На правах рукописи

Дуплищева Анастасия Юрьевна

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Баскаков Анатолий Григорьевич.

Официальные оппоненты: Глушак Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, кафедра математики, профессор,

Курбатова Ирина Витальевна, кандидат физико-математических наук, Военный учебно-научный центр ВВС "Военно-воздушная академия им. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", кафедра математики, преподаватель.

Ведущая организация: Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ.

Защита состоится 8 сентября 2015 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335. С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2769

Автореферат разослан июня 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Диссертация посвящена спектральной теории разностных операторов с операторными коэффициентами, действующими в банаховом пространстве векторных последовательностей.

Необходимость развития спектральной теории разностных операторов диктуется различными обстоятельствами. Разностные операторы широко используются при создании методов дискретизации дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Теория разностных уравнений широко используется в численном анализе, теории управления, компьютерных науках, а также применяется при изучении математических моделей, возникающих в механике сплошной среды, квантовой механике, при описании химических реакций и т. д.

Первые исследования, посвященные разностным операторам, появились еще в конце XIX – начале XX столетия. В работах О. Перрона и А. Пуанкаре изучались вопросы поведения на бесконечности некоторых типов разностных операторов, связанных с операторами взвешенного сдвига. Внимание к разностным уравнениям прежде всего обусловлено их применением в исследованиях разрешимости различных дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений (работы А. Б. Антоневича, А. Г. Баскакова, М. С. Бичегкуева, Р. Беллмана и К. Л. Кука, И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана, В. Г. Курбатова, Х. Л. Массера и Х. Х. Шеффера, Д. Хенри).

В монографиях З. Нитецки, П. Халмоша, Ю. Д. Латушкина и А. М. Степина отражено использование разностных операторов в спектральной теории динамических систем. Связь разностных операторов с задачами теории функций рассматривались в работах Ю. Ф. Коробейника, А. А. Миролюбова и М. А. Солдатова, Н. К. Никольского, А. Л. Шилдса.

Особенно важное значение спектральной теории разностных операторов приобрело в последнее время при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами. Так в статьях А. Г. Баскакова каждому линейному оператору, действующему в банаховом пространстве непрерывных ограниченных функций на всей оси (полуоси), ставится в соответствие разностный оператор, действующий в пространстве ограниченных векторных последовательностей. Установлено, что эти операторы одновременно обратимы, имеют одинаковой размерности ядра, имеют одинаковую коразмерность образов.

Многие свойства решений (ограниченность, почти периодичность, устойчивость) линейных разностных (дифференциальных) уравнений тесно связаны с соответствующими свойствами разностного (дифференциального) оператора, определяющего рассматриваемое уравнение и действующего в подходящем функциональном пространстве. Его свойства обратимости, корректности, фредгольмовости, а также структура спектра зависят от размерности ядра, коразмерности образа, их дополняемости.

Таким образом, тема диссертации является вполне актуальной.

Диссертация посвящена изучению разностных и дифференциальных операторов второго порядка, вопросам обратимости, описанию ядер, образов, проекторов на ядра и образы. Большое внимание уделяется описанию ограниченных решений разностных уравнений первого порядка, описана структура решений, получено достаточное условие существования решений.

Цель работы.

1. Изучение спектральных свойств разностных операторов второго порядка.

2. Изучение спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка.

3. Изучение качественной структуры решений разностных операторов первого порядка.

Методы исследования. Для исследования спектральных свойств рассматриваемых операторов используется спектральная теория дифференциальных и разностных операторов, теория полугрупп, теория гармонического анализа, прием сопоставление исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка и последующее использование теории разностных операторов первого порядка, определяемых этой операторной матрицей.

Научная новизна. Основные результаты диссертационной работы являются новыми. Из них выделим следующие:

1. Спектральный анализ разностных операторов (уравнений) второго порядка:
   - получены условия инъективности операторов, описаны их ядра, проекторы на ядра операторов;
   - исследовано свойство сюръективности операторов, описаны их образы, проекторы на образы операторов;
   - получены условия обратимости, явный вид обратного оператора;
   - исследованы условия фредгольмовости;
   - получено асимптотическое представление решений однородного разностного уравнения.
2. Спектральный анализ дифференциальных операторов (уравнений) второго порядка:
   - получены условия инъективности операторов;
   - исследовано свойство сюръективности операторов;

- получено условие обратимости, формула для обратного оператора.

