На правах рукописи

Рязанцева Елена Анатольевна

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ ФИЗИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Липецкий государственный технический университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Пеньков Виктор Борисович
Официальные оппоненты:	Лавит Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, кафедра математического моделирования, профессор Степанова Лариса Валентиновна, доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный университет, кафедра математического моделирования в механике, профессор
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет инженерных технологий»

Защита диссертации состоится 24 сентября 2015 г. в 13.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.24 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» по адресу 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, ауд.226

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» и на сайте http //www.science.vsu.ru

Автореферат разослан «____» ___________ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета	Воронина Ирина Евгеньевна

Общая характеристика диссертации

Диссертация посвящена развитию метода граничных состояний, заключающегося в разработке приема включения специального решения в задачах теории упругости, содержащих физические и геометрические особенности.

Актуальность темы исследования: использование для решения краевых задач математической физики в областях с кусочно-гладкими границами численных методов связано с трудоемкостью аппроксимаций в окрестностях точек геометрической или физической сингулярности, следовательно, для достижения необходимой точности требуются большие вычислительные затраты. Пренебрежение составляющими, определяющими сингулярные решения, нередко приводит как к потере численной устойчивости и точности, так и к результатам, которые принципиально неверны. Для получения решения, отражающего реальную картину, необходимо учитывать сингулярные составляющие, что улучшит эффективность метода.

В диссертационной работе методом граничных состояний исследованы плоские граничные задачи статистической теории упругости в случае однородных изотропных тел с физическими и геометрическими особенностями.

Был предложен прием, основанный на включении в базис внутренних состояний специального решения, «схватывающего» особенность. В результате значительно сокращаются вычислительные затраты и повышается точность полученного решения, представленного в аналитической форме.

Целью диссертационной работы является развитие метода граничных состояний на класс задач теории упругости, содержащих геометрические и физические особенности.

Задачи исследования:

– проведение классификации особых точек;

– выделение асимптотик специальных решений для конкретных особенностей;

– проверка возможности включения специального решения в базис внутреннего состояния;

– постановка краевых задач математической физики, содержащих физические и геометрические особенности в терминах метода граничных состояний;

– формирование счетных базисов пространств состояний для плоской задачи теории упругости с включением «специальных» решений;

– разработка вычислительных алгоритмов;

– решение цикла задач, содержащих особенности физического характера;

– решение цикла задач, содержащих особенности геометрического характера.

Методы исследований:

– методы функционального анализа;

– методы решения бесконечных систем линейных уравнений;

– методы компьютерной алгебры.

Научные результаты. На защиту выносятся следующие научные результаты:

1) методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения для тел, содержащих физические особенности (сосредоточенная силы, скачки усилий);

2) методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения для тел, содержащих, геометрические особенности (клин);

3) методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения для многополостных тел, содержащих, геометрические особенности (клин);

4) результаты решений задач теории упругости однородного,

изотропного тела, содержащего физические или геометрические особенности, а также задачи, в которых присутствуют и физические, и геометрические сингулярности и многополостность.

Научная новизна:

1. Предложена новая методика генерирования базиса внутренних состояний для тел, содержащих физические и геометрические особенности, основанная на включение специальных решений, «схватывающих» особенности различного характера.

2. Метод граничных состояний распространен на класс задач теории упругости, содержащих сингулярности.

3. Выполнены тестовые и оригинальные расчеты для ряда задач, содержащих физические и геометрические особенности.

4. Решены задачи для тел разнообразных очертаний с различными особенностями.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена: строгостью математического обоснования метода граничных состояний; обработкой и интерпретацией результатов в отношении точности; самодостаточностью метода граничных состояний (определяющие соотношения удовлетворяются тождественно вплоть до границы, о качестве решения можно судить по невязке результирующего граничного состояния с граничными условиями задачи и по насыщению суммы Бесселя, а также по сопоставлению восстановленных граничных условий с заданными).

Теоретическая ценность:

1. Метод граничных состояний усовершенствован на класс плоских задач теории упругости, содержащих физические и геометрические особенности.

