

На правах рукописи

Быкова Ксения Игоревна

**Лучевое приближение динамического напряженного
состояния за выпуклым препятствием
за дифрагированной волной в области тени**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель: Вервейко Николай Дмитриевич
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: Пеньков Виктор Борисович
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО "Липецкий государственный
технический университет", кафедра общей механики,
профессор

Скобельцын Сергей Алексеевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВПО "Тульский государственный университет",
механико-математический факультет,
кафедра прикладной математики и информатики, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Воронежский государственный технический университет»

Защита диссертации состоится 24 сентября 2015 г. в «15» часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.24 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» по адресу 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, ауд.226

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» и на сайте [http //www.science.vsu.ru](http://www.science.vsu.ru)

Автореферат разослан « ___ » _____ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Воронина Ирина Евгеньевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В настоящей диссертационной работе исследовано напряженно-деформированное состояние за дифрагированными упругими волнами, построенное путем применения лучевого метода для решения квазилинейной системы уравнений в частных производных гиперболического типа.

Рассмотрена задача дифракции плоской продольной волны за выпуклой поверхностью. В качестве примера рассмотрена дифракция плоской волны за круговым цилиндром. Изучено поведение дифрагированной пространственной волны за сферой и эллипсоидом. Получено выражение для интенсивности w/w_0 дифрагированной волны и второго инварианта девиатора тензора напряжений в зависимости от времени и параметров, характеризующих размеры и форму препятствия.

Задача прямой дифракции упругой продольной волны рассмотрена на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки клина окружностью, а вершины конуса сферой малого радиуса δ , соответственно. Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Актуальность темы. Дифракция представляет собой универсальное волновое явление и характеризуется одними и теми же законами в случае волн разной природы.

К числу наиболее сложных и актуальных с точки зрения приложений проблем динамики деформируемых тел относится проблема дифракции упругих волн на различного типа неоднородностях (включения, полости, вырезы, локальные изменения свойств и т.д.), поскольку практически во всех возникающих задачах их наличие является непременным условием. Информация о динамическом напряженном состоянии возле этих неоднородностей необходима для расчета инженерных конструкций. Решение задачи дифракции упругих волн на неоднородностях крайне затруднительно и требует привлечения сложного математического аппарата.

Значительный вклад в развитие теории распространения волн в упругих, упруговязкопластических средах и жидкостях внесли отечественные ученые:

Баскаков В. А., Быковцев Г.И., Вerveйко Н.Д., Сагомоян А.Я., Самсонов А.М., Филатов Г.Ф., Чернышов А.Д. и др. Многие важные результаты в исследованиях по распространению волн получены зарубежными учеными: Acharya D.P., Al-Khoury R., Brock L.M., Guliyev Mugan S., Domanski Wlodzimierz, Donato A. и др.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета в рамках темы: «Разработка математических моделей и эффективных аналитических и численных методов решения статических и динамических задач механики деформируемых сред сложной структуры».

Цели и задачи работы. Исследование напряженно-деформированного состояния в области дифракции плоских и пространственных упругих волн на выпуклых препятствиях: круговом цилиндре, сфере, эллипсоиде, клине и конусе лучевым методом.

Поставленная цель достигается посредством решения следующих задач:

- оценка погрешности лучевого метода расчета дифрагированных волн;
- исследование распределения интенсивности дифрагированной волны за цилиндром, сферой и эллипсоидом;
- исследование распределения интенсивности напряженного состояния за пространственной дифрагированной волной, образованной в результате падения предельной плоской волны на сферу и эллипсоид;
- исследование интенсивности дифрагированных волн вблизи переднего фронта дифрагированных волн на клине и конусе путем приближенной замены острой кромки цилиндрической поверхностью, а вершины конуса сферой малого радиуса δ .

Методы исследования. Методами исследования поставленной задачи являются аналитические точные и приближенные методы. Выполненные аналитические и численные расчеты обоснованы строгой формулировкой математической модели распространения и дифракции упругих волн на выпуклых препятствиях, корректной математической постановкой задачи, правильностью применения математического аппарата и программного обеспечения.

