На правах рукописи

Гим Метак Хамза Гим

Однопараметрические канонические полугруппы и корректные задачи без начальных условий для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2015

Работа выполнена в

Воронежском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор **Костин Владимир Алексеевич**.

Официальные оппоненты:

Пискарев Сергей Игоревич, доктор физико–математических наук, Московский государственный университет им.Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, ведующий научный сотрудник.

Ситник Сергей Михайлович, кандидат физико–математических наук, Воронежский институт МВД России, кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация: Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск).

Защита состоится 8 сентября 2015 г. в 16.30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2770

Автореферат разослан « » июня 2015.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор физико-математических наук, профессор

Гликлих Ю.Е.

Актуальность темы. Как известно, активное применение теории полугрупп и групп к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными началось с работ Ж.Адамара, заметившего, что задача Коши для волнового уравнения приводит к некоторым группам преобразований. При этом, из групповых свойств вытекают определенные теоремы сложения. В случае же преобразований параболического типа, когда соответствующие явления необратимы, вместо групп появляются полугруппы.

В работах Хилле, Иосиды, Филлипса и Като были заложены основы теории дифференциальных уравнений вида $u'(t) = Au(t)$ с неограниченным оператором A, которая, после этого, становится самостоятельной областью исследования, привлекающая внимание многих авторов, в числе которых важное место занимают и воронежские математики: С.Г. Крейн, М.А. Красносельский, П.Е. Соболевский, А.Г. Баскаков и др. Этой тематике посвящены также работы и других российских математиков: С.И. Пискарева, Г.А. Свиридюка, В.Е. Федорова и др.

В теории уравнений параболического типа важное место занимают однопараметрические полугруппы линейных преобразований $T(t)$, $t \geq 0$, называемые каноническими и определяемые соотношением $T(\alpha \oplus \beta) \doteq T(\alpha)T(\beta)$, где α, β — действительные или комплексные числа. При этом в системе рассматриваемых чисел можно выделить множество полугрупп, соответствующих разнообразным операциям сложения.

Так известно, что если $F(x, y)$ функция $x, y \in \mathbb{R}$, такая, что $F(x, y) \in \mathbb{R}^+$ и

$$F(x, (F(y, z)) = F(F(x, y), z), \tag{1}$$

то формула $\alpha \oplus \beta = F(\alpha, \beta)$ может служить определением полугрупповой операции в $\mathbb{R}^+$. При этом введение таких операций связывается с теоремами сложения для некоторых элементарных функций.

К таким сложениям, например, относятся:

$$1)\, \alpha + \beta,\ \ 2)\, \alpha \cdot \beta,\ \ 3) \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta},\ \ 4)\, \alpha(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

соответствующие функциям: $1)\, x,\ 2)\, \ln x,\ 3)\, \operatorname{th} x,\ 4)\, \operatorname{sh} x$.

В настоящей диссертации используется подход В.А. Костина введения широкого класса канонических полугрупп вида

$$T_{\rho,h}(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + \rho(t))], \tag{3}$$

со сложением

$$x \oplus t = \rho^{-1}[\rho(x) + \rho(t)]. \tag{4}$$

Здесь $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, функции $h(x)$ и $\rho(t)$ положительные и строго монотонно возрастающие, функция $\varphi(x)$ из соответствующего функционального пространства. В случае $\rho(t) = t$ сложение (4) обычное, т.е. $x \oplus t = x + t$.

Такие полугруппы называются арифметическими. Для них также справедливо соотношение

$$T_{\rho,h}(0)\varphi = \varphi. \tag{5}$$

Все полугруппы со сложением (2) являются арифметическими. Для арифметических полугрупп существуют константы M и ω такие, что выполняется оценка

$$\|T(t)\varphi\|_E \leq M e^{-\omega t} \|\varphi\|_E, \tag{6}$$

где E— соответствующее пространство. Определен производящий оператор (генератор) A, заданный дифференциальным выражением $\mathbb{D}_h\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dh(x)}$ с плотной в E областью определения.

То есть, арифметические полугруппы являются сильно непрерывными в нуле.

В диссертации методами теории сильно непрерывных полугрупп устанавливается корректная разрешимость по Адамару нестационарных задач для уравнения теплопроводности, называемых задачами без начальных условий, которые характерны для уравнений с особенностями, то есть рассматриваемых в неограниченных областях, либо с коэффициентами имеющими особенность, в частности, вырождающихся.