2. Разработана методология формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения, схватывающего особенность физического характера.

3. Разработана методология формирования базиса пространств

состояний с учетом специального решения, схватывающего особенность геометрического характера.

4. Выполнена постановка задач математической физики в терминах метода граничных состояний для тел, содержащих физические и геометрические особенности.

Практическая ценность заключается в возможности использования новой модификации метода граничных состояний для решения задач изотропной теории упругости с физическими и геометрическими особенностями. Разработан алгоритм наполнения базиса с учетом специального решения, «схватывающего» особенность физического и геометрического характера. Разработанные программные алгоритмы вполне приемлемы для решения инженерных задач. Решен ряд задач теории упругости для плоских, изотропных тел, содержащих физические и геометрические особенности: задача о сжатии кругового диска сосредоточенными силами; задача о сжатии прямоугольными отрезками встречных равномерно-распределенных усилий; задача о деформировании диска внецентренными сосредоточенными воздействиями; задача о растяжении диска воздействиями, распределенными по окружности; задача о нагружении каплевидной области, имеющей клиновидную особенность; задача о сосредоточенном воздействии на область, имеющей клиновидную особенность; задача о равномерном воздействии на многосвязную область, имеющую клиновидную особенность.

Вклад автора в разработку проблемы

1. Проведена классификация физических и геометрических особенностей.

2. Разработан метод включения специального решения, «схватывающего» особенность физического и геометрического характера, в формирование базиса пространств состояний.

3. Получено подтверждение актуальности использования методики формирование базиса пространств состояний с учетом специальных

решений.

4. Разработаны вычислительные алгоритмы, использующие компьютерную алгебру.

5. Сформулированы плоские задачи теории упругости, содержащие физические и геометрические особенности в терминах метода граничных состояний.

6. Проведены методом граничных состояний расчеты краевых задач, содержащих особенности физического характера.

7. Осуществлены расчеты задач теории упругости, содержащих геометрические сингулярности методом граничных состояний.

8. Исследовано напряженно-деформированное состояние плоского двусвязного тела, имеющего геометрическую особенность.

Апробация работы. Основные результаты и материалы диссертации в целом докладывались на регулярных семинарах научной школы «Математические методы и модели механики» под руководством В. Б. Пенькова (Липецк, ЛГТУ); межрегиональных конференции памяти А.Н. Кабелькова, г. Новочеркасск (20-23 сентября 2011 г.); международных научных конференциях, г. Тула (сентябрь 2012 г., 2013 г., 2014 г.); международной конференции г. Воронеж (26-28 ноября 2012 г.); XI международной заочной научно-практической конференции, г. Тамбов (31 октября 2013 г., 31 марта 2014 г., 31 октября 2014 г.); научно-методологическом семинаре кафедры «Математика и информатика» на базе Финансового университета при правительстве РФ, Липецкий филиал (февраль 2014 г, 2015 г.).

Публикации. Основное содержание и результаты диссертационной работы изложены в 13 опубликованных работах, в том числе 2 статьи опубликованы в изданиях, входящий в перечень ВАК РФ.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка и приложения. По каждой главе приведены основные выводы. Общий объём работы составляет 101 страницу, в том числе 83 страницы основного текста. Список использованных источников содержит 165 наименований. Приложение составляют 1 страницу.

Краткое содержание работы

Во введении приведена актуальность темы исследования, степень ее разработанности, цель диссертации, научная новизна, теоретическая и практическая ценности, методология, апробация.

В первой главе приводится краткий обзор по основным энергетическим (вариационным) методам. Указаны основные положения, а также преимущества и недостатки каждого из методов.

Были изложены основные положения метода граничных состояний, его отличительные особенности, а также приведен краткий обзор по развитию данного метода на класс различных задач.