Тематика работы. Содержание диссертации соответствует п. 5 «Теория упругости, пластичности и ползучести», п. 8. «Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» (код по ГАСНТИ 30.19.23, 30.19.29).

Научная новизна:

- получено точное решение уравнения для интенсивности дифрагированной волны за цилиндром в области тени для случая коротких волн. Показано, что значение интенсивности волны затухает вдоль фронта дифрагированной волны и уменьшается по времени;

- лучевым методом проведен расчет интенсивности напряженного состояния за пространственной дифрагированной волной, образованной в результате падения предельной плоской волны на сферу. Показано затухание интенсивности дифрагированной волны вдоль ее фронта и в процессе распространения волны;

- построено выражение для интенсивности волны при ее распространении вдоль поверхности препятствия в форме эллипсоида в зависимости от времени, расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны. Построенные графики, показали экспоненциальное затухание интенсивности напряжений за дифрагированной волной в области тени за эллипсоидом;

- проведен расчет интенсивности дифрагированных волн лучевым методом вблизи переднего фронта дифрагированных волн в окрестности вершины клина путем приближенной замены острой кромки клина и вершины конуса цилиндрической поверхностью и сферой малого радиуса δ , соответственно. Построенные графики интенсивности напряженного состояния за продольной и сдвиговой дифрагированными волнами на клине и конусе показывают, что максимальное значение относительной интенсивности напряженного состояния достигается по направлению $\varphi \approx \pi/6$, по которому следует ожидать распространение возможных трещин сдвига после падения продольной волны.

Достоверность исследований, проведенных в диссертационной работе, основывается на физически строго сформулированной математической модели, правильности применения математического аппарата теории уравнений в частных производных. Достоверность проведенных исследований подтверждается тем, что полученные результаты соответствуют результатам, полученным при исследовании распространения гармонических волн, и физическому смыслу процесса дифракции упругих волн.

Практическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы при создании новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, современных задачах геофизики, сейсмологии, газо-нефтегазодобычи, добывающей промышленности и в учебном процессе при изучении волновой динамики.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета 2011 – 2014 гг., на научных сессиях факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского

государственного университета 2011 – 2014 гг., на международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проходившей в Воронежском госуниверситете 2011 г., 2013 г., на международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий» (Чебоксары, 2013 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 9 печатных работ, из них две в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Личный вклад автора. Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем или совместно с научным руководителем в процессе научной деятельности. В совместных публикациях диссертант участвовал в постановках всех задач и расчете геометрических характеристик дифрагированных волн. В работе [5] лично автором получено точное решение уравнения «переноса» для интенсивности дифрагированной волны за цилиндром. В работе [7] лично автором проведена линейная интерполяция параметров волны, обоснована возможность применения лучевого метода к расчету интенсивности дифрагированных волн. В работах [1,2,8,9] лично автором вычислена интенсивность дифрагированной волны на сфере и эллипсоиде. Лично автором выполнены все построения трехмерных графиков, визуализирующих полученные функциональные зависимости.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 162 наименований. Работа изложена на 124 страницах машинного текста, содержит 30 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель работы и задачи исследования, научная новизна диссертационной работы, выносимые на защиту научные положения и результаты, дана краткая аннотация по главам и краткий обзор работ, касающихся темы диссертации.

В первой главе приведены общие сведения из волновой динамики, из дифференциальной геометрии, приведена математическая модель распространения упругих волн, рассмотрен лучевой подход решения задачи дифракции упругих волн.

Рассмотрена замкнутая система уравнений, описывающая деформирование упругого материала:

$$\rho = \rho_0 = \text{const} , \quad (1)$$

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j , \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} , \quad (3)$$

где деформации ε_{ij} определяются по формулам Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) , \quad (4)$$

u_i - компонента вектора перемещений, σ_{ij} - компонента тензора напряжений, ρ - плотность, λ, μ - упругие параметры Ламе.