Например, многие процессы тепло– и массопереноса описываются нестационарной задачей

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \qquad t \in (-\infty, \infty), x \in (0, \infty). \tag{7}$$

$$u(t,0) = u_0(t), \qquad u(t,\infty) = 0. \tag{8}$$

t— время, x— пространственная координата, $u(t,x)$— температура.

Требуется определить выражение для теплового потока, т.е. производную от температуры по координате x на границе области

$$q(t) = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{9}$$

Частный случай такой задачи (когда $u_0(t)$— периодическая функция или заданная рядом Фурье) рассмотрен в монографии Ю.И. Бабенко. Здесь она называется задачей без начальных условий.

В настоящей диссертации, методами теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов, рассматривается более общая задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \gamma(t)u(t,x), \tag{10}$$

$x \in (0,\infty)$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, удовлетворяющая условиям

$$u(t,0) = u_0(t), \qquad u(t,\infty) = 0, \tag{11}$$

где $\alpha(t)$, $\gamma(t)$— произвольные непрерывные на (a,b)– функции, $u_0(t)$— элементы некоторого банахова пространства.

Эти исследования приводят к необходимости изучения дробных степеней операторов.

Понятие корректной разрешимости задач для эволюционных уравнений тесно связано с неравенствами коэрцитивности, дающим оценку сверху нормы решения некоторого эллиптического уравнения через норму известной функции и нормы граничных условий.

Работы по проблемам коэрцитивности для систем дифференциальных операторов с частными производными были начаты Н. Ароншайном в пятидесятых годах прошлого века, развиты Л. Хермандером, М. Шехтером, Д.Ж.Фигуэрдо и другими зарубежными математиками. Дальнейшему изучению этой проблемы для дифференциальных операторов в пространствах С.Л. Соболева изотропных и анизотропных посвящены фундаментальные работы О.В. Бесова, С.М. Никольского. Проблема коэрцитивности для эволюционных уравнений с оператором в банаховом пространстве исследовалась в работах П.Е. Соболевского.

В диссертации, по аналогии с системами дифференциальных операторов Бесова–Никольского вводятся системы C_0– операторных многочленов, то есть многочленов над полем комплексных чисел от производящего оператора сильно непрерывной полугруппы линейных операторов в банаховом пространстве, для которых устанавливаются неравенства коэрцитивности.

Результаты используются для исследования корректной разрешимости полигармонического уравнения С.Л. Соболева, в пространствах $W_l^p(\mathbb{R}^n)$, а также для обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями.

Цели и задачи исследования. 1. Установление корректной разрешимости, в смысле С.Г. Крейна, задач без начальных условий для дифференциального уравнения теплопроводности.

2. Установление коэрцитивных оценок для систем C_0– операторных полиномов.

3. Установление корректной разрешимости для задач без начальных данных для полигармонического уравнения.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории сильно–непрерывных полугрупп и групп преобразований и их приложений к конкретным задачам.

Научная новизна. 1. Изучены новые классы нестационарных задач без начальных данных для одномерного уравнения теплопроводности, коэффициенты которого имеют особенности.

2. Введены и изучены новые классы канонических полугрупп линейных преобразований в функциональных пространствах, введенных в диссертации.

3. Впервые установлены неравенства коэрцитивности для C_0– операторных многочленов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дают теоретические обоснования корректной разрешимости задач для дифференциальных уравнений, используемых в механике, гидродинамике, тепломассопереносе и т.д. Они актуальны при численной реализации задач с применением высокоскоростных компьютерных технологий.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе в 2014 г., на Воронежской математической школе "Понтрягинские чтения" в 2013, 2014 гг., на Международной молодежной научной школе "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"в 2012 г., а также на семинарах ВГУ по математическому моделированию (рук.— проф. В.А. Костин) и нелинейному анализу (рук.— проф. Ю.И. Сапронов, проф. Б.М. Даринский).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[8]. В совместных публикациях [1]—[8] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Работы [1]—[3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 19 параграфов, литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации— 88 стр.