Метод граничных состояний (МГС) является прямым численным методом, который основан на разложении в ряд Фурье компонент внутренних и граничных состояний по задаваемому базису пространства. Под внутренним состоянием среды $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$, понимается любое частное решение определяющих уравнений среды. Совокупность таких состояний образует гильбертово пространство внутренних состояний Ξ. Каждому внутреннему состоянию соответствует граничное состояние $\gamma = \{u_i, p_i\}$, которое является следом внутреннего состояния на границе. Совокупность граничных состояний образует гильбертово пространство граничных состояний, которое будет изоморфным пространству внутренних состояний, элементы которого можно представить в виде разложения в ряд Фурье по элементам ортонормированных базисов с общими коэффициентами $c_k = (\gamma, \gamma^{(k)})$: $u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}$, $p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)}$, $\sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}$,

где σ_{ij} – напряжения, u_i – перемещения, ε_{ij} – деформации.

В том числе, представлен выборочный обзор научных работ по исследованию проблем особых точек и связанных с этим трудностей в решении задач теории упругости. Детально изучены как плоские, так и пространственные случаи выявления особенностей. Обзор позволил сделать вывод: для эффективного построения базисов состояний в методе граничных состояний можно использовать главные асимптотики особых точек.

Вторая глава.

Краевые задачи математической физики обладают характерным свойством, таким как гладкость решения: граница области, краевые условия и исходные данные, определяемые коэффициентами уравнений, гладкие. Если нарушается хотя бы одно из них, то возникают особенности. Точки нарушения указанных условий называют особыми или сингулярными.

В задачах теории упругости особенность решения проявляется в появлениях бесконечных напряжений в точках границы, где имеют место нарушение гладкости поверхности, смена типа краевых условий или контакт различных материалов. Особые точки могут быть как на границе, так и внутри области, где нарушается гладкость поверхности контакта различных материалов.

Для решения плоской задачи изотропной среды воспользуемся формулами комплексного представления Г.В. Колосова-Н.И. Мусхелишвили, дающими общее решение плоской задачи для изотропного тела:

$$2G(u+iv)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\ ,$$

$$\sigma_x+\sigma_y=4\operatorname{Re}\varphi'(z)\ ,$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\sigma_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]\ ,$$

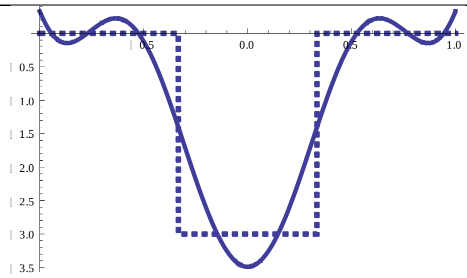
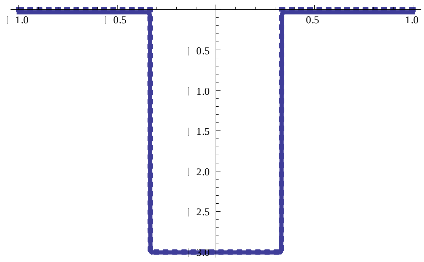
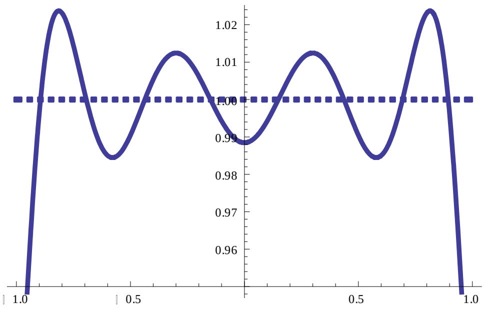
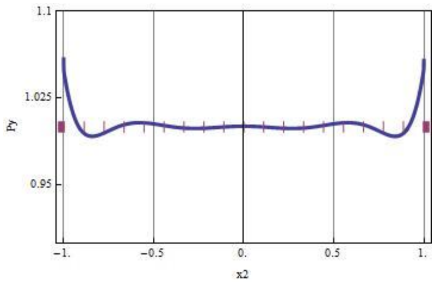
где $z=x+iy$ – комплексные координаты; $\varphi(z), \psi(z)$ – функции Колосова - Мусхелишвили; G – модуль сдвига; $k=(3-\mu)/(1+\mu)$; u, v – компоненты вектора перемещений; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические по своим переменным.