В перемещениях уравнения движения (2) динамической теории упругости при отсутствии массовых сил имеют вид в форме Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} . \quad (5)$$

Система уравнений в частных производных (5) при наличии границ физической области дополняется граничными условиями, а в силу наличия начала процесса необходимо включать еще начальные условия:

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma \text{ на } S, \alpha, \beta - \text{const} \quad (6)$$

$$u|_{t=t_0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = v_0 . \quad (7)$$

Волновая динамика предполагает изучение не всей динамической задачи, а только той ее части, где имеют место большие градиенты скоростей перемещений и напряжений. Под волной понимается подвижная область в трехмерном пространстве, ограниченная поверхностью, распространяющейся с постоянной скоростью.

В процессе распространения сильных или слабых волн, интенсивность их переднего фронта изменяется в соответствии с уравнением «переноса»:

$$\delta W / \tilde{c} \dots = F , \quad (8)$$

где W - интенсивность на переднем фронте волны, Ω - средняя кривизна переднего фронта волны, распространяющейся в неограниченном пространстве, \tilde{c} - скорость переднего фронта волны, t - время, $\delta / \delta t$ - производная по времени, примененная к функции, заданной на переднем фронте бегущей волны. Для решения уравнения «переноса», необходимо задание начального условия:

$$W = W_0 \text{ при } t = t_0 \quad (9)$$

и знание начальных средней и гауссовой кривизн: Ω_0 и K_0 .

В случае применения лучевой теории и уравнения (8) к исследованию распространения дифрагированных волн, начальные средняя и гауссова кривизны дифрагированного фронта в момент его зарождения неограниченны, и хотя бы один из главных радиусов кривизны равен нулю. Поэтому начальные положения дифрагированного волнового фронта желательно сдвинуть на малое расстояние Δn в область возмущения за фронтом волны (рис.1) и тем самым избавиться от особенности геометрической характеристики волнового фронта. Такое предположение соответствует рассмотрению коротких волн по направлению нормали n за $\Sigma_{\text{диф}}$. В случае произвольного напряженно-деформированного состояния за фронтом падающей волны сделанные предположения о рассмотрении коротких волн соответствуют линейной интерполяции за фронтом волны с погрешностью порядка Δn^2 . На рис.1 изображено характерное поведение параметров дифрагированной волны, на которой $\frac{\partial f^-}{\partial n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow 0$ и поэтому для описания слабых особенных дифрагированных волн желательно взять в качестве ее интенсивности конечную величину. В качестве интенсивности особенной слабой волны предлагается ее линейная интерполяция в точке $n = 0$ через ее значение на некотором расстоянии Δn за фронтом. Так что при $n \rightarrow 0$ $\frac{\partial w}{\partial n} \rightarrow \infty$, $\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(\Delta n \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right) = w_f$. Величина w_f может быть принята за интенсивность слабой особенной дифрагированной волны, для которой начальное условие является конечным, что позволяет использовать лучевой метод исследования распространения волн (рис.1).

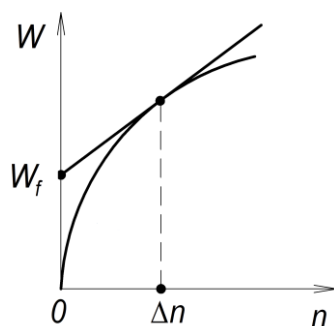


Рисунок 1 – Схематическое изображение аппроксимации слабой особенной волны $\Sigma_{\text{д}}$ волной конечного разрыва w_f

Интенсивность сильных или слабых волн изменяется в процессе распространения волн за счет двух факторов: диссипации энергии на фронте волны и изменения геометрии переднего фронта волны, то есть свертывания или развертывания переднего фронта, как геометрической поверхности. Волновые фронты распространяются для ограниченных

возмущений в соответствии с принципом Гюйгенса со скоростью звука в направлении нормали к волновой поверхности.