Краткое содержание диссертации. В диссертации методы теории полугрупп линейных преобразований применяются к исследованию корректной разрешимости нестационарных задач без начальных условий для параболических уравнений с особенностью, когда временной параметр может изменяться на всей действительной оси, а коэффициенты от пространственной переменной могут вырождаться.

В практических исследованиях такие задачи встречаются либо при описании установившихся периодических процессов, либо процессов, начавшихся так давно, что начальные данные не сказываются на поведении решения.

Применяемые методы исследования приводят к необходимости обобщения неравенств коэрцитивности для систем дифференциальных операторов, на случай систем операторных многочленов, действующих в банаховом пространстве. С помощью полученных в этом направлении результатов, устанавливается равномерно корректная разрешимость неоднородного полигармонического уравнения С.Л. Соболева в пространствах $W_l^p(\mathbb{R}^n)$.

Первая глава диссертации содержит необходимую терминологию, понятия и общие фундаментальные факты, связанные с общей теорией однопараметрических полугрупп преобразований и, в частности, с каноническими полугруппами.

В §§1.4–1.6 вводятся понятия арифметических полугрупп и их производящих операторов.

В §§1.7 и 1.8 обсуждаются проблемы корректной разрешимости задач по Ж.Адамару и равномерно корректной разрешимости по С.Г. Крейну, их связи с сильно непрерывными полугруппами (теорема ХФИФМ).

Вторая глава диссертации содержит самостоятельные результаты. В §§2.3–2.5 вводятся полугруппы с деформацией $T^{\pm}_{h,\rho}(t)$ и их производящие операторы $\mathfrak{D}^{\pm}_{h,\rho}\varphi(x)$.

а) Полугруппы $T^{+}_{h,\rho}(t)$.

На интервале $(a,b) \subset \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$— конечном или бесконечном, введем непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$ такую, что $h'(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to b} h(x) = \infty$.

Через $L^{+}_{p,\omega,h,g}$ будем обозначать пространства функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|^{+} = \|\varphi\|^{+}_{p,\omega,h,g} = \left[\int_a^b |\exp[\omega h(x)]g(x)\varphi(x)|^p dh(x)\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad (12)$$

$p \geq 1$, $\omega > 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) > 0$.

Введем обозначения $h(x) \oplus t = h^{-1}[h(x) + t]$.

Пусть $\rho(x) \geq 0$ локально интегрируемая на (a, b) функция. Будем рассматривать операторное семейство

$$T^{+}_{h,\rho}(t)\varphi(x) = \exp\left[\int_{h(x)\oplus t}^{x} \rho(\xi)dh(\xi)\right] \varphi[h(x) \oplus t]. \tag{13}$$

Теорема 1. Операторное семейство $T^{+}_{h,\rho}(t)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой, действующей в пространстве $L_{p,\omega,h}$, удовлетворяющей оценке

$$\|T^{+}(t)\| \leq \exp(-\frac{\omega}{p}t). \tag{14}$$

Ее генератором является оператор $A^{+}_{h,\rho}$, задан выражением

$$\mathfrak{D}^{+}_{h,\rho}\varphi = \frac{d\varphi(x)}{dh(x)} - \rho(x)\varphi(x). \tag{15}$$

с областью определения $D(A^{+}_{h,\rho}) = \{\varphi \in L^{+}_{p,\omega,h,g}, \mathfrak{D}^{+}_{h,\rho}\varphi \in L^{+}_{p,\omega,h,g}\}$.

б) Полугруппы $T^{-}_{h,\rho}(t)$.

Рассмотрим случай когда функция $h(x)$, $x \in (a, b)$ удовлетворяет условиям: $h'(x) > 0$, $\lim h(x) = -\infty$ при $x \to a$

Через $L^{-}_{p,\omega,h,g}$ обозначим пространства функций с нормой

$$\|\varphi\|^{-} = \|\varphi\|^{-}_{p,\omega,h,g} = \left[\int_{a}^{b} \exp(-\omega h(x))g(x)|\varphi(x)|^{p}dx\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{16}$$

$p \geq 1$, $\omega > 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) < 0$.