3. Изучение качественной структуры решений разностных уравнений первого порядка:

   - получены формулы асимптотического представления решений разностных уравнений первого порядка;
   - получены условия существования ограниченных решений.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер и может быть использована при дальнейшем развитии спектральной теории разностных и дифференциальных операторов второго порядка, а также дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна 2014 [9], на весенней математической школе «Понтрягинские чтения XXV» 2014 [6], на Крымской осенней математической школе 2012 [4], на Крымской международной математической конференции 2013 [5], на математическом интернет-семинаре ISEM-2013 [12], ISEM-2014 (Германия, Блаубойрен), на международной конференции «Spectral Theory and Differential Equations», посвященной 100-летию Б. М. Левитана [14], на семинарах А.Г. Баскакова, а также на научных сессиях ВГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-14]. Работы [2], [7], [8], [10], [11] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместной публикации [11] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения,

четырех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 110 наименований. Общий объем диссертации - 99 страниц.

Содержание диссертации

В первой главе диссертации приводятся основные понятия спектральной теории операторов, необходимые для изложения результатов диссертации.

Во второй главе в банаховом пространстве $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $1 \leq p \leq \infty$, двусторонних последовательностей векторов из комплексного банахова пространства $\mathfrak{X}$ ($End\,\mathfrak{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$) рассматривается разностное уравнение второго порядка вида:

$$x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $f \in l^p$, $B_k : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}$, $k = 1, 2$, – ограниченные операторнозначные функции, т. е. $B_k \in l^\infty(\mathbb{Z}, End\,\mathfrak{X})$, $k = 1, 2$. Символом S обозначим оператор сдвига последовательностей из l^p: $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$.

Любой последовательности $x \in l^p$ поставим в соответствие последовательность $y : \mathbb{Z} \to \mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ вида: $y(n) = (x_1(n), x_2(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_1 = x$, $x_2 = Sx$. Последовательность $x \in l^p$ есть решение уравнения (1) тогда и только тогда, когда последовательность $y \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ удовлетворяет уравнению (рассматриваемому в $l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$):

$$z(n+1) + U(n)z(n) = \tilde{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\tilde{f} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$, $\tilde{f}(n) = (0, f(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, и операторнозначная функция $U : \mathbb{Z} \to End\,\mathfrak{X}^2$ имеет вид: каждый оператор $U(n) \in End\,\mathfrak{X}^2$ задается (определяется) в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Уравнения (1) и (2) запишем в операторном виде:

$$\mathcal{D}x = f,\ f \in l^p\ = l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}),$$

$$\mathbb{D}y = g,\ g \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}), \tag{4}$$

где разностный оператор $\mathcal{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ определяется формулой:

$$\mathcal{D} = S^2 + \tilde{B}_1 S + \tilde{B}_2.$$

В этой формуле $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ – операторы умножения в $l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ на операторные функции $B_1, B_2 : \mathbb{Z} \to End\, \mathfrak{X}$ соответственно, т. е.

$$(\tilde{B}_k x)(n) = B_k(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}),\ k = 1, 2.$$

Оператор $\mathbb{D} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ в (4) имеет вид:

$$\mathbb{D} = \mathbb{S} + \mathbb{B},$$

где операторы $\mathbb{S}, \mathbb{B} \in End\, l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2)$ определяются равенствами:

$$\mathbb{S}x = (Sx_1, Sx_2), (\mathbb{B}x)(n) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix},$$

$$n \in \mathbb{Z},\ x = (x_1, x_2) \in l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}^2) \simeq l^p\,(\mathbb{Z} \times \mathfrak{X}) \times l^p\,(\mathbb{Z} \times \mathfrak{X}).$$

Таким образом, оператор $\mathbb{D}$ определяется в $l^p\ \times l^p$ матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} S & -I \\ \tilde{B}_2 & S + \tilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Для соответствующих операторов приводятся условия их обратимости, фредгольмовости, получено асимптотическое представление решений однородного разностного уравнения.