В предположении малой толщины зоны быстрого изменения функции можно ввести понятие скачков самой функции, ее нормальных производных любого порядка и воспользоваться продолжением решения за волновой фронт в виде степенного ряда Тейлора. Если известны решение $u^+(x, t)$ впереди волновой поверхности Σ , скачки функции u и ее производные по нормали n на Σ , то можно продолжить решение за Σ (рис.2) с использованием степенных рядов Тейлора (10). Обозначив $[u] = u^+ - u^-$ скачок функции на поверхности Σ , $[u_{,n\dots n}^{(k)}] = u_{,n\dots n}^{(k)+} - u_{,n\dots n}^{(k)-}$ скачок нормальной производной от функции u на поверхности Σ , представим поведение функции u за Σ в виде ряда Тейлора, называемого «лучевым» разложением:

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial^l u}{\partial n^l} \right) - \left[\frac{\partial^l u}{\partial n^l} \right] \right) \frac{h^l}{l!}, \quad (10)$$

здесь h - расстояние по нормали от Σ влево.

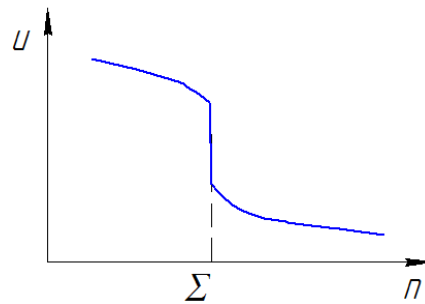


Рисунок 2 – Графическое изображение решения $u(x, t)$ впереди и за поверхность Σ

При практическом использовании лучевого разложения ряд (10) обрывают конечным числом членов $l = N$, так что остаточный член R_N определяется

$$R_N = M \frac{h^{N+1}}{N!}, \quad \text{где } M = \max_{\xi \in [0, h]} \left| \left(\frac{\partial^{N+1} u}{\partial n^{N+1}} \right) - \left[\frac{\partial^{N+1} u}{\partial n^{N+1}} \right] \right|. \quad (11)$$

Существуют две возможности уменьшения R_N : за счет увеличения числа N членов лучевого разложения и за счет разбиения интервала H , на который продолжается решение за Σ на шаге $h = H/N$. Конечный отрезок лучевого разложения (10) может служить приближенным решением задачи Коши с условиями на волновой поверхности Σ с оценкой погрешности в виде:

$$R_N \leq \exp(M_H H) (M_h H h^N + N \delta_0 + |R_0|). \quad (12)$$

Во второй главе исследована дифракция плоской упругой волны на цилиндре рис. 3.

Уравнение дифрагированного фронта для определения его кривизны в плоском случае в параметрическом виде представлено соотношениями:

$$\begin{cases} x = (\tilde{c} \dots \dots \sin 2\varphi + \sin \varphi) + R \cos 2\varphi \cos \varphi, \\ y = (\tilde{c} \dots \dots \sin 2\varphi + \cos \varphi) + R \cos 2\varphi \sin \varphi. \end{cases} \quad (13)$$

Решение уравнения «переноса» (8) для дифрагированной волны дает интенсивность на цилиндре в области тени:

$$\frac{w_{\Sigma}}{w_0} = \exp\left(-\frac{R}{h}\varphi\right) \left| 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\tilde{c} \dots \dots}{R} \operatorname{ctg} 2\varphi \right|^{\frac{-1}{3 \cos 2\varphi}}. \quad (14)$$

Здесь w_0 - интенсивность плоской падающей волны Σ_{nao} .

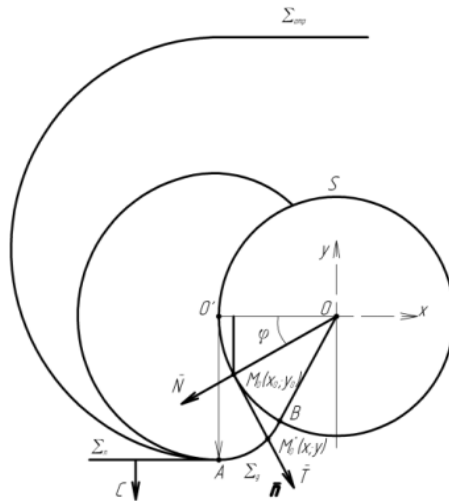


Рисунок 3 – Схематическое изображение картины падения и дифракции плоской волны на препятствие

Интенсивность $w(t, \varphi)$ дифрагированной за окружностью S волны Σ_{nao} , задаваемая выражением (14) определена на части плоскости (t, φ) . На рис.4 приведен пространственный график поверхности $w(t, \varphi)$, где под φ надо понимать параметр вдоль дифрагированной волны, который фиксирует точку на цилиндре, в которой точка дифрагированного фронта зародилась, t -время существования данной точки дифрагированного фронта, $\tilde{c} \dots \dots \varphi = n$ - расстояние, пройденное рассматриваемой точкой дифрагированной поверхности по направлению нормали.