Пусть $h(x) \ominus t = h^{-1}[h(x) - t]$. Рассмотрим операторные семейства

$$T^{-}_{h,\rho}(t)\varphi(x) = \exp\left[\int_{x}^{h(x)\ominus t} \rho(\xi)dh(\xi)\right] \varphi[h(x) \ominus t]. \tag{17}$$

Для этих семейств аналогично $T^{+}_{h,\rho}$ доказывается

Теорема 2. Операторное семейство (17) является сильно непрерывной полугруппой действующей в пространстве $L^{-}_{p,\omega,h,g}$ и удовлетворяющей оценке

$$\|T^{-}_{h,\rho}(t)\|^{-}_{p,\omega,h,d} \leq \exp(-\frac{\omega}{p}t). \tag{18}$$

Ее генератором является оператор $A^{-}_{h,p}$, заданный выражением

$$\mathfrak{D}^{-}_{h,\rho}\varphi = -\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} - \rho(x)\varphi(x). \tag{19}$$

с областью определения $D(A^{-}_{h,\rho}) = \{\varphi \in L^{-}_{p,\omega,h,g}, \mathfrak{D}^{-}_{h,\rho}\varphi \in L^{-}_{p,\omega,h,g}\}$.

Рассматриваются примеры

1. Если оператор $A^+_{h,\rho}$ задан выражением (15), $\rho(x) = \mu \cdot h(x)$, $\mu \geq 0$, то производящая его полугруппа имеет вид

$$T^+_h(t)\varphi(x) = \left(\frac{h(x)}{h(x)+t}\right)^\mu \varphi[h^{-1}(h(x)+t)]. \tag{20}$$

Она является сильно непрерывной в пространстве $L^+_{p,\omega,h,g}$ с нормой (12).

2. Если $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $\mu = 0$, то из (20) следует, что $T^+_h(t)\varphi(x) = \varphi(x+t)$ является полугруппой правых сдвигов в пространстве $L^+_{p,\omega}$ с нормой

$$\|\varphi\|^+ = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x} g(x)|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{21}$$

Аналогично, полугруппа левых сдвигов $T^-_h(t)\varphi(x) = \varphi(x-t)$ является сильно непрерывной в пространствах $L^-_{p,\omega,h,g}$ с нормой

$$\|\varphi\|^- = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x} g(x)|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{22}$$

Здесь $\omega > 0$. Заметим, что при $\omega = 0$ эти факты не справедливы.

3. Если в (21), $(a,b) = (0,\infty)$, $\mu > 0$, $\rho(x) = x$, то соответствующая полугруппа имеет вид

$$T^+_{h,\rho}(t)\varphi(x) = \left(\frac{x}{x+t}\right)^\mu \varphi(x+t). \tag{23}$$

4. Гиперболические полугруппы. Если $(a,b) = (0,1)$, $h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, $\mu = 0$, то нетрудно видеть, что в этом случае мы имеем полугруппу

$$T_h(t)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x + \operatorname{th} t}{1 + x \operatorname{th} t}\right), \tag{24}$$

которая называется гиперболической.

Замечание. В случае сложения $t \oplus s = h^{-1}[h(s) + h(t)]$ полугруппа (24) имеет вид $\varphi\left(\frac{x+t}{1+xt}\right)$

Из наших результатов следует, что эта полугруппа сильно-непрерывна в пространствах с нормой

$$\varphi\|_{\omega,p} = \left[\int_0^1 \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{\omega}{2}} |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{25}$$

В §2.6 рассматриваются нестационарные задачи без начальных условий.

В предположении $\alpha(t) > 0$, $\gamma(t) \geq 0$, $h'(t) = \alpha(t)$, $\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ будем рассматривать два уравнений вида (10).

$$\frac{\partial^2 u_+(t,x)}{\partial x^2} = \frac{\partial u_+(t,x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u(t,x), \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 u_-(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_-(t,x)}{\partial h(t)} + \rho(t)u(t,x), \tag{27}$$

Поменяв местами параметры t и x, уравнения (26) и (27) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} = \mathfrak{D}^+_{h,\rho} u_+(t,x), \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} - = -\mathfrak{D}^-_{h,\rho} u_-(t,x), \tag{29}$$