Далее систематически используется

Определение 2.2.1 Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство и $A \in End\, \mathcal{X}$. Рассмотрим следующие условия:

1) $Ker A = \{x \in \mathcal{X} : Ax = 0\} = \{0\}$ (т. е. A – инъективный оператор);

2) $1 \leq n = \dim\ Ker\, A < \infty$;

3) $Ker\, A$ – бесконечномерное подпространство в $\mathcal{X}$ ($\dim\ Ker\, A = \infty$);

4) $Ker\, A$ – дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$;

5) $\overline{Im\, A} = Im\, A$ (образ оператора A замкнут в $\mathcal{X}$), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in \mathcal{X} \setminus Ker\, A} \frac{||Ax||}{dist(x, Ker\, A)},$$

где $dist\,(x, Ker\, A) = \inf\limits_{x_0 \in Ker\, A} ||x - x_0||$ – расстояние от вектора x до подпространства $Ker\, A$;

6) оператор A корректен (равномерно инъективен), т. е. $Ker\, A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$;

7) $Im\, A$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{X}$ конечной коразмерности, т. е. $codim\ Im\, A = m \geq 1$;

8) $Im\, A$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$ бесконечной коразмерности, т. е. $codim\ Im\, A = \infty$;

9) $Im\, A \neq \mathcal{X}$, $\overline{Im\, A} = \mathcal{X}$;

10) $\overline{Im\, A} \neq \mathcal{X}$;

11) $Im\, A = \mathcal{X}$ (A – сюръективный оператор);

12) оператор A обратим (т. е. $Ker\, A = \{0\}$ и $Im\, A = \mathcal{X}$).

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 12$, то будем говорить, что оператор A находится в *состоянии обратимости* σ. Множество всех состояний обратимости оператора A обозначим символом $St_{inv}A$.

В *третьем параграфе* вводится понятие эволюционного семейства и экспоненциальной дихотомии.

В *четвертом параграфе* в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ рассматривается оператор $\mathcal{A} \in End\,\mathcal{X}$ вида $\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2 \in End\,\mathcal{X}$. Наряду с

оператором $\mathcal{A}$ рассматривается оператор $\mathbb{A} \in End\,\mathcal{X}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A+C_1 \end{pmatrix}$, т. е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + (A+C_1)x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$.

Теорема 2.4.1 *Множество состояний обратимости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ совпадает: $St_{inv}\mathcal{A} = St_{inv}\mathbb{A}$.*

Теорема 2.5.1 *Множество состояний обратимости разностных операторов $\mathcal{D} \in End\,l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$, $\mathbb{D} \in End\,l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ совпадают.*

Теорема 2.5.4 *Операторы $\mathcal{D}$ и $\mathbb{D}$ одновременно обратимы и обратный к $\mathbb{D}$ имеет вид:* $\begin{pmatrix} \mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) & \mathcal{D}^{-1} \\ S\mathcal{D}^{-1}(S + \tilde{B}_1) - I & S\mathcal{D}^{-1} \end{pmatrix}$.

Теперь рассмотрим разностный оператор

$$\mathcal{D} : l^p \to l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}), (\mathcal{D}x)(n) = x(n+2) + B_1x(n+1) + B_2x(n), n \in \mathbb{Z}, x \in l^p,$$

где $B_1, B_2 \in End\,\mathfrak{X}$. Далее используется функция

$$H = H_{\mathcal{D}} : \mathbb{T} \to End\,\mathfrak{X}, H(\gamma) = \gamma^2 I + \gamma B_1 + B_2,\ \gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$

которую назовем *характеристической функцией* оператора $\mathcal{D}$. Дополнение $s(H) = \mathbb{T} \setminus \rho(H)$ к (открытому) множеству $\rho(H) = \{\gamma_0 \in \mathbb{T} : H(\gamma_0)$ - обратимый оператор из $End\,\mathfrak{X}\}$ назовем *сингулярным* множеством функции.

Теорема 2.5.5 *Разностный оператор $\mathcal{D}$ (с постоянными операторными коэффициентами B_1, B_2) обратим тогда и только тогда, когда множество $s(H) = \varnothing$. Если $s(H) = \varnothing$, то обратный оператор $\mathcal{D}^{-1} \in End\,l^p$ представим в виде*

$$(\mathcal{D}^{-1}x)(n) = (G * x)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n-m)x(m),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X}).$$

Функция G принадлежит банаховой алгебре $l^1(\mathbb{Z}, End\,\mathfrak{X})$ (со сверткой

функций в качестве умножения) и допускает представление вида

$$G(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} (H(\gamma))^{-1} \gamma^n d\gamma, \; n \in \mathbb{Z}.$$