Из рис.4 следует экспоненциальное убывание интенсивности дифрагированной волны в область тени.

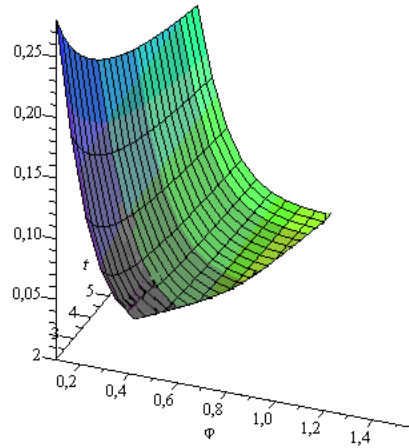


Рисунок 4 – Зависимость интенсивности дифрагированной волны от времени t и параметра φ ($\tilde{c} = \dots \dots \dots \varphi$)

В третьей главе рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклыми препятствиями в форме сферы и эллипсоида.

При распространении дифрагированного фронта вдоль поверхности препятствия интенсивность зависит от времени, расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны (рис.5).

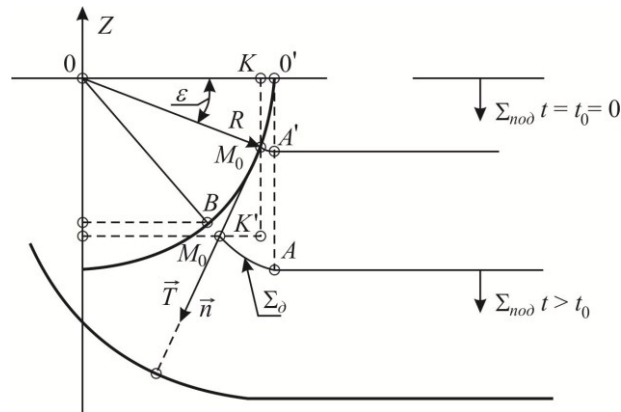


Рисунок 5 – Схематическое изображение сечения дифрагированной волны за сферой

На поверхности сферы интенсивность дифрагированной волны определяется уравнением «переноса» вдоль криволинейных лучей, которыми является образующая сферы. Уравнение «переноса» в этом случае имеет вид:

$$\frac{\delta w_0(\varepsilon)}{R \delta \varepsilon} + \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} + \frac{1}{4 \sin 2\varepsilon} \right) w_0(\varepsilon) = 0 \quad (15)$$

Начальным условием для $w_0(\varepsilon)$ является значение интенсивности падающей волны при $\varepsilon = 0$: $w(0) = w_0(0)$. Решением дифференциального уравнения (15) является:

$$\frac{w_0(\varepsilon)}{w_0(0)} = \exp \left\{ - \int_0^\varepsilon \frac{1}{2 \cos \psi} \left(1 + \frac{1}{8 \sin \psi} \right) d\psi \right\} \quad (16)$$

Интенсивность дифрагированной волны от момента ее зарождения и до текущего момента времени t удовлетворяет уравнению (8) и имеет вид:

$$\frac{w(t, \varepsilon)}{w_0} = \exp \left\{ - \int_0^\varepsilon \frac{1}{2 \cos \psi} \left(1 + \frac{1}{8 \sin \psi} \right) d\psi - \int_0^{\xi - \varepsilon} \Omega_0 \left(\frac{R}{c} \tau, \varepsilon \right) c d\tau \right\}, \quad (17)$$

где средняя кривизна дифрагированного фронта Ω_0 определяется по значениям ее главных кривизн $\chi_1(t, \varepsilon)$, $\chi_2(t, \varepsilon)$.

$$\Omega_0(t, \varepsilon) = \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{\cos \varepsilon - (\xi - \varepsilon) \sin \varepsilon} + \frac{1}{4 \sin 2\varepsilon - 3(\xi - \varepsilon) \cos 2\varepsilon} \right], t > R\varepsilon/c, \xi = \tilde{c}, \dots \quad (18)$$

Из (17) следует, что интенсивность дифрагированной волны экспоненциально убывает за счет ее распространения вдоль меридиана по сфере и геометрического затухания разворачивания дифрагированного фронта.