При этом краевые условия принимают вид

$$u_\pm(0,x) = u_0(x); \qquad u_\pm(\infty,x) = 0. \tag{30}$$

Считая $u_\pm(t,x)$ векторнозначными функциями $u_\pm(t)$ со значениями в пространствах $L^+_{p,\omega,h,g}$ или $L^-_{p,\omega,h,g}$ соответственно, можно записать задачи (28)—(30) в операторной форме

$$\frac{d^2 u_\pm}{dt^2} = A^\pm_{\rho,h} u_\pm(t), \tag{31}$$

$$u_\pm(0) = u_0, \qquad u_\pm(\infty) = 0$$

в пространствах $L^+_{p,\omega,h,g}(L^-_{p,\omega,h,g})$, то справедлива

Теорема 3. Пусть $t_0 \in (a,b)$, $h(t) = \int_{t_0}^t \alpha(s)ds$, $\rho(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$, тогда:

1) для каждого $u_0 \in L^+_{p,\omega,h,g}$ существует единственное обобщенное решение задачи (28)–(30), и оно представимо в виде

$$u_+(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^+_{h,\rho}(s, -A^+_{h,\rho}) u_0(t) ds, \tag{32}$$

$$u_-(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4s}\right) T^-_{h,\rho}(s, -A^-_{h,\rho}) u_0(t) ds \tag{33}$$

Из (32) и (33), в частности, следуют представления соответствующих тепловых потоков

$$q_+(t) = \left.\frac{\partial u_+}{\partial x}\right|_{x=0} = -(A^+_{\rho,h})^{\frac{1}{2}} u_0(t), \tag{34}$$

$$q_-(t) = \frac{\partial u_-}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -(A^-_{\rho,h})^{\frac{1}{2}} u_0(t). \tag{35}$$

В заключении заметим, что результаты, полученные в настоящей диссертации, являются новыми даже в простейшем случае $h(x) = x$, $\rho(x) \equiv 0$, когда $T^{\pm}(t)\varphi(x) = \varphi(x \pm t)$— полугруппы сдвигов, а операторы $(-A^{\pm})^{\frac{1}{2}}$ определяются дробными производными Римана–Лиувилля.

В третьей главе диссертации, по аналогии с системами дифференциальных операторов Бесова–Никольского, вводятся системы C_0– операторных многочленов, то есть многочленов над полем комплексных чисел от производящего оператора сильно непрерывной полугруппы линейных операторов, в банаховом пространстве вида:

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u, \quad u \in D(A^n) \tag{36}$$

которые мы называем C_0 - операторными многочленами.

Определение 1. Систему операторных многочленов (36) назовем коэрцитивной, если для всех $u \in D(A^N)$ выполняется неравенство

$$\sum_{n_k=1}^{N} \sum_{m_k=1}^{n_k} \parallel A^{m_k} u \parallel_E \leq M_2 \sum_{k=1}^{N} \parallel A_k u \parallel_E, \tag{37}$$

В §3.4 доказана следующая

Теорема 4. Система C_0 — многочленов (36) является коэрцитивной, если корни $\lambda_{k,j}(k = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, n_k)$ многочленов $P_{n_k}(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$\min_{k,j} Re\lambda_{k,j} = \lambda_0 > \omega. \tag{38}$$

§3.5 посвящен применению теоремы коэрцитивности к некоторым конкретным системам операторов и применению к представлению решений задач без начальных условий высокого порядка.

В пункте 3.5.1 диссертации применяется теорема 4 к операторам, которые связаны дифференциальным выражением $l = \frac{d}{dx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Для этого введем банаховы пространства $C^{\pm}_{\omega,g}$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, определенных нормами

$$\|\varphi\|^+_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{\omega x} g(x)|\varphi(x)|, \ \omega \geq 0, \ g(x) > 0, g'(x) > 0; \tag{39}$$

в случае $C^+_{\omega,g}$,

$$\|\varphi\|^-_{\omega,g} = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-\omega x} g(x)|\varphi(x)|, \ \omega > 0, \ g(x) > 0, g'(x) < 0; \tag{40}$$

в случае $C^-_{\omega,g}$.

Рассматриваются полугруппы сдвигов

$$U^+(t)\varphi(t) = \varphi(x+t),\ \text{если}\ \varphi \in C^+_{\omega,g}, \tag{41}$$

$$U^-(t)\varphi(x) = \varphi(x-t),\ \text{если}\ \varphi \in C^-_{\omega,g}.$$

Для этих полугрупп доказываются неравенства

$$\|U^\pm(t)\varphi\|^\pm_{\omega,g} \le e^{-\omega t}\|\varphi\|^\pm_{\omega,g} \tag{42}$$

Генераторами этих полугрупп являются операторы $A^\pm$ заданные, соответственно дифференциальными выражениями

$$\frac{dU^\pm(t)}{dt}\varphi(x)\bigg|_{t=0} = \pm\frac{d\varphi}{dx} \tag{43}$$

и областями определения $D(A^\pm) = \{\varphi : \varphi \in C^\pm_{\omega,g}, \frac{d\varphi}{dx} \in C^\pm_{\omega,g}\}$.