В условиях следующей теоремы будем полагать, что существуют (в равномерной операторной топологии) пределы: $\lim\limits_{n\to\pm\infty} B_1(n) = B_1^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}$, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} B_2(n) = B_2^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}$. Спектры $\sigma(\mathbb{B}^{\pm})$ операторов $\mathbb{B}^{\pm} \in End\,\mathfrak{X}^2$, определяемых операторными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2^{\pm} & B_1^{\pm} \end{pmatrix}$, совпадают со спектром $\sigma(L^{\pm})$ соответствующего операторного пучка $L^{\pm}(\lambda) = \lambda^2 I - B_1^{\pm}\lambda + B_2^{\pm}$.

Теорема 2.5.8 *Разностный оператор $\mathcal{D} \in End\,l^p$ обратим, если спектральные радиусы $r\,(L^{\pm}) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(L^{\pm})\}$ операторных пучков $L^{\pm}$ меньше единицы.*

Предположение 2.5.1 *Существуют числа $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \le b$, такие, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_{-,a} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \le a\}, \mathbb{Z}_{b,+} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge b\}$ с расщепляющими парами проекторнозначных функций $P_-, Q_- : \mathbb{Z}_{-,a} \to End\,\mathfrak{X}$, $P_+, Q_+ : \mathbb{Z}_{b,+} \to End\,\mathfrak{X}$.*

Теорема 2.5.10 *Пусть $\mathfrak{X}$ – конечномерное пространство. Оператор $\mathcal{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, построенных по функции $U : \mathbb{Z} \to End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, определяемой матрицей вида (3), удовлетворяет условиям предположения 2.5.1.*

Теорема 2.5.11 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.8, операторы $B_1(n)$, $B_2(n), n \in \mathbb{Z}$, компактны и $\sigma(\mathbb{B}^{\pm}) \bigcap \mathbb{T} = \emptyset$. Тогда оператор $\mathcal{D} \in End\,l^p\,(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ фредгольмов.*

Далее рассматривается однородное уравнение

$$x(n+2) + B_1(n)x(n+1) + B_2(n)x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Предположение 2.5.2 *Пусть функции* $B_1, B_2 : \mathbb{Z}_+ \to End\,\mathfrak{X}$ *являются постоянными* ($B_k(n) \equiv B_k \in End\,\mathfrak{X}, n \in \mathbb{Z}_+, k = 1, 2$) *и все решения однородного разностного уравнения, рассматриваемого на* $\mathbb{Z}_+$, *ограничены.*

Теорема 2.5.12 *Пусть выполнены предположения 2.5.2 и условие* $\sigma(\mathbb{B}) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. *Тогда существуют операторнозначные функции* $A_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, End\,\mathfrak{X}^2)\,, 1 \le k \le m$, *такие, что для любого решения* $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathfrak{X}$ *уравнения (5) имеют место следующие равенства:* $(x(n), x(n+1)) = (\sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_k^n A_k(n))(x(0), x(1)), n \in \mathbb{Z}_+$. *Функции* $A_k, 1 \le k \le m$, *обладают следующими свойствами:*

1) операторы $A_k(n) \in End\,\mathfrak{X}^2, n \in \mathbb{Z}_+$, *принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре* $\mathcal{A}_{\mathbb{B}}$ *из* $End\,\mathfrak{X}^2$, *содержащей оператор* $\mathbb{B}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ||A_k(n+1) - A_k(n)|| = 0$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbb{B}A_k(n) - \gamma_k A_k(n)|| = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} ||A_k(n)A_j(n)|| = 0$ *для* $k \ne j,\ 1 \le k,\ j \le m$.

В третьей главе в пространстве L^p рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$\ddot{x} + B_1(t)\dot{x} + B_2(t)x = f(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

где $x \in W_p^2, p \in [1, \infty], \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{X}), \quad B_i \in L^\infty(\mathbb{R}, End\,\mathfrak{X}),\ i = 1, 2.$ Путем замены

$$y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \dot{x}(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

дифференциальное уравнение вида (6) сводится к уравнению вида:

$$\dot{y} + \mathbb{B}(t)y = \tilde{f}(t), \tag{8}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $y \in W_p^1(\mathbb{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, $p \in [1, \infty]$, $\tilde{f} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$, а функция

$\mathbb{B} \in L^{\infty}(\mathbb{R}, End\,(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}))$ имеет вид:

$$(\mathbb{B}y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \ \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Во *втором параграфе* в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ рассматривается оператор $\mathcal{A} = A^2 + C_1 A + C_2 : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, где $D(\mathcal{A}) = D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$ и оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, заданный в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ матрицей $\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}$.

Теорема 3.2.1 *Оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathbb{A}$.*

В четвертой главе в конечномерном линейном нормированном пространстве X рассматривается разностное уравнение первого порядка вида:

$$x(t+1) = Bx(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad B \in End\,X, \quad f \in C_0. \tag{9}$$

Основным результатом данной главы является теорема о качественной структуре ограниченных решений данного уравнения.

Теорема 4.1.1 *Если существует равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (9), то оно представимо в виде: $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R}$, где $x_j \in C_{1,\infty}, 1 \le j \le m$, а числа φ_j принадлежат промежутку $[0, 2\pi)$, причем $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_m}\}$, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

Теорема 4.3.1 *Пусть $B \in End\,X$ - линейный оператор, спектр которого $\sigma(B)$ обладает свойством: $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = 1$. Если существует ограниченное равномерно непрерывное решение x_0 уравнения (9), то оно является периодической на бесконечности периода 1 функцией.*

Теорема 4.4.1 *Пусть спектр оператора B обладает свойством: $\sigma(B) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset \mathbb{T}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - полупростые собственные значения, функция f принадлежит классу Винера. Тогда уравнение (9) имеет ограниченное непрерывное решение.*

Список публикаций по теме диссертации

[1] Дуплищева А. Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. Ю. Дуплищева // Вестник ПММ. — 2010. — № 8. — С. 203–209.

[2] Дуплищева А. Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений / А. Ю. Дуплищева // Вестник ВГУ. Физика. Математика. — 2012. — № 1. — С. 110–117.

[3] Дуплищева А. Ю. О решении разностных уравнений / А. Ю. Дуплищева // Международный научный журнал. Спектральные и эволюционные задачи. — 2012. —Т. 22. — С. 62–65.

[4] Дуплищева А. Ю. Спектральный анализ разностных операторов / А. Ю. Дуплищева // Международная конференция КРОМШ. Сборник тезисов. — 2012. — С. 23–24.

[5] Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и матрицы второго порядка / А. Ю. Дуплищева // Сборник тезисов КММК-2013. — 2013. — С. 56–57.

[6] Дуплищева А. Ю. К вопросу обратимости разностных операторов второго порядка / А. Ю. Дуплищева // Современные методы краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXV» - Воронеж, 2014. — 2014. — С. 58.

[7] Дуплищева А. Ю. Матрицы второго порядка в исследовании операторных уравнений / А. Ю. Дуплищева // Научные ведомости БГУ. Математика, физика. — 2014. — В. 34. — № 5(176). — С. 12–16.

[8] Дуплищева А. Ю. Об условиях обратимости разностных операторов второго порядка / А. Ю. Дуплищева // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.. — 2014. — Т. 14. — № 4. — С. 44–49.

[9] Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и матрицы второго порядка / А. Ю. Дуплищева // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2014». — 2014. — С. 122.

[10] Дуплищева А. Ю. О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка / А. Ю. Дуплищева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15. — № 1. — С. 31-37.

[11] Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка / А. Г. Баскаков, А. Ю. Дуплищева // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79. — № 2. — С. 3–20.

[12] Duplishcheva A. Yu. Approximation theorems for operator semigroups / A. Yu. Duplishcheva // Operator Semigroups and Dispersive Equations. Workshop of the 16th Internet Seminar on Evaluation Equations, Blaubeuren, Germany. — 2013. — P. 11–12.

[13] Duplishcheva A. Yu. Difference equations and matrix of the second order / A. Yu. Duplishcheva // International Scientific Journal. Spectral and Evoluation problems: Proceedings of the Twenty Second Crimean Autumn

Mathematical School-Symposium. Simferopol. — 2013. — Vol. 23 — P. 168–170.

[14] Duplishcheva A. Yu. About difference equations and matrix of the second Order/ A. Yu. Duplishcheva // Спектральная теория и дифференциальные уравнения – Москва, 2014. — 2014. — С. 8–10.

Работы [2], [7], [8], [10], [11] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместной публикации [11] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.