Было установлено, что вид аналитических функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ может определять ту или иную особенность физического характера: сосредоточенную силу, сосредоточенный момент, скачок усилия:

Описывается процедура включения специального решения в базис пространств состояний. С учетом специального решения, был получен вид базиса: $\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}\varphi(z,z_0)\\ \psi(z,z_0)\end{pmatrix}, \begin{Bmatrix} z^n \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ z^n \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} iz^n \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ iz^n \end{Bmatrix} \right\}$, где z_0 - специальное решение, «схватывающее» особое решение.

Приводится решение задачи, содержащей физическую особенность – скачок поверхностного усилия. С целью сравнения результатов задача решалась двумя способами: без включения специального решения и с включением специального решения в базис внутренних состояний. Результаты представлены в таблице 1.

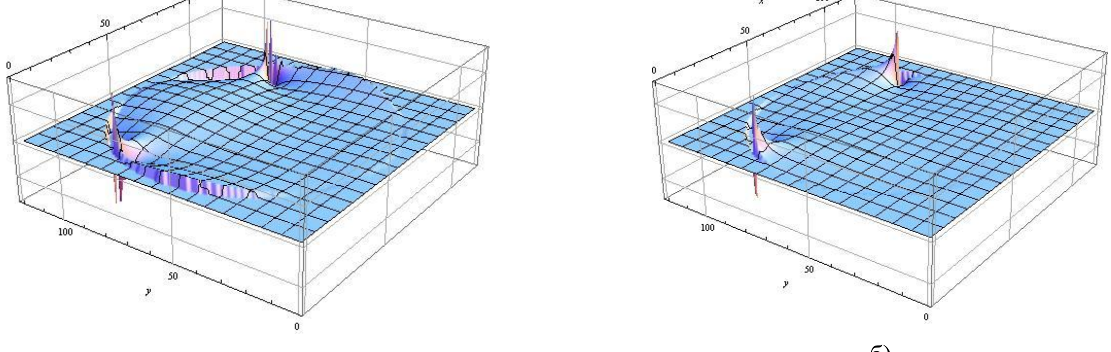
Таблица 1 – Сравнительный анализ

Усилия p_y на границах, полученные без использования специального решения	Усилия p_y на границах, полученные с использованием специального решения
S_4	
 а)	 б)
S_2	
 в)	 г)

В третьем параграфе рассматривается задача о сжатии кругового диска сосредоточенными силами (центровыми и внецентренными). Применена методика формирования базиса пространств состояний с учетом специального решения. Получили следующие коэффициенты Фурье (представлены только ненулевые коэффициенты Фурье): $c_1 = 1{,}01325$, $c_2 = 0{,}920954$, $c_3 = 0{,}013887$, $c_4 = \text{-}0{,}0220416$, $c_5 = 0{,}237783$, $c_6 = 0{,}0025003$, $c_7 = 0{,}000848828$, $c_8 = 0{,}174215$, $c_9 = \text{-}0{,}00538217$, $c_{10} = 0{,}159778$, $c_{11} = \text{-}0{,}0091522$, которые показывают, что решение задачи о сжатие кругового диска осевыми равномерными нагрузками, распределенными на малом промежутке, полученные путем использования метода граничных состояний, уменьшаются, а, следовательно, решение является сходящимся.

В четвертом параграфе изучается задача о растяжении диска воздействиями, распределенными по полуокружности. Необходимо определить напряженно-деформируемое состояние. Все полученные решения были протестированы на удовлетворение определяющим соотношениям теории упругости, а также была вычислена невязка, показавшая качество полученных решений, которое практически совпадает с заданными граничными условиями.

На рисунке 1 представлены двумерные графики механических полей σ_{yy} и σ_{xy}, являющиеся графическим решением задачи, рассчитанной с учетом безразмерных параметров упругости $\mu = 1, \nu = 0{,}25$.



