.18(i). □

Теперь, возьмем окрестность $O_\varkappa$ такую, что Σ является аппроксимируемым на $\overline{O}_\varkappa$. Из Свойства 1.3.19 имеем

$$Coin\,(f, \varphi \circ \sigma_\varepsilon) \cap \partial O_\varkappa = \emptyset$$

при $\sigma_\varepsilon \in a\left(\Sigma_{|\overline{O}_\varkappa}, \varepsilon\right)$ и при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Поэтому, мы можем рассматривать отображение пар простраств:

$$f - \varphi \circ \sigma_\varepsilon : \left(\overline{O}_\varkappa, \partial O_\varkappa\right) \to \left(E'_n, E'_n \backslash 0\right).$$

Определение 1.7.2. *Ориентированный индекс совпадения конечномерной компактной тройки* $\left(f, G=(\varphi \circ \Sigma), \overline{U}\right)_{C_m}$ *определяется равенством:*

$$Ind\left(f, G=(\varphi \circ \Sigma), \overline{U}\right)_{C_m} := \deg\left(f-\varphi \circ \sigma_{\varepsilon}, \overline{O}_{\varkappa}\right) \tag{1.7.1}$$

где $\varkappa > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *достаточно малые и правая часть равенства (1.7.1) обозначает топологическую степень Брауэра.*

Как показано в [121], что ориентированный индекс совпадения, определенный выше, на зависит от выбора ε-аппроксимации σ_{ε} и окрестности $O_{\varkappa}$.

Компактная тройка в бесконечномерном пространстве

Пусть $\left(f, G=(\varphi \circ \Sigma), \overline{U}\right)_C$ - компактная тройка. Из свойства собственности отображения f и компактности мультиотображения G вытекает:

Свойство 1.7.1. *Мультиотображение* $\Lambda : \overline{Y} \to K\left(E'\right)$, *определенное равенством*

$$\Lambda(y) = f(y) - G(y) \ .$$

отображает каждое замкнутое множество $Y_1 \subset \overline{Y}$, *в замкнутое множество* $\Lambda\left(Y_1\right)$.

Отсюда следует, что для компактной тройки $\left(f, G, \overline{U}\right)_C$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$B_{\delta}(0) \cap \Lambda(\partial U) = \emptyset \tag{1.7.2}$$

где $B_{\delta}(0) \subset E'$ является δ-окрестностью нуля.

Возьмем непрерывное отображение $i_{\delta} : \overline{G\left(\overline{U}\right)} \to E_m$ (где $E_m \subset E$ является конечномерным подпространством) такое, что

$$\left\| i_{\delta}(v) - v \right\| < \delta \tag{1.7.3}$$

для любого $v \in \overline{G\left(\overline{U}\right)}$ (в качестве i_{δ} можем взять проекцию Шаудера).

Теперь, рассмотрим конечномерное мультиотображение $G_m = i_{\delta} \circ \varphi \circ \Sigma$. Из (1.7.2) и (1.7.3) следует, что f, G_m и $\overline{U}$ образуют конечномерную компактную тройку $\left(f, G_m, \overline{U}\right)_{C_m}$.

Определение 1.7.3. *Ориентированный индекс совпадения для компактной тройки* $\left(f, G = (\varphi \circ \Sigma), \overline{U}\right)_C$ *определяется следующим образом:*

$$Ind\ \left(f, G, \overline{U}\right)_C := Ind\ \left(f, G_m, \overline{U}\right)_{C_m}.$$

Как показано в [121] (см. также [109]), что ориентированный индекс совпадения обладает следующими свойствами.

Свойство 1.7.2. *(Существование точки совпадения). Если*

$$Ind\left(f, G, \overline{U}\right)_C \neq 0,$$

то $\emptyset \neq Coin\,(f, G) \subset U$.

Для формулировки свойства топологической инвариантности индекса совпадения мы введем определение.

Определение 1.7.4. *Два компактных тройки*

$$\left(f_0, G_0 = (\varphi_0 \circ \Sigma_0), \overline{U}_0\right)_C \ \ и\ \ \left(f_1, G_1 = (\varphi_1 \circ \Sigma_1), \overline{U}_1\right)_C$$

называются гомотопическими,

$$\left(f_0, G_0 = (\varphi_0 \circ \Sigma_0), \overline{U}_0\right)_C \sim \ \left(f_1, G_1 = (\varphi_1 \circ \Sigma_1), \overline{U}_1\right)_C,$$

если существует компактная тройка $\left(f_*, G_*, \overline{U_*}\right)_C$, *где* $U_* \subset E \times [0,1]$ *- открытое множество, такая, что:*
a) $U_i = U_* \cap (E \times \{i\})$, $i = 0, 1$ *;*
b) $f_{*|\overline{U_i}} = f_i$, $i = 0, 1$ *;*
c) G_* *имеет вид*

$$G_*(x, \lambda) = \varphi_*(\Sigma_*(x, \lambda), \lambda)$$

где $\Sigma_* \in J\left(\overline{U_*}, Z\right)$, $\varphi_* : Z \times [0,1] \to E'$ *- непрерывное отображение и*

$$\Sigma_{*|\overline{U_i}} = \Sigma_i\,, \ \ \varphi_{*|Z\times\{i\}} = \varphi_i\,, \ \ i = 0, 1\,.$$

Свойство 1.7.3. *(Гомотопическая инвариантность). Если*

$$\left(f_0, G_0, \overline{U}_0\right)_C \sim \ \left(f_1, G_1, \overline{U}_1\right)_C\ ,$$

то

$$\left|Ind\ \left(f_0, G_0, \overline{U}_0\right)_C\right| = \left|Ind\ \left(f_1, G_1, \overline{U}_1\right)_C\right|\,.$$

Замечание 1.7.1. *Если фредгольмово отображение f постоянно в гомотопии, т.е. U_* имеет вид $U_* = U \times [0,1]$ где $U \subset E$ - открытое множество и $f_*(x,\lambda) = f(x)$ для всех $\lambda \in [0,1]$, где $f \in \Phi_0 C^1(U)$, то*

$$Ind\left(f, G_0, \overline{U}\right)_C = Ind\left(f, G_1, \overline{U}\right)_C .$$

Свойство 1.7.4. *(Аддитивная зависимость от области) Пусть U_0 и U_1 - открытые непересекающиеся подмножества отктытого ограниченного множества $U \subset E$ и $\left(f, G, \overline{U}\right)_C$ - компактная тройка, такая, что*

$$Coin\,(f,G) \cap \left(\overline{U} \setminus (U_0 \cup U_1)\right) = \emptyset .$$

Тогда

$$Ind\left(f, G, \overline{U}\right)_C = Ind\left(f, G, \overline{U_0}\right)_C + Ind\left(f, G, \overline{U_1}\right)_C .$$

1.8 Фазовое пространство

Будем использовать аксиоматическое определение *фазового пространства* $\mathcal{B}$, введенное J.K.Hale и J.Kato (см. [78, 83]) для исследования функционально-дифференциальных уравнений и включений с бесконечномерными запаздываниями. Пространство $\mathcal{B}$ может быть рассмотрено как линейное топологическое пространство функций, действующих из $(-\infty, 0]$ в гильбертово пространство H, снабженное с полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

Для любой функции $y : (-\infty; T] \to H$ и любого $t \in [0,T]$, y_t означает функция из $(-\infty, 0]$ в H, определенная равенством

$$y_t(\theta) = y(t+\theta),\ \theta \in (-\infty; 0].$$

Предположим, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

($\mathcal{B}1$) Если $y : (-\infty; T] \to H$ такая, что $y_{|_{[0,T]}} \in C([0,T]; H)$ и $y_0 \in \mathcal{B}$, то имеем

(i) $y_t \in \mathcal{B}$ для $t \in [0,T]$;

(ii) функция $t \in [0,T] \mapsto y_t \in \mathcal{B}$ непрерывна;

(iii) $\|y_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t) \sup\limits_{0\leq\tau\leq t} \|y(\tau)\| + N(t)\|y_0\|_{\mathcal{B}}$ для $t \in [0,T]$, где функции $K(\cdot), N(\cdot)\colon [0;\infty) \to [0;\infty)$ не зависят от y, $K(\cdot)$ является положительной и непрерывной, $N(\cdot)$ - ограниченной.

($\mathcal{B}2$) Существует $l > 0$ такое, что

$$\|\psi(0)\|_H \leq l\|\psi\|_{\mathcal{B}}$$

для всех $\psi \in \mathcal{B}$.

Напомним, что под этими аксиомами пространство C_{00} всех непрерывных функций из $(-\infty, 0]$ в H с компактными носителями является подмножеством любого фазового пространства $\mathcal{B}$ (см. [83, Свойство 1.2.1]).

Предположим дополнительно, что

($\mathcal{B}3$) Если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_{00}$ сходится к функции ψ компактно (т.е. равномерно сходится к ψ на каждое компактное подмножество $(-\infty, 0]$), то $\psi \in \mathcal{B}$ и

$$\lim_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Из гипотезы ($\mathcal{B}3$) следует, что банахово пространство $BC((-\infty, 0]; H)$ ограниченных непрерывных функций непрерывно вложено в $\mathcal{B}$.

Приведем теперь примеры фазового пространства, которые удовлетворяют всем свойствам выше.

(1) Для $\nu > 0$, пусть $\mathcal{B} = C_\nu$ - пространство функций $\psi : (-\infty; 0] \to H$ такое, что:

(i) $\psi_{|[-r,0]} \in C([-r, 0]; H)$ для каждого $r > 0$;

(ii) предел $\lim\limits_{\theta\to-\infty} e^{\nu\theta}\|\psi(\theta)\|$ является конечным.

Тогда выбираем

$$\|\psi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-\infty<\theta\leq 0} e^{\nu\theta}\|\psi(\theta)\|.$$

(2) Пусть $\mathcal{B} = C_\rho$ - пространство функций $\psi : (-\infty; 0] \to H$ такое, что

(a) $\psi \in C([-r; 0]; H)$ для некоторого $r > 0$;

(b) ψ является мерой Лебега на $(-\infty; -r)$ и существует положительная интегрируемая по Лебегу функция $\rho : (-\infty; -r) \to \mathbb{R}^+$ такая, что $\rho\psi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty; -r)$; кроме того, существует локально ограниченная функция $P : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $\xi \leq 0$, $\rho(\xi + \theta) \leq P(\xi)\rho(\theta)$ для п.в. $\theta \in (-\infty; -r)$.

Тогда выбираем

$$\|\psi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\psi(\theta)\| + \int\limits_{-\infty}^{-r} \rho(\theta)\|\psi(\theta)\| d\theta.$$

Простый пример такого пространства может быть осуществен выбором функции $\rho(\theta) = e^{\mu\theta}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Глава 2

Метод направляющих функций для дифференциальных включений

2.1 Классические подходы

Повторяем в этом параграфе классические определения направляющих функций (для дифференциальных включений) по Красносельскому и Перову и по Górniewicz'у (см. [26]).

Рассмотрим дифференциальное включение в $\mathbb{R}^n$ вида

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0, T] \tag{2.1.1}$$

где $F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^1-ростом (см. Определение 1.3.12).

Под решением включения (2.1.1) мы понимаем абсолютно непрерывную функцию $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет (2.1.1) для п.в. $t \in [0,T]$. Известно (см., например [26, 90]), что существует *локальное решение* для включения (2.1.1) с начальным условием, т.е. решение, определенное в некотором интервале $[0,h]$, $0 < h \leq T$, и удовлетворяет условию

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.2}$$

Для гарантии существования *глобального решения* ($h = T$) нам нужно еще условие для мультиотображения F, а именно, условие подлинейного роста. Справедливо следующее утверждение (см., например [24, 70, 90], а также Свойства 2.4.2 и 2.4.3 в параграфе 2.4).

Свойство 2.1.1. *Если* $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ *- верхнее Каратеодори мультиотображение с* L^1-*подлинейном ростом, то для каждого* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, мнодество решений* $\Pi_F(x_0)$ *задачи Коши*

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,T] \tag{2.1.3}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.1.4}$$

является R_δ*-множеством в пространстве* $C([0,T];\mathbb{R}^n)$*. Кроме того, мультиотображение* $\Pi_F : \mathbb{R}^n \to K(C([0,T];\mathbb{R}^n))$*,* $x \multimap \Pi_F(x)$ *полунепрерывно сверху.*

Решение x включения (2.1.1) называется T*-периодическим*, если оно удовлетворяет граничному условию

$$x(0) = x(T). \tag{2.1.5}$$

Ясно, что такая функция может быть продолжена до T-периодического решения, определенного на $\mathbb{R}$ при условии $T-$периодичности мультиотображения F по первому аргументу, т.е.

$$F(t+T, x) = F(t, x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in \mathbb{R}$.

Для изучения задачи (2.1.1) и (2.1.5) мы введем *понятие мультиотображения сдвига* по траекториям задачи (2.1.1) и (2.1.5) следующим образом. Для любого $t \in [0,T]$ пусть $\theta_t : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$,

$$\theta_t(y) = y(t) \ .$$

Мультиотображение $\mathbf{P}_t^F : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{P}_t^F(x) = \theta_t \circ \Pi_F(x) \ ,$$

называется мультиотображением сдвига по траекториям задачи (2.1.1), (2.1.5), или просто, мультиотображением сдвига.

Свойство 2.1.2. *Периодическая задача (2.1.1) и (2.1.5) имеет решение тогда и только тогда, когда мультиотображение сдвига* $\mathbf{P}_T^F$ *имеет неподвижную точку* $x_* \in \mathbb{R}^n$, $x_* \in \mathbf{P}_T^F(x_*)$.

Из Свойств 2.1.1 и 2.1.2 непосредственно вытекает обобщенная критерия существования решений задачи (2.1.1), (2.1.5).

Теорема 2.1.1. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ *- открытое ограниченное множество. Тогда,* $\mathbf{P}_T^F = (\theta_T \circ \Pi_T^F) \in CJ(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. *Кроме того, если* $x \notin \mathbf{P}_T^F(x)$ *для всех* $x \in \partial U$ *и* $deg(i - \mathbf{P}_T^F, \overline{U}) \neq 0$, *то периодическая задача (2.1.1), (2.1.5) имеет решение.*

Отметим, что свойства мультиотображения сдвига и его применения к периодической задаче для дифференциальных включений различного типа представлены, например, в монографиях [70] и [90].

Теперь, мы заменим периодическую задачу (2.1.1), (2.1.5) эквивалентной задачей о неподвижных точек интегрального мультиотображения в функциональном пространстве. Затем, метод направляющих функций построится с помощью топологических методов.

В дальнейшем мы предположим, что F является верхним Каратеодори мультиотображением с L^1-подлинейным ростом. Тогда мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to Cv(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$ определен и замкнут.

Рассмотрим интегральный оператор $j : L^1([0,T];\mathbb{R}^n) \longrightarrow C([0,T];\mathbb{R}^n)$,

$$j(f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

Нетрудно проверить (с помощью Свойства 1.3.16 и Теоремы 1.1.3), что копозиция $j \circ \mathcal{P}_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(C([0,T];\mathbb{R}^n))$ замкнута и переводит каждое ограниченное множество $\Omega \subset C([0,T];\mathbb{R}^n)$ в относительно компактное множество $j \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$. Отсюда получаем:

Следствие 2.1.1. *Композиция* $j \circ \mathcal{P}_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \longrightarrow Kv(C([0,T];\mathbb{R}^n))$ *является вполне полунепрерывным сверху мультиотображением.*

Пусть $\mathcal{C} = C([0,T];\mathbb{R}^n)$ и $J_T : \mathcal{C} \to Kv(\mathcal{C})$,

$$J_T(x) = x(T) + j \circ \mathcal{P}_F(x).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Неподвижная точка мультиотображения J_T являются решением периодической задачи (2.1.1) и (2.1.5).*

Нетрудно видеть, что мультиотображение J_T тоже является вполне полунепрерывным сверху.

Таким образом, теория топологической степени может быть применена к этому мультиотображению и мы можем сформулировать следующую обобщенную критерию существования решений для задачи (2.1.1) и (2.1.5).

Теорема 2.1.3. *Пусть $U \subset \mathcal{C}$ - открытое ограниченное множество. Если $deg\left(i - J_T, \overline{U}\right) \neq 0$, , то периодическая задача (2.1.1) и (2.1.5) имеет решение в U.*

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.1.1. *Множество решений задачи Коши (2.1.1) и (2.1.2) априори ограничено.*

Доказательство. Каждое решение задачи (2.1.1) и (2.1.2) имеет вид

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s)\,ds,$$

где $f \in \mathcal{P}_F(x)$.
Пусть $\alpha \in L^1_+[0,T]$ - функция из условия подлинейного роста мультиотображения F, т.е.

$$\|F(t,x)\| \leq \alpha(t)(1+|x|)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in [0,T]$.
Имеем

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_0^t |f(s)|ds \leq |x_0| + \int_0^t \alpha(s)(1+|x(s)|)\,ds$$

$$\leq |x_0| + \int_0^T \alpha(s)\,ds + \int_0^t \alpha(s)|x(s)|ds.$$

Применяя Лемму 1.1.1 получаем, что

$$|x(t)| \leq \quad Ce^{\int_0^T \alpha(s)ds}, \quad t \in [0,T],$$

где $C = |x_0| + \int_0^T \alpha(s)\,ds$. □

Определение 2.1.1. *Точка $x_0 \in R^n$ называется точкой T-*невозвращаемости *траекторий дифференциального включения (2.1.1), если для любого решения x, выходящего из x_0, выполнено:*

$$x(t) \neq x_0, \ \ \forall t \in (0,T]. \tag{2.1.6}$$

Следующее утверждение играет ключевую роль в обосновании метода направляющих функций. Для простоты мы ограничим только случай, когда правая часть включения (2.1.1) является полунепрерывным сверху мультиотображением.

Теорема 2.1.4. *(см. [26]). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ - открытое ограниченное мно-жество такое, что любая точка $x \in \partial U$ является точкой T-невозвращае-мости траекторий включения (2.1.1). Пусть $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывное сверху мультиотображение с L^1-подлинейным ростом. Если мультиполе $R_0 : \overline{U} \to Kv(\mathbb{R}^n)$,*

$$R_0(x) = -F(0,x),$$

не имеет особых точек на ∂U, то

$$deg\left(\Phi, \overline{\Omega}\right) = deg\left(R_0, \overline{U}\right),$$

где $\Phi = i - J_T$ - мультиполе, порожденное интегральным мультиоператором J_T, и Ω - некоторое ограниченное множество в пространстве $\mathcal{C}$.

Следствие 2.1.2. *В условиях Теоремы 2.1.4, пусть*

$$deg\left(R_0, \overline{U}\right) \neq 0.$$

Тогда дифференциальное включение (2.1.1) имеет T-периодическое решение.

Применим теперь Теорему 2.1.4 для обоснования метода направляющих функций. Введем необходимые понятия.

Определение 2.1.2. *Непрерывно дифференцируемая функция* $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется* невырожденным потенциалом*, если ее градиент не обращается в нуль вне некоторого шара, т.е. найдется* $r_v > 0$ *такое, что*

$$\nabla v\,(x) = \left\{ \frac{\partial v\,(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial v\,(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial v\,(x)}{\partial x_n} \right\} \neq 0,$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geq r_v$.

Ясно, что топологическая степень градиента невырожденного потенциала

$$deg\,(\nabla v, B^n(0,r))$$

на шаре $B^n(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ радиуса $r \geq r_v$ не зависит от r. Это общее значение называется *индексом невырожденного потенциала* и обозначается $Ind\,v$.

В качестве примера потенциала с ненулевым индексом можно рассматривать невырожденный потенциал v, удовлетворяющий условию (см. [101])

$$\lim_{|x|\to\infty} |v\,(x)\,| \to \infty. \tag{2.1.7}$$

Другие примеры потенциала с ненулевым индексом можно найти в монографиях [99], [101].

Определение 2.1.3. *Невырожденный потенциал* v *называется направляющей функцией для включения (2.1.1), если*

$$\left\langle \nabla\, v\,(x)\,, y \right\rangle \;> 0 \tag{2.1.8}$$

для всех $y \in F\,(t,x)$, $0 \leq t \leq T$, $|x| \geq r_v$.

Из этого определения следует, что если v является направляющей функцией для включения (2.1.1), то поле $-\nabla v$ и мультиполе R_0 не допускают противоположных направлений на сфере $S^{n-1}(0,r)$ радиуса $r \geq r_v$, и следовательно, в силу Леммы 1.4.5

$$deg\,(R_0, B^n(0,r)) = (-1)^n\, Ind\,v. \tag{2.1.9}$$

Мы можем сформулировать теперь следующее условие существования периодического решения.

Теорема 2.1.5. *(см. [26]). Пусть $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение с L^1-подлинейным ростом. Если для дифференциального включения (2.1.1) существует направляющая функция v ненулевого индекса, то это включение имеет T-периодическое решение.*

Теорема 2.1.5 допускает усиления в различных направлениях. Приведем один из самых общих результатов (см. [70, 71]).

Теорема 2.1.6. *Пусть $F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^1-подлинейным ростом. Пусть существует невырожденный потенциал $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ненулевого индекса такой, что для каждых $x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \geq r_v$ и $t \in [0,T]$ найдется $y \in F(t,x)$ такое, что*

$$\langle \nabla v(x), y \rangle \geq 0.$$

Тогда включение (2.1.1) имеет $T-$периодическое решение.

2.2 Обобщенная периодическая задача в конечномерном пространстве

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим обобщенную периодическую задачу

$$\begin{cases} u'(t) \in F(t, u(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ u(T) \in M(u(0)), \end{cases} \tag{2.2.1}$$

при следующих предположениях:

$(A1)$ $F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^1-подлинейным ростом;

$(A2)$ $M\colon \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ - J^c-мультиотображение.

Под решением задачи (2.2.1) мы понимаем абсолютно непрерывную функцию $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую (2.2.1).

Определение 2.2.1. *Невырожденный потенциал $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется направляющей функцией для задачи (2.2.1) если существует $r_* > 0$ такое, что для каждого $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $|x| \geq r_*$, выполнены следующие условия:*

$(V1)$ $\big\langle \nabla V(x), y \big\rangle \geq 0$ *для хотя бы одного* $y \in F(t,x)$;

$(V2)$ $V(x) \geq V(w)$ *для всех* $w \in M(x)$;

$(V3)$ $\big\langle \nabla V(x), x-w \big\rangle \geq 0$ *для хотя бы одного* $w \in M(x)$, *если* M *принимает выпуклые значения, иначе для всех* $w \in M(x)$.

Пусть $r = \max\{r_V, r_*\}$, где r_V следует из невырожденности потенциала V. Тогда топологическая степень

$$deg(\nabla V, B^n(0,R))$$

корректно определена и не зависит от выбора $R \geq r$. Такое общее число называется индексом направляющей функции V и обозначается через $Ind\, V$.

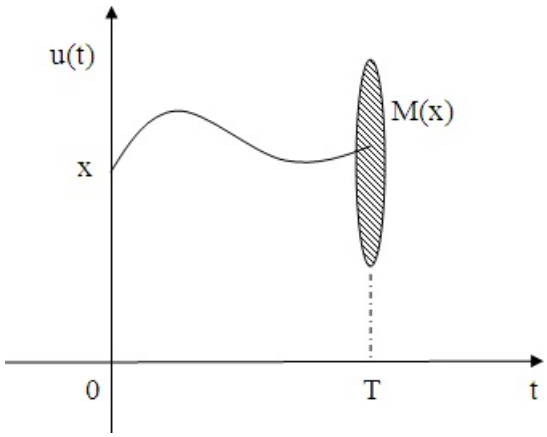
Отметим, что класс задач вида (2.2.1) достаточно широк. В том числе, в случае M - тождественный оператор, т.е. $M(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, задача (2.2.1) является классической периодической проблемой. Рассмотрим теперь другие задачи, которые могут быть представлены в виде (2.2.1).

Задача 2.2.1. *(Дифференциальная игра с заданным множеством ожидания).*

Рассмотрим дифференциальную игру, в которой один объект движется по траекториям дифференциального включения

$$u'(t) \in F(t, u(t)), \tag{2.2.2}$$

где $F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ *- мультиотображение.*
Предположим, что для каждого начального положения $u(0) = x$ *определено множество ожидания* $M(x) \subset \mathbb{R}^n$. *Игра заканчивается если, начиная с позиции* x, *объект возможно достигает к одной позиции из множества* $M(x)$ *в момент* T. *Игра называется конечной, если существуют*



начальная позиция x и траектория включения (2.2.2) такие, что игра заканчивается. Иначе, игра называется бесконечной.

Ясно, что конечность игры эквивалентна существованию решения задачи (2.2.1).

Задача 2.2.2. *(Дифференциальная игра преследования).*

В этой игре, два игрока A и B начинают движение одновременно с разных начальных позиций и по траекториям дифференциальных включений

$$u'(t) \in G_0(t, u(t)), \tag{2.2.3}$$

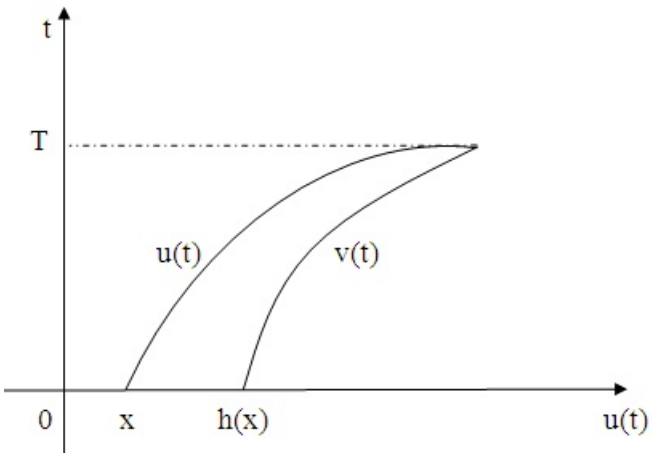
(игрок A) и, соответственно,

$$v'(t) \in G_1(t, v(t)), \tag{2.2.4}$$

(игрок B).
Предположим, что $G_1\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ является верхним Каратеодори мультиотображением с L^1-подлинейным ростом.

Игрок A - как преследователь, а игрок B - убегатель. Мы предполагаем, что для каждого начального положения x игрока A, игрок B начинает движение с позиции $h(x)$, определенной непрерывной функцией $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Игра заканчивается если в момент T два игрока A и B стремяются к одной позиции, т.е. игрок A "догоняет"до игрока B в момент T.



Игра называется конечной если существуют начальное положение x и траектории включений (2.2.3) и (2.2.4), соответственно такие, что игра заканчивается.

Перепишем игру в виде задачи (2.2.1). Для этого, напомним (см. Леммы 2.4.5 и 2.4.4), что под предположениями на мультиотображение G_1, для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ задача Коши

$$\begin{cases} v'(t) \in G_1(t, v(t)), \ \text{для п.в. } t \in [0, T], \\ v(0) = y, \end{cases}$$

имеет решение. Кроме того, если обозначим через $\Pi_{G_1}(y)$ множество решений, то мультиотображение

$$\Pi_{G_1} \colon \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n) \tag{2.2.5}$$

является $J-$мультиотображением.

Теперь, пусть $x \in \mathbb{R}^n$ - начальная позиция игрока A. Тогда $h(x)$ является начальной позицией для B. Для любого $t \in [0, T]$ определим:

$$\theta_t \colon C([0, T]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \ \theta_t(u) = u(t), \tag{2.2.6}$$

и рассмотрим мультиотображение:

$$M \colon \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n), \ M(x) = \theta_T \circ \Pi_{G_1} \circ h(x).$$

Нетрудно видеть, что M является J^c-мультиотображением и конечность игры эквивалентна существованию решения следующей задачи

$$\begin{cases} u'(t) \in G_0(t, u(t)), \\ u(T) \in M(u(0)). \end{cases}$$

В дальнейшем, нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.2.1. *(см. [70, Лемма 72.8]) Пусть r_V - константа для невырожденного потенциала V. Тогда для любого $r > r_V + a$, $a > 0$, существует $t_r \in (0, a]$ такое, что:*
для каждого решения $x\colon [0, a] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$\begin{cases} x'(t) = W_V(x(t)) \\ |x(0)| = r \end{cases}$$

выполнены отношения:

$$\big\langle x(t) - x(0), \nabla V(x(0)) \big\rangle > 0, \quad \forall t \in (0, t_r],$$

$$x(t) - x(0) \neq 0\,, \quad \forall t \in (0, a],$$

где $W_V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяется так:

$$W_V(x) = \begin{cases} \nabla V(x) & \text{если} \quad |\nabla V(x)| \leq 1, \\ \frac{\nabla V(x)}{|\nabla V(x)|} & \text{если} \quad |\nabla V(x)| > 1. \end{cases}$$

Лемма 2.2.2. *(см. [70, Лемма 72.9]).*
Пусть $r^* > 0$ и $F\colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^1-подлинейным ростом. Если x является решением включения

$$x'(t) \in F(t, x(t))$$

с начальным условием $x(0)$: $|x(0)| > \left(r^* + \int_0^T \alpha(s)ds\right) e^{\int_0^T \alpha(s)ds}$, то $|x(t)| > r^*$ для всех $t \in [0, T]$, где $\alpha \in L^1_+[0, T]$ - функция из условия подлинейного роста, т.е.

$$\|F(t, y)\| \leq \alpha(t)(1 + |y|),$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in [0, T]$.

2.2.2 Теорема о существовании решения

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены условия $(A1) - (A2)$. Предположим, что существует направляющая функция V для задачи (2.2.1) такая, что $Ind\, V \neq 0$. Тогда задача (2.2.1) имеет решение.*

Доказательство. Пусть $r = \max\{r_V, r_*\}$, где r_V - константа из условия невырожденного потенциала V и r_* - константа из Определения 2.2.1.

Рассмотрим случай, когда M принимает выпуклые значения. Определим мультиотображение

$$B\colon \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n),$$

$$B(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n\colon \big\langle x - y, \varphi(x)\nabla V(x)\big\rangle \geq 0\big\},$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| \leq r \\ 1 & \text{при} \quad |x| > r. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Ясно, что мультиотображение B замкнуто и принимает выпуклые значения. Следовательно, мультиотображение

$$M_B\colon \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n),\ M_B(x) = M(x) \cap B(x),$$

является $J-$мультиотображением, и поэтому, оно является J^c-мультиотображением.
Кроме того, для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geq r+1$, отношение

$$\big\langle \nabla V(x),\, x - w\big\rangle \geq 0$$

выполнено для всех $w \in M_B(x)$.

Таким образом, мы можем (без ущерба для общности) рассматривать задачу (2.2.1) в предположении, что

$(M)'$ $\big\langle \nabla V(x),\, x - w\big\rangle \geq 0$ для всех $w \in M(x)$ при $|x| \geq r+1$.

Заменим задачу (2.2.1) эквивалентной задачей о существовании $x \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$0 \in \theta_T \circ \Pi_F(x) - M(x),$$

где отображение θ_T и мультиотображение Π_F определены в (2.2.6) и (2.2.5), соответственно.

Пусть $M = (\Sigma_q \circ \cdots \circ \Sigma_1) \in J^c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, где $\Sigma_i \in\ J(X_{i-1}, X_i)$, $i = 1, \cdots, q$; $X_0 = X_q = \mathbb{R}^n$, и X_i - нормированные пространства, $0 < i < q$. Определим следующие отображения и мультиотображения:

$$\widetilde{\Sigma}_1\colon \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n \times X_1),\ \widetilde{\Sigma}_1(x) = \{x\} \times \Sigma_1(x),$$

$$\widetilde{\Sigma}_i\colon \mathbb{R}^n \times X_{i-1} \to K(\mathbb{R}^n \times X_i),\ \widetilde{\Sigma}_i(x,y) = \{x\} \times \Sigma_i(y),\ \forall i = 2, \cdots, q.$$

$$\widetilde{M}\colon \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),\quad \widetilde{M}(x) = \{x\} \times M(x),$$

$$\widetilde{\Pi}_F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to K(C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n),\quad \widetilde{\Pi}_F(x,y) = \{\Pi_F(x)\} \times \{y\},$$

$$\widetilde{\theta}_T\colon C([0,T];\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\quad \widetilde{\theta}_T(u,y)=\{\theta_T(u)\}\times\{y\},$$
$$f\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad f(x,y)=x-y.$$

Легко видеть, что $\widetilde{\Sigma}_i$ $(1\le i\le q)$ и $\widetilde{\Pi}_F$ являются $J-$мультиотображениями; отображения $\widetilde{\theta}_T$ и f непрерывны и

$$\theta_T\circ\Pi_F-M=f\circ\widetilde{\theta}_T\circ\widetilde{\Pi}_F\circ\widetilde{M}=f\circ\widetilde{\theta}_T\circ\widetilde{\Pi}_F\circ\widetilde{\Sigma}_q\circ\cdots\circ\widetilde{\Sigma}_1.$$

Следовательно, $\theta_T\circ\Pi_F-M\colon\mathbb{R}^n\to K(\mathbb{R}^n)$ является J^c-мультиотображением. Определим мультиотображения

$$A\colon\mathbb{R}^n\to P(\mathbb{R}^n),\ A(x)=\{y\in\mathbb{R}^n\colon\big\langle y,\varphi(x)\nabla V(x)\big\rangle\ge 0\},$$

и

$$F_A(t,x)=F(t,x)\cap A(x),\quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\ ,$$

где $\varphi(x)$ определено в (2.2.7).

Нетрудно проверить, что F_A является верхним Каратеодори мультиотображением с L^1-подлинейным ростом и

$$\big\langle\nabla V(x),y\big\rangle\ge 0,\ \text{для всех } y\in F_A(t,x) \text{ при } |x|>r.$$

В следствии Лемм 2.2.1 и 2.2.2 мы можем выбрать достаточно большое число $R>r+T+1$ такое, что для $(\lambda,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^n$, $|x|=R$, выполнены:

(a) каждое решение $u\colon[0,T]\to\mathbb{R}^n$ задачи Коши

$$\begin{cases} u'(t)\in\Psi(t,u(t),\lambda)=\lambda W_V(u(t))+(1-\lambda)F_A(t,u(t)),\\ u(0)=x,\end{cases}\tag{2.2.8}$$

удовлетворяет условию: $|u(t)|>r$, $\forall t\in[0,T]$;

(b) существует $t_r\in(0,T]$ такое, что для всех $u\in\Pi_{W_V}(x)$

$$\big\langle u(t)-x,\nabla V(x)\big\rangle>0,\quad\forall t\in(0,t_r],$$

где Π_{W_V} определено аналогично Π_F.

Теперь пусть $x\in S^{n-1}(0,R)$ и $z\in\theta_{t_r}\circ\Pi_{W_V}(x)-M(x)$. Тогда существуют $u\in\Pi_{W_V}(x)$ и $w\in M(x)$ такие, что $z=u(t_r)-w$. Из выбора R следует, что

$$\big\langle x-w,\nabla V(x)\big\rangle\ge 0\ \text{ для всех } w\in M(x).$$

Отсюда вытекает

$$\big\langle z,\nabla V(x)\big\rangle=\big\langle u(t_r)-x,\nabla V(x)\big\rangle+\big\langle x-w,\nabla V(x)\big\rangle>0.$$

Следовательно, векторные поля $\theta_{t_r} \circ \Pi_{W_V} - M$ и ∇V гомотопны на $S^{n-1}(0,R)$. Поэтому,

$$deg(\theta_{t_r} \circ \Pi_{W_V} - M, B^n(0,R)) = Ind\, V.$$

Если $0 \in \theta_T \circ \Pi_{F_A}(x) - M(x)$ для некоторого $x \in S^{n-1}(0,R)$, тогда теорема доказана, иначе рассмотрим мультиотображение

$$\Sigma\colon B^n(0,R) \times [0,1] \to K(\mathbb{R}^n),$$

$$\Sigma(x,\lambda) = \theta_{\lambda t_r + (1-\lambda)T} \circ \Pi_{\Psi_\lambda}(x) - M(x),$$

где $\Psi_\lambda(t,x) = \Psi(t,x,\lambda)$.
Легко видеть, что Σ является J^c-мультиотображением. Предположим, что существует $(x,\lambda) \in S^{n-1}(0,R) \times (0,1]$ такое, что

$$0 \in \Sigma(x,\lambda).$$

Тогда существуют решение $u(\cdot)$ задачи (2.2.8) и $w \in M(x)$ такие, что

$$u\big(\lambda t_r + (1-\lambda)T\big) = w.$$

Из (a) следует, что $|u(t)| > r \geq r_V$ для всех $t \in [0,T]$ и

$$\nabla V(u(t)) \neq 0,\ \forall t \in [0,T].$$

Отсюда,

$$\big\langle \lambda W_V(u(s)) + (1-\lambda)y, \nabla V(u(s))\big\rangle > 0$$

для всех $s \in [0,T]$ и $y \in F_A(s,u(s))$. Поэтому,

$$V\big(u(\lambda t_r + (1-\lambda)T)\big) - V(x) = \int_0^{\lambda t_r + (1-\lambda)T} \big\langle u'(s), \nabla V(u(s))\big\rangle ds > 0.$$

Следовательно, $V(w) > V(x)$, что есть противоречие.

Таким образом, Σ является гомотопией, соединяющейся мультиотображения

$$\theta_{t_r} \circ \Pi_{W_V} - M \ \text{ и } \ \theta_T \circ \Pi_{F_A} - M.$$

В силу свойства гомотопической инвариантности топологической степени имеем

$$deg(\theta_T \circ \Pi_{F_A} - M, B^n(0,R)) = Ind\, V \neq 0.$$

Поэтому, задача (2.2.1) иммет решение. □

Следствие 2.2.1. *Пусть выполнены условия* $(A1)-(A2)$. *Дополнительно предположим, что существует* $r > 0$ *такое, что для* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $|x| \geq r$:

a) $\langle x, y \rangle \geq 0$ *для хотя бы одного* $y \in F(t,x)$;

b) $\|M(x)\| = \max\{|w| \colon w \in M(x)\} \leq |x|$.

Тогда задача (2.2.1) имеет решение.

Следствие 2.2.2. *(Существование анти-периодического решения). Пусть выполнены условия* $(A1)-(A2)$. *Дополнительно предположим, что существует* $r > 0$ *такое, что для* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $|x| \geq r$, *найдется хотя бы один элемент* $y \in F(t,x)$ *такой, что*

$$\langle x, y \rangle \geq 0.$$

Тогда анти-периодическая задача

$$\begin{cases} u'(t) \in F(t,u(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ u(T) = -u(0), \end{cases} \tag{2.2.9}$$

имеет решение.

Доказательство. Заключения Следствий 2.2.1 и 2.2.2 непосредственно следуются из Теоремы 2.2.1 применяя направляющую функцию $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$. □

Отметим, что необходимость изучения анти-периодических решений для дифференциальных уравнений и включений появится во многих физических задачах (см., например [123, 129, 134]), в теории всплесков (см, например [35]). Некоторые теоремы о сушествовании анти-периодических решений показаны в работах [4, 36, 39]. Приведем ниже пример для иллюстрации результатов выше.

Пример 2.2.1. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} u'(t) \in F(u(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0,1], \\ u(1) \in \left[\frac{1}{2}u(0) + 1, \frac{1}{2}u(0) + 2\right], \end{cases} \tag{2.2.10}$$

где мультиотображение $F \colon \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ *определено так:*

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } \ x > 0, \\ -1 & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

и $F(0) = [-1, 1]$.

В этом примере, $M(x) = \left[\frac{1}{2}x + 1, \frac{1}{2}x + 2\right]$, $x \in \mathbb{R}$. *Нетрудно проверить, что выполнены все условия в Следствии 2.2.1. Поэтому, задача (2.2.10) имеет решение.*

2.3 Метод направляющих функций в бесконечномерном гильбертовом пространстве

2.3.1 Обозначения и определения

Пусть H - гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, пусть H_n - $n-$мерное пространство с базисом $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ и P_n - проекция из H на H_n. Определим оператор

$$\mathbb{P}_n \colon L^2([0,T];H) \to L^2([0,T];H_n), \quad (\mathbb{P}_n f)(t) = P_n f(t).$$

Скалярное произведение в H $[L^2([0,T];H)]$ обозначается через $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ [соответственно, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$]. Напомним (см., например [15]), что вложение

$$W^{1,2}([0,T];H) \hookrightarrow C([0,T];H)$$

непрерывно. Однако, для любого $n \in \mathbb{N}$ вложение

$$W^{1,2}([0,T];H_n) \hookrightarrow C([0,T];H_n)$$

компактно (см., например [15, 44, 137]).

Слабая сходимость в $W^{1,2}([0,T];H)$ $[L^2([0,T];H)]$ обозначается символом $x_n \overset{W^{1,2}}{\rightharpoonup} x_0$ [соответственно, $f_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} f_0$].

2.3.2 Гладкие направляющие функции

Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение с периодическим условием

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,T], \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{2.3.1}$$

где $F \colon [0,T] \times H \to Kv(H)$ - мультиотображение, удовлетворяющее условию.

$(F1)$ F является верхним Каратеодори с L^2-подлинейным ростом.

Напомним, что при выполнении условия $(F1)$ мультиоператор суперпозиции:

$$\mathcal{P}_F\colon C([0,T];H) \to Cv(L^2([0,T];H)),$$

$$\mathcal{P}_F(x) = \big\{f \in L^2([0,T];H)\colon f(s) \in F(s,x(s)) \text{ для п.в. } s \in [0,T]\big\},$$

корректно определен и замкнут.

Под решением задачи (2.3.1) мы понимаем функцию $x \in W_T^{1,2}([0,T];H)$, для которой существует функция $f \in \mathcal{P}_F(x)$ такая, что

$$x'(t) = f(t) \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,T].$$

Определим оператор $A\colon W_T^{1,2}([0,T];H) \to L^2([0,T];H)$, $Ax = x'$. Тогда мы можем заменить задачу (2.3.1) задачей о существовании решений следующего операторного включения

$$Ax \in \mathcal{P}_F(x). \tag{2.3.2}$$

Определение 2.3.1. *Мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F$ называется $A-$разрешимым, если из существования последовательностей $\{n_k\}$ и $\{x_k\}$, $x_k \in W_T^{1,2}([0,T];H_{n_k})$:*

$$\sup_k \|x_k\|_C < +\infty \ \ \text{и} \ \ Ax_k \in \mathbb{P}_{n_k}\mathcal{P}_F(x_k)$$

следует, что найдется такая $x_* \in W_T^{1,2}([0,T];H)$, что $Ax_* \in \mathcal{P}_F(x_*)$.

Непрерывно дифференцируемая функция $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если существует $r_0 > 0$ такое, что градиент (производная фреше) $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \cdots\right)$ не обращается в нулевой вектор при $\|x\|_H \geq r_0$, где $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in H$.

Определение 2.3.2. *Непрерывно дифференцируемая функция V называется проекционно-однородным потенциалом, если существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что*

$$P_n\nabla V(x) = \nabla V(P_n x)$$

для любых $n \geq n_0$ и $x \in H$.

Для каждого n, отождествим $H_n \cong \mathbb{R}^n$. Тогда, сужение поля $P_n \nabla V$ на H_n, мы можем рассматривать как непрерывное поле

$$P_n \nabla V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Из Определения 2.3.2 непосредственно следует, что если V - невырожденный проекционно-однородный потенциал, то $P_n \nabla V$ не обращается в нуль на сфере $S^{n-1}(0,r)$ для всех $n \geq n_0$ и $r \geq r_0$. Тогда топологические степени $v_n = deg(P_n \nabla V, B^n(0,r)),\ n \geq n_0$, корректно определены и не зависят от $r \geq r_0$.

Индекс невырожденного проекционно-однородного потенциала V определяется следующим образом

$$Ind\, V = (v_{n_0}, v_{n_0+1}, \cdots).$$

Под $Ind\, V \neq 0$ мы понимаем, что существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $v_{n_k} \neq 0$ для всех n_k.

Определение 2.3.3. *Проекционно-однородный потенциал $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для задачи* (2.3.1)*, если существует достаточно большое $N > 0$ такое, что для любой функции $x \in C([0,T];H)$ из $\|x\|_2 \geq N$ следует, что*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\ sign\left(\int_0^T \left\langle P_n \nabla V(x(s)), f(s)\right\rangle ds\right) = 1$$

для всех $f \in \mathcal{P}_F(x)$, где $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n \cong H_n$.

Лемма 2.3.1. *Если V является интегральной направляющей функцией для задачи* (2.3.1)*, то V является невырожденным потенциалом, и поэтому, существует его индекс $Ind\, V$.*

Доказательство. В самом деле, для любого $y \in H$, $\|y\|_H \geq \frac{N}{\sqrt{T}}$, считая y как постоянную функцию на $[0,T]$, имеем $\|y\|_2 \geq N$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\ sign\left(\int_0^T \left\langle P_n \nabla V(y), f(s)\right\rangle ds\right) =$$

$$= \overline{\lim}_{n\to\infty}\ sign\Big\langle P_n \nabla V(y), \int_0^T f(s)ds\Big\rangle = 1,$$

для любого $f \in \mathcal{P}_F(y)$.
Отсюда вытекает $\nabla V(y) \neq (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ при $\|y\|_H \geq \frac{N}{\sqrt{T}}$. $\square$

Основные результаты

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнено условие* $(F1)$. *Предположим, что существует интегральная направляющая функция* V *для задачи* (2.3.1) *такая, что* $Ind\, V \neq 0$. *Тогда если мультиоператор* $\mathcal{P}_F$ *обладает свойством* $A-$*разрешимости, то задача* (2.3.1) *имеет решение.*

Замечание 2.3.1. *Некоторые достаточные условия* $A-$*разрешимости мультиоператора* $\mathcal{P}_F$ *будут приведены в Теоремах 2.3.2 и 2.3.3.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ сужение

$$A_n = A_{|_{W_T^{1,2}([0,T];H_n)}} \colon W_T^{1,2}([0,T];H_n) \to L^2([0,T];H_n)$$

является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса и

$$Ker\, A_n \cong H_n \cong \mathbb{R}^n \cong Coker\, A_n.$$

Следовательно, существуют проекции

$$C_n \colon W_T^{1,2}([0,T];H_n) \to W_T^{1,2}([0,T];H_n),\ ImC_n = H_n,$$

$$Q_n \colon L^2([0,T];H_n) \to L^2([0,T];H_n),\ KerQ_n = ImA_n,$$

$$K_{C_n} \colon Im\, A_n \to W_T^{1,2}([0,T];H_n),$$

$$K_{C_n} = \left(A_{n|_{W_T^{1,2}([0,T];H_n)\,\cap\, Ker\, C_n}}\right)^{-1},$$

$$\Pi_n \colon L^2([0,T];H_n) \to H_n,\ \ \Pi_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds,$$

и тождественный оператор $\Lambda_n \colon H_n \to H_n$ такие, что уравнение

$$A_n x = y,\ y \in L^2([0,T];H_n)$$

эквивалентно уравнению

$$(i - C_n)x = (\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n})y,$$

где $K_{C_n,Q_n} \colon L^2([0,T];H_n) \to W_T^{1,2}([0,T];H_n)$,

$$K_{C_n,Q_n} = K_{C_n}(i - Q_n).$$

Пространство $L^2([0,T];H_n)$ допускает разложение

$$L^2(I,H_n) = \mathcal{L}_0^{(n)} \oplus \mathcal{L}_1^{(n)},$$

где $\mathcal{L}_1^{(n)} = ImA_n$.
Разложение элемента $f \in L^2([0,T];H_n)$ обозначается следующим образом

$$f = f_0^{(n)} + f_1^{(n)}.$$

Заметим, что функция $x \in W_T^{1,2}([0,T];H_n)$ является решением включения

$$A_n x \in \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(x)$$

тогда и только тогда, когда она является решением следующего включения

$$x \in G_n(x), \tag{2.3.3}$$

где

$$G_n \colon C([0,T];H_n) \multimap \big(C([0,T];H_n)\big),$$
$$G_n(x) = C_n x + (\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n}) \circ \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(x).$$

Покажем, что мультиоператор G_n является вполне полунепрерывным сверху. Действительно, в силу замкнутости мультиоператора $\mathcal{P}_F$ и непрерывности линейного оператора $(\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n}) \circ \mathbb{P}_n$ следует, что мультиоператор $(\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n}) \circ \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F$ замкнут (см. Свойство 1.3.16). Далее, для любого ограниченного множества $U \subset C([0,T];H_n)$ множество $\mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(U)$ ограничено в $L^2([0,T];H_n)$. Но тогда множество $(\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n}) \circ \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(U)$ ограничено в $W_T^{1,2}([0,T];H_n)$ и из теоремы вложения Соболева (см., например [44]) вытекает относительно компактность множества $(\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n}) \circ \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(U)$ в пространстве $C([0,T];H_n)$. Наконец, наше утверждение следует из того, что оператор C_n непрерывен и принимает значения в конечномерном пространстве.

Теперь предположим, что $x \in W_T^{1,2}([0,T];H)$ является решением включения (2.3.2). Тогда существует функция $f \in \mathcal{P}_F(x)$ такая, что

$$x'(t) = f(t) \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,T].$$

Так как

$$P_n \nabla V(x(t)) = \nabla V(P_n x(t))$$

для всех $t \in [0,T]$ и $n \geq n_0$ (n_0 - коэффициент в Определении 2.3.2), имеем

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \big\langle P_n \nabla V(x(s)), f(s)\big\rangle\, ds\right) =$$
$$= \overline{\lim}_{n\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \big\langle \nabla V(P_n x(s)), P_n x'(s)\big\rangle\, ds\right) =$$
$$= \overline{\lim}_{n\to\infty}\, sign\Big(V\big(P_n x(T)\big) - V\big(P_n x(0)\big)\Big) = 0,$$

и следовательно, $\|x\|_2 < N$. Из $(F1)$ вытекает, что существует $K > 0$ такое, что $\|x'\|_2 < K$. Но тогда найдется $M > 0$ такое, что $\|x\|_C < M$, т.е. включение (2.3.2) может иметь решения только внутри множества $B_C(0,M)$. Возьмем произвольно $R \geq \max\{r_0, M\}$, где r_0 - константа из условия невырожденности потенциала V. Тогда включение (2.3.2) не имеет решений на $\partial B_C(0,R)$. Докажем, что для каждого $n \geq n_0$

$$x \notin G_n(x)$$

при любых $x \in \partial B_C^{(n)}(0,R) = \partial B_C(0,R) \cap C([0,T]; H_n)$.

В самом деле, пусть $n_* \geq n_0$ и $x_* \in \partial B_C^{(n_*)}(0,R)$ - неподвижная точка мультиоператора G_{n_*}. Тогда найдется функция $f_* \in \mathcal{P}_F(x_*)$ такая, что $Ax_* = \mathbb{P}_{n_*} f_*$. Из выбора R вытекает $\|x_*\|_2 \geq N$. Поэтому,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \big\langle P_n \nabla V(x_*(s)), f_*(s)\big\rangle\, ds\right) = 1.$$

Так как $x_* \in C([0,T]; H_{n_*})$, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \big\langle P_n \nabla V(x_*(s)), f_*(s)\big\rangle\, ds\right) =$$
$$= sign\left(\int_0^T \big\langle \nabla V(P_{n_*} x_*(s)), P_{n_*} f_*(s)\big\rangle\, ds\right) =$$
$$= sign\left(\int_0^T \big\langle \nabla V(x_*(s)), x_*'(s)\big\rangle\, ds\right) =$$
$$= sign\Big(V\big(x_*(T)\big) - V\big(x_*(0)\big)\Big) = 0,$$

что есть противоречие.

Таким образом, для любого $n \geq n_0$ определяется топологическая степень

$$\omega_n = deg(i - G_n, B_C^{(n)}(0,R)).$$

Теперь, вычислим значение ω_n при каждом фиксированном $n \geq n_0$. Для этого, рассмотрим мультиотображение

$$\Sigma_n \colon C([0,T];H_n) \times [0,1] \to Kv(C([0,T];H_n)),$$
$$\Sigma_n(x,\lambda) = C_n x + (\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n}) \circ \alpha_n(\mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(x), \lambda),$$

где $\alpha_n \colon L^2([0,T];H_n) \times [0,1] \to L^2([0,T];H_n)$ определяется равенством

$$\alpha_n(f_0^{(n)} + f_1^{(n)}, \lambda) = f_0^{(n)} + \lambda f_1^{(n)}.$$

Нетрудно проверить, что Σ_n вполне полунепрерывно сверху. Покажем, что множество его неподвижных точек

$$Fix\big(\Sigma_n, \partial B_C^{(n)}(0,R) \times [0,1]\big) = \emptyset.$$

Предположим противное и пусть $(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}) \in Fix\big(\Sigma_n, \partial B_C^{(n)}(0,R) \times [0,1]\big)$. Тогда существует функция $\widetilde{f} \in \mathcal{P}_F(\widetilde{x})$ такая, что

$$\begin{cases} A_n \widetilde{x} = \widetilde{\lambda} \widetilde{f}_1^{(n)} \\ 0 = \widetilde{f}_0^{(n)}, \end{cases}$$

где $\widetilde{f}_0^{(n)} + \widetilde{f}_1^{(n)} = \mathbb{P}_n \widetilde{f}$, $\widetilde{f}_0^{(n)} \in \mathcal{L}_0^{(n)}$ и $\widetilde{f}_1^{(n)} \in \mathcal{L}_1^{(n)}$.
Так как $\|\widetilde{x}\|_2 \geq N$ имеем

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \big\langle P_m \nabla V(\widetilde{x}(s)), \widetilde{f}(s)\big\rangle\, ds\right) = 1.$$

Далее, в силу $\widetilde{x} \in C([0,T];H_n)$, то

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \big\langle P_m \nabla V(\widetilde{x}(s)), \widetilde{f}(s)\big\rangle\, ds\right) =$$
$$= sign\left(\int_0^T \big\langle \nabla V(P_n \widetilde{x}(s)), P_n \widetilde{f}(s)\big\rangle\, ds\right) =$$
$$= sign\left(\int_0^T \big\langle \nabla V(\widetilde{x}(s)), P_n \widetilde{f}(s)\big\rangle\, ds\right).$$

Если $\widetilde{\lambda} \neq 0$, то

$$sign\left(\int_0^T \left\langle \nabla V(\widetilde{x}(s)), P_n\widetilde{f}(s)\right\rangle ds\right) =$$
$$= sign\left(\int_0^T \left\langle \nabla V(\widetilde{x}(s)), \frac{1}{\widetilde{\lambda}}\widetilde{x}'(s)\right\rangle ds\right) =$$
$$= sign\left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}}\int_0^T \left\langle \nabla V(\widetilde{x}(s)), \widetilde{x}'(s)\right\rangle ds\right) =$$
$$= sign\left(\frac{1}{\widetilde{\lambda}}\big(V(\widetilde{x}(T)) - V(\widetilde{x}(0))\big)\right) = 0,$$

что есть противоречие.