Справедлива

Теорема 5. Система многочленов

$$\mathbb{A}_k u = \sum_{m_k=1}^{n_k} a_{m_k}\left(\pm\frac{d}{dx}\right)^{m_k} u(x) \tag{44}$$

является коэрцитивной в $C^+_{\omega,g}$ если соответственно корни $\lambda_{k,j}$ многочленов $P_{n_k}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию

$$\min_{k,j} Re\lambda_{k,j} = \lambda_0 > -\omega. \qquad (45).$$

В качестве следствия получаем, что уравнение

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m u(x)}{dx^m} = f(x), \tag{46}$$

имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$a) \qquad u(x) = \int_0^\infty q(t)f(x+t)dt = \int_x^\infty q(\tau - x)f(\tau)d\tau, \tag{47}$$

где $f \in C^+_{\omega,g}$, $q(\tau)-$ решение задачи Коши

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m a_m \frac{d^m q}{dx^m} = \delta(x),\ \ q(0) = \ldots = q^{n-1}_{(0)} = 0. \tag{48}$$

$$\text{б)} \qquad u(x)=\int\limits_0^\infty q(t)f(x-t)dt=\int\limits_{-\infty}^x q(x-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{49}$$

где $f\in C^-_{\omega,g}$, $q(\tau)$– решение задачи Коши

$$\sum_{m=0}^n a_m\frac{d^m q(x)}{dx^m}=\delta(x),\ q(0)=\ldots=q^{(n-1)}_{(0)}=0.$$

В частности, решение задачи $u'(x)=f(x)$ в пространствах $C^+_{\omega,g}$ имеет вид $u(x)=-\int\limits_x^\infty f(x)d\tau$, а решение задачи $-u'(x)=f(x)$ в $C^-_{\omega,g}$ имеет вид $u(x)=\int\limits_{-\infty}^x f(s)ds$. При этом справедливы оценки

$$\|u\|^\pm_{\omega,g}\le\frac{\|f\|^\pm_{\omega,g}}{\omega} \tag{50}$$

Замечание 1. Пространства $C^\pm_{\omega,g}$ здесь являются оптимальными, в том смысле, что если неравенства (50) выполняются для норм более общего вида

$$\|f\|^+_\rho=\sup_x\frac{|f(x)|}{\rho(x)},\ \|f\|^-_\rho=\sup_x\rho(x)|f(x)|, \tag{51}$$

где $\rho(x)\ge 0$, $\rho'(x)>0$, $\rho(-\infty)=0$, то $\rho(x)$ имеет вид $\rho(x)=e^{\omega x}g(x)$, $\omega>0$, $g(x)>0$, $g'(x)\ge 0$.

Пример 1. В этом примере для полинома $P_n(\lambda)$ из предыдущего примера, рассмотрим оператор A, заданный дифференциальным оператором

$$\mathbb{D}_2\varphi(x)=(1-x^2)\frac{d\varphi(x)}{dx}. \tag{52}$$

Оператор $\mathbb{D}_2$ является генератором C_0– полугруппы вида

$$T(t,\mathbb{D}_2)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{x+\operatorname{th}t}{1+x\operatorname{th}t}\right), \tag{53}$$

которая является сильно непрерывной в пространствах функций с нормой

$$\|\varphi\|_{\omega,g}=\sup_{x\in(-1,1)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\omega}{2}}g_1(x)|\varphi(x)|,$$

здесь $g_1(x)$— произвольная положительная функция, такая, что $g_2'(x)>0$, в силу того, что $g'(x)>0$.