На рис.6 представлен график относительной интенсивности $w(t, \varepsilon)/w_0$ дифрагированной волны вдоль ее фронта в зависимости от времени и угла ε , характеризующего положение точки на фронте дифрагированной волны в момент ее зарождения.

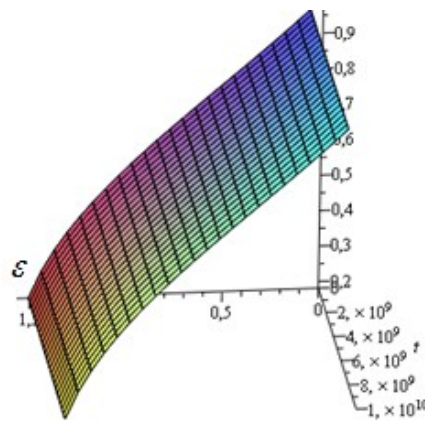


Рисунок 6 – График изменения интенсивности дифрагированной волны за сферой вдоль ее фронта в зависимости от времени и угла ε

Интерес представляет интенсивность волны на ее фронте для $\varepsilon \in [0, \pi/2]$, так как при $\varepsilon = \pi/2$ интенсивность продольной волны по направлению $\varphi = \pi/2$ становится равной 0 и дальше для $\varepsilon > \pi/2$ будет распространяться волна слабого разрыва более высокого порядка, чем падающая.

Как следует из рис.6, интенсивность дифрагированной волны совпадает с интенсивностью падающей волны в начальный момент зарождения дифрагированной волны и далее экспоненциально убывает вдоль поверхности сферы и вдоль фронта волны.

Анализ напряженно-деформированного состояния в материале сферы показал, что продольная дифрагированная волна вызывает в материале препятствия только продольную волну, интенсивность которой ω отличается от интенсивности дифрагированной волны коэффициентом, зависящим от отношения плотностей и отношения упругих параметров материала среды и материала препятствия.

Для оценки напряженного состояния в материале препятствия вычислен второй инвариант девиатора тензора напряжений для сравнения его с пределом пластичности в соответствии с условием Мизеса $I_2^2(0) = 2k^2$. Второй инвариант девиатора тензора напряжений в материале сферы определяется выражением:

$$I_2^2 = \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = \frac{2}{3} \mu_1 (4\mu_1 - 3\lambda_1) \left(\frac{\omega_1}{c_1} \right)^2$$

Относительная интенсивность напряжений за продольной волной в материале препятствия определяется соотношением упругих параметров препятствия и окружающей среды:

$$\frac{I_{2npен}^2}{I_{2нао}^2} = \frac{\lambda^2 \mu_1 (4\mu_1 - 3\lambda_1)}{\mu (4\mu - 3\lambda) (\lambda_1 + 2\mu_1)^2}$$

Для частного случая идеальной упругой среды $\lambda = \mu$, $\lambda_1 = \mu_1$ интенсивность напряжений за дифрагированной волной в препятствии будет в три раза меньше, чем в окружающей среде: $\frac{I_{2npен}}{I_{2нао}} = \frac{1}{3}$.

Проведено исследование интенсивности пространственных дифрагированных волн за препятствием в виде эллипсоида (рис.7), заданного в параметрическом виде уравнениями:

$$x = a \sin u \cos v, y = b \sin u \sin v, z = -c \cos u. \quad (19)$$

Линиями главных кривизн являются сечения поверхности эллипсоида плоскостями $v = v_0$ (меридианы) и $u = u_0$ (параллели).

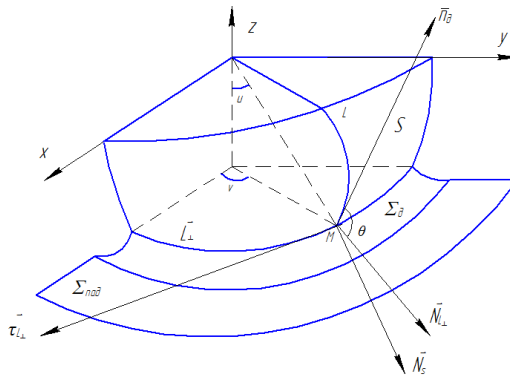


Рисунок 7 – Схематическое изображение падающей и дифрагированной волн на эллиптическую поверхность

Для построения дифференциального уравнения «переноса» интенсивности дифрагированной волны вычисляются начальные главные кривизны поверхности Σ_0 :

$$\chi_2^0 = \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)}. \quad (20)$$

Вследствие особенностей зарождения фронта дифрагированной волны Σ_0 в точке M при ее распространении вдоль линии L начальный радиус кривизны равен 0, и кривизна неограниченна. Это объясняется тем, что в соответствии с принципом Гюйгенса, точка, в которую пришла волна, становится источником возмущения. Эта точка может рассматриваться как сфера бесконечно малого радиуса. Поэтому для проведения расчетов будем полагать начальный радиус кривизны $\rho_1^0 = \delta$, а $\chi_1^0 = \frac{1}{\delta}$. Такое предположение соответствует сдвигу от поверхности эллипсоида на малое расстояние порядка δ .

Уравнение «переноса» интенсивности W_S зарождающейся дифрагированной волны за эллипсоидом вдоль линии L на S имеет вид:

$$\frac{\delta W_S}{\delta s} - \Omega W_S = 0, \text{ где } \Omega = \Omega_0 = \frac{\chi_1^0 + \chi_2^0}{2}. \quad (21)$$

Знание средней кривизны Ω_0 и элемента дуги δs , как функции угловых параметров u и v , позволяет записать решение дифференциального уравнения (21) для относительной интенсивности дифрагированной волны:

$$\frac{W_S}{W_S^0} = \exp \left(\int_0^u \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) \cdot \sqrt{C} \delta u \right). \quad (22)$$

На рис.8 представлены графики изменения относительной интенсивности дифрагированной волны для различных случаев ее движения по поверхности эллипсоида.

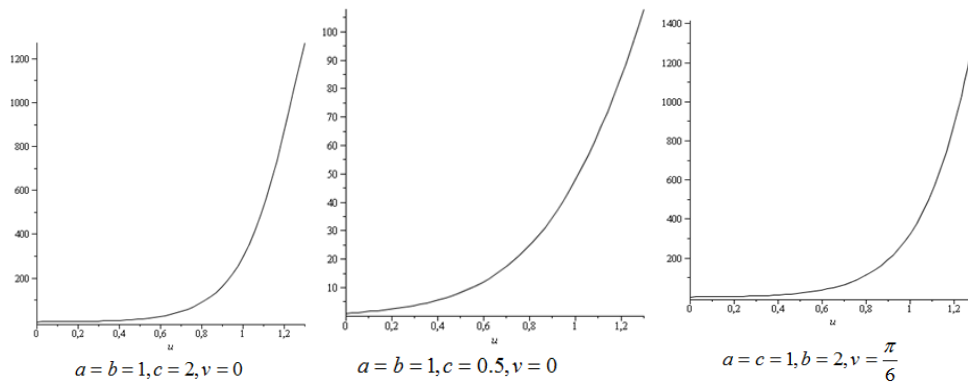


Рисунок 8 – Графики изменения интенсивности в зависимости от параметра u и на поверхности эллипсоида

Изменение интенсивности дифрагированной волны вне поверхности эллипсоида, распространяющейся свободно в неограниченном пространстве, определяется выражением:

$$\frac{W_{\Sigma}}{W_{\Sigma}^0} = \exp \left\{ \int_0^{\tilde{c}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) - \frac{\sqrt{C} \tilde{c}}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right] - \left[1 - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{\sqrt{C}}{A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right) \tilde{c} - \frac{\sqrt{C} \tilde{c}}{\delta A \cos u \sin u_0 \cos(v - v_0)} \right] \tilde{c} \right\},$$

из которого следует, что вследствие зависимости начальных кривизн χ_1^0, χ_2^0 от координат точки зарождения дифрагированной волны u, v , интенсивность дифрагированной волны будет зависеть от параметров точки ее зарождения и пройденного расстояния \tilde{c} вдоль нормали к поверхности Σ_0 .

В четвертой главе рассмотрена задача прямой дифракции упругой продольной волны на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки окружностью и сферой малого радиуса δ , соответственно. Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Заключение содержит оценку вклада автора в проведенные в диссертации исследования и значимости полученных результатов:

1. Получено точное решение уравнения для интенсивности дифрагированной волны за цилиндром в области тени. Показано, что значение интенсивности волны затухает вдоль фронта дифрагированной волны и уменьшается по времени.

2. Рассмотрена задача дифракции предельной пластической волны на сфере. Получено выражение для определения интенсивности дифрагированной волны от момента ее зарождения до текущего момента. Показано, что интенсивность

дифрагированной волны экспоненциально убывает за счет ее распространения вдоль меридиана по сфере и геометрического затухания при разворачивании дифрагированного фронта. Построенные графики, отображающие зависимость интенсивности от параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида подтверждают физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

3. Рассмотрено лучевое представление интенсивности дифрагированной волны за выпуклым препятствием в форме эллипсоида. При распространении дифрагированного фронта вдоль поверхности препятствия интенсивность зависит от времени, расстояния, пройденного точкой волны, и параметров, характеризующих пространственное положение дифрагированной волны. Построены графики, отображающие эту зависимость для разных случаев распространения волны на поверхности эллипсоида. В результате проведенного исследования получил подтверждение физически оправданный факт экспоненциального затухания интенсивности дифрагированной волны в области тени за препятствием.

4. Рассмотрена задача прямой дифракции упругой продольной волны на клине и конусе путем замены сингулярной угловой точки окружностью и сферой малого радиуса δ , соответственно. Предельные значения интенсивности отраженных волн при $\delta \rightarrow 0$ дают интенсивности дифрагированных волн, совпадающие с известными классическими выражениями для дифрагированных гармонических волн.

Публикации автора

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Быкова К.И. Интенсивность напряженно-деформированного состояния за дифрагированной волной на сфере и за порожденной упругой волной в шаре / К.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – Чебоксары, 2014. – №3(21). – С. 149-159.

2. Быкова К.И. Лучевое представление дифракции плоской упругой волны за выпуклым препятствием / К.И. Быкова, М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, Математика. – Воронеж, 2015. – №1. – С.18-26.

Статьи и материалы конференций

3. Быкова К.И. Распределение интенсивности волны на дифрагированном фронте за цилиндром / К.И. Быкова // Труды молодых ученых: секция математика. – 2011. – Вып. 1-2. – С. 19-25.

4. Быкова К.И. Лучевое приближение задачи дифракции плоской волны на сфере / К.И. Быкова // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. – Вып. 9. – Ч.1. – С. 73-79.

5. Быкова К.И. Лучевое приближение плоской задачи дифракции / К.И. Быкова, М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Сборник трудов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2011. – С. 93-98.

6. Быкова К.И. Предельное напряженное состояние за дифрагированной пластической короткой волной на сфере / К.И. Быкова // Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий». – Чебоксары, 2013. – С.43-49.

7. Быкова К.И. К дифракции предельной плоской продольной пластической волны за выпуклым препятствием / К.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2013. – С. 65-68.

8. Быкова К.И. Перенос интенсивности дифрагированной волны на теневой стороне выпуклого препятствия [Электронный ресурс] / К.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Nauka-Rastudent.ru: электронный научно-практический журнал. – Уфа, 2015. – № 13. – С. 1-7. – Режим доступа: <http://nauka-rastudent.ru/13/2391/>.

9. Быкова К.И. Исследование напряженного состояния в окрестности порожденных дифрагированных волн / К.И. Быкова, М.И. Быкова, Н.Д. Вервейко // Научный журнал «Молодой ученый». – Казань, 2015. – №3(1). – С.104-107.