Если $\widetilde{\lambda} = 0$, то $A_n\widetilde{x} = 0$. Это значит, что $\widetilde{x} \in KerA_n$, т.е., $\widetilde{x} \equiv y$ для некоторого $y \in H_n$, $\|y\|_H = R$. Из $\|y\|_2 \geq N$ следует, что

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \left\langle P_m\nabla V(y), f(s)\right\rangle ds\right) = 1,$$

для всех $f \in \mathcal{P}_F(y)$.
С другой стороны,

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \left\langle P_m\nabla V(y), f(s)\right\rangle ds\right) =$$
$$= sign\left(\int_0^T \left\langle \nabla V(P_n y), P_n f(s)\right\rangle ds\right) =$$
$$= sign\left\langle \nabla V(y), \int_0^T P_n f(s) ds\right\rangle = sign\Big(\left\langle \nabla V(y), \Pi_n f^{(n)}\right\rangle\Big),$$

где $f^{(n)} = \mathbb{P}_n f \in \mathbb{P}_n\mathcal{P}_F(y)$. Поэтому

$$\left\langle \nabla V(y), \Pi_n f^{(n)}\right\rangle > 0, \tag{2.3.4}$$

и следовательно, $\Pi_n f^{(n)} \neq 0$ для любого $f \in \mathcal{P}_F(y)$. В частности, $\Pi_n\widetilde{f}^{(n)} \neq 0$. Но $\Pi_n\widetilde{f}^{(n)} = \Pi_n\widetilde{f}_0^{(n)} = 0$ в силу того, что $\widetilde{f}_0^{(n)} = 0$. Что есть противоречие.

Таким образом, Σ_n является гомотопией, соединяющей мультиоператоры $\Sigma_n(x,1) = G_n$ и $\Sigma_n(x,0) = C_n + \Pi_n\mathbb{P}_n\mathcal{P}_F$. В силу свойства гомотопической инвариантности получаем, что

$$deg\big(i - G_n, B_C^{(n)}(0,R)\big) = deg\big(i - C_n - \Pi_n\mathbb{P}_n\mathcal{P}_F, B_C^{(n)}(0,R)\big).$$

Оператор $C_n + \Pi_n\mathbb{P}_n\mathcal{P}_F$ принимает значения в $H_n \cong \mathbb{R}^n$, поэтому

$$deg\big(i - C_n - \Pi_n\mathbb{P}_n\mathcal{P}_F, B_C^{(n)}(0,R)\big) = deg\big(i - C_n - \Pi_n\mathbb{P}_n\mathcal{P}_F, B^n(0,R)\big).$$

В пространстве $H_n \cong \mathbb{R}^n$ мультиполе $i - C_n - \Pi_n \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F$ имеет вид

$$i - C_n - \Pi_n \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F = -\Pi_n \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F,$$

поэтому

$$deg\big(i - C_n - \Pi_n \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F, B^n(0,R)\big) = deg\big(-\Pi_n \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F, B^n(0,R)\big).$$

Из (2.3.4) следует, что поля $\Pi_n \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F$ и $\mathbb{P}_n \nabla V$ гомотопны на $B^n(0,R)$, поэтому

$$deg\big(-\Pi_n \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F, B^n(0,R)\big) = deg\big(-\mathbb{P}_n \nabla V, B^n(0,R)\big) = (-1)^n\, v_n.$$

Из $Ind\ V \neq 0$ следует, что существует последовательность $\{n_k\}$, $n_k \geq n_0$, такая, что $v_{n_k} \neq 0$, и значит $\omega_{n_k} \neq 0$. Отсюда вытекает существование последовательности элементов $\{x_k\}$, $x_k \in B_C^{(n_k)}(0,R)$, таких, что $Ax_k \in \mathbb{P}_{n_k} \mathcal{P}_F(x_k)$ для всех k. В силу свойства $A-$разрешимости мультиоператора $\mathcal{P}_F$ найдется $x^* \in W_T^{1,2}([0,T];H)$ такое, что $Ax^* \in \mathcal{P}_F(x^*)$. Функция x^* является решением задачи (2.3.1). $\square$

Следующие утверждения показывают некоторые достаточные условия $A-$разрешимости мультиоператора $\mathcal{P}_F$.

Теорема 2.3.2. *Пусть гильбертово пространство H компактно вложено в банахово пространство Y. Предположим, что мультиотображение $\widetilde{F}\colon [0,T] \times Y \to P(Y)$ удовлетворяет условию:*

($\widetilde{F}$) *для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $\widetilde{F}(t,\cdot)\colon Y \to P(Y)$ полунепрерывно сверху.*

Дополнительно предположим, что сужение $\widetilde{F}_{|_{[0,T]\times H}}$ имеет значения в $Kv(H)$ и мультиотображение $F = \widetilde{F}_{|_{[0,T]\times H}}\colon [0,T] \times H \to Kv(H)$ удовлетворяет условию $(F1)$. Тогда мультиоператор $\mathcal{P}_F$ обладает свойством $A-$разрешимости.

Доказательство. Предположим, что существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{x_k\}$, $x_k \in C([0,T];H_{n_k})$, такие, что

$$\sup_k \|x_k\|_C < +\infty \ \text{ и } \ Ax_k \in \mathbb{P}_{n_k} \mathcal{P}_F(x_k).$$

В силу $(F1)$ множество $\mathcal{P}_F(\{x_k\}_{k=1}^{\infty})$, и следовательно множество $A(\{x_k\}_{k=1}^{\infty})$, ограничено в $L^2([0,T];H)$. Отсюда вытекает ограниченность

множества $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $W^{1,2}([0,T];H)$. Таким образом, множество $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо компактно. Без ущерба для общности предположим, что

$$x_k \overset{W^{1,2}}{\rightharpoonup} x_0 \in W_T^{1,2}([0,T];H).$$

Отсюда получаем, что $Ax_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} Ax_0$ и $x_k(t) \overset{H}{\rightharpoonup} x_0(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$. Из компактного вложения пространства H в пространство Y вытекает

$$x_k(t) \overset{Y}{\to} x_0(t), \tag{2.3.5}$$

для п.в. $t \in [0,T]$.

Пусть $f_k \in \mathcal{P}_F(x_k)$ такая, что $Ax_k = \mathbb{P}_{n_k} f_k$. Множество $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено в $L^2([0,T];H)$ поэтому оно слабо компактно. Прежположим без ущерба для общности, что

$$f_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} f_0 \in L^2([0,T];H).$$

Будем показать, что $\mathbb{P}_{n_k} f_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} f_0$. Для этого, вначале докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n f_0 = f_0.$$

Действительно, так как

$$L^2([0,T];H) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L^2([0,T];H_n)},$$

то существуют последовательность $\{\widetilde{n}_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{\widetilde{f}_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\widetilde{f}_m \in L^2([0,T];H_{\widetilde{n}_m})$ такие, что $\widetilde{f}_m \to f_0$.
Имеем

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0 - f_0\|_2 &\le \|\mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0 - \mathbb{P}_{\widetilde{n}_m}\widetilde{f}_m\|_2 + \|\mathbb{P}_{\widetilde{n}_m}\widetilde{f}_m - f_0\|_2 \\ &\le 2\|\widetilde{f}_m - f_0\|_2 \to 0 \ \text{ при } m \to \infty.\end{aligned}$$

Далее, при всех $n > \widetilde{n}_m$

$$\|\mathbb{P}_n f_0 - \mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0\|_2 = \|\mathbb{P}_n f_0 - \mathbb{P}_n \mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0\|_2 \le \|f_0 - \mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0\|_2,$$

поэтому,

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}_n f_0 - f_0\|_2 &\le \|\mathbb{P}_n f_0 - \mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0\|_2 + \|\mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0 - f_0\|_2 \\ &\le 2\|f_0 - \mathbb{P}_{\widetilde{n}_m} f_0\|_2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n f_0 = f_0.$$

Теперь, для любого $g \in L^2([0,T];H)$ имеем

$$\begin{gathered}\big\langle \mathbb{P}_{n_k} f_k - f_0, g\big\rangle_{L^2} = \big\langle \mathbb{P}_{n_k} f_k - \mathbb{P}_{n_k} f_0, g\big\rangle_{L^2} + \big\langle \mathbb{P}_{n_k} f_0 - f_0, g\big\rangle_{L^2} = \\ = \big\langle f_k - f_0, \mathbb{P}_{n_k} g\big\rangle_{L^2} + \big\langle \mathbb{P}_{n_k} f_0 - f_0, g\big\rangle_{L^2} = \\ = \big\langle f_k - f_0, g\big\rangle_{L^2} + \big\langle f_k - f_0, \mathbb{P}_{n_k} g - g\big\rangle_{L^2} + \big\langle \mathbb{P}_{n_k} f_0 - f_0, g\big\rangle_{L^2}.\end{gathered}$$

Таким образом

$$\lim_{k\to\infty} \big\langle \mathbb{P}_{n_k} f_k - f_0, g\big\rangle_{L^2} = 0.$$

С другой стороны, $\mathbb{P}_{n_k} f_k = Ax_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} Ax_0$. Отсюда получаем, что $Ax_0 = f_0$, и значит, $f_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} Ax_0$. В силу Теоремы 1.1.5 существует последовательность выпуклых комбинаций $\{\hat{f}_m\}$

$$\hat{f}_m = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_{mk} f_k, \ \ \lambda_{mk} \geq 0 \ \text{ и } \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_{mk} = 1,$$

которая сходится к Ax_0 в среднем. Используя Теорему 1.1.6, мы снова без ущерба для общности предполагаем, что последовательность $\{\hat{f}_m\}$ сходится к Ax_0 почти всюду. Так как H компактно вложено в Y, то $\hat{f}_m(t) \overset{Y}{\to} Ax_0(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Из (2.3.5) и условия $(\widetilde{F})$ следует, что для п.в. $t \in [0,T]$ по данному $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $i_0 = i_0(\varepsilon, t)$ такое, что

$$\widetilde{F}(t, x_i(t)) \subset O_\varepsilon^Y\Big(\widetilde{F}\big(t, x_0(t)\big)\Big) \ \text{ для всех } i \geq i_0,$$

где O_ε^Y обозначает $\varepsilon-$ окрестность в Y. Так как $x_i(t) \in H$ для всех i, поэтому

$$F(t, x_i(t)) \subset O_\varepsilon^Y\Big(F\big(t, x_0(t)\big)\Big) \ \text{ для всех } i \geq i_0,$$

Но тогда и $f_i(t) \in O_\varepsilon^Y\Big(F\big(t, x_0(t)\big)\Big)$ для всех $i \geq i_0$, а следовательно, в силу выпуклости множества $O_\varepsilon^Y\Big(F\big(t, x_0(t)\big)\Big)$ и

$$\hat{f}_m(t) \in O_\varepsilon^Y\Big(F\big(t, x_0(t)\big)\Big), \ \text{для всех } m \geq i_0.$$

Поэтому, $Ax_0(t) \in F(t, x_0(t))$ для п.в. $t \in [0,T]$, то есть $Ax_0 \in \mathcal{P}_F(x_0)$. Тем самым доказана теорема. □

Теорема 2.3.3. *Пусть мультиотображение $F\colon [0,T] \times H \to Kv(H)$ удовлетворяет условию $(F1)$. Тогда мультиоператор $\mathcal{P}_F$ обладает свойством $A-$разрешимости при выполнении каждого из следующих условий:*

(1i) *для п.в.* $t \in [0,T]$ *мультиотображение* $F(t,\cdot)\colon H \to Kv(H)$ *слабо полунепрерывно сверху в том смысле, что: если* $x_n \overset{H}{\rightharpoonup} x_0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $N(\varepsilon,t) > 0$, *что* $F(t,x_n) \subset O_\varepsilon\big(F(t,x_0)\big)$ *для любого* $n \geq N(\varepsilon,t)$;

(2i) *существует* $q_0 > 0$ *такое, что для каждого* $n \geq q_0$ *сужение мультиотображения* $F(t,\cdot)$ *на* H_n *принимает значения в* $Kv(H_n)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Предположим, что существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{x_k\}$, $x_k \in C([0,T];H_{n_k})$, такие, что

$$\sup_k \|x_k\|_C < +\infty \ \text{ и } \ Ax_k \in \mathbb{P}_{n_k}\mathcal{P}_F(x_k).$$

Пусть выполнено предложение (1i). Аналогично доказательству теоремы 2.3.2, из $x_k(t) \overset{H}{\rightharpoonup} x_0(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$ и условия (1i) следует, что

$$F(t,x_i(t)) \subset O_\varepsilon\Big(F\big(t,x_0(t)\big)\Big) \ \text{ для всех } i \geq N(\varepsilon,t).$$

Отсюда мы снова получаем, что $Ax_0 \in \mathcal{P}_F(x_0)$.

Пусть теперь выполнено (2i). Тогда для любого $n \geq q_0$ имеем

$$\mathbb{P}_n\mathcal{P}_F(x) = \mathcal{P}_F(x),$$

при всех $x \in C([0,T];H_n)$. Нетрудно видеть, что для всех k таких, что $n_k \geq q_0$ справедливо $Ax_k \in \mathcal{P}_F(x_k)$. □

2.3.3 Пример

Пусть $h > 0$, $H = W^{1,2}([0,h];\mathbb{R})$ и $Y = C([0,h];\mathbb{R})$. Известно, что H является сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\big\langle u,v\big\rangle_H = \int_0^h u(s)v(s)ds + \int_0^h u'(s)v'(s)ds$$

и H компактно вложено в Y. Пусть $\{e_1,e_2,\cdots\}$ - полная ортонормированная система H и $F\colon [0,T]\times Y \to Kv(H)$ - мультиотображение. Рассмотрим дифференциальное включение с периодическим условием

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in b + au(t,x) + F\big(t,u(t,\cdot)\big)(x), \\ u(0,x) = u(T,x), \end{cases} \tag{2.3.6}$$

для всех $x \in [0,h]$ и п.в. $t \in [0,T]$, где $a > b > 0$.

Под решением задачи (2.3.6) понимаем функцию $u\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такую, что она удовлетворяет (2.3.6) и для каждого $t \in [0,T]$ $u(t,\cdot)$ является функцией пространства $W^{1,2}([0,h];\mathbb{R})$. Обозначим $y(t) = u(t,\cdot)$ и заменим задачу (2.3.6) следующему задачей

$$\begin{cases} y'(t) \in b + ay(t) + F\big(t, y(t)\big), \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ y(0) = y(T), \end{cases} \tag{2.3.7}$$

решения которой рассматриваются в пространстве $W_T^{1,2}([0,T];H)$.

Предположим, что мультиотображение F удовлетворяет условию $(F1)$.

Теорема 2.3.4. *Пусть выполнено условие* $(F1)$. *Дополнительно предположим, что*

$(F2)$ $vrai\max_{[0,T]}\ \varphi(s) < a$, *где* φ *- функция такая, что*

$$\|F(t,x)\|_H \le \varphi(t)(1 + \|x\|_H),$$

для п.в. $t \in [0,T]$ *и всех* $x \in H$.

Тогда задача (2.3.7), *и следовательно задача* (2.3.6), *имеет решение.*

Доказательство. Определим мультиотображение $\widetilde{F}\colon [0,T] \times Y \to Kv(Y)$ следующим образом

$$\widetilde{F}(t,y) = b + ay + F(t,y).$$

Нетрудно проверить, что $\widetilde{F}$ удовлетворяет всем требованиям Теоремы 2.3.2. В силу Теоремы 2.3.2 мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_{\widetilde{F}}$ обладает свойством $A-$разрешимости.

Определим функцию

$$V\colon H \to \mathbb{R},$$

$$V(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\, c_n^2,$$

где c_n - коэффициенты Фурье функции u по системе $\{e_1, e_2, \cdots\}$. Нетрудно проверить, что V является проекционно-однородным потенциалом. Покажем теперь, что V является интегральной направляющей функцией для задачи (2.3.7). В самом деле, пусть $x \in W_T^{1,2}([0,T];H)$ и $f \in \mathcal{P}_F(x)$. Тогда

$$\widetilde{f} = b + ax + f \in \mathcal{P}_{\widetilde{F}}(x).$$

Заметим, что для каждого $s \in [0,T]$: $u = x(s)$ и $v = f(s)$ являются элементами пространства H. Имеем

$$\begin{aligned}\Big\langle x(s), b + ax(s) + f(s)\Big\rangle_H &= \big\langle u, b + au + v\big\rangle_H \\ &= \int_0^h a\big(u^2(\tau) + u'^2(\tau)\big)d\tau + b\int_0^h u(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^h \big(u(\tau)v(\tau) + u'(\tau)v'(\tau)\big)d\tau \\ &\geq a\|u\|_H^2 - b\sqrt{h}\|u\|_H - \|u\|_H\|v\|_H.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big\langle \nabla V(x(s)), \widetilde{f}(s)\Big\rangle_H ds \\ &\quad = \int_0^T \Big\langle x(s), b + ax(s) + f(s)\Big\rangle_H ds \\ &\quad \geq \int_0^T \Big(a\|x(s)\|_H^2 - b\sqrt{h}\|x(s)\|_H - \|f(s)\|_H\|x(s)\|_H\Big)\, ds \\ &\quad \geq a\|x\|_2^2 - b\sqrt{hT}\|x\|_2 - \int_0^T \|x(s)\|_H\ \varphi(s)(1 + \|x(s)\|_H)ds \\ &\quad \geq (a - vrai\max_{[0,T]}\varphi(s))\|x\|_2^2 - (b\sqrt{hT} + \|\varphi\|_2)\|x\|_2 > 0\end{aligned}$$

при $\|x\|_2$ достаточно больших. Поэтому,

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n\to\infty}\ sign\left(\int_0^T \big\langle P_n\nabla V(x(s)), \widetilde{f}(s)\big\rangle\, ds\right) &= \\ = sign\left(\int_0^T \big\langle \nabla V(x(s)), \widetilde{f}(s)\big\rangle_H\, ds\right) &= 1.\end{aligned}$$

Из теоремы 2.3.1 и того, что $Ind\, V \neq 0$ следует, что задача (2.3.7), и следовательно задача (2.3.6), имеет решение. □

2.3.4 Негладкие направляющие функции

Постановка задачи

Обозначим через $\mathcal{BC}(H)$ банахово пространство непрерывных ограниченных функций $BC((-\infty, 0]; H)$. Символ $C_T([0,T]; H)$ обозначает пространство всех функций $x \in C([0,T]; H)$ таких, что $x(0) = x(T)$.

Рассмотрим следующее функционально-дифференциальное включение:

$$x'(t) \in F(t, x_t) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T]. \tag{2.3.8}$$

Преположим, что мультиотображение $F\colon \mathbb{R} \times \mathcal{BC}(H) \to Kv(H)$ удовлетворяет условиям:

(F_T) мультиотображение F является $T-$периодическим по первому аргументу, т.е.

$$F(t + T, \varphi) = F(t, \varphi)$$

для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{BC}(H)$;

$(F1)'$ мультиотображение $F_{|_{[0,T]\times\mathcal{BC}(H)}}\colon [0, T] \times \mathcal{BC}(H) \to Kv(H)$ является верхним Каратеодори;

$(F2)'$ для каждого $r > 0$ существует функция $\nu_r \in L^2_+[0, T]$ такая, что для любой функции $x \in C_T([0, T]; H)\colon \|x\|_2 \leq r$ выполнено следующее отношение

$$\|F(s, \widetilde{x}_s)\|_H \leq \nu_r(s) \text{ для п.в. } s \in [0, T],$$

где $\widetilde{x}$ обозначает T-периодическое распространение функции x на $(-\infty, T]$.

Известно, что при выполнении условий $(F1)' - (F2)'$ мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F\colon C_T([0, T]; H) \to Cv(L^2([0, T]; H)),$$

$$\mathcal{P}_F(x) = \big\{f \in L^2([0, T]; H)\colon f(s) \in F(s, \widetilde{x}_s) \text{ для п.в. } s \in [0, T]\big\},$$

корректно определен и замкнут.

Пусть снова $A\colon W^{1,2}_T([0, T]; H) \to L^2([0, T]; H),\ Ax = x'$. Тогда мы можем заменить задачу о существовании $T-$периодических решений включения (2.3.8) задачей о существовании решений следующего включения

$$Ax \in \mathcal{P}_F(x). \tag{2.3.9}$$

Для введения понятия $*-$*обобщенного градиента* локально липщицевой функции $V\colon H \to \mathbb{R}$ нам понадобятся определение обобщенной производной $V^0(y_0;\nu)$ функции V в точке y_0 по направлению ν и определение обобщенного градиента $\partial V(y_0)$ функции V в y_0, которые были введены в первой главе.

Пусть $V\colon H \to \mathbb{R}$ - регулярная функция. Для каждого $i = 1, 2, ...$, определим функцию

$$V_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ V_i(y) = V(0, \cdots, 0, y, 0, \cdots).$$

Ясно, что V_i тоже является регулярным.

Введем понятие $*-$*обобщенного градиента* $\partial^* V(x)$ регулярной функции V в точке $x = (x_1, x_2, \cdots) \in H$ следующим образом:

$$\partial^* V(x) = \partial V_1(x_1) \times \partial V_2(x_2) \times ... \times \partial V_i(x_i) \times ... \subset \mathbb{R}^\infty,$$

где ∂V_i, $i = 1, 2, ...$ является обобщенным градиентом функции V_i.
Например, пусть $V\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$,

$$V(x) = |x_1| + |x_1 x_2 \cdots x_{100}| + \sum_2^\infty x_k^2,\ x = (x_1, x_2, \cdots). \tag{2.3.10}$$

Имеем, что $\partial^* V(x) = \partial V_1(x_1) \times \{2x_2\} \times \cdots \times \{2x_n\} \times \cdots$,
где

$$\partial V_1(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_1 > 0, \\ [-1, 1] & \text{если } x_1 = 0, \\ -1 & \text{если } x_1 < 0. \end{cases}$$

Определение 2.3.4. *Регулярная функция $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется проекционно-однородным потенциалом, если существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$Pr_n \partial^* V(x) = \partial^* V(P_n x) \tag{2.3.11}$$

при всех $n \geq n_0$ и $x \in H$, где $Pr_n\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ является проекцией на первые n координат.

Нетрудно видеть, что функция в (2.3.10) является проекционно-однородным потенциалом.

Определение 2.3.5. *Регулярная функция $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если существует $R_0 > 0$ такое, что*

$$(0, 0, \cdots, 0, \cdots) \notin \partial^* V(x)$$

при всех $x \in H$ таких, что $\|x\|_H \geq R_0$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$, снова отождествим $H_n \cong Pr_n\mathbb{R}^\infty \cong \mathbb{R}^n$. Тогда, сужение мультиполя $Pr_n\partial^* V$ на H_n, мы можем рассматривать как полунепрерывное сверху мультиполе $Pr_n\partial^* V : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$.

Из Определений 2.3.4 и 2.3.5 следует, что если V является невырожденным проекционно-однородным потенциалом, тогда мультиполя $Pr_n\partial^* V$ не имеют нулей на сфере $S^{n-1}(0, R)$ при всех $n \geq n_0$ и $R \geq R_0$. Поэтому, топологические степени

$$\gamma_n = deg(Pr_n\partial^* V, B^n(0, R)),\ n \geq n_0,$$

корректно определены и не зависят от $R \geq R_0$.

Индекс невырожденного проекционно-однородного потенциала V определяется следующим образом:

$$Ind\, V = (\gamma_{n_0}, \gamma_{n_0+1}, \cdots).$$

Под $Ind\, V \neq 0$ мы понимаем, что существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $\gamma_{n_k} \neq 0$ при всех n_k.

Для каждой непрерывной функции $x \in C_T([0, T]; H)$:

$$x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \cdots\big),\quad t \in [0, T],$$

под сечением $\upsilon(t) \in \partial^* V(x(t))$ мы понимаем

$$\upsilon(t) = \big(\upsilon_1(t), \upsilon_2(t), \cdots\big),\ t \in [0, T],$$

где $\upsilon_i(t) \in \partial V_i(x_i(t))$, для п.в. $t \in [0,T]$, $i \geq 1$, являются суммируемыми сечениями.

Определение 2.3.6. *Проекционно-однородный потенциал $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется негладкой интегральной направляющей функцией для задачи* (2.3.8)*, если существует $N > 0$ такое, что для любой функции $x \in C_T([0,T];H)$ из $\|x\|_2 \geq N$ следует, что*

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \upsilon_k(s) f_k(s)\, ds\right) = 1,$$

для всех функций $f \in \mathcal{P}_F(x)$, $f(s) = (f_1(s), f_2(s), ...)$ и всех сечений $\upsilon(s) \in \partial^* V(x(s))$.

Лемма 2.3.2. *Если V является негладкой интегральной направляющей функцией для задачи* (2.3.8)*, то V является невырожденным потенциалом, и следовательно, существует индекс $Ind\, V$.*

Доказательство. В самом деле, для любого $y = (y_1, y_2, \cdots) \in H$, $\|y\|_H \geq \frac{N}{\sqrt{T}}$, рассмотряя y как постоянную функцию мы имеем

$$\|y\|_2 \geq N.$$

Оттуда,

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \upsilon_k f_k(s)\, ds\right) = 1,$$

для всех $f \in \mathcal{P}_F(y)$ и всех $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots) \in \partial^* V(y)$.
Поэтому, $\upsilon \neq (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$. □

Основные теоремы

Теорема 2.3.5. *Пусть выполнены условия (F_T) и $(F1)' - (F2)'$. Предположим, что существует негладкая интегральная направляющая функция V для включения* (2.3.8) *такая, что $Ind\, V \neq 0$. Если $\mathcal{P}_F$ является $A-$разрешимым, то включение* (2.3.8) *имеет $T-$периодическое решение.*

Для доказательства нам понадобится следующее утверждение (см., например [45]).

Лемма 2.3.3. *Пусть функция* $\mathcal{V}\colon H_n \to \mathbb{R}$ *регулярна,* $x\colon [0,T] \to H_n$ *- абсолютно непрерывная функция. Тогда функция* $\mathcal{V}(x(t))$ *тоже абсолютно непрерывна и*

$$\mathcal{V}(x(t)) - \mathcal{V}(x(0)) = \int_0^t \mathcal{V}^0(x(s), x'(s))\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Доказательство теоремы 2.3.5. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим включение

$$A_n x \in \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(x)$$

или эквивалентно,

$$x \in G_n(x), \tag{2.3.12}$$

где A_n определяется в предыдущем параграфе и

$$G_n\colon C_T([0,T]; H_n) \to Cv\big(C_T([0,T]; H_n)\big),$$
$$G_n(x) = C_n x + (\Lambda_n \Pi_n + K_{C_n,Q_n}) \circ \mathbb{P}_n \mathcal{P}_F(x),$$

Как доказано в предыдущем параграфе, мультиоператор G_n вполне полунепрерывен сверху. Теперь покажем, что множество решений включения (2.3.9) априори ограничено в $C_T([0,T]; H)$. В самом деле, предположим, что $x \in W_T^{1,2}([0,T]; H)$ - решение включения (2.3.9). Тогда существует функция $f \in \mathcal{P}_F(x)$ такая, что $x'(t) = f(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$. Для любого сечения $\upsilon(s) \in \partial^* V(x(s))$ имеем

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\ sign\left(\sum_{k=1}^m \int_0^T \upsilon_k(s) f_k(s)\, ds\right) =$$
$$= \overline{\lim}_{m\to\infty}\ sign\left(\sum_{k=1}^m \int_0^T \upsilon_k(s) x_k^{'}(s)\, ds\right) \le$$
$$\le \overline{\lim}_{m\to\infty}\ sign\left(\sum_{k=1}^m \int_0^T V_k^0\big(x_k(s), x_k^{'}(s)\big)\, ds\right) =$$
$$= \overline{\lim}_{m\to\infty}\ sign\left(\sum_{k=1}^m \left(V_k\left(x_k(T)\right) - V_k\left(x_k(0)\right)\right)\right) = 0,$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots)$ и $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots)$, $t \in [0,T]$.
Отсюда, $\|x\|_2 < N$. Из $(F2)'$ следует, что существует $K > 0$ такое, что $\|x'\|_2 < K$. Тогда найдется $M > 0$, независящее от x, такое, что $\|x\|_C < M$.

Выбираем произвольно $R \ge \max\{R_0, M\}$, где R_0 - константа в Определении 2.3.5. Тогда включение (2.3.9) не имеет решений на $\partial B_{C_T}(0,R)$.

Покажем, что для каждого $n \geq n_0$

$$x \notin G_n(x)$$

при $x \in \partial B^{(n)}_{C_T}(0,R) = \partial B_{C_T}(0,R) \cap C_T([0,T];H_n)$.

Предположим противное, что $x^* \in \partial B^{(n_*)}_{C_T}(0,R)$, $n_* \geq n_0$, является решением включения (2.3.12). Тогда существует функция $f^* \in \mathcal{P}_F(x^*)$ такая, что $Ax^* = \mathbb{P}_{n_*} f^*$. Из выбора R следует, что $\|x^*\|_2 \geq N$. Поэтому,

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \upsilon_k(s) f_k^*(s)\,ds\right) = 1,$$

для всех сечений $\upsilon(s) \in \partial^* V(x^*(s))$, $s \in [0,T]$.
Так как функция x^* принимает значения в H_{n_*} и V является проекционно-однородным потенциалом, имеем

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^T \upsilon_k(s) f_k^*(s)\,ds\right)\\
&= sign\left(\sum_{k=1}^{n_*}\int_0^T \upsilon_k(s) f_k^*(s)\,ds\right)\\
&= sign\left(\sum_{k=1}^{n_*}\int_0^T \upsilon_k(s) x_k^{*\prime}(s)\,ds\right)\\
&\leq sign\left(\sum_{k=1}^{n_*}\int_0^T V_k^0\left(x_k^*(s), x_k^{*\prime}(s)\right)\,ds\right)\\
&= sign\Big(\sum_{k=1}^{n_*}\big(V_k(x_k^*(T) - V_k(x_k^*(0))\big)\Big) = 0,
\end{aligned}$$

что есть противоречие.
Таким образом, для каждого $n \geq n_0$ топологическая степень

$$\omega_n = deg(i - G_n, B^{(n)}_{C_T}(0,R))$$

корректно определена.
Аналогично доказательству Теоремы 2.2.1 мы получаем, что $\omega_n = (-1)^n \gamma_n$. Из $Ind\ V \neq 0$ и $A-$разрешимости включения (2.3.9) следует, что включение (2.3.8) имеет $T-$периодическое решение. □

Следуя Теоремам 2.2.2 и 2.2.3, представляем некоторые достаточные условия $A-$разрешимости мультиоператора $\mathcal{P}_F$.

Для банахова пространства Y, пусть $\mathcal{BC}(Y)$ банахово пространство всех непрерывных ограниченных функций $x\colon (-\infty, 0] \to Y$.

Теорема 2.3.6. *Пусть гильбертово пространство H компактно вложенно в банахово пространство Y. Предположим, что мультиотображение $\widetilde{F}\colon [0,T] \times \mathcal{BC}(Y) \to P(Y)$ удовлетворяет условиям:*

$(\widetilde{F})'$ *для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $\widetilde{F}(t,\cdot)\colon \mathcal{BC}(Y) \to P(Y)$ полунепрерывно сверху.*

Дополнительно предположим, что сужение $\widetilde{F}_{|_{[0,T]\times\mathcal{BC}(H)}}$ принимает значения в $Kv(H)$ и мультиотображение

$$F = \widetilde{F}_{|_{[0,T]\times\mathcal{BC}(H)}}\colon [0,T] \times \mathcal{BC}(H) \to Kv(H)$$

удовлетворяет условиям $(F1)' - (F2)'$.
Тогда $\mathcal{P}_F$ является $A-$разрешимым.

Теорема 2.3.7. *Пусть мультиотображение $F\colon [0,T] \times \mathcal{BC}(H) \to Kv(H)$ удовлетворяет условиям $(F1)' - (F2)'$. Тогда $\mathcal{P}_F$ является $A-$разрешимым при каждом из следующих условий:*

$(1i)$ *для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon \mathcal{BC}(H) \to Kv(H)$ является слабо полунепрерывным сверху, т.е. для любой последовательности $\{\psi^{(n)}\} \in \mathcal{BC}(H)$, $\psi^{(n)} \overset{\mathcal{BC}(H)}{\rightharpoonup} \psi^{(0)} \in \mathcal{BC}(H)$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon,t) > 0$ такое, что*

$$F(t,\psi^{(n)}) \subset O_\varepsilon\big(F(t,\psi^{(0)})\big)$$

для всех $n > N(\varepsilon,t)$;

$(2i)$ *существует $q_0 > 0$ такое, что для $n \geq q_0$ сужение мультиотображения $F(t,\cdot)$ на $\mathcal{BC}(H_n)$ принимает значения в $Kv(H_n)$ для п.в. $t \in [0,T]$.*

2.3.5 Пример

Для $h > 0$, пусть $H = W^{1,2}[0,h]$ и $Y = L^2[0,h]$. Ясно, что H компактно вложенно в Y. Пусть $V\colon Y \to \mathbb{R}$ определяется так:

$$V(y) = \frac{1}{2}|y_1| + \sum_1^\infty y_k^2, \quad y = (y_1, y_2, \cdots),$$

где y_i $(i = 1, 2, \cdots)$ - коэффициенты фурье функции y. Нетрудно видеть, что

$$\partial^* V(y) = \partial V_1(y_1) \times \{2y_2\} \times \{2y_3\} \times \cdots ,$$

где

$$\partial V_1(y_1) = \begin{cases} 2y_1 + \frac{1}{2} & \text{if } \ y_1 > 0, \\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] & \text{if } \ y_1 = 0, \\ 2y_1 - \frac{1}{2} & \text{if } \ y_1 < 0, \end{cases}$$

и мультиотображение $\partial^* V \colon Y \to Kv(Y)$ полунепрерывно сверху. Кроме того, сужение $\partial^* V_{|_H}$ принимает значения в $Kv(H)$ и

$$\|\partial^* V(y)\|_H \leq 2\|y\|_H + \frac{1}{2}, \text{ для всех } y = (y_1, y_2, \cdots) \in H. \tag{2.3.13}$$

Рассмотрим включение

$$x'(t) \in \partial^* V(x(t)) + G(t, x_t), \text{ для п.в. } \ t \in [0, T], \tag{2.3.14}$$

где $G \colon \mathbb{R} \times \mathcal{BC}(Y) \to P(Y)$.

Предположим, что:

(G_T) G является $T-$периодическим по первому аргументу;

$(G1)$ для п.в. $t \in [0, T]$ мультиотображение $G(t, \cdot) \colon \mathcal{BC}(Y) \to P(Y)$ полунепрерывно сверху;

$(G2)$ сужение $G_{|_{[0,T]\times\mathcal{BC}(H)}}$ принимает значения в $Kv(H)$ и мультиотображение $G \colon [0, T] \times \mathcal{BC}(H) \to Kv(H)$ является верхним Каратеодори;

$(G3)$ существует $0 < C < \frac{2}{\sqrt{T}}$ такое, что

$$\|G(s, \widetilde{\psi}_s)\|_H \leq C(1 + \|\psi\|_2),$$

для п.в. $s \in [0, T]$ и всех $\psi \in C_T([0, T]; H)$.

Теорема 2.3.8. *Пусть выполнены условия* (G_T) *и* $(G1)-(G3)$. *Тогда включение* (2.3.14) *имеет* $T-$*периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}\times\mathcal{BC}(Y)\to P(Y)$,

$$\widetilde{F}(t,\psi)=\partial^*V(\psi(0))+G(t,\psi).$$

Нетрудно проверить, что мультиотображение $\widetilde{F}$ является $T-$периодическим по первому аргументу и удовлетворяет условию $(\widetilde{F})'$ Теоремы 2.3.6. Рассмотрим $F=\widetilde{F}_{|_{[0,T]\times\mathcal{BC}(H)}}$. Легко видеть, что мультиотображение F принимает значения в $Kv(H)$ и является верхним Каратеодори. Смысл условия $(F2)'$ заключается в том, что для $r>0$ и $x\in C_T([0,T];H)$ таких, что $\|x\|_2\le r$, найдется $M_r>0$ такое, что $\|f\|_2\le M_r$ для всех $f\in\mathcal{P}_F(x)$. Из (2.3.13) и $(G3)$ следует, что мультиотображение F удовлетворяет $(F2)'$. В силу Теоремы 2.3.6 мультиоператор $\mathcal{P}_F$ является $A-$разрешимым.

Покажем теперь, что V является негладкой направляющей функцией для включения (2.3.14). В самом деле, пусть $x\in C_T([0,T];H)$ и возьмем произвольно $f\in\mathcal{P}_F(x)$. Тогда существуют функция $g\in\mathcal{P}_G(x)$ и сечение $\upsilon(s)\in\partial^*V(x(s))$ такие, что

$$f(s)=\upsilon(s)+g(s)\text{ для п.в. }t\in[0,T],$$

где

$$\mathcal{P}_G(x)=\{g\in L^2([0,T];H)\colon g(s)\in G(s,\widetilde{x}_s)\text{ для п.в. }s\in[0,T]\}.$$

Зметим, что для любого $s\in[0,T]$, $u=\upsilon(s)$ и $\omega=g(s)$ являются функциями в H и

$$\begin{aligned}\Big\langle\upsilon(s),f(s)\Big\rangle_H&=\big\langle u,u+\omega\big\rangle_H\\&=\int_0^h\big(u^2(\tau)+u'^2(\tau)\big)d\tau+\int_0^h\big(u(\tau)\omega(\tau)+u'(\tau)\omega'(\tau)\big)d\tau\\&\ge\|u\|_H^2-\|u\|_H\|\omega\|_H.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_0^T\Big\langle\upsilon(s),f(s)\Big\rangle_H ds&=\int_0^T\Big\langle\upsilon(s),\upsilon(s)+g(s)\Big\rangle_H ds\\&\ge\int_0^T\Big(\|\upsilon(s)\|_H^2-\|g(s)\|_H\|\upsilon(s)\|_H\Big)ds\\&\ge\|\upsilon\|_2^2-\int_0^T\|\upsilon(s)\|_H\,C(1+\|x\|_2)ds.\end{aligned}$$

Из (2.3.13) следует, что

$$\int_0^T \Big\langle \upsilon(s), f(s) \Big\rangle_H ds \geq \|\upsilon\|_2^2 - C(1+\|x\|_2)\int_0^T (2\|x(s)\|_H + \frac{1}{2})ds$$
$$\geq \|\upsilon\|_2^2 - 2C\sqrt{T}\|x\|_2^2 - (2C\sqrt{T} + \frac{TC}{2})\|x\|_2 - \frac{TC}{2}.$$

Заметим, что для любого сечения $\upsilon(s) \in \partial^* V(x(s))$ существует $\varepsilon \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ такое, что

$$\upsilon(s) = (2x_1(s) + \varepsilon, 2x_2(s), \cdots, 2x_n(s), \cdots), \quad s \in [0,T],$$

где $x(s) = (x_1(s), x_2(s), \cdots, x_n(s), \cdots)$, $s \in [0,T]$.
Следовательно,

$$\|\upsilon\|_2^2 = \int_0^T \|\upsilon(s)\|_H^2 ds = 4\int_0^T \|x(s)\|_H^2 ds + 4\varepsilon\int_0^T x_1(s)ds + \varepsilon^2 T$$
$$\geq 4\|x\|_2^2 - 2\int_0^T \|x(s)\|_H ds \geq 4\|x\|_2^2 - 2\sqrt{T}\|x\|_2.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^T \Big\langle \upsilon(s), f(s) \Big\rangle_H ds \geq (4 - 2C\sqrt{T})\|x\|_2^2$$
$$-(2\sqrt{T} + 2C\sqrt{T} + \frac{TC}{2})\|x\|_2 - \frac{TC}{2} > 0$$

при достаточно больших $\|x\|_2$. Поэтому,

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \sum_{k=1}^m \upsilon_k(s) f_k(s) ds\right) = 1.$$

Таким образом, V является негладкой направляющей функцией для включения (2.3.14). Ясно, что $Ind\, V \neq 0$. Поэтому, примененяя Теоремы 2.3.5, мы заключаем, что включение (2.3.14) имеет $T-$периодическое решение. □

2.4 Задача бифуркации с многомерными параметрами

2.4.1 Глобальные бифуркационные теоремы

Включения с $CJ-$мультиотображениями

Рассмотрим следующее семейство включений

$$Lx \in \mathcal{Q}(x, \mu), \tag{2.4.1}$$

где $L\colon W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \to L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$, $Lx = x'$, и
$\mathcal{Q}\colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k \to K\big(L^2([0,T];\mathbb{R}^n)\big)$ - мультиотображение такое, что:

$(Q1)$ Q является $CJ-$мультиотображением и $0 \in \mathcal{Q}(0,\mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$;

$(Q2)$ для любого ограниченного множества $\Omega \subset C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$ множество $Q(\Omega)$ ограничено в $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$.

Под решением задачи (2.4.1) мы понимаем пару $(x,\mu) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$, которая удовлетворяет (2.4.1). Ясно, что задача (2.4.1) имеет тривиальное решение $(0,\mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}^k$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных решений (2.4.1).

Определение 2.4.1. *Точка $(0,\mu_0) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$ называется точкой бифуркации для задачи (2.4.1) если для любого открытого множества $U \subset W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$, содержащего $(0,\mu_0)$, существует решение $(x,\mu) \in U$ задачи (2.4.1) такое, что $x \neq 0$.*

Определение 2.4.2. *Семейство непрерывно дифференцируемых функций $V_\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^k$, называется семейством локальных интегральных направляющих функций для (2.4.1) в $(0,0)$, если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ найдется достаточно малое число $\delta_\varepsilon > 0$ (которое непрерывно зависит от ε) такое, что для любой функции $x \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$, $0 < \|x\|_C \leq \delta_\varepsilon$, выполнено следующее отношение*

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s) \big\rangle \, ds > 0$$

при всех $\mu \in S^{k-1}(0,\varepsilon)$ *и* $f \in \mathcal{Q}(x,\mu)$, *где* ∇V_μ *обозначает градиент функции* V_μ.

Лемма 2.4.1. *Если* V_μ *является семейством локальных интегральных направляющих функций для* (2.4.1) *в* $(0,0)$, *то для любого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$:

(*a*) *включение* (2.4.1) *имеет только тривиальное решение* $(0,\mu)$ *на* $B_C(0,\delta_\varepsilon) \times S^{k-1}(0,\varepsilon)$;

(*b*) *уравнение* $\nabla V_\mu(w) = 0$ *имеет только тривиальное решение* $(0,\mu)$ *на* $B^n(0,\delta_\varepsilon) \times S^{k-1}(0,\varepsilon)$.

Доказательство. (a) Предположим, что $(x,\mu) \in B_C(0,\delta_\varepsilon) \times S^{k-1}(0,\varepsilon)$ - нетривиальное решение для (2.4.1). Тогда, существует $f \in \mathcal{Q}(x,\mu)$ такая, что $x'(t) = f(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$. В силу $|\mu| = \varepsilon$ и $\|x\|_C \le \delta_\varepsilon$ имеем

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), f(t) \big\rangle dt > 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), f(t) \big\rangle dt &= \int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), x'(t) \big\rangle dt \\ &= V_\mu(x(T)) - V_\mu(x(0)) = 0,\end{aligned}$$

что есть противоречие.

Аналогично, получаем заключение (b). □

Для каждого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, пусть $O_\varepsilon = B^{n+k}\big(0, \sqrt{\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon^2}\,\big)$ и определим отображение

$$\widetilde{V}_\varepsilon \colon O_\varepsilon \to \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\widetilde{V}_\varepsilon(w,\mu) = \big\{ -\nabla V_\mu(w), \varepsilon^2 - |\mu|^2 \big\}.$$

Из Леммы 2.4.1(b) следует, что $\widetilde{V}_\varepsilon$ не имеет нулей на сфере ∂O_ε. Отсюда, топологическая степень

$$deg(\widetilde{V}_\varepsilon, O_\varepsilon) = \omega_{\widetilde{V}_\varepsilon}(\mathbf{1}) \in \pi^{n+1}(S^{n+k}) = \pi_{n+k}(S^{n+1})$$

корректно определена.

Покажем, что эта топологическая степень не зависит от выбора $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. В самом деле, пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \colon 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$. Для каждого $\lambda \in [0,1]$, пусть $\varepsilon_{\lambda+1} = \lambda\varepsilon_2 + (1-\lambda)\varepsilon_1$,

$$O_{\varepsilon_{\lambda+1}} = B^{n+k}\Big(0, \sqrt{\varepsilon_{\lambda+1}^2 + \delta_{\varepsilon_{\lambda+1}}^2}\Big),$$

где $\delta_{\varepsilon_{\lambda+1}}$ - константа из Определения 2.4.2, и рассмотрим отображение

$$V_\lambda^\sharp \colon O_{\varepsilon_{\lambda+1}} \to \mathbb{R}^{n+1},$$
$$V_\lambda^\sharp(w,\mu) = \{-\nabla V_\mu(w), \varepsilon_{\lambda+1}^2 - |\mu|^2\}.$$

Предположим, что существуют $\lambda_* \in [0,1]$ и $(w_*, \mu_*) \in \partial O_{\varepsilon_{\lambda_*+1}}$ такие, что

$$V_{\lambda_*}^\sharp(w_*, \mu_*) = 0,$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} \nabla V_{\mu_*}(w_*) = 0, \\ |\mu_*| = \varepsilon_{\lambda_*+1}. \end{cases}$$

Из $(w_*, \mu_*) \in \partial O_{\varepsilon_{\lambda_*+1}}$ следует, что $|w_*| = \delta_{\varepsilon_{\lambda_*+1}}$. Последнее равенство противоречит утверждению Леммы 2.4.1(b). Отсюда, топологическая степень $deg(\widetilde{V}_\varepsilon, \overline{O_\varepsilon})$ одинакова для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Этот элемент называется *локальным индексом семейства* V_μ и обозначается символом $ind\, V_\mu$.

Теорема 2.4.1. *Пусть выполнены условия* $(Q1) - (Q2)$. *Дополнительно предположим, что существует семейство локальных интегральных направляющих функций* V_μ *для* (2.4.1) *такое, что* $ind\, V_\mu \neq 0$. *Тогда* $(0,0)$ *является точкой бифуркации для задачи* (2.4.1). *Кроме того, существует связное подмножество* $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $\overline{\mathcal{R}} \ni (0, \mu_*)$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что L является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса и

$$Ker\, L \cong \mathbb{R}^n \cong Coker\, L.$$

Проекция

$$\Pi_L \colon L^2([0,T]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n,$$

определяется равенством

$$\Pi_L(f) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)\,ds$$

и гомеоморфизм $\Lambda_L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является тождественным оператором. Пространство $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ может быть разложено следующим образом

$$L^2([0,T];\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1,$$

где $\mathcal{L}_0 = Coker\,L$ и $\mathcal{L}_1 = Im\,L$. Разложение элемента $f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^n$ обозначается так

$$f = f_0 + f_1, f_0 \in \mathcal{L}_0, f_1 \in \mathcal{L}_1.$$

Заменим включение (2.4.1) следующим эквивалентным включением

$$x \in G(x,\mu), \tag{2.4.2}$$

где

$$G\colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k \to K(C([0,T];\mathbb{R}^n)),$$
$$G(x,\mu) = P_L x + (\Pi_L + K_L)\mathcal{Q}(x,\mu),$$

и $K_L = K_{P_L,Q_L}$.
Определим отображение

$$\ell\colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k \to C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R},\ \ell(x,\mu) = (x,0).$$

Ясно, что ℓ является линейным фредгольмовым отображением индекса $k-1$. Для $r,\varepsilon > 0$ пусть

$$B_{r,\varepsilon} = \big\{(x,\mu) \in C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k\colon \|x\|_C^2 + |\mu|^2 \le r^2 + \varepsilon^2\big\},$$

и рассмотрим мультиотображение

$$G_r\colon B_{r,\varepsilon} \to K(C([0,T];\mathbb{R}^n)) \times \mathbb{R}),$$
$$G_r(x,\mu) = \big\{G(x,\mu), r^2 - \|x\|_C\big\}.$$

Шаг 1. Покажем, что G_r является компактным $CJ-$мультиотображением. В самом деле, из того, что $\mathcal{Q}$ является $CJ-$мультиотображением и оператор $\Pi_L + K_L$ является линейным и непрерывным следует, что $(\Pi_L + K_L) \circ \mathcal{Q}$ является $CJ-$мультиотображением, отсюда G_r является $CJ-$мультиотображением. Далее, из $(Q2)$ следует, что множество $(\Pi_L +$

$K_L) \circ \mathcal{Q}(B_{r,\varepsilon})$ ограничено в $W^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n)$, и в силу теорема вложения Соболева оно является относительно компактным множеством в $C([0,T];\mathbb{R}^n)$. Теперь, наше утверждение следует из того, что оператор P_L является непрерывным и принимает значения в конечномерным пространством.

Шаг 2. Выбирая произвольно $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и $r \in (0,\delta_\varepsilon)$, где ε_0 и δ_ε - константы из Определения 2.4.2, покажем, что $\ell(x,\mu) \notin G_r(x,\mu)$ для всех $(x,\mu) \in \partial B_{r,\varepsilon}$.

Действительно, предположим противное, что существует $(x,\mu) \in \partial B_{r,\varepsilon}$ такое, что $\ell(x,\mu) \in G_r(x,\mu)$. Тогда,

$$x \in G(x,\mu), \tag{2.4.3}$$

и

$$\|x\|_C = r. \tag{2.4.4}$$

Из (2.4.3) следует, что существует функция $f \in \mathcal{Q}(x,\mu)$ такая, что $x'(t) = f(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$.
В следствие (2.4.4), получим $|\mu| = \varepsilon$. Далее, из $\|x\|_C = r < \delta_\varepsilon$ имеем

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s)\big\rangle ds > 0$$

для всех $\mu \in S^{k-1}(0,\varepsilon)$.
С другой стороны,

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s)\big\rangle ds = \int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(s)), x'(s)\big\rangle ds = 0,$$

что есть противоречие.
Следовательно, индекс совпадения $Ind(\ell, G_r, B_{r,\varepsilon})$ корректно определен для каждых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и $r \in (0,\delta_\varepsilon)$

Шаг 3. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и $r \in (0,\delta_\varepsilon)$. Вычисляем теперь индекс совпадения $Ind(\ell, G_r, B_{r,\varepsilon})$. Для этого, рассмотрим мультиотображение

$$\Sigma\colon B_{r,\varepsilon} \times [0,1] \to K\big(C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}\big),$$

$$\Sigma(x,\mu,\lambda) = \Big\{P_L x + (\Pi_L + K_L) \circ \alpha\big(\mathcal{Q}(x,\mu),\lambda\big), \tau\Big\},$$

где

$$\tau = \lambda(r^2 - \|x\|_C^2) + (1-\lambda)(|\mu|^2 - \varepsilon^2),$$

и $\alpha\colon L^2([0,T];\mathbb{R}^n) \times [0,1] \to L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$,

$$\alpha(f,\lambda) = f_0 + \lambda f_1, f_0 \in \mathcal{L}_0, f_1 \in \mathcal{L}_1, f = f_0 + f_1.$$

Аналогично шагу 1, мы можем доказать, что Σ является компактным $CJ-$мультиотображением.

Пусть $(x^*, \mu^*, \lambda_*) \in \partial B_{r,\varepsilon} \times [0,1]$ такое, что $\ell(x^*, \mu^*) \in \Sigma(x^*, \mu^*, \lambda^*)$. Тогда

$$\lambda^*(r^2 - \|x^*\|_C^2) + (1-\lambda^*)(|\mu^*|^2 - \varepsilon^2) = 0 \tag{2.4.5}$$

и найдется функция $f^* \in \mathcal{Q}(x^*, \mu^*)$ такая, что

$$x^* = P_L x^* + (\Pi_L + K_L) \circ \alpha(f^*, \lambda^*)$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} (x^*)' = \lambda^* f_1^* \\ 0 = f_0^*, \end{cases}$$

где $f_0^* + f_1^* = f^*$, $f_0^* \in \mathcal{L}_0$ и $f_1^* \in \mathcal{L}_1$.
Из $(x^*, \mu^*) \in \partial B_{r,\varepsilon}$ следует, что

$$r^2 - \|x^*\|_C^2 = |\mu^*|^2 - \varepsilon^2.$$

Отсюда, в силу (2.4.5) получаем

$$\|x^*\|_C = r \ \text{ и } \ |\mu^*| = \varepsilon.$$

Из выбора r имеем

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_{\mu^*}(x^*(s)), f(s) \big\rangle ds > 0 \text{ для всех } f \in \mathcal{Q}(x^*, \mu^*).$$

Если $\lambda^* \neq 0$: то

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_{\mu^*}(x^*(s)), f^*(s) \big\rangle \, ds = \int_0^T \big\langle \nabla V_{\mu^*}(x^*(s)), \frac{1}{\lambda^*} x^{*\prime}(s) \big\rangle \, ds =$$
$$= \frac{1}{\lambda^*} \Big(V_{\mu^*}\big(x^*(T)\big) - V_{\mu^*}\big(x^*(0)\big) \Big) = 0,$$

что есть противоречие.

Если $\lambda^* = 0$, то $(x^*)' = 0$. Следовательно, $x^* \equiv a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = r$. Так как $\|a\|_C = |a| < \delta_\varepsilon$, для каждого $f \in \mathcal{Q}(a, \mu^*)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \big\langle \nabla V_{\mu^*}(a), f(s) \big\rangle \, ds &= \big\langle \nabla V_{\mu^*}(a), \int_0^T f(s)\, ds \big\rangle \\ &= T \big\langle \nabla V_{\mu^*}(a), \Pi_L f \big\rangle > 0. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Следовательно, $\Pi_L f \neq 0$ для всех $f \in \mathcal{Q}(a, \mu^*)$, в частности, $\Pi_L f^* \neq 0$. Но $\Pi_L f^* = \Pi_L f_0^* = 0$, что есть противоречие.

Таким образом, мультиотображение Σ является гомотопией на $\partial B_{r,\varepsilon}$, соединяющей мультиотображения $\Sigma(x,\mu,1) = G_r(x,\mu)$ и

$$\Sigma(x,\mu,0) = \big\{P_L x + \Pi_L \mathcal{Q}(x,\mu), |\mu|^2 - \varepsilon^2\big\}.$$

В силу гомотопической инвариантности индекса совпадения получаем

$$Ind(\ell, G_r, B_{r,\varepsilon}) = Ind(\ell, \Sigma(\cdot,\cdot,0), B_{r,\varepsilon}).$$

Мультиотображение $P_L + \Pi_L \mathcal{Q}$ принимает значения в $\mathbb{R}^n$, поэтому применяя свойство сужения индекса совпадения имеем

$$Ind(\ell, \Sigma(\cdot,\cdot,0), B_{r,\varepsilon}) = Ind(\ell, \Sigma(\cdot,\cdot,0), \overline{U}_{r,\varepsilon}),$$

где $\overline{U}_{r,\varepsilon} = B_{r,\varepsilon} \cap \mathbb{R}^{n+k}$.
В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ векторное мультиполе $\ell - \Sigma(\cdot,\cdot,0)$ имеет вид

$$\ell(y,\mu) - \Sigma(y,\mu,0) = \big\{-\Pi_L Q(y,\mu), \varepsilon^2 - |\mu|^2\big\},\ \forall (y,\mu) \in \overline{U}_{r,\varepsilon} \subset \mathbb{R}^{n+k}.$$

Рассмотрим теперь мультиотображение $\Gamma\colon \overline{U}_{r,\varepsilon} \times [0,1] \to K(\mathbb{R}^{n+1})$, определенное следующим образом

$$\Gamma(y,\mu,\lambda) = \big\{-\lambda \Pi_L \mathcal{Q}(y,\mu) + (\lambda - 1)\nabla V_\mu(y),\ \varepsilon^2 - |\mu|^2\big\}.$$

Нетрудно проверить, что Γ является компактным $CJ-$мультиотображением. Предположим, что существует $(y,\mu,\lambda) \in \partial U_{r,\varepsilon} \times [0,1]$ такое, что $0 \in \Gamma(y,\mu,\lambda)$, т.е.,

$$\begin{cases} |\mu| = \varepsilon \\ (\lambda - 1)\nabla V_\mu(y) \in \lambda \Pi_L \mathcal{Q}(y,\mu), \end{cases}$$

и в силу (2.4.6) получаем противоречие. Поэтому, Γ является гомотопией, соединяющей $\ell - \Sigma(\cdot,\cdot,0)$ и $\widetilde{V}_\varepsilon$. Последовательно,

$$Ind\big(\ell, \Sigma(\cdot,\cdot,0), \overline{U}_{r,\varepsilon}\big) = deg\big(\widetilde{V}_\varepsilon, \overline{U}_{r,\varepsilon}\big) = ind V_\mu \neq 0. \tag{2.4.7}$$

Шаг 4. Пусть $\mathcal{O} \subset C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$ - открытое множество, определенное так

$$\mathcal{O} = \big(C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k\big) \setminus \big(\{0\} \times (\mathbb{R}^k \setminus B^k(0,\varepsilon_0))\big).$$

Из $Ind\,(\ell, G_r, B_{r,\varepsilon}) \neq 0$ для любых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и $r \in (0,\delta_\varepsilon)$ следует, что существует $(x,\mu) \in B_{r,\varepsilon}$ такое, что $\ell(x,\mu) \in G_r(x,\mu)$, или эквивалентно,

$$\begin{cases} x \in G(x,\mu), \\ \|x\|_C = r, \end{cases}$$

т.е., $(x,\mu) \in B_{r,\varepsilon}$ является нетривиальным решением задачи (2.4.2). Следовательно, $(0,0)$ является точкой бифуркации для (2.4.2), и отсюда, она является точкой бифуркации для (2.4.1). Обозначим через $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \cup \{(0,0)\} \subset \mathcal{O}$ связный компонент точки $(0,0)$. Покажем, что $\mathcal{R}$ не является компактным. Предположим противное, что $\mathcal{R}$ компактно. Тогда существует открытое ограниченное подмножество $U \subset \mathcal{O}$ такое, что

$$\overline{U} \subset \mathcal{O},\ \mathcal{R} \subset U \text{ и } \partial U \cap \mathcal{S} = \emptyset.$$

Отсюда, для каждого $r > 0$

$$\ell(x,\mu) \notin G_r(x,\mu),\ \forall (x,\mu) \in \partial U.$$

Далее, для любых $0 < r < R$, компактные $CJ-$мультиотображения G_r и G_R на $\overline{U}$ могут быть соединены гомотопией $G_{\lambda r+(1-\lambda)R}$. Для достаточно больших R,

$$\ell(x,\mu) \notin G_R(x,\mu),\ \forall (x,\mu) \in \overline{U},$$

поэтому, $Ind\,(\ell, G_R, \overline{U}) = 0$. Следовательно, $Ind\,(\ell, G_r, \overline{U}) = 0$ для всех $r > 0$.
Теперь, пусть $\Lambda = \{\mu \in \mathbb{R}^k \colon (0,\mu) \in \overline{U}\}$. Из $\overline{U} \subset \mathcal{O}$ следует, что

$$\Lambda \subset B^k(0,\varepsilon_0). \tag{2.4.8}$$

Из Леммы 2.4.1(a) и непрерывной зависимости числа δ_ε от ε следует, что мы можем выбрать $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $0 < r < \delta_\varepsilon$ такие, что $B_{r,\varepsilon} \subset U$ и включение

$$x \in G(x,\mu)$$

имеет только тривиальные решения в $\overline{B_C(0,r)}$ для всех $\mu \in \mathbb{R}^k$ таких, что

$$\varepsilon \le |\mu| < \varepsilon_0.$$

Из (2.4.8) и выбора r, ε имеем

$$Coin(\ell, G_r, \overline{U}) := \{(x,\mu) \in \overline{U} \colon \ell(x,\mu) \in G_r(x,\mu)\} \subset B_{r,\varepsilon}.$$

Поэтому,

$$0 = Ind\,(\ell, G_r, \overline{U}) = Ind\,(\ell, G_r, B_{r,\varepsilon}) \neq 0,$$

что есть противоречие. Таким образом, $\mathcal{R}$ является некомпактным компонентом, т.е. либо $\mathcal{R}$ неограничено, либо $\overline{\mathcal{R}} \cap \partial\overline{\mathcal{O}} \neq \emptyset$. $\square$

Дифференциальные включения

Рассмотрим теперь семейство дифференциальных включений

$$\begin{cases} x'(t) \in \mathcal{F}(t, x(t), \mu) \ \text{ для п.в. } \ t \in [0, T], \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{2.4.9}$$

где $\mathcal{F}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - мультиотображение такое, что

($\mathcal{F}1$) $\mathcal{F}$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^2-ростом;

($\mathcal{F}2$) $0 \in \mathcal{F}(t, 0, \mu)$ при всех $\mu \in \mathbb{R}^k$ и п.в. $t \in [0, T]$.

Из условия ($\mathcal{F}1$) следует, что мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k \to Cv\big(L^2([0,T];\mathbb{R}^n)\big),$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(x,\mu) = \big\{f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^n)\colon f(t) \in \mathcal{F}(t, x(t), \mu) \text{ для п.в. } t \in [0,T]\big\},$$

корректно определен и замкнут.

Тогда задача (2.4.9) эквивалентна следующему включению

$$Lx \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(x, \mu), \tag{2.4.10}$$

где оператор L определен выше.

Определение 2.4.3. *Под решением задачи* (2.4.9) *мы понимаем пару* $(x, \mu) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$, *которая удовлетворяет* (2.4.10).

Ясно, что задача (2.4.9) имеет тривиальное решение $(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}^k$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных решений задачи (2.4.9).

Определение 2.4.4. *Семейство непрерывно дифференцируемых функций* $V_\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^k$, *называется семейством локальных интегральных направляющих функций для* (2.4.9) *в точке* $(0,0)$, *если существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для каждого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *найдется число* $\delta_\varepsilon > 0$ *(которое непрерывно зависит от* ε*) такое, что для любой функции* $x \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$, $0 < \|x\|_C \le \delta_\varepsilon$, *выполнено следующее отношение*

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s) \big\rangle \, ds > 0$$

для всех $\mu \in S^{k-1}(0,\varepsilon)$ *и* $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(x,\mu)$.

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству Теоремы 2.4.1.

Теорема 2.4.2. *Пусть выполнены условия* $(\mathcal{F}1)-(\mathcal{F}2)$. *Дополнительно предположим, что существует семейство локальных интегральных направляющих функций* V_μ *для* (2.4.9) *в* $(0,0)$ *такое, что* $indV_\mu \neq 0$. *Тогда* $(0,0)$ *является точкой бифуркации для* (2.4.9) *и существует связное множество* $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограниченно, либо* $\overline{\mathcal{R}} \ni (0,\mu_*)$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

2.4.2 Применение к управляемым системам

Рассмотрим семейство управляемых систем

$$\begin{cases} x'(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), y(t), \mu\big), \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ y'(t) \in G\big(t, x(t), y(t), \mu\big), \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ y(0) = 0;\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{2.4.11}$$

где $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $G\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \to Kv(\mathbb{R}^m)$; $\mu \in \mathbb{R}^2$ - параметр и $A(\mu)$ определяется равенством:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 2\mu_1 & 2\mu_2 \\ 2\mu_2 & -2\mu_1 \end{pmatrix},\ \mu = (\mu_1, \mu_2). \tag{2.4.12}$$

Здесь $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$ является траекторией системы, $y\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$ является функцией управления. Первое уравнение описывает динамику системы и дифференциальное включение отображает закон обратной связи.

Под решением для системы мы понимаем пару

$$(x,\mu) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$$

для которой существует функция $y \in W^{1,1}([0,T];\mathbb{R}^m)$ такая, что тройка (x,y,μ) удовлетворяет (2.4.11).

Предположим, что

$(f1)$ f является отображением Каратеодори;

$(f2)$ существует $c > 0$ такое, что

$$|f(t, u, v, \mu)| \leq c|u|(|v| + |\mu|),$$

для п.в. $t \in [0, T]$ и всех $(u, v, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$;

$(G1)$ G является верхним Каратеодори мультиотображением;

$(G2)$ существует $d > 0$ такое, что

$$\|G(t, u, v, \mu)\| \leq d(|u| + |v| + |\mu|),$$

для п.в. $t \in [0, T]$ и всех $(u, v, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$.

Из $(f2)$ следует, что $(0, \mu)$ является решением для (2.4.11) при всех $\mu \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиалных решений задачи (2.4.11).

В дальнейшем нам понадобятся следующие теоремы о множестве решений дифференциальных включений.

Лемма 2.4.2. *(см. [70, Теорема 70.6]). Пусть $\mathcal{F}\colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^1-подлинейным ростом. Тогда множество решений задачи Коши*

$$\begin{cases} u'(t) \in \mathcal{F}(t, u(t)), \ \text{для п.в. } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

является $R_\delta-$множеством в $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ для каждого $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2.4.3. *(см. [90, Теорема 5.2.5]). Пусть $\mathcal{E}$ - сепарабельное банахово пространство, Λ - метрическое пространство, и $\mathcal{F}\colon [0, T] \times \mathcal{E} \times \Lambda \to Kv(\mathcal{E})$ - верхнее Каратеодори мультиотображение, удовлетворяющее следующим условиям:*

$(\mathcal{F}1)$ *существует $k > 0$ такое, что*

$$\|\mathcal{F}(t, w, \lambda)\|_{\mathcal{E}} \leq k(1 + \|w\|_{\mathcal{E}} + \|\lambda\|_{\Lambda})$$

для всех $(w, \lambda) \in \mathcal{E} \times \Lambda$ и п.в. $t \in [0, T]$;

$(\mathcal{F}2)$ *существует функция* $\gamma \in L^1_+[0,T]$ *такая, что*

$$\chi\big(\mathcal{F}(t,\Omega,\Lambda)\big) \le \gamma(t)\,\chi(\Omega)$$

для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{E}$, *где* χ *обозначает меру некомпактности Хаусдорфа.*

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ *обозначим через* $\Sigma_{u_0}^{\mathcal{F}(\cdot,\cdot,\lambda)}$ *множество решений задачи Коши*

$$\begin{cases} u'(t) \in \mathcal{F}(t,u(t),\lambda) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

Тогда мультиотображение $\lambda \to \Sigma_{u_0}^{\mathcal{F}(\cdot,\cdot,\lambda)}$ *полунепрерывно сверху.*

Описываем теперь глобальную структуру множество решений задачи (2.4.11).

Теорема 2.4.3. *Пусть выполнены условия* $(f1)-(f2)$ *и* $(G1)-(G2)$. *Дополнительно предположим, что*

$$c(1+Tde^{Td}) < 2.$$

Тогда $(0,0) \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ *является единственной точкой бифуркации для* (2.4.11) *и, кроме того, существует неограниченное связное подмножество* $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$.

Доказательство. Для заданной $(x,\mu) \in C([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ рассмотрим мультиотображение

$$G_{(x,\mu)}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^m \to Kv(\mathbb{R}^m),\ G_{(x,\mu)}(t,z) = G(t,x(t),z,\mu).$$

Нетрудно проверить, что $G_{(x,\mu)}$ удовлетворяет все требования Леммы 2.4.2. Поэтому, для каждой парой $(x,\mu) \in C([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ множество $\Psi_{(x,\mu)}$ всех решений задачи

$$\begin{cases} y'(t) \in G(t,x(t),y(t),\mu) \text{ для п.в. } t \in [0,T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

является $R_\delta-$множеством в $C\big([0,T];\mathbb{R}^m\big)$.
Кроме того, для каждого $r > 0$ пусть $\Lambda = B_C(0,r) \times B^2(0,r)$, и рассмотрим мультиотображение

$$\Pi\colon [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \Lambda \to Kv(\mathbb{R}^m),\ \Pi(t,w,x,\mu) = G_{(x,\mu)}(t,w).$$

Ясно, что мультиотображение Π удовлетворяет условиям Леммы 2.4.3. Следовательно, мультиотображение $(x,\mu) \to \Psi_{(x,\mu)}$ полунепрерывно сверху во всех точках $(x,\mu) \in \Lambda$. Так как мы можем выбрать произвольно $r > 0$, поэтому мультиотображение

$$\Psi\colon C([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to K\big(C([0,T];\mathbb{R}^m)\big),\ \Psi(x,\mu) = \Psi_{(x,\mu)},$$

тоже полунепрерывно сверху.

Теперь определим следующие отображение и мультиотображение

$$\widetilde{\Psi}\colon C([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to K\big(C([0,T];\mathbb{R}^2) \times C([0,T];\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^2\big),$$
$$\widetilde{\Psi}(x) = \{x\} \times \Psi(x,\mu) \times \{\mu\},$$

$$B\colon C([0,T];\mathbb{R}^2) \times C([0,T];\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^2 \to L^2([0,T];\mathbb{R}^2),$$
$$B(x,y,\mu)(t) = A(\mu)x(t) + f(t,x(t),y(t),\mu),\ t \in [0,T].$$

Тогда задача (2.4.11) может быть представлена в виде

$$Lx \in \mathcal{Q}(x,\mu), \tag{2.4.13}$$

где $L\colon W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^2) \to L^2([0,T];\mathbb{R}^2)$ - оператор дифферецирования и

$$\mathcal{Q}\colon C([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to K(L^2([0,T];\mathbb{R}^2)),\ \mathcal{Q}(x,\mu) = B \circ \widetilde{\Psi}(x,\mu).$$

Легно видеть, что $\mathcal{Q}$ является $CJ-$мультиотображение, и отсюда, условие $(Q1)$ выполнено.

Пусть $\Omega \subset C([0,T];\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ - ограниченное множество и (x,μ) - произвольная точка в Ω. Для $g \in \mathcal{Q}(x,\mu)$ существует $y \in \Psi(x,\mu)$ такое, что

$$g(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t,x(t),y(t),\mu\big) \text{ для п.в. } t \in [0,T]. \tag{2.4.14}$$

Из $y \in \Psi(x,\mu)$ следует, что существует функция $h \in L^1([0,T];\mathbb{R}^m)$ такая, что $h(t) \in G\big(t,x(t),y(t),\mu\big)$ для п.в. $t \in [0,T]$ и

$$y(t) = \int_0^t h(s)ds,\ \text{при всех } t \in [0,T].$$

Из $(G2)$ вытекает

$$|y(t)| \le \int_0^t |h(s)|ds \le d\int_0^t \big(|x(s)| + |y(s)| + |\mu|\big)ds$$
$$\le dT(\|x\|_{\mathcal{C}} + |\mu|) + \int_0^t d|y(s)|ds.$$

В силу Леммы 1.1.1 получаем

$$|y(t)| \le Td(\|x\|_{\mathcal{C}} + |\mu|)e^{Td} \text{ для всех } t \in [0,T]. \tag{2.4.15}$$

Теперь, ограниченность множества $\mathcal{Q}(\Omega)$ следует из (2.4.14)-(2.4.15) и $(f2)$. Поэтому, условие $(Q2)$ тоже выполнено.

Покажем теперь, что семейство функций $V_\mu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$V_\mu(w) = \mu_1 w_1^2 + 2\mu_2 w_1 w_2 - \mu_1 w_2^2, \quad w = (w_1, w_2), \ \mu = (\mu_1, \mu_2),$$

является семейством локальных интегральных направляющих функций для (2.4.13) в $(0,0)$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ и $\mu \in S^1(0,\varepsilon)$. Для $x \in C([0,T];\mathbb{R}^2)$ выбираем произвольно $g \in \mathcal{Q}(x,\mu)$. Тогда существует функция $y \in \Psi(x,\mu)$ такая, что

$$g(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), y(t), \mu\big) \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

В силу $(f2)$ и (2.4.15) имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), g(t)\big\rangle dt = \int_0^T \big\langle A(\mu)x(t), A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), y(t), \mu\big)\big\rangle dt \\
&\ge \int_0^T |A(\mu)x(t)|^2 dt - \int_0^T |A(\mu)x(t)||f(t, x(t), y(t), \mu)| dt \\
&\ge 4|\mu|^2\|x\|_2^2 - 2|\mu| \int_0^T |x(t)|\, c\, |x(t)| \big(|y(t)| + |\mu|\big) dt \\
&\ge 4|\mu|^2\|x\|_2^2 - 2c|\mu| \int_0^T |x(t)|^2 \big(Td(\|x\|_C + |\mu|)e^{Td} + |\mu|\big) dt = \\
&= 4|\mu|^2\|x\|_2^2 - 2c|\mu|\, \|x\|_2^2 \left(Tde^{Td}\|x\|_C + Tde^{Td}|\mu| + |\mu|\right) \\
&= 2|\mu|^2\|x\|_2^2\big(2 - c(1 + Tde^{Td})\big) - 2cTde^{Td}|\mu|\, \|x\|_2^2\, \|x\|_C \\
&= 2|\mu|\, \|x\|_2^2 \Big(|\mu|\big(2 - c(1 + Tde^{Td})\big) - cTde^{Td}\|x\|_C\Big).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), g(t)\big\rangle dt > 0$$

при

$$0 < \|x\|_C < \frac{|\mu|\big(2 - c(1 + Tde^{Td})\big)}{cTde^{Td}} = \frac{\varepsilon\big(2 - c(1 + Tde^{Td})\big)}{cTde^{Td}}. \tag{2.4.16}$$

Таким образом, V_μ является семейством локальных интегральных направляющих функций для (2.4.13) в $(0,0)$.

Для каждого $\varepsilon > 0$, выбираем δ_ε такое, что

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\big(2 - c(1 + Tde^{Td})\big)}{cTde^{Td}}.$$

Пусть $O_\varepsilon = B^4\big(0, \sqrt{\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon^2}\,\big)$ и рассмотрим отображение

$$\widetilde{V}_\varepsilon \colon O_\varepsilon \to \mathbb{R}^3,$$
$$\widetilde{V}_\varepsilon(w, \mu) = \big\{ -\nabla V_\mu(w), \varepsilon^2 - |\mu|^2 \big\}$$
$$= \big\{ -(2\mu_1 w_1 + 2\mu_2 w_2), -(2\mu_2 w_1 - 2\mu_1 w_2), \varepsilon^2 - |\mu|^2 \big\},$$

Покажем, что $indV_\mu \neq 0$. Для этого, рассмотрим нерерывное отображение

$$H \colon O_\varepsilon \times [0,1] \to \mathbb{R}^3,$$
$$H(w, \mu, \lambda) = \{-\nabla V_\mu(w), \lambda|w|^2 + (1-\lambda)\varepsilon^2 - |\mu|^2\}.$$

Предположим, что существует $(w, \mu, \lambda) \in \partial O_\varepsilon \times [0,1]$ такое, что $H(w, \mu, \lambda) = 0$, тогда имеем

$$\begin{cases} -\nabla V_\mu(w) = 0, \\ \lambda|w|^2 - |\mu|^2 = (\lambda - 1)\varepsilon^2, \\ |w|^2 + |\mu|^2 = \varepsilon^2 + \delta_\varepsilon^2. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений системы следует, что

$$|w|^2 = \frac{\lambda\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon^2}{1+\lambda} \quad \text{и} \quad |\mu|^2 = \frac{\varepsilon^2 + \lambda\delta_\varepsilon^2}{1+\lambda}.$$

Следовательно, w и μ являются ненулевымм элементами в $\mathbb{R}^2$. Что противоречит первому уравнению. Поэтому, H является гомотопией, соединяющей $\widetilde{V}_\varepsilon = H(\cdot,\cdot,0)$ и $H(\cdot,\cdot,1)$. Отсюда

$$deg(\widetilde{V}_\varepsilon, O_\varepsilon) = deg\big(H(\cdot,\cdot,1), O_\varepsilon\big).$$

С другой стороны, отображение $H(\cdot,\cdot,1)\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ обращается в нуль только в $(0,0)$ и сужение $h = -H(\cdot,\cdot,1)_{|_{S^3}} \colon S^3 \to S^2$ является раслоением Хопфа (см., например [86]). Поэтому,

$$deg\big(H(\cdot,\cdot,1), O_\varepsilon\big) = deg\big(H(\cdot,\cdot,1), B^4\big) = deg(-h, B^4) = \Sigma[-h] \neq 0,$$

где отображение Σ определено в Примере 1.6.1.

Таким образом, $(0,0)$ является точкой бифуркации для (2.4.11). Далее, из того, что отношение (2.4.16) выполнено для всех $\varepsilon > 0$ следует, что $(0,0)$ является единственной точкой бифуркации для (2.4.11). Теперь, наше доказательство завершено применением Теоремы 2.4.1. □

2.4.3 Применение к дифференциальным вариационным неравенствам

Вариационные неравенства

Пусть H - гильбертово пространство со скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ и нормой $\| \cdot \|_H$; $K \subset H$ - замкнутое выпуклое множество. Напомним, что отображение $g\colon K \to H$ называется:

a) *непрерывной на конечномерных подпространствах* если оно непрерывно на $K \cap U$ для любого конечномерного подпространства U пространства H такого, что $K \cap U \neq \emptyset$ (отметим, что любое непрерывное отображение из K в H является непрерывным на конечномерных подпространствах).

b) *квазимонотонным* если для любых $x, y \in K$, из

$$\langle x - y, g(y) \rangle_H \geq 0 \text{ следует } \langle x - y, g(x) \rangle_H \geq 0.$$

c) *монотонным* если

$$\langle x - y, g(x) - g(y) \rangle_H \geq 0 \text{ для всех } x, y \in K.$$

d) *коэрцитивным* если

$$\frac{\langle x, g(x) \rangle_H}{\|x\|_H} \to \infty \quad \text{при} \quad \|x\|_H \to \infty \quad \text{и} \quad x \in K.$$

Лемма 2.4.4. *(см. [38, Лемма 2.1]). Пусть $g\colon K \to H$ - квазимонотонное отображение, которое является непрерывным на конечномерных подпространствах. Тогда $w^* \in K$ является решением проблемы*

$$\langle u - w, g(w) \rangle_H \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad u \in K,$$

тогда и только тогда, когда

$$\langle u - w^*, g(u) \rangle_H \geq 0 \quad \textit{для всех} \quad u \in K.$$

Лемма 2.4.5. *(см. [91, Лемма 3.1]) Пусть K - замкнутый выпуклый конус в H и g - отображение из K в H. Тогда $w^* \in K$ удовлетворяет отношению*

$$\big\langle u - w^*, g(w^*)\big\rangle_H \geq 0 \quad \text{для всех} \quad u \in K$$

тогда и только тогда, когда

$$g(w^*) \in K^* \quad \text{и} \quad \big\langle w^*, g(w^*)\big\rangle_H = 0,$$

где K^* - сопряженный конус.

Лемма 2.4.6. *(см. [38, Теорема 3.2]). Пусть K - закнутый выпуклый конус в H и $g\colon K \to H$ - коэрцитивное и квазимонотонное отображение, которое является непрерывным на конечномерных подпространствах. Тогда существует $x^* \in K$ такое, что*

$$\big\langle u - x^*, g(x^*)\big\rangle_H \geq 0 \quad \text{для всех} \quad u \in K.$$

Постановка задачи

Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ - замкнутый выпуклый конус. Рассмотрим задачу о глобальной бифуркации семейства периодических решений дифференциальных вариационных неравенств (ДВН) типа:

$$\begin{cases} x'(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), u(t), \mu\big) & \text{п.в.} \ \ t \in [0,T], \\ \Big\langle \widetilde{u} - u(t), G\big(t, x(t), \mu\big) + F(u(t))\Big\rangle \geq 0 & \text{п.в.} \ \ t \in [0,T], \ \forall\, \widetilde{u} \in K, \\ x(0) = x(T) \ \ \text{и} \ \ u(t) \in K, \end{cases} \tag{2.4.17}$$

где $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, и $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ являются *непрерывными отображениями*; $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ - отображение, определенное формулой

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} c\mu_1 & c\mu_2 \\ c\mu_2 & -c\mu_1 \end{pmatrix}, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2), \tag{2.4.18}$$

при этом, $c > 0$ - заданное число и $\mu \in \mathbb{R}^2$ - параметр.

Понятие ДВН было исползовано в книге J.-P. Aubin'a и A. Cellina [13] в

1984г. Однако, ДВН были систематически изучены только в работе J.-S. Pang'a и D.E. Steward'a [124]. В этой работе, J.-S. Pang и D.E. Steward показаны, что ДВН могут быть использованы для описания многих прикладных математических моделей.

Так как K является замкнутым выпуклым конусом, задача (2.4.17) эквивалентна следующей задаче (см. [91]),

$$\begin{cases} x'(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), u(t), \mu\big) & \text{п.в. } t \in [0,T], \\ K \ni u(t) \perp G\big(t, x(t), \mu\big) + F(u(t)) \in K^* & \text{п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{2.4.19}$$

которую будем называть *дифференциальной системой с дополнением* (ДСД) Напомним, что первоначальная версия ДСД является *вариационными неравенствами эволюции*, которые были введены в работе C. Henry [81, 82] как класс дифференциальных включений. Среди большого количества работ, посвященных ДСД перечисляем работу D. Hipfel'a [84] для нелинейных ДСД, работы W.P.H. Heemels'a [80] и M.K. Camlibel'a [30] для линейных ДСД. Теория устойчивости для ДСД была изучена в работах [1, 31, 67, 68, 69] и.т.д.

Для изучения глобальной бифуркации решений задачи (2.4.17) (или эквивалентно, задача (2.4.19)) мы заменим (2.4.17) семейством дифференциальных включений, и затем применим глобальную бифуркационную теорию для включений.

Сделаем следующие предположения.

$(H1)$ для каждого $(t, z, \mu) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ множество

$$f(t, z, \Omega, \mu) := \{f(t, z, y, \mu) \colon y \in \Omega\}$$

выпукло для любого выпуклого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^m$;

$(H2)$ существуют положительные числа $\alpha_f, \alpha_G, c_1, c_2$ такие, что $\alpha_f < c$ и

$$|f(t,z,y,\mu)| \le \alpha_f\,|z|\,(|y|+|\mu|),$$
$$|G(t,z,\mu)| \le \alpha_G\,|z|^{c_1}(1+|\mu|^{c_2}),$$

для $(t,z,y,\mu) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^2$, где $c>0$ - заданное число в (2.4.18);

$(H3)$ F монотонно на K и существует $a>0$ такое, что

$$\big\langle w, F(w)\big\rangle \ge a\,|w|^2 \ \text{ для всех } \ w\in K.$$

Лемма 2.4.7. *(ср. [124, Свойство 6.2]). Пусть выполнено условие* $(H3)$. *Тогда:*

(a) *для каждого* $r\in\mathbb{R}^m$ *множество решений*

$$SOL(K,r+F) = \{w\in K\colon \big\langle \widetilde{w}-w, r+F(w)\big\rangle \ge 0,\ \forall \widetilde{w}\in K\}$$

непусто, выпукло и замкнуто;

(b) $|w|\le \frac{1}{a}|r|$ *для всех* $w\in SOL(K,r+F)$, $r\in\mathbb{R}^m$, *где* a *- константа из* $(H3)$.

Доказательство. (a) Ясно, что для каждого $r\in\mathbb{R}^m$ отображение $r+F$ монотонно на K. Из $(H3)$ следует, что

$$\frac{\big\langle w, r+F(w)\big\rangle}{|w|} \to \infty \ \text{ при } \ |w|\to\infty \ \text{ и } \ w\in K.$$

Отсюда, в силу Леммы 2.4.6 множество $SOL(K,r+F)$ непусто. Из непрерывности отображения F вытекает, что множество $SOL(K,r+F)$ замкнуто. Покажем, что оно выпукло, т.е. нам нужно показать, что для любых $y,z\in SOL(K,r+F)$ и $\lambda\in[0,1]$:

$$\big\langle u-\lambda y-(1-\lambda)z, r+F(\lambda y+(1-\lambda)z)\big\rangle \ge 0 \ \text{ для всех } \ u\in K,$$

или эквивалентно (см. Лемму 2.4.4):

$$\big\langle u-\lambda y-(1-\lambda)z, r+F(u)\big\rangle \ge 0 \ \text{ для всех } \ u\in K.$$

В самом деле, так как $y, z \in SOL(K, r+F)$ имеем

$$\big\langle u-y, r+F(y)\big\rangle \geq 0 \ \text{ для всех } \ u \in K,$$

и

$$\big\langle u-z, r+F(z)\big\rangle \geq 0 \ \text{ для всех } \ u \in K,$$

или эквивалентно (см. Лемму 2.4.4):

$$\big\langle u-y, r+F(u)\big\rangle \geq 0 \ \text{ для всех } \ u \in K,$$

и

$$\big\langle u-z, r+F(u)\big\rangle \geq 0 \ \text{ для всех } \ u \in K.$$

Следовательно,

$$\big\langle u-\lambda y-(1-\lambda)z, r+F(u)\big\rangle = \lambda\big\langle u-y, r+F(u)\big\rangle+(1-\lambda)\big\langle u-z, r+F(u)\big\rangle \geq 0$$

для всех $u \in K$.

(b) Теперь, пусть $w \in SOL(K, r+F)$, из Леммы 2.4.5 имеем

$$\big\langle w, r+F(w)\big\rangle = 0.$$

Отсюда вытекает

$$\big|\big\langle w, r\big\rangle\big| = \big|\big\langle w, F(w)\big\rangle\big|.$$

Применяя ($H3$) получаем, что

$$a|w|^2 \leq \big|\big\langle w, r\big\rangle\big| \leq |w|\,|r|.$$

Поэтому, $|w| \leq \frac{1}{a}|r|$. □

Определим мультиотображения $U\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to Cv(K)$,

$$U(t,z,\mu) = SOL(K, G(t,z,\mu)+F),$$

и $\Phi\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to Kv(\mathbb{R}^2)$

$$\Phi(t,z,\mu) = \big\{A(\mu)z + f(t,z,y,\mu)\colon y \in U(t,z,\mu)\big\}.$$

Лемма 2.4.8. *Пусть выполнены условия* ($H1$) – ($H3$). *Тогда мультиотображение* Φ *удовлетворяет условиям* ($\mathcal{F}1$) – ($\mathcal{F}2$) *Теоремы 2.4.2 с замечанием, что* $n = k = 2$.

Доказательство. Из $(H2)$ и Леммы 2.4.7(b) следует, что

$$\|U(t,z,\mu)\| \le \frac{1}{a}\,|G(t,z,\mu)| \le \frac{\alpha_G}{a}\,|z|^{c_1}(1+|\mu|^{c_2}) \tag{2.4.20}$$

для $(t,z,\mu) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$. Следовательно, сужение $U_{|_\Omega}$ мультиотображения U на любое огранительное множество $\Omega \subset [0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ компактно. В следствие Леммы 2.4.7(a) мультиотображение U замкнуто, и отсюда, оно полунепрерывно сверху. Так как отображения A и f непрерывны, поэтому мультиотображение Φ тоже полунепрерывно сверху. Наше утверждение непосредственно следует из $(H2)$ и (2.4.20). □

Теперь, применяя лемму Филиппова о неявной функции (см, например [26, Теорема 1.5.15] или [90, Теорема 1.3.3]) мы можем заменить задачу (2.4.17) следующей эквивалентной проблемой

$$\begin{cases} x'(t) \in \Phi(t,x(t),\mu) \ \text{ для п.в. } t\in[0,T], \\ x(0) = x(T). \end{cases} \tag{2.4.21}$$

Определение 2.4.5. *Под решением задачи* (2.4.17) *мы понимаем тройку* (x,u,μ)*, состоящуюся из функции* $x \in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^2)$*, интегрируемой функции* $u\colon [0,T]\to K$ *и вектора* $\mu\in\mathbb{R}^2$*, которые удовлетворяют* (2.4.17)*, или эквивалентно, под решением задачи* (2.4.17) *мы понимаем пару* $(x,\mu)\in W_T^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^2)\times\mathbb{R}^2$*, которая удовлетворяет* (2.4.21)*.*

Из $(H2)$ следует, что $(0,\mu)$ является тривиальным решением задачи (2.4.17) для всех $\mu\in\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных решений задачи (2.4.17).

Теорема о бифуркации семейства периодических решений ДВН

Теорема 2.4.4. *Пусть выполнены условия* $(H1)-(H3)$*. Тогда* $(0,0)$ *является единственной точкой бифуркации для задачи* (2.4.17) *и, кроме того, существует неограниченное связное множество* $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}$ *такое, что* $(0,0)\in\overline{\mathcal{R}}$*.*

Доказательство. Покажем, что семейство функций $V_\mu\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$V_\mu(w) = \frac{c}{2}\big(\mu_1 w_1^2 + 2\mu_2 w_1 w_2 - \mu_1 w_2^2\big), \quad w=(w_1,w_2),\ \mu=(\mu_1,\mu_2),$$

является семейством локальных интегральных направляющих функций для (2.4.21) в $(0,0)$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ и $\mu \in S^1(0,\varepsilon)$. Для $x \in C([0,T];\mathbb{R}^2)$ возьмем $g \in \mathcal{P}_\Phi(x,\mu)$ ($\mathcal{P}_\Phi$ определяется аналогично $\mathcal{P}_\mathcal{F}$). Тогда существует интегрируемая функция $u\colon [0,T] \to K$ такая, что

$$g(t) = A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), u(t), \mu\big) \ \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

В силу $(H2)$ и (2.4.20) имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), g(t)\big\rangle dt &= \int_0^T \Big\langle A(\mu)x(t), A(\mu)x(t) + f\big(t, x(t), u(t), \mu\big)\Big\rangle dt \\
&\geq \int_0^T |A(\mu)x(t)|^2 dt \\
&\quad - \int_0^T |A(\mu)x(t)|\,|f(t,x(t),u(t),\mu)| dt \\
&\geq c^2\,|\mu|^2\,\|x\|_2^2 \\
&\quad -c|\mu| \int_0^T |x(t)|\,\alpha_f|x(t)|(|u(t)| + |\mu|)dt \\
&\geq c^2\,|\mu|^2\,\|x\|_2^2 - c\alpha_f|\mu|^2\|x\|_2^2 \\
&\quad - c\alpha_f|\mu| \int_0^T |x(t)|^2\,\frac{\alpha_G}{a}\,|x(t)|^{c_1}(1+|\mu|^{c_2})dt \\
&\geq c(c-\alpha_f)\,|\mu|^2\,\|x\|_2^2 \\
&\quad -\frac{c}{a}\,\alpha_f\alpha_G|\mu|(1+|\mu|^{c_2})\|x\|_C^{c_1} \quad \|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), g(t)\big\rangle dt > 0$$

при

$$0 < \|x\|_C < \sqrt[c_1]{\frac{a(c-\alpha_f)|\mu|}{\alpha_f\alpha_G(1+|\mu|^{c_2})}} = \sqrt[c_1]{\frac{a(c-\alpha_f)\varepsilon}{\alpha_f\alpha_G(1+\varepsilon^{c_2})}}.$$

Пусть

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt[c_1]{\frac{a(c-\alpha_f)\varepsilon}{\alpha_f\alpha_G(1+\varepsilon^{c_2})}}.$$

Тогда δ_ε непрерывно зависит от ε и

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(t)), g(t)\big\rangle dt > 0 \ \text{ при } \ 0 < \|x\|_C \leq \delta_\varepsilon. \tag{2.4.22}$$

Таким образом, V_μ является семейством локальных интегральных направляющих функций для (2.4.21) в $(0,0)$.

Из того, что $ind\, V_\mu \neq 0$ следует, что $(0,0)$ является точкой бифуркации для (2.4.17). Кроме того, из (2.4.22) получаем, что $(0,0)$ является единственной точкой бифуркации для (2.4.17). Теперь, теорема доказана применением Теоремы 2.4.2. $\square$

Глава 3

Метод направляющих функций для нелинейных фредгольмовых включений

Начиная с классической работы K.D. Elworthy и A.J. Tromba [50], исследования многих ученых касались исследования топологических характеристик пар, состоящих из нелинейных фредгольмовых операторов и их возмущений различных типов. (см., например работу Ю.Г. Борисовича, В.Г. Звягина и Ю.И. Сапронова [27]; работу Ю.Г. Борисовича [23]; работу В.Г. Звягина [146] и работу В.Г. Звягина, Н.М. Ратинера [147]). Для выпуклозначных возмущений нелинейных фредгольмовых операторов ориентированный индекс совпадения был введен Ю.Г. Борисовичем [23]. В.В. Обуховский, П. Дзекка и В.Г. Звягин осуществили систематическое построение ориентированного индекса совпадения для различных классов мультиотображений с невыпуклозначными значениями (см. [121, 148]).

В этом параграфе мы введем понятие направляющих функций для управляемых систем, содержащих нелинейные фредгольмовы операторы нулевого индекса и CJ-мультиотображения. Ориентированный индекс совпадения вычисляется через индекс направляющей функции, и следовательно, мы получим достаточные условия существования решений для таких управляемых систем. Кроме того, изучается также задача бифуркации семейства периодических траекторий таких управляемых систем.

3.1 Задача существования решений

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} A\big(t, x(t), x'(t)\big) = B\big(t, x(t), y(t)\big), \text{ для всех } \ t \in [0,1], \\ y'(t) \in C\big(t, x(t), y(t)\big), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

где $A\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывные отображения; $C\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ - мультиотображение и $y_0 \in \mathbb{R}$; $x, y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Обозначим через $C^1[0,1]$ $\big[\ C[0,1],\ AC[0,1],\ L^1[0,1]\ \big]$ совокупность всех непрерывно дифференцируемых [соответственно., непрерывных, абсолютно непрерывных, интегрируемых] функций на $[0,1]$. Пусть

$$C^1_{pr}[0,1] = \{x \in C^1[0,1]\colon x(0) = x(1)\}.$$

Нормы элементов $x \in C^1[0,1]$и $y \in C[0,1]$ обозначаются через $\|x\|_{C^1}$ и $\|y\|_C$; $B_{C^1_{pr}}(0,R)$ - шар в пространстве $C^1_{pr}[0,1]$ с радиусом R и центром в 0.

Под решением задачи (3.1.1) мы понимаем пару функций $x \in C^1_{pr}[0,1]$ и $y \in AC[0,1]$, которые удовлетворяют (3.1.1).

Предположим, что

$(H1)$ существуют непрерывные частные производные $A'_u(t,u,v)$, $A'_v(t,u,v)$ и кроме того, $A'_v(t,u,v) > 0$ для всех (t,u,v);

$(H2)$ существует положительная функция $\alpha \in C[0,1]$ такая, что для $u, v, w \in \mathbb{R}$, из тождества

$$(1-\lambda)v + \lambda A(t,u,v) = w \quad \text{для любого } \lambda \in [0,1]$$

вытекает, что

$$|v| \le \alpha(t)(1 + |w| + |u|)$$

для всех $t \in [0,1]$;

$(H3)$ найдется $c > 0$ такое, что

$$|B(t,u,v)| \leq c(1+|u|+|v|),$$

для всех $(t,u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

$(H4)$ C является верхним Каратеодори мультиотображением;

$(H5)$ существует $d > 0$ такое, что

$$\|C(t,u,v)\| \leq d(1+|u|+|v|),$$

для всех $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,1]$.

Известно (см. Леммы 2.4.2 и 2.4.3), что для каждой функции $x \in C[0,1]$ множество решений Π_x задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) \in C(t, x(t), y(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,1] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

является $R_\delta-$множеством в $C[0,1]$ и мультиотображение

$$\Pi\colon C[0,1] \to K(C[0,1]),\ \Pi(x) = \Pi_x,$$

полунепрерывно сверху.

Определение 3.1.1. *Непрерывно дифференцируемая функция $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для задачи* (3.1.1)*, если существует $N > 0$ такое, что из $x \in C^1_{pr}[0,1]$, $\|x\|_2 \geq N$, следует, что*

$$\int_0^1 A(t, x(t), x'(t))V'(x(t))\,dt \leq 0;$$

$$\int_0^1 B(t, x(t), y(t))V'(x(t))\,dt > 0$$

для всех $y \in \Pi(x)$.

Из этого определения следует, что если V является интегральной направляющей функцией для задачи (3.1.1), то $V'(a) \neq 0$ при $|a| \geq r \geq N$. Отсюда, топологическая степень $deg(V', [-r, r])$ корректно определена и не зависит от выбора $r \geq N$. Это число называется индексом направляющей функцией и обозначется через $Ind\, V$.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены условия* $(H1) - (H5)$. *Дополнительно предположим, что существует интегральная направляющая функция* V *для задачи* (3.1.1) *такая, что* $Ind\, V \neq 0$. *Тогда задача* (3.1.1) *имеет решение.*

Доказательство. Доказательство разбито на ряд шагов.

Шаг 1. Следуя методу, показанному в [121], мы покажем, что при выполнении условия $(H1)$ отображение

$$\begin{gathered} f\colon C^1_{pr}[0,1] \to C[0,1], \\ f(x)(t) = A(t, x(t), x'(t)), \end{gathered} \tag{3.1.2}$$

является фредгольмовым оператором нулевого индекса, сужение которого на любое замкнутое ограниченное множество $D \subset C^1_{pr}[0,1]$ собственно.

В самом деле, отметим, что f является C^1-отображением и, кроме того, его производная может быть представлена в виде:

$$\left(f'\left(x\right)h\right)\left(t\right) = A'_u\left(t, x\left(t\right), x'\left(t\right)\right)h\left(t\right) + A'_v\left(t, x\left(t\right), x'\left(t\right)\right)h'\left(t\right) \tag{3.1.3}$$

для $h \in C^1_{pr}\left[0,1\right]$. Введем впомогательные операторы

$$\begin{gathered} f'_u\left(x\right) : C^1_{pr}\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right], \\ \left(f'_u\left(x\right)h\right)\left(t\right) = A'_u\left(t, x\left(t\right), x'\left(t\right)\right)h\left(t\right), \quad t \in [0,1] \end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered} f'_v\left(x\right) : C^1_{pr}\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right], \\ \left(f'_v\left(x\right)h\right)\left(t\right) = A'_v\left(t, x\left(t\right), x'\left(t\right)\right)h'\left(t\right), \quad t \in [0,1]. \end{gathered}$$

Тогда мы можем переписать (3.1.3) в виде

$$f\ '\left(x\right)h = f'_u\left(x\right)h + f'_v\left(x\right)h\ .$$

Оператор $f'_u\left(x\right)$ вполне непрерывен так как он может быть представлен в виде композиции вполне непрерывного отображения вложения i :

$C^1_{pr}[0,1] \to C[0,1]$ и непрерывного линейного оператора $M : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Mh)(t) = A'_u(t, x(t), x'(t))\, h(t).$$

Теперь покажем, что оператор $f'_v(x)$ является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса.

Для этого, перепишем этот оператор в виде композиции оператора дифференцирования $d/dt : C^1_{pr}[0,1] \to C[0,1]$ и оператора $J : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Jz)(t) = A'_v(t, x(t), x'(t))\, z(t)$. Ясно, что оператор d/dt является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса. Так как $A'_v(t, x(t), x'(t)) \neq 0$, отображение J обратимо. Отсюда, отображения $f'_v(x)$, и следовательно $f\,'(x)$, является фредгольмовыми операторами нулевого индекса. Поэтому, f является фредгольмовым оператором нулевого индекса.

Теперь, пусть $D \subset C^1_{pr}[0,1]$ - замкнутое ограниченное множество. Будем исспользовать одиноковым символом f для обозначения сужения отображения f на D . Покажем, что оно собственно. Пусть $\mathcal{K} \subset C[0,1]$ - любое компактное множество, и $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(\mathcal{K})$ - любая последовательность. Без ущерба для общности предположим, что $f(x_n) \to z \in \mathcal{K}$. В силу ограниченности последовательности $\{x_n\}$ в $C^1_{pr}[0,1]$ мы можем предполагать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в $C[0,1]$ к некоторому $\omega \in C[0,1]$. Далее, из представления

$$A(t, \omega(t), x'_n(t)) = A(t, x_n(t), x'_n(t))$$

$$+ [A(t, \omega(t), x'_n(t)) - A(t, x_n(t), x'_n(t))]$$

следует, что последовательность $z_n = A(\cdot, \omega(\cdot), x'_n(\cdot))$ сходится к z в $C[0,1]$. Из теоремы об обратном отображении получим $x'_n = \Psi(z_n)$, где $\Psi\colon C[0,1] \to C[0,1]$ является непрерывным отображением. Отсюда, последовательность x'_n сходится к $\Psi(z)$ в $C[0,1]$. Таким образом, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является сходящей в пространстве $C^1_{pr}[0,1]$, т.е. множество $f^{-1}(\mathcal{K})$ компактно.

Шаг 2. Покажем теперь, что множество решений проблемы (3.1.1) априори ограничено. Для этого, пусть $x \in C[0,1]$ и определим мультиотображение $\widetilde{\Pi}\colon C[0,1] \to K(C[0,1] \times C[0,1])$,

$$\widetilde{\Pi}(x) = \{x\} \times \Pi(x),$$

и отображение $\widetilde{B}\colon C[0,1] \times C[0,1] \to C[0,1]$,

$$\widetilde{B}(x,y)(t) = B(t, x(t), y(t)).$$

Пусть $\widetilde{G}\colon C[0,1] \to K\big(C[0,1]\big)$,

$$\widetilde{G}(x) = \widetilde{B} \circ \widetilde{\Pi}(x),$$

и G - сужение $\widetilde{G}$ на $C^1_{pr}[0,1]$. Нетрудно видеть, что G является вполне полунепрерывным $CJ-$мультиотображением и задача (3.1.1) эквивалентна следующему операторному включению

$$f(x) \in G(x). \tag{3.1.4}$$

Предположим, что $x_* \in C^1_{pr}[0,1]$ - решение включения (3.1.4). Тогда существует функция $y_* \in \Pi(x_*)$ такая, что

$$A(t, x_*(t), x_*^{'}(t)) = B(t, x_*(t), y_*(t)), \text{ для всех } t \in [0,1]. \tag{3.1.5}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 A(t, x_*(t), x_*^{'}(t))V'(x_*(t))\,dt = \int_0^1 B(t, x_*(t), y_*(t))V'(x_*(t))\,dt,$$

поэтому, $\|x_*\|_2 \le N$.

Из $y_* \in \Pi(x_*)$ вытекает существование функции $g_* \in L^1[0,1]$ такой, что

$$g_*(t) \in C(t, x_*(t), y_*(t)), \quad \text{для п.в. } t \in [0,1], \text{ и}$$

$$y_*(t) = y_0 + \int_0^t g_*(s)ds.$$

В силу $(H5)$, для каждого $t \in [0,1]$ выполнены следующие оценки:

$$\begin{aligned} |y_*(t)| &\le |y_0| + \int_0^t d(1 + |x_*(s)| + |y_*(s)|)ds \\ &\le |y_0| + d + d\|x_*\|_2 + \int_0^t d|y_*(s)|ds. \end{aligned}$$

Применяя Лемму 1.1.1 получаем

$$|y_*(t)| \le \big(|y_0| + d + d\|x_*\|_2\big)e^d. \tag{3.1.6}$$

В силу (3.1.5)-(3.1.6) и $(H2) - (H3)$ имеем

$$\begin{aligned} |x_*^{'}(t)| &\le \alpha(t)\Big(1 + |x_*(t)| + |B\big(t, x_*(t), y_*(t)\big)|\Big) \\ &\le \alpha(t)\Big(1 + |x_*(t)| + c\big(1 + |x_*(t)| + |y_*(t)|\big)\Big) \\ &\le (c+1)\alpha(t) + (c+1)\alpha(t)|x_*(t)| \\ &\qquad + c\alpha(t)\big(|y_0| + d + d\|x_*\|_2\big)e^d. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|x_*^{'}\|_2 &\le (c+1)\|\alpha\|_2 + (c+1)\|\alpha\|_2\,\|x_*\|_2 + c\|\alpha\|_2\big(|y_0| + d + d\|x_*\|_2\big)e^d \\ &\le (c+1)\|\alpha\|_2 + (c+1)N\|\alpha\|_2 + c\|\alpha\|_2\big(|y_0| + d + dN\big)e^d = M.\end{aligned}$$

Поэтому, существует $L > 0$ такое, что $\|x_*\|_C \le L$.
Из (3.1.7) следует, что существует $K > 0$ такое, что $\|x_*^{'}\|_C \le K$. Отсюда,

$$\|x_*\|_{C^1} \le R = L + K.$$

Шаг 3. Теперь, выбирая произвольное число $R' > R$, мы будем вычислить ориентированный индекс совпадения компактной тройки $\big(f, G, B_{C^1_{pr}}(0, R')\big)$. Для этого, пусть

$$\begin{gathered}A^\sharp\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,1]\to\mathbb{R},\\ A^\sharp(t,u,v,\lambda) = v + \lambda\big(A(t,u,v) - v\big),\end{gathered}$$

и определим отображение

$$\begin{gathered}f^\sharp\colon C^1_{pr}[0,1]\times[0,1]\to C[0,1],\\ f^\sharp(x,\lambda)(t) = A^\sharp\big(t, x(t), x'(t), \lambda\big).\end{gathered} \tag{3.1.8}$$

Нетрудно проверить, что частные производные

$$\frac{\partial A^\sharp(t,u,v,\lambda)}{\partial u},\ \frac{\partial A^\sharp(t,u,v,\lambda)}{\partial v},\ \text{и}\ \frac{\partial A^\sharp(t,u,v,\lambda)}{\partial \lambda}$$

определены и непрерывны. Кроме того,

$$\frac{\partial A^\sharp(t,u,v,\lambda)}{\partial v} = 1 + \lambda\big(A_v(t,u,v) - 1\big).$$

В следствие $(H1)$ получаем, что $A^\sharp_v(t,u,v,\lambda) > 0$ для всех (t,u,v,λ). Следуя шагу 1 получим, что $f^\sharp$ является фредгольмовым отображением индекса 1, сужение которого на $B_{C^1_{pr}}(0,R')\times[0,1]$ является собственным. Отметим, что фредгольмова структура на $B_{C^1_{pr}}(0,R')\times[0,1]$, индуцированная отображением $f^\sharp$, ориентирована (см., например [147]).

Рассмотрим тройку $\big(f^\sharp, G^\sharp, B_{C^1_{pr}}(0,R')\times[0,1]\big)$, где

$$G^\sharp\colon B_{C^1_{pr}}(0,R')\times[0,1]\to K\big(C[0,1]\big), G^\sharp(x,\lambda) = G(x).$$

$G^\sharp$ является компактным $CJ-$мультиотображением.

Предположим, что существует $(x, \lambda) \in \partial B_{C^1_{pr}}(0, R') \times [0, 1]$ такое, что

$$f^\sharp(x, \lambda) \in G^\sharp(x, \lambda).$$

Тогда найдется элемент $y \in \Pi(x)$ такой, что

$$A^\sharp(t, x(t), x'(t), \lambda) = B(t, x(t), y(t)) \text{ для всех } t \in [0, 1].$$

Следовательно,

$$\int_0^1 B(t, x(t), y(t))V'(x(t))\, dt = \int_0^1 A^\sharp(t, x(t), x'(t), \lambda)V'(x(t))\, dt$$
$$= \lambda \int_0^1 A(t, x(t), x'(t))V'(x(t))\, dt.$$

Поэтому, $\|x\|_2 < N$, и отсюда в силу $(H2) - (H3)$ и (3.1.6):

$$\|x\|_{C^1} \leq R < R',$$

что есть противоречие.

Таким образом, компактная тройка $\left(f^\sharp, G^\sharp, B_{C^1_{pr}}(0, R') \times [0, 1]\right)$ является гомотопией, соединяющей компактные тройки $\left(f, G, B_{C^1_{pr}}(0, R')\right)$ и $\left(L, G, B_{C^1_{pr}}(0, R')\right)$, где $Lx = x'$. В силу Свойства 1.7.3 имеем

$$\mid Ind\left(f, G, B_{C^1_{pr}}(0, R')\right) \mid = \mid Ind\left(L, G, B_{C^1_{pr}}(0, R')\right) \mid .$$

Далее, L является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса и

$$Ker\, L \cong \mathbb{R} \cong Coker\, L.$$

Проекция $\Pi_L \colon C[0, 1] \to \mathbb{R}$ определяется так

$$\Pi_L(w) = \int_0^1 w(s)\, ds,$$

и гомеоморфизм $\Lambda_L \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является тождественным отображением. Пространство $C[0, 1]$ может быть представлено в виде

$$C[0, 1] = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1,$$

где $\mathcal{C}_0 = Coker\, L$ и $\mathcal{C}_1 = Im\, L$.
Разложение элемента $w \in C[0, 1]$ обозначается так

$$w = w_0 + w_1, w_0 \in \mathcal{C}_0, w_1 \in \mathcal{C}_1.$$

Определим мультиотображение $\Sigma_1\colon C^1_{pr}[0,1] \to K(C^1_{pr}[0,1])$,

$$\Sigma_1(x) = P_L(x) + (\Pi_L + K_L) \circ G(x).$$

Ясно, что Σ_1 является вполне полунепрерывным сверху $CJ-$мультиотображением и

$$Ind\left(L, G, B_{C^1_{pr}}(0, R')\right) = deg(i - \Sigma_1, B_{C^1_{pr}}(0, R')).$$

Теперь, рассмотрим мультиотображение

$$\Sigma\colon B_{C^1_{pr}}(0, R') \times [0,1] \to K(C^1_{pr}[0,1]),$$

$$\Sigma(x, \lambda) = P_L x + (\Pi_L + K_L) \circ \varphi(G(x), \lambda),$$

где отображение $\varphi\colon C[0,1] \times [0,1] \to C[0,1]$ определяется так

$$\varphi(w, \lambda) = w_0 + \lambda w_1,\ w = w_0 + w_1, w_0 \in \mathcal{C}_0, w_1 \in \mathcal{C}_1. \tag{3.1.9}$$

Предположим, что существует $(x, \lambda) \in \partial B_{C^1_{pr}}(0, R') \times [0,1]$ такое, что

$$x \in \Sigma(x, \lambda).$$

Тогда найдется $w \in G(x)$ так, что

$$x = P_L x + (\Pi_L + K_L) \circ \varphi(w, \lambda),$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} x' = \lambda w_1 \\ 0 = w_0. \end{cases}$$

Если $\lambda \neq 0$, то

$$\int_0^1 V'(x(t))w(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 V'(x(t))x'(t)dt = \frac{1}{\lambda}\big(V(x(1)) - V(x(0))\big) = 0,$$

что есть противоречие..

Если $\lambda = 0$, то $x' = 0$, т.е., $x \equiv a \in \mathbb{R}$. Из $\|a\|_2 = |a| = R' > N$, следует, что

$$0 < \int_0^1 V'(a)\widetilde{w}(s)ds = V'(a)\Pi_L(\widetilde{w}) \tag{3.1.10}$$

для всех $\widetilde{w} \in G(a)$. В частности, $V'(a)\Pi_L(w) = V'(a)\Pi(w_0) > 0$, что есть противоречие.

Таким образом, Σ является гомотопией, соединяющей мультиотображения $\Sigma(\cdot,1)=\Sigma_1$ и

$$\Sigma(\cdot,0)=P_L+(\Pi_L+K_L)\circ\varphi(G,0)=P_L+\Pi_L G \tag{3.1.11}$$

(так как $K_L\circ\varphi(G(x),0)=0$ для всех $x\in C[0,1]$ и $\Pi_L(w)=\Pi_L(w_0)$ для всех $w\in G(x)$, $x\in C[0,1]$, $w=w_0+w_1$). В силу свойства гомотопической инвариантности топологической степени имеем

$$deg(i-\Sigma_1,B_{C^1_{pr}}(0,R'))=deg(i-P_L-\Pi_L G,B_{C^1_{pr}}(0,R')).$$

Мультиотображение $P_L+\Pi_L G$ принимает значения в $\mathbb{R}$, поэтому

$$deg(i-P_L-\Pi_L G,B_{C^1_{pr}}(0,R'))=deg(i-P_L-\Pi_L G,[-R',R']).$$

В пространстве $\mathbb{R}$ верторное мультиполе $i-P_L-\Pi_L G$ имеет вид:

$$i-P_L-\Pi_L G=-\Pi_L G.$$

Из (3.1.10) следует, что поля V' и $\Pi_L G$ гомотопны на $\partial[-R',R']$, поэтому

$$deg(-\Pi_L G,[-R',R'])=-deg(V',[-R',R'])=-Ind\,V.$$

Следовательно, $Ind\left(f,G,B_{C^1}(0,R')\right)\neq 0$, и отсюда, задача (3.1.1) имеет решение. □

Пример 3.1.1. *Рассмотрим следующую задачу*

$$\begin{cases}(x^{2n}(t)+1)x'(t)-a(t)x^{2n+1}(t)-\frac{x^n(t)x'^{2n}(t)}{n(1+x'^{2n}(t))}=\mu x(t)+\widetilde{B}\big(t,x(t),y(t)\big),\\ y'(t)\in C\big(t,x(t),y(t)\big),\\ x(0)=x(1),\\ y(0)=y_0,\end{cases} \tag{3.1.12}$$

где $n\in\mathbb{N}$ - нечетное число; $\mu>0$; $y_0\in\mathbb{R}$, $a\in C[0,1]$ - положительная функция; $\widetilde{B}\colon[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее условию $(H3)$; и $C\colon[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to Kv(\mathbb{R})$ - мультиотображение, удовлетворяющее условиям $(H4)-(H5)$.

Теорема 3.1.2. *Для каждого $\mu>c(1+de^d)$ задача (3.1.12) имеет решение.*

Доказательство. Пусть $A\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $B\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - непрерывные отображения, определенные следующим образом:

$$A(t,u,v)=(u^{2n}+1)v-a(t)u^{2n+1}-\frac{u^n v^{2n}}{n(1+v^{2n})},$$

$$B(t,u,v)=\mu u+\widetilde{B}(t,u,v).$$

Тогда задача (3.1.12) может быть пересисана в виде задачи (3.1.1). Ясно, что отображение B непрерывно и удовлетворяет условию $(H3)$. Имеем

$$A_u^{'}(t,u,v)=2nvu^{2n-1}-(2n+1)a(t)u^{2n}-\frac{u^{n-1}v^{2n}}{(1+v^{2n})},$$

$$A_v^{'}(t,u,v)=1+u^{2n}-\frac{2u^n v^{2n-1}}{(1+v^{2n})^2},$$

и

$$A_v^{'}(t,u,v)=\frac{(1+u^{2n})(1+v^{2n})^2-2u^n v^{2n-1}}{(1+v^{2n})^2}=$$
$$=\frac{1+u^{2n}+2v^{2n}+2u^{2n}v^{2n}+v^{4n}+u^{2n}v^{4n}-2u^n v^{2n-1}}{(1+v^{2n})^2}=$$
$$=\frac{(u^n-v^{2n-1})^2+v^{4n}-v^{4n-2}+1+2v^{2n}(1+u^{2n})+u^{2n}v^{4n}}{(1+v^{2n})^2}>0,$$

так как $v^{4n}-v^{4n-2}+1>0$ для всех $v\in\mathbb{R}$.
Поэтому, условие $(H1)$ выполнено.
Для каждого $w\in\mathbb{R}$ и $\lambda\in[0,1]$, рассмотрим уравнение

$$(1-\lambda)v+\lambda A(t,u,v)=w,$$

или эквивалентно,

$$v=\frac{w}{1+\lambda u^{2n}}+\frac{\lambda a(t)u^{2n+1}}{1+\lambda u^{2n}}+\frac{\lambda u^n v^{2n}}{n(1+\lambda u^{2n})(1+v^{2n})}.$$

Пусть $\alpha(t)=\max\{a(t),1\}$. Из $|v|<|w|+a(t)|u|+1$ вытекает

$$|v|<\alpha(t)(1+|w|+|u|),$$

и поэтому условие $(H2)$ выполнено.

Покажем теперь, что отображение $V\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $V(x)=\frac{1}{2}x^2$, является направляющей функцией для задачи (3.1.12). Отметим, что n является

нечетным, для каждой функции $x \in C^1_{pr}[0,1]$ справедливо следующее отношение:

$$\int_0^1 A(t,x(t),x'(t))V'(x(t))dt = \int_0^1 (1+x^{2n}(t))x'(t)x(t)dt$$
$$- \int_0^1 a(t)x^{2n+2}(t)dt - \int_0^1 \frac{x^{n+1}(t)x'^{2n}(t)}{n(1+x'^{2n}(t))}dt \le 0.$$

Выбирая произвольно $y \in \Pi(x)$ и применяя $(H3)$, (3.1.6) имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 B(t,x(t),y(t))V'(x(t))dt \\
&= \mu\|x\|_2^2 + \int_0^1 \widetilde{B}(t,x(t),y(t))x(t)dt \\
&\ge \mu\|x\|_2^2 - \int_0^1 c|x(t)|\big(1+|x(t)|+|y(t)|\big)dt \\
&\ge (\mu-c)\|x\|_2^2 - c\|x\|_2 - c\int_0^1 |x(t)|\big(|y_0|+d+d\|x\|_2\big)e^d dt \\
&\ge (\mu - c - cde^d)\|x\|_2^2 - c(1+|y_0|e^d+de^d)\|x\|_2 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

при

$$\|x\|_2 > \frac{c(1+|y_0|e^d+de^d)}{\mu - c(1+de^d)}.$$

Из Теоремы 3.1.1 и $Ind\,V = 1$ следует, что задача (3.1.12) имеет решение. □

3.2 Задача бифуркации

3.2.1 Глобальная бифуркационная теорема

Пусть E,E' - банаховы пространства. Через $E \times E'$ обозначим их произведение с нормой $\|(x,y)\|_{E\times E'} = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_{E'}^2}$.

Рассмотрим семейство включений

$$f(x) \in G(x,\mu), \tag{3.2.1}$$

где $f\colon E \to E'$ и $G\colon E \times \mathbb{R} \to K(E')$.

Предположим, что:

$(H6)$ $f \in \Phi_0 C^1(E, E')$ и $f(0) \in G(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$;

$(H7)$ сужение $f_{|\Omega}$ собственно для любого замкнутого ограниченного множество $\Omega \subset E$;

$(H8)$ $G \in CJ(E \times \mathbb{R}, E')$ является вполне полунепрерывным сверху мультиотображением;

$(H9)$ найдутся $\mu_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < |\mu - \mu_0| \leq \varepsilon_0$, существует $\delta_\mu > 0$, непрерывно зависящее от μ, и

$$Coin(f, G(\cdot, \mu), B_E(0, \delta_\mu)) = \{(0, \mu)\}.$$

Отметим (см. [147]), что фредгольмова структура $\{E, f\}_\Phi$, индуцированная отображением f на E, ориентирована.

Определение 3.2.1. *Точка* $(0, \mu_*) \in E \times \mathbb{R}$ *называется точкой бифуркации для задачи* (3.2.1), *если для любого открытого множества* $U \subset E \times \mathbb{R}$, *содержащего* $(0, \mu_*)$, *существует* $(x, \mu) \in U$ *такое, что* $x \neq 0$ *и* $f(x) \in G(x, \mu)$.

Из условия $(H6)$ следует, что включение (3.2.1) имеет тривиальные решения $(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных решений задачи (3.2.1), т.е.

$$\mathcal{S} = \{(x, \mu) \in E \times \mathbb{R} \colon x \neq 0 \text{ и } f(x) \in G(x, \mu)\}.$$

Мы будем изучить глобальную структуру множества $\mathcal{S}$. Для этого, пусть

$$\widetilde{f} \colon E \times \mathbb{R} \to E' \times \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x, \mu) = (f(x), 0),$$

и для $r, \varepsilon > 0$ определим мультиотображение

$$G_r \colon \overline{U}_{r,\varepsilon} \to K\big(E' \times \mathbb{R}\big),$$
$$G_r(x, \mu) = \big\{G(x, \mu), r^2 - \|x\|_E^2\big\},$$

где

$$\overline{U}_{r,\varepsilon} = \{(x,\mu) \in E \times \mathbb{R} \colon \|x\|_E^2 + (\mu - \mu_0)^2 \leq r^2 + \varepsilon^2\}.$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{f}$ является фредгольмовым отображением нулевого индекса, сужение которого на любое замкнутое ограниченное множество $\Omega \subset E \times \mathbb{R}$ собственно, и G_r является компактным $CJ-$мультиотображением. Кроме того, фредгольмова структура, индуцированная отображением $\widetilde{f}$ на $U_{r,\varepsilon}$, ориентирована.

Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $0 < r < \min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon}, \delta_{\mu_0+\varepsilon}\}$. Покажем, что $\widetilde{f}$, G_r и $\overline{U}_{r,\varepsilon}$ образуют компактную тройку. В самом деле, нам достаточно показать, что

$$Coin(\widetilde{f}, G_r) \cap \partial U_{r,\varepsilon} = \emptyset.$$

Предположим противное, т.е. существует $(x,\mu) \in \partial U_{r,\varepsilon}$ такое, что

$$\widetilde{f}(x,\mu) \in G_r(x,\mu),$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} \|x\|_E = r \\ f(x) \in G(x,\mu). \end{cases}$$

Из $(x,\mu) \in \partial U_{r,\varepsilon}$ следует, что $\mu = \mu_0 \pm \varepsilon$. Тогда из выбора r вытекает

$$Coin\big(f, G(\cdot, \mu_0 \pm \varepsilon)\big) \cap B_E(0,r) = \{(0, \mu_0 \pm \varepsilon)\},$$

что есть противоречие.

Определение 3.2.2. *Глобальный бифуркационный индекс для задачи* (3.2.1) *в точке* $(0,\mu_0)$ *определяется следующим образом:*

$$Bi(0,\mu_0) = Ind\,(\widetilde{f}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon}). \tag{3.2.2}$$

Из свойств ориентированного индекса совпадения следует, что глобальный бифуркационный индекс не зависит от выбора достаточно малых ε и r.

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены условия* $(H6)-(H9)$. *Дополнительно предположим, что* $Bi(0,\mu_0)\neq 0$. *Тогда* $(0,\mu_0)$ *является точкой бифуркации для* (3.2.1) *и, кроме того, существует связное подмножество* $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}$ *такое, что* $(0,\mu_0)\in\overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $\overline{\mathcal{R}}\ni(0,\mu_*)$ *для некоторого* $\mu_*\neq\mu_0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}\subset E\times\mathbb{R}$ - открытое множество, определенное так

$$\mathcal{O}=\big(E\times\mathbb{R}\big)\setminus\big(\{0\}\times(\mathbb{R}\setminus(\mu_0-\varepsilon_0,\mu_0+\varepsilon_0))\big).$$

Из $Ind\,(\widetilde{f},G_r,\overline{U}_{r,\varepsilon})\neq 0$ следует, что $(0,\mu_0)$ является точкой бифуркации для (3.2.1). Обозначим через $\mathcal{W}\subset\mathcal{S}\cup\{(0,\mu_0)\}\subset\mathcal{O}$ связный компонент точки $(0,\mu_0)$. Предположим, что множество $\mathcal{W}$ компактно. Тогда, существует открытое ограниченное подмножество $U\subset\mathcal{O}$ такое, что

$$\overline{U}\subset\mathcal{O},\ \mathcal{W}\subset U \text{ и } \partial U\cap\mathcal{S}=\emptyset.$$

Отсюда, $Coin(\widetilde{f},G_r)\cap\partial U=\emptyset$ для каждого $r>0$. Далее, для любых $r,R>0$ компактные тройки $(\widetilde{f},G_r,\overline{U})$ и $(\widetilde{f},G_R,\overline{U})$ могут быть соединены гомотопией

$$(\widetilde{f}^*,G_{\lambda r+(1-\lambda)R},\overline{U}\times[0,1])$$

где $\widetilde{f}^*(x,\mu,\lambda)=\widetilde{f}(x,\mu)$.
Для достаточно больших R, $Coin(\widetilde{f},G_R,\overline{U})=\emptyset$, поэтому,

$$Ind\,(\widetilde{f},G_R,\overline{U})=0.$$

Следовательно, $Ind\,(\widetilde{f},G_r,\overline{U})=0$ для любого $r>0$.
Пусть $\Lambda=\{\mu\in\mathbb{R}\colon(0,\mu)\in\overline{U}\}$. Из $\overline{U}\subset\mathcal{O}$ следует, что

$$\Lambda\subset(\mu_0-\varepsilon_0,\mu_0+\varepsilon_0). \tag{3.2.3}$$

В силу непрерывной зависимости δ_μ от μ мы можем выбрать $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и $0<r<\min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon},\delta_{\mu_0+\varepsilon}\}$ такие, что $\overline{U}_{r,\varepsilon}\subset U$ и

$$Coin\big(f,G(\cdot,\mu),B_X(0,r)\big)=\{(0,\mu)\},$$

для всех $\mu\in[\mu_0-\varepsilon_0,\mu_0+\varepsilon_0]\setminus(\mu_0-\varepsilon,\mu_0+\varepsilon)$.
Из (3.2.3) и выбора r,ε вытекает $Coin(\widetilde{f},G_r,\overline{U})\subset U_{r,\varepsilon}$. Поэтому,

$$0=Ind\,(\widetilde{f},G_r,\overline{U})=Ind\,(\widetilde{f},G_r,\overline{U}_{r,\varepsilon})\neq 0,$$

что есть противоречие. Таким образом, $\mathcal{W}$ является некомпактным компонентом, т.е. либо $\mathcal{W}$ неограничено, либо $\overline{\mathcal{W}}\cap\overline{\mathcal{O}}\neq\emptyset$. □

3.2.2 Бифуркация семейства периодических траекторий

Рассмотрим теперь глобальную бифуркацию семейства периодических траекторий следующей задачи управления:

$$\begin{cases} A\big(t, x(t), x'(t)\big) = B\big(t, x(t), y(t), \mu\big), \text{ для всех } t \in [0,1], \\ y'(t) \in C\big(t, x(t), y(t)\big) \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

где $A\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $B\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывные отображения; $C\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ - мультиотображение; $\mu, y_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть отображение A и мультиотображение C удовлетворяют условиям $(H1)$ и $(H4) - (H5)$, соответственно. Дополнительно предположим, что

$(H2)'$ $A(t,0,0) = B(t,0,v,\mu)$ для всех $(t,v,\mu) \in [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Напомним, что для каждой функции $x \in C[0,1]$ множество $\Pi(x)$ всех решений задачи

$$\begin{cases} y'(t) \in C\big(t, x(t), y(t)\big) \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

является $R_\delta-$множеством в $C[0,1]$. Определим мультиотображение

$$\widehat{\Pi}\colon C[0,1] \times \mathbb{R} \to K\big(C[0,1] \times C[0,1] \times \mathbb{R}\big),$$
$$\widehat{\Pi}(x,\mu) = \{x\} \times \Pi(x) \times \{\mu\},$$

и отображение

$$\widehat{B}\colon C[0,1] \times C[0,1] \times \mathbb{R} \to C[0,1],$$
$$\widehat{B}(x,y,\mu)(t) = B(t, x(t), y(t), \mu).$$

Тогда, мы можем переписать задачу (3.2.4) в виде

$$f(x) \in G(x, \mu), \tag{3.2.5}$$

где $G\colon C^1_{pr}[0,1] \times \mathbb{R} \to K(C[0,1])$, $G(x,\mu) = \widehat{B} \circ \widehat{\Pi}(x,\mu)$, и f определено в (3.1.2).

Нетрудно проверить, что G является вполне полунепрерывным сверху $CJ-$мультиотображением. Из $(H2)'$ следует, что $(0,\mu)$ является решением включения (3.2.5) для каждого $\mu \in \mathbb{R}$. Такие решения называются тривиальными. Пусть $\mathcal{S}$ - множество всех нетривиальных решений включения (3.2.5), т.е.

$$\mathcal{S} = \big\{(x,\mu) \in C^1_{pr}[0,1] \times \mathbb{R}\colon x \neq 0 \text{ и } f(x) \in G(x,\mu)\big\}.$$

Определение 3.2.3. *Непрерывно дифференцируемая функция*

$$V(u,\mu)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

называется локальной интегральной направляющей функцией для задачи (3.2.4) *(или эквивалентно, для задачи* (3.2.5)*) в точке* $(0,\mu_0)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$, *если существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и непрерывная положительная функция* $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такие, что для каждого* μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leq \varepsilon_0$ *и для любой функции* $x \in C^1_{pr}[0,1]$, *из* $0 < \|x\|_2 \leq \delta_\mu$ *следует, что*

$$\int_0^1 A\big(t, x(t), x'(t)\big) V_u'\big(x(t),\mu\big)\, dt \leq 0,$$
$$\int_0^1 B\big(t, x(t), y(t), \mu\big) V_u'\big(x(t),\mu)\big)\, dt > 0$$

для всех $y \in \Pi(x)$.

Из выше определения следует, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и

$$0 < r < \min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon}, \delta_{\mu_0+\varepsilon}\},$$

векторное поле

$$V^\sharp\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$
$$V^\sharp(u,\mu) = \{-V_u'(u,\mu), \varepsilon^2 - (\mu - \mu_0)^2\},$$

не имеет нулей на $\partial\overline{U}^0_{r,\varepsilon}$, где

$$\overline{U}^0_{r,\varepsilon} = \{(u,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon u^2 + (\mu-\mu_0)^2 \le r^2+\varepsilon^2\} \ \text{ и } \ \delta_\mu = \delta(\mu). \qquad (3.2.6)$$

Следовательно, топологическая степень $deg(V^\sharp, \overline{U}^0_{r,\varepsilon})$ корректно определена и не зависит от выбора $(\varepsilon, r) \in (0,\varepsilon_0)\times\big(0,\ \min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon}, \delta_{\mu_0+\varepsilon}\}\big)$. Такое число обозначается символом $ind\, V^\sharp$.

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия* $(H1)$, $(H2)'$, *и* $(H4)-(H5)$. *Дополнительно предположим, что существует локальная интегральная направляющая функция* V *для задачи* (3.2.4) *в точке* $(0,\mu_0)$ *такая, что* $ind\, V^\sharp \neq 0$. *Тогда* $(0,\mu_0)$ *является точкой бифуркации для задачи* (3.2.4) *и, кроме того, существует связное подмножество* $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}$ *такое, что* $(0,\mu_0)\in\overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $(0,\mu_*)\in\overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_*\neq\mu_0$.

Доказательство. Рассмотрим включение (3.2.5). Нетруно видеть, что отображение f и мультиотображение G удовлетворяют условиям $(H6)-(H8)$. Проверим теперь условие $(H9)$. Для этого мы докажем, что для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, где ε_0 - константа из Определения 3.2.3, выполнено:

$$Coin\big(f, G(\cdot,\mu), B_{C^1}(0,\delta_\mu)\big) = \big\{(0,\mu)\big\}$$

для любого $\mu\in\mathbb{R}\colon 0<|\mu-\mu_0|\le\varepsilon_0$.
Действительно, предположим противное, что существует такая функция $x\in B_{C^1}(0,\delta_\mu)$, $x\neq 0$, что

$$f(x)\in G(x,\mu).$$

Тогда найдется функция $y\in\Pi(x)$ такая, что

$$A(t,x,x') = B(t,x,y,\mu)$$

для $t\in[0,1]$.
Из $0<\|x\|_2\le\|x\|_{C^1}\le\delta_\mu$ и Определения 3.2.3 следует, что

$$\begin{aligned} 0 &\ge \int_0^1 A\big(t,x(t),x'(t)\big)V_u'\big(x(t),\mu\big)dt \\ &= \int_0^1 B\big(t,x(t),y(t),\mu\big)V_u'\big(x(t),\mu\big)dt > 0, \end{aligned}$$

что есть противоречие. Следовательно, условие $(H9)$ тоже выполнено.

Пусть теперь $\widetilde{f}\colon C^1_{pr}[0,1]\times\mathbb{R}\to C[0,1]\times\mathbb{R}$,

$$\widetilde{f}(x,\mu)=(f(x),0),$$

и для каждого $r,\varepsilon>0$ определим мультиотображение

$$G_r\colon \overline{U}_{r,\varepsilon}\to K\big(C[0,1]\times\mathbb{R}\big),$$
$$G_r(x,\mu)=\big\{G(x,\mu),r^2-\|x\|^2_{C^1}\big\},$$

где

$$\overline{U}_{r,\varepsilon}=\{(x,\mu)\in C^1_{pr}[0,1]\times\mathbb{R}\colon \|x\|^2_{C^1}+(\mu-\mu_0)^2\le r^2+\varepsilon^2\}.$$

Нетрудно проверить, что $\widetilde{f}$ является фредгольмовым отображением нулевого индекса, сужение которого на любое замкнутое ограниченное множество $\Omega\subset C^1_{pr}[0,1]\times\mathbb{R}$ собственно, и G_r является компактным $CJ-$мультиотображением.

Выбираем произвольно $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и $0<r<\min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon},\delta_{\mu_0+\varepsilon}\}$, где ε_0 - константа из Определения 3.2.3. Покажем, что $Coin(\widetilde{f},G_r,\partial U_{r,\varepsilon})=\emptyset$.

Предположим противное, что существует $(x,\mu)\in\partial U_{r,\varepsilon}$ такое, что $\widetilde{f}(x,\mu)\in G_r(x,\mu)$. Тогда найдется функция $y\in\Pi(x)$ такая, что

$$A(t,x(t),x'(t))=B(t,x(t),y(t),\mu)\text{ для всех }t\in[0,1],\text{ и} \tag{3.2.7}$$
$$\|x\|_{C^1}=r. \tag{3.2.8}$$

Так как $(x,\mu)\in\partial U_{r,\varepsilon}$ и (3.2.8) имеем $\mu=\mu_0\pm\varepsilon$. Кроме того,

$$0<\|x\|_2\le\|x\|_{C^1}.$$

Из выбора r, Определения 3.2.3 и (3.2.7) следует, что

$$\begin{aligned}0&\ge\int_0^1 A\big(t,x(t),x'(t)\big)V_u'\big(x(t),\mu\big)dt\\&=\int_0^1 B\big(t,x(t),y(t),\mu\big)V_u'\big(x(t),\mu\big)dt>0,\end{aligned}$$

что есть противоречие. Поэтому, $(\widetilde{f},G_r,\overline{U}_{r,\varepsilon})$ является компактной тройкой.

Теперь, для выбранных чисел r,ε, где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и

$$0<r<\min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon},\delta_{\mu_0+\varepsilon}\}$$

мы будем вычислить индекс $Ind\,(\widetilde{f},G_r,\overline{U}_{r,\varepsilon})$. Для этого, рассмотрим тройку $\big(\widetilde{f}^\sharp,G^\sharp_r,\overline{U}_{r,\varepsilon}\times[0,1]\big)$, где

$$\widetilde{f}^\sharp\colon C^1_{pr}[0,1]\times\mathbb{R}\times[0,1]\to C[0,1]\times\mathbb{R},$$

$$\widetilde{f}^{\sharp}(x,\mu,\lambda) = (f^{\sharp}(x,\lambda), 0),$$

а отображение $f^{\sharp}$ определено в (3.1.8), и

$$G_r^{\sharp}\colon \overline{U}_{r,\varepsilon} \times [0,1] \to C[0,1] \times \mathbb{R},$$

$$G_r^{\sharp}(x,\mu,\lambda) = G_r(x,\mu).$$

Ясно, что $\widetilde{f}^{\sharp}$ является фредгольмовым отображением индекса 1, и $G_r^{\sharp}$ является компактным $CJ-$мультиотображением.

Предположим, что существует $(x,\mu,\lambda) \in \partial\overline{U}_{r,\varepsilon} \times [0,1]$ такое, что

$$\widetilde{f}^{\sharp}(x,\mu,\lambda) \in G_r^{\sharp}(x,\mu,\lambda).$$

Тогда, $\|x\|_{C^1} = r$ и найдется функция $y \in \Pi(x)$ такая, что

$$A^{\sharp}(t,x(t),x'(t),\lambda) = B(t,x(t),y(t),\mu) \text{ для всех } t \in [0,1].$$

Из $\|x\|_{C^1} = r$ вытекает $\mu = \mu_0 \pm \varepsilon$ и $\|x\|_2 \le r < \min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon}, \delta_{\mu_0+\varepsilon}\}$. Последовательно,

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^1 B\big(t,x(t),y(t),\mu\big) V_u^{'}\big(x(t),\mu\big)\, dt = \\ = \int_0^1 A^{\sharp}\big(t,x(t),x^{'}(t),\lambda\big) V_u^{'}\big(x(t),\mu\big)\, dt \\ = \lambda \int_0^1 A\big(t,x(t),x^{'}(t)\big) V_u^{'}\big(x(t),\mu\big)\, dt \le 0, \end{aligned}$$

что есть противоречие.

Таким образом, $\big(\widetilde{f}^{\sharp}, G_r^{\sharp}, \overline{U}_{r,\varepsilon} \times [0,1]\big)$ является гомотопией, соединяющей тройки $(\widetilde{f}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon})$ и $(\widetilde{L}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon})$, где $\widetilde{L}(x,\mu) = (x',0)$. В силу Свойства 1.7.3 имеем

$$\mid Ind\,(\widetilde{f}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon}) \mid = \mid Ind\,(\widetilde{L}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon}) \mid .$$

Пусть $\widetilde{\Sigma}\colon \overline{U}_{r,\varepsilon} \times [0,1] \to C^1_{pr}[0,1] \times \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\Sigma}(x,\mu,\lambda) = \big\{x - P_L x - (\Pi_L + K_L) \circ \varphi(G(x,\mu),\lambda),\ \tau\big\},$$

$$\tau = \lambda(\|x\|^2_{C^1} - r^2) + (1-\lambda)(\varepsilon^2 - (\mu-\mu_0)^2),$$

где отображение φ определено в (3.1.9).
Ясно, что $CJ-$мультиотображение $\widetilde{\Sigma}$ компактно.

Предположим, что существует $(x,\mu,\lambda) \in \partial U_{r,\varepsilon} \times [0,1]$ такое, что

$$0 \in \widetilde{\Sigma}(x,\mu,\lambda).$$

Тогда

$$\lambda(\|x\|^2_{C^1} - r^2) + (1-\lambda)(\varepsilon^2 - (\mu-\mu_0)^2) = 0 \tag{3.2.9}$$

и найдется $w \in G(x,\mu)$:

$$\begin{cases} x' = \lambda w_1 \\ 0 = w_0, \end{cases}$$

где $w = w_0 + w_1$, $w_0 \in \mathcal{C}_0$, $w_1 \in \mathcal{C}_1$.
Из (3.2.9) и $(x,\mu) \in \partial U_{r,\varepsilon}$ следует, что

$$\|x\|_{C^1} = r \text{ and } \mu = \mu_0 \pm \varepsilon.$$

Если $\lambda > 0$, то в силу выбора r имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 V_u^{'}(x(t),\mu)w(t)dt &= \frac{1}{\lambda}\int_0^1 V_u^{'}(x(t),\mu)x'(t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\big(V(x(1),\mu) - V(x(0),\mu)\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

что есть противоречие.

Если $\lambda = 0$, то $x' = 0$, т.е., $x \equiv a \in \mathbb{R}$. Так как

$$|a| = r < \min\{\delta_{\mu_0-\varepsilon}, \delta_{\mu_0+\varepsilon}\},$$

то

$$0 < \int_0^1 V_u^{'}(a,\mu)\widetilde{w}(s)ds = V_u^{'}(a,\mu)\Pi_L(\widetilde{w}) \tag{3.2.10}$$

для всех $\widetilde{w} \in G(a,\mu)$. В частности,

$$0 < V_u^{'}(a,\mu)\Pi_L(w) = V_u^{'}(a,\mu)\Pi(w_0) = 0,$$

что и есть противоречие.

Поэтому, $\widetilde{\Sigma}$ является гомотопией, и отсюда

$$Ind\,(\widetilde{L}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon}) = deg\big(\widetilde{\Sigma}(\cdot,\cdot,0), \overline{U}_{r,\varepsilon}\big).$$

Далее, мультиотображение $\widetilde{\Sigma}(\cdot,\cdot,0)$ имеет вид:

$$\widetilde{\Sigma}(\cdot,\cdot,0) = \{i - P_L - \Pi_L G, \varepsilon^2 - (\mu-\mu_0)^2\}.$$

Следовательно,

$$Ind\,(\widetilde{L}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon}) = deg\big(\{i - P_L - \Pi_L G, \varepsilon^2 - (\mu-\mu_0)^2\}, \overline{U}_{r,\varepsilon}\big).$$

Заметим, что мультиотображение $P_L + \Pi_L G$ принимает значения в $\mathbb{R}$, поэтому

$$\begin{aligned} & deg\big(\{i - P_L - \Pi_L G, \varepsilon^2 - (\mu - \mu_0)^2\}, \overline{U}_{r,\varepsilon}\big) \\ = & deg\big(\{i - P_L - \Pi_L G, \varepsilon^2 - (\mu - \mu_0)^2\}, \overline{U}^0_{r,\varepsilon}\big) \\ = & deg\big(\{-\Pi_L G, \varepsilon^2 - (\mu - \mu_0)^2\}, \overline{U}^0_{r,\varepsilon}\big), \end{aligned}$$

где $\overline{U}^0_{r,\varepsilon}$ определено в (3.2.6).

Из (3.2.10) следует, что поля $\{-\Pi_L G, \varepsilon^2 - (\mu - \mu_0)^2\}$ и $V^\sharp$ гомотопны на $\partial U^0_{r,\varepsilon}$. Отсюда, $Ind\,(\widetilde{f}, G_r, \overline{U}_{r,\varepsilon}) \neq 0$. Наконец, наш доказательство завершается применением Теоремы 3.2.1. $\square$

Глава 4

Метод ограничивающих функций

4.1 Метод ограничивающих функций в конечномерном пространстве

4.1.1 Абстрактная задача

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x^{'}(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

где $F\colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ и $M\colon C([0, T]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$.

Предположим, что

($\mathbb{F}$) F - верхнее Каратеодори мультиотображение с L^2-ростом;

(M) M - линейный непрерывный оператор и

$$\|M\| := \sup_{\|x\|_C=1} |Mx| \leq 1.$$

Замечание 4.1.1. *Класс краевых задач с оператором M, удовлетворяющим условию (M), достаточно широк. В частности, он содержит следующие известные задачи:*

(i) $Mx = 0$ *(задача Коши);*

(ii) $Mx = \pm\, x(T)$ *(периодическая и анти-периодическая задачи);*

(iii) $Mx = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ *(задача о среднем значении);*

(iv) $Mx = \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i x(t_i)$ *при* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *и* $\sum_{i=1}^{k_0} |\alpha_i| \le 1$, *где* $0 < t_1 < \dots < t_{k_0} \le T$ *(многоточечная краевая задача).*

Известно (см., например [26, 70, 90]), что при выполнении условия ($\mathbb{F}$) мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F \colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \to Cv(L^2([0,T];\mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{P}_F(x) = \big\{ f \in L^2([0,T];\mathbb{R}^n) \colon f(s) \in F(s, x(s))) \text{ для п.в. } s \in [0,T] \big\},$$

определен и замкнут.

Определение 4.1.1. *Под решением задачи* (4.1.1) *мы понимаем функцию* $x \in W^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n)$, *для которой существует функция* $f \in \mathcal{P}_F(x)$ *такая, что*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T], \\ x(0) = Mx. \end{cases}$$

Напомним, что если $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является локально липщицевой функцией, то для любых $x, w \in \mathbb{R}^n$ существует конечный предел

$$\liminf_{h \to 0} \frac{V(x + hw) - V(x)}{h}.$$

Определение 4.1.2. *Локально липщицева функция* $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется ограничивающей функцией для задачи* (4.1.1), *если существуют* $R_0 > r_0 > 0$ *такие, что*

($V1$) $V(w) = 0$ *при* $|w| = R_0$ *и* $V(w) < 0$ *при* $r_0 < |w| < R_0$;

($V2$) *для п.в.* $t \in [0,T]$ *и всех* $w \in \mathbb{R}^n \colon r_0 < |w| < R_0$ *выполнено отношение*

$$\liminf_{h \to 0} \frac{V\big(w + hy\big) - V(w)}{h} < 0$$

для всех $y \in F(t,w)$.

Заметим, что если $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, то

$$\liminf_{h \to 0} \frac{V\big(w + hy\big) - V(w)}{h} = \big\langle \nabla V(w), y \big\rangle$$

для всех $w, y \in \mathbb{R}^n$.

Следовательно, в случае $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, условие ($V2$) может быть переписано в виде

$(V2)'$ всех $w \in \mathbb{R}^n$: $r_0 < |w| < R_0$ выполнено отношение

$$\big\langle \nabla V(w), y \big\rangle < 0$$

для всех $y \in F(t, w)$.

Теорема 4.1.1. *Пусть выполнены условия* $(\mathbb{F})$ *и* (M). *Если существует ограничивающая функция* V *для задачи* (4.1.1), *то эта задача имеет решение со значениями в* $B^n(0, R_0)$, *где* R_0 *- константа из Определения 4.1.2.*

Доказательство. Пусть $Q = B_C(0, R_0)$. Для каждого $(y, \lambda) \in Q \times [0, 1]$ рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x'(t) \in \lambda F(t, y(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ x(0) = \lambda M y. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Ясно, что множество решений $T^{(y,\lambda)}$ задачи (4.1.2) непусто и выпукло. Определим мультиотображение $T\colon Q \times [0, 1] \to P\big(C([0, T]; \mathbb{R}^n)\big)$,

$$T(y, \lambda) = T^{(y,\lambda)}.$$

Шаг 1. Покажем, что T является компактным полунепрерывным сверху мультиотображением. В самом деле, предположим, что

$$(y_m, \lambda_m, x_m) \to (y_0, \lambda_0, x_0) \in Q \times [0, 1] \times C([0, T]; \mathbb{R}^n),$$

где $x_m \in T(y_m, \lambda_m)$. Тогда существует функция $f_m \in \mathcal{P}_F(y_m)$ такая, что

$$x_m(t) = \lambda_m M y_m + \lambda_m \int_0^t f_m(s) ds, \ t \in [0, T]. \tag{4.1.3}$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} x_m^{'} = \lambda_m f_m, \\ x_m(0) = \lambda_m M y_m. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Из $(\mathbb{F})$ следует, что множество $\{f_m\}$ ограничено в $L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Отсюда, в силу (4.1.4) и ограниченности множества $\{x_m\}$ в пространстве $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ получаем ограниченность множества $\{x_m^{'}\}$ в пространстве $L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Следовательно, множество $\{x_m\}$ ограничено в $W^{1,2}([0, T]; \mathbb{R}^n)$, и поэтому оно слабо компактно. Без ущерба для общности предположим, что

$$x_m \overset{W^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n)}{\rightharpoonup} x_0.$$

Тогда

$$x_m^{'} \overset{L^2([0,T];\mathbb{R}^n)}{\rightharpoonup} x_0^{'}.$$

Последовательно,

$$\lambda_m f_m \overset{L^2([0,T];\mathbb{R}^n)}{\rightharpoonup} x_0^{'}. \tag{4.1.5}$$

В силу Теоремы Мазура (см. Теорему 1.1.5) существует последовательность выпуклых комбинаций $\{\overline{f}^{(m)}\}$,

$$\overline{f}_m = \sum_{k=m}^{\infty} \sigma_{mk}\lambda_k f_k,\ \sigma_{mk} \geq 0 \quad \sum_{k=m}^{\infty} \sigma_{mk} = 1,$$

которая сходится к $x_0^{'}$ в $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$.
Применяя Теорему 1.1.6 мы снова предположим (без ущерба для общности), что $\{\overline{f}_m\}$ сходится к $x_0^{'}$ для п.в. $t \in [0,T]$.
Из ($\mathbb{F}$) следует, что для п.в. $t \in [0,T]$ и для заданного $\varepsilon > 0$ найдется целое число $i_0 = i_0(\varepsilon, t)$ такое, что

$$\lambda_i F(t, y_i(t)) \subset O_\varepsilon\Big(\lambda_0 F\big(t, y_0(t)\big)\Big) \text{ for all } i \geq i_0.$$

Тогда $\lambda_i f_i(t) \in O_\varepsilon\Big(\lambda_0 F\big(t, y_0(t)\big)\Big)$ для всех $i \geq i_0$, и в силу выпуклости множества $O_\varepsilon\Big(\lambda_0 F\big(t, y_0(t)\big)\Big)$ имеем

$$\overline{f}_m(t) \in O_\varepsilon\Big(\lambda_0 F\big(t, y_0(t)\big)\Big), \text{ для всех } m \geq i_0.$$

Следовательно,

$$x_0^{'}(t) \in \lambda_0 F(t, y_0(t)) \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,T],$$

т.е., $x_0 \in T(y_0, \lambda_0)$. Поэтому, T является замкнутым мультиотображением.

Теперь, из (M) и ограниченности множества Q вытекают ограниченность и равностепенно непрерывность множества $T\big(Q \times [0,1]\big)$ в пространстве $C([0,T];\mathbb{R}^n)$, т.е. оно является относительно компактным в $C([0,T];\mathbb{R}^n)$. Таким образом, T является замкнутым и компактным мультиотображением. Отсюда, оно является компактным полунепрерывным сверху мультиотображением.

Шаг 2. Предположим теперь, что существует $(x, \lambda) \in \partial Q \times (0,1)$ такое, что $x \in T(x, \lambda)$. Тогда найдется функция $f \in \mathcal{P}_F(x)$ такая, что

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda f(t) \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,T], \\ x(0) = \lambda M x. \end{cases}$$

Из того, что $|x(0)| \leq \lambda\|M\|\|x\|_C < R_0$ мы можем выбрать $t_0 \in (0, T]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|x(t_0)| = R_0 \ \text{ и } \ r_0 < |x(t)| < R_0 \ \text{ для } \ t_0 - \varepsilon < t < t_0.$$

Из свойства локально липщицевой фунции V следует, что существует $\delta > 0$ такое, что сужение V на $B^n\big(x(t_0), \delta\big)$ является липщицевым с коэффициентом $L > 0$. Нетрудно видеть, что функция $g(t) = V(x(t))$ является абсолютно непрерывной в $t \in (t_0 - \delta, t_0)$, поэтому существует $g'(t)$ для п.в $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Следовательно,

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0} g'(s)ds = V(x(t_0)) - V(x(t_0 - \delta)) = -V(x(t_0 - \delta)) \geq 0.$$

С другой стороны, для п.в. $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ и для достаточно малых h пусть

$$\varphi(h) := x(t + h) - x(t) - x'(t)h$$

и

$$\Delta(h) := \frac{V\big(x(t) + x'(t)h + \varphi(h)\big) - V\big(x(t) + x'(t)h\big)}{h}.$$

Тогда

$$|\Delta(h)| \leq \frac{L|\varphi(h)|}{|h|} \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Следовательно, из

$$\frac{g(t + h) - g(t)}{h} = \frac{V\big(x(t) + x'(t)h\big) - V\big(x(t)\big)}{h} + \Delta(h),$$

вытекает

$$\liminf_{h\to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h} = \liminf_{h\to 0} \frac{V\big(x(t) + x'(t)h\big) - V\big(x(t)\big)}{h} < 0.$$

Отсюда, $\int_{t_0-\delta}^{t_0} g'(s)ds < 0$, что есть противоречие.

Таким образом, если существует $x \in \partial Q$ такое, что $x \in T(x, 1)$, то x является решением задачи (4.1.1). Если $x \notin T(x, 1)$ при $x \in \partial Q$, то T является гомотопией, соединяющей мультиотображения $T(\cdot, 0)$ и $T(\cdot, 1)$. Поэтому,

$$deg(i - T(\cdot, 1), Q) = deg(i - T(\cdot, 0), Q) = 1.$$

Отсюда, задача (4.1.1) имеет решение $x \in Q$. $\square$

4.1.2 Применение к дифференциальной системе с дополнением

Пусть K - замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$ и K^* - сопряженный конус. Рассмотрим дифференциальную систему с дополнением типа:

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big) & \text{для п.в. } t \in [0,T], \\ K \ni u(t) \perp G(t, x(t)) + F(u(t)) \in K^* & \text{для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{4.1.6}$$

где $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $G\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ являются непрерывными отображениями; $M\colon C([0,T];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (M). Дополнительно предположим, что

($\mathbb{A}1$) для каждого $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ множество

$$f(t,z,\Omega) := \{f(t,z,y)\colon y \in \Omega\}$$

выпукло для любого выпуклого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^m$;

($\mathbb{A}2$) для любого ограниченного пожмножества $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ существует $\alpha_Z > 0$ такое, что

$$|f(t,z,w)| \le \alpha_Z$$

для $(t,z,w) \in [0,T] \times Z$;

($\mathbb{A}3$) для любого ограниченного пожмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует $\gamma_\Omega > 0$ такое, что

$$|G(t,z)| \le \gamma_\Omega$$

для $(t,z) \in [0,T] \times \Omega$;

($\mathbb{A}4$) F монотоно на K и найдется $a > 0$ такое, что

$$\big\langle w, F(w)\big\rangle \ge a\,|w|^2 \ \text{ для всех } \ w \in K.$$

Справедливо следующее утверждение (см. Лемму 2.4.7).

Лемма 4.1.1. *Пусть выполнено условие* $(\mathbb{A}4)$. *Тогда для каждого* $r \in \mathbb{R}^m$ *справедливы:*

(a) *множество решений*

$$SOL(K, r+F) = \{w \in K \colon \langle w, r + F(w)\rangle = 0\}$$

непусто, выпукло и замкнуто;

(b) $|w| \leq \frac{1}{a}|r|$ *для всех* $w \in SOL(K, r+F)$, *где* a *- константа из* $(\mathbb{A}4)$.

Определим мультиотображения $U \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Cv(K)$,

$$U(t,z) = SOL(K, G(t,z) + F),$$

и $\Phi \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$,

$$\Phi(t,z) = \big\{f(t,z,w) \colon w \in U(t,z)\big\}.$$

Лемма 4.1.2. *Пусть выполнены условия* $(\mathbb{A}1)-(\mathbb{A}4)$. *Тогда мультиотображение* Φ *удовлетворяет условию* $(\mathbb{F})$.

Доказательство. Из Леммы 4.1.1(b) следует, что

$$\|U(t,z)\| \leq \frac{1}{a}\,|G(t,z)| \tag{4.1.7}$$

для $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, сужение $U_{|\Omega}$ мультиотображения U на любое ограниченное множество $\Omega \subset [0,T] \times \mathbb{R}^n$ компактно. В силу Леммы 4.1.1(a) U является замкнутым мультиотображением, и поэтому, оно полунепрерывно сверху. Так как отображение f непрерывно, мультиотображение Φ тоже является полунепрерывным сверху. Условие $(\mathbb{F})$ непосредственно следует из $(\mathbb{A}2)-(\mathbb{A}3)$ и (4.1.7). □

Теперь, применяя Лемму Филиппова о неявной функции (см., например [57] или [26, Теорема 1.5.15] или [90, Теорема 1.3.3]) мы можем заменить задачу (4.1.6) следующей эквивалентной задачей

$$\begin{cases} x'(t) \in \Phi(t, x(t)) \ \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = Mx. \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Определение 4.1.3. *Под решением задачи* (4.1.6) *мы понимаем пару* (x, u), *состоящую из функции* $x \in W^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n)$ *и интегрируемой функции* $u\colon [0,T] \to K$, *которые удовлетворяют* (4.1.6), *или эквивалентно, под решением задачи* (4.1.6) *мы понимаем функцию* $x \in W^{1,2}([0,T];\mathbb{R}^n)$, *которая удовлетворяет* (4.1.8).

Из Леммы 4.1.2 и Теоремы 4.1.1 мы получим следующий критерий о существовании решений для задачи (4.1.6).

Теорема 4.1.2. *Пусть выполнены условия* $(\mathbb{A}1) - (\mathbb{A}4)$ *и* (M). *Если существует ограничивающая функция* V *для задачи* (4.1.8), *тогда задача* (4.1.6) *имеет решение.*

Следствие 4.1.1. *Пусть отображение* $f(t,z,u) = -Az + \widetilde{f}(t,z,u)$, *где* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и* $\widetilde{f}\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *- непрерывное отображение, удовлетворяющее условию* $(\mathbb{A}1)$. *Дополнительно предположим, что выполнены условия* $(\mathbb{A}4)$, (M) *и следующие условия:*

$(\mathbb{A})$ *существует* $\lambda > 0$ *такое, что*

$$\big\langle z, Az\big\rangle \geq \lambda |z|^2$$

для всех $z \in \mathbb{R}^n$;

$(\mathbb{A}2)'$ *существует* $\alpha \in (0,\lambda)$ *такое, что*

$$|\widetilde{f}(t,z,w)| \leq \alpha(1 + |z| + |w|)$$

для $(t,z,w) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$;

$(\mathbb{A}3)'$ *существует* $\beta \in (0, \frac{a(\lambda-\alpha)}{\alpha})$ *такое, что*

$$|G(t,z)| \leq \beta(1 + |z|)$$

для $(t,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$, *где* a *- константа из* $(\mathbb{A}4)$.

Тогда задача (4.1.6) *имеет решение.*

Доказательство. Возьмем произвольно $R_0 > r_0 > \frac{a\alpha+\alpha\beta}{a\lambda-a\alpha-\alpha\beta}$. В силу Теоремы 4.1.2 нам достаточно показать, что функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$V(z) = \frac{1}{2}(|z|^2 - R_0^2),$$

является ограничивающей функцией для задачи (4.1.8), т.е. нам нужно показать, что для $z \in \mathbb{R}^n$, $r_0 < |z| < R_0$, и п.в. $t \in [0,T]$ выполнено следующее отношение:

$$\big\langle \nabla V(z), y \big\rangle < 0 \text{ для всех } y \in \Phi(t,z).$$

В самом деле, для $z \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in [0,T]$ выбираем произвольно $y \in \Phi(t,z)$. Тогда существует $w \in SOL\big(K, G(t,z)+F\big)$ такое, что

$$y = -Az + \widetilde{f}(t,z,w).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\big\langle \nabla V(z), y \big\rangle &= \big\langle z, -Az + \widetilde{f}(t,z,w) \big\rangle \\
&\le -\lambda |z|^2 + |z|\,|\widetilde{f}(t,z,w)| \\
&\le -\lambda |z|^2 + \alpha |z|(1+|z|+|w|) \\
&\le -\lambda |z|^2 + \alpha |z|\big(1+|z|+\frac{1}{a}|G(t,z)|\big) \\
&\le -\lambda |z|^2 + \alpha |z|\big(1+|z|+\frac{1}{a}\beta(1+|z|)\big) \\
&= -(\lambda - \alpha - \frac{\alpha\beta}{a})|z|^2 + (\alpha + \frac{\alpha\beta}{a})|z| < 0
\end{aligned}$$

при

$$|z| > \frac{a\alpha + \alpha\beta}{a\lambda - a\alpha - \alpha\beta}.$$

Таким образом, V является ограничивающей функцией для задачи (4.1.8) и отсюда задача (4.1.6) имеет решение. □

Пример 4.1.1. *Пусть $t_1, \cdots, t_k \in (0,T)$ - заданные числа и $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ такие, что $\sum_{i=1}^k |c_i| \le 1$. Рассмотрим следующую многоточечную краевую задачу:*

$$\begin{cases}
x'(t) = -Ax(t) + Bu(t) + z_0, \\
y(t) = Cx(t) + Du(t), \\
0 \le u(t) \perp y(t) \ge 0 \\
x(0) = \sum_{i=1}^k c_i x(t_i),
\end{cases} \tag{4.1.9}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$; $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ - заданный вектор.

Задача (4.1.9) *может быть рассмотрена как система управления, где x - функция состояния; u и y являются входной и выходной функциями,*

соответственно. В этом примере,

$$K = \{w = (w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m \colon w_i \geq 0;\ i = 1, \cdots, m\}.$$

Определим $\widetilde{f} \colon [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

$$\widetilde{f}(t, z, w) = z_0 + Bw,$$

и пусть $\alpha := \max\{|z_0|, \|B\|\}$. *Тогда*

$$|\widetilde{f}(t, z, w)| \leq \alpha(1 + |z| + |w|)$$

для всех $(t, z, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
Из Следствия 4.1.1 следует:

Теорема 4.1.3. *Если существуют* $\lambda > \alpha$ *и* $a > \frac{\alpha\,\|C\|}{\lambda - \alpha}$ *такие, что*

$$\big\langle z, Az \big\rangle \geq \lambda |z|^2 \quad \text{и} \quad \big\langle w, Dw \big\rangle \geq a|w|^2$$

для всех $z \in \mathbb{R}^n$ *и* $w \in \mathbb{R}^m$, *тогда задача* (4.1.9) *имеет решение, т.е. система* (4.1.9) *является управляемой.* $\square$

4.2 Метод ограничивающих функций в бесконечномерном гильбертовом пространстве

4.2.1 Дифференциальные уравнения

Пусть $(H, \|\cdot\|_H)$ - сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, компактно вложенное в банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ с отношением между нормами

$$\|w\|_E \leq q\|w\|_H \text{ для всех } w \in H,\ q > 0. \tag{4.2.1}$$

Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис пространства H и для любого $n \in \mathbb{N}$, H_n - $n-$мерные подпространства пространства H с базисами $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ и P_n - натуральные проекции из H на H_n. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ обозначает скалярное произведение в H. *Открытый шар* с радиусом r и центром $x_0 \in H$ $[x_0 \in E]$ в пространстве H $[E]$ обозначается символом $int\, B_H(x_0, r)$ [соответственно, $int\, B_E(x_0, r)$]. Пусть

$$B_H(0, r, R) = \{w \in H \colon r \leq \|w\|_H \leq R\}$$

и

$$int\, B_H(0, r, R) = \{w \in H \colon r < \|w\|_H < R\}$$

В этом параграфе введем метод ограничивающих функций в бесконечномерном гильбертовом пространстве для изучения задачи:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

где $f \colon [0, T] \times H \to H$ и $M \colon C([0, T]; H) \to H$.

Предположим, что:

$(f1)$ функция $f \colon [0, T] \times H \to H$ является измеримой, где мера на $[0, T] \times H$ является произведением меры Лебега на $\mathbb{R}$ и меры Бореля на H;

$(f2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ отображение $f(t,\cdot)\colon H \to H$ является $E-E$ непрерывным в смысле: для каждого $w \in H$, и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $w' \in B_E(w,\delta)$ следует, что $f(t,w') \in B_E\big(f(t,w),\varepsilon\big)$;

$(f3)$ для любого ограниченного множества $\Omega \subset H$ существует положительная функция $v_\Omega \in L^1[0,T]$ такая, что для всех $\omega \in \Omega$ выполнено

$$\|f(t,\omega)\|_H \le v_\Omega(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$;

(M) $M\colon C([0,T];H) \to H$ является линейным непрерывным оператором и $\|M\| \le 1$.

Замечание 4.2.1. *Условие* $(f1)$ *непосредственно выполнено если* f *является отображением Каратеодори.*

Из $(f1)$ и $(f3)$ следует, что для каждой функции $x \in C([0,T];H)$ суперпозиционная функция $f(s,x(s))$ принадлежит пространству $L^1([0,T];H)$. Под решением задачи (4.2.2) мы понимаем функцию $x \in W^{1,1}([0,T];H)$, удовлетворяющую (4.2.2).

В дальнейшем нам понадобятся следующие определение и утверждение.

Определение 4.2.1. *Пусть* $S \subseteq \mathbb{R}$ *- измеримое множество. Множество* $A \subset L^1(S,H)$ *называется равномерно интегрируемым если для любого* $\epsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что из* $\Omega \subset S$ *и* $\mu(\Omega) < \delta$ *следует, что*

$$\left\| \int_\Omega f\, d\mu \right\| < \epsilon \quad \text{для всех } f \in A,$$

где μ *- мера Лебега на* $\mathbb{R}$.

Теорема 4.2.1. *(см. [46]). Пусть* $A \subset L^1(S,H)$ *- ограниченное, равномерно интегрируемое множество. Тогда* A *является слабо относительно компактным множеством в* $L^1(S,H)$.

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 4.2.2. *Пусть выполнены условия* $(f1)-(f3)$ *и* (M). *Дополнительно предположим, что*

$(f4)$ *существуют* $R_0 > r_0 > 0$ *такие, что*

$$\big\langle w, f(t,w)\big\rangle_H < 0,$$

для всех $w \in int\, B_H(0, r_0, R_0)$ *и п.в.* $t \in [0,T]$.

Тогда задача (4.2.2) *имеет решение со значениями в* $B_H(0,R_0)$.

Доказательство. Шаг 1. Ясно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ задача

$$\begin{cases} x'(t) = 0, \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение в пространстве $W^{1,1}([0,T];H_n)$.
Покажем теперь, что для любого $n \in \mathbb{N}$, задача

$$\begin{cases} x'(t) = P_n f(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = P_n M x, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

имеет решение в пространстве $W^{1,1}([0,T];H_n)$.
Для этого, возьмем произвольно $r_* \in (r_0, R_0)$ и Пусть $\overline{K} = B_H(0, r_*)$,

$$Q = C([0,T];\overline{K}) \;\text{ и }\; Q^{(n)} = Q \cap C([0,T];H_n).$$

Для каждого $y \in Q^{(n)}$ и $\lambda \in [0,1]$, задача Коши

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda P_n f(t, y(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = \lambda P_n M y. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

имеет единственное решение $x_n \in W^{1,1}([0,T];H_n)$:

$$x_n(t) = \lambda P_n M y + \lambda \int_0^t P_n f(s, y(s)) ds, \; t \in [0,T]. \tag{4.2.5}$$

Определим отображение $\mathcal{T}_n \colon Q^{(n)} \times [0,1] \to C([0,T];H_n)$, где $\mathcal{T}_n(y,\lambda)$ является решением задачи (4.2.4). Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)} \times \{0\}\big) = \bigcup_{y \in Q^{(n)}} \mathcal{T}_n(y,0) = \{0\} \subset int\, Q^{(n)},$$

где $int\, Q^{(n)}$ - внутреннее множество множества $Q^{(n)}$.

Шаг 2. (a) Сначала покажем, что отображение $\mathcal{T}_n$ имеет замкнутый график в пространстве $Q^{(n)} \times [0,1] \times C([0,T]; H_n)$. Действительно, предположим, что

$$(y^{(m)}, \lambda^{(m)}, x^{(m)}) \to (y^{(0)}, \lambda^{(0)}, x^{(0)}) \in Q^{(n)} \times [0,1] \times C([0,T]; H_n),$$

где $x^{(m)} = \mathcal{T}_n(y^{(m)}, \lambda^{(m)})$. Тогда

$$x^{(m)}(t) = \lambda^{(m)} P_n M y^{(m)} + \lambda^{(m)} \int_0^t P_n f(s, y^{(m)}(s)) ds, \ t \in [0,T]. \qquad (4.2.6)$$

Из компактного вложения пространства H в E и условия $(f2)$ вытекает

$$P_n f(s, y^{(m)}(s)) \overset{E}{\to} P_n f(s, y^{(0)}(s)) \text{ для п.в. } s \in [0,T].$$

Приведяя предел при $m \to \infty$ в (4.2.6) имеем

$$x^{(0)}(t) = \lambda^{(0)} P_n M y^{(0)} + \lambda^{(0)} \int_0^t P_n f(s, y^{(0)}(s)) ds, \ t \in [0,T],$$

т.е. $x^{(0)} = \mathcal{T}_n(y^{(0)}, \lambda^{(0)})$.

(b) Покажем теперь, что множество $\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)} \times [0,1]\big)$ относительно компактно в $C([0,T]; H_n)$. В самом деле, из $(f3)$ и ограниченности множества $Q^{(n)}$ следует, что множество $\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)} \times [0,1]\big)$ является ограниченным и равностепенно непрерывным в $C([0,T]; H_n)$, и откуда следует, что оно является относительо компактным в $C([0,T]; H_n)$. Поэтому, $\mathcal{T}_n$ является замкнутым и компактным отображением, и следовательно, оно вполне непрерывно.

(c) Предположим, что существует $(y_n, \lambda) \in \partial Q^{(n)} \times (0,1)$ такое, что

$$y_n = \mathcal{T}_n(y_n, \lambda).$$

Тогда, $y_n(0) = \lambda P_n M y_n$ и

$$y_n^{'}(t) = \lambda P_n f(t, y_n(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

В силу $y_n \in \partial Q^{(n)}$ мы можем выбрать $t_0 \in [0,T]$ так, что

$$\|y_n(t_0)\|_H = r_*.$$

Если $t_0 = 0$, то

$$r_* = \|y_n(0)\|_H = \lambda \|P_n M y_n\|_H \le \lambda \|y_n\|_C < r_*,$$

что есть противоречие.
Поэтому, $t_0 \in (0, T]$. Отсюда, мы можем выбрать достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что

$$r_0 < \|y_n(t)\|_H \leq r_* < R_0 \text{ для всех } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0).$$

Из последних неравенств следует, что

$$\big\langle y_n(t), f(t, y_n(t))\big\rangle_H < 0, \text{ для п.в. } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0).$$

Так как $y_n(t) \in H_n$ для всех $t \in [0, T]$ имеем

$$\big\langle y_n(t), \lambda P_n f(t, y_n(t))\big\rangle_H = \lambda\big\langle y_n(t), f(t, y_n(t))\big\rangle_H < 0$$

для п.в. $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$.
Последовательно,

$$0 > \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \big\langle y_n(t), \lambda P_n f(t, y_n(t))\big\rangle_H dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \big\langle y_n(t), y_n^{'}(t)\big\rangle_H dt \geq 0,$$

что есть противоречие.

Таким образом, если существует функция $y_n \in \partial Q^{(n)}$ такая, что

$$y_n = \mathcal{T}_n(y_n, 1),$$

то y_n является решением задачи (4.2.3). Если $y_n \neq \mathcal{T}_n(y_n, 1)$ для всех $y_n \in \partial Q^{(n)}$, то $\mathcal{T}_n$ является гомотопией, соединяющей отображения $\mathcal{T}_n(\cdot, 0)$ и $\mathcal{T}_n(\cdot, 1)$. Следовательно,

$$deg\big(i - \mathcal{T}_n(\cdot, 1), Q^{(n)}\big) = deg\big(i - \mathcal{T}_n(\cdot, 0), Q^{(n)}\big) = 1.$$

Поэтому, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $y_n \in Q^{(n)}$ такая, что $y_n = \mathcal{T}_n(y_n, 1)$, т.е. y_n является решением задачи (4.2.3).

Шаг 3. Пусть $f_n(t) = f(t, y_n(t))$. Из $\|y_n(t)\|_H \leq r_*$ и $(f3)$ следует, что существует функция $\nu_* \in L^1([0, T]; H)$ такая, что

$$\|f_n(t)\|_H \leq \nu_*(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T] \text{ и всех } n.$$

Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ ограничена и равномерно интегрируема в $L^1([0, T]; H)$. В силу Теоремы 4.2.1 она слабо относительно компактна в $L^1([0, T]; H)$. Без ущерба для общности предположим, что

$$f_n \overset{L^1([0,T];H)}{\rightharpoonup} f_0.$$

Из того, что $\|P_n f_n(t)\|_H \le \|f_n(t)\|_H \le \nu_*(t)$ для всех $t \in [0,T]$, вытекает слабо относительно компактность в $L^1([0,T];H)$ последовательности $\{y_n^{'}\}$. Предположим снова, что

$$\mathbb{P}_n f_n = y_n^{'} \overset{L^1([0,T];H)}{\rightharpoonup} y_0^{'}, \tag{4.2.7}$$

где отображение $\mathbb{P}_n\colon L^1([0,T];H) \to L^1([0,T];H_n)$ определяется следующим образом

$$(\mathbb{P}_n f)(t) = P_n f(t),\ t \in [0,T].$$

Множество $\{y_n(0) : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в H. Поэтому, мы можем предполагать, что

$$y_n(0) \overset{H}{\rightharpoonup} \gamma_0. \tag{4.2.8}$$

Определим

$$y_0(t) := \gamma_0 + \int_0^t y_0^{'}(s)\,ds, \qquad t \in [0,T].$$

Нетрудно видеть, что

$$y_n(t) = y_n(0) + \int_0^t y_n^{'}(s)\,ds \overset{H}{\rightharpoonup} y_0(t)$$

для всех $t \in [0,T]$.
Кроме того, $\|y_n(t)\|_H \le r_*$ для всех t и n. Следовательно (см., например [21])

$$y_n \overset{C([0,T];H)}{\rightharpoonup} y_0,$$

и откуда, $My_n \overset{H}{\rightharpoonup} My_0$.
Для любого $w \in H$, так как $P_n w \overset{H}{\to} w$, имеем

$$\begin{aligned}\big\langle P_n My_n - My_0, w\big\rangle_H &= \big\langle P_n My_0 - My_0, w\big\rangle_H + \big\langle P_n My_n - P_n My_0, w\big\rangle_H \\ &= \big\langle P_n My_0 - My_0, w\big\rangle_H + \big\langle My_n - My_0, P_n w\big\rangle_H \\ &= \big\langle P_n My_0 - My_0, w\big\rangle_H + \big\langle My_n - My_0, P_n w - w\big\rangle_H \\ &\qquad + \big\langle My_n - My_0, w\big\rangle_H.\end{aligned}$$

Последовательно, $\big\langle P_n My_n - My_0, w\big\rangle_H \to 0$ при $n \to \infty$.
Отсюда, $y_n(0) = P_n My_n \overset{H}{\rightharpoonup} My_0$. В связи с (4.2.8) мы получаем, что

$$y_0(0) = My_0.$$

С другой стороны, слабая сходимость $y_n(t) \rightharpoonup y_0(t)$ в H при всех t следует, что

$$y_n(t) \xrightarrow{E} y_0(t) \ \text{ для любого } \ t \in [0,T]. \tag{4.2.9}$$

Имеем

$$\mathbb{P}_n g \overset{L^1([0,T];H)}{\longrightarrow} g$$

для $g \in L^1([0,T];H)$.
Покажем теперь, что

$$\mathbb{P}_n f_n \overset{L^1([0,T];H)}{\rightharpoonup} f_0.$$

Для этого, пусть $\Phi\colon L^1([0,T];H) \to \mathbb{R}$ - линейный ограниченный функционал. Тогда существует функция $\varphi \in L^\infty([0,T];H)$ такая, что

$$\Phi(g) = \int_0^T \big\langle g(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \ \text{ для всех } \ g \in L^1([0,T];H).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbb{P}_n f_n - f_0) = \int_0^T \big\langle P_n f_n(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \int_0^T \big\langle P_n f_n(t) - P_n f_0(t), \varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \int_0^T \big\langle P_n f_0(t) - f_0(t), \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \int_0^T \big\langle P_n f_0(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&\qquad\qquad + \int_0^T \big\langle P_n f_0(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \Phi(f_n - f_0) + \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \Phi(\mathbb{P}_n f_0 - f_0).
\end{aligned}$$

Напомним, что

$$f_n \overset{L^1([0,T];H)}{\rightharpoonup} f_0, \quad \mathbb{P}_n f_0 \overset{L^1([0,T];H)}{\longrightarrow} f_0$$

и для п.в. $t \in [0,T]$ выполнены отношения

$$\begin{aligned}
\big|\big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H\big| &\le \|f_n(t) - f_0(t)\|_H \cdot \|P_n\varphi(t) - \varphi(t)\|_H \\
&\le 2\big(v_*(t) + \|f_0(t)\|_H\big)\|\varphi(t)\|_H,
\end{aligned}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n\varphi(t) - \varphi(t)\|_H = 0.$$

Следовательно, для п.в. $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H = 0.$$

Кроме того, функция

$$g_*(t) := \big(v_*(t) + \|f_0(t)\|_H\big)\|\varphi(t)\|_H, \quad t \in [0,T],$$

интегрируема из того, что

$$\int_0^T \|g_*(t)\|_H \, dt \le \|\varphi\|_\infty \int_0^T \big(v_*(t) + \|f_0(t)\|_H\big)\, dt,$$

где $\|\varphi\|_\infty$ - норма функции φ в $L^\infty([0,T];H)$.
В следствие теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\Phi(\mathbb{P}_n f_n - f_0) \to 0 \;\text{ при }\; n \to \infty,$$

т.е. $\mathbb{P}_n f_n \overset{L^1([0,T];H)}{\rightharpoonup} f_0$. Поэтому, из (4.2.7) мы получаем, что $y_0' = f_0$, и отсюда, $f_n \overset{L^1(I,H)}{\rightharpoonup} y_0'$. В силу Теоремы 1.1.5 существует последовательность выпуклых комбинаций $\{\overline{f}^{(n)}\}$,

$$\overline{f}^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \sigma_{nk} f_k, \;\; \sigma_{nk} \ge 0 \quad \sum_{k=n}^{\infty} \sigma_{nk} = 1,$$

которая сходится к y_0' в $L^1([0,T];H)$. Предположим (без ущерба для общности), что $\{\overline{f}^{(n)}\}$ сходится к y_0' для п.в. $t \in [0,T]$.
Из компактного вложения $H \hookrightarrow E$ вытекает

$$\overline{f}^{(n)}(t) \xrightarrow{E} y_0'(t) \;\text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

В силу (4.2.9) и $(f2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое число $i_0 = i_0(\varepsilon, t)$ такое, что

$$f(t, y_i(t)) \in B_E\Big(f\big(t, y_0(t)\big), \varepsilon\Big) \text{ для всех } i \ge i_0.$$

Поэтому, $f_i(t) \in B_E\Big(f\big(t, y_0(t)\big), \varepsilon\Big)$ для всех $i \ge i_0$, и из выпуклости множества $B_E\Big(f\big(t, y_0(t)\big), \varepsilon\Big)$ следует, что

$$\overline{f}^{(n)}(t) \in B_E\Big(f\big(t, y_0(t)\big), \varepsilon\Big) \;\; n \ge i_0.$$

Следовательно, $y_0'(t) = f(t, y_0(t))$ для п.в. $t \in [0,T]$. В связи с тем, что $y_0(0) = My_0$ функция y_0 является решением задачи (4.2.2). $\square$

4.2.2 Полулинейные дифференциальные уравнения

Рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение типа

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) = f(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{4.2.10}$$

где $A\colon H \to H$ - линейный ограниченный оператор, который является $E - E$ непрерывным; f и M удовлетворяют условиям $(f1) - (f3)$ и (M), соответственно.

Теорема 4.2.3. *Пусть существуют $R_0 > r_0 > 0$ такие, что для всех $w \in intB_H(0, r_0, R_0)$ и п.в. $t \in [0, T]$ выполнено отношение*

$$\big\langle w, -Aw + f(t, w)\big\rangle_H < 0.$$

Тогда задача (4.2.10) *имеет решение.*

Доказательство. Перепишем задачу (4.2.10) в виде

$$\begin{cases} x'(t) = \widetilde{f}(t, x(t)), \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{4.2.11}$$

где $\widetilde{f}\colon [0, T] \times H \to H$,

$$\widetilde{f}(t, w) = -Aw + f(t, w).$$

Нетрудно проверить, что задача (4.2.11) удовлетворяет всем требованиям в Теореме 4.2.2, следовательно, она, и отсюда задача (4.2.10), имеет решение. □

В качестве примера, рассмотрим следующие *интегро-дифференциальные уравнения.*

Пример 4.2.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ - открытое ограниченное множество с липщицевой границей. Рассмотрим периодическую задачу*

$$\begin{cases} u_t + a\int_\Omega u(t, \xi)d\xi = -bu(t, \xi) + f(t, u(t, \xi)), \\ u(0, \xi) = u(1, \xi), \end{cases} \tag{4.2.12}$$

для п.в. $t \in [0, 1]$ и всех $\xi \in \Omega$, где $a, b > 0$ и $f\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывное отображение.

Предположим, что

$(f1)'$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial z}\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывны;

$(f2)'$ существует положительное число $N<b$ такое, что

$$\left|\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\right|\le N \text{ для всех } (t,z)\in[0,1]\times\mathbb{R}.$$

Под решением задачи (4.2.12) мы понимаем непрерывную функцию $u\colon [0,1]\times\Omega\to\mathbb{R}$, частная производная $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t}$ которой существует и удовлетворяет (4.2.12). Кроме того, мы можем рассматривать систему (4.2.12) как динамическую систему с функцией состояния $u(t,\xi)$. Наша цель - найти динамику системы как непрерывную функцию $u(t,\xi)$ такую, что в любом времени t функция $u(t,\cdot)$ принадлежит пространству $W^{1,2}(\Omega)$.

Теорема 4.2.4. *Пусть выполнены условия $(f1)'-(f2)'$. Тогда задача (4.2.12) имеет решение. Кроме того, если $f(t,0)\neq 0$ при всех $t\in[0,1]$, то решение является ненулевым.*

Доказательство. Пусть $H=W^{1,2}(\Omega)$ и $E=L^2(\Omega)$. Ясно, что H является сепарабельным гильбертовым пространством, компактно вложенным в E и для любого $w\in H$:

$$\|w\|_H=\sqrt{\|w\|_2^2+\|Dw\|_2^2},$$

где $\|w\|_2^2=\int_\Omega w^2(\xi)\,d\xi$ и D обозначает производную функции с многими перемеными.
Для каждого $t\in[0,1]$, пусть $x(t)=u(t,\cdot)$. Тогда, мы можем заменить задачу (4.2.12) следующей задачей

$$\begin{cases} x'(t)+Ax(t)=\overline{f}(t,x(t)) \ \text{ для п.в. } t\in[0,1],\\ x(0)=x(1), \end{cases} \tag{4.2.13}$$

где $A\colon H\to H,\ Aw=a\int_\Omega w(\xi)d\xi$, и

$$\overline{f}\colon [0,1]\times H\to H,\ \ \overline{f}(t,w)(\xi)=-bw(\xi)+f(t,w(\xi)).$$

Отметим, что отображение $\overline{f}$ корректно определено так как

$$D\overline{f}(t,w)(\xi)=-bDw(\xi)+f_2'(t,w(\xi))\,Dw(\xi),$$

где $f_2' = \frac{\partial f}{\partial z}$.
Из $(f1)' - (f2)'$ следует, что

$$|f(t,z)| = |f(t,0) + f_2'(t,\eta)\, z| \leq |f(t,0)| + N|z| \tag{4.2.14}$$

для всех $(t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, где η - число между 0 и z.
Нетрудно проверить, что A является линейным ограниченным оператором, которое является $E - E$ непрерывным. Покажем, что отображение $\overline{f}(t,\cdot)$ удовлетворяет $(f2)$.
Пусть $\{w_n\} \subset H$: $w_n \xrightarrow{E} w_0$. В силу $(f1)'$ для любого $(t,\xi) \in (0,1) \times \Omega$ имеем

$$|f(t,w_n(\xi)) - f(t,w_0(\xi))| = |f_2'(t,\eta).(w_n(\xi) - w_0(\xi))| \leq N|w_n(\xi) - w_0(\xi)|,$$

где η - число между $w_n(\xi)$ и $w_0(\xi)$.
Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\|\overline{f}(t,w_n) - \overline{f}(t,w_0)\|_E^2 = \\
&= \int_\Omega \Big| -bw_n(\xi) + f(t,w_n(\xi)) + bw_0(\xi) - f(t,w_0(\xi)) \Big|^2 d\xi \\
&\leq 2(b^2 + N^2) \int_\Omega |w_n(\xi) - w_0(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq 4b^2 \|w_n - w_0\|_E^2.
\end{aligned}$$

Поэтому, $\overline{f}(t,w_n) \xrightarrow{E} \overline{f}(t,w_0)$, и отсюда, условие $(f2)$ выполнено.

Пусть $U \subset H$ - ограниченное множество. Для $w \in U$ имеем

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}(t,w)\|_H^2 = &\int_\Omega \big| -bw(\xi) + f(t,w(\xi)) \big|^2 d\xi \\
&+ \int_\Omega \big| -bDw(\xi) + f_2'(t,w(\xi))Dw(\xi) \big|^2 d\xi \\
\leq 2b^2 &\int_\Omega |w(\xi)|^2 \, d\xi + 2\int_\Omega \big(|f(t,0)| + N|w(\xi)|\big)^2 d\xi \\
&+2(b^2 + N^2) \int_\Omega \big|Dw(\xi)\big|^2 \, d\xi,
\end{aligned}$$

где для каждого $\xi \in \Omega$, $Dw(\xi)$ - вектор в $\mathbb{R}^k$ и

$$\big|Dw(\xi)\big|^2 = \big\langle Dw(\xi), Dw(\xi) \big\rangle.$$

Следовательно, условие $(f3)$ выполнено.
Для проверки условия $(f1)$ мы пользуем Теоремой Петтиса (см., например [125]). Отметим, что пространство H может быть тождественно с его сопряженным пространством H^*. Поэтому, нам нужно доказать, что для каждого $\varphi \in H$ отображение $\overline{f}_\varphi \colon [0,1] \times H \to \mathbb{R}$, определенное равенством

$$\overline{f}_\varphi(t,w) = \langle \varphi, \overline{f}(t,w) \rangle_H,$$

измеримо. Для этого, мы докажем, что $\overline{f}_\varphi$ является отображением Каратеодори.

Зафиксируем $w \in H$ и рассмотрим отображение

$$\overline{f}_\varphi(\cdot, w) \colon [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Предположим, что существует последовательность $\{t_n\} \subset [0,1]$ такая, что $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Пусть $r_n = \overline{f}_\varphi(t_n, w)$ и $r_0 = \overline{f}_\varphi(t_0, w)$. Из непрерывности отображений f и $f_2^{'}$ имеем $r_n \to r_0$. Следовательно, $\overline{f}_\varphi(\cdot, w)$ непрерывно, и отсюда, оно является измеримым.
Покажем теперь, что для каждого $t \in [0,1]$ отображение $\overline{f}_\varphi(t, \cdot) \colon H \to \mathbb{R}$ непрерывно. Пусть $\{w_n\} \subset H$: $w_n \to w_0 \in H$, $\gamma_n = \left\langle \overline{f}(t, w_n), \varphi \right\rangle_H$,

$$\lambda_0 = \liminf_{n\to\infty} \gamma_n \quad \text{и} \quad \Lambda_0 = \limsup_{n\to\infty} \gamma_n.$$

Тогда существуют подпоследовательности $\{w_{n_k}\}$ и $\{w_{m_k}\}$ последовательности $\{w_n\}$ такие, что

$$\lambda_0 = \lim_{k\to\infty} \left\langle \overline{f}(t, w_{n_k}), \varphi \right\rangle_H \quad \text{и} \quad \Lambda_0 = \lim_{k\to\infty} \left\langle \overline{f}(t, w_{m_k}), \varphi \right\rangle_H.$$

Множества $\{\overline{f}(t, w_{n_k})\}$ и $\{\overline{f}(t, w_{m_k})\}$ ограничены в H, поэтому они слабо относительно компактны. Предположим (без ущерба для общности), что

$$\overline{f}(t, w_{n_k}) \xrightarrow{H} \overline{f}_0 \quad \text{и} \quad \overline{f}(t, w_{m_k}) \xrightarrow{H} \overline{f}_1.$$

Следовательно,

$$\lambda_0 = \left\langle \overline{f}_0, \varphi \right\rangle_H \quad \text{и} \quad \Lambda_0 = \left\langle \overline{f}_1, \varphi \right\rangle_H.$$

С другой стороны, из того, что отображение $\overline{f}(t, \cdot)$ является $E - E$ непрерывным и

$$w_{n_k} \xrightarrow{E} w_0 \xleftarrow{E} w_{m_k} \ \text{ при } \ k \to \infty$$

имеем

$$\overline{f}(t, w_{n_k}) \xrightarrow{E} \overline{f}(t, w_0) \xleftarrow{E} \overline{f}(t, w_{m_k}) \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Следовательно, $\overline{f}_0 = \overline{f}_1$, и отсюда, $\lambda_0 = \Lambda_0$, т.е. $\overline{f}(t,\cdot)$ непрерывно. Таким образом, $\overline{f}_\varphi$ является отображением Каратеодори, и поэтому, условие $(f1)$ выполнено.
Теперь, для $w \in H$ и для п.в. $t \in [0,1]$ имеем

$$\big\langle w, -Aw \big\rangle_H = -a \left(\int_\Omega w(\xi) d\xi \right)^2 \leq 0.$$

В силу $(f1)' - (f2)'$ и (4.2.14) справедливы следующие отценки.

$$\begin{aligned}
\big\langle w, \overline{f}(t,w) \big\rangle_H &= \int_\Omega w(\xi)\big(-bw(\xi) + f(t,w(\xi))\big)\, d\xi \\
&\quad + \int_\Omega Dw(\xi)\big(-bDw(\xi) + f_2'(t,w(\xi))Dw(\xi)\big)\, d\xi \\
&= -b\left(\int_\Omega (w(\xi))^2\, d\xi + \int_\Omega (Dw(\xi))^2\, d\xi \right) \\
&\quad + \int_\Omega w(\xi) f(t,w(\xi))\, d\xi + \int_\Omega Dw(\xi) f_2'(t,w(\xi)) Dw(\xi)\, d\xi \\
&\leq -b\|w\|_H^2 + \int_\Omega |w(\xi)|\big(|f(t,0)| + N|w(\xi)|\big)\, d\xi \\
&\qquad\qquad + N\int_\Omega \big|Dw(\xi)\big|^2\, d\xi \\
&\leq \big(-b+N\big)\|w\|_H^2 + \beta|\Omega|\, \|w\|_H < 0,
\end{aligned}$$

при $\|w\|_H > \dfrac{\beta|\Omega|}{b-N}$, где $\beta = \max_{[0,1]} |f(t,0)|$ и $|\Omega|$ обозначает меру Лебега множества Ω.
Применяя Теорему 4.2.3 мы получаем, что задача (4.2.13), и следовательно задача (4.2.12), имеет решение. □

Пример 4.2.2. *Рассмотрим теперь задачу о среднем значении для интегро-дифференциального уравнения типа*

$$\begin{cases} u_t(t,s) + au(t,s) = \displaystyle\int_0^1 k(s,\xi)\big(u(t,\xi) + b\big)\, d\xi, \\ u(0,s) = \int_0^1 u(t,s)\, dt, \end{cases} \tag{4.2.15}$$

для п.в. $t \in [0,1]$ *и всех* $s \in [0,1]$, *где* $k(\cdot,\cdot) \in C^1\big([0,1]\times[0,1];\mathbb{R}\big)$; $a > 0$ *и* $b \in \mathbb{R}$.

Пусть $H = W^{1,2}[0,1]$ и $E = C[0,1]$. Ясно, что вложение $H \hookrightarrow E$ компактно. Для каждого $t \in [0,1]$ пусть $x(t) = u(t,\cdot)$. Тогда задача (4.2.15)

может быть переписана в виде

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) = \overline{f}(x(t)), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ x(0) = Mx, \end{cases}$$

где $M\colon C([0,1];H) \to H$,

$$Mx = \int_0^1 x(t)\,dt,$$

$$A\colon H \to H,\ Aw = aw,$$

и $\overline{f}\colon H \to H$,

$$\overline{f}(w)(s) = \int_0^1 k(s,\xi)\big(w(\xi) + b\big)\,d\xi.$$

Отметим, что отображение $\overline{f}$ корректно определено так как

$$\frac{d\overline{f}(w)}{ds} = \int_0^1 k_1'(s,\xi)\big(w(\xi) + b\big)\,d\xi,$$

где $k_1' = \frac{\partial k}{\partial s}$.

A является линейным ограниченным Оператор, который $E{-}E$ непрерывен, и оператор M удовлетворяет условию (M). Покажем теперь, что отображение $\overline{f}$ удовлетворяет условиям $(f1) - (f3)$.

Пусть $\{w_n\} \subset H$: $w_n \xrightarrow{E} w_0$. Имеем

$$\begin{aligned} &\|\overline{f}(w_n) - \overline{f}(w_0)\|_E = \\ &= \max_{s\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(s,\xi)\big(w_n(\xi) + b\big)\,d\xi - \int_0^1 k(s,\xi)\big(w_0(\xi) + b\big)\,d\xi \right| \\ &\le \max_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,\xi)|\,|w_n(\xi) - w_0(\xi)|\,d\xi \\ &\le k\|w_n - w_0\|_E, \end{aligned}$$

где $k = \max\big\{|k(s,\xi)|\colon s,\xi \in [0,1]\big\}$.

Поэтому, $\overline{f}(w_n) \xrightarrow{E} \overline{f}(w_0)$, и отсюда, условие $(f2)$ выполнено.

Пусть $\mathcal{D} \subset H$ - ограниченное множество, для любого $w \in \mathcal{D}$ имеем

$$\|\overline{f}(w)\|_H^2 =$$
$$= \int_0^1 \left| \int_0^1 k(s,\xi)\big(w(\xi)+b\big)\,d\xi \right|^2 ds + \int_0^1 \left| \int_0^1 k_1^{'}(s,\xi)\big(w(\xi)+b\big)\,d\xi \right|^2 ds$$
$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,\xi)|\big(|w(\xi)|+|b|\big)\,d\xi \right)^2 ds$$
$$+ \int_0^1 \left(\int_0^1 |k_1^{'}(s,\xi)|\big(|w(\xi)|+|b|\big)\,d\xi \right)^2 ds$$
$$\leq (2k^2 + 2k'^2)\|w\|_H^2 + 2b^2(k^2 + k'^2),$$

где $k' = \max\{|k_1^{'}(s,\xi)|\colon s,\xi \in [0,1]\}$.

Следовательно, условие $(f3)$ выполнено.

Для проверки условия $(f1)$ мы докажем, что отображение $\overline{f}$ является $H - H$ непрерывным.

В самом деле, пусть $\{w_n\} \subset H$: $w_n \xrightarrow{H} w_0$. Имеем

$$\|\overline{f}(w_n) - \overline{f}(w_0)\|_H^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(s,\xi)(w_n(\xi) - w_0(\xi))\,d\xi \right|^2 ds$$
$$+ \int_0^1 \left| \int_0^1 k_1^{'}(s,\xi)(w_n(\xi) - w_0(\xi))\,d\xi \right|^2 ds$$
$$\leq k^2\|w_n - w_0\|_2^2 + k'^2\|w_n - w_0\|_2^2.$$

Последовательно, $\overline{f}$ является $H - H$ непрерывным. Поэтому, условие $(f1)$ выполнено.

Теперь, для $w \in H$ справедливы следующие оценки.

$$\begin{aligned}\big\langle w, -Aw + \overline{f}(w)\big\rangle_H &= -a\|w\|_H^2 + \int_0^1 w(s)\left(\int_0^1 k(s,\xi)\big(w(\xi)+b\big)\,d\xi\right)ds \\ &\quad + \int_0^1 w'(s)\left(\int_0^1 k_1^{'}(s,\xi)\big(w(\xi)+b\big)\,d\xi\right)ds \\ &\le -a\|w\|_H^2 + k\left(\int_0^1 |w(\xi)|\,d\xi\right)^2 + k|b|\int_0^1 |w(s)|\,ds \\ &\quad + k'|b|\int_0^1 |w'(s)|\,ds + k'\int_0^1 |w(\xi)|\,d\xi\int_0^1 |w'(s)|\,ds \\ &\le -(a-k-\frac{k'}{2})\|w\|_H^2 + |b|\sqrt{k^2+k'^2}\,\|w\|_H < 0\end{aligned}$$

при $a > k + \frac{k'}{2}$ и

$$\|w\|_H > \frac{|b|\sqrt{k^2+k'^2}}{a-k-\frac{k'}{2}}.$$

Отсюда, применяя Теорему 4.2.3 получаем:

Теорема 4.2.5. *Если $a > k + \frac{k'}{2}$, то задача* (4.2.15) *имеет решение.*

Замечание 4.2.2. *Аналогично, мы можем изучить задачи* (4.2.12) *и* (4.2.15) *с различными краевыми условиями (периодическое, антипериодическое, многоточечное краевое условия).*

4.2.3 Существование ограниченных решений

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,\infty), \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{4.2.16}$$

где $f\colon [0,\infty) \times H \to H$ удовлетворяется условиям $(f1) - (f3)$ с тем, что $[0,\infty)$ входит в место $[0,T]$. Дополнительно предположим, что

$(f4)'$ существуют $R_0 > r_0 > 0$ такие, что

$$\big\langle w, f(t,w)\big\rangle_H < 0$$

для п.в. $t \in [0,\infty)$ и для всех $w \in int\, B_H(0, r_0, R_0)$.

Теорема 4.2.6. *Под предположениями выше, задача* (4.2.16) *имеет решение* $x\colon [0,\infty) \to H$ *такое, что* $\|x(t)\|_H \le R_0$ *для всех* $t \in [0,\infty)$. *Кроме того, если* $f(t,0) \ne 0$ *для п.в.* $t \in [0,\infty)$, *то решение является ненулевым.*

Доказательство. В силу Теоремы 4.2.2, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует решение x_n для задачи

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,n], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

такое, что $\|x_n\|_H \le R_0$ при всех $t \in [0,n]$.
Определим

$$\widetilde{x}_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{для } \ t \in [0,n], \\ x_n(n) & \text{для } \ t \ge n. \end{cases}$$

Из $(f3)$ следует, что существует функция $\gamma \in L^1_+[0,\infty)$ такая, что

$$\|\widetilde{x}_n'(t)\|_H \le \gamma(t) \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,\infty).$$

Отсюда следует, что множество $\{\widetilde{x}_n'\}$ является ограниченным и равномерно интегрируемым в $L^1\big([0,\infty);H\big)$. В силу Теоремы 4.2.1 последовательность $\{\widetilde{x}_n'\}$ является слабо относительно компактной в $L^1\big([0,\infty);H\big)$. Предположим (не потеряя общности), что

$$\widetilde{x}_n' \overset{L^1\left([0,\infty);H\right)}{\rightharpoonup} x_0'.$$

Следовательно,

$$\widetilde{x}_n(t) = \int_0^t \widetilde{x}_n'(\tau)d\tau \rightharpoonup \int_0^t \widetilde{x}_0'(\tau)d\tau := x_0(t),$$

при всех $t > 0$. Из компактного вложения $H \hookrightarrow E$ вытекает

$$\widetilde{x}_n(t) \overset{E}{\to} x_0(t), \ \text{ для всех } \ t > 0. \tag{4.2.17}$$

Зафиксируем t и возьмем $n > t$. Отметим, что

$$x_n(t) = \int_0^t f(\tau, x_n(\tau))d\tau.$$

Из $(f2)$, (4.2.17) и определения функции $\widetilde{x}_n$ следует, что

$$f(\tau, x_n(\tau)) \overset{E}{\to} f(\tau, x_0(\tau)) \ \text{ для всех } \ \tau \in [0,t].$$

В силу (4.2.1) имеем

$$\|f(\tau, x_n(\tau))\|_E \leq q\|f(\tau, x_n(\tau))\|_H \leq q\gamma(\tau)$$

для п.в. $\tau \in [0, t]$.
Следовательно, приходяя к пределу получаем

$$x_0(t) \overset{E}{\leftarrow} x_n(t) = \int_0^t f(\tau, x_n(\tau))d\tau \overset{E}{\to} \int_0^t f(\tau, x_0(\tau))d\tau.$$

Таким образом, x_0 является решением для задачи (4.2.16) и

$$\|x_0(t)\|_H \leq R_0$$

для всех $t \in [0, \infty)$. □

4.2.4 Система дифференциальных уравнений

Пусть H_i $(i = 1, 2)$ - сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства, компактно вложенные в банаховы пространства E_i, соответственно. Рассмотрим пространства $H = H_1 \times H_2$ и $E = E_1 \times E_2$ с нормами:

$$\|w\|_H = \sqrt{\|w_1\|_{H_1}^2 + \|w_2\|_{H_2}^2}, \ \forall w = (w_1, w_2) \in H,$$

и

$$\|w\|_E = \sqrt{\|w_1\|_{E_1}^2 + \|w_2\|_{E_2}^2}, \ \forall w = (w_1, w_2) \in E.$$

Ясно, что вложение $H \hookrightarrow E$ тоже компактно и H является сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle w, \widetilde{w} \rangle_H = \langle w_1, \widetilde{w}_1 \rangle_{H_1} + \langle w_2, \widetilde{w}_2 \rangle_{H_2},$$

где $w = (w_1, w_2)$, $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ x(0) = M_1 x, \\ y(0) = M_2 y, \end{cases} \tag{4.2.18}$$

где $f_i\colon [0,T]\times H_1\times H_2\to H_i$ и $M_i\colon C([0,T];H_i)\to H_i$ $(i=1,2)$.
Предположим, что для $i=1,2$:

$(h1)$ отображения f_i являются измеримыми;

$(h2)$ для п.в. $t\in[0,T]$, $f_i(t,\cdot)\colon H_1\times H_2\to H_i$ являются $E-E_i$ непрерывными;

$(h3)$ для любого ограниченного множества $\Omega\subset H$ существуют функции $v_\Omega^{(i)}\in L^1_+[0,T]$ такие, что для $\omega\in\Omega$ имеем

$$\|f_i(t,\omega)\|_{H_i}\le v_\Omega^{(i)}(t)$$

при п.в. $t\in[0,T]$;

$(h4)$ M_i - линейные ограниченные операторы такие, что

$$\|M_1\|^2+\|M_2\|^2\le 1.$$

Под решением задачи (4.2.18) мы понимаем пару (x,y), состоящую из функций $x\in W^{1,1}([0,T];H_1)$ и $y\in W^{1,1}([0,T];H_2)$, которые удовлетворяют (4.2.18).

Пусть $z=(x,y)$. Тогда мы можем заменить задачу (4.2.18) следующей задачей

$$\begin{cases} z'(t)=f(t,z(t)) \text{ для п.в. } t\in[0,T],\\ z(0)=Mz, \end{cases} \tag{4.2.19}$$

где $f\colon [0,T]\times H\to H$ и $M\colon C([0,T];H)\to H$ определяются следующим образом:

$$f(t,w)=\big(f_1(t,w_1,w_2),f_2(t,w_1,w_2)\big),\quad w=(w_1,w_2)\in H,$$

и

$$Mz=\big(M_1x,M_2y\big),\quad z=(x,y)\in C([0,T];H).$$

Применяя $(h1)-(h4)$, нетрудно проверить, что отображения f и M удовлетворяют $(f1)-(f3)$ и (M), соответственно. В силу Теоремы 4.2.2 получаем:

Теорема 4.2.7. *Пусть выполнены условия* $(h1)-(h4)$. *Дополнительно предположим, что*

$(h5)$ *существуют* $R_0 > r_0 > 0$ *такие, что*

$$\big\langle w_1, f_1(t, w_1, w_2)\big\rangle_{H_1} + \big\langle w_2, f_2(t, w_1, w_2)\big\rangle_{H_2} < 0,$$

для всех $w = (w_1, w_2) \in int\, B_H(0, r_0, R_0)$ *и п.в.* $t \in [0, T]$.

Тогда задача (4.2.18) *имеет решение.*

Для иллюстрации рассмотрим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t} + a\int_\Omega u(t,\xi)d\xi + bu(t,\xi) = f_1\big(t, u(t,\xi), v(t,\xi)\big), \\ \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} + cv(t,\xi) = f_2\big(t, u(t,\xi), v(t,\xi)\big), \\ u(0,\xi) = \sum_1^m \alpha_j u(t_j,\xi), \\ v(0,\xi) = \int_0^1 g(t)v(t,\xi)\,dt, \end{cases} \tag{4.2.20}$$

для п.в. $t \in [0,1]$ и для всех $\xi \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ - открытое ограниченное множество с липщицевой границей; $a, b, c > 0$; $\alpha_j \in \mathbb{R}$; $0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1$; $f_i\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ - непрерывные отображения и $g \in L^1[0,1]$.

Под решением задачи (4.2.20) мы понимаем пару (u, v), состоящую из непрерывных функций $u, v\colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$, для которых частные производные $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t}$ и $\frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}$ существуют и удовлетворяют (4.2.20). Кроме того, мы можем рассматривать систему (4.2.20) как управляемую систему с функцией состояния $u(t,\xi)$ и функцией управления $v(t,\xi)$. Наша цель: найти функции состояния и управления как непрерывные функции $u(t,\xi)$ и $v(t,\xi)$ такие, что для каждого t функции $u(t,\cdot)$ и $v(t,\cdot)$ принадлежат пространству $W^{1,2}(\Omega)$.

Предположим, что:

$(h1)'$ частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\colon [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(i,j=1,2)$ непрерывны;

$(h2)'$ существуют положительные числа N_{ij} $(i,j=1,2)$ такие, что

$$N_{11}+\frac{N_{12}+N_{21}}{2}<b,\ N_{22}+\frac{N_{12}+N_{21}}{2}<c,\ \text{и}\ \Big|\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(t,z_1,z_2)\Big|\le N_{ij},$$

для всех $(t,z_1,z_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$;

$(h3)'$ $\big(\sum_{j=1}^m|\alpha_j|\big)^2+\|g\|_1^2\le 1$, где $\|g\|_1=\int_0^1|g(t)|\,dt$.

Теорема 4.2.8. *Пусть выполнены условия* $(h1)'-(h3)'$. *Тогда задача* (4.2.20) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть $H_1=W^{1,2}(\Omega)$ и $E_1=L^2(\Omega)$. Из $(h1)'-(h2)'$ следует, что

$$|f_i(t,z_1,z_2)|\le|f_i(t,0,0)|+N_{i1}|z_1|+N_{i2}|z_2|,$$

для всех $(t,z_1,z_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и $i=1,2$.
Для каждого $t\in[0,1]$ пусть $x(t)=u(t,\cdot)$ и $y(t)=v(t,\cdot)$. Тогда мы можем заменить задачу (4.2.20) следующей задачей

$$\begin{cases} x'(t)=\overline{f_1}(t,x(t),y(t)) \text{ для п.в. } t\in[0,1],\\ y'(t)=\overline{f_2}(t,x(t),y(t)) \text{ для п.в. } t\in[0,1],\\ x(0)=M_1x,\\ y(0)=M_2y, \end{cases} \tag{4.2.21}$$

где отображения $\overline{f_i}\colon[0,1]\times H_1\times H_1\to H_1$ $(i=1,2)$ определяются так:

$$\overline{f_1}(t,w_1,w_2)(\xi)=-a\int_\Omega w_1(\tau)\,d\tau-bw_1(\xi)+f_1\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big),$$
$$\overline{f_2}(t,w_1,w_2)(\xi)=-cw_2(\xi)+f_2\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big),$$

и операторы $M_1,M_2\colon C(I,H_1)\to H_1$,

$$M_1x=\sum_{j=1}^m\alpha_jx(t_i),\quad M_2y=\int_0^1 g(t)y(t)\,dt.$$

Ясно, что операторы M_1 и M_2 являются линейными ограниченными и

$$\|M_1\|^2+\|M_2\|^2\le 1.$$

Отметим, что для $(t,\xi)\in(0,1)\times\Omega$ имеем

$$\frac{D\overline{f_1}(t,w_1,w_2)(\xi)}{D\xi}=-bDw_1(\xi)+\frac{\partial f_1(t,w_1(\xi),w_2(\xi))}{\partial z_1}Dw_1(\xi)$$
$$+\frac{\partial f_1(t,w_1(\xi),w_2(\xi))}{\partial z_2}Dw_2(\xi),$$

и

$$\frac{D\overline{f_2}(t,w_1,w_2)(\xi)}{D\xi}=-cDw_2(\xi)+\frac{\partial f_2(t,w_1(\xi),w_2(\xi))}{\partial z_1}Dw_1(\xi)$$
$$+\frac{\partial f_2(t,w_1(\xi),w_2(\xi))}{\partial z_2}Dw_2(\xi),$$

Из $(h1)'$ следует, что отображения $\overline{f_1}$ и $\overline{f_2}$ корректно определены.
Пусть $H=H_1\times H_1$, $E=E_1\times E_1$ и определим отображения

$$f\colon[0,1]\times H\to H,$$
$$f(t,w)=\big(\overline{f_1}(t,w_1,w_2),\overline{f_2}(t,w_1,w_2)\big),\ w=(w_1,w_2)\in H,$$

и

$$M\colon C([0,T];H)\to H,\ Mz=(M_1x,M_2y),$$

где $z=(x,y)\in C([0,T];H);\ x,y\in C([0,T];H_1)$.
Аналогично доказательству Теоремы 4.2.4, мы получаем, что отображения $\overline{f}_1$ и $\overline{f}_2$ удовлетворяют условиям $(h1)-(h3)$.
Теперь, для $w=(w_1,w_2)\in H$ и $t\in[0,1]$ имеем

$$\big\langle w,f(t,w)\big\rangle_H=\big\langle w_1,\overline{f_1}(t,w_1,w_2)\big\rangle_{H_1}+\big\langle w_2,\overline{f_2}(t,w_1,w_2)\big\rangle_{H_1}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&\big\langle w_1,\overline{f_1}(t,w_1,w_2)\big\rangle_{H_1}=\\
&=-a\Big(\int_\Omega w_1(\xi)d\xi\Big)^2-b\|w_1\|^2_{H_1}+\int_\Omega f_1\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big)w_1(\xi)\,d\xi\\
&\qquad+\int_\Omega\frac{\partial f_1\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big)}{\partial z_1}\big|Dw_1(\xi)\big|^2\,d\xi\\
&\qquad+\int_\Omega\frac{\partial f_1\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big)}{\partial z_2}Dw_1(\xi)Dw_2(\xi)\,d\xi\\
&\le-b\|w_1\|^2_{H_1}+\int_\Omega|w_1(\xi)|\Big(|f_1(t,0,0)|+N_{11}|w_1(\xi)|+N_{12}|w_2(\xi)|\Big)\,d\xi\\
&\qquad+N_{11}\int_\Omega\big|Dw_1(\xi)\big|^2d\xi+N_{12}\int_\Omega|Dw_1(\xi)Dw_2(\xi)|\,d\xi
\end{aligned}$$

$$\leq (-b+N_{11})\|w_1\|_{H_1}^2 + \beta_1 \int_\Omega |w_1(\xi)|d\xi + N_{12}\int_\Omega |w_1(\xi)|\,|w_2(\xi)|d\xi$$
$$+N_{12}\int_\Omega |Dw_1(\xi)Dw_2(\xi)|\,d\xi$$
$$\leq (-b+N_{11})\|w_1\|_{H_1}^2 + \beta_1|\Omega|\,\|w_1\|_{H_1} + N_{12}\|w_1\|_{H_1}\|w_2\|_{H_1},$$
где $\beta_1 = \max_{[0,1]}|f_1(t,0,0)|$.

$$\big\langle w_2, \overline{f_2}(t,w_1,w_2)\big\rangle_{H_1} =$$
$$= -c\|w_2\|_{H_1}^2 + \int_\Omega f_2\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big)w_2(\xi)\,d\xi$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial f_2\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big)}{\partial z_2}\big|Dw_2(\xi)\big|^2 d\xi$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial f_2\big(t,w_1(\xi),w_2(\xi)\big)}{\partial z_1}Dw_1(\xi)Dw_2(\xi)\,d\xi$$
$$\leq -c\|w_2\|_{H_1}^2 + \int_\Omega |w_2(\xi)|\Big(|f_2(t,0,0)| + N_{21}|w_1(\xi)| + N_{22}|w_2(\xi)|\Big)d\xi$$
$$+N_{22}\int_\Omega \big|Dw_2(s)\big|^2\,d\xi + N_{21}\int_\Omega |Dw_1(\xi)Dw_2(\xi)|\,d\xi$$
$$\leq (-c+N_{22})\|w_2\|_{H_1}^2 + \beta_2 \int_\Omega |w_2(\xi)|d\xi + N_{21}\int_\Omega |w_1(\xi)|\,|w_2(\xi)|d\xi$$
$$+N_{21}\int_\Omega |Dw_1(\xi)Dw_2(\xi)|\,d\xi$$
$$\leq (-c+N_{22})\|w_2\|_{H_1}^2 + \beta_2|\Omega|\,\|w_2\|_{H_1} + N_{21}\|w_1\|_{H_1}\|w_2\|_{H_1},$$
где $\beta_2 = \max_{[0,1]}|f_2(t,0,0)|$.
Пусть
$$R = \min\left\{b - N_{11} - \frac{N_{12}+N_{21}}{2}, c - N_{22} - \frac{N_{12}+N_{21}}{2}\right\}.$$
Тогда,
$$\big\langle w, f(t,w)\big\rangle_H$$
$$\leq -(b-N_{11})\|w_1\|_{H_1}^2 - (c-N_{22})\|w_2\|_{H_1}^2$$
$$+|\Omega|\big(\beta_1\|w_1\|_{H_1} + \beta_2\|w_2\|_{H_1}\big) + (N_{12}+N_{21})\|w_1\|_{H_1}\|w_2\|_{H_1}$$
$$\leq -(b - N_{11} - \frac{N_{12}+N_{21}}{2})\|w_1\|_{H_1}^2 - (c - N_{22} - \frac{N_{12}+N_{21}}{2})\|w_2\|_{H_1}^2$$
$$+|\Omega|\big(\beta_1\|w_1\|_{H_1} + \beta_2\|w_2\|_{H_1}\big)$$

$$\leq -R\big(\|w_1\|_{H_1}^2 + \|w_2\|_{H_1}^2\big) \ + |\Omega|\big(\beta_1\|w_1\|_{H_1} + \beta_2\|w_2\|_{H_1}\big)$$
$$\leq -R\|w\|_H^2 + |\Omega|\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}.\|w\|_H < 0,$$

при

$$\|w\|_H > \frac{|\Omega|\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}{R}.$$

Из Теорему 4.2.7 следует, что задача (4.2.21), и следовательно задача (4.2.20), имеет решение. □

4.2.5 Единственность решений

Рассмотрим теперь проблему об единственности решений задачи (4.2.2). Для этого, пусть отображения f и M удовлетворяю условиям $(f1)-(f4)$ и (M), соответственно. Дополнительно предположим, что

(f) существует функция $\eta \in L_+^1[0,T]$ такая, что

$$\|f(t,\omega_1) - f(t,\omega_2)\|_H \leq \eta(t)\|\omega_1 - \omega_2\|_H$$

для $\omega_1, \omega_2 \in B_H(0,R_0)$ и п.в. $t \in [0,T]$, где R_0 - константа из $(f4)$.

Теорема 4.2.9. *Пусть выполнены условия* $(f), (f1)-(f4)$ *и* (M). *Дополнительно предположим, что*

$$\|M\|e^{\|\eta\|_1} < 1.$$

Тогда задача (4.2.2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Существование решений следует из Теоремы 4.2.2. Предположим противное, что существуют два решения y_1, y_2, значения которых принадлежат в $B_H(0,R_0)$. Имеем

$$y_1(t) = My_1 + \int_0^t f(s,y_1(s))\,ds,$$
$$y_2(t) = My_2 + \int_0^t f(s,y_2(s))\,ds.$$

Отсюда, для любого $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|y_1(t) - y_2(t)\|_H &= \left\| M(y_1 - y_2) + \int_0^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\, ds \right\|_H \\ &\le \|M\| \|y_1 - y_2\|_C + \int_0^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\|_H\, ds \\ &\le \|M\| \|y_1 - y_2\|_C + \int_0^t \eta(s) \|y_1(s) - y_2(s)\|_H\, ds.\end{aligned}$$

Пусть $L = \|y_1 - y_2\|_C$, применяя неравенство Гроунулла (см. Лемму 1.1.1) получаем, что

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_H \le \|M\| L \left(\exp \left\{ \int_0^t \eta(s)\, ds \right\} \right).$$

Следовательно,

$$L = \sup_{0 \le t \le T} \|y_1(t) - y_2(t)\|_H \le \|M\| L e^{\|\eta\|_1} < L,$$

что есть противоречие. □

Рассмотрим теперь задачу (4.2.10). Как показано в параграфе 4.2.2, мы определим отображение $\widetilde{f}(t, x) := -Ax + f(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times H$. Если отображение f удовлетворяет условию (f), то имеем

$$\|\widetilde{f}(t, \omega_1) - \widetilde{f}(t, \omega_2)\|_H \le (\|A\| + \eta(t)) \|\omega_1 - \omega_2\|_H.$$

Отсюда, в силу Теоремы 4.2.3 получаем:

Теорема 4.2.10. *Под условиями* $(f), (f1) - (f4), (M)$ *и*

$$\|M\| e^{\|A\| T + \|\eta\|_1} < 1,$$

задача (4.2.10) *имеет единственное решение.*

Кроме того, под условиями $(f), (f1) - (f4)$ и (M) мы тоже можем доказать, что задача (4.2.16) имеет единственное решение. Действительно, предположим противное, что существуют два решения x^1, x^2 для задачи (4.2.16), значения которых принадлежат в $B_H(0, R_0)$. Определим

$$x_n^1(t) = \begin{cases} x^1(t) & \text{при} \quad t \in [0, n], \\ x^1(n) & \text{при} \quad t \ge n, \end{cases}$$

и

$$x_n^2(t) = \begin{cases} x^2(t) & \text{при} \quad t \in [0, n], \\ x^2(n) & \text{при} \quad t \geq n. \end{cases}$$

Отсюда, для любого $n \in \mathbb{N}$ функции x_n^1, x_n^2 являются решениями задачи

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, n], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

что противоречит Теореме 4.2.9.

Наконец, как показано в параграфе 4.2.4, пусть H_i $(i = 1, 2)$ - сепарабельные гильбертовы пространства, компактно вложенные в банаховы пространства E_i, соответственно. Пусть $H = H_1 \times H_2$, $E = E_1 \times E_2$ и рассмотрим $f_i \colon [0, T] \times H_1 \times H_2 \to H_i$ и $M_i \colon C([0, T]; H_i) \to H_i$ $(i = 1, 2)$. Предположим, что

$(f)'$ существуют функции $\eta_1, \eta_2 \in L_+^1[0, T]$ такие, что

$$\|f_i(t, \omega_1) - f_i(t, \omega_2)\|_{H_i} \leq \eta_i(t) \|\omega_1 - \omega_2\|_H (i = 1, 2),$$

для $\omega_1, \omega_2 \in B_H(0, R_0)$ и для п.в. $t \in [0, T]$, где R_0 - константа из условия $(h5)$.

Теорема 4.2.11. *Пусть выполнены усдлвоя* $(f)'$ *и* $(h1) - (h5)$. *Если* $\|M\| e^{\|\gamma\|_1} < 1$, *где*

$$\gamma(t) = \sqrt{(\eta_1(t))^2 + (\eta_2(t))^2}, \quad t \in [0, T].$$

Тогда задача (4.2.18) *имеет единственное решение.*

4.2.6 Негладкие ограничивающие функции

Пусть H - сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, компаткно вложенное в банахово пространство E. Рассмотрим снова задачу

(4.2.2)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \text{ для п.в. } t \in [0, T], \\ x(0) = Mx, \end{cases}$$

где отображение $f\colon [0,T] \times H \to H$ удовлетворяет условиям $(f1) - (f3)$ и $M\colon C([0,T]; H) \to H$ - линейный ограниченный оператор.

Определение 4.2.2. *Локально липщицева функция $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется $(K, \varepsilon)-$негладкой ограничивающей функцией для задачи* (4.2.2), *если существуют $\varepsilon > 0$ и открытое ограниченное выпуклое множество $K \subset H$ такие, что*

$(V1)$ *$V_{|\partial K} = 0$ и $V(w) \leq 0$ для всех $w \in O_\varepsilon^K(\partial K) = K \cap O_\varepsilon(\partial K)$, где $O_\varepsilon(\partial K)$ - $\varepsilon-$окрестность множества ∂K в H;*

$(V2)$ *для п.в. $t \in [0,T]$ отношение*

$$\liminf_{n\to\infty} sign \left(\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hP_n f(t,w)\big) - V(w)}{h} \right) = -1$$

выполнено для всех $w \in O_\varepsilon^{K_n}(\partial K_n)$, где $K_n = K \cap H_n$.

Условие $(V2)$ означает, что существует подпоследовательность пространств $\{H_{n_m}\}$ такая, что для всех n_m отношение

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hP_{n_m} f(t,w)\big) - V(w)}{h} < 0$$

выполнено при всех $w \in O_\varepsilon^{K_{n_m}}(\partial K_{n_m})$.

Отметим, что если $V \in C^1(H, \mathbb{R})$, т.е. V является непрерывно дифференцируемой функцией, то для любого $w \in H$ производная Фреше $\nabla V(w)$ функции V в w может быть тождествена с элементом в H. Отсюда, для п.в. $t \in [0,T]$ и для $n \in \mathbb{N}$:

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hP_n f(t,w)\big) - V(w)}{h} = \big\langle \nabla V(w), P_n f(t,w) \big\rangle_H$$

при $w \in O_\varepsilon^{K_n}(\partial K_n)$.

Следовательно, в случае $V \in C^1(H, \mathbb{R})$, условие $(V2)$ эквивалентно следующему условию:

$(V2)'$ существует подпоследовательность пространств $\{H_{n_m}\}$ такая, что

$$\left\langle \nabla V(w), P_{n_m} f(t,w) \right\rangle_H < 0 \text{ для п.в. } t \in [0,T]$$

и для $w \in O_\varepsilon^{K_{n_m}}(\partial K_{n_m})$.

Нетрудно проверить, что условие $(V2)'$ выполнено если

$(V2)''$ $\left\langle \nabla V(w), f(t,w) \right\rangle_H < 0$ для п.в. $t \in [0,T]$ и любого $w \in O_\varepsilon^K(\partial K)$.

Следующее утверждение показано геометрический смысл ограничивающей функции.

Лемма 4.2.1. *Пусть V - $(K,\varepsilon)-$ограничивающая функция для задачи (4.2.2). Тогда существует подпоследовательность пространств $\{H_{n_m}\}$ такая, что если оператор*

$$\mathcal{T}_{n_m} \colon C([0,T];\overline{K_{n_m}}) \times (0,1) \to C([0,T];H_{n_m}),$$

$$\mathcal{T}_{n_m}(y,\lambda) = P_{n_m} M y + \lambda \int_0^t P_{n_m} f(s,y(s))ds,$$

имеет неподвижную точку x_{n_m}, т.е. $x_{n_m} = \mathcal{T}_{n_m}(x_{n_m},\lambda)$ для некоторого $\lambda \in (0,1)$, такую, что $x_{n_m}(0) \notin \partial K_{n_m}$, то $x_{n_m}(t) \in K_{n_m}$ для всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Из определения ограничивающей функции следует, что существует подпоследовательность пространств $\{H_{n_m}\}$ такая, что для п.в. $t \in [0,T]$ имеем

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + hP_{n_m} f(t,w)\big) - V(w)}{h} < 0$$

для любого $w \in O_\varepsilon^{K_{n_m}}(\partial K_{n_m})$,
или эквивалентно,

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V\big(w + \lambda h P_{n_m} f(t,w)\big) - V(w)}{h} < 0$$

для $(\lambda, w) \in (0,1) \times O_\varepsilon^{K_{n_m}}(\partial K_{n_m})$.

Предположим, что функция x_{n_m} пересекает границу ∂K_{n_m}. В силу $x_{n_m}(0) \notin \partial K_{n_m}$ мы можем выбрать $t_0 \in (0,T]$ такое, что $x_{n_m}(t_0) \in \partial K_{n_m}$ и

$x_{n_m}(t) \in K_{n_m}$ при достаточно малых $t < t_0$. Из свойства локально липщицевой функции V следует, что существует $\delta > 0$ такое, что сужение функции V на $B_H\big(x_{n_m}(t_0), \delta\big)$ является липщицевой функцией с коэффициентом $L > 0$. Выбираем теперь $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $x_{n_m}(t) \in B_H\big(x_{n_m}(t_0), \delta\big) \cap K_{n_m}$ при всех $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Нетрудно видеть, что функция $g_{n_m}(t) = V(x_{n_m}(t))$ является абсолютно непрерывной в $(t_0 - \delta, t_0)$, поэтому $g'_{n_m}(t)$ существует для п.в. $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Отсюда вытекает:

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0} g'_{n_m}(s)ds = V(x_{n_m}(t_0)) - V(x_{n_m}(t_0 - \delta)) = -V(x_{n_m}(t_0 - \delta)) \geq 0.$$

С другой стороны, в силу $x_{n_m} = \mathcal{T}_{n_m}(x_{n_m}, \lambda)$ имеем

$$x'_{n_m}(t) = \lambda P_{n_m} f(t, x_{n_m}(t)) \ \text{ для п.в. } t \in (t_0 - \delta, t_0).$$

Пусть

$$\varphi(h) := x_{n_m}(t + h) - x_{n_m}(t) - x'_{n_m}(t)h$$

и

$$\Delta(h) := \frac{V\big(x_{n_m}(t) + x'_{n_m}(t)h + \varphi(h)\big) - V\big(x_{n_m}(t) + x'_{n_m}(t)h\big)}{h}.$$

Имеем

$$|\Delta(h)| \leq \frac{L\|\varphi(h)\|_H}{|h|} \to 0 \text{ as } h \to 0.$$

Следовательно, в связи с тем, что

$$\frac{g_{n_m}(t + h) - g_{n_m}(t)}{h} = \frac{V\big(x_{n_m}(t) + x'_{n_m}(t)h\big) - V\big(x_{n_m}(t)\big)}{h} + \Delta(h),$$

мы получаем

$$\liminf_{h\to 0} \frac{g_{n_m}(t + h) - g_{n_m}(t)}{h} = \liminf_{h\to 0} \frac{V\big(x_{n_m}(t) + x'_{n_m}(t)h\big) - V\big(x_{n_m}(t)\big)}{h} < 0.$$

Поэтому,

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0} g'_{n_m}(s)ds < 0,$$

что есть противоречие. □

Предположим, что оператор M удовлетворяет следующему условию:

$(M)'$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, если x_n является неподвижную точку оператора $\mathcal{T}_n \colon C([0, T]; \overline{K_n}) \times (0, 1) \to C([0, T]; H_n)$, то $x_n(0) \notin \partial K_n$.

Свойство 4.2.1. *Оператор M удовлетворяет условию $(M)'$ если множество K содержит 0 и выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $M(Q) \subseteq \overline{K}$, *где* $Q = C([0,T]; \overline{K})$;

(ii) K *является открытым шаром* $B_H(0,r)$ *(для некоторого* $r > 0$*) и* $\|M\| \leq 1$.

Доказательство. Пусть выполнено (i). Предположим, что

$$x_n = \mathcal{T}_n(x_n, \lambda) \quad \text{и} \quad x_n(0) \in \partial K_n.$$

Следовательно, $\lambda P_n M x_n \in \partial K_n$. Так как $M x_n \in \overline{K}$ имеем $P_n M x_n \in \overline{K_n}$. Из выпуклости множества K и предположения $0 \in K$ следует, что

$$\lambda P_n M x_n = x_n(0) \in K_n$$

для $\lambda \in (0,1)$, что есть противоречие.

Пусть теперь выполнено (ii) и предположим снова, что

$$x_n = \mathcal{T}_n(x_n, \lambda) \quad \text{и} \quad x_n(0) \in \partial K_n.$$

Тогда

$$r = \|x_n(0)\|_H = \lambda \|P_n M x_n\|_H < r,$$

что есть противоречие. □

Теорема 4.2.12. *Пусть выполнены условия* $(f1) - (f3)$ *и* $(M)'$. *Если существует* $(K, \varepsilon)-$*ограничивающая функция* V *для задачи* (4.2.2) *такая, что множество* K *содержит* 0, *то задача* (4.2.2) *имеет решение со значениями в* $\overline{K}$.

Доказательство. Пусть $Q = C(I, \overline{K})$ и

$$Q^{(n_m)} = Q \cap C([0,T]; H_{n_m}),$$

где $\{H_{n_m}\}$ - подпоследрвательность пространств из Леммы 4.2.1.
Рассмотрим оператор $\mathcal{T}_{n_m} \colon Q^{(n_m)} \times [0,1] \to C([0,T]; H_{n_m})$, где значение $\mathcal{T}_{n_m}(y, \lambda)$ определено выше.
Следуя шагу 2 (см. доказательство Теоремы 4.2.2) мы получаем, что $\mathcal{T}_{n_m}$ является вполне непрерывным оператором и

$$\mathcal{T}_{n_m}\left(Q^{(n_m)} \times \{0\}\right) = \{0\}.$$

В силу Леммы 4.2.1 оператор $\mathcal{T}_{n_m}$ не имеет неподвижную точку на $\partial Q^{(n_m)} \times (0,1)$. Следовательно, существует функция $y_{n_m} \in Q^{(n_m)}$ такая, что

$$y_{n_m} = \mathcal{T}_{n_m}(y_{n_m}, 1).$$

Аналогично шагу 3 (см. доказательство теоремы 4.2.2), задача (4.2.2) имеет решение со значениями в $\overline{K}$. □

4.2.7 Дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве

Обозначим через $Cbv(H)$ совокупность всех непустых замкнутых, ограниченных и выпуклых подмножеств пространства H. Символ H^ω обозначает пространство H со слабой топологией. Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = Mx, \end{cases} \tag{4.2.22}$$

где $F\colon [0,T] \times H \to Cbv(H)$ и $M\colon C([0,T]; H) \to H$.

Предположим, что:

$(F1)$ для каждого $w \in H$ мультифункция $F(\cdot, w)\colon [0,T] \to Cbv(H)$ измерима;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon H \to Cbv(H)$ является закнутым относительно топологии $H \times H^\omega$;

$(F3)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon H \to Cbv(H)$ является $E - E$ полунепрерывным сверху в смысле: для каждого $w \in H$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $w' \in B_E(w,\delta)$ следует, что $F(t,w') \subset F(t,w) + B_E(0,\varepsilon)$;

$(F4)$ для любого ограниченного множества $\Omega \subset H$ существует функция $v_\Omega \in L^1_+[0,T]$ такая, что

$$\|F(t,w)\|_H \le v_\Omega(t)$$

для всех $w \in \Omega$ и п.в. $t \in [0, T]$.

(M) $M\colon C([0,T]; H) \to H$ является линейным ограниченным оператором и $\|M\| \leq 1$.

Определение 4.2.3. *Пусть $\mathcal{X}$ - банахово пространство. Мультиотображение $\mathcal{F}\colon \mathcal{X} \to P(\mathcal{X})$ называется локально слабо компактным, если для любого $x \in \mathcal{X}$ существует $\delta > 0$ такое, что множество*

$$\bigcup_{y \in B_{\mathcal{X}}(x,\delta)} F(y)$$

является относительно компактным в пространстве $\mathcal{X}^\omega$.

Свойство 4.2.2. *Пусть $F : \mathcal{X} \to P(\mathcal{X})$ - мультиотображение, которое является $\mathcal{X} - \mathcal{X}^\omega$-закнутым (т.е. замкнутым относительно топологии $X \times X^\omega$), локально слабо компактным. Тогда F является полунепрерывным сверху мультиотображением из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}^\omega$.*

Доказательство. Предположим противное, что F не является $\mathcal{X} - \mathcal{X}^\omega$-полунепрерывным сверху в точке $\overline{x} \in \mathcal{X}$. Тогда существуют последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к $\overline{x}$, и последовательность $\{y_n\}$ такие, что

$$y_n \in F(x_n) \quad \text{и} \quad y_n \notin V^\omega(F(\overline{x}))$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, где V^ω является открытой окрестностью множества $F(\overline{x})$ в H^ω. Для любого $\delta > 0$ существует $\overline{n} \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in B_{\mathcal{X}}(\overline{x}, \delta)$ при всех $n \geq \overline{n}$. Таким образом, множество $\{F(x_n), n \geq \overline{n}\}$ является относительно слабо компактным. Тогда существует подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$, которая слабо сходится к $\gamma \in \mathcal{X}$. Теперь, в силу $\mathcal{X} - \mathcal{X}^\omega$ замкнутости мультиотображения F получаем, что $\gamma \in F(\overline{x})$, что есть противоречие. $\square$

Замечание 4.2.3. *Мультиотображение $F\colon [0,T] \times H \to P(H)$, удовлетворяющее условию $(F4)$ и для п.в. $t \in [0,T]$, мультиотображение $F(t,\cdot)\colon H \to P(H)$ замкнуто из H в H^ω, является $H - H^\omega$- полунепрерывным сверху относительно второго аргумента.*

В самом деле, из $(F4)$ и рефлективности гильбертого пространства H для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)$ является локально слабо компактным и наше утверждение следует из Свойства 4.2.2.

Из $(F1)$ следует, что для каждого $\omega \in H$ мультифункция

$$F(\cdot, \omega)\colon [0,T] \to Cvb(H)$$

имеет измеримое сечение. Кроме того, из $(F2), (F4)$ и Замечания 4.2.3 следует, что мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F\colon C([0,T];H) \to P(L^1([0,T];H)),$$
$$\mathcal{P}_F(x) = \big\{f \in L^1([0,T];H)\colon f(s) \in F(s,x(s)) \text{ для п.в. } s \in [0,T]\big\},$$

корректно определен (см. [17, 18]).

Под решением задачи (4.2.22) мы понимаем функцию $x \in W^{1,1}([0,T];H)$ для которой существует функция $f \in \mathcal{P}_F(x)$ такая, что $x(0) = Mx$ и

$$x'(t) = f(t) \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

Основным результатом в этом параграфе является следующее утверждение.

Теорема 4.2.13. *Пусть выполнены условия $(F1) - (F4)$ и (M). Дополнительно предположим, что существуют $R_0 > r_0 > 0$ такие, что для любого $w \in int\, B_H(0, r_0, R_0)$ и для п.в. $t \in [0,T]$ выполнено отношение*

$$\big\langle w, z\big\rangle_H \le 0, \tag{4.2.23}$$

для хотя бы одного элемента $z \in F(t,w)$.
Тогда задача (4.2.22) имеет решение со значениями в $B_H(0,R_0)$.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $B\colon H \to P(H)$,

$$B(w) = \big\{z \in H\colon \big\langle w\,\alpha(w), z\big\rangle_H \le 0\big\},$$

где

$$\alpha(w) = \begin{cases} 0 & \text{если } \|w\|_H \le r_0 \text{ или } \|w\|_H \ge R_0, \\ 1 & \text{если } r_0 < \|w\|_H < R_0. \end{cases}$$

Пусть $F_B\colon [0,T] \times H \to Cbv(H)$,

$$F_B(t,w) = F(t,w) \cap B(w).$$

Для каждого $w \in H$ мультиотображение $F_B(\cdot, w)\colon [0,T] \to Cbv(H)$ измеримо (так как оно представляет собой пересечение измеримого мультиотображения и постоянного мультиотображения). Кроме того, нетрудно видеть, что B является $H - H^\omega$- замкнутым мультиотображением с выпуклыми значениями. Поэтому, $F_B(t,\cdot)\colon H \to Cvb(H)$ является $H - H^\omega$- замкнутым. Далее, легко проверить, что мультиотображение F_B удовлетворяет условию $(F4)$. Следовательно, в силу Замечания 4.2.3, для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F_B(t,\cdot)\colon H \to Cvb(H)$ является $H - H^\omega$- полунепрерывным сверху. Отсюда, мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_{F_B}$ корректно определен.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) \in x(t) + F_B(t, x(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = Mx. \end{cases} \tag{4.2.24}$$

Ясно, что все решения задачи (4.2.24) являются решениями задачи (4.2.22). Кроме того, для каждого $w \in int\, B_H(0, r_0, R_0)$, и для п.в. $t \in [0,T]$ отношение (4.2.23) выполнено для всех $z \in F_B(t,w)$.
Заметим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ задача

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = 0, \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение в $W^{1,1}([0,T]; H_n)$.

Шаг 2. Покажем теперь, что задача

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) \in x(t) + P_n F_B(t, x(t)), \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = P_n M x, \end{cases} \tag{4.2.25}$$

имеет решение (где под решением задачи (4.2.25) мы понимаем функцию $x \in W^{1,1}([0,T]; H_n)$ для которой $x(0) = P_n M x$ и существует такая функция $f \in \mathcal{P}_{F_B}(x)$, что

$$x'(t) = P_n f(t) \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

В самом деле, фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и выбираем произвольно $r_* \in (r_0, R_0)$. Пусть $\overline{K} = B_H(0, r_*)$, $Q = C([0,T]; \overline{K})$ и $Q^{(n)} = Q \cap C([0,T]; H_n)$.
Для $y \in Q^{(n)}$, $\lambda \in [0,1]$ и $f \in \mathcal{P}_{F_B}(y, \lambda)$ обозначим через

$$\mathcal{S}(f) \in W^{1,1}([0,T]; H_n)$$

множество всех решений задачи Коши

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) \in \lambda y(t) + \lambda P_n f(t), \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ x(0) = \lambda P_n M y. \end{cases} \tag{4.2.26}$$

Определим мультиотображение $\mathcal{T}_n\colon Q^{(n)} \times [0,1] \to P\big(C([0,T];H_n)\big)$,

$$\mathcal{T}_n(y,\lambda) = \big\{\mathcal{S}(f)\colon f \in \mathcal{P}_{F_B}(y,\lambda)\big\}.$$

Легко видеть, что множество $\mathcal{T}_n(y,\lambda)$ выпукло в силу выпуклости значений мультиотображения F_B.

(a) Сначала покажем, что мультиотображение $\mathcal{T}_n$ имеет замкнутый график в пространстве $Q^{(n)} \times [0,1] \times C([0,T];H_n)$. Предположим, что

$$(y_{(m)}, \lambda_{(m)}, x_{(m)}) \to (y_{(0)}, \lambda_{(0)}, x_{(0)}) \in Q^{(n)} \times [0,1] \times C([0,T];H_n),$$

где $x_{(m)} \in \mathcal{T}_n(y_{(m)}, \lambda_{(m)})$.
Тогда

$$x_{(m)}(0) = \lambda_{(m)} P_n M y_{(m)}, \tag{4.2.27}$$

и существует последовательность $\{f_{(m)}\}\colon f_{(m)} \in \mathcal{P}_{F_B}(y_{(m)})$ такая, что

$$x'_{(m)}(t) + x_{(m)}(t) = \lambda_{(m)} y_{(m)}(t) + \lambda_{(m)} P_n f_{(m)}(t) \text{ for a.e. } t \in [0,T],$$

или эквивалентно,

$$x'_{(m)} + x_{(m)} = \lambda_{(m)} y_{(m)} + \lambda_{(m)} \mathbb{P}_n f_{(m)}. \tag{4.2.28}$$

Приходяя к пределу $m \to \infty$ в (4.2.27) получаем, что

$$x_{(0)}(0) = \lambda_{(0)} P_n M y_{(0)}.$$

Из $y_{(m)} \in Q^{(n)}$ и $(F4)$ следует, что существует функция $\nu_* \in L^1_+[0,T]$ такая, что для всех m и п.в. $t \in [0,T]$ имеем

$$\|f_{(m)}(t)\|_H \le \|F_B(t, y_{(m)}(t))\|_H \le \|F(t, y_{(m)}(t))\|_H \le \nu_*(t).$$

Следовательно, множество $\{f_{(m)}\}$ является ограниченным и равномерно интегрируемым в $L^1([0,T];H)$ и множество $\{f_{(m)}(t)\}$ ограничено для п.в. $t \in [0,T]$. Отсюда, в силу рефлексивности пространства H и Теоремы 4.2.1 последовательность $\{f_{(m)}\}$ является относительно слабо компактной в $L^1([0,T];H)$. Без ущерба для общности предположим, что $f_{(m)} \rightharpoonup f_{(0)} \in L^1([0,T];H)$. Так как

$$\|P_n f_{(m)}(t)\|_H \le \|f_{(m)}(t)\|_H \le \nu_*(t) \text{ для п.в. } t \in [0,T],$$

то множество $\{x'_{(m)}\}$ тоже является относительно слабо компактной в $L^1([0,T];H_n)$. Мы снова без ущерба для общности предположим, что

$$x'_{(m)} \rightharpoonup \gamma_{(0)} \in L^1([0,T];H_n). \tag{4.2.29}$$

Определим $u_0(t) := x_{(0)}(0) + \int_0^t \gamma_{(0)}(s)\,ds,\ t \in [0,T]$. Так как H_n является конечномерным пространством, для каждого $t \in [0,T]$ имеем

$$x_{(m)}(t) = x_{(m)}(0) + \int_0^t x'_{(m)}(s)\,ds \xrightarrow{H_n} u_0(t).$$

Следовательно, $x_{(0)} = u_0$, и отсюда, $\gamma_{(0)} = x'_{(0)}$.
Из соотношений

$$x'_{(0)} \xrightarrow{L^1} x'_{(m)} = \lambda_{(m)} y_{(m)} + \lambda_{(m)} \mathbb{P}_n f_{(m)} - x_{(m)} \xrightarrow{L^1} \lambda_{(0)} y_{(0)} + \lambda_{(0)} \mathbb{P}_n f_{(0)} - x_{(0)}$$

следует, что

$$x'_{(0)} + x_{(0)} = \lambda_{(0)} y_{(0)} + \lambda_{(0)} \mathbb{P}_n f_{(0)},$$

где символ $\xrightarrow{L^1}$ обозначает слабую сходимость в $L^1([0,T];H)$.
В силу слабой сходимости $f_{(m)} \xrightarrow{L^1} f_{(0)}$ и Теоремы 1.1.5 существует последовательность выпуклых комбинаций $\{\overline{f}_{(m)}\}$:

$$\overline{f}_{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} \sigma_{mk} f_{(k)},$$

которая сходится по норме к $f_{(0)}$ в $L^1([0,T];H)$, где

$$\sigma_{mk} \geq 0,\ \sum_{k=m}^{\infty} \sigma_{mk} = 1,\ \text{и}\ \forall\, m\ \exists\, k_0(m)\ \text{такое, что}\ \sigma_{mk} = 0,\ \forall\, k > k_0(m).$$

В силу Замечания 4.2.3, мы можем выбрать N_0 такое, что $\nu(N_0) = 0$ и $F_B(t,\cdot)$ полунепрерывно сверху из H в H^ω для любого $t \in [0,T] \setminus N_0$. Без ущерба для общности предположим, что $f_{(m)}(t) \in F_B(t, y_{(m)}(t))$ и

$$\overline{f}_{(m)}(t) \xrightarrow{H} f_{(0)}(t)$$

для всех $t \in [0,T] \setminus N_0$ и всех $n \in \mathbb{N}$.
Зафиксируем $t_0 \notin N_0$ и предположим противное, что

$$f_{(0)}(t_0) \notin F(t_0, y_{(0)}(t_0)).$$

Так как $F_B(t_0, y_{(0)}(t_0))$ является замкнутым и выпуклым множеством, из Теоремы Хана-Банаха существует открытое выпуклое множество $V^\omega \subset H^\omega$ такое, что

$$F_B(t_0, y_{(0)}(t_0)) \subset V^\omega \ \text{ и } \ f_{(0)}(t_0) \notin \overline{V^\omega}.$$

Из $H-H^{\omega}$-полунепрерывности сверху мультиотображения $F_B(t_0,\cdot)$ следует, что найдется число $\delta>0$ такое, что $F_B(t_0,x)\subset V^{\omega}$ при $\|x-y_{(0)}(t_0)\|\le\delta$. Сходимость $y_{(m)}(t_0)\overset{H}{\to}y_{(0)}(t_0)$ вытекает существование $m_0\in\mathbb{N}$ такое, что $\|y_{(m)}(t_0)-y_{(0)}(t_0)\|<\delta$ для всех $m>m_0$. Следовательно,

$$f_{(m)}(t_0)\in F_B(t_0,y_{(m)}(t_0))\subset V^{\omega}$$

для всех $m>m_0$. Из выпуклости множества V^{ω} мы получаем, что $\overline{f}_{(m)}(t_0)\in V^{\omega}$ для всех $m>m_0$, и отсюда $f_{(0)}(t_0)\in\overline{V}^{\omega}$. Что есть противоречие.

Следовательно, $f_{(0)}(t)\in F_B(t,y_{(0)}(t))$ для п.в. $t\in[0,T]$. Поэтому, в связи с тем, что $x_{(0)}(0)=P_nMy_{(0)}$ мы имеем $x_{(0)}\in\mathcal{T}_n(y_{(0)},\lambda_{(0)})$.

(b) Покажем теперь, что множество $\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)}\times[0,1]\big)$ относительно компактно в пространстве $C([0,T];H_n)$. В самом деле, для каждой функции $x_n\in\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)}\times[0,1]\big)$ существуют $(y_n,\lambda)\in Q^{(n)}\times[0,1]$ и $f_n\in\mathcal{P}_{F_B}(y_n)$ такие, что

$$x_n(t)=\lambda e^{-t}P_nMy_n+\lambda\int_0^t e^{s-t}(y_n(s)+P_nf_n(s))\,ds.$$

Из условия $(F4)$ и ограниченности множества $Q^{(n)}$ следует, что множество $\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)}\times[0,1]\big)$ ограничено в пространстве $C([0,T];H_n)$. Кроме того, из равенств

$$\begin{cases}x_n^{'}(t)=-x_n(t)+\lambda y_n(t)+\lambda P_nf_n(t)\text{ для п.в. }t\in[0,T]\\ x_n(0)=P_nMy_n,\end{cases}$$

следует, что множество $\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)}\times[0,1]\big)$ является равностепенно непрерывным в $C([0,T];H_n)$. Из Теоремы Арцела-Асколи следует, что множество $\mathcal{T}_n\big(Q^{(n)}\times[0,1]\big)$ является относительно компактным. Замкнутое и компактное мультиотображение является полунепрерывным сверху. Поэтому, $\mathcal{T}_n$ является компактным полунепрерывным сверху мультиотображением.

(c) Предположим, что существует $(y_n,\lambda)\in\partial Q^{(n)}\times(0,1)$ такое, что $y_n\in\mathcal{T}_n(y_n,\lambda)$. Тогда найдется функция $f_n\in\mathcal{P}_{F_B}(y_n)$ такая, что

$$y_n^{'}(t)+y_n(t)=\lambda y_n(t)+\lambda P_nf_n(t)\text{ для п.в. }t\in[0,T],$$

или эквивалентно,

$$y_n^{'}(t)=(\lambda-1)y_n(t)+\lambda P_nf_n(t)\text{ для п.в. }t\in[0,T].$$

Из $y_n \in \partial Q^{(n)}$ вытекает существование $t_0 \in [0,T]$ такое, что $\|y_n(t_0)\|_H = r_*$. Из $y_n(0) = \lambda P_n M y_n$ следует, что

$$\|y_n(0)\|_H \le \lambda \|M\| \|y_n\|_C < r_*.$$

Следовательно, мы можем выбрать $\varepsilon > 0$ такое, что

$$r_0 < \|y_n(t)\|_H \le r_* < R_0 \text{ при всех } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0).$$

Из последних неравенств получаем, что

$$\big\langle y_n(t), f_n(t) \big\rangle_H \le 0, \text{ для п.в. } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0).$$

В силу $y_n(t) \in H_n$ для п.в. $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ имеем

$$\big\langle y_n(t), (\lambda - 1) y_n(t) + \lambda P_n f_n(t) \big\rangle_H = \big\langle y_n(t), (\lambda - 1) y_n(t) + \lambda f_n(t) \big\rangle_H < 0.$$

Последовательно,

$$0 > \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \big\langle y_n(t), (\lambda - 1) y_n(t) + \lambda P_n f_n(t) \big\rangle_H dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \big\langle y_n(t), y_n^{'}(t) \big\rangle_H dt \ge 0,$$

что есть противоречие.

Таким образом, если существует функция $y_n \in \partial Q^{(n)}$ такая, что $y_n \in \mathcal{T}_n(y_n, 1)$, то y_n является решением задачи (4.2.25). Если $y_n \notin \mathcal{T}_n(y_n, 1)$ для всех $y_n \in \partial Q^{(n)}$, то $\mathcal{T}_n$ является гомотопией, соединяющей мультиотображения $\mathcal{T}_n(\cdot, 0)$ и $\mathcal{T}_n(\cdot, 1)$. В силу гомотопической инвариантности и свойства нормализации топологической степени имеем

$$deg\big(i - \mathcal{T}_n(\cdot, 1), Q^{(n)}\big) = deg\big(i - \mathcal{T}_n(\cdot, 0), Q^{(n)}\big) = 1.$$

Следовательно, существует функция $y_n \in Q^{(n)}$ такая, что $y_n \in \mathcal{T}_n(y_n, 1)$. Поэтому, y_n является решением задачи

$$\begin{cases} y'(t) \in P_n F(t, y(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,T], \\ y(0) = P_n M y. \end{cases}$$

Шаг 3. Пусть $f_n \in \mathcal{P}_F(y_n)$ такая, что $y_n^{'} = \mathbb{P}_n f_n$. Как показано выше, из $\|y_n(t)\|_H \le r_*$, $t \in [0,T]$, следует, что

$$\|f_n(t)\|_H \le \|F(t, y_n(t))\|_H \le \nu_*(t) \text{ для п.в. } t \in [0,T] \text{ и всех } n.$$

Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ является ограниченной и равномерно интегрируемой в $L^1([0,T]; H)$. Кроме того, множество $\{f_n(t)\}$ ограничено для п.в. $t \in [0,T]$. Отсюда, в силу рефлексивности пространства

H и Теоремы 4.2.1 последовательность $\{f_n\}$ является относительно слабо компактной в $L^1([0,T];H)$. Без ущерба для общности предположим, что $f_n \rightharpoonup f_0 \in L^1([0,T];H)$. Множество $\{y_n^{'}\}$ тоже является относительно слабо компактным в $L^1([0,T];H)$. Мы снова без ущерба для общности предположим, что

$$\mathbb{P}_n f_n = y_n^{'} \rightharpoonup y_0^{'} \in L^1([0,T];H). \tag{4.2.30}$$

Множество $\{y_n(0)\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в H. Поэтому, мы можем предположить, что

$$y_n(0) \rightharpoonup \gamma_0 \in H. \tag{4.2.31}$$

Определим $y_0(t) := \gamma_0 + \int_0^t y_0^{'}(s)\,ds,\ t \in [0,T]$. Нетрудно видеть, что

$$y_n(t) = y_n(0) + \int_0^t y_n^{'}(s)\,ds \overset{H}{\rightharpoonup} y_0(t)$$

для всех $t \in [0,T]$.
Кроме того, $\|y_n(t)\|_H \le r_*$ для всех t и n. Следовательно (см., например [21]),

$$y_n \overset{C([0,T];H)}{\rightharpoonup} y_0,$$

и отсюда, $My_n \overset{H}{\rightharpoonup} My_0$.
Для каждого $w \in H$, из $P_n w \overset{H}{\to} w$, имеем

$$\begin{aligned}\big\langle P_n My_n - My_0, w\big\rangle_H &= \big\langle P_n My_0 - My_0, w\big\rangle_H + \big\langle P_n My_n - P_n My_0, w\big\rangle_H \\ &= \big\langle P_n My_0 - My_0, w\big\rangle_H + \big\langle My_n - My_0, P_n w\big\rangle_H \\ &= \big\langle P_n My_0 - My_0, w\big\rangle_H + \big\langle My_n - My_0, P_n w - w\big\rangle_H + \big\langle My_n - My_0, w\big\rangle_H.\end{aligned}$$

Следовательно, $\big\langle P_n My_n - My_0, w\big\rangle_H \to 0$ при $n \to \infty$.
Поэтому, $y_n(0) = P_n My_n \overset{H}{\rightharpoonup} My_0$. Из (4.2.31) получаем, что $y_0(0) = My_0$.
С другой стороны, слабая сходимость $y_n(t) \rightharpoonup y_0(t)$ в H при всех t вытекает

$$y_n(t) \xrightarrow{E} y_0(t) \ \text{ для любого } \ t \in [0,T. \tag{4.2.32}$$

В силу Теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\mathbb{P}_n g \overset{L^p([0,T];H)}{\longrightarrow} g$$

для каждой функции $g \in L^p([0,T];H)$ и всех $1 \le p < \infty$.
Покажем теперь, что

$$\mathbb{P}_n f_n \overset{L^1([0,T];H)}{\rightharpoonup} f_0.$$

Для этого, пусть $\Phi\colon L^1([0,T];H) \to \mathbb{R}$ - линейный ограниченный оператор. Тогда существует функция $\varphi \in L^\infty([0,T];H)$ такая, что

$$\Phi(g) = \int_0^T \big\langle g(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \ \text{ для всех } \ g \in L^1([0,T];H).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathbb{P}_n f_n - f_0) = \int_0^T \big\langle P_n f_n(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \int_0^T \big\langle P_n f_n(t) - P_n f_0(t), \varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \int_0^T \big\langle P_n f_0(t) - f_0(t), \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \int_0^T \big\langle P_n f_0(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \int_0^T \big\langle P_n f_0(t) - f_0(t),\, \varphi(t)\big\rangle_H \, dt \\
&= \Phi(f_n - f_0) + \int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H \, dt + \Phi(\mathbb{P}_n f_0 - f_0).
\end{aligned}$$

Напомним, что $f_n \overset{L^1([0,T];H)}{\rightharpoonup} f_0$, $\mathbb{P}_n f_0 \overset{L^1(I,H)}{\longrightarrow} f_0$ и для п.в. $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H &\le \|f_n(t) - f_0(t)\|_H \cdot \|P_n(t)\varphi(t) - \varphi(t)\|_H \\
&\le (\nu_*(t) + \|f_0(t)\|_H)\|\varphi(t)\|_H,
\end{aligned}$$

и

$$\|P_n(t)\varphi(t) - \varphi(t)\|_H \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, для п.в. $t \in [0,T]$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H = 0.$$

Далее, функция

$$g_*(t) := (\nu_*(t) + \|f_0(t)\|_H)\|\varphi(t)\|_H,\ t \in [0,T]$$

является интегрируемой так как

$$\int_0^T \|g_*(t)\|_H \, dt \le \|\varphi\|_\infty \int_0^T (\nu_*(t) + \|f_0(t)\|_H) \, dt,$$

где $\|\varphi\|_\infty$ является нормой функции φ в $L^\infty([0,T];H)$. Из Теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что

$$\int_0^T \big\langle f_n(t) - f_0(t),\, P_n\varphi(t) - \varphi(t)\big\rangle_H\, dt \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому, $\Phi(\mathbb{P}_n f_n - f_0) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е., $\mathbb{P}_n f_n \rightharpoonup f_0$ в $L^1([0,T];H)$. Из (4.2.30) получаем, что $y_0' = f_0$, и оттуда, $f_n \overset{L^1(I,H)}{\rightharpoonup} y_0'$.
В силу Леммы Мазура мы можем предположить, что существует последовательность выпуклых комбинаций $\{\overline{f}_{(n)}\}$,

$$\overline{f}_{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \theta_{nk} f_k,$$

которая сходится к y_0' для п.в. $t \in [0,T]$, где

$$\theta_{nk} \geq 0,\ \sum_{k=n}^{\infty} \theta_{nk} = 1,\ \text{и } \forall\, n\ \exists\, k_0(n) \text{ такое, что } \theta_{nk} = 0,\ \forall\, k > k_0(n).$$

В следствие отношения (4.2.1) имеем

$$\overline{f}_{(n)}(t) \overset{E}{\to} y_0'(t) \ \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

Из (4.2.32) и $(F3)$ следует, что для п.в. $t \in [0,T]$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $i_0 = i_0(\varepsilon, t)$ такое, что

$$F(t, y_i(t)) \subset F\big(t, y_0(t)\big) + B_E(0,\varepsilon) \text{ для всех } i \geq i_0.$$

Тогда $f_i(t) \in F\big(t, y_0(t)\big) + B_E(0,\varepsilon)$ для всех $i \geq i_0$, и в силу выпуклости множества $F\big(t, y_0(t)\big) + B_E(0,\varepsilon)$ получаем, что

$$\overline{f}_{(i)}(t) \in F\big(t, y_0(t)\big) + B_E(0,\varepsilon), \text{ для всех } i \geq i_0.$$

Следовательно, $y_0'(t) \in F(t, y_0(t))$ для п.в. $t \in [0,T]$. Поэтому, y_0 является решением задачи (4.2.22). □

Пример 4.2.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ - открытое ограниченное множество и липщицевой границей. Рассмотрим задачу управления*

$$\begin{cases} u_t + u(t,\xi) \displaystyle\int_\Omega k(\xi,\eta) u(t,\eta) d\eta = -bu(t,\xi) + f(t, u(t,\xi)) + \varphi(t, u(t,\xi)) v(\xi), \\ v \in \mathcal{S} \\ u(0,\xi) = u(1,\xi) \end{cases} \tag{4.2.33}$$

для п.в. $t \in [0,1]$ *и для всех* $\xi \in \Omega$, *где* $k \in C^1(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}; \mathbb{R})$, $b > 0$,

$$f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \varphi\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

являются непрерывными функциями и

$$\mathcal{S} = \big\{ v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})\colon \exists \beta > 0 \text{ и } |v(\xi)| + |Dv(\xi)| \le \beta \text{ для п.в. } \xi \in \Omega \big\}.$$

Предположим, что

$(f1)'$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial z}\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны и существуют $N, L > 0$ такие, что

$$\left| \frac{\partial \varphi(t,z)}{\partial z} \right| \le L \text{ для всех } (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

и

$$\left| \frac{\partial f(t,z)}{\partial z} \right| \le N \text{ для всех } (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R};$$

$(f2)'$ $b > N + \sqrt{6\delta|\Omega|K}$, где $\delta = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t,0)|$,

$$K \ge \max \left\{ \max_{(\xi,\eta) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |k(\xi,\eta)|, \ \max_{(\xi,\eta) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |Dk(\xi,\eta)| \right\} \tag{4.2.34}$$

и $|\Omega|$ обозначает меру Лебега множества Ω, символ D обозначает производную функции нескольких переменных.

Под решением задачи (4.2.33) мы понимаем непрерывную функцию $u\colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$, частная производная которой $\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t}$ существует и удовлетворяет (4.2.33).

Пусть $H = W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$ и $E = L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Ясно, что H является сепарабельным гильбертовым пространством, компактно вложенным в банаховым пространством E. Для каждого $w \in H$ пусть

$$\|w\|_H = \sqrt{\int_\Omega \left(w^2(\xi) + |Dw(\xi)|^2 \right) d\xi}.$$

Для переформулировки задачи мы будем показать, что существует решение $u(t,\xi)$ задачи (4.2.33), для которого в любом времени t функция $u(t,\cdot)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$. Для этого, пусть $x(t)=u(t,\cdot)$, $t\in[0,1]$, и определим следующие отображения и мультиотображение.

$$\begin{array}{lcccl}
\overline{g}\colon & H & \to & H, & \overline{g}(w)(\xi) = -w(\xi)\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta - bw(\xi),\\
\overline{f}\colon & [0,1]\times H & \to & H, & \overline{f}(t,w)(\xi) = f(t,w(\xi)),\\
\overline{\varphi}\colon & [0,1]\times H & \to & H, & \overline{\varphi}(t,w)(\xi) = \varphi(t,w(\xi)),
\end{array}$$

и

$$G\colon [0,1]\times H \multimap H, \qquad G(t,w)=\overline{\varphi}(t,w)\,\mathcal{S}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x'(t)\in F(t,x(t)), \text{ для п.в. } t\in[0,1],\\ x(0)=x(1), \end{cases} \tag{4.2.35}$$

где $F\colon [0,1]\times H \multimap H,\ F(t,w)=\overline{g}(w)+\overline{f}(t,w)+G(t,w)$.

Отметим, что функция $\overline{g}$ корректно определена так как для любого $w\in H$ выполнено

$$\begin{aligned} D\overline{g}(w)(\xi) = &-Dw(\xi)\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta\right)\\ &-w(\xi)\left(\int_\Omega Dk(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta\right) - bDw(\xi), \quad \text{для}\,\xi\in\Omega. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (4.2.34) имеем $\overline{g}(w)\in H$.

Пусть $f_2'(t,z)=\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}$, из $(f1)'$ следует, что

$$|f(t,z)| = |f(t,0)+f_2'(t,\eta)\,z| \le |f(t,0)| + N|z|, \tag{4.2.36}$$

для всех $(t,z)\in[0,1]\times\mathbb{R}$, где η - число между 0 и z. Кроме того,

$$Df(t,w(\xi)) = f_2'(t,w(\xi))Dw(\xi) \ \text{ для } \ \xi\in\Omega.$$

Поэтому, функция $\overline{f}$ корректно определена. Далее, пусть $\varphi_2'(t,z) = \frac{\partial\varphi(t,z)}{\partial z}$. Имеем

$$|\varphi(t,z)| = |\varphi(t,0) + \varphi_2'(t,\eta)\, z| \leq |\varphi(t,0)| + L|z|, \tag{4.2.37}$$

для всех $(t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, где η - число между 0 и z. Так как

$$D\varphi(t,w(\xi)) = \varphi_2'(t,w(\xi))Dw(\xi) \ \text{ для } \ \xi \in \Omega,$$

и отсюда, $\overline{\varphi}(t,w) \in H$. Теперь пусть $z \in G(t,w)$. Тогда существует функция $v \in \mathcal{S}$ такая, что $z = \overline{\varphi}(t,w)v$. Имеем

$$\|z\|_E^2 = \int_\Omega |\varphi(t,w(\xi))v(\xi)|^2\, d\xi \leq \beta^2 \|\overline{\varphi}(t,w)\|_E^2,$$

и

$$\|Dz\|_E^2 = \int_\Omega |D\varphi(t,w(\xi))v(\xi) + \varphi(t,w(\xi))v(\xi)|^2\, d\xi \leq 2\beta^2 \|\overline{\varphi}(t,w)\|_H^2.$$

Таким образом, $G(t,w) \in H$. Ясно, что G имеет замкнутые ограниченные выпуклые значения

Пусть $w_n \xrightarrow{E} w_0$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| -w_n(\xi)\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w_n(\eta)\, d\eta\right) + w_0(\xi)\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w_0(\eta)\, d\eta\right)\right|^2 d\xi \\
&\leq 2\int_\Omega |w_n(\xi)|^2 \left(\int_\Omega |k(\xi,\eta)|\, |(w_0(\eta) - w_n(\eta))|\, d\eta\right)^2 d\xi \\
&\qquad + 2\int_\Omega |w_0(\xi) - w_n(\xi)|^2 \left(\int_\Omega |k(\xi,\eta)|\, |w_0(\eta)|\, d\eta\right)^2 d\xi \\
&\leq 2K^2|\Omega|\|w_n - w_0\|_E^2(\|w_n\|_E^2 + \|w_0\|_E^2).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{g}$ является $E-E$ непрерывным. Кроме того,

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}(t,w_n) - \overline{f}(t,w_0)\|_E^2 = &\int_\Omega |f(t,w_n(\xi)) - f(t,w_0(\xi))|^2\, d\xi \\
= &\int_\Omega |f_2'(t,\eta_n(\xi))| \cdot |(w_n(\xi) - w_0(\xi))|^2\, d\xi \\
\leq &\ N^2\|w_n - w_0\|_E^2
\end{aligned}$$

где $\eta_n(\xi)$ - число между $w_n(\xi)$ и $w_0(\xi)$.

Отсюда, $\overline{f}(t, w_n) \xrightarrow{E} \overline{f}(t, w_0)$, и следовательно, $\overline{f}(t, \cdot)$ является $E - E$ непрерывным.

Далее, для любого $t \in [0, 1]$ мультиотображение $G(t, \cdot)$ является $E - E$ полунепрерывным сверху. В самом деле, фиксируем $t \in [0, 1]$, пусть $w_n \xrightarrow{E} w_0$, $z_n \in G(t, w_n)$. Тогда существует последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{S}$ такая, что $z_n = \overline{\varphi}(t, w_n)v_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поступив аналогично как и для отображения $\overline{f}$ мы можем доказать, что $\overline{\varphi}(t, w_n) \xrightarrow{E} \overline{\varphi}(t, w_0)$. Заметим, что множество $\mathcal{S}$ компактно в E, (так как оно ограничено в H). Поэтому, существует последовательность такая, что $v_n \xrightarrow{E} v_0, v_0 \in \mathcal{S}$. Для простоты пусть $\overline{\varphi}_n = \overline{\varphi}(t, w_n)$ и $\overline{\varphi}_0 = \overline{\varphi}(t, w_0)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|\overline{\varphi}_n v_n - \overline{\varphi}_0 v_0\|_E^2 &= \int_\Omega (\overline{\varphi}_n(\xi)v_n(\xi) - \overline{\varphi}_0(\xi)v_0(\xi))^2\, d\xi \\
&= \int_\Omega (\overline{\varphi}_n(\xi)v_n(\xi) \pm \overline{\varphi}_0(\xi)v_n(\xi) - \overline{\varphi}_0(\xi)v_0(\xi))^2\, d\xi \\
&\le 2\int_\Omega (\overline{\varphi}_n(\xi) - \overline{\varphi}_0(\xi))^2 (v_n(\xi))^2\, d\xi \\
&\qquad +2\int_\Omega (\overline{\varphi}_0(\xi))^2 (v_n(\xi) - v_0(\xi))^2\, d\xi \\
&\le 2\beta^2 \|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}_0\|_E^2 + 2\int_\Omega (\overline{\varphi}_0(\xi))^2 (v_n(\xi) - v_0(\xi))^2\, d\xi.
\end{aligned}$$

С другой стороны, $v_n(\xi) \to v_0(\xi)$ для п.в. $\xi \in \Omega$. Из определения множества $\mathcal{S}$ получаем, что

$$\big(\overline{\varphi}_0(\xi))^2 (v_n(\xi) - v_0(\xi)\big)^2 \le 4\beta^2 (\overline{\varphi}_0(\xi))^2.$$

Оттуда, в силу Теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\int_\Omega (\overline{\varphi}_0(\xi))^2 (v_n(\xi) - v_0(\xi))^2\, d\xi \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Таким образом, мультиотображение $G(t, \cdot)$ является квазикомпактным. Покажем, что оно является $E - E$ замкнутым.

Действительно, пусть $z_n \in G(t, w_n)$ такая, что $z_n \xrightarrow{E} z_0$. Нам нужно показать, что $z_0 \in G(t, w_0)$. Как показано выше (точность до подпоследовательности), что $z_n = \overline{\varphi}_n v_n \xrightarrow{E} \overline{\varphi}_0 v_0$, и поэтому, $z_0 = \overline{\varphi}_0 v_0$, где $v_0 \in \mathcal{S}$, т.е. $z_0 \in G(t, w_0)$. Следовательно, в силу [90, Теоремы 1.1.12] мультиотображение $G(t, \cdot)$ является $E - E$ полунепрерывным сверху.

Поэтому, $w \longmapsto F(t, w)$ тоже является $E - E$ полунепрерывным сверху мультиотображением. Условие $(F3)$ выполнено.

Теперь пусть $w_n \xrightarrow{H} w_0$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Bigg\| -w_n(\xi) \left(\int_\Omega Dk(\xi,\eta) w_n(\eta)\, d\eta \right) - Dw_n(\xi) \left(\int_\Omega k(\xi,\eta) w_n(\eta)\, d\eta \right) \\
&\quad + Dw_0(\xi) \left(\int_\Omega k(\xi,\eta) w_0(\eta)\, d\eta \right) + w_0(\xi) \left(\int_\Omega Dk(\xi,\eta) w_0(\eta)\, d\eta \right) \Bigg\|_{\mathbb{R}^k}^2 d\xi \\
&\le 4 \int_\Omega |w_0(\xi) - w_n(\xi)|^2 \left(\int_\Omega \|Dk(\xi,\eta)\|_{\mathbb{R}^k} |w_n(\eta)|\, d\eta \right)^2 d\xi \\
&\quad + 4 \int_\Omega |w_0(\xi)|^2 \left(\int_\Omega \|Dk(\xi,\eta)\|_{\mathbb{R}^k} |w_0(\eta) - w_n(\eta)|\, d\eta \right)^2 d\xi \\
&\quad + 4 \int_\Omega \|Dw_0(\xi) - Dw_n(\xi)\|_{\mathbb{R}^k}^2 \left(\int_\Omega |k(\xi,\eta)| |w_n(\eta)|\, d\eta \right)^2 d\xi \\
&\quad + 4 \int_\Omega \|Dw_0(\xi)\|_{\mathbb{R}^k}^2 \left(\int_\Omega |k(\xi,\eta)| |w_0(\eta) - w_n(\eta)|\, d\eta \right)^2 d\xi \\
&\le 4K^2 |\Omega| \|w_0 - w_n\|_H^2 (\|w_n\|_H^2 + \|w_0\|_H^2).
\end{aligned}$$

Отсюда, $\{D\overline{g}(w_n)\}$ сходится к $D\overline{g}(w_0)$ в E. Кроме того, как выше,

$$\|\overline{g}(w_n) - \overline{g}(w_0)\|_E \to 0.$$

Поэтому, $\overline{g}(w_n) \xrightarrow{H} \overline{g}(w_0)$.

Пусть $t \in [0, 1]$. Для доказательства $H - H$ непрерывности отображения $\overline{f}(t, \cdot)$ мы предположим противное, что существуют последовательность $\{\widetilde{w}_n\}$ и $\overline{\varepsilon} > 0$ такие, что $\widetilde{w}_n \xrightarrow{H} w_0$ и

$$\|\overline{f}(t, \widetilde{w}_n) - \overline{f}(t, w_0)\|_H > \overline{\varepsilon}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Имеем

$$\int_\Omega \left(|f(t,\widetilde{w}_n(\xi)) - f(t,\widetilde{w}_0(\xi))|^2 + |Df(t,\widetilde{w}_n(\xi)) - Df(t,w_0(\xi))|^2\right)\, d\xi$$
$$= \|\overline{f}(t,\widetilde{w}_n) - \overline{f}(t,w_0)\|_H^2$$
$$> \overline{\varepsilon}^2.$$

Из $E-E$ непрерывности отображения $\overline{f}(t,\cdot)$ следует, что

$$\int_\Omega |Df(t,\widetilde{w}_n) - Df(t,w_0)|^2\, d\xi > \frac{\overline{\varepsilon}^2}{2} \quad \text{для достаточно больших} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.38}$$

Из сходимости $\{\widetilde{w}_n\} \to w_0$ в H вытекает существование подпоследовательность $\{\widetilde{w}_{n_k}\}$ такая, что $\widetilde{w}_{n_k}(\xi) \to w_0(\xi)$ для п.в. $\xi \in \Omega$. Справедливы следующие оценки.

$$\int_\Omega |Df(t,\widetilde{w}_n) - Df(t,w_0)|^2\, d\xi$$
$$= \int_\Omega |f_2'(t,\widetilde{w}_{n_k}(\xi))D\widetilde{w}_{n_k}(\xi) - f_2'(t,w_0(\xi))Dw_0(\xi)|\, d\xi$$
$$\le 2\int_\Omega |f_2'(t,\widetilde{w}_{n_k}(\xi))|^2 |D\widetilde{w}_{n_k}(\xi) - Dw_0(\xi)|^2\, d\xi$$
$$+2\int_\Omega |f_2'(t,\widetilde{w}_{n_k}(\xi)) - f_2'(t,w_0(\xi))|^2 |Dw_0(\xi)|^2\, d\xi$$

Из непрерывности отображения f_2' следует, что

$$f_2'(t,\widetilde{w}_{n_k}(\xi)) \to f_2'(t,w_0(\xi))$$

для п.в. $\xi \in \Omega$.

Кроме того, в силу $(f_1)'$ имеем

$$|f_2'(t,\widetilde{w}_{n_k}(\xi)) - f_2'(t,w_0)(\xi)|^2 |Dw_0(\xi)|^2 \le 2N^2 |Dw_0(\xi)|^2$$

и

$$|f_2'(t,\widetilde{w}_{n_k}(\xi))|^2 |D\widetilde{w}_{n_k}(\xi) - Dw_0(\xi)|^2 \le N^2 |D\widetilde{w}_{n_k}(\xi) - Dw_0(\xi)|^2.$$

Таким образом, из сходимости $\{\widetilde{w}_n\} \to w_0$ в H и Теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что

$$\int_\Omega |Df(t, \widetilde{w}_n) - Df(t, w_0)|^2 \, d\xi \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что противоречит (4.2.38).

Отсюда, для любой последовательности $\{w_n\}$: $w_n \xrightarrow{H} w_0$ следует, что

$$\overline{f}(t, w_n) \xrightarrow{H} \overline{f}(t, w_0).$$

Для любого $t \in [0, 1]$ мультиотображение $G(t, \cdot)$ является $H - H^\omega$ замкнутым. В самом деле, фиксируем $t \in [0, 1]$ и предположим, что существует $w_n \xrightarrow{H} w_0$, $z_n \in G(t, w_n)$ такая, что $z_n \rightharpoonup z_0$, покажем, что $z_0 \in G(t, w_0)$.

Из определения мультиотображения G, существует последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{S}$ такая, что $z_n = \overline{\varphi}(t, w_n)v_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу слабо компактности множества $\mathcal{S}$ существует подпоследовательность (считая как последовательность) такая, что $v_n \rightharpoonup v_0, v_0 \in \mathcal{S}$. Из компактного вложения $H \hookrightarrow E$, слабая сходимость последовательностей $\{z_n\}$ и $\{v_n\}$ в H следует их сильные сходимости в E, т.е. $z_n \xrightarrow{E} z_0$ и $v_n \xrightarrow{E} v_0$. Как показано выше $\overline{\varphi}(t, w_n) \xrightarrow{E} \overline{\varphi}(t, w_0)$, отсюда получаем, что $z_n = \overline{\varphi}(t, w_n)v_n \xrightarrow{E} \overline{\varphi}(t, w_0)v_0$. Следовательно, $z_0 = \overline{\varphi}_0 v_0$, где $v_0 \in \mathcal{S}$, т.е. $z_0 \in G(t, w_0)$.

Поэтому, мультиотображение $w \longmapsto F(t, w)$ является замкнутым из H в H^ω, для каждого $t \in [0, 1]$ и условие $(F2)$ выполнено.

Для проверки выполнения условия $(F1)$ будем показать, что $\overline{f}(\cdot, w)$ является непрерывным для каждого $w \in H$. Действительно, пусть $t_0 \in [0, 1]$ и $\{t_n\} \subset [0, 1]$ такие, что $t_n \to t_0$. Из $(f1)'$ следует, что $f(t_n, w(\xi)) \to f(t_0, w(\xi))$ и

$$Df(t_n, w(\xi)) = f_2'(t_n, w(\xi))Dw(\xi) \to f_2'(t_0, w(\xi))Dw(\xi) = Df(t_0, w(\xi))$$

для всех $\xi \in \Omega$.

В следствие (4.2.36), последние сходимости тоже являются мажорируемы-

ми в E. Следовательно, $\overline{f}(t_n, w) \xrightarrow{H} \overline{f}(t_0, w)$. Поэтому, $\overline{f}(\cdot, w)$ непрерывно, и оттуда, оно измеримо.

Для доказательства измеримости мультиотображения $G(\cdot, w) : [0,1] \multimap H$ для любого $w \in H$ мы будем показать, что для любого $\eta \in H$ функция $\gamma_\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\gamma_\eta(t) = \sup \{\langle z, \eta \rangle_H,\ z \in G(t, w)\},$$

является измеримой (см. [44, Свойство 4.3.12],).

Для этого, фиксируем $\eta \in H$, покажем, что функция γ_η является полунепрерывной сверху, и следовательно, она измерима. Предположим противное, что существует последовательность $\{t_n\} \subset [0,1]$ такая, что $t_n \to t_0$ и

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_\eta(t_n) = l > \gamma_\eta(t_0).$$

Без потери общности предположим, что $\gamma_\eta(t_n) > \dfrac{l + \gamma_\eta(t_0)}{2}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует последовательность $\{z_n\} \in G(t_n, w)$ такая, что

$$\langle z_n, \eta \rangle_H > \frac{l + \gamma_\eta(t_0)}{2}\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Из определения мультиотображения G, найдется последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{S}$ такая, что $z_n = \overline{\varphi}(t_n, w) v_n$. Из $(f1)'$, (4.2.37) и непрерывности отображений φ и φ_2' следует, что $\overline{\varphi}(t_n, w) \xrightarrow{H} \overline{\varphi}(t_0, w)$. Отсюда, из определения множества $\mathcal{S}$ имеем

$$\|z_n\|_H^2 \le \beta^2 \|\overline{\varphi}(t_n, w)\|_H^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, существует подпоследовательность (обозначим как последовательность) такая, что $z_n \overset{H}{\rightharpoonup} z_0$. Из слабо компактности множества $\mathcal{S}$ существует подпоследовательность (обозначим как последовательность) такая, что $v_n \overset{H}{\rightharpoonup} v_0$. Далее, имеем $z_n \xrightarrow{E} z_0$ и $v_n \xrightarrow{E} v_0$. Напомним, что $\mathcal{S}$ является слабо замкнутым, поэтому $v_0 \in \mathcal{S}$. С другой стороны,

нетрудно проверить, что $z_n = \overline{\varphi}(t_n, w)v_n \xrightarrow{E} \overline{\varphi}(t_0, w)v_0$. Следовательно, $z_0 = \overline{\varphi}(t_0, w)v_0 \in G(t_0, w)$. Поэтому,

$$\langle z_n, \eta\rangle_H \to \langle z_0, \eta\rangle_H,$$

где $z_0 \in G(t_0, w)$. Отсюда получаем:

$$\langle z_0, \eta\rangle_H \geq \frac{l + \gamma_\eta(t_0)}{2} > \gamma_\eta(t_0).$$

Что есть противоречие.

Теперь пусть $\Theta \subset H$ - ограниченное множество, $w \in \Theta$ и $t \in [0, 1]$. Если $z \in F(t, w)$, то $z = \overline{g}(w) + \overline{f}(t, w) + \overline{\varphi}(t, w)v$ где $v \in \mathcal{S}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\|z\|_H^2 = \\
&= \int_\Omega \left| -w(\xi)\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta\right) - bw(\xi) + f(t, w(\xi)) + \varphi(t, w(\xi))v(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\quad + \int_\Omega \Big| -w(\xi)\left(\int_\Omega Dk(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta\right) - Dw(\xi)\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta\right) - bDw(\xi) \\
&\quad + f_2'(t, w(\xi)Dw(\xi) + \varphi_2'(t, w(\xi)Dw(\xi)v(\xi) + \varphi(t, w(\xi))Dv(\xi)\Big|^2 d\xi \\
&\leq 10K^2|\Omega|\|w\|_H^4 + 6b^2\|w\|_H^2 + 8|f(t,0)|^2|\Omega| + 8N^2\|w\|_H^2 \\
&\qquad + 20|\varphi(t,0)|^2\beta^2|\Omega| + 20\beta^2L^2\|w\|_H^2.
\end{aligned}$$

Поэтому, условие $(F4)$ выполнено.

Справедливы следующие оценки.

$$\begin{aligned}
&\left\langle w, \overline{g}(w) + \overline{f}(t, w)\right\rangle_H \\
&\quad = \int_\Omega w(\xi)\left(-w(\xi)\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta\right) - bw(\xi) + f(t, w(\xi))\right) d\xi \\
&\qquad + \int_\Omega \left\langle Dw(\xi), -w(\xi)\left(\int_\Omega Dk(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta\right)\right\rangle d\xi \\
&\qquad + \int_\Omega \left\langle Dw(\xi), -Dw(\xi)\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\,d\eta - bDw(\xi)\right\rangle d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_\Omega \langle Dw(\xi), f_2'(t,w(\xi))Dw(\xi)\rangle\, d\xi \\
=&-b\left(\int_\Omega (w(\xi))^2\, d\xi + \int_\Omega |Dw(\xi)|^2\, d\xi\right) \\
&+\int_\Omega w(\xi)f(t,w(\xi))\, d\xi + \int_\Omega \langle Dw(\xi), f_2'(t,w(\xi))Dw(\xi)\rangle\, d\xi \\
&-\int_\Omega (w(\xi))^2\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\, d\eta\right)\, d\xi \\
&-\int_\Omega \left\langle Dw(\xi), w(\xi)\int_\Omega (Dk(\xi,\eta)w(\eta)\, d\eta)\right\rangle\, d\xi \\
&-\int_\Omega |Dw(\xi)|^2\left(\int_\Omega k(\xi,\eta)w(\eta)\, d\eta\right)\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Из $(f1)'$ и (4.2.36) следует, что

$$
\begin{aligned}
&\left\langle w, \overline{g}(w) + \overline{f}(t,w)\right\rangle_H \\
&\quad\le -b\|w\|_H^2 + \int_\Omega |w(\xi)|\left(|f(t,0)| + N|w(\xi)|\right)\, d\xi \\
&\qquad +N\int_\Omega \left|Dw(\xi)\right|^2 d\xi + K\left(\int_\Omega |w(\xi)|^2\, d\xi\right)\left(\int_\Omega |w(\eta)|\, d\eta\right) \\
&\qquad +K\left(\int_\Omega |Dw(\xi)|\,|w(\xi)|\, d\xi\right)\left(\int_\Omega |w(\eta)|\, d\eta\right) \\
&\qquad +K\left(\int_\Omega |Dw(\xi)|^2\, d\xi\right)\left(\int_\Omega |w(\eta)|\, d\eta\right) \\
&\quad\le \left(-b+N\right)\|w\|_H^2 + \delta|\Omega|^{1/2}\,\|w\|_H + K|\Omega|^{1/2}\|w\|_E\|w\|_H^2 \\
&\qquad +\frac{1}{2}K|\Omega|^{1/2}\|w\|_E\|w\|_H^2 \\
&\quad\le \frac{3}{2}K|\Omega|^{1/2}\|w\|_H^3 + (-b+N)\|w\|_H^2 + \delta|\Omega|^{1/2}\,\|w\|_H < 0,
\end{aligned}
$$

при

$$
\|w\|_H < \frac{b - N + \sqrt{(-b+N)^2 - 6\delta|\Omega|K}}{3K|\Omega|^{1/2}}.
$$

Таким образом, отношение (4.2.23) выполнено. Применяя Теорему 4.2.13 мы получаем, что задача (4.2.35), и следовательно задача (4.2.33), имеет решение.

Замечание 4.2.4. *Отметим, что в задаче* (4.2.33) *мы можем заменить периодическое условие следующими условиями:*

(i) $u(0,\xi) = -u(1,\xi),\ \xi \in \Omega;$

(ii) $u(0,\xi) = \displaystyle\int_0^1 u(s,\xi)\,ds,\ \xi \in \Omega;$

(iii) $u(0,\xi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i u(t_i,\xi),\ \xi \in \Omega$ *где* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *и* $\displaystyle\sum_{i=1}^{k_0} |\alpha_i| \le 1.$

Глава 5

Дифференциальные включения второго порядка

Теория дифференциальных включений второго порядка привлекает внимание многих исследователей (см., например [2, 3, 9, 14, 16, 47, 51, 52, 75, 107]). В этой главе, применяя метод ограничивающих функций, мы изучим граничную задачу для дифференциального включения вида

$$\begin{cases} u'' \in Q(u), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.0.1}$$

играющую важную роль в теории управления.

5.1 Существование решений в одномерном пространстве

Пусть

$$W_0^{2,2}[0,1] = \{u \in W^{2,2}[0,1] \colon u(0) = u(1) = 0\}$$

и определим оператор $j \colon L^2[0,1] \to C[0,1]$,

$$(jf)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds,$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1) & if \quad 0 \le t \le s, \\ s(t-1) & if \quad s \le t \le 1. \end{cases}$$

Отметим, что оператор j на самом деле действует в $W_0^{2,2}[0,1]$ и, для любой функции $f \in L^2[0,1]$, краевая задача

$$\begin{cases} u''(t) = f(t) \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

может быть переписана в виде: $u = jf$ (см., например [79]). Применяя Теорему Арцела-Асколи, мы можем доказать, что оператор j является вполне непрерывным, т.е. j непрерывен и отображает любое ограниченное множество $\Omega \subset L^2[0,1]$ в относительно компактное множество $j(\Omega) \subset C[0,1]$.

В этом параграфе мы изучим задачу (5.0.1) при предположении, что мультиотображение $Q\colon C[0,1] \to C(L^2[0,1])$ удовлетворяет условиям:

$(Q1)$ композиция $j \circ Q$ принадлежит классу $CJ\big(C[0,1]; C[0,1]\big)$.

$(Q2)$ существуют $p, q > 0$ такие, что

$$\|Q(u)\|_2 \leq q(1 + \|u\|_2^p)$$

для всех $u \in C[0,1]$, где

$$\|Q(u)\|_2 = \sup\{\|f\|_2 \colon f \in Q(u)\}.$$

Под решением задачи (5.0.1) мы понимаем функцию $u \in W_0^{2,2}[0,1]$, для которой существует функция $f \in Q(u)$ такая, что

$$u''(t) = f(t) \text{ для п.в. } t \in [0,1].$$

Замечание 5.1.1. *Отметим, что класс мультиотображений Q, удовлетворяющих условию $(Q1)$, достаточно широк. Например, для любого $CJ-$мультиотображения Q мультиотображение $j \circ Q$ является $CJ-$мультиотображением. Кроме того, существует мультиотображение Q, которое не является $CJ-$мультиотображением, но композиция $j \circ Q$ является $CJ-$мультиотображением. Например, пусть $F\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ - верхнее Каратеодори мультиотображение с*

L^2-подлинейным ростом. Известно, что мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F$ корректно определен, замкнут и принимает замкнутые выпуклые значения.

Пусть $Q\colon C[0,1] \to Cv(L^2[0,1])$, $Q(x) = \mathcal{P}_F(x)$. Из Свойства 1.3.16 следует, что мультиотображение $j \circ Q$ замкнуто. Кроме того, для любого ограниченного множества $U \subset C[0,1]$ множество $Q(U)$ ограничено в $L^2[0,1]$, следовательно, множество $j(Q(U))$ является относительно компактным в $C[0,1]$. Отсюда, $j \circ Q$ является полунепрерывным сверху мультиотображением с компактными выпуклыми значенями, и поэтому, оно принадлежит классу $J\big(C[0,1]; C[0,1]\big) \subset CJ\big(C[0,1]; C[0,1]\big)$.

Основным результатом в этом параграфе является следующее утверждение.

Теорема 5.1.1. *Пусть выполнены условия $(Q1) - (Q2)$. Предположим, что существует $N > 0$ такое, что для любой функции $u \in C[0,1]$ из $\|u\|_2 > N$ следует, что*

$$\big\langle u, f\big\rangle_{L^2} = \int_0^1 u(s)f(s)ds > 0 \text{ для всех } \ f \in Q(u).$$

Тогда задача (5.0.1) имеет решение.

Доказательство. Задача (5.0.1) может быть переписана в виде

$$u \in j \circ Q(u).$$

Из $(Q2)$ следует, что множество $Q(\Omega)$ является ограниченным в $L^2[0,1]$ для любого ограниченного множества $\Omega \subset C[0,1]$. Следовательно, множество $j \circ Q(\Omega)$ является относительно компактным в $C[0,1]$. Поэтому, $j \circ Q$ является вполне полунепрерывным сверху $CJ-$мультиотображением.

Предположим, что существует функция $u_* \in C[0,1]$ такая, что

$$u_* \in j \circ Q(u_*).$$

Заметим, что $u_*(0) = u_*(1) = 0$. Тогда найдется функция $f_* \in Q(u_*)$ такая, что $u_*^{''}(t) = f_*(t)$ для п.в. $t \in [0,1]$, и отсюда,

$$\big\langle f_*, u_*\big\rangle_{L^2} = \big\langle u_*^{''}, u_*\big\rangle_{L^2} = -\big\langle u_*^{'}, u_*^{'}\big\rangle_{L^2} \leq 0.$$

Следовательно, $\|u_*\|_2 \leq N$.
Для каждого $t \in [0,1]$, имеем

$$|u_*(t)| \leq \int_0^1 |G(t,s)||f_*(s)|ds \leq \int_0^1 |f_*(s)|ds \leq \|f_*\|_2.$$

Из $(Q2)$ следует, что для любого $t \in [0,1]$

$$|u_*(t)| \leq \|f_*\|_2 \leq \|Q(u_*)\|_2 \leq q(1+N^p),$$

поэтому, $\|u_*\|_C \leq q(1+N^p)$.

Теперь пусть $R = qN^p + q + 1$. Рассмотрим мультиотображение

$$\Psi\colon B_C(0,R) \times [0,1] \to K(C[0,1]),$$

$$\Psi(u,\lambda) = j \circ \big((1-\lambda)\delta u + \lambda Q(u)\big),$$

где $0 < \delta < \frac{1}{N}$ - достаточно малое число.

Покажем, что Ψ является компактным $CJ-$мультиотображением. В самом деле, из $(Q1)$ следует, что мы можем представить мультиотображение $j \circ Q$ как $\varphi \circ F \in CJ(C[0,1]; C[0,1])$, где $F\colon C[0,1] \to K(Y)$ является $J-$мультиотображением из $C[0,1]$ в некоторое метрическое пространство Y и $\varphi\colon Y \to C[0,1]$ является непрерывным отображением. Определим мультиотображение

$$\widetilde{F}\colon B_C(0,R) \times [0,1] \to K(C[0,1] \times Y \times \mathbb{R}),$$
$$\widetilde{F}(u,\lambda) = \{u\} \times F(u) \times \{\lambda\},$$

и отображение

$$\widetilde{\varphi}\colon C[0,1] \times Y \times \mathbb{R} \to K(C[0,1]),$$
$$\widetilde{\varphi}(u,v,\lambda) = \delta(1-\lambda)ju + \lambda\varphi(v).$$

Ясно, что $\widetilde{F}$ является $J-$мультиотображением, $\widetilde{\varphi}$ является непрерывным и для каждого $(u,\lambda) \in B_C(0,R) \times [0,1]$ имеем $\Psi(u,\lambda) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{F}(u,\lambda)$. Поэтому, Ψ является $CJ-$мультиотображение. Далее, множества $j \circ Q\big(B_C(0,R)\big)$ и $j(B_C(0,R))$ являются относительно компактными в $C[0,1]$, следовательно, $\Psi\big(B_C(0,R) \times [0,1]\big)$ тоже является относительно компактным множеством в $C[0,1]$. Поэтому, мультиотображение Ψ компактно.

Покажем теперь, что Ψ не имеет неподвижных точек на границе $\partial B_C(0,R) \times [0,1]$. Предположим противное, что существует пара $(u_*, \lambda_*) \in \partial B_C(0,R) \times [0,1]$ такая, что $u_* \in \Psi(u_*, \lambda_*)$. Тогда найдется функция $f_* \in Q(u_*)$ такая, что

$$u_*(t) = \int_0^1 G(t,s)\Big((1-\lambda_*)\delta u_*(s) + \lambda_* f_*(s)\Big)ds, \ \forall t \in [0,1], \tag{5.1.1}$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} u_*''(t) = (1-\lambda_*)\delta u_*(t) + \lambda_* f_*(t), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ u_*(0) = u_*(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Предположим, что $\|u_*\|_2 \le N$. Тогда из (5.1.1) имеем

$$|u_*(t)| \le \delta(1-\lambda_*)\|u_*\|_2 + \lambda_*\|f_*\|_2 \le \delta(1-\lambda_*)N + \lambda_* q(1+N^p) < R,$$

для всех $t \in [0,1]$. Отсюда, $u_* \notin \partial B_C(0,R)$, что есть противоречие. Последовательно, $\|u_*\|_2 > N$. Из (5.1.2) следует, что

$$\big\langle u_*'', u_* \big\rangle_{L^2} = \delta(1-\lambda_*)\big\langle u_*, u_* \big\rangle_{L^2} + \lambda_* \big\langle u_*, f_* \big\rangle_{L^2} > 0,$$

что есть противоречие.

Таким образом, Ψ является гомотопией, соединяющей $\Psi(\cdot,0) = \delta j \circ i$ и $\Psi(\cdot,1) = j \circ Q$, где i обозначает отображение вложения. В силу гомотопической инвариантности топологической степени имеем

$$deg\big(i - j\circ Q, B_C(0,R)\big) = deg\big(i - \delta j \circ i, B_C(0,R)\big).$$

Для достаточно малых $\delta > 0$ выполнено

$$\|u - (u - \delta j u)\|_C = \delta \|ju\|_C < \|u\|_C$$

для всех $u \in \partial B_C(0,R)$.
Отсюда, векторные поля i и $i - \delta j \circ i$ гомотопны на $\partial B_C(0,R)$ (см. Лемму 1.4.4), поэтому

$$deg(i - j\circ Q, B_C(0,R)) = deg(i - \delta\, j \circ i, B_C(0,R)) = deg(i, B_C(0,R)) = 1.$$

Отсюда, задача (5.0.1) имеет решение $u \in B_C(0,R)$. □

Введем теперь понятие ограничивающей функции для задачи (5.0.1). Заметим, что для любой непрерывной функции $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отображение

$$V^\sharp\colon C[0,1] \to L^2[0,1],\ V^\sharp(u)(t) = V(u(t)),$$

тоже непрерывно.

Определение 5.1.1. *Непрерывная функция $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется интегральной ограничивающей функцией для задачи (5.0.1), если*

$(V1)$ *существуют $\alpha \ge 0$ и $\beta > 0$ такие, что*

$$|V(t)| \le \alpha + \beta|t|, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

$(V2)$ *существует* $N > 0$ *такое, что для любой функции* $u \in C[0,1]$ *из* $\|u\|_2 > N$, *следует, что*

$$\left\langle V^{\sharp}(u), f \right\rangle_{L^2} > 0 \text{ для всех } \ f \in Q(u),$$

$(V3)$ *для любой функции* $u \in W_0^{2,2}[0,1]$, *из* $\|u\|_2 > N$ *следует, что*

$$\left\langle u'', V^{\sharp}(u) \right\rangle_{L^2} \leq 0,$$

где N *- константа из* $(V2)$.

Теорема 5.1.2. *Пусть выполнены условия* $(Q1) - (Q2)$. *Предположим, что существует интегральная ограничивающая функция для задачи (5.0.1). Тогда задача (5.0.1) имеет решение.*

Доказательство. Пусть $R = qN^p + q + 1$ и рассмотрим мультиотображение

$$\Psi \colon B_C(0,R) \times [0,1] \to K(C[0,1]),$$

$$\Psi(u,\lambda) = j \circ \big((1-\lambda)\delta V^{\sharp}(u) + \lambda Q(u)\big),$$

где δ, $0 < \delta < \frac{1}{\alpha+\beta N}$ - произвольное число и N - константа в $(V2)$.
Как показано в доказательстве Теоремы 5.1.1, нам нетрудно проверить, что Ψ является $CJ-$мультиотображением. Из $(Q2)$ и $(V1)$ следует, что множества $Q\big(B_C(0,R)\big)$ и $V^{\sharp}\big(B_C(0,R)\big)$ являются ограниченными в $L^2[0,1]$. Так как оператор j является вполне непрерывным, множества $j \circ Q\big(B_C(0,R)\big)$ и $j \circ V^{\sharp}\big(B_C(0,R)\big)$ являются относительно компактными в $C[0,1]$. Отсюда, множество $\Psi\big(B_C(0,R) \times [0,1]\big)$ является относительно компактным в $C[0,1]$. Поэтому, Ψ является компактным $CJ-$мультиотображением.

Покажем теперь, что мультиотображение Ψ не имеет неподвижных точек на $\partial B_C(0,R) \times [0,1]$. Предположим противное, что существует пара $(u_*, \lambda_*) \in \partial B_C(0,R) \times [0,1]$ такая, что $u_* \in \Psi(u_*, \lambda_*)$. Тогда найдется функция $f_* \in Q(u_*)$ такая, что

$$u_*(t) = \int_0^1 G(t,s)\Big((1-\lambda_*)\delta V(u_*(s)) + \lambda_* f_*(s)\Big)ds, \ \forall t \in [0,1], \tag{5.1.3}$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} u_*''(t) = (1-\lambda_*)\delta V(u_*(t)) + \lambda_* f_*(t), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ u_*(0) = u_*(1) = 0. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Предположим, что $\|u_*\|_2 \le N$. Тогда из $(Q2)$, $(V1)$ и (5.1.3) имеем

$$|u_*(t)| \le \delta(1-\lambda_*)\int_0^1 |V(u_*(t))|\,dt + \lambda_*\int_0^1 |f_*(t)|\,dt$$

$$\le \delta(1-\lambda_*)\int_0^1 (\alpha+\beta|u_*(t)|)\,dt + \lambda_*\|f_*\|_2$$

$$\le \delta(1-\lambda_*)\big(\alpha+\beta\|u_*\|_2\big) + \lambda_* q(1+N^p)$$

$$\le \delta(\alpha+\beta N) + q(1+N^p) < R,$$

для всех $t \in [0,1]$.
Поэтому, $u_* \notin \partial B_C(0,R)$, что есть противоречие.
Следовательно, $\|u_*\|_2 > N$. Отметим, что $u_* \in W_0^{2,2}[0,1] \subset C[0,1]$, тогда из $(V2)-(V3)$ и (5.1.4) следует, что

$$\big\langle u_*^{''}, V^\sharp(u_*)\big\rangle_{L^2} = \delta(1-\lambda_*)\big\langle V^\sharp(u_*), V^\sharp(u_*)\big\rangle_{L^2} + \lambda_*\big\langle V^\sharp(u_*), f_*\big\rangle_{L^2} > 0,$$

что есть противоречие.
Отсюда, Ψ является гомотопией и для достаточно малых $\delta > 0$ имеем

$$deg(i - j\circ Q, B_C(0,R)) = deg(i - \delta\, j\circ V^\sharp, B_C(0,R)) = deg(i, B_C(0,R)) = 1.$$

Таким образом, задача (5.0.1) имеет решение. □

5.2 Приложения

5.2.1 Уравнения с разрывными нелинейностями

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -u''(t) + g(u(t)) = \varphi(t, u(t)), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

где функции $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $\varphi\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

$(g1)$ g является непрерывной и существует $a > 0$ такое, что

$$|g(x)| \le a(1+|x|),$$

для всех $x \in \mathbb{R}$;

($\varphi 1$) для п.в. $t \in [0,1]$ существуют конечные пределы

$$\underline{\varphi}(t,\xi) = \liminf_{\xi' \to \xi} \varphi(t,\xi'); \qquad \overline{\varphi}(t,\xi) = \limsup_{\xi' \to \xi} \varphi(t,\xi')$$

и функции $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$ являются суперпозиционно-измеримыми, т.е. функции $\underline{\varphi}(t,\psi(t))$, $\overline{\varphi}(t,\psi(t))$ являются измеримыми для каждой измеримой функции $t \to \psi(t)$;

($\varphi 2$) существуют функции $f_*, f^* \in L^2[0,1]$ такие, что

$$f_*(t) \le \varphi(t,\xi) \le f^*(t)$$

для п.в. $t \in [0,1]$ и всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Напомним (см., например [102]), что функции Каратеодори и измеримые функции по Борелю принадлежат классу суперпозиционно-измеримых функций.

Обозначим через $[f_*, f^*] \subset L^2[0,1]$ интервал

$$[f_*, f^*] = \{f \in L^2[0,1] : f_*(t) \le f(t) \le f^*(t) \text{ для п.в. } t \in [0,1]\}$$

и определим мультиотображение $\Phi : C[0,1] \to Cv(L^2[0,1])$ так

$$\Phi(u) = \big[\underline{\varphi}(x,u(x)), \overline{\varphi}(x,u(x))\big].$$

Следуя [[34], Теорема 1.1] можно показать, что мультиотображение Φ полунепрерывно сверху. Поэтому, мы можем заменить задачу (5.2.1) следующим операторным включением

$$u'' \in \widetilde{g}(u) - \Phi(u),$$

решения которого называются обобщенными решениями для задачи (5.2.1), где $\widetilde{g}\colon C[0,1] \to C[0,1]$,

$$\widetilde{g}(u)(t) = g(u(t)),\ t \in [0,1].$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение $Q(u) = \widetilde{g}(u) - \Phi(u)$ удовлетворяет условиям $(Q1) - (Q2)$. Отсюда, в силу Теоремы 5.1.1 мы получаем достаточные условия для существования решений задачи (5.2.1).

Заметим, что задачи вида (5.2.1) появляются во многих проблемах математической физики. Например, проблема Лаврентьева об отрывных течениях в одномерном пространстве может быть описана следующим уравнением (ср. [103]):

$$-u''(t) + g(u(t)) = \mu\, sign(u(t)),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где $\mu > 0$.

Здесь

$$\underline{\varphi}(t,\xi) = \begin{cases} \mu, & \xi > 0, \\ -\mu, & \xi \leq 0; \end{cases}$$

и

$$\overline{\varphi}(t,\xi) = \begin{cases} \mu, & \xi \geq 0, \\ -\mu, & \xi < 0. \end{cases}$$

Напомним, что задача (5.2.1) имеет вид элиптических уравнений, изучаемых в [103] для случая, когда нелинейность $\varphi - g$ является "сильно"ограниченной, т.е.,

$$|\varphi(t,x) - g(x)| \leq \beta < \infty$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,1]$. Поэтому, здесь мы получаем более общий результат. Кроме того, задача (5.2.1) может быть переписана в виде

$$Au(x) + h(u)(x) = \varphi(x, u(x)), \tag{5.2.2}$$

где $Au = -u'' - u$, $h(u) = \widetilde{g}(u) + u$. Ясно, что A является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса. Достаточные условия для

существования решений уравнения, содержащего линейный фредгольмовый оператор нулевого индекса и разрывную нелинейность типа (5.2.2) показаны в [122] для случая, когда существуют конечные пределы

$$h(-\infty) = \lim_{r\to-\infty} h(r); \qquad h(+\infty) = \lim_{r\to+\infty} h(r),$$

и

$$h(-\infty) \le h(r) \le h(+\infty)$$

для всех $r \in \mathbb{R}$. Поэтому, в общем, мы не можем применить резельтаты, доказанные в [122], к нашей ситуации. Приведем теперь пример для иллюстрации.

Пример 5.2.1. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} -u''(t) + (\mu^2+1)u(t) + \mu + 1 = \mu\, sign(u(t)),\ \mu > 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.2.3}$$

или эквивалентно,

$$\begin{cases} u'' \in Q(u) = g(u) - \Phi(u), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

где Φ *определена как выше и* $g(u) = (\mu^2+1)u + \mu + 1$.

Для каждой функции $f \in Q(u)$ *существует* $\omega \in \Phi(u)$ *такая, что*

$$f = (\mu^2+1)u + \mu + 1 - \omega.$$

Отметим, что $\omega \in \big[-\mu, \mu\big]$. *Имеем*

$$\begin{aligned} \big\langle f, u\big\rangle_{L^2} &= \big\langle (\mu^2+1)u + \mu + 1 - \omega, u\big\rangle_{L^2} \\ &\ge (\mu^2+1)\|u\|_2^2 - (\mu+1)\|u\|_2 - \|\omega\|_2\|u\|_2 \\ &\ge (\mu^2+1)\|u\|_2^2 - (2\mu+1)\|u\|_2 > 0 \end{aligned}$$

при $\|u\|_2 > \frac{2\mu+1}{\mu^2+1}$.
В силу Теоремы 5.1.1 задача (5.2.3) имеет решение.

5.2.2 Краевые задачи

Рассмотрим теперь краевую задачу типа

$$\begin{cases} u''(t) - \lambda u \in F(t, u(t)), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.2.4}$$

где $\lambda > 0$ и $F\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ - верхнее Каратеодори мультиотображение, удовлетворяющее условию:

$$\|F(t,x)\| \leq K(1 + |x|), \text{ для всех } x \in \mathbb{R} \text{ и п.в. } t \in [0,1],$$

для некоторого $K > 0$.

Теорема 5.2.1. *При каждом $\lambda > K$ задача (5.2.4) имеет решение.*

Доказательство. Задача (5.2.4) может быть переписана в виде задачи (5.0.1), где $Q(u) = \lambda u + \mathcal{P}_F(u)$. Ясно, что мультиотображение Q удовлетворяет условиям $(Q1) - (Q2)$.

Пусть $\lambda > K$, для каждой функции $f \in Q(u)$ существует $\omega \in \mathcal{P}_F(u)$ такая, что $f = \lambda u + \omega$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle f, u \rangle_{L^2} &= \lambda \langle u, u \rangle_{L^2} + \langle \omega, u \rangle_{L^2} \\ &\geq \lambda \|u\|_2^2 - \int_0^1 K|u(s)|(1 + |u(s)|)ds \\ &\geq (\lambda - K)\|u\|_2^2 - K\|u\|_2 > 0, \end{aligned}$$

при $\|u\|_2 > \frac{K}{\lambda - K}$. В силу Теоремы 5.1.1 задача (5.2.4) имеет решение. □

5.2.3 Дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} v''(t) = \frac{g(t)}{\left(v^2(t)+1\right)^{\mu}} - \frac{h(t)}{\left(v^2(t)+1\right)^{\lambda}} + f(v(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{5.2.5}$$

где $\mu, \lambda > 0$; $g, h \in L^2[0,1]$ и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция.

Теорема 5.2.2. *Предположим, что существуют $c > 0$ и $d \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$f(x) = cx + d \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Тогда уравнение (5.2.5) имеет решение.

Доказательство. Перепишем задачу (5.2.5) в виде

$$v = j \circ \gamma(v),$$

где $\gamma\colon C[0,1] \to L^2[0,1]$,

$$\gamma(v)(t) = \frac{g(t)}{(v^2(t)+1)^\mu} - \frac{h(t)}{(v^2(t)+1)^\lambda} + f(v(t)).$$

Оператор γ удовлетворяет условиям $(Q1) - (Q2)$ и

$$\begin{aligned}\big\langle v, \gamma(v)\big\rangle_{L^2} &= \int_0^1 \frac{g(t)v(t)}{(v^2(t)+1)^\mu}dt - \int_0^1 \frac{h(t)v(t)}{(v^2(t)+1)^\lambda}dt + \int_0^1 v(t)f(v(t))dt \\ &\geq c\|v\|_2^2 - |d|\int_0^1 |v(s)|ds - \int_0^1 \frac{|g(t)v(t)|}{(v^2(t)+1)^\mu}dt - \int_0^1 \frac{|h(t)v(t)|}{(v^2(t)+1)^\lambda}dt \\ &\geq c\|v\|_2^2 - (|d| + \|g\|_2 + \|h\|_2)\|v\|_2 > 0,\end{aligned}$$

при

$$\|v\|_2 > \frac{|d| + \|g\|_2 + \|h\|_2}{c}.$$

Из Теоремы 5.1.1 следует, что уравнение (5.2.5) имеет решение. □

5.2.4 Управляемые системы

Рассмотрим управляемую систему вида:

$$\begin{cases} u''(t) - \lambda u(t) = f(t, u(t), v(t)), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ v'(t) \in G(t, v(t), u(t)), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, v(0) = v_0, \end{cases} \tag{5.2.6}$$

где $v_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - отображение Каратеодори и $G\colon [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ - верхнее Каратеодори мультиотображение.

Предположим, что

$(A1)$ существует $\alpha > 0$ такое, что

$$|f(t,x,y)| \le \alpha(1+|x|+|y|)$$

для всех $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,1]$;

$(A2)$ существует $\beta > 0$ такое, что

$$\|G(t,x,y)\| = \max\{|z|\colon z \in G(t,x,y)\} \le \beta(1+|x|+|y|)$$

для всех $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,1]$.

Известно, что для каждой функции $u \in C[0,1]$ множество Φ_u всех решений задачи

$$\begin{cases} v'(t) \in G(t, v(t), u(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,1] \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

является $R_\delta-$множеством в $C[0,1]$ и мультиотображение

$$\Phi\colon C[0,1] \to K(C[0,1]),\ \Phi(u) = \Phi_u,$$

полунепрерывно сверху.

Под решением задачи (5.2.6) мы понимаем функцию $u \in W_0^{2,2}[0,1]$ такую, что существует абсолютно непрерывная функция $v \in \Phi(u)$ такая, что

$$u''(t) - \lambda u(t) = f(t, u(t), v(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,1].$$

Теорема 5.2.3. *Пусть выполнены условия* $(A1)-(A2)$. *Тогда для каждого*

$$\lambda > \alpha(1+\beta e^{\beta})$$

управляемая задача (5.2.6) имеет решение.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Phi}\colon C[0,1] \to K(C[0,1]\times C[0,1])$

$$\widetilde{\Phi}(u) = \{u\}\times\Phi(u),$$

и $\widetilde{f}\colon C[0,1]\times C[0,1] \to L^2[0,1]$,

$$\widetilde{f}(u,v)(t) = \lambda u(t) + f(t, u(t), v(t)),\ t \in [0,1].$$

Тогда мы можем заменить задачу (5.2.6) следующей задачей

$$\begin{cases} u'' \in Q(u), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.2.7}$$

где $Q\colon C[0,1] \to K(L^2[0,1])$,

$$Q(u) = \widetilde{f} \circ \widetilde{\Phi}(u).$$

Из непрерывности оператора $\widetilde{f}$ и $\widetilde{\Phi} \in J(C[0,1]; C[0,1] \times C[0,1])$ следует, что

$$j \circ Q \in CJ(C[0,1]; C[0,1]).$$

Пусть $g \in Q(u)$, тогда существует функция $v \in \Phi(u)$ такая, что

$$g(s) = \widetilde{f}(u,v)(s) = \lambda u(s) + f(s, u(s), v(s)), \ \forall s \in [0,1].$$

Из $v \in \Phi(u)$ следует, что найдется функция $h \in L^1[0,1]$ такая, что

$$h(t) \in G(t, v(t), u(t)) \ \text{ для п.в. } t \in [0,1],$$

и

$$v(t) = v_0 + \int_0^t h(s)ds, \ \ 0 \le t \le 1.$$

В силу $(A2)$ для любого $t \in [0,1]$ выполнено

$$|v(t)| \le |v_0| + \int_0^t |h(s)|ds \le |v_0| + \int_0^t \beta(1 + |v(s)| + |u(s)|)ds$$

$$\le |v_0| + \beta + \beta\|u\|_2 + \int_0^t \beta|v(s)|ds.$$

Из Леммы 1.1.1 следует, что

$$|v(t)| \le (|v_0| + \beta + \beta\|u\|_2)\, e^{\beta}, \ \ \forall t \in [0,1].$$

Применяя $(A2)$ получаем

$$\|g\|_2^2 = \int_0^1 g^2(s)ds = \int_0^1 \Big(\lambda u(s) + f\big(s, u(s), v(s)\big)\Big)^2 ds$$

$$\le \int_0^1 (\lambda^2 + 1)\Big(u^2(s) + f^2\big(s, u(s), v(s)\big)\Big)ds$$

$$\le (\lambda^2 + 1)\Big(\|u\|_2^2 + \int_0^1 \alpha^2(1 + |u(s)| + |v(s)|)^2 ds\Big)$$

$$\leq (\lambda^2+1)\Big(\|u\|_2^2+\int_0^1 3\alpha^2\big(1+u^2(s)+v^2(s)\big)ds\Big)$$

$$\leq (\lambda^2+1)\Big(\big(1+3\alpha^2\big)\|u\|_2^2+3\alpha^2+3\alpha^2\big(|v_0|+\beta+\beta\|u\|_2\big)^2e^{2\beta}\Big).$$

Следовательно, мультиотображение Q удовлетворяет $(Q2)$.

Теперь для каждой функции $u \in C[0,1]$, выбирая произвольную функцию $g \in Q(u)$, имеем

$$\begin{aligned}
\big\langle g,u\big\rangle_{L^2} &= \int_0^1 u(s)\Big(\lambda u(s)+f\big(s,u(s),v(s)\big)\Big)ds \\
&\geq \lambda\|u\|_2^2-\int_0^1 |f(s,u(s),v(s))|\,|u(s)|ds \\
&\geq \lambda\|u\|_2^2-\alpha\int_0^1 |u(s)|\big(1+|u(s)|+|v(s)|\big)ds \\
&\geq (\lambda-\alpha)\|u\|_2^2-\alpha\int_0^1 |u(s)|ds-\alpha e^{\beta}\big(|v_0|+\beta+\beta\|u\|_2\big)\int_0^1 |u(s)|ds \\
&\geq (\lambda-\alpha-\alpha\beta e^{\beta})\|u\|_2^2-\alpha\big(1+e^{\beta}(|v_0|+\beta)\big)\|u\|_2>0
\end{aligned}$$

при

$$\|u\|_2>\frac{\alpha\big(1+e^{\beta}(|v_0|+\beta)\big)}{\lambda-\alpha(1+\beta e^{\beta})}.$$

В силу Теоремы 5.1.1 задача (5.2.7), и следовательно управляемая задача (5.2.6), имеет решение. □

5.2.5 Модель движения частицы в одномерном потенциале

Известно, что для частицы в одномерном потенциале энергии V, уравнение Шрёдингера (независящее от времени) имеет вид:

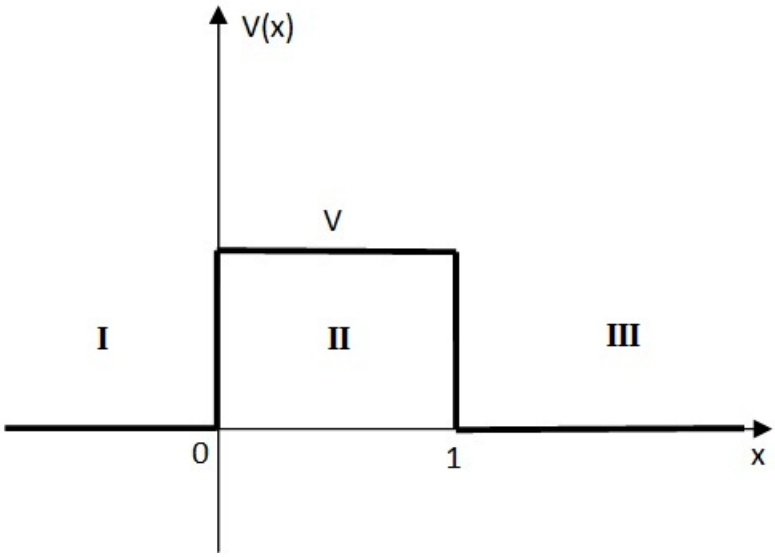
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Psi''(x)+V(x)\Psi(x)=E\Psi(x), \tag{5.2.8}$$

где m - масса частицы, $\hbar$ - константа Планка, E - общая энергия частицы, $V(x)$ - потенциальная энергия в состоянии x и $\Psi(x)$ - волновая функция.

Здесь рассмотрим функцию потенциальной энергии в виде:

$$V(x) = \begin{cases} V, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где V - константа.



Тогда, уравнение (5.2.8) может быть рассмотрено в трех областях:

$$I\,(x < 0),\ II\,(0 \le x \le 1) \text{ и } III\,(x > 1).$$

Соответствующие решения уравнения (5.2.8) в первой и третьей областях являются

$$\Psi_I(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad \text{и} \quad \Psi_{III}(x) = C \sin kx + D \cos kx,$$

где $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ и A, B, C, D являются константами.

Поэтому, мы обратим внимание на уравнении (5.2.8) во второй области. Во второй области уравнение Шрёдингера имеет вид:

$$\Psi''_{II}(x) = \frac{2m}{\hbar^2} V \Psi_{II}(x) - \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_{II}(x). \tag{5.2.9}$$

Предположим, что потенциал V связывает с волновой функцией Ψ_{II} отношение:

$$V \in F(\Psi_{II}), \tag{5.2.10}$$

где $F\colon L^2[0,1] \to K(\mathbb{R}_+)$ является $J-$мультиотображением, $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$.

Из непрерывности функции Ψ следует, что в области II граничными условиями для уравнения (5.2.9) являются:

$$\Psi_{II}(0) = \Psi_I(0) = B \quad \text{и} \quad \Psi_{II}(1) = \Psi_{III}(1) = C\sin k + D\cos k. \tag{5.2.11}$$

Под решением задачи (5.2.9)-(5.2.11) мы понимаем функцию $\Psi_{II} \in W^{2,2}[0,1]$ для которой существует $V \in F(\Psi_{II})$ такое, что уравнение (5.2.9) и условие (5.2.11) выполнены.

Теорема 5.2.4. *Пусть существуют $a, b > 0$ такие, что*

$$F(u) \subseteq \Big[a\|u\|_2,\ b(1+\|u\|_2)\Big] \text{ для всех } u \in L^2[0,1].$$

Тогда задача (5.2.9)-(5.2.11) имеет решение.

Доказательство. Пусть $\alpha = B$, $\beta = C\sin k + D\cos k$ и $g(x) = \beta x + \alpha(1-x)$. Для каждого $x \in [0,1]$ пусть $\varphi(x) = \Psi_{II}(x) - g(x)$. Тогда задача (5.2.9)-(5.2.11) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\varphi(x)+g(x)) - \frac{2m}{\hbar^2}E(\varphi(x)+g(x)), \\ V \in F(\varphi+g), \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \end{cases}$$

или эквивалентно,

$$\varphi \in j \circ Q(\varphi), \tag{5.2.12}$$

где

$$Q(\varphi) = \frac{2m}{\hbar^2}(\varphi+g)F(\varphi+g) - \frac{2m}{\hbar^2}E(\varphi+g),$$

и оператор j определен в параграфе 5.1.

Нетрудно видеть, что мультиотображение Q удовлетворяет условиям $(Q1)-(Q2)$. Для каждой функции $w \in Q(\varphi)$ существует $V \in F(\varphi+g)$ такое, что

$$w = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\varphi + \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)g.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \big\langle \varphi, w \big\rangle_{L^2} &= \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\,\|\varphi\|_2^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\big\langle g, \varphi\big\rangle_{L^2} \\ &\geq \frac{2m}{\hbar^2}(a\|\varphi+g\|_2 - E)\,\|\varphi\|_2^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V\|g\|_2\|\varphi\|_2 - \frac{2m}{\hbar^2}E\|g\|_2\|\varphi\|_2 \end{aligned}$$

$$\geq \frac{2m}{\hbar^2}\big(a\|\varphi\|_2 - a\|g\|_2 - E\big)\,\|\varphi\|_2^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\big(b + b\|\varphi\|_2 + b\|g\|_2\big)\|g\|_2\|\varphi\|_2$$
$$-\frac{2m}{\hbar^2}E\|g\|_2\|\varphi\|_2.$$

Следовательно,

$$\big\langle \varphi, w\big\rangle_{L^2} \geq \frac{2m}{\hbar^2}a\|\varphi\|_2^3 - \frac{2m}{\hbar^2}\big(a\|g\|_2 + E + b\|g\|_2\big)\|\varphi\|_2^2$$
$$-\frac{2m}{\hbar^2}\|g\|_2\big(b + b\|g\|_2 + E\big)\|\varphi\|_2 > 0$$

при достаточно больших $\|\varphi\|_2$.

Из Теоремы 5.1.1 следует, что включение (5.2.12), и поэтому задача (5.2.9)-(5.2.11), имеет решение. □

5.3 Существование решений в бесконечномерном гильбертовом пространстве

5.3.1 Абстрактная задача

Пусть H - гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$, пусть H_n - $n-$мерное подпространство пространства H с базисом $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ и P_n - проекция из H на H_n. Пусть $I = [0,1]$. Символ $\big\langle f, g\big\rangle_{L^2}$ обозначает скалярное произведение в $L^2(I,H)$. Рассмортрим пространство Соболева $W^{k,2}(I,H)$ и его подпространство

$$W_0^{k,2}(I,H) = \{u \in W^{k,2}(I,H)\colon u(0) = u(1) = 0\}.$$

Заметим, что для $k \geq 1$ вложение $W^{k,2}(I,H) \hookrightarrow C(I,H)$ является непрерывным (но не является компактным). Слабая сходимость в $W^{k,2}(I,H)$ $[L^2(I,H)]$ обозначается через $u_n \overset{W^{k,2}}{\rightharpoonup} u_0$ [соответственно, $f_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} f_0$].

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $J_n\colon L^2(I,H) \to C(I,H_n)$,

$$J_n(f)(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 G(t,s)f_{(k)}(s)ds\right)e_k,$$

где функция $G(t,s)$ определяется в параграфе 5.1 и

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{(k)}(t) e_k, \quad \text{для всех} \quad t \in I.$$

Ясно, что оператор J_n является вполне непрерывным и для каждого $t \in I$ имеем

$$\begin{aligned} \|J_n(f)(t)\|_H &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 G(t,s) f_{(k)}(s) ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \int_0^1 G^2(t,s) ds \int_0^1 f_{(k)}^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^n f_{(k)}^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \|f(s)\|_H^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Для $n \in \mathbb{N}$, определим снова оператор $\mathbb{P}_n : L^2(I,H) \to L^2(I,H_n)$,

$$(\mathbb{P}_n f)(t) = P_n f(t), \quad \text{для п.в. } t \in I.$$

Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{cases} u'' \in Q(u), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.3.2}$$

где мультиотображение $Q\colon C(I,H) \to C(L^2(I,H))$ удовлетворяет условиям:

$(Q1)'$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ сужение $(J_m \circ Q)_{|C(I,H_m)}$ принадлежит классу $CJ\big(C(I,H_m); C(I,H_m)\big)$;

$(Q2)'$ существуют числа $p_1, q_1 > 0$ такие, что

$$\|Q(u)\|_2 \leq q_1(1 + \|u\|_2^{p_1})$$

для всех $u \in C(I,H)$;

$(Q3)$ для любого ограниченного замкнутого выпуклого подмножества $M \subset W_0^{2,2}(I,H)$, если существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{u_k\}$, $u_k \in M \cap W_0^{2,2}(I,H_{n_k})$ такие, что

$$u_k'' \in \mathbb{P}_{n_k} Q(u_k),$$

то найдется $u_* \in M$ такая, что $u_*^{''} \in Q(u_*)$.

Под решением задачи (5.3.2) мы понимаем функцию $u \in W_0^{2,2}(I,H)$, для которой существует функция $f \in Q(u)$ такая, что

$$u''(t) = f(t) \text{ для п.в. } t \in [0,1].$$

Теорема 5.3.1. *Пусть выполнены условия* $(Q1)'-(Q2)'$ *и* $(Q3)$. *Предположим, что существует* $N > 0$ *такое, что для любой функции* $u \in C(I,H)$ *из* $\|u\|_2 > N$ *следует, что*

$$\langle u, f \rangle_{L^2} > 0 \ \text{ для всех } \ f \in Q(u). \tag{5.3.3}$$

Тогда задача (5.3.2) имеет решение.

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} u'' \in \mathbb{P}_n Q(u), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что эта задача эквивалентна следующей задаче о неподвижных точках

$$u \in \Sigma_n(u), \tag{5.3.4}$$

где $\Sigma_n \colon C(I,H_n) \to K(C(I,H_n))$, $\Sigma_n(u) = J_n \circ Q(u)$.

Из $(Q1)' - (Q2)'$ следует, что Σ_n является вполне полунепрерывным сверху $CJ-$мультиотображением.

Предположим, что $u \in C(I,H_n)$ - решение задачи (5.3.4). Тогда существует функция $f \in Q(u)$ такая, что

$$u^{''}(t) = P_n f(t) \quad \text{для п.в.} \quad t \in I.$$

Имеем

$$\langle u, f \rangle_{L^2} = \langle u, \mathbb{P}_n f \rangle_{L^2} = \langle u, u'' \rangle_{L^2} \le 0.$$

Следовательно, $\|u\|_2 \le N$. Из $(Q2)'$ и (5.3.1) следует, что

$$\|u\|_C \le q_1(1 + N^{p_1}).$$

Теперь пусть $R = q_1 N^{p_1} + q_1 + 1$ и определим мультиотображение

$$\Psi_n \colon B_C^{(n)}(0,R) \times [0,1] \to K(C(I,H_n)),$$
$$\Psi_n(u,\lambda) = J_n \circ \big(\delta(1-\lambda)u + \lambda Q(u)\big),$$

где $0 < \delta < \frac{1}{N}$ и $B_C^{(n)}(0,R) = B_C(0,R) \cap C(I,H_n)$.

Следуя методу, примененному в доказательстве Теоремы 5.1.1, мы получаем, что Ψ_n является компактным $CJ-$мультиотображением, которое не имеет неподвижных точек на $\partial B_C^{(n)}(0,R) \times [0,1]$. Тогда для достаточно малых δ имеем

$$\begin{aligned} deg(i - J_n \circ Q, B_C^{(n)}(0,R)) &= deg(i - \delta J_n \circ i, B_C^{(n)}(0,R)) \\ &= deg(i, B_C^{(n)}(0,R)) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, существует функция $u_n \in B_C(0,R) \cap W_0^{2,2}(I,H_n)$ такая, что $u_n^{''} = \mathbb{P}_n Q(u_n)$. В силу $(Q3)$ найдется функция $u_* \in B_C(0,R) \cap W_0^{2,2}(I,H)$ такая, что

$$u_*^{''} \in Q(u_*).$$

Функция u_* является решением задачи (5.3.2). □

5.3.2 Применение к управляемой системе

Пусть $Y = C[0,h]$ и $H = W^{1,2}[0,h]$ $(h > 0)$. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} w''(t) = f(t, w(t), \varphi(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ \varphi'(t) \in G(t, \varphi(t), w(t)) \text{ для п.в. } t \in [0,1], \\ w(0) = w(1) = 0, \varphi(0) = 0, \end{cases} \tag{5.3.5}$$

где $f\colon I \times Y \times Y \to Y$ - непрерывное отображение и $G\colon I \times Y \times Y \to Cv(H)$ - мультиотображение.

Предположим, что отображение f и мультиотображение G удовлетворяют условиям:

$(f1)'$ сужение $f_{|_{I \times H \times Y}}$ принимает значения в H;

$(f2)'$ существует $c > 0$ такое, что

$$\|f(t,y,z)\|_H \leq c(1 + \|y\|_H + \|z\|_Y),$$

для всех $(y,z) \in H \times Y$ и п.в. $t \in I$;

$(G1)'$ мультиотображение G является верхним Каратеодори;

$(G2)'$ существует $d > 0$ такое, что

$$\|G(t, y, z)\|_H \leq d(1 + \|y\|_Y + \|z\|_Y)$$

для всех $(t, y, z) \in I \times Y \times Y$.

Под решением задачи (5.3.5) мы понимаем функцию $w \in W_0^{2,2}(I, H)$, для которой существует функция $\varphi \in W^{1,2}(I, H)$ такая, что

$$\begin{cases} \varphi'(t) \in G(t, \varphi(t), w(t)), \text{ для п.в. } t \in I, \\ \varphi(0) = 0, \end{cases}$$

и

$$w''(t) = f(t, w(t), \varphi(t)), \text{ для п.в. } t \in I.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 5.3.1. *(см. Теорему 70.12 [70]). Пусть E - сепарабельное банахово пространство и $\Phi\colon I \times E \to Kv(E)$ - мультиотображение, удовлетворяющее уловиям:*

$(\Phi 1)$ *для каждого $y \in E$ мультифункция $\Phi(\cdot, y)$ имеет измеримое сечение;*

$(\Phi 2)$ *для любого $t \in I$ мультиотображение $\Phi(t, \cdot)$ является вполне полунепрерывным сверху;*

$(\Phi 3)$ *множество $\Phi(A)$ компактно для любого компактного множества $A \subset I \times E$;*

$(\Phi 4)$ *существует $\omega \in L^1_+[0, 1]$ такая, что*

$$\|\Phi(t, y)\|_E \leq \omega(t)(1 + \|y\|_E),$$

для всех $(t, y) \in I \times E$.

Тогда множество решений задачи

$$\begin{cases} g'(t) \in \Phi(t, g(t)), \ t \in I, \\ g(0) = g_0 \in E, \end{cases}$$

является $R_\delta-$множеством в $C(I, E)$.

Теорема 5.3.2. *Пусть выполнены условия* $(f1)' - (f2)'$ *и* $(G1)' - (G2)'$. *Тогда задача (5.3.5) может быть представлена в виде задачи (5.3.2) с условиями* $(Q1)' - (Q2)'$ *и* $(Q3)$.

Доказательство. Заметим, что пространство Y сепарабельно и вложение $H \hookrightarrow Y$ компактно. Из $(G2)'$ следует, что для каждого $(t, y, z) \in I \times Y \times Y$ множество $G(t, y, z)$ ограничено в H, следовательно оно является компактным в Y.

Для $w \in C(I, H)$ рассмотрим мультиотображение

$$G_w \colon I \times Y \to Kv(Y),\ G_w(t, y) = G(t, y, w(t)).$$

Нетрудно проверить, что G_w удовлетворяет всем условиям $(\Phi 1) - (\Phi 4)$. Отметим, что условие $(\Phi 4)$ следует из $(G2)'$ и отношения

$$\|y\|_Y \leq \max\{\sqrt{h}, \frac{1}{\sqrt{h}}\}\|y\|_H, \quad \forall y \in H.$$

В силу Леммы 5.3.1 для каждой функции $w \in C(I, H)$ множество Ψ_w всех решений задачи

$$\begin{cases} \varphi'(t) \in G(t, \varphi(t), w(t)), & t \in I \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

является $R_\delta-$множеством в $C(I, Y)$.

Определим мультиоператор

$$\Psi \colon C(I, H) \to K(C(I, Y)),\ \Psi(w) = \Psi_w.$$

Следуя Лемме 2.4.3, можно показать, что мультиотображение Ψ является полунепрерывным сверху.

Теперь пусть $\widetilde{\Psi} \colon C(I, H) \to K\big(C(I, H) \times C(I, Y)\big)$,

$$\widetilde{\Psi}(w) = \{w\} \times \Psi(w),$$

и $\widetilde{f} \colon C(I, H) \times C(I, Y) \to L^2(I, H)$,

$$\widetilde{f}(w, \varphi)(t) = f(t, w(t), \varphi(t)).$$

Тогда задача (5.3.5) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} w'' \in Q(w), \\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases}$$

где $Q \colon C(I, H) \to K(L^2(I, H))$, $Q(w) = \widetilde{f} \circ \widetilde{\Psi}(w)$.

Покажем, что мультиотображение Q удовлетворяет условиям $(Q1)'$ – $(Q2)'$ и $(Q3)$.

В самом деле, из непрерывности отображения $\widetilde{f}$ и того, что

$$\widetilde{\Psi} \in J\Big(C(I,H); C(I,H) \times C(I,Y)\Big)$$

следует, что $Q \in CJ\big(C(I,H); L^2(I,H)\big)$. Поэтому, для каждого $n \in \mathbf{N}$ сужение

$$(J_n \circ Q)_{|_{C(I,H_n)}} \in CJ\big(C(I,H_n); C(I,H_n)\big).$$

Отсюда, условие $(Q1)'$ выполнено. Заметим, что условие $(Q2)'$ следует непосредственно из $(f2)'$, $(G2)'$ и Леммы 1.1.1.

Проверим теперь условие $(Q3)$. Пусть $M \subset W_0^{2,2}(I,H)$ - ограниченное, замкнутое, выпуклое множество и предположим, что существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{w_k\}$, $w_k \in M \cap W_0^{2,2}(I,H_{n_k})$ такие, что

$$w_k^{''} \in \mathbb{P}_{n_k} Q(w_k).$$

Множество $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено, поэтому оно является слабо компактным. Без ущерба для общности предположим, что

$$w_k \overset{W^{2,2}}{\rightharpoonup} w_0 \in M.$$

Следовательно, $w_k^{''} \overset{L^2}{\rightharpoonup} w_0^{''}$ и $w_k(t) \overset{H}{\rightharpoonup} w_0(t)$ для $t \in I$. Из компактного вложения $H \hookrightarrow Y$ следует, что

$$w_k(t) \overset{Y}{\to} w_0(t), \tag{5.3.6}$$

для любого $t \in I$.

Пусть $h_k \in Q(w_k)$ - последовательность такая, что

$$w_k^{''} = \mathbb{P}_{n_k} h_k.$$

В силу $(Q2)'$ множество $\{Q(w_k)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено, и отсюда, множество $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ тоже ограничено в $L^2(I,H)$. Следовательно, оно является слабо компактным. Предположим, что

$$h_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} h_0 \in L^2(I,H).$$

Следуя доказательству Теоремы 2.3.2 имеем $\mathbb{P}_{n_k} h_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} h_0$.
С другой стороны,

$$\mathbb{P}_{n_k} h_k = w_k^{''} \overset{L^2}{\rightharpoonup} w_0^{''}.$$

Поэтому, $w_0'' = f_0$, т.е., $h_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} w_0''$.

Из $h_k \in Q(w_k)$ следует, что существует последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k \in \Psi(w_k)$ такая, что

$$h_k(t) = f(t, w_k(t), \varphi_k(t)), \quad \text{для п.в. } t \in I. \tag{5.3.7}$$

Пусть $\widehat{W}^{1,2}(I,H) = \{u \in W^{1,2}(I,H) \colon u(0) = 0\}$. Ясно, что $\widehat{W}^{1,2}(I,H)$ является подпространством пространства $W^{1,2}(I,H)$. Множество $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено в $\widehat{W}^{1,2}(I,H)$, и поэтому, оно является слабо компактным. Предположим (без ущерба для общности), что

$$\varphi_k \overset{W^{1,2}}{\rightharpoonup} \varphi_0 \in \widehat{W}^{1,2}(I,H).$$

Следовательно,

$$\varphi_k' \overset{L^2}{\rightharpoonup} \varphi_0' \qquad \varphi_k(t) \overset{Y}{\to} \varphi_0(t), \text{ для любого } \quad t \in I. \tag{5.3.8}$$

Из $\varphi_k \in \Psi(w_k)$ следует, что существует $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(I,H)$ такая, что

$$g_k(t) \in G(t, \varphi_k(t), w_k(t)) \ \text{ для п.в. } \ t \in I,$$

и

$$\varphi_k'(t) = g_k(t) \ \text{ для п.в. } \ t \in I.$$

Поэтому, $g_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} \varphi_0'$. В силу Леммы Мазура существуют последовательности выпуклых комбинаций $\{\hat{g}_m\}$ и $\{\hat{h}_m\}$

$$\hat{g}_m = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_{mk} g_k, \ \lambda_{mk} \geq 0 \ \text{ и } \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_{mk} = 1,$$
$$\hat{h}_m = \sum_{k=m}^{\infty} \widetilde{\lambda}_{mk} h_k, \ \widetilde{\lambda}_{mk} \geq 0 \ \text{ и } \sum_{k=m}^{\infty} \widetilde{\lambda}_{mk} = 1,$$

которые сходятся в $L^2(I,H)$ к φ_0' и w_0'', соответственно. Мы снова предположим, что

$$\hat{g}_m(t) \overset{H}{\to} \varphi_0'(t) \ \text{ и } \ \hat{h}_m(t) \overset{H}{\to} w_0''(t) \tag{5.3.9}$$

для п.в. $t \in I$.

Из (5.3.6), (5.3.8) и $(G1)'$ следует, что для $t \in I$ и $\varepsilon > 0$ существует $i_0 = i_0(\varepsilon, t)$ такое, что

$$G(t, \varphi_i(t), w_i(t)) \subset O_{\varepsilon}^{H}\Big(G\big(t, \varphi_0(t), w_0(t)\big)\Big), \ \text{ для всех } i \geq i_0.$$

Тогда, $g_i(t) \in O_\varepsilon^H\Big(G\big(t, \varphi_0(t), w_0(y)\big)\Big)$ для всех $i \geq i_0$, и отсюда, из выпуклости множества $O_\varepsilon^H\Big(G\big(t, \varphi_0(t), w_0(t)\big)\Big)$ имеем

$$\hat{g}_m(t) \in O_\varepsilon^H\Big(G\big(t, \varphi_0(t), w_0(t)\big)\Big), \text{ для всех } m \geq i_0.$$

Таким образом, $\varphi_0^{'}(t) \in G(t, \varphi_0(t), w_0(t))$ для п.в. $t \in I$, т.е., $\varphi_0 \in \Psi(w_0)$.

Теперь в силу (5.3.6) и (5.3.8) имеем

$$\lim_{k\to\infty} f(t, w_k(t), \varphi_k(t)) = f(t, w_0(t), \varphi_0(t))$$

для п.в. $t \in I$.
Поэтому, для п.в. $t \in I$ и $\varepsilon > 0$ существует $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, t)$ такое, что

$$f(t, w_\tau(t), \varphi_\tau(t)) \in O_\varepsilon^Y\big(f(t, w_0(t), \varphi_0(t))\big), \text{ для всех } \tau \geq \tau_0.$$

Из (5.3.7) и (5.3.9) получаем, что

$$w_0^{''}(t) = f(t, w_0(t), \varphi_0(t)) \text{ для п.в. } t \in I.$$

Следовательно, условие $(Q3)$ выполнено. □

5.3.3 Пример

Пусть отображение f в (5.3.5) имеет вид:

$$f(t, w(t), \varphi(t)) = b + aw(t) + \widehat{f}(t, w(t), \varphi(t)),$$

где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ и $\widehat{f}\colon I \times Y \times Y \to H$ - непрерывное отображение.

Теорема 5.3.3. *Пусть выполнены условия $(G1)' - (G2)'$. Предположим, что отображение $\widehat{f}$ удовлетворяет $(f2)'$ и*

$(\widehat{f})$ $a > c(1 + dr^2e^{rd})$, *где* $r = \max\{\sqrt{h}, \frac{1}{\sqrt{h}}\}$ *и* c, d *- константы из* $(f2)'$ *и* $(G2)'$, *соответственно.*

Тогда задача (5.3.5) имеет решение.

Доказательство. Нетрудно видеть, что отображение f удовлетворяет условиям $(f1)' - (f2)'$. Отсюда, в силу Теоремы 5.3.2 мультиотображение Q удовлетворяет условиям $(Q1)' - (Q2)'$ и $(Q3)$.

Теперь для $w \in W_0^{2,2}(I,H)$ выбираем произвольно $\gamma \in Q(w)$. Тогда существует функция $\varphi \in \Psi(w)$ такая, что

$$\gamma = b + aw + f^*(w,\varphi),$$

где $f^*(w,\varphi)(t) = \widehat{f}(t, w(t), \varphi(t))$ для $t \in I$.

Из $\varphi \in \Psi(w)$ следует, что найдется функция $g \in L^2(I,H)$ такая, что

$$g(t) \in G(t, \varphi(t), w(t)) \ \text{ для п.в. } \ t \in I,$$

и

$$\varphi(t) = \int_0^t g(s)ds \ \ t \in I.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\|_H &\le \int_0^t \|g(s)\|_H ds \le d\int_0^t \left(1 + \|\varphi(s)\|_Y + \|w(s)\|_Y\right) \, ds \\ &\le d + dr\int_0^1 \|w(s)\|_H ds + \int_0^t rd\|\varphi(s)\|_H ds.\end{aligned}$$

Применяя Лемму 1.1.1 получаем, что

$$\|\varphi(t)\|_H \le \left(d + dr\int_0^1 \|w(s)\|_H ds\right) e^{rd} \ \text{ для всех } \ t \in I.$$

Отметим, что для каждого $s \in I$: $u = w(s)$ и $v = \widehat{f}(s, w(s), \varphi(s))$ являются элементами пространства H. Имеем

$$\begin{aligned}&\left\langle w(s), b + aw(s) + \widehat{f}(s, w(s), \varphi(s))\right\rangle_H \\ &= \left\langle u, b + au + v\right\rangle_H \\ &= \int_0^h a\big(u^2(\tau) + u'^2(\tau)\big)d\tau + b\int_0^h u(\tau)d\tau \\ &\qquad\qquad + \int_0^h \big(u(\tau)v(\tau) + u'(\tau)v'(\tau)\big)d\tau \\ &\ge a\|u\|_H^2 - b\sqrt{h}\|u\|_H - \|u\|_H\|v\|_H.\end{aligned}$$

Поэтому,

$$\left\langle w, \gamma\right\rangle_{L^2} = \int_0^1 \left\langle w(s), b + aw(s) + \widehat{f}(s, w(s), \varphi(s))\right\rangle_H ds$$

$$\ge \int_0^1 \left(a\|w(s)\|_H^2 - |b|\sqrt{h}\,\|w(s)\|_H - \|\widehat{f}(s, w(s), \varphi(s))\|_H\,\|w(s)\|_H\right) ds$$

$$\geq a\|w\|_2^2 - |b|\sqrt{h}\|w\|_2 - \int_0^1 \|w(s)\|_H \, c\big(1 + \|w(s)\|_H + \|\varphi(s)\|_Y\big)\, ds$$

$$\geq (a-c)\|w\|_2^2 - (b\sqrt{h}+c)\|w\|_2 - cr\int_0^1 \|w(s)\|_H \|\varphi(s)\|_H \, ds$$

$$\geq (a-c)\|w\|_2^2 - (b\sqrt{h}+c)\|w\|_2 - cr\int_0^1 \|w(s)\|_H \, ds \left(d + dr\int_0^1 \|w(s)\|_H ds\right) e^{rd}$$

$$\geq (a - c - cdr^2e^{rd})\|w\|_2^2 - (b\sqrt{h} + c + cdre^{rd})\|w\|_2 > 0$$

при

$$\|w\|_2 > \frac{b\sqrt{h} + c + cdre^{rd}}{a - c - cdr^2e^{rd}}.$$

Из Теоремы 5.3.1 мы заключаем, что задача (5.3.5) имеет решение. □

Публикации автора по теме диссертации

Монография

1. Nguyen Van Loi. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis /Valeri Obukhovskii, Pietro Zecca, Nguyen Van Loi, Sergei Kornev. -Berlin, Heidenberg: Springer-Verlag. -2013. -177p.

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ

2. Nguyen Van Loi. On two-parameter global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities / Nguyen Van Loi // Nonlinear Analysis: TMA. - 2015. - V.122. -P.83-99.

3. Nguyen Van Loi. On an A-bifurcation theorem with application to a system of integro-differential equations / Nguyen Van Loi, Zhenhai Liu, Valeri Obukhovskii // Fixed Point Theory. -2015. -V.16. -No.1. -P.127-142.

4. Nguyen Van Loi. A multiparameter global bifurcation theorem with application to feedback control systems / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Jen-Chih Yao // Fixed Point Theory. -2015. -V.16. -No.2. -P.353-370.

5. Nguyen Van Loi. Nonlocal problems for differential inclusions in Hilbert spaces / I. Benedetti, N.V. Loi, L. Malaguti // Set-Valued Var. Anal. -2014. -V.22. -No.3. -P.639-656.

6. Nguyen Van Loi. A Bifurcation of Solutions of Nonlinear Fredholm Inclusions Involving CJ-multimaps with Applications to Feedback

Control Systems / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Jen-Chih Yao // Set-Valued Var. Anal. -2013. -V.21. -P.247-269.

7. Nguyen Van Loi. On the Global Bifurcation of Periodic Solutions of Differential Inclusions in Hilbert Spaces / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Pietro Zecca // Nonlinear. Anal.: TMA. -2013. -V.76. -P.80-92.

8. Nguyen Van Loi. On Controllability of Duffing Equation / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // Appl. Math. Comp. -2013. -V.219. -P.10468-10474.

9. Nguyen Van Loi. Existence and Global Bifurcation of Periodic Solutions to Differential Variational Inequalities / Zhenhai Liu, Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // Int. J. Bifur. Chaos. -2013. -V.23. -No.7. 1350125.

10. Nguyen Van Loi. On nonlocal differential equations in Hilbert spaces / Nguyen Van Loi // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. –2013. – Т.18, вып.5. – С.2578-2580.

11. Nguyen Van Loi. On the Existence of Solutions for a Class of Second-order Differential Inclusions and Applications / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // J. Math. Anal. Appl. -2012. -V.385. -P.517-533.

12. Nguyen Van Loi. Non-smooth Guiding Functions and Periodic Solutions of Functional Differential Inclusions with Infinite Delay in Hilbert Spaces / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii, Pietro Zecca // Fixed Point Theory. - 2012. -V.13. -No.2. -P.565-582.

13. Nguyen Van Loi. Guiding Functions for Generalized Periodic Problems and Applications / Nguyen Van Loi, Valeri Obukhovskii // Appl. Math. Comp. -2012. -V.218. -P.11719-11726.

14. Nguyen Van Loi. Guiding Functions and Global Bifurcations of Periodic Solutions of Functional Differential Inclusions with Infinite Delay / Nguyen Van Loi // Topol. Meth. Nonl. Anal. -2012. -V.40. -P.359-370.

15. Nguyen Van Loi. Existence and Global Bifurcation of Solutions for a Class of Operator-Differential Inclusions / Valeri Obukhovskii, Nguyen Van Loi, Sergei Kornev // Differ. Equ. Dyn. Syst. -2012. - V.20. -No.3. -P.285-300.

16. Нгуен Ван Лой. Метод направляющих функций для дифференциальных включений в гильбертовом пространстве / Нгуен Ван Лой // Дифференциальные уравнения. –2010. –Т.46. –№10. – С.1433-1443.

17. Nguyen Van Loi. On the global bifurcation for solutions of linear fredholm inclusions with convex-valued perturbations / Nguyen Van Loi and Valeri Obukhovskii // Fixed Point Theory. –2009. –V.10. –No.2. –P.289-303.

18. Нгуен Ван Лой. О применении метода направляющих функций к задаче о бифуркации периодических решений дифференциальных включений / Нгуен Ван Лой, В.В. Обуховский // Вестник РУДН. Сер. Математика, Информатика, Физика. –2009. –№.4. –С.14-24.

Прочие публикации

19. Nguyen Van Loi. On two-parameter global bifurcation of periodic solutions for differential variational inequalities / Nguyen Van Loi // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Тезисов докладов. -Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". -2015. -вып.3. -С.6-7.

20. Nguyen Van Loi. Guiding function method for differential variational inequalities: The global bifurcation problem of periodic solutions /

Nguyen Van Loi // Workshop on Equilibrium and Fixed Point Problems: Theory and Algorithm. Ha Noi. VIASM. -2014. -P.19.

21. Nguyen Van Loi. Bounding function method and its applications / Nguyen Van Loi // International Workshop on Nonlinear and Variational Analysis. Kaohsiung Medical University. Kaohsiung. Taiwan. -2014.

22. Nguyen Van Loi. Global behavior of solutions to a class of feedback control systems / Nguyen Van Loi // Research and Comm. in Math. and Math. Sci. -2013. -V.2. -No.2. -P.77-93.

23. Nguyen Van Loi. On periodic oscillations for a class of feedback control systems in Hilbert spaces / Nguyen Van Loi // Discussiones Mathematicae: Differ. Inclusion. Control. Opt. -2013. -V.13. -P.205-219.

24. Нгуен Ван Лой. Метод направляющих функций в гильбертовом пространстве / Нгуен Ван Лой // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2010. Тезисы докладов. – Воронеж: ВорГУ. –2010. –С.108.

25. Нгуен Ван Лой. Интегральные включения типа Гаммерштейна в банаховом пространстве / Нгуен Ван Лой // Дифференциальные уравнения и топология. Тезисы докладов. – Москва. –2009. –С.155.

26. Нгуен Ван Лой. Глобальная бифуркация положительных решений уравнений, содержащих линейные фредгольмовы операторы и разрывные нелинейности / Нгуен Ван Лой // Современные проблемы прикладной математики и математического моделировния. Материалы III международной научной конференции. – Часть 2. – Воронеж: “Научная книга”.–2009. –С.155-156.

27. Нгуен Ван Лой. О применении метода интегральных направляющих

функций к задаче о бифуркации периодических решений дифференциальных включений / Нгуен Ван Лой // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. –2009. –Т.14. вып.4. –С.738-740.

28. Нгуен Ван Лой. О существовании решений для некоторых классов интегральных включений типа Гаммерштейна / Нгуен Ван Лой // Вестник ВГУ. сер. физ.-мат. -2006. -№.2. -С.169-173.

Литература

[1] Adly S. A stability theory for second-order nonsmooth dynamical systems with application to friction problems / S. Adly and D. Goeleven // J. Math. Pures Appl. -2004. -V.83. -No.9. -P.17-51.

[2] Affane D. A control problem governed by a second order differential inclusion / D. Affane, D. Azzam-Laouir // Appl. Anal. -2009. -V.88. -No.12. -P.1677-1690.

[3] Agarwal R.P. Oscillation theorems for second order differential inclusions / R.P. Agarwal, S.R. Grace, D. O'Regan // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. -2007. -V.1. -No.2. -P.85–88.

[4] Aizicovici S. Anti-periodic solutions to a class of nonlinear differential equations in Hilbert space / S. Aizicovici, N. H. Pavel // J. Funct. Anal. -1991. -V.99. -No.2. -P.387-408.

[5] Alexander J.C. Global bifurcation for solutions of equations involving several parameter multivalued condensing mappings / J.C. Alexander and P.M. Fitzpatrick // in: E. Fadell, G. Fournier (Eds.). Fixed Point Theory (Sherbrooke, Que.). -1980. (Lect. Notes Math. -1981. -V.886. -P.1-19.)

[6] Alexander J.C. Galerkin approximations in several parameter bifurcation problems / J.C. Alexander and P. M. Fitzpatrick // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. -1980. -V.87. -P.489–500.

[7] Alonso A.I. Complete guiding sets for a class of almost-periodic differential equations / A. I. Alonso, C. Núñez, and R. Obaya // J. Differential Equations. -2005. -V.208. -P.124-146.

[8] Andres J. On boundary values problems in Banach spaces / J. Andres, L. Malaguti, V. Taddei // Dyn. Sys. Appl. -2009. -V.18. -P.275-302.

[9] Andres J. Strictly localized bounding functions for vector second-order boundary value problems / J. Andres, L. Malaguti, M. Pavlačkova // Nonlinear Anal.:TMA. -2009. -V.71. -No.12. -P.6019-6028.

[10] Arutyunov A. V. Bifurcation Theorems via Second-Order Optimality Conditions / A. V. Arutyunov, A. F.Izmailov // J. Math. Anal. Appl. -2001. -V.262. -P.564 - 576.

[11] Appell J. Multi–valued superpositions / J. Appell, E. De Pascale, H.T. Nguyen, and P.P. Zabreiko // Dissertationes Math. -1995. -CCCXLV. -P.1–97.

[12] Aubin J.-P. Set-Valued Analysis / J.-P. Aubin and H. Frankowska. -Boston–Basel–Berlin: Birkhauser-Verlag. 1990.

[13] Aubin J.-P. Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. -Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[14] Avgerious E.P. Periodic solutions for second order differential inclusions with nonconvex and unbounded multifunction / E.P. Avgerinos, N.S. Papageorgiou, N. Yannakakis // Acta Math. Hungar. -1999. -V.83. -No.4. -P.303–314.

[15] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces / V. Barbu. -Leyden: Noordhoff International Publishing. 1976.

[16] Benchohra M. Controllability of second-order differential inclusions in Banach spaces with nonlocal conditions / M. Benchohra, S.K. Ntouyas // J. Optim. Theory Appl. -2000. -V.107. -No.3. -P.559–571.

[17] Benedetti I. Semilinear differential inclusions via weak topologies / I. Benedetti, L. Malaguti, V. Taddei // J. Math. Anal. Appl. -2010. -V.368. -P.90-102.

[18] Benedetti I. Nonlocal semilinear evolution equations without strong compactness: theory and applications / I. Benedetti, L. Malaguti, V. Taddei // Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. -2012. -V.44. -P.371-388.

[19] Benedetti I. Evolution problems with nonlinear nonlocal boundary conditions / I. Benedetti, V. Taddei, M. Väth // J. Dynam. Diff. Equ. -2013. -V.25. -No.2. -P.477-503.

[20] Бобылев Н.А. Геометрические методы в вариационных задачах / Н.А. Бобылев , В. Емельянов, К.Коровин. - М.: Магистр. -1998. -658с.

[21] Bochner S. Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions / S. Bochner, A.E. Taylor // Ann. Math. -1938. -V.39. -No.4. -P.913-944.

[22] Bohnenblust H. On a theorem of Ville, in Contributions in the Theory of Games / H. Bohnenblust, S. Karlin // V.1. ed. by H.W. Kuhn, A.W.Tucker. -Princeton, Princeton University Press. -1950. -P.155–160.

[23] Борисович Ю.Г. Топологические характеристики и исследование разрешимости нелинейных проблем / Ю. Г. Борисович // Извест. Вуз. Математика. -1997. -Т.417. -№.2. -С.3-23.

[24] Борисович Ю.Г. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский // УМН. -1980. -Т.35. -№.1. -С.59-126.

[25] Борисович Ю.Г. О числе Лефшеца для одного класса многозначных

отображений / 7-ая летняя математическая школа. -1969. Киев. -1970. -С.283–294

[26] Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. -М.: КомКнига, 2005. -216с.

[27] Борисович Ю.Г. Нелинейный фредгольмовые отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // УМН. -1977. -Т.32. -Вып.4. -С.3-54.

[28] Борсук К. Теория ретрактов / К. Борсук. -М.: Мир, 1971.

[29] Browder F.E. Approximation methods and the generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces / F.E. Browder, W.V. Petryshyn // J. Funct. Anal. -1968. -V.3. -P.217-245.

[30] Camlibel M.K. Complementarity Methods in the Analysis of Piecewise Linear Dynamical Systems / M.K. Camlibel. Ph.D. thesis. Center for Economic Research. Tilburg University. The Netherlands, 2001.

[31] Camlibel M.K. Lyapunov stability of complementarity and extended systems / M.K. Camlibel, J.-S. Pang, J. Shen // SIAM J. Optim. -2006. -V.17. -No.4. -P.1056-1101.

[32] Castaing C. Convex Analysis and Measurable Multifunctions / C. Castaing, M. Valadier. -Berlin, Heidenberg, New York: Springer Verlag, 1977.

[33] Capieto A. A continuation theorem for the periodic bvp in flow-invariant ENRs with applications / A. Capietto, F. Zanolin // J. Differential Equations. -1990. -V.83. -P.244-276.

[34] Chang K.C. The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities / K.C. Chang // Comm. Pure Appl. Math. -1980. -V.33. -No.2. -P.117-146.

[35] Chen H.L. Anti-periodic wavelets / H. L. Chen // J. Comput. Math. -1996. -V.14. -No.1. -P.32–39.

[36] Chena Yu. Anti-periodic solutions for evolution equations associated with monotone type mappings / Yu. Chena, D. O'Regan, R.P. Agarwal // Applied Mathematics Letters. -2010. -V.23. -No.11. -P.1320-1325.

[37] Кларк Ф. Оптимизация и негладский анализ / Ф. Кларк. -М.: Наука, 1988.

[38] Cottle R.W. Pseudo-monotone complementarity problems in Hilbert space / R.W. Cottle, J. C. Yao // J. Opt. Theory Appl. -1992. -V.75. -No.2. -P.281-295.

[39] Couchouron J.-F. Anti-periodic solutions for second order differential inclusions / J.-F. Couchouron, R. Precup // Elect. J. Diff.. Equ. -2004. -V.2004. -No.124. -P.1-17.

[40] De Blasi F. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions / F. de Blasi, L. Górniewicz, G. Pianigiani // Nonlinear Analysis: TMA. -1999. -V.37. -P.217-245.

[41] Deimling K. Multivalued Differential Equations / K. Deimling. -Berlin, New York: de Gruyter, 1992.

[42] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis / K. Deimling. -New York: Springer-Verlag, 1985.

[43] Демьянов В.Ф. Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. -М.: Наука, 1981.

[44] Denkowski Z. An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory / Z. Denkowski, S. Migórski, N.S. Papageorgiou. -Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[45] Демьянов В.Ф. Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. - М.: Наука, 1981. 384с.

[46] Diestel J. Weak compactness in $L^1(\mu, X)$ / J. Diestel, W. M. Ruess, W. Schachermayer // Proc. Amer. Math. Soc. -1993. -V.118. -P.447–453.

[47] Domachowski S. A global bifurcation theorem for convex-valued differential inclusions / S. Domachowski, J. Gulgowski // Z. Anal. Anwendungen. -2004. -V.23. -No.2. -P.275–292.

[48] Eisner J. Degree and global bifurcation for elliptic equations with multivalued unilateral conditions / J. Eisner, M. Kučera and M. Väth // Nonlinear Anal.: TMA. -2006. -V.64. -No.8. -P.1710-1736.

[49] Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. -М.: Мир, 1979.

[50] Elworthy K.D. Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds / K.D. Elworthy, A.J. Tromba // Proc. Sympos. Pure Math. -1968. -V. 15. -P. 45–94.

[51] Erbe L. Boundary value problems for second order nonlinear differential inclusions / L. Erbe, W. Krawcewicz // Qualitative theory of differential equations (Szeged). -1988). -P.163–171.

[52] Erbe L. Existence of solutions to boundary value problems for impulsive second order differential inclusions / L. Erbe, W. Krawcewicz // Rocky Mountain J. Math. -1992. -V.22. -No.2. -P.519–539.

[53] Fečkan M. Bifurcation from homoclinic to periodic solutions in ordinary differential equations with multivalued perturbations / M. Fečkan // J. Differential Equations. -1996. -V.130. -P.415-450.

[54] Fečkan M. Bifurcation of periodic solutions in differential inclusions / M. Fečkan // Application Math. -1997. -V.42. -No.5. -P.369-393.

[55] Fečkan M. Bifurcation from homoclinic to periodic solutions in singularly perturbed direrential inclusions / M. Fečkan // Proc. Royal Soc. Edinburgh. -1997. -V.127A. -P.727-753.

[56] Fečkan M. Bifurcation of periodic solutions in forced ordinary differential inclusions / M. Fečkan // Differ. Equat. Appl. -2009. -V.4. -No.1. -P.459-472.

[57] Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А.Ф. Филиппов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., ас-трон., физ., хим. -1959. -№.2. -С.25-32.

[58] Filippakis M. Nonsmooth generalized guiding functions for periodic differential inclusions / M. Filippakis, L. Gasin'ski and N.S. Papageorgiou // NoDEA. -2006. -V.13. -P.43-66.

[59] Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations / A. Fonda // Proc. Amer. Math. Soc. -1987. -V.99. -No.1. -P.79-85.

[60] Gabor D. The coincidence index for fundamentally contractible multivalued maps with nonconvex values / D. Gabor // Ann. Polon. Math. -2000. -V.75. -No.2. -P.143–166.

[61] Gabor D. A coincidence theory involving Fredholm operators of

nonnegative index / D. Gabor, W. Kryszewski // Topol. Methods Nonlinear Anal. -2000. -V.15. -No.1. -P.43–59.

[62] Gabor D. Systems of inclusions involving Fredholm operators of nonnegative index and nonconvex-valued maps / D. Gabor and W. Kryszewski // Set-valued Anal. -2005. -V.13. -P.337-379.

[63] Gabor D. A global bifurcation index for set-valued perturbations of Fredholm operators / D. Gabor, W. Kryszewski // Nonlinear Anal. TMA: -2010. -V.73. -P.2714-2736.

[64] Gabor D. Alexander invariant for perturbations of Fredholm operators / D. Gabor, W. Kryszewski // Nonlinear Anal.: TMA. -2011. -V.74. -No.18. -P.6911–6932.

[65] Gaines R.E. Coincidence degree and nonlinear differential equations / R.E. Gaines, J.L. Mawhin. -Berlin, New York: Springer-Verlag, 1977.

[66] Gaines R.E. Ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions / R.E. Gaines, J.L. Mawhin // J. Differential Equations. -1977. -V.26. -P.200-222.

[67] Goeleven D. On the stability of stationary solutions of evolution variational inequalities / D. Goeleven, M. Motreanu, and V. Motreanu // Adv. Nonlinear Var. Inequal. -2003. -V.6. -P.1-30.

[68] Goeleven D. Stability and instability matrices for linear evolution variational inequalities / D. Goeleven and B. Brogliato // IEEE Trans. Automat. Control. -2004. -V.49. -P.521-534.

[69] Goeleven D. Necessary conditions of asymptotic stability for unilateral dynamical systems / D. Goeleven and B. Brogliato // Nonlinear Anal.: TMA. -2005. -V.61. -P.961-1004.

[70] Górnierwicz L. Topological fixed point thepry of multivalued mappings / L. Gornierwicz. -Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006.

[71] Górnierwicz L. Periodic solutions of differential inclusions in $\mathbb{R}^n$ / L. Górniewicz, S. Plaskacz // Bollettino. U.M.I. -1993. -V.7-A. -P.409-420.

[72] Górnierwicz L. On the homotopy method in the fixed point index theory of multi-valued mappings of compact absolute neighborhood retracts / L. Górniewicz, A. Granas, W. Kryszewski // J. Math. Anal. Appl. -1991. -V.161. -No.2. -P.457-473.

[73] Górnierwicz L. Bifurcation invariants for acyclic mappings / L. Górniewicz and W. Kryszewski // Reports on Mathematical Physics. -1992. -V.31. -No.2. -P.217-239.

[74] Górnierwicz L. Topological degree theory for acyclic mappings related to the bifurcation problem / L. Górniewicz, W. Kryszewski // Bollettino U. M. I. -1992. -V.7-B. -No.3. -P.579-595.

[75] Grace S.R. A selection of oscillation criteria for second-order differential inclusions / S.R. Grace, R.P. Agarwal, D. O'Regan // Appl. Math. Lett. -2009. -V.22. -No 2. -P.153–158.

[76] Gulgowski J. A global bifurcation theorem with applications to nonlinear Picard problems / J. Gulgowski // Nonlinear Anal.: TMA. -2000. -V.41. -P.787-801.

[77] Hakl R. On periodic solutions of secord-order differential equations with attractive-repulsive singularities / R. Hakl, P.J. Torres // J. Differential Equations. -2010. -V.248. -P.111-126.

[78] Hale J.K. Phase space for retarded equations with infinite delay / J.K. Hale, J. Kato // Funkcial. Ekvac. -1978. -V.21.-No.1. -P.11-41.

[79] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. -М.: Мир. -1970.

[80] Heemels W.P.H. Linear Complementarity Systems: A Study in Hybrid Dynamics / W. P. H. Heemels. PhD thesis. Department of Electrical Engineering. Eindhoven University of Technology, 1999.

[81] Henry C. Differential equations with discontinuous right-hand side for planning procedures / C. Henry // J. Econ. Theory. -1972. -V.4. -P.545-551.

[82] Henry C. An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side / C. Henry // J. Math. Anal. Appl. -1973. -V.42. -P.179-186.

[83] Hino Y. Functional Differential Equations with Infinite Delay / Y. Hino, S. Murakami, T. Naito. -Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1991.

[84] Hipfel D. The nonlinear differential complementarity problem / D. Hipfel. PhD thesis. Department of Mathematical Sciences. Rensselaer Polytechnic Institute, 1993.

[85] Hirsch M.W. Differential topology / M.W. Hirsch. -New York: Springer-Verlag, 1994.

[86] Hu S.T.Homotopy theory / S.T. Hu. -New York: Academic Press, 1959.

[87] Hu S. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory / S. Hu, N.S. Papageorgiou. -Dordrecht: Kluwer, 1997.

[88] Hyman D.M. On decreasing sequences of compact absolute retracts / D. M. Hyman // Fund Math. -1969. -V.64. -P.91-97.

[89] Ize J. Topological Bifurcation / J. Ize. In: Topological Nonlinear Analysis: Degree, Singularity and Variations (eds.: M. Matzeu and A. Vignoli; Progress in Nonlin. Diff. Equ. and Their Appl.: -V.15). -Boston: Birkh$\ddot{a}$user Verlag, 1995. -P.341-463.

[90] Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. -Berlin, New York: de Gruyter, 2001.

[91] Karamardian S. Generalized complementarity problem / S. Karamardian // J. Opt. Theory Appl. -1971. -V.8. -P.161-168.

[92] Kim I.-S. A global bifurcation for nonlinear inclusions / I.-S. Kim, Yu.-H. Kim // Nonlinear Anal.: TMA. -2008. -V.68. -No.1. -P.343-348.

[93] Kornev S.V. On some developments of the method of integral guiding functions / S.V. Kornev, V.V. Obukhovskii // Functional Differential Equat. -2005. -V.12. -No.3-4. -P.303-310.

[94] Корнев С.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Труды Матем. фак. (нов. сер.). -2004. -№8. -С.56-74.

[95] Корнев С.В. О негладких многолистных направляющих функциях / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. -2003. -Т.39. -№.11. -С.1497-1502.

[96] Корнев С.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Извест. Вузов. Математика. -2009. -№.5. -С.23-32.

[97] Корнев С.В. Негладкие направляющие потенциалы в задачах о вынужденных колебаниях / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // АиТ. -2007. -№.1. -С.3-10.

[98] Красносельский М.А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обычкновенных дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский, А.И. Перов // ДАН СССР. -1958. -Т.123. -№.2. -С.235-238.

[99] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. -М.: Наука, 1966.

[100] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. -М: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956.

[101] Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. -М: Наука, 1975.

[102] Красносельский М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. -М: Наука, 1983.

[103] Красносельский М.А. Об эллиптических уравнениях с разрывными нелинейностиями / М.А. Красносельский, А.В. Покровский // Доклады РАН. -1995. -Т.342. -№.6. -С.731-734.

[104] Krasnosel'skii A.M. Differential inequalities in problems of forced nonlinear oscillations / A.M. Krasnosel'skii, M.A. Krasnosel'skii, J. Mawhin // Nonlinear Anal.: TMA. -1995. -V.25. -No.9-10. -P.1029–1036.

[105] Krasnosel'skii A.M. Generalized guiding functions in a problem on high frequency forced oscillations / A.M. Krasnosel'skii, M.A. Krasnosel'skii,

J. Mawhin, A. Pokrovskii // Nonlinear Anal.: TMA. -1994. -V.22.-No.11. -P.1357–1371.

[106] Kryszewski W. Homotopy properties of set-valued mappings / W. Kryszewski. -Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.

[107] Kyritsi S. Periodic problems for strongly nonlinear second-order differential inclusions / S. Kyritsi, N. Matzakos, N.S. Papageorgiou // J. Differential Equations. -2002. -V.183. -No.2. -P.279–302.

[108] Lancer R.C. Cell-like mappings and thier generalizations / R.C. Lancer // Bull. AMS. -1977. -V.83. -P.495-552.

[109] Liou Y.C. Application of a coincidence index to some classes of impulsive control systems / Y.C. Liou, V. Obukhovskii, J.C. Yao // Nonlinear Anal.: TMA. -2008. -V.69. -No.12. -P.4392–4411.

[110] Leray J. Topologie et équations fonctionnelles / J. Leray et J. Schauder // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. -1934. -V.51. -No.3. -P.45–78.

[111] Lewicka M. Locally lipschitzian guiding function methods for ODEs / M. Lewicka // Nonlinear Anal.: TMA. -1998. -V.33. -P.747-758.

[112] Martin R. Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces / R. Martin. -New york: Wiley, 1976.

[113] Massabo I. A topological degree for multivalued A-proper maps in Banach spaces / I. Massabo and P. Nistri // Bollettino U.M.I. -1976. -V.13-B. -P.672-685.

[114] Mawhin J. Periodic solutions of nonlinear functional differential equations / J. Mawhin // J. Differential Equations. -1971. -V.10. -P.240-261.

[115] Mawhin J. Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces / J. Mawhin // J. Differential Equations. -1972. -V.12. -P.610-636.

[116] Mawhin J. Boundary value problems for nonlinear second-order vector differential equations / J. Mawhin // J. Differential Equations. -1974. -V.16. -P.257-269.

[117] Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems / J. Mawhin. CBMS Regional Conference Series in Mathematics 40. American Mathematical Society. Providence. R.I. -1979.

[118] Мышкис А.Д. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории / А.Д. Мышкис // Матем. Сборник. -1954. -Т.34. -№.3. -С.525-540.

[119] Nirengerg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis / Louis Nirengerg. -New.ed. -Courant Lecture Notes in Mathematics, 2001.

[120] Obukhovskii V. On coincidence index for multivalued perturbations of nonlinear Fredholm maps and some applications / V. Obukhovskii, P. Zecca, V. Zvyagin // Abstr. Appl. Anal. -2002. -V.7. -No.6. 295-322.

[121] Obukhovskii V. An oriented coincidence index for nonlinear Fredholm inclusions with nonconvex-valued perturbations / V. Obukhovskii, P. Zecca, V. Zvyagin // Abstr. Appl. Anal. -2006. -Art.ID. 51794. -21p.

[122] Obukhovskii V. On some generalizations of the Landesman-Lazer theorem / V. Obukhovskii, P. Zecca and V. Zvyagin // Fixed Point Theory. -2007. -V.8. -No.1. -P.69-85.

[123] Okochi H. On the existence of anti-periodic solutions to a nonlinear evolution equation associated with odd subdifferential operators / H. Okochi // J. Funct. Anal. -1990. -V.91. -No.2. -P.246-258.

[124] Pang J.-S. Differential variational inequalities / J.-S. Pang, D.E. Steward // Math. Program. Ser. A. -2008. -V.113. -P.345-424.

[125] Pettis B.J. On the integration in vector spaces / B.J. Pettis // Trans. Amer. Math. Soc. -1938. -V.44. -No.2. -P.277–304.

[126] Petryshyn W.V. On the approximation-solvable of equations involving A-proper and pseudo A-proper mappings / W.V. Petryshyn // Bull. Amer. Math. Soc. -1975. -V.81. -P.223-312.

[127] Petryshyn W.V. Fredholm alternatives for nonlinear A-proper mappings with applications to nonlinear elliptic boundary value problems / W.V. Petryshyn // J. Funct. Anal. -1975. -V.18. -P.288-317.

[128] Petryshyn W.V. Bifurcation and asymptotic bifurcation for equations involving A-proper mappings with applications to differential equations / W.V. Petryshyn // J. Differential Equations. -1978. -V.28. -P.124-154.

[129] Pinsky S. Anti-periodic boundary conditions in supersymmetric discrete light cone quantization / S. Pinsky and U. Trittmann // Phys. Rev. D. -2000. -V.62. 087701.

[130] Pruszko T. A coincidence degree for L-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem of orientors fields / T. Pruszko // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. -1979. -V.27.. -No.11-12. -P.895-902.

[131] Rabinowitz P. Some global results for nonlinear eigenvalue problems / P. Rabinowitz // J. Funct. Anal. -1971. -V.7. -P.487-513.

[132] Rachinskii D. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems / D. Rachinskii // Nonlinear Anal.: TMA. -1996. -V.26. -No.3. -P.631-639.

[133] Шварц Л. Анализ / Л. Шварц. -М.: Мир, 1972.

[134] Shao J. Anti-periodic solutions for shunting inhibitory cellular neural networks with time-varying delays / J. Shao // Physics Letters A. -2008. -V.372. -No.30. -P.5011-5016.

[135] Spanier E.H. Algebraic Topology / E.H. Spanier. -New York: McGraw-Hill, 1966.

[136] Taddei V. Bound sets for Floquet boundary value problems: the nonsmooth case / V. Taddei // Dis. Cont. Dyn. Sys. -2000. -V.6. -No.2. -P.459-473.

[137] Триногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Триногин. - М.: Наука, 1980.

[138] Tarafdar E. On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory / E. Tarafdar, S.K. Teo // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. -1979. -V.28. -No.2. -P.139-173.

[139] Väth M. New beams of global bifurcation points for a reaction–diffusion system with inequalities or inclusions / M. Väth // J. Differential Equations. -2009. -V.247. -No.11. -P.3040-3069.

[140] Wang G. Bounding functions methods for fully nonlinear boundary value problems / G. Wang, M. Zhou, L. Sun // Nonlinear Analysis: TMA. -2006. -V.64. -P.696-705.

[141] Webb J.R. A-proper maps and bifurcation theory / J.R. Webb and S.C. Welsh // Lecture Notes in Mathematics 1151. Springer-Verlag. -1985. -P.342-349.

[142] Welsh S.C. Bifurcation of A-proper mappings without transversality considerations / S. C. Welsh // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. -1987. -V.107. -No.1-2. -P.65-74.

[143] Zanolin F. Bound sets, periodic solutions and flow-invariant for ordinary differential equations in $\mathbb{R}^n$: some remarks / F. Zanolin // Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. -1987. -V.19. -P.76-92.

[144] Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems. -New York: Springer-Verlag, 1986.

[145] Звягин В.Г. О существовании непрерывной ветви собственных функций нелинейной эллиптической краевой задачи / В.Г. Звягин // Дифф. уравн. —1977. —Т.13. -№.8. —С.1524–1527.

[146] Звягин В.Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями / В.Г. Звягин // Матем. Сборник —1991. —Т.182. -№.12. —С.1740–1768.

[147] Звягин В.Г. Ориентированная степень фредгольмовых отображений. Метод конечномерной редукции / В.Г. Звягин, Н.М. Ратинер // Современная матем. Фундаментальные направл. -2012. -Т.44. -С.3-171.

[148] Дзекка П. Об ориентированном индексе совпадений для нелинейных фредгольмовых включений / П. Дзекка, В.Г. Звягин, В.В. Обуховский // ДАН. -2006. -Т.406. -№4. -С.1-4.