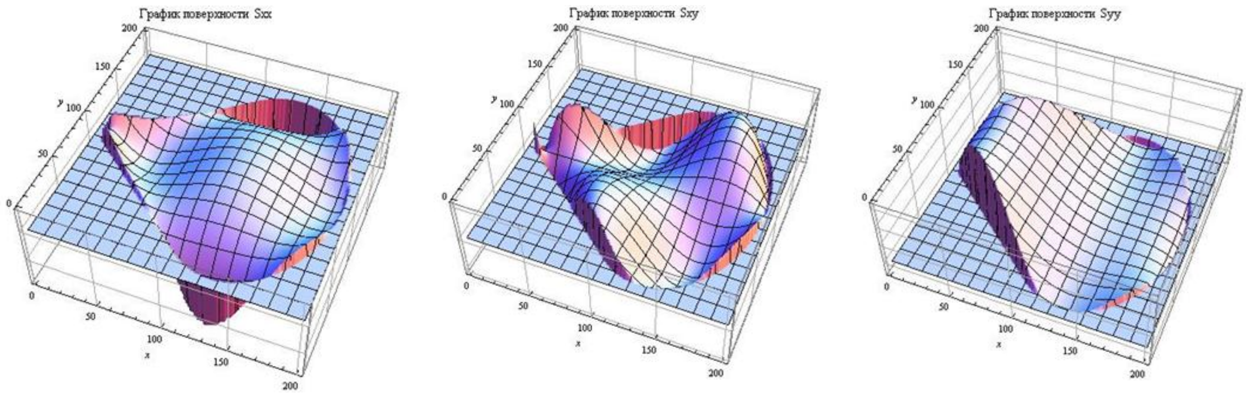
а) б)

Рисунок 1 – Двумерные графики компонент тензора напряжений: а) двумерный график σ_{yy}; б) двумерный график σ_{xy}

<u>В третьей главе</u> приводится классификация сингулярностей геометрического характера: клин, конус и угловая точка.

В монографии Партона В.З., Перлина П.И. рассматривается решение для клина с углом раствора 2α в виде трансцендентного уравнения $\sin 2\alpha\lambda = \pm\lambda \sin(2\alpha)$.

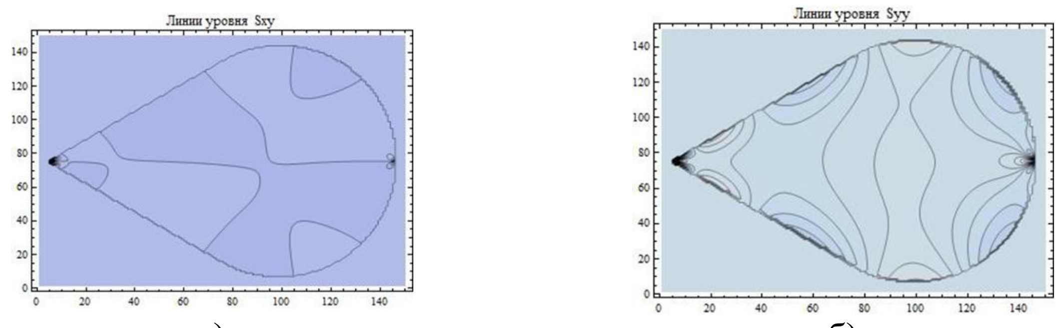
Во втором параграфе приводится решение задачи о нагружении каплевидной области, имеющую клиновидную особенность на основе включения специального решения в базис состояний. Необходимо определить напряженно-деформированное состояние. Полученные решения (рис. 2) свидетельствуют о корректности решения.



а) б) в)

Рисунок 2 – Двумерные графики компонент тензора напряжений: а) σ_{xx}, б) σ_{xy}, в) σ_{yy}

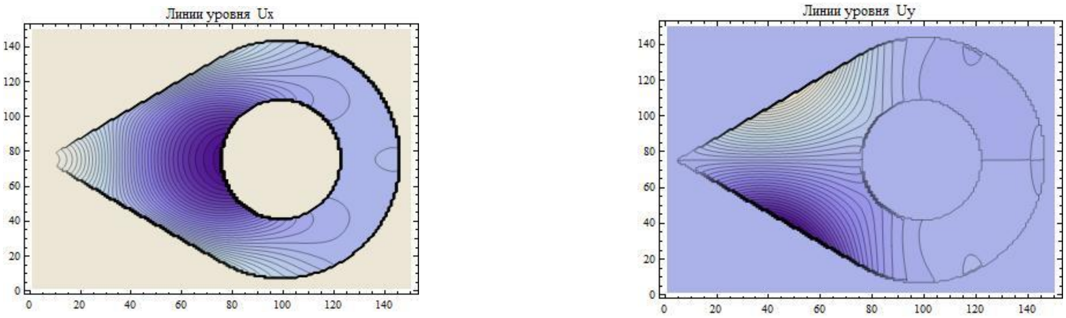
В третьем параграфе была решена задача, содержащая геометрическую сингулярность (клин) и физическую особенность (сосредоточенную силу) с применением методики формирования базиса с учетом специального решения, «схватывающего» соответствующие особенности. Результаты решения представлены на рисунке 3.



а) б)

Рисунок 3 – Изолинии компонент тензора напряжений: а) σ_{xy}, б) σ_{yy}

В четвертом параграфе решена задача о поверхностной нагрузке, заданной по закону параболы на многосвязную область, имеющую клиновидную особенность. Приведена методика формирования базиса пространства внутренних состояний с учетом включения главной асимптотики особенности геометрического характера типа «клин». Полученные решения представлены в графическом виде, в виде изолиний соответствующих компонент тензора напряжений (рис. 4).



а) б)

Рисунок 4 – Изолинии: а)– изолинии компоненты напряжения σ_x; б) – изолинии компоненты напряжения σ_{xy}.

<u>Заключение.</u> Заключение содержит основные результаты и общие выводы, сформулированные на основе проведенных исследований и перспективы развития метода граничных состояний в задачах математической физики.

<u>Основные результаты работы</u>

1. Развит метод граничных состояний на двумерные задачи теории упругости однородной, изотропной среды с физическими и геометрическими особенностями.

2. Проведена классификация особенностей физического (сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, скачок усилия, излом усилия) и геометрического (клин, клин с вырезом, клин под действием сосредоточенных сил) характера; приведены представленные в аналитической форме основные решения, а также выделены главные

асимптотики сингулярных решений.

3. Разработана методика формирования базиса внутреннего состояния с включением специального элемента, «схватывающего» особенность физического или геометрического характера в структуру базиса. Наработаны эффективные алгоритмы назначения базисов.

4. Проведен сравнительный анализ решения задачи, содержащей особенность (на примере скачка поверхностных усилий) с использованием регулярного базиса и с использованием методики формирования базиса с учетом специального решения. Установлено, что при использовании предложенной в диссертационной работе методики значительно сокращаются вычислительные ресурсы, а также повышается точность решения.

5. Выполнены постановки и произведены расчеты для двумерных задач теории упругости однородного изотропного тела с физическими и геометрическими особенностями (плоская задача под воздействием осевых и внецентровых сосредоточенных сил; скачок усилия; плоское тело клиновидной формы под воздействием нагрузки, распределенной по закону параболы, плоское тело клиновидной формы под воздействием сосредоточенных сил; для тел каплевидной формы с полостью под воздействием нагрузки, распределенной по закону параболы).

6. Установлено, что определяющие соотношения удовлетворяются тождественно, невязка результирующего граничного состояния с граничными условиями задачи стремится к нулю, что свидетельствует о приемлемом качестве решения.

Результаты работы могут быть рекомендованы для внедрения в НИИ, занимающимися вопросами прочности и жесткости тел сложной конфигурации, устойчивости горных выработок, в учебных курсах специальностей «Прикладная математика», «Вычислительная механика» технических и классических университетов (в частности ТулГУ, ВГУ, ЛГТУ).

Работы, опубликованные по теме диссертации:

1. Рязанцева Е.А. Специальное решение как инструмент качества сходимости решения задач математической физики / В.Б. Пеньков, Е.А. Рязанцева // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – Липецк: ЛГТУ, 2013. – №2 (32). – С. 47-52.
2. Рязанцева Е.А. Решение краевых задач теории упругости для тел клиновидной формы, имеющих полость / Е.А. Рязанцева, Д.А. Иванычев // Наука и бизнес: пути развития. Научно-практический журнал. – 2014. – №4 (34). – С. 64-70.
3. Рязанцева Е.А. О применении метода граничных состояний в задачах теории упругости с геометрическими и физическими особенностями по границе / Е.А. Рязанцева, В.Б. Пеньков // Современные проблемы математики, механики, информатики, Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию Тульского государственного университета. – Тула: 2010. – С.184-186.
4. Рязанцева Е.А. Метод граничных состояний: сосредоточенные силы / В.Б. Пеньков, Л.В. Саталкина, Е.А. Рязанцева // Современные проблемы механики и ее преподавания в вузах Российской Федерации: доклады Межрегиональной конференции памяти А.Н. Кабелькова. – г. Новочеркасск, 20-23 сентября 2011 г., Юж.-Рос. гос. Техн.ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2011. – С. 126-130.
5. Рязанцева Е.А. Развитие метода граничных состояния на класс задач с разрывным усилием вдоль границы / В.Б. Пеньков, Л.В. Саталкина, Е.А. Рязанцева // Вестник ТулГУ. Серия "Актуальные вопросы механики". – Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. – Вып. 7. – С. 134-138.
6. Рязанцева Е.А. Проблема применения теорем вложения к областям с негладкой границей / Е.А. Рязанцева, В.Б. Пеньков // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". – Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. – С.212-215.
7. Рязанцева Е.А. Теорема Соболева: краевые задачи с сингулярностями физической природы / Е.А. Рязанцева, В.Б. Пеньков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб орник трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 ноября 2012 г.: в 2 ч.– Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – Ч. 1. – С.302-307.
8. Рязанцева Е.А. Специальные элементы базиса состояний как надежный фактор сокращения вычислительных ресурсов при анализе упругих полей / Е.А. Рязанцева, В.Б. Пеньков // Энерго- и ресурсосбережение XXI век: материалы XI Международной научно-практической интернет-конференции. – Орёл, 2013. – С. 250-253.

9. Рязанцева Е.А. Использование специального решения для задач, содержащих сингулярности физического и геометрического характера / Е.А. Рязанцева, В.Б. Пеньков // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – С. 451-455.

10. Рязанцева Е.А. Использование метода граничных состояний для решения задач теории упругости, имеющих геометрическую особенность / Е.А. Рязанцева // Современные тенденции в образовании и науке: материалы Международной заочной научно-практической конференции, Тамбов, 31 октября 2013 г.: в 26 частях. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2013. – Ч. 9. – С. 101-103.

11. Рязанцева Е.А. Применение метода граничных состояний для клина, находящегося под воздействием сосредоточенной силы / Е.А. Рязанцева // Наука, образование, общество: проблемы и перспективы развития: материалы Международной заочной научно-практической конференции, Тамбов, 28 февраля 2014 г.: в 12 частях. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2014. – Ч.7 . – С. 132-135.

12. Рязанцева Е.А. Специальное решение как эффективный инструментарий для решения задач теории упругости для тел клиновидной формы, имеющих полость / Е.А. Рязанцева, Д.А. Иванычев // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 391-396.

13. Рязанцева Е.А. Решение смешанных задач теории упругости для тела с полостью и особенностью геометрического характера / Е.А. Рязанцева // Наука и образование в XXI веке: материалы Международной заочной научно-практической конференции, Тамбов, 31 октября 2014 г. в 17 частях. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2014. – Ч.10. – С. 126-128.

Работы № 1-2 опубликованы в изданиях, соответствующих перечню ВАК РФ.