Таким образом, уравнение $P_n(\mathbb{D}_2)u(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m \mathbb{D}_2^m u(x) = f(x)$ для каждого $f \in C_{\omega,g}[-1,1]$ имеет единственное решение $u(x)$, и оно представимо в виде

$$u(x) = \int_0^\infty q(t) T(t, \mathbb{D}_2) f dt = \int_0^\infty q(t) f\left(\frac{x + \operatorname{th} t}{1 + x \operatorname{th} t}\right) dt.$$

При этом, справедлива оценка

$$\|u\|_{\omega,g} \le \frac{\|f\|_{\omega,g}}{\lambda_0 - \omega}.$$

Пример 2. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $E = L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \ge 1$, $\|f\|_p = \left[\int |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Оператор A зададим лапласианом $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ и определим в пространстве С. Л. Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^2} = \|u\|_{L_p} + \left[\sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}\|^p\right]^{\frac{1}{p}},\ (p \ge 1)$$

Так определенный оператор A является генератором полугруппы класса C_0 Гаусса-Вейерштрасса

$$U(t)f(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{|x-s|^2}{4t}} f(s) ds \tag{54}$$

действующий в $L_p(\mathbb{R}^n)$, при этом $\omega = 0$. Применение теоремы 4 к этим операторам дает следующий результат.

Теорема 6. Система многочленов

$$\{\mathbb{A}_k u\}_{k=1}^N,\ \mathbb{A}_k u = \sum_{m_k=1}^{n_k} a_{m_k} \Delta^{m_k} u \tag{55}$$

является коэрцитивной и удовлетворяет соотношениям (37), если корни $\lambda_{k,j}(k = 1, \dots, N, i = 1, \dots, u_k)$ многочленов $P_{n_k}(\lambda)$ расположены в положительной комплексной полуплоскости.

Теорема 7. Уравнение

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \Delta^m u = f, \tag{56}$$

при $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$, для него справедливо представление

$$u(x) = \frac{2}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x-s|}{2\lambda_m} \right)^{k-\frac{n}{2}} \cdot K_{\frac{n}{2}-k}(\lambda_m |x-s|) f(s) ds,$$

где $K_v(z)$ — функция Макдональда

2) Для частного случая полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = f, \ m \in \mathbb{N} \tag{57}$$

рассматриваемого, где f— обобщенная функция, из наших результатов следует

Теорема 8. Если выполняется условие $n > 2m$, то для всякого $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение (57) имеет единственное решение $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ и для него справедливо представление

$$u(x) = G_{m,n} \cdot f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{m,n}(x-s) f(s) ds, \tag{58}$$

где

$$G_{m,n}(x) = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n}{2} - m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{\frac{n}{2}}} |x|^{2m-n} \qquad (59),$$

что совпадает с известным представлением С.Л.Соболева.

Список литературы

[1] Гим М.Х. О коэрцитивности систем C_0– операторных многочленов / М.Х. Гим, В.А. Костин, М.В. Муковнин // Вестник ВГУ, Математика, Физика, №4, 2014, с. 150–159.

[2] Гим М.Х. О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач без начальных условий/ М.Х. Гим, В.А. Костин, М.В. Муковнин // Белгород: Научные ведомости БелГУ, серия Математика, Физика №25(196). Вып. 37, С. 30-38

[3] Гим М.Х. Об одной нестационарной задаче без начальных данных / М.Х. Гим, М.Н. Небольсина / Глобальный научный потенциал // 2015.- № 4(49).- С.96-98

[4] Гим М.Х. Об одной нестационарной задаче для уравнения тепломассопереноса с особенностью// М.Х. Гим, М.В. Муковнин Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1), 2014 г..- С. 34-36.

[5] Гим М.Х. О дробных степенях одного класса интегральных операторов / М.Х. Гим, М.В. Муковнин // Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1), 2014 г., с. 43-46.

[6] Гим М.Х. Задача без начальных данных для уравнения субдиффузии на оси / М.Х. Гим, В.А. Костин, Д.А. Фахат // Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1).- 2014 г., С. 43-46.

[7] Гим М.Х. C_0– операторные уравнения и полугрупповое представление их решений / М.Х. Гим, В.А. Костин, Д.В. Костин // Актуальные направления научных исследоваий XXI века: теория и практика, №5 часть 1(10-1).- 2014 г., с. 67-68.

[8] Гим М.Х. О точном решении одного полигармонического уравнения в пространствах Степанова / М.Х. Гим, А. Шихаб // Материалы международной конференции С.Г. Крейна ВЗМШ 2014.- С. 412–413.

Работы [1]—[3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ.