ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Карпикова Алина Вячеславовна

Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциальных операторов второго порядка с негладким потенциалом

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

профессор Баскаков А. Г.

ВОРОНЕЖ - 2015

Оглавление

Список обозначений

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство;

$\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство;

$End\,\mathcal{H}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта–Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта–Шмидта;

$\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ — идеал ядерных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$\mathfrak{U}$ — пространство допустимых возмущений с нормой $\|\cdot\|_*$;

l^p — банахово пространство последовательностей, суммируемых со степенью $p \geq 1$;

$l^p(\Omega)$ — банахово пространство последовательностей $x : \Omega \to \mathbb{C}$, суммируемых со степенью $p \geq 1$ и нормой $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n\in\Omega} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;

$L_2[0, \omega]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых на

$[0, \omega]$ классов функций, суммируемых с квадратом модуля;

$W_2^2[0, \omega]$ — пространство Соболева $\{x \in L_2[0, \omega] : x'$ абсолютно непрерывна и $x'' \in L_2[0, \omega]\}$;

$\sigma(A)$ — спектр линейного оператора A;

$\rho(A)$ — резольвентное множество линейного оператора A;

$R(\cdot, A)$ — резольвента линейного оператора A;

$Ker\, A$ — ядро оператора A;

$Im\, A$ — образ оператора A;

I — тождественный оператор.

Введение

Актуальность темы. В диссертационной работе рассматриваются задачи дальнейшего развития метода подобных операторов и его применения к исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка с негладким комплексным потенциалом, определяемых периодическими и квазипериодическими краевыми условиями (операторов Штурма–Лиувилля). Одним из самых распространенных методов исследования в теории возмущений линейных операторов является резольвентный метод, который основывается на представлении проекторов Рисса возмущенных операторов с помощью интегральной формулы Коши. Данный метод лежит в основе исследований, проводимых в известных монографиях Данфорда и Дж. Т. Шварца [21], Т. Като [32], Н. М.А. Наймарка [42]. Однако изучаемые операторы не всегда удовлетворяют условиям, необходимым для применения этого метода. В первую очередь это связано с оценкой проекторов, при получении оценок безусловной равносходимости спектральных разложений.

В качестве метода исследования выбран метод подобных операторов, который берёт своё начало с метода Пуанкаре нормальных форм для обыкновенных дифференциальных уравнений [2] и тесно связан с методом А.М. Ляпунова кинематического подобия дифференциальных операторов [16], абстрактным вариантом замены Крылова-Боголюбова [3], [10].

Впервые метод подобных операторов был изложен К.О. Фридрихсом [48] для возмущенных самосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром. Р. Тернером [61] для возмущенных нормальных вполне непрерывных операторов были получены теоремы о возможности их преобразования к диагональному оператору в базисе невозмущенного оператора.

Дальнейшее своё развитие метод подобных операторов получил в работах А.Г. Баскакова [5] - [13] и его учеников, который стал использовать технику абстрактного гармонического анализа линейных операторов.

Суть метода подобных операторов состоит в преобразовании подобия исследуемого дифференциального оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам хорошо изученного оператора. Тем самым значительно упрощается изучение исследуемого оператора.

В диссертационной работе существенно используется терминология из [41], где применялась техника, основанная на оценках резольвенты возмущенного оператора, позволяющая получать важные результаты об асимптотическом поведении модуля разности возмущенного и невозмущенного оператора Хилла-Шредингера и его зависимости от гладкости потенциала v. Также в диссертации применяется терминология из [16], связанная с понятиями и результатами по теории операторных идеалов (ядерные операторы, операторы Гильберта–Шмидта и т.д.).

Метод подобных операторов применяется к исследованию спектральных свойств широкого класса дифференциальных операторов. Описанное в диссертации применение метода позволяет более глубоко изучить спектральные свойства исследуемого дифференциального оператора Штурма–Лиувилля: получить уточненную, по сравнению с известной ранее, асимптотику спектра.

Наиболее сильные результаты по асимптотике собственных значений оператора Хилла–Шрёдингера получены Марченко В.А. в работе [40], для рассматриваемого нами дифференциального оператора, в случае вещественнозначного потенциала.

Также отметим работы А.М. Савчука и А.А. Шкаликова [51], [52], в которых проведены исследования для потенциала из пространства W_2^{-1}, поэтому и оценки являются более грубыми по сравнению с приведенными в диссертации. Существенное усиление результатов из статей [51], [52] было получено в диссертации А.О. Щербакова [53]. Важно отметить, что его результаты исследования были основаны на методе подобных операторов.

Недавние исследования ряда математиков (Х.Р.Мамедова, П. Джакова, Б.С. Митягина, А.А.Шкаликова, О.А.Велиева, Н.Дернека; см. статьи [37], [41], [51], [52], [54]) по условиям спектральности дифференциальных операторов второго порядка, определяемых периодичсекими и квазипериодическими краевыми условиями, показывали важность получения более точных асимптотических формул для собственных значений и уточненных оценок отклонений проекторов от классических систем проекторов. Получение таких уточненных формул для собственных значений изучаемых дифференциальных операторов важны при оценке лакун в спектре соответствующего оператора Хилла–Шредингера, рассматриваемого в $L_2(\mathbb{R})$, в случае периодического комплексного потенциала. Таким образом, тема диссертации является актуальной.

Цель работы. Целью работы является дальнейшее развитие метода подобных операторов и его применение к исследованию спектральных свойств оператора Штурма–Лиувилля:

1. Построение оператора преобразования оператора Штурма–Лиувилля к оператору с блочно–диагональной матрицей.

2. Спектральный анализ дифференциальных операторов, возмущенных оператором Гильберта–Шмидта:

   - получение асимптотических оценок собственных значений;
   - получение оценок спектральных проекторов и оценок равносходимости спектральных разложений.

Методы исследования. Основным методом исследования спектральных свойств рассматриваемого оператора является метод подобных операторов [3] - [13].

Научная новизна. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Отметим некоторые из них:

1. Разработка абстрактной схемы применения метода подобных

операторов для операторов, близких к рассматриваемому оператору Штурма–Лиувилля.

2. Спектральный анализ несамосопряженного оператора Штурма–Лиувилля с негладким потенциалом, задаваемого периодическими и квазипериодическими краевыми условиями:

   - получение новых асимптотических оценок для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля;
   - оценки отклонений спектральных проекторов возмущенного и невозмущенного операторов (получение оценок безусловной равносходимости спектральных разложений).

Практическая и теоретическая значимость. Полученные в работе результаты носят теоретический характер и строго обоснованы широким использованием методов спектральной теории операторов и дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Крымских осенних математических школах [28], [30], [31], на Крымской международной математической конференции [29], [57], на Воронежской зимней математической школе С.Г.Крейна [26], на весенней математической школе "Понтрягинские чтения XXI" [27], на математическом интернет-семинаре ISEM (Германия, Блаубойрен) [58], на конференции, посвященной 100-летию Б.М. Левитана "Спектральная теория и дифференциальные уравнения" [59], на семинарах А.Г.Баскакова, а также на научных сессиях ВГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах [23] - [31], [57] - [59], три из которых [23] - [25] включены в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 61 наименование. Общий объем диссертации - 123 страницы.

Содержание диссертации

В первой главе введены используемые в диссертации понятия спектральной теории операторов, которые необходимы при формулировании основных результатов (*первый параграф*). Также приводятся определения и теоремы метода подобных операторов (*второй параграф*). В основе метода лежат понятия подобных операторов и допустимой тройки (определения 1.24, 1.25) и формулируется основная теорема метода подобных операторов 1.7. Используемые в диссертации понятия содержатся в монографиях [1], [17] - [20], [22], [33] - [38], [43], [49], [50], [55], [56], [60] и статьях [7] - [13], [15], [39], [45] - [47]. В *третьем параграфе* вводится в рассмотрение исследуемый в диссертации дифференциальный оператор второго порядка с негладким потенциалом

$$L_\theta : D(L) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega], \quad \theta \in [0,1],$$

порожденный на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением

$$l(x) = -x'' - vx,$$

с областью определения

$$D(L_\theta) = \left\{x \in W_2^2[0,\omega] : x(\omega) = e^{i\pi\theta}x(0), x'(\omega) = e^{i\pi\theta}x'(0)\right\}.$$

Во <u>второй главе</u> метод подобных операторов применяется к исследованию спектральных свойств абстрактных линейных операторов, близких к изучаемому оператору. В *первом параграфе* метод подобных операторов применяется к абстрактным линейным операторам, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассматривается оператор $A - B$, где оператор B принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, оператор $A = A_\theta : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой, спектр $\sigma(A_\theta)$ которого образует последовательность собственных значений вида

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{для} \quad \theta \in \{0,1\},$$

$$\lambda_{n,\theta} = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{для} \quad \theta \in (0,1).$$

Вводятся ортогональные проекторы Рисса $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{\theta,n}, n \in \mathbb{Z}_+, \theta \in \{0,1\}$ и $P_n = P_{\theta,n}, n \in \mathbb{Z}, \theta \in (0,1)$, которые для любого $x \in \mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$\mathbb{P}_{0,n}x = (x,e_n)e_n + (x,e_{-n})e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{0,0}x = (x,e_0)e_0, \quad \theta = 0,$$

$$P_{\theta,n}x = (x,e_{\theta,n})e_{\theta,n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in (0,1),$$

$$\mathbb{P}_{1,n}x = (x,e_n)e_n + (x,e_{-n-1})e_{-n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \theta = 1,$$

где e_n, $n \in \mathbb{Z}$, — собственные функции оператора A_θ для $\theta = 0$ и $\theta = 1$ и $e_{\theta,n}$ — собственные функции для $\theta \in (0,1)$.

Наряду с указанными трансформаторами рассматриваются последовательности трансформаторов $J_m = J_{\theta,m}, \Gamma_m = \Gamma_{\theta,m}, m \geq 0$, определенные равенствами:

$$J_m X = J_{\theta,m} X = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)},$$

$$\Gamma_m X = \Gamma_{\theta,m} X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}).$$

Во *втором параграфе* второй главы строится абстрактная схема применения метода подобных операторов для операторов, близких к рассматриваемому оператору Штурма–Лиувилля. Рассмотрена основная теорема о подобии, а также получено асимптотическое представление для оператора $A_\theta - B$.

В пространстве $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определяется семейство трансформаторов $J_{\theta,m}, \Gamma_{\theta,m}, m \geq 0, \theta \in [0,1]$, задаваемое на операторах $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следующими формулами:

$$J_{per} X = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_k X \mathbb{P}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k X P_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k X P_{-k} + P_0 X P_0, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

$$J_{ap} X = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_n X \mathbb{P}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_{-n-1}, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

$$J_\theta X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad \theta \in (0,1),$$

$$\Gamma_\theta X = \sum_{\lambda_{\theta,i} \neq \lambda_{\theta,j}} \frac{P_{\theta,i} X P_{\theta,j}}{\lambda_{\theta,i} - \lambda_{\theta,j}}, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad \theta \in [0,1].$$

Для оператора $A = A_\theta$ вводится пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}(f)$ (со своей нормой $\| \cdot \|_*$), состоящее из операторов, входящих в идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теорема 2.1. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\gamma_{\theta,m} \|B\|_* < \frac{1}{4},$$

где постоянная $\gamma_{\theta,m}$ *из определения* 1.25.

Тогда оператор $A - B = A_\theta - B$ *подобен оператору вида*

$$A_\theta - J_m\widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{k\geq m+1}\mathbb{P}_k\widetilde{X}\mathbb{P}_k, \theta\in\{0,1\},$$

$$A_\theta - J_m\widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{|k|\geq m+1}P_k\widetilde{X}P_k, \theta\in(0,1).$$

Оператор $\widetilde{X} = \widetilde{X}_m$ *принадлежит допустимому пространству возмущений* $\mathfrak{U}(f)$, *где* $f = f_B$, *и является решением уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B,$$

в котором $J = J_{\theta,m}, \Gamma = \Gamma_{\theta,m}$, *и уравнение рассматривается в банаховом пространстве* $\mathfrak{U}(f)$. *Преобразование подобия оператора* $A_\theta - B$ *в оператор* $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ *осуществляет оператор* $I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}$.

Для любого ненулевого оператора X из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого $\theta\in[0,1]$ рассмотрим двустороннюю последовательность чисел вида

$$\alpha_n(X) = \alpha_{\theta,n}(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}}\max\{(\sum_{|k|\geq n}\|XP_{\theta,k}\|_2^2)^{\frac{1}{4}}, (\sum_{|k|\geq m+1}\|P_{\theta,k}X\|_2^2)^{\frac{1}{4}}\}.$$

Отметим, что $\alpha_n(X)\to 0$, при $n\to\infty$.

Теорема 2.3. *Собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n, |n|\geq m+1$, *(где* $m\in\mathbb{Z}_+$ *удовлетворяет условию предыдущей теоремы) операторов* $A_\theta - B, \theta\in(0,1)$ *допускают асимптотику вида*

$$\widetilde{\lambda}_n = \frac{\pi^2}{\omega^2}(2n+\theta)^2 - (Be_n, e_n) + \frac{\alpha_n^2(B)}{2n+\theta}\xi_n, |n|\geq m+1,$$

где $\widetilde{\lambda}_n, |n|\geq m+1$, *— собственные значения оператора* $A_\theta - B$, *последовательность* $(\xi_n), |n|\geq m+1$, *является суммируемой.*

Если $\theta \in \{0,1\}$, то собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{\pm}, n \geq m+1$, операторов $A_\theta - B$ допускают представления вида

$$\widetilde{\lambda}_n^{\pm} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \mu_n^{\pm} + \alpha_n(B)\eta(n), \quad n \geq m+1,$$

где последовательность η принадлежит пространству $l^{\frac{4}{3}}$ и $\mu_n^{\pm}$– собственные значения матрицы оператора $\mathbb{P}_n B|\mathcal{H}_n$.

Такой результат служит основой для последующего спектрального анализа оператора $L_\theta, \theta \in [0,1]$.

В *третьем параграфе* второй главы диссертации получены оценки равносходимости спектральных разложений для абстрактных операторов A_θ и $A_\theta - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для произвольного подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+$ (если $\theta \in \{0,1\}$) символом $\mathbb{P}(\Omega)$ обозначается проектор $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \mathbb{P}_k = \sum\limits_{k\in\Omega} \mathbb{P}_{\theta,k}$. Для $\Omega \subset \mathbb{Z}$ (если $\theta \in (0,1)$) через $P(\Omega)$ обозначается проектор $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$.

Пусть $\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)}, \widetilde{\mathbb{P}}_n, n \geq m+1,$ — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору $A_\theta - B$, где $\theta \in \{0,1\}$, и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+\backslash\{0,...,m\}$ (не обязательно конечного) символом $\widetilde{P}(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{\mathbb{P}}(\Omega)$.

Если $\theta \in (0,1)$ и Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{Z}\backslash\{-m,...,m\}$, через $P(\Omega)$ обозначается спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} P_k$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого подмножества $\Omega \in \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначается величина $\max\limits_{n\in\Omega} \alpha_n(X)$.

Теорема 2.6. *Существуют числа $m \in \mathbb{Z}_+, C > 0$ такие, что* *имеют место оценки:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\| \leq \frac{C}{\theta n}\,|\alpha_n(B)|,$$

если $\theta \in (0,1)$ и

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}_k\| \leq \frac{C}{n}\,|\alpha_n(B)|,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Следствие 2.1. *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов $A_\theta - B$ и A :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\| = 0,$$

если $\theta \in (0,1)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}_k\| = 0,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Теорема 2.7. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что*

$$\sum_{|n|\geq m+1} \frac{1}{\alpha_n(\theta)} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty,$$

если $\theta \in (0,1)$ и

$$\sum_{n\geq m+1} \frac{1}{\alpha_n(\theta)} \|\widetilde{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}_n\|_2^2 < \infty,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Третья глава содержит вывод основных формул, используемых для получения асимптотики собственных значений оператора

$L_\theta, \theta \in [0,1]$ (*первые три параграфа*) В *четвертом параграфе* третьей главы осуществляется предварительное преобразование исследуемого оператора к оператору Гильберта–Шмидта с использованием следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Для любого числа $k \in \mathbb{Z}_+$ такого, что*

$$\|\Gamma_{\theta,k} V\|_2 < 1,$$

оператор $L_\theta = L_\theta^0 - V$ подобен оператору

$$A_\theta - B = L_\theta^0 - J_{\theta,k} V - B_0,$$

где $A_\theta = L_\theta^0$, оператор

$$B_0 = (I + \Gamma_{\theta,k} V)^{-1} (V \Gamma_{\theta,k} V - (\Gamma_{\theta,k} V) J_{\theta,k} V),$$

причем имеет место равенство

$$(A_\theta - B)(I + \Gamma_{\theta,k} V) = (I + \Gamma_{\theta,k} V)(A - J_{\theta,k} V - B_0).$$

Оператором преобразования оператора $A_\theta - B$ в оператор $A_\theta - B = A - J_{\theta,k} V - B_0$ является обратимый оператор $(I + \Gamma_{\theta,k} V)$.

Основные результаты диссертации приведены в четвертой главе и получены с использованием величин, которые определяются коэффициентами Фурье $\widehat{v}(n), n \in \mathbb{Z}$, потенциала v. Символом $l^p(\mathbb{J})$, где $p \in [1, \infty), \mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, обозначается банахово пространство суммируемых на $\mathbb{J}$ со степенью p последовательностей комплексных чисел, при этом $l^1(\mathbb{Z})$ — банахова алгебра двусторонних последовательностей со сверткой в качестве умножения.

Основные результаты диссертации, относящиеся к дифференциальному оператору $L_\theta, \theta \in [0,1]$, содержатся в следующих теоремах.

Теорема 4.1. *Пусть $\theta \in \{0,1\}$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, не более чем двухточечные и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta_1^{\mp}(n),$$

где $n \in \Omega(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$ и последовательности $\eta_1^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_1^{\mp}(n)| \leq w_n \, \frac{1}{n} \, \beta_1^{\mp}(n),$$

где последовательности $\beta_1^{\mp}$ принадлежит пространству l^2 и последовательность w представима в виде

$$w_n = \left(2 + \frac{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}{|\widehat{v}(2n+\theta)|} + \frac{|\widehat{v}(2n+\theta)|}{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}\right)^{\frac{1}{2}}, n \in \Omega(\theta).$$

Теорема 4.2. *Если в условиях предыдущей теоремы потенциал v является функцией ограниченной вариации, то асимптотическое представление собственных значений принимает следующий вид*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta_2^{\mp}(n),$$

где $n \in \Omega(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$ и последовательности $\eta_2^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_2^{\mp}(n)| \leq M_1^{\mp} \, w_n \, \frac{1}{n^3},$$

где постоянные $M_1^+, M_1^- > 0$ и последовательность w представима в виде

$$w_n = \left(2 + \frac{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}{|\widehat{v}(2n+\theta)|} + \frac{|\widehat{v}(2n+\theta)|}{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}\right)^{\frac{1}{2}}, n \in \Omega(\theta).$$

Определение 4.1. Пусть $\theta \in \{0, 1\}$. Потенциал $v \in L_2[0, \omega]$ называется **устойчивым** на бесконечном подмножестве $\Omega \subset 2\mathbb{N}+\theta$, если существуют постоянные $C_i = C(\Omega, \theta) > 0, i = 1, 2$, и конечное множество Ω_0 из Ω такое, что имеют место оценки

$$C_1\,|\widehat{v}(-2n-\theta)| \leq |\widehat{v}(2n+\theta)| \leq C_2\,|\widehat{v}(-2n-\theta)|,$$

для всех n из $\Omega \backslash \Omega_0$.

Определение 4.2. Потенциал v называется **устойчивым**, если он устойчив на множестве $2\mathbb{N}+\theta$.

Теорема 4.3. *Пусть $\theta \in \{0, 1\}$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, не более чем двухточечные. Если потенциал v устойчив на множестве $\Omega \subset 2\mathbb{N}+\theta$, то имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n^{\mp} = \left(\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega}\right)^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta_3^{\mp}(n), n \geq m+1,$$

где последовательности $\eta_3^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_3^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{n}\,\beta_3^{\mp}(n),$$

где последовательности $\beta_3^{\mp}$ принадлежат пространству l^2.

Теорема 4.5. *Пусть $\theta \in \{0,1\}$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, не более чем двухточечные и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_5^{\mp}(n),$$

где последовательности $\eta_5^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_5^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left|\widehat{v}(2n+\theta)\right|^{\frac{1}{2}} \xi_1(n),$$

если $n \in \Omega_1(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) = 0, \widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$ и

$$|\eta_5^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left|\widehat{v}(-2n-\theta)\right|^{\frac{1}{2}} \xi_2(n),$$

если $n \in \Omega_2(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) \neq 0, \widehat{v}(2n+\theta) = 0\}$, где символами $\xi_1(n), \xi_2(n)$ обозначаются последовательности, принадлежащие пространству l^2.

Теорема 4.7. *Пусть $\theta \in (0,1)$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, не более чем *двухточечные и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_7^{\mp}(n),$$

где последовательности $\eta_7^{\mp}$ *удовлетворяют оценкам:*

$$|\eta_7^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{n}\,\beta_7^{\mp}(n),$$

где последовательности $\beta_7^{\mp}$ *принадлежат пространству* l^2.

Во *втором параграфе* четвертой главы формулируются оценки равносходимости спектральных разложений.

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 3.1. Тогда для любого подмножества* $\Omega \subset \mathbb{Z}\backslash\{m,...,m\}$ *имеют место оценки (безусловной равносходимости спектральных разложений).*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \frac{C_1}{\theta(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}},$$

если $\theta \in (0,1)$ *и*

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) - \mathbb{P}(\Omega)\|_2 \leq \frac{C_1}{(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}},$$

если $\theta \in \{0,1\}$, *где постоянная* $C_1 > 0$.

Теорема 4.10. *Если в условиях предыдущей теоремы вместо проекторов* $P(\Omega), \mathbb{P}(\Omega)$ *рассмотреть проекторы вида*

$$(I + \Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I + \Gamma_{\theta,k}V)^{-1},$$

$$(I + \Gamma_{\theta,k}V)\mathbb{P}(\Omega)(I + \Gamma_{\theta,k}V)^{-1},$$

то оценки примут следующий вид

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - (I + \Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I + \Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2 \leq \frac{C_1}{\theta(\alpha(\Omega))}\,\|B\|_2\,\alpha(\Omega,\widetilde{X}),$$

если $\theta \in (0,1)$ *и*

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) - (I+\Gamma_{\theta,k}V)\mathbb{P}(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2 \le \frac{C_1}{(\alpha(\Omega))}\,\|B\|_2\,\alpha(\Omega,\widetilde{X}),$$

если $\theta \in \{0,1\}$ *где постоянная* $C_1 > 0$.

Теорема 4.11. *Существуют числа* $m \in \mathbb{Z}_+, C_1 > 0$ *такие, что имеют место оценки:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\| \le \frac{C_1}{\theta\sqrt{n}},$$

если $\theta \in (0,1)$ *и*

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}_k\| \le \frac{C_1}{\sqrt{n}},$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Следствие 4.1. *Имеет место следующая оценка*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\| = 0,$$

если $\theta \in (0,1)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}_k\| = 0,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Глава 1

Основные понятия и используемые результаты

1.1 Некоторые сведения из теории операторов

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство. Через $End\,\mathcal{X}$ будет обозначаться банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

В диссертации рассматриваются только линейные замкнутые операторы.

Определение 1.1. Пусть D — линейное подпространство из банахова пространства $\mathcal{X}$. Отображение $A : D \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *линейным оператором*, если выполнены свойства аддитивности и однородности:

1) $A(x + y) = Ax + Ay$,

2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$, для любых $x, y \in D(A)$ и $\alpha \in \mathbb{C}$.

Подпространство D называют областью определения оператора A и обозначают символом $D(A)$.

Символом I будем обозначать *тождественный оператор*, т.е. такой оператор $I : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, что выполнено равенство $Ix = x$, где $x \in \mathcal{X}$.

Определение 1.2. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *замкнутым*, если его график, т.е. множество точек $\{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, замкнут в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, т.е. для любой последовательности $x_n \in D(A)$ если верно, что $x_n \to x \in \mathcal{X}$ и $Ax_n \to y \in \mathcal{X}$, то $x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Определение 1.3. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *ограниченным* на $D(A)$, если существует такое положительное число C, что $\|Ax\| \leq C\|x\|$ для всех $x \in D(A)$. Наименьшее из таких чисел C и есть норма оператора A, т.е. $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in D(A)}} \|Ax\|$.

Теорема 1.1. *Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, с плотной областью определения $D(A) \subset \mathcal{X}$ и ограниченный на $D(A)$, допускает единственное ограниченное расширение до оператора из $End\,\mathcal{X}$.*

Определение 1.4. Множество векторов $y \in \mathcal{X}$, для которых существует $x \in D(A)$ такой, что $y = Ax$, называется *образом* оператора A и обозначается символом $Im\,A$. Через $Ker\,A$ обозначается *ядро* оператора A, т.е. множество $\{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

Определение 1.5. Одновременное выполнение условий

$$Ker\,A = \{0\}, \qquad Im\,A = \mathcal{X},$$

эквивалентно *биективности (обратимости)* линейного оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Обратный к A оператор будет обозначаться через $A^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Теорема 1.2. *Если $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — замкнутый обратимый линейный оператор, то обратный к нему оператор A^{-1} принадлежит пространству $End\,\mathcal{X}$.*

Теорема 1.3. *Если $A \in End\,\mathcal{X}$ такой, что $\|A\| < 1$, то оператор $I - A$ обратим и обратный $(I - A)^{-1}$ представим в виде суммы абсолютно сходящегося в $End\,\mathcal{X}$ ряда*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + A^2 + \ldots \quad .$$

Определение 1.6. Подпространство M из банахова пространства $\mathcal{X}$ называется *инвариантным* относительно линейного оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, если образ любого вектора $x \in M \bigcap D(A)$ принадлежит этому пространству M. Линейный оператор $A_M : D(A_M) \subset M \to M$, определяемый формулой $x \mapsto A_M x = Ax : D(A_M) = D(A) \bigcap M \subset M \to M$, называется *сужением (ограничением)* оператора A на инвариантное пространство M.

Определение 1.7. Линейный оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *изометрическим*, если $\|Ax\| = \|x\|$ для любого вектора $x \in \mathcal{X}$.

Определение 1.8. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется *симметрическим*, если $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ и $(Au, v) = (u, Av)$ для любых $u, v \in D(A)$.

Определение 1.9. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$.

Оператор A^* с областью определения $D(A^*) = \{v \in \mathcal{H} : \exists w = w(v) \in \mathcal{H},$ что $(w, u) = (v, Au)\, \forall u \in D(A)\}$, для которого выполнено $A^*v = w(v)$, $v \in D(A^*)$, называется оператором, *сопряженным* к A.

Определение 1.10. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

В работе также используются понятия из спектральной теории операторов.

Определение 1.11. Множество таких точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $A - \lambda I$ обратим, т.е. $(A - \lambda I)^{-1} \in End\,\mathcal{X}$, называется *резольвентным множеством* $\rho(A)$ замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. При этом функция $R(\cdot, A) : \rho(A) \to End\,\mathcal{X}$, $R(\lambda, A) = (A-\lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A.

Определение 1.12. *Спектром* $\sigma(A)$ замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется дополнение к резольвентному множеству $\rho(A)$, т.е. $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

Отметим, что $\sigma(A)$ — замкнутое множество, а $\rho(A)$ — открытое множество.

Определение 1.13. *Дискретным спектром* оператора A $(\sigma_d(A))$ называется множество таких $\lambda \in \sigma(A)$, для которых $Ker\,(A-\lambda I) \neq \{0\}$, т.е. отображение $A - \lambda I$ не является взаимно однозначным. Таким образом, $\lambda \in \sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого вектора $x \in D(A)$. Вектор x при этом называется *собственным вектором* оператора A, а число λ — *собственным значением.*

Определение 1.14. *Непрерывным спектром* оператора A называется множество

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : Ker\,(A - \lambda I) = \{0\},$$
$$Im\,(A - \lambda I) \neq \mathcal{X}, \overline{Im\,(A - \lambda I)} = \mathcal{X}\}. \quad (1.1)$$

Определение 1.15. *Остаточным спектром* оператора A называется множество

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : Ker\,(A - \lambda I) = \{0\}, \overline{Im\,(A - \lambda I)} \neq \mathcal{X}\}$$

.

Множества $\rho(A)$, $\sigma_d(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$, взаимно не пересекаются и $\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Определение 1.16. Замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, называется *оператором с компактной резольвентой*, если для некоторого $\lambda_0 \in \rho(A)$ оператор $R(\lambda_0, A)$ компактен.

Теорема 1.4. *Спектр $\sigma(A)$ компактного оператора A является не более чем счетным множеством, не имеющим предельных точек, отличных от нуля. Каждое число $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, является собственным значением конечной кратности, т.е. $dim\,Ker\,(A - \lambda I) < \infty$.*

Если A — оператор с компактной резольвентой, то спектр $\sigma(A)$ оператора A — не более чем счетное множество, не имею-

щее конечных предельных точек. Каждое число $\lambda \in \sigma(A)$ является собственным значением конечной кратности.

Теорема 1.5. *Самосопряженный оператор имеет вещественный спектр.*

Замечание 1.1. Пусть $X \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ и (α_n) — последовательность его собственных значений, пронумерованная с учетом их кратности. Тогда величина $SpX = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, называемая *спектральным следом* оператора X, совпадает с матричным следом trX оператора X. Матрица оператора X строится по ортонормированному базису в $\mathcal{H}$ (и не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathcal{H}$).

Определение 1.17. Линейный ограниченный оператор $P \in End\,\mathcal{X}$ называется *проектором* (или *идемпотентом*), если $P^2 = P$.

Каждый проектор P осуществляет разложение банахова пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, причем $\mathcal{X}_1 = Im\,P$, $\mathcal{X}_2 = Im\,(I - P)$.

Замечание 1.2. Пусть $\{Q_n; n \geq 0\}$ — система ортопроекторов из $End\,\mathcal{H}$, образующая разложение единицы, т.е. обладает свойствами: 1) $Q_nQ_m = Q_mQ_n = 0$ для $n \neq m$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_nx = x$ для любого $x \in \mathcal{H}$. Тогда для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|Q_{(n)}XQ_{(n)} - X\|_2 = 0$, где $Q_{(n)} = Q_0 + ... + Q_n$.

Замечание 1.3. Если $XY, YX \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, где $X, Y \in End\,\mathcal{H}$, и один из них компактен, то $tr(XY - YX) = 0$.

Замечание 1.4. Пусть оператор $X : D(X) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ (и, следовательно, имеет плотную в $\mathcal{H}$ область определения $D(X) \supset D(A)$). Если конечна величина $\sum\limits_{n,k\in\mathbb{Z}} |(Xe_n, e_k)|^2$, где (e_n) — ортонормированный базис из собственных векторов оператора $A = A_\theta$, то оператор X допускает единственное расширение на $\mathcal{H}$. Оно является оператором Гильберта–Шмидта и обозначается тем же символом X. Матрица $(Xe_n, e_k), n, k \in \mathbb{Z}$, называется матрицей оператора X относительно базиса (e_n).

Определение 1.18. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, т.е. $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — замкнутые подпространства из $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1 \bigcap \mathcal{H}_2 = \emptyset$, и любой вектор $x \in \mathcal{H}$ представим в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2 \in \mathcal{H}_2$. Проектор $P \in End\,\mathcal{H}$ вида $Px = x_1$, $x \in \mathcal{H}$, $x_1 \in \mathcal{H}_1$, называется *ортогональным проектором*, если он самосопряжен, или, что эквивалентно, пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ ортогональны другу другу, т.е. $(x_1, x_2) = 0$ для любых $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2 \in \mathcal{H}_2$.

Определение 1.19. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — замкнутый оператор, спектр которого представим в виде $\sigma(A) = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$, где σ_1, σ_2 — замкнутые непересекающиеся множества, причем σ_1 компактно. Пусть γ — жорданова замкнутая кривая, лежащая в $\rho(A)$ и содержащая σ_1 во внутренней части и σ_2 — во внешней. Проектор

$$P(\sigma_1, A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R(\lambda, A)\, d\lambda$$

называется *спектральным проектором Рисса*, построенным по изолированной части σ_1 спектра оператора A.

Теорема 1.6. *Пусть спектр замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ допускает описанное в определении 1.19 разбиение на части*

σ_1 и σ_2. Тогда оператор A допускает разложение $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_i = A|\mathcal{X}_i$, $i = 1,2$, — сужение A на $\mathcal{X}_i$ относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно A подпространств $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, причем $\mathcal{X}_i = Im\, P_i$, $i = 1,2$, $P_1 = P(\sigma_1, A)$ — спектральный проектор Рисса, построенный по изолированной части σ_1 спектра оператора A, а $P_2 = I - P_1$. Кроме того, $\sigma(A_i) = \sigma_i$, $i = 1,2$, $\mathcal{X}_1 \in D(A)$ и $A_1 \in End\,\mathcal{X}$.

Определение 1.20. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения

$$\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma_k, \quad \mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}, \tag{1.2}$$

взаимно непересекающихся компактных множеств σ_k, $k \in \mathbb{J}$. Пусть P_k — проектор Рисса, построенный по множеству σ_k. Оператор A называется спектральным относительно разложения (1.2) (или *обобщенным спектральным*), если ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{J}} P_k x$ безусловно сходится для любого вектора $x \in \mathcal{H}$.

Если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{J}$, одноточечные множества, и проекторы P_k, $k \in \mathbb{J}$, обладают свойством $AP_k = \lambda_k P_k$ для всех $k \in \mathbb{J}$, исключая конечное число, то спектральный относительно разложения (1.2) оператор A является *спектральным* (по Данфорду; см. [21]]) оператором, причем A — *спектральный оператор скалярного типа*, если $AP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{J}$.

Замечание 1.5. Пусть (e_n^j), $n \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, N}$, — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а P_n, $n \in \mathbb{Z}$, — ортогональные проекторы, имеющие вид $P_n = \sum\limits_{j=1}^{N} (x, e_n^j) e_n^j$. Введем в рассмотрение операторные матрицы (X_{nk}), составленные из операторных блоков $X_{nk} = P_n X P_k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

В частном случае, если $\dim Im\, P_n = 1$, т.е. $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$X_{nk}x = (P_n X P_k)x = (XP_k x, e_n)e_n = (Xe_k, e_n)(x, e_n)e_n = (x_{nk})(x, e_k)e_n,$$

где (x_{nk}) — числовая матрица оператора X относительно базиса (e_j), $j \in \mathbb{Z}$.

Если $dim\, Im\, P_k = 2$, $k \in \mathbb{Z}$, то будут рассматриваться блочные числовые матрицы вида

$$\widetilde{x_{nk}} = \begin{pmatrix} (Xe_k^1, e_n^1) & (Xe_k^2, e_n^1) \\ (Xe_k^1, e_n^2) & (Xe_k^2, e_n^2) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Определение 1.21. Пусть X — компактный оператор. S – *числами* оператора X называются упорядоченные по убыванию собственные значения положительного самосопряженного компактного оператора $\sqrt{XX^*}$.

Определение 1.22. Подалгебра $\mathfrak{S}$ алгебры линейных ограниченных операторов $End\,\mathcal{H}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется *двусторонним идеалом* алгебры $End\,\mathcal{H}$, если $AB \in \mathfrak{S}$, $BA \in \mathfrak{S}$ для произвольного $A \in \mathfrak{S}$ и любого $B \in End\,\mathcal{H}$.

Определение 1.23. Компактный оператор X принадлежит пространству $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $p \geq 1$, тогда и только тогда, когда s – числа (s_n) оператора X суммируемы со степенью p ($(s_n) \in l^p$), причем $\|A\|_p = (\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |s_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Пространства $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ образуют двусторонний идеал в алгебре $End\,\mathcal{H}$.

При $p = 1$ пространство $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ называют идеалом *ядерных операторов.*

При $p = 2$ пространство $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ называют идеалом *операторов Гильберта–Шмидта.*

Замечание 1.6. Оператор X является оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда $\left(\sum\limits_{n,k\in\mathbb{Z}} |(Xe_n, e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ для любого ортонормированного базиса $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, в $\mathcal{H}$. Данная величина совпадает с нормой Гильберта–Шмидта $\|X\|_2$.

Замечание 1.7. Интегральный оператор $X : L_2([a, b]) \to L_2([a, b])$ является оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда найдется элемент $\mathcal{K} \in L_2[a, b] \times L_2[a, b]$, т.е. такой, что $\left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(s, t)|^2\, ds\, dt\right)^{1/2} < \infty$ для которого оператор X представим в виде $(Xx)(s) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(s, t)x(t)\, dt$, $s \in [a, b]$. При этом $\|X\|_2 = \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(s, t)|^2\, ds\, dt\right)^{1/2}$.

Лемма 1.1. *Если операторы A_j, $j = 1..n$, принадлежат соответственно пространствам $\mathfrak{S}_{p_j}$, $j = 1, ..., n$, и $\sum\limits_{j=1}^n p_j^{-1} \le 1$, то оператор $A = A_1A_2 \ldots A_n$ принадлежит пространству $\mathfrak{S}_p$, где $p = \sum\limits_{j=1}^n p_j^{-1}$, причем*

$$\|A\|_p \le \|A_1\|_{p_1}\|A_2\|_{p_2} \ldots \|A_n\|_{p_n}.$$

В частности, произведение двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором.

1.2 О методе подобных операторов

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $End\,\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Определение 1.24. Линейные операторы $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}, i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует оператор $U \in End\,\mathcal{X}$ со свойствами:

1) Оператор U — обратим, т.е. его ядро $KerU$ нулевое и образ ImU совпадает с $\mathcal{X}$;

2) $A_1Ux = UA_2x, \quad x \in D(A_2)$;

3) $UD(A_2) = D(A_1)$.

Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

В следующей лемме рассматриваются совпадающие спектральные свойства подобных операторов. Формулировка леммы непосредственным образом следует из определения 1.24 и имеет следующий вид.

Лемма 1.2. *Рассмотрим два подобных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, и пусть $U \in End\,\mathcal{X}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Имеют место следующие свойства:*

1) спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i, $i = 1, 2$, совпадают, т.е. $\sigma(A_1) = \sigma(A_2), \sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2), \sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2), \sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$;

2) пусть оператор A_2 допускает разложение в прямую сумму

$A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|\mathcal{X}_k$, $k = 1, 2$, — сужение оператора A_2 на $\mathcal{X}_k$ разложения $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Тогда подпространства $\widetilde{\mathcal{X}_k} = U(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|\widetilde{\mathcal{X}_k}$, $k = 1, 2$, $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}_1} \oplus \widetilde{\mathcal{X}_2}$. Более того, если P — проектор, осуществляющий разложение пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму подпространств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ (т.е. $\mathcal{X}_1 = ImP$ — образ проектора P, $\mathcal{X}_2 = Im(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\widetilde{P} \in End\,\mathcal{X}$, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}_1} \oplus \widetilde{\mathcal{X}_2}$, задается формулой

$$\widetilde{P} = UPU^{-1}. \tag{1.4}$$

Рассмотрим линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и подчиненных оператору $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если выполнены следующие свойства:

1) $D(B) \supseteq D(A)$;

2) конечна величина $\|B\|_A = inf\{C > 0 : \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}$, принимаемая за норму оператора B в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$.

Поскольку $D(A - B) = D(A)$ для любого $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, то в дальнейшем будем считать, что $D(B) = D(A)$.

Далее в диссертации будет рассматриваться *трансформатор* (согласно терминологии М.Г.Крейна — это линейный оператор в пространстве линейных операторов)

$$ad_A : D(ad_A) \subset End\,\mathcal{X} \to End\,\mathcal{X},$$

$$ad_A X = AX - XA, \qquad X \in D(ad_A).$$

Область определения $D(ad_A)$ состоит из операторов $X \in End\,\mathcal{X}$, для которых имеют место свойства:

1) $XD(A) \subset D(A)$;

2) оператор $AX - XA : D(A) \to \mathcal{X}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathcal{X}$ (и полагается $ad_A X = Y$).

Далее трансформатор ad_A будем определять на замкнутых подалгебрах из $End\,\mathcal{X}$ аналогичным образом.

Наиболее важным понятием метода подобных операторов является определение допустимой тройки. Такое определение используется в статьях [10], [13].

Определение 1.25. Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и

$$J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}, \qquad \Gamma : \mathfrak{U} \to End\,\mathcal{X}$$

являются линейными трансформаторами. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора A, а $\mathfrak{U}$ — *допустимым пространством возмущений*, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$, для любого $X \in \mathfrak{U}$);

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, более того, $\Gamma X \in D(ad_A)$,

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX, \qquad X \in \mathfrak{U}, \tag{1.5}$$

причем $\Gamma X \in End\,\mathcal{X}$ — единственное решение уравнения

$$AY - YA = X - JX, \tag{1.6}$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{U}$, и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \qquad max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma \|X\|_* \|Y\|_*;$$

5) $J((\Gamma X)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$;

6) для любых $X \in \mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$, где I — тождественный оператор.

Равенства (1.5) и (1.6) в определении 1.25 понимаются на векторах из $D(A)$.

Следующая теорема является основной в методе подобных операторов. Её доказательство содержится в статьях [10], [13].

Теорема 1.7. *Пусть* $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — *допустимая для невозмущенного оператора* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *тройка, и* B — *оператор из пространства допустимых возмущений* $\mathfrak{U}$, *для которого выполнено условие*

$$\|J\| \|B\|_* \|\Gamma\| < \frac{1}{4}. \tag{1.7}$$

Тогда операторы $A - B$ *и* $A - J\widetilde{X}$ *подобны, где* $\widetilde{X} \in \mathfrak{U}$ *является решением (нелинейного) уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \tag{1.8}$$

которое можно найти итерационно, полагая $X_0 = 0, X_1 = B, X_2 = \Phi(X_1), ..., X_{n+1} = \Phi(X_n), n \geq 2$. *Отображение* $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ *является* *сжимающим в шаре* $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \le 3\|B\|_*\}$*. Оператором преобразования оператора* $A - B$ *в оператор* $A - J\widetilde{X}$ *является обратимый оператор* $I + \Gamma\widetilde{X} \in End\,\mathcal{X}$*, т.е. имеет место равенство*

$$A - B = (I + \Gamma\widetilde{X})(A - J\widetilde{X})(I + \Gamma\widetilde{X})^{-1}. \tag{1.9}$$

Часто возникает сложность построения пространства допустимых возмущений, содержащее рассматриваемое возмущение. Проблема решается, путем построения трансформаторов J и Γ (с использованием равенств (1.5), (1.6)) на всем пространстве допустимых возмущений $\mathfrak{U}$. Пространство $\mathfrak{U}$ вместе с сужениями на него J и Γ образует допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для оператора A. В дальнейшем они будут обозначаться теми же символами J и Γ.

В случае, если возмущение B не принадлежит $\mathfrak{U}$, то делается предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - \widetilde{B}$, где оператор $\widetilde{B}$ уже принадлежит пространству допустимых возмущений, т.е. $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Такое преобразование осуществляется в условиях следующего предположения.

Предложение 1.1. *Операторы* $\Gamma B, JB, B$ *из* $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ *обладают свойствами:*

*(**a**)* $\Gamma B \in End\,\mathcal{X}$ *и* $\|\Gamma B\| < 1$;

*(**b**)* $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$;

*(**c**)* $B\Gamma B, (\Gamma B)JB \in \mathfrak{U}$;

*(**d**)* $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$;

*(**e**) для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ *такое, что* $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)\| < \varepsilon$*, где* $\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ *— резольвентное множество оператора* A.

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия предположения 1.1, тогда оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - JB - B_0$, *где* $B_0 = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$, *причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - JB - B_0), \tag{1.10}$$

где I *— тождественный оператор.*

Доказательство. Обратимость оператора $U = I + \Gamma B$ и равенство $UD(A) = D(A)$ непосредственным образом следуют из условий (a) и (e) предположения 1.1 (см. [10]). Равенство (1.10) вытекает из условия (b) и равенства (d), причем корректность определения оператора B_0 гарантируется выполнением условий (b) и (c). Теорема доказана.

1.3 Постановка задачи

Пусть $L_2[0,\omega]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых на $[0,\omega]$ классов функций, суммируемых с квадратом модуля, со скалярным произведением вида:

$$(x,y) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau, \qquad x,y\in L_2[0,\omega].$$

Через $W_2^2[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева $\{x\in L_2[0,\omega]:$ x' абсолютно непрерывна и $x''\in L_2[0,\omega]\}$.

Рассматривается дифференциальный оператор

$$L_\theta : D(L)\subset L_2[0,\omega]\to L_2[0,\omega], \quad \theta\in[0,1],$$

порожденный на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением

$$l(x) = -x'' - vx,$$

с областью определения

$$D(L_\theta) = \left\{x\in W_2^2[0,\omega] : x(\omega) = e^{i\pi\theta}x(0), x'(\omega) = e^{i\pi\theta}x'(0)\right\}.$$

Если $\theta = 0$, то рассматривается оператор L_0, определяемый периодическими краевыми условиями, и соответствующий оператор в дальнейшем будет часто обозначаться символом L_{per}. Если $\theta = 1$, то краевые условия являются антипериодическими и соответствующий оператор будет обозначаться L_{ap}. В случае $\theta\in(0,1)$ оператор будет обозначаться символом L_θ.

Предполагается, что потенциал v принадлежит гильбертову пространству $L_2[0,\omega]$ и пусть

$$v(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(k) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}} t, t \in [0,\omega], \qquad \widehat{v}(k) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(t) e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}} t dt,$$

его ряд Фурье.

Оператор $L_\theta, \theta \in [0,1]$ представим в виде

$$L_\theta = L_\theta^0 - V,$$

где свободный оператор $L_\theta^0 : D(L_\theta^0) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$ задается дифференциальным выражением

$$l_0(x) = -x''$$

и теми же краевыми условиями. Оператор V является оператором умножения на потенциал v. Он корректно определён ввиду включения $D(B) \supset D(L_\theta^0)$. При исследовании оператора L_θ оператор L_θ^0 считается невозмущенным оператором, а оператор V будет играть роль возмущения. Отметим, что не делаются ограничения на потенциал v, гарантирующие самосопряженность возмущения, и какие-либо дополнительные ограничения (типа гладкости), кроме условия $v \in L_2[0,\omega]$.

Оператор L_θ^0 является самосопряженным неотрицательным оператором с компактной резольвентой. Спектр оператора L_θ^0 состоит из собственных значений вида

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{для} \quad \theta \in \{0,1\},$$

$$\lambda_{n,\theta} = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{для} \quad \theta \in (0,1).$$

Соответствующий ортонормированный базис в $L_2[0,\omega]$ из собственных функций имеет вид

$$e_n(t) = e^{i\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega}t}, \qquad t \in [0,\omega], \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{для} \quad \theta \in \{0,1\},$$

$$e_{\theta,n}(t) = e^{i\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega}t}, \qquad t \in [0,\omega], \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{для} \quad \theta \in (0,1).$$

При этом для периодических краевых условий (для оператора L^0_{per}, $\theta = 0$) все его собственные значения двукратны, за исключением числа $\lambda_0 = 0$. Для антипериодических краевых условий (для оператора L^0_{ap}, $\theta = 1$) все собственные значения двукратны, а при $\theta \in (0,1)$, — однократны, т.е. являются простыми.

Для исследования спектральных свойств дифференциального оператора L_θ, $\theta \in [0,1]$, будет использоваться метод подобных операторов [5] - [13]. В частности, ставится задача получения асимптотики спектра, оценок отклонений спектральных проекторов от соответствующих спектральных проекторов невозмущенного оператора.

Глава 2

Метод подобных операторов в спектральном анализе возмущенных самосопряженных операторов операторами Гильберта–Шмидта

2.1 Построение допустимой тройки для абстрактных операторов

В данном параграфе метод подобных операторов применяется к абстрактным линейным операторам, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В качестве невозмущенного оператора будет выступать оператор $A = A_\theta : D(A_\theta) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, который имеет спектральные свойства, близкие к спектральным свойствам оператора L_θ^0, $\theta \in [0, 1]$.

Рассматривается оператор $A - B$, где $A = A_\theta : D(A) \subset \mathcal{H} \to$

$\mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой, спектр $\sigma(A_\theta)$ которого образует последовательность собственных значений вида

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{для} \quad \theta \in \{0,1\}, \tag{2.1}$$

$$\lambda_{n,\theta} = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{для} \quad \theta \in (0,1). \tag{2.2}$$

Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{\theta,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\theta \in \{0,1\}$, — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\}$ и, соответственно, $P_{\theta,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\theta \in (0,1)$ — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_{\theta,n}\}$. Следовательно, $A\mathbb{P}_{\theta,n} = \lambda_{\theta,n}\mathbb{P}_{\theta,n}$, $\theta \in [0,1]$.

Отметим, что только в случае $\theta = 0$ и $\theta = 1$ соответствующие проекторы $\mathbb{P}_{0,n}$ и $\mathbb{P}_{1,n}$ будут обозначаться через $\mathbb{P}_n$. Для любого $x \in \mathcal{H}$ описанные выше проекторы определяются следующим образом:

$$\mathbb{P}_{0,n}x = (x,e_n)e_n + (x,e_{-n})e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{0,0}x = (x,e_0)e_0, \quad \theta = 0, \tag{2.3}$$

$$P_{\theta,n}x = (x,e_{\theta,n})e_{\theta,n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in (0,1), \tag{2.4}$$

$$\mathbb{P}_{1,n}x = (x,e_n)e_n + (x,e_{-n-1})e_{-n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \theta = 1, \tag{2.5}$$

где e_n, $n \in \mathbb{Z}$, — собственные функции оператора A_θ для $\theta = 0$, и $\theta = 1$ и $e_{\theta,n}$ — собственные функции для $\theta \in (0,1)$. Отметим, что для случая $\theta = 0$ проекторы $\mathbb{P}_n$ задается как $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{0,n} = P_n + P_{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_{0,0} = P_0$. Соответственно, для $\theta = 1$ проекторы $\mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, определяются как $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{1,n} = P_n + P_{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Оператор (возмущение) B принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Символом $\|X\|_2$ будем обозначать норму оператора Гильберта–Шмидта $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т.е. $\|X\|_2 = \sqrt{tr(XX^*)}$, где $tr(XX^*)$ — след оператора $XX^* \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. Здесь символом $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ обозначим двусторонний *идеал ядерных операторов* из $End\,\mathcal{H}$ (см. [16]) с нормой

$$\|X\|_1 = (XX^*)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n,$$

где (s_n) — последовательность s – чисел оператора X.

Далее приступим к построению трансформаторов

$$J = J_\theta, \quad \Gamma = \Gamma_\theta \in End\,\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad \theta \in [0,1],$$

которые будут участвовать при построении соответствующих трансформаторов в допустимых пространствах возмущений (и, как правило, обозначаться теми же символами).

Трансформатор $J_0 = J_{per}$ определим формулой

$$J_{per}X = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_k X \mathbb{P}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k X P_k + \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k X P_{-k} + P_0 X P_0, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{2.6}$$

Если $\theta = 1$, то трансформатор $J_1 = J_{ap} \in End\,\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим формулой

$$J_{ap}X = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_n X \mathbb{P}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n X P_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n X P_{-n-1}, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{2.7}$$

Наконец, для $\theta \in (0,1)$ трансформатор J_θ имеет вид

$$J_\theta X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n X P_n, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \qquad P_n = P_{\theta,n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Трансформатор $\Gamma = \Gamma_\theta, \theta \in [0,1]$, определим формулой

$$\Gamma_\theta X = \sum_{\lambda_{\theta,i}\neq\lambda_{\theta,j}} \frac{P_{\theta,i} X P_{\theta,j}}{\lambda_{\theta,i} - \lambda_{\theta,j}}, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{2.9}$$

Ввиду принадлежности оператора X идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и положительности величины $\min\limits_{\lambda_{\theta,i}\neq\lambda_{\theta,j}} |\lambda_{\theta,i}-\lambda_{\theta,j}|$, из замечания 1.4 следует, что трансформатор Γ_θ корректно определен и является ограниченным оператором.

Наряду с указанными трансформаторами рассмотрим последовательности трансформаторов $J_m = J_{\theta,m}, \Gamma_m = \Gamma_{\theta,m}, m \geq 0$, определенные равенствами:

$$J_m X = J_{\theta,m} X = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \tag{2.10}$$

$$\Gamma_m X = \Gamma_{\theta,m} X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}). \tag{2.11}$$

Отметим, что $J_m = J, \Gamma_m = \Gamma$, если $m = 0$.

Трансформатор ad_{A_θ} обратим на подпространстве $Ker\, J_\theta = Im\,(I - J_\theta)$. Обратный к нему совпадает с трансформатором Γ_θ на операторах вида $P_{\theta,i} X P_{\theta,j}, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \lambda_{\theta,i} \neq \lambda_{\theta,j}$, линейные комбинации которых плотны в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Таким образом, трансформатор Γ_θ нулевой на $Im\, J_\theta$ и совпадает с обратным к сужению ad_{A_θ} на $Im\,(I - J_\theta)$.

Приступим к построению допустимой для оператора $A = A_\theta$ тройки, которая существенно используется при доказательстве основных результатов статьи.

Для любого ненулевого оператора X из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого $\theta \in [0,1]$ рассмотрим двустороннюю последовательность чисел вида

$$\alpha_n(X) = \alpha_{\theta,n}(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max\{(\sum_{|k|\geq n} \|XP_{\theta,k}\|_2^2)^{\frac{1}{4}}, (\sum_{|k|\geq m+1} \|P_{\theta,k}X\|_2^2)^{\frac{1}{4}}\}. \tag{2.12}$$

Эта последовательность обладает следующими свойствами:

1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X), \quad n \in \mathbb{Z}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(X) = 0$;

3) $\alpha_n(X) \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z}$;

4) $\alpha_n(X) \geq \alpha_{n+1}(X), \quad n \in \mathbb{N}$;

5) $\alpha_n(X) \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}$, если и только если $P_{(m)}XP_{(m)} \neq X$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$;

6) конечна величина $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \alpha_n(X)\neq 0}} \frac{\|XP_n\|^2+\|P_nX\|^2}{\alpha_n(X)^2}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого $\theta \in [0,1]$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор

$$f_X(A_\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{\theta,n}(X)P_n \in End\,\mathcal{H}. \tag{2.13}$$

Он является функцией от оператора $A = A_\theta$, где $f_X : \sigma(A_\theta) \to (0,\infty), f_X(\lambda_{\theta,n}) = \alpha_{\theta,n}(X), n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что $\|f_X(A_\theta)\| = \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(X) = 1$. Если $P_{(m)}XP_{(m)} \neq 0$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$, то оператор $f_X(A_\theta)$ является положительно определенным оператором.

Итак, определены последовательности трансформаторов $J_m, \Gamma_m \in End\,\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Лемма 2.1. *Трансформаторы $J_{\theta,m}$, $\Gamma_{\theta,m} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $m \in \mathbb{Z}_+$, обладают следующими свойствами:*

1) $P_{(m)}(J_{\theta,m}X) = (J_{\theta,m}X)P_{(m)} = P_{(m)}XP_{(m)}$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

2) $J_{\theta,m}((\Gamma_{\theta,m}X)(J_{\theta,m}Y)) = J_{\theta,m}((J_{\theta,m}X)(\Gamma_{\theta,m}Y)) = 0$, X, $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

3) $\Gamma_{\theta,m}X \in D(\mathrm{ad}_{A_\theta})$ и $\mathrm{ad}_{A_\theta}(\Gamma_{\theta,m}X) = X - J_{\theta,m}X$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

4) для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют место оценки

$$\|(\Gamma_{\theta,m}X)\mathbb{P}_n\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\|X\mathbb{P}_n\|_2}{4\pi^2(2n-1)}, \quad n \geqslant m+1, \quad \theta \in \{0,1\}, \tag{2.14}$$

$$\|(\Gamma_{\theta,m}X)P_{\theta,n}\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\|XP_{\theta,n}\|_2}{4\pi^2\theta(2n-1)}, \quad |n| \geqslant m+1, \quad \theta \in (0,1).$$

Доказательство. Свойства 1), 2) непосредственно следуют из определения трансформаторов $J_{\theta,m}$, $\Gamma_{\theta,m}$. Свойство 3) следует из инвариантности подпространства $Im\,(I - J_{\theta,m})$ для трансформатора ad_{A_θ}.

Докажем свойство 4) для $\theta = 0$. Пусть $\mathcal{X}_{kl} = \mathbb{P}_k X \mathbb{P}_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, — блочная матрица оператора X. Тогда матрица $(\mathcal{Y}_{kl})$ оператора $\mathcal{Y} = \Gamma_{per,m}X$ будет иметь вид

$$\mathcal{Y}_{kl} = \frac{\mathcal{X}_{kl}}{\lambda_k - \lambda_l}, \quad \max\{k,l\} \geqslant m+1,$$

$$\mathcal{Y}_{kl} = 0, \quad \max\{k,l\} \leqslant m.$$

Следовательно,

$$\|(\Gamma_{per,m}X)\mathbb{P}_n\|_2^2 = \sum_{\substack{k,l=0 \\ k\neq l}}^{\infty} \frac{\|\mathbb{P}_{\theta,k}(X\mathbb{P}_n)\mathbb{P}_{\theta,1}\|_2^2}{|\lambda_k - \lambda_l|^2} \leqslant \frac{\omega^4\|X\mathbb{P}_n\|_2^2}{16\pi^4(2n-1)^2}, \quad n \geqslant m+1.$$

Аналогичным образом доказываются остальные неравенства. Лемма доказана. □

Далее рассматривается оператор $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, играющий роль возмущения оператора $A = A_\theta$. По оператору B построим функцию f_B, которую далее будем обозначать через f.

Замечание 2.1. Если оператор B обладает свойством $P_{(m)}BP_{(m)} = B$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$, то изучение оператора $A_\theta - B$ сводится к изучению оператора конечного ранга $(A_\theta - B)|\mathcal{H}_{(m)}$ (сужению оператора $A_\theta - B$ на конечномерное подпространство $\mathcal{H}_{(m)} = ImP_{(m)}$). Поэтому в дальнейшем предполагается, что $P_{(m)}BP_{(m)} \neq B$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$, что влечет положительную определенность оператора $f(A)$. Таким образом, $f(A) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(B)P_n$.

Лемма 2.2. *Трансформаторы* $J_{\theta,m}$, $\Gamma_{\theta,m}$, $\theta \in [0,1]$, $m \geq 0$, *являются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. *Каждый трансформатор* $J_{\theta,m}$ *является ортогональным проектором, а трансформатор* $\Gamma_{\theta,m}$ *является компактным оператором, допускающим оценку*

$$\|\Gamma_{\theta,m}\| \leq \frac{\omega^2}{4\pi^2(m+1)} \begin{cases} 1, & \theta \in \{0,1\}, \\ \frac{1}{\theta}, & \theta \in (0,1). \end{cases} \tag{2.15}$$

Доказательство. Из определения трансформаторов $J_{\theta,m}$, $\theta \in [0,1]$, $m \geq 0$, следует, что все они являются проекторами. При этом $\|J_\theta X\|_2^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|P_n X P_n\|_2^2 \leq \|X\|_2^2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, если $\theta \in (0,1)$. Такая же оценка верна и для $\theta \in \{0,1\}$. Следовательно $\|J_\theta\| = 1, \theta \in [0,1]$, и поэтому J_θ — ортопроектор для любого $\theta \in [0,1]$.

Для любых фиксированных $i, j \in \mathbb{Z}$, $|i-j| \geq m+1$, для которых $\lambda_{\theta,i} \neq \lambda_{\theta,j}$, операторы $P_{\theta,i} X P_{\theta,j}, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, образуют собственное подпространство $E_{i,j}$ трансформатора $\Gamma_{\theta,m}$, отвечающее собственному значению $(\lambda_{\theta,i} - \lambda_{\theta,j})^{-1}$. Поскольку все такие собственные подпространства взаимно ортогональны, то $\Gamma_{\theta,m}, \theta \in [0,1], m \geq 0,$ — самосопряженные операторы. Следовательно, величина $\|\Gamma_{\theta,m}\|$ совпадает со спектральным радиусом трансформатора $\Gamma_{\theta,m}$, то есть с величиной $\max\limits_{\substack{|i-j|\geq m+1 \\ \lambda_{\theta,i}\neq\lambda_{\theta,j}}} |(\lambda_{\theta,i} - \lambda_{\theta,j})^{-1}|$. Таким образом, верны оценки (2.15). Лемма доказана. □

Введем в рассмотрение пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}(f)$ (для оператора $A = A_\theta$), состоящее из операторов, входящих в идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и каждый оператор $X \in \mathfrak{U}(f)$ представим в виде

$$X = X_l f(A), \qquad X = f(A) X_r, \tag{2.16}$$

где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Ввиду положительной определенности оператора $f(A)$ представление (2.16) оператора X единственно. Норму в $\mathfrak{U}(f)$ введем формулой

$$\|X\|_* = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}. \qquad (2.17)$$

Последовательность $(\alpha_n(B)) = (\alpha_{\theta,n}(B))$, с помощью которой определяется оператор $f(A)$, зависит от $\theta \in [0,1]$, и поэтому пространство $\mathfrak{U}(f)$ иногда будет обозначаться символом $\mathfrak{U}_\theta(f)$.

Непосредственно из определения пространства $\mathfrak{U}(f)$ следует, что оно является банаховым пространством . Однако оно не является замкнутым подпространством в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ (по норме в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$).

Замечание 2.2. Из леммы 2.1 (свойств 1),4)) следует, что $\mathfrak{U}(f)$ — инвариантное подпространство из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для трансформаторов $J_{\theta,m} = J_m, \Gamma_{\theta,m} = \Gamma_m \in End\,\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), m \in \mathbb{Z}_+$. Их сужения на $\mathfrak{U}(f)$ далее будут обозначаться теми же символами.

Итак, для $\mathfrak{U}(f)$ корректно определены трансформаторы $J_{\theta,m}, \Gamma_{\theta,m}, m \in \mathbb{Z}_+$, причем если оператор $X \in \mathfrak{U}(f)$ представим в виде (2.16), то

$$J_{\theta,m}X = J_mX = (J_mX_l)f(A) = f(A)(J_mX_r), \qquad m \geq 0, \qquad (2.18)$$

$$\Gamma_{\theta,m}X = \Gamma_mX = (\Gamma_mX_l)f(A) = f(A)(\Gamma_mX_r), \qquad m \geq 0. \qquad (2.19)$$

Замечание 2.3. Непосредственно из определения трансформаторов $J_{\theta,m}, \Gamma_{\theta,m} \in End\,\mathfrak{U}(f), \theta \in [0,1], m \geq 0$, определенных формулами (2.18), (2.19), определения нормы в $\mathfrak{U}(f)$ и леммы 2.2 следует, что $J_{\theta,m}$– проектор с $\|J_{\theta,m}\| = 1$ и величина $\|\Gamma_{\theta,m}\|$ допускает оценку (2.15).

Лемма 2.3. *Для любых* $m \in \mathbb{Z}_+, \theta \in [0,1]$, *тройка* $(\mathfrak{U}(f), J_{\theta,m}, \Gamma_{\theta,m})$ *является допустимой для оператора* $A = A_\theta, \|J_{\theta,m}\| = 1, J_{\theta,m}$ — *проектор и постоянная* $\gamma = \gamma_{\theta,m}$ *из определения 1.25 допускает оценку*

$$\gamma = \gamma_{\theta,m} = \frac{\omega^2}{4\pi^2(m+1)} \begin{cases} 1, & \theta \in \{0,1\}, \\ \frac{1}{\theta}, & \theta \in (0,1). \end{cases} \tag{2.20}$$

Доказательство. Из замечания 2.3 следует, что $J_{\theta,m}$ — проектор и $\|J_{\theta,m}\| = 1$ и величина $\|\Gamma_{\theta,m}\|$ допускает оценку (2.15). Ясно, что пространство $\mathfrak{U}(f)$ непрерывно вложено в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Свойство 3) определения 1.25 допустимой тройки следует из свойства 5) леммы 2.1. Также очевидно свойство 5) определения 1.25.

Докажем свойство 4). Пусть $X, Y \in \mathfrak{U}(f)$. Представим эти операторы в виде

$$X = f(A)X_r, \qquad Y = f(A)Y_r,$$

где $X_r, Y_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда оператор $X\Gamma_{\theta,m}Y$ можно записать в виде $Z = f(A)Z_r$, где $Z_r = X_r\Gamma_{\theta,m}(f(A)Y_r)$. Из леммы 2.2 получаем оценку (учитывается, что $\|f(A)\| \le 1$):

$$\|Z_r\|_2 \le \|X_r\|_2\|\Gamma_m(f(A)Y_r)\| \le \|X_r\|_2\|f(A)\|\|\Gamma_m Y_r\| \le \\ \le \gamma_{\theta,m}\|X_r\|_2\|Y_r\|_2 \le \gamma_{\theta,m}\|X\|_*\|Y\|_*, \tag{2.21}$$

где величина $\gamma_{\theta,m}$ определена формулой (2.20). Представление операторов X, Y в виде $X = X_l f(A), Y = Y_l f(A)$ позволяет оператор Z записать в виде $Z = Z_l f(A)$, где $Z_l = \Gamma_{\theta,m}(X_l f(A))Y_l$. Еще раз применяя лемму 2.2, получаем оценку:

$$\|Z_l\|_2 \le \gamma_{\theta,m}\|X\|_*\|Y\|_*.$$

В итоге получаем оценку:

$$\|X\Gamma_{\theta,m}Y\|_* \leq \gamma_{\theta,m}\|X\|_*\|Y\|_*.$$

Аналогичным образом устанавливается оценка $\|(\Gamma_{\theta,m}X)Y\|_* \leq \gamma_{\theta,m}\|X\|_*\|Y\|_*$. Итак, свойство 4) доказано. Лемма доказана. $\square$

2.2 Оценки собственных значений

В данном параграфе будет рассмотрена основная теорема о подобии, а также получено асимптотическое представление для оператора $A_\theta - B$.

Теорема 2.1. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\gamma_{\theta,m}\|B\|_* < \frac{1}{4}. \tag{2.22}$$

Тогда оператор $A - B = A_\theta - B$ подобен оператору вида

$$A_\theta - J_m\widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{k\geq m+1} \mathbb{P}_k\widetilde{X}\mathbb{P}_k, \theta \in \{0,1\}, \tag{2.23}$$

$$A_\theta - J_m\widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{|k|\geq m+1} P_k\widetilde{X}P_k, \theta \in (0,1). \tag{2.24}$$

Оператор $\widetilde{X} = \widetilde{X}_m$ принадлежит допустимому пространству возмущений $\mathfrak{U}(f)$, где $f = f_B$, и является решением уравнения (1.8), в котором $J = J_{\theta,m}, \Gamma = \Gamma_{\theta,m}$, и уравнение рассматривается в банаховом пространстве $\mathfrak{U}(f)$. Преобразование подобия оператора $A_\theta - B$ в оператор $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ осуществляет оператор $I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}$.

Доказательство. Для числа $m \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего условию (2.22), рассмотрим допустимую тройку $(\mathfrak{U}(f), J_{\theta,m}, \Gamma_{\theta,m})$. Утверждение теоремы следует из леммы 2.1 и (общей) теоремы 1.7. Теорема доказана. □

Замечание 2.4. Теорема 2.1 является одним из основных результатов статьи. Её использование (после предварительного преобразования подобия изучаемого дифференциального оператора $L^0_\theta - V$ в оператор $A_\theta - B$, где $A_\theta = L_\theta^0$ и $B \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$) позволяет свести изучение оператора $L_\theta^0 - V$ к изучению оператора $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$. Спектральные свойства последнего наиболее близки к спектральным свойствам оператора $A = A_\theta$.

Наиболее важным свойством оператора $A - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ является инвариантность относительно подпространств $\mathcal{H}_{(m)} = Im\, P_{(m)}, Im\, \mathbb{P}_n$, $n \geq m+1$, для $\theta \in \{0,1\}, Im\, P_n, |n| \geq m+1$, для $\theta \in (0,1)$. Подобие операторов $A_\theta - B, A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ влечет совпадение их спектров. Оператор $A - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ имеет (как и $A_\theta - B$) компактную резольвенту. Поэтому если $\lambda_0 \in \sigma(A_\theta - B) = \sigma(A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X})$, то существует собственный вектор $x_0 \in D(A_\theta)$ такой, что $(A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X})x_0 = \lambda_0 x_0$. Из равенств (2.23), (2.24) следует

$$A_{(m)}P_{(m)}x_0 = \lambda_0 P_{(m)}x_0, A_k\mathbb{P}_k x_0 = \lambda_0 \mathbb{P}_k x_0, k \geq m+1, \theta \in \{0,1\}, \tag{2.25}$$

$$A_k P_k x_0 = \lambda_0 P_k x_0, \quad |k| \geq m+1, \quad \theta \in (0,1). \tag{2.26}$$

В этих равенствах $A_{(m)}$ — сужение оператора $A - J_m\widetilde{X}$ на $\mathcal{H}_{(m)} = ImP_{(m)}, A_k$ — сужение оператора $A - J_m\widetilde{X}$ на $\mathcal{H}_{(m)} = Im\mathbb{P}_k, k \geq m+1$, если $\theta \in \{0,1\}$ и $\mathcal{H}_k = ImP_k, |k| \geq m+1$, если $\theta \in (0,1)$. Поскольку $I = P_{(m)} + \sum\limits_{k\geq m+1} \mathbb{P}_k, I = P_{(m)} + \sum\limits_{|k|\geq m+1} P_k$ — разложение единицы, то хотя бы один из векторов $P_{(m)}x_0, \mathbb{P}_k x_0, k \geq m+1$, если $\theta \in \{0,1\}, P_{(m)}x_0, P_k x_0, |k| \geq m+1$, если $\theta \in (0,1)$, является ненулевым. Следовательно, λ_0 — собственное значение соответствующего сужения оператора $A_\theta - J_m\widetilde{X}$ на рассматриваемые подпространства.

Далее символом $\mathbb{Z}_{\theta,m}$ обозначим множество $\{k \in \mathbb{Z} : |k| \geq m + 1\}$, если $\theta \in (0,1)$ и $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq m+1\}$, если $\theta \in \{0,1\}$. Из проведенных рассуждений следует включение

$$\sigma(A_\theta - B) = \sigma(A_\theta - J_m\widetilde{X}) \subset \sigma(A_{(m)}) \bigcup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_{\theta,m}} \sigma(A_k). \tag{2.27}$$

Очевидно обратное включение. Следовательно, имеет место равенство

$$\sigma(A_\theta - B) = \sigma(A_\theta - J_m\widetilde{X}) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_{\theta,m}} \sigma(A_k). \tag{2.28}$$

Итак, из сделанного замечания следует

Теорема 2.2. *В условиях теоремы 2.1 имеет место представление спектра оператора $A_\theta - B$ вида*

$$\sigma(A_\theta - B) = \sigma(A_\theta - J_m\widetilde{X}) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_{\theta,m}} \sigma(A_k). \tag{2.29}$$

Замечание 2.5. Доказанное представление (2.28) для $\sigma(A_\theta - B)$ позволяет, используя формулу для $J_m\widetilde{X}$ вида

$$J_m\widetilde{X} = J_m(B\Gamma_{\theta,m})\widetilde{X} + J_{\theta,m}B \tag{2.30}$$

получать асимптотику собственных значений оператора $A_\theta - B$.

Перейдем к получению асимптотических формул для собственных значений оператора $A_\theta - B$. Формула (2.30) следует из уравнения (1.8) (которому удовлетворяет оператор $\widetilde{X}$), после применения к обеим его частям трансформатора $J = J_{\theta,m}$ и учета свойства (5) из определения 1.25 допустимой тройки.

Пусть $\theta \in (0,1)$. В этом случае операторы $A_n, |n| \geq m+1$, из представления (2.28) являются скалярными операторами ранга один. Записывая операторы $\widetilde{X}, B$ в виде $\widetilde{X} = X_l f(A), B = f(A)B_r$, где $X_l, B_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, из (2.30) получаем, что операторы $A_n, |n| \geq m+1$, представимы в виде

$$A_n = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 I_n - (Be_n, e_n)I_n - \\ - (f(A)B_r\Gamma_{\theta,m}X_l f(A)e_n, e_n)I_n = \widetilde{\lambda}_n I_n, \quad |n| \geq m+1, \quad (2.31)$$

где $e_n = e_{\theta,n}$.

Следовательно, собственное значение $\widetilde{\lambda}_n$ оператора A_n имеет вид

$$\widetilde{\lambda}_n = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - (Be_n, e_n) - \alpha_n^2(B)((\Gamma_{\theta,m}X_l)e_n, B_r^* e_n). \quad (2.32)$$

Сопряженный к B_r оператор B_r^* является оператором Гильберта–Шмидта. Поэтому последовательность $\beta_n = \|B_r^* e_n\|, |n| \geq m+1$, суммируема с квадратом.

Если $(x_{i,j})$ — матрица оператора $X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ в базисе $e_{\theta,n}, n \in \mathbb{Z}$, то матрица $(y_{i,j})$ оператора $Y = (\Gamma_{\theta,m}X_l)A_\theta$ имеет вид

$$y_{i,j} = \frac{\omega^2 x_{i,j} \frac{\pi}{\omega}(2j+\theta)^2}{\pi^2((2i+\theta)^2 - (2j+\theta)^2)}, \quad i, j \in \mathbb{Z}, i \neq j.$$

В силу замечания 1.4 оператор Y допускает расширение на $\mathcal{H}$ до оператора из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, обозначаемый тем же символом. Следовательно, последовательность $\delta_n = (\Gamma_{\theta,m}X_l e_n, B_r^* e_n), |n| \geq m+1$, представима в виде $\delta_n = (A_\theta e_n, Y^* B_r^* e_n) = \frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)^2(e_n, Ce_n), |n| \geq m+1$. Оператор $C = Y^* B_r^*$ есть произведение двух операторов Гильберта–Шмидта и поэтому является ядерным оператором. Следовательно, последовательность $\xi_n = \frac{\omega}{\pi}(e_n, Ce_n), |n| \geq m+1$, является суммируемой. Итак, при условии $\theta \in (0,1)$ следует асимптотическое представление

$$\widetilde{\lambda}_n = \frac{\pi^2}{\omega^2}(2n+\theta)^2 - (Be_n, e_n) + \frac{\alpha_n^2(B)}{2n+\theta}\,\xi_n, |n| \geq m+1, \quad (2.33)$$

для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n, |n| \geq m+1$, оператора $A_\theta - B$. В (2.33) последовательность $(\xi_n), |n| \geq m+1$, является суммируемой последовательностью.

Предположим теперь, что $\theta \in \{0,1\}$. Для получения асимптотики собственных значений оператора $A_\theta - B$ будет использоваться

Лемма 2.4. *Собственные значения $\widetilde{\mu}_n, n \in \mathbb{N}$, матриц вида*

$$\mathcal{B}_n + \mathcal{C}_n = \begin{pmatrix} b_1(n) & b_2(n) \\ b_3(n) & b_4(n) \end{pmatrix} + \alpha(n) \begin{pmatrix} c_1(n) & c_2(n) \\ c_3(n) & c_4(n) \end{pmatrix},$$

где $b_k(n) \in l^2, c_k(n) \in l^1, 1 \leq k \leq 4, \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ допускают представление вида

$$\widetilde{\mu}_n^{\pm} = \mu_n^{\pm} + \alpha(n)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_n^{\pm}, n \in \mathbb{N}, \tag{2.34}$$

где $\mu_n^{\pm} = \frac{1}{2}(b_1(n)+b_4(n)) \pm \frac{1}{2}((b_1(n)+b_4(n))^2 + 4b_2(n)b_3(n))^{\frac{1}{2}}$ — собственные значения матрицы $\mathcal{B}(n) = \begin{pmatrix} b_1(n) & b_2(n) \\ b_3(n) & b_4(n) \end{pmatrix}, (\mu_n^{\pm}) \in l^2$, и последовательности $(\varepsilon_n^{\pm})$ принадлежат пространству $l^{\frac{4}{3}}$.

Доказательство. Собственные значения $(\widetilde{\mu}_n^{\pm})$ матрицы $\mathcal{B}_n + \mathcal{C}_n$ представимы в виде

$$\widetilde{\mu}_n^{\pm} = \frac{b_1(n)+b_4(n)}{2} + \alpha(n)(\frac{c_1(n)+c_4(n)}{2}) \pm \frac{1}{2}(b_1(n)+b_4(n)+ \\ +\alpha(n)(c_1(n)+c_4(n)))^2 + 4((b_2(n)+\alpha(n)c_2(n))(b_3(n)+\alpha(n)c_3(n)))^{\frac{1}{2}}. \tag{2.35}$$

Следовательно, имеет место представление

$$\widetilde{\mu}_n^{\pm} = \frac{b_1(n)+b_4(n)}{2} \pm \frac{1}{2}(\beta_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha(n)(c_1(n)+c_4(n))}{2},$$

где $\beta_n = (b_1(n)+b_4(n))^2 + 4b_2(n)b_3(n), \gamma_n = 2\alpha(n)(b_1(n) + b_4(n))(c_1(n) + c_4(n)) + 4\alpha(n)(c_2(n)b_3(n) + b_2(n)c_3(n) +$

$\alpha(n)c_2(n)c_3(n)) = \alpha(n)\gamma_n^0, n \geq 1$, где $\gamma_n^0 = c_2(n)b_3(n) + b_2(n)c_3(n)$. Последовательность $(\beta(n))$ принадлежит пространству l^1. В силу равенства Гёльдера последовательность γ_n^0 принадлежит пространству $l^{\frac{2}{3}}$.

Теперь рассмотрим последовательность $(\beta_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}} = (\beta_n + \alpha(n)\gamma_n^0)^{\frac{1}{2}}, n \geq 1$. Если число $n \in \mathbb{N}$ таково, что $|\beta_n| \leq \frac{1}{2}|\gamma_n|$, то $|(\beta_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}} - \beta_n^{\frac{1}{2}}| \leq 2|\gamma_n| = 2|\alpha(n)||\gamma_n^0|$. Следовательно, числа $(\beta_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}}$ представимы в виде

$$\pm(\beta_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}} = \pm\beta_n^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_n,$$

для подходящего корня $|\varepsilon_n| < 2|\gamma_n| = 2|\alpha(n)||\gamma_n^0|$. Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ таково, что $|\beta_n| > \frac{1}{2}|\gamma_n|$, то есть $|\gamma_n| - |\alpha(n)||\gamma_n^0| < 2|\beta_n|$.

Рассмотрим последовательности

$$\pm(\beta_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}} = \pm(\beta_n + \alpha(n)\gamma_n^0)^{\frac{1}{2}}.$$

Они представимы в виде

$$\pm(\beta_n + \gamma_n)^{\frac{1}{2}} = \pm\beta_n^{\frac{1}{2}} + \widetilde{\varepsilon}_n^{\pm}, n \geq 1,$$

для подходящего корня $\beta_n^{\frac{1}{2}}$ и некоторой последовательности $(\widetilde{\varepsilon}_n^{\pm}) \in l^{\frac{4}{3}}$. Полагая $\varepsilon_n^{\pm} = \alpha(n)^{\frac{1}{2}}\frac{c_1(n)+c_4(n)}{2} + \widetilde{\varepsilon}_n^{\pm}, n \geq 1$, получим представление (2.34). Лемма доказана. $\square$

Далее для рассматриваемого случая $\theta \in \{0, 1\}$ используем представление (2.28) о спектре оператора $A_\theta - B$. В данном случае ранг операторов $A_n, n \geq m+1$, является двумерным. Записывая операторы $\widetilde{X}, B$ в виде

$$\widetilde{X} = X_l f(A), \qquad B = f(A)B_r,$$

где $X_l, B_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, из формулы (2.30) получим, что

$$P_n(J_{\theta,m}\widetilde{X})\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n\widetilde{X}\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n f(A)B_r\Gamma_{\theta,m}X_l f(A)\mathbb{P}_{(n)} + \mathbb{P}_{(n)}f(A)B_r\mathbb{P}_n.$$

Поскольку $f(A)\mathbb{P}_n = \alpha_n(B)\mathbb{P}_n, n \geq m+1$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}_n(\widetilde{X} - B)\mathbb{P}_n\| &= \alpha_n(B)^2\mathbb{P}_n B_r\Gamma_{\theta,m}(X_l\mathbb{P}_n) = \\ &= \alpha_n(B)^2\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}_n B_r\mathbb{P}_n\Gamma_{\theta,m}(\mathbb{P}_k X_l\mathbb{P}_n) = \\ &= \alpha_n(B)^2 \sum_{\substack{k\geq 0\\ \lambda_{\theta,k}\neq\lambda_{\theta,n}\\ \max\{k,n\}\geq m+1}} \frac{\mathbb{P}_n B_r\mathbb{P}_k\mathbb{P}_k X_l\mathbb{P}_n}{\lambda_{\theta,k}-\lambda_{\theta,n}}, n\geq 0, \theta\in\{0,1\}. \quad (2.36)\end{aligned}$$

Пусть $b_{n,k} = \|\mathbb{P}_n B_r\mathbb{P}_k\|, x_{k,n} = \|\mathbb{P}_k X\mathbb{P}_n\|, k, n \geq 0$. Поскольку $B_r, X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $\sum\limits_{n,k\geq 0} b_{n,k}^2 < \infty, \sum\limits_{n,k\geq 0} x_{k,n}^2 < \infty$, то из равенств (2.36) получаем оценки (см. лемму 2.3)

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}_n(\widetilde{X} - B)\mathbb{P}_n\| &\leq \alpha_n(B)^2(\sum_{k\geq 0} b_{n,k}x_{k,n}) \max_{\max\{k,n\}\geq m+1}\frac{1}{|\lambda_{\theta,k}-\lambda_{\theta,n}|} = \\ &= \alpha_n(B)^2\xi(n)\frac{\omega^2}{4\pi^2(m+1)}, \quad (2.37)\end{aligned}$$

где последовательность $\xi(n) = \sum\limits_{k\geq 0} b_{n,k}x_{k,n}, n \geq 0$ является суммируемой, т.е $\xi \in l^1$. Её суммируемость вытекает из того факта, что она является произведением двух матриц Гильберта–Шмидта (т.е. является диагональной).

Из оценок (2.37) и формулы (2.30) следует, что операторы $A_n, n \geq m+1$, представимы в виде

$$A_n = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \mathbb{P}_n B|\mathcal{H}_{(n)} - \mathbb{P}_n(\widetilde{X} - B)\mathbb{P}_n, n\geq m+1, \theta\in\{0,1\},$$

где $\|\mathbb{P}_n(\widetilde{X} - B)\mathbb{P}_n\|$ допускает оценку вида (2.37).

Пусть $\mathcal{B}(n) = \begin{pmatrix} b_1(n) & b_2(n) \\ b_3(n) & b_4(n) \end{pmatrix}, n \geq m+1$ и $\mathcal{C}(n) = \begin{pmatrix} c_1(n) & c_2(n) \\ c_3(n) & c_4(n) \end{pmatrix}$ — матрицы операторов $\mathbb{P}_n B|\mathcal{H}_n, \mathbb{P}_n(\widetilde{X} - B)|\mathcal{H}_n$ в базисе из собственных векторов оператора A_θ, принадлежащих инвариантному подпространству $\mathcal{H}_n$. Таким образом,

$$b_1(n) = (Be_n, e_n), \qquad b_2(n) = (Be_{-n}, e_n), \tag{2.38}$$

$$b_3(n) = (Be_n, e_{-n}), \qquad b_4(n) = (Be_{-n}, e_{-n}), \tag{2.39}$$

если $\theta = 0$. Для $\theta = 1$ матрица $\mathcal{B}(n)$ имеет вид:

$$b_1(n) = (Be_n, e_n), \qquad b_2(n) = (Be_{-n-1}, e_n), \tag{2.40}$$

$$b_3(n) = (Be_n, e_{-n-1}), \qquad b_4(n) = (Be_{-n-1}, e_{-n-1}). \tag{2.41}$$

Пусть $\mu_n^{\pm}, n \geq m+1$ — собственные значения матрицы $\mathcal{B}(n)$. Отметим, что $b_k \in l^2, 1 \leq k \leq 4$. Из полученных оценок (2.37) следует, что последовательности $c_k, 1 \leq k \leq 4$, допускают оценки

$$|c_k(n)| \leq \frac{\omega^2}{4\pi^2(m+1)} \alpha_n(B)^2 \xi(n), n \geq m+1, \tag{2.42}$$

где $\xi \in l^1$.

Итак, оператор $A_n, n \geq m+1$, имеет матрицу вида

$$\left(\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathcal{B}(n) - \mathcal{C}(n).$$

Отметим, что последовательности $b_k, 1 \leq k \leq 4$, принадлежат пространству l^2. Теперь из оценок (2.33) (случай $\theta \in (0,1)$), леммы 2.4 (ввиду оценок (2.42)) вытекает следующая теорема об асимптотике собственных значений операторов $A_\theta - B, \theta \in [0,1]$.

Теорема 2.3. *Собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n, |n| \geq m+1$, *где* $m \in \mathbb{Z}_+$ *удовлетворяет условию (2.22) теоремы 2.1, операторов* $A_\theta - B, \theta \in (0,1)$ *допускают асимптотику вида (2.33). Если* $\theta \in \{0,1\}$, *то собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n^{\pm}, n \geq m+1$, *операторов* $A_\theta - B$ *допускают представления вида*

$$\widetilde{\lambda}_n^{\pm} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \mu_n^{\pm} + \alpha_n(B)\eta(n), \quad n \geq m+1, \tag{2.43}$$

где последовательность η *принадлежит пространству* $l^{\frac{4}{3}}$ *и* $\mu_n^{\pm}$ — *собственные значения матрицы* $\mathcal{B}(n)$.

В условиях следующей теоремы, которая является обобщением асимптотических формул для спектра оператора $A_\theta - B, \theta \in [0,1]$, число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию (2.22) теоремы 2.1.

Теорема 2.4. *Спектр оператора* $A_\theta - B$, *где* $\theta \in (0,1)$, *допускает представление в виде объединения*

$$\sigma(A_\theta - B) = \widetilde{\sigma}_{(m)} \bigcup \{\widetilde{\lambda}_n, |n| \geq m+1\}, \tag{2.44}$$

непересекающихся множеств, где $\widetilde{\sigma}_{(m)}$ — *конечное множество с числом точек, не превосходящем* $2m+1$ *и собственные значения* $\widetilde{\lambda}_n, |n| \geq m+1$, *допускают представление вида*

$$\widetilde{\lambda}_n = \frac{\pi^2}{\omega^2}(2n+\theta)^2 - (Be_n, e_n) + \frac{\alpha_n^2(B)}{2n+\theta}\,\xi_n, |n| \geq m+1. \tag{2.45}$$

Если $\theta \in \{0,1\}$, *то спектр оператора* $A_\theta - B$ *допускает представление в виде объединения*

$$\sigma(A_\theta - B) = \widetilde{\sigma}_{(m)} \bigcup \bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n, \tag{2.46}$$

взаимно непересекающихся множеств, где $\widetilde{\sigma}_{(m)}$ — *конечное множество с числом точек, не превосходящем* $2m+1$, *а множества* $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}, n \geq m+1$ *не более чем двухточечные, причем собственные значения* $\lambda_n^{\pm}, n \geq m+1$, *допускают представление вида*

$$\lambda_n^{\pm} = \frac{\pi^2}{\omega^2}(2n+\theta)^2 - \mu_n^{\pm} + \alpha_n(B)\eta(n), \quad n \geq m+1, \tag{2.47}$$

где последовательность η *принадлежит пространству* $l^{\frac{4}{3}}$ *и* $\mu_n^{\pm}$ — *собственные значения матрицы* $\mathcal{B}(n)$.

2.3 Оценки равносходимости спектральных разложений

Теперь приступим к оценкам равносходимости спектральных разложений операторов $A_\theta - B, A_\theta$, где $\theta \in [0,1]$. Основой для их получения (как и в случае оценок собственных значений) будет служить теорема 2.2.

Для произвольного подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+$ (если $\theta \in \{0,1\}$) символом $\mathbb{P}(\Omega)$ обозначим проектор $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \mathbb{P}_k - \sum\limits_{k\in\Omega} \mathbb{P}_{\theta,k}$. Для $\Omega \subset \mathbb{Z}$ (если $\theta \in (0,1)$) через $P(\Omega)$ обозначается проектор $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$.

Пусть $\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)}, \widetilde{\mathbb{P}}_n, n \geq m+1,$ — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору $A_\theta - B$, где $\theta \in \{0,1\}$, и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \backslash \{0,...,m\}$ (не обязательно конечного) символом $\widetilde{P}(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{\mathbb{P}}(\Omega)$. Сильная (в действительности безусловная) сходимость ряда, определяющего проектор $\widetilde{P}(\Omega)$, следует из подобия оператора $A_\theta - B$ оператору $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ (см. теорему 2.2), свойства 2) леммы 2.1 и вытекающего из вида оператора $J_{\theta,m}\widetilde{X}$ свойства спектральности проекторов $\widetilde{\mathbb{P}}_n, n \geq m+1$, для $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$, которые отвечают спектральному множеству $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\} \subset \sigma(A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X})$.

Если $\theta \in (0,1)$ и Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{Z}\backslash\{-m,...,m\}$, через $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} P_k$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$. Объяснение корректности его определения такое же, как и в случае $\theta \in \{0,1\}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого подмножества $\Omega \in \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначим величину $\max\limits_{n\in\Omega} \alpha_n(X)$.

Лемма 2.5. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{U}(f)$ и любого подмножества Ω из $\mathbb{Z}$ имеет место оценка*

$$\max\{\|P(\Omega)X\|_2, \|XP(\Omega)\|_2\} \le \|X\|_* \alpha(\Omega, X). \tag{2.48}$$

Доказательство. Оператор X представим в виде $X = X_l f_X(A), X = f_X(A)X_r$, где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $\|P(\Omega)X\|_2 = \|P(\Omega)f_X(A)X_r\|_2 = \|(\sum\limits_{n\in\Omega} \alpha_n(X)P_n)X_r\| \le \alpha(\Omega, X)\|X_r\|_2$.

Таким же способом получается оценка $\|XP(\Omega)\|_2 \le \alpha(\Omega, X)\|X_l\|_2$. Лемма доказана. $\square$

Непосредственно из определения последовательности $(\alpha_n(X))$, где $X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, \omega])$ следует (более подробно см. [13])

Лемма 2.6. *Если ненулевой оператор $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ представим в виде $X = \sum\limits_{k\ge1} X_k$, где $X_k \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и ряд является абсолютно сходящимся, то верны оценки*

$$\|X\|_2 \alpha_n(X) \le \sum_{k\ge1} \|X_k\| \alpha_n(X_k). \tag{2.49}$$

Лемма 2.7. *Для любого множества $\Omega \subset \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_+$ и $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют место оценки*

$$\max\{\|(\Gamma_{\theta,m}X)P(\Omega)\|_2, \|P(\Omega)\Gamma_{\theta,m}X)\|_2\} \le \begin{cases} \frac{\omega}{2\pi\theta\alpha(\Omega)} \max\{\|XP(\Omega)\|_2, \|P(\Omega)X\|_2\}, & \theta \in (0,1), \\ \frac{\omega}{2\pi\alpha(\Omega)} \max\{\|XP(\Omega)\|_2, \|P(\Omega)X\|_2\}, & \theta \in \{0,1\}. \end{cases} \tag{2.50}$$

Доказательство. Пусть $\theta \in (0,1)$. Матрица $C = (c_{i,j})$ оператора $(\Gamma_{\theta,m}X)P(\Omega) = \Gamma_{\theta,m}(XP(\Omega)$ имеет вид

$$c_{i,j} = \begin{cases} \frac{x_{i,j}}{\lambda_{i,\theta}-\lambda_{j,\theta}}, & \max\{i,j\} \geq m+1, j \in \Omega \\ 0, & \max\{i,j\} < m+1, j \overline{\in} \Omega. \end{cases} \tag{2.51}$$

Следовательно,

$$\|(\Gamma_{\theta,m}X)P(\Omega)\|_2 \leq \left(\sum \frac{|x_{i,j}|^2}{|\lambda_{i,\theta} - \lambda_{j,\theta}|^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где суммирование осуществляется по $i,j \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, для которых $\max\{i,j\} \geq m+1$ и $j \in \Omega$. Следовательно,

$$\|(\Gamma_{\theta,m}X)P(\Omega)\|_2 \leq \frac{\omega}{2\pi\theta \max\{\alpha(\Omega), m+1\}} \left(\sum_{j\in\Omega} |x_{i,j}|^2\right)^2 =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi\theta\alpha(\Omega)} \|XP(\Omega)\|_2, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{2.52}$$

Аналогичным образом получается второе неравенство из оценки (2.50)

$$\|P(\Omega)\Gamma_{\theta,m}X)\|_2 \leq \frac{\omega}{2\pi\theta\alpha(\Omega)} \|P(\Omega)X\|_2, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{2.53}$$

Тот же способ доказательства, основанный на использовании матриц оцениваемых операторов проводится и в случае $\theta \in \{0,1\}$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть выполнено условие (2.24) теоремы 2.1 и* $\theta \in (0,1)$. *Тогда для любого подмножества* $\Omega \subset \mathbb{Z} \backslash \{-m,...,m\}$ *имеют место оценки (безусловной равносходимости спектральных разложений)*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_1 \frac{\omega \max\{\|\widetilde{X}P(\Omega)\|_2, \|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2\}}{\pi\theta\alpha(\Omega)} \leq$$

$$\leq C_2 \frac{\omega \max \|BP(\Omega)\|_2, \|P(\Omega)B\|_2}{\pi\widetilde{\theta}\alpha(\Omega)} \leq C_2 \frac{\omega\alpha(\Omega, B)\|B\|_*}{\pi\widetilde{\theta}\alpha(\Omega)}, \tag{2.54}$$

где постоянные $C_1, C_2 > 0$ не зависят от Ω и $\alpha(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega}|k|$. Величина $\widetilde{\theta}$ совпадает с θ, если $\theta \in (0,1)$ и $\widetilde{\theta} = 1$, если $\theta \in \{0,1\}$.

Доказательство. Оператор $A_\theta - B$ подобен оператору $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$, причем имеет место равенство

$$A_\theta - B = (I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})(A_\theta - J_m\widetilde{X})(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}, \tag{2.55}$$

где используются обозначения теоремы 2.22. Из формулы (1) леммы 2.1 следует представление

$$\widetilde{P}(\Omega) = (I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}.$$

Следовательно, проектор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = \Big((\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega) - P(\Omega)(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})\Big)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}. \tag{2.56}$$

Из равенства (2.50), в случае $\theta = 1$, лемм 2.5, 2.7 получаем оценки

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \le \frac{\omega\|X\|_*}{\pi\theta\alpha(\Omega)}\alpha(\Omega, \widetilde{X})\|(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}\|.$$

Таким образом, установлена первая часть оценки (2.54).

Теперь получим оставшуюся часть оценки.

Поскольку $\widetilde{X} = B\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X} - (\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})J_{\theta,m}B - (\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})J_{\theta,m}(B\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}) + B$, то применяя к обеим частям этого равенства оператор $P(\Omega)$ слева, и используя оценки из лемм 2.1 и 2.5, получим следующее неравенство

$$\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2 \le \|P(\Omega)B\|_2\|\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}\|_2 + \|P(\Omega)(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})\|_2\|J_{\theta,m}B\|_2 +$$

$$+\|P(\Omega)\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}\|_2\|(J_{\theta,m}B)\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}\|_2+\|P(\Omega)B\|_2 \le \|P(\Omega)B\|_2\|\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}\|_2+$$
$$+\frac{\omega\|B\|_2\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2}{2\pi\alpha(\Omega)}+\frac{\omega\|B\|_2\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2}{2\pi\alpha(\Omega)}\frac{\omega\|\widetilde{X}\|_2}{2\pi\widetilde{\theta}(m+1)}+\|P(\Omega)B\|_2, \tag{2.57}$$

где $\widetilde{\theta}=0$, если $\theta\in(0,1)$ и $\widetilde{\theta}=1$, если $\theta\in\{0,1\}$. Из этих оценок при достаточно большом m получаем существование постоянной $C_2>0$ такой, что

$$\|P(\Omega)\widetilde{X}\| \le C_2\|P(\Omega)B\|_2. \tag{2.58}$$

Аналогично получается оценка

$$\|\widetilde{X}P(\Omega)\|_2 \le C_2\|BP(\Omega)\|_2. \tag{2.59}$$

Таким образом, мы получаем оценку (2.54). Теорема доказана.

□

Доказанная теорема служит основой для получения оценок равносходимости спектральных разложений операторов $A_\theta - B, A_\theta, \theta\in[0,1]$.

Из доказанной теоремы вытекают следующие утверждения. Выбор числа $m\in\mathbb{Z}_+$ в последующих утверждениях обусловлен применением теоремы 2.1.

Теорема 2.6. *Существуют числа $m\in\mathbb{Z}_+, C>0$ такие, что имеют место оценки:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)}+\sum_{|k|=m+1}^{n}\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n}P_k\| \le \frac{C}{\theta n}|\alpha_n(B)|,$$

если $\theta\in(0,1)$ и

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)}+\sum_{k=m+1}^{n}\widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n}\mathbb{P}_k\| \le \frac{C}{n}|\alpha_n(B)|,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Следствие 2.1. Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов $A_\theta - B$ и A :

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\| = 0,$$

если $\theta \in (0,1)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}_k\| = 0,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Теорема 2.7. *Существует такое число* $m \in \mathbb{Z}_+$, *что*

$$\sum_{|n|\geq m+1} \frac{1}{\alpha_n(\theta)} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty,$$

если $\theta \in (0,1)$ *и*

$$\sum_{n\geq m+1} \frac{1}{\alpha_n(\theta)} \|\widetilde{\mathbb{P}}_n - \mathbb{P}_n\|_2^2 < \infty,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Доказательство. Вначале предположим, что $\theta \in (0,1)$. Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию (2.22) теоремы 2.1 (далее используются её обозначения). Тогда из равенств (2.56), где $\Omega = n, |n| \geq m+1$ — одноточечное множество, получаем равенства

$$\widetilde{P}_n - P_n = \left((\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P_n - P_n(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})\right)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}, |n| \geq m+1.$$

Из оценок (2.52),(2.53), примененных к оператору $X = \widetilde{X}$, получаем что

$$\|(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P_n\|_2 \leq C_3\frac{1}{n}\|\widetilde{X}P_n\|_2, \|P_n(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})\|_2 \leq C_4\frac{1}{n}\|P_n\widetilde{X}\|_2, |n| \geq m+1, \tag{2.60}$$

для некоторых постоянных $C_3, C_4 > 0$.

Далее, используя оценки (2.58), (2.59) получаем, что

$$\|P_n\widetilde{X}\|_2 \le C_2\|P_nB\|_2, \qquad \|\widetilde{X}P_n\|_2 \le C_2\|BP_n\|_2.$$

Следовательно, имеют место оценки

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\| \le C_1\frac{1}{n}\max\|BP_n\|_2, \|P_nB\|_2, \qquad C_1 > 0.$$

В итоге получаем, что

$$\sum_{|n|\ge m+1}\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \le C_1\sum_{|n|\ge m+1}\frac{\max\|BP_n\|_2, \|P_nB\|_2}{n^2}, \qquad C_1 > 0.$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\theta \in \{0,1\}$ и устанавливается сходимость второго ряда из условий этой теоремы. Теорема доказана. □

Следствие 2.2. Операторы $A_\theta - B, \theta \in (0,1)$, спектральны по Данфорду, а операторы $A_\theta - B, \theta \in \{0,1\}$, являются спектральными по Данфорду относительно представления спектра $\sigma(A_\theta - B)$ оператора $A_\theta - B$ вида (4.30) (используется терминология из [13]).

Глава 3

Теоремы о подобии операторов

3.1 Оценки операторов, возникающих в методе подобных операторов (случай $\theta = 0$)

В данном параграфе приводятся оценки, используемые при выводе результатов основной теоремы о спектре оператора Штурма–Лиувилля в случае периодических краевых условий.

Получим оценки для $\Gamma_{per}V$. Вначале оценим $(\Gamma_{per}V)\mathbb{P}_n$.

$$
\begin{aligned}
\|(\Gamma_{per}V)\mathbb{P}_n\|_2^2 &= \|(\Gamma_{per}V)P_n\|_2^2 + \|(\Gamma_{per}V)P_{-n}\|_2^2 = \\
&= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \left(\sum_{|i|\neq n} \frac{|\widehat{v}(i-n)|^2}{|i^2-n^2|^2} + \sum_{|i|\neq n} \frac{|\widehat{v}(i+n)|^2}{|i^2-n^2|^2} \right) = \\
&= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \left(\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq -2n}} \frac{|\widehat{v}(j)|^2}{j^2(j+2n)^2} + \sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq 2n}} \frac{|\widehat{v}(j)|^2}{j^2(j-2n)^2} \right) \leq \\
&\leq \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \|v\|_2^2 \left(\frac{2}{(2n-1)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Итак, справедлива оценка:

$$
\|(\Gamma_{per}V)\mathbb{P}_n\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\sqrt{2}}{4\pi^2}\frac{\|v\|_2}{2n-1}. \tag{3.1}
$$

Таким же образом устанавливается аналогичная оценка для $\|\mathbb{P}n(\Gamma_{per}V)\|_2$ вида

$$\|\mathbb{P}_n(\Gamma_{per}V)\|_2 \leqslant \frac{\omega^2\sqrt{2}}{4\pi^2}\frac{\|v\|_2}{2n-1}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим теперь оператор $V\Gamma_{per}V$ и покажем, что он является оператором Гильберта–Шмидта. Матрица оператора $V\Gamma_{per}V$ имеет вид:

$$\frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{|j|\neq|n|}\frac{\widehat{v}(m-j)\widehat{v}(j-n)}{j^2-n^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2n}}\frac{\widehat{v}(m-n-k)\widehat{v}(k)}{k(k+2n)} =$$
$$= \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2n}}\frac{\widehat{v}(k)}{k}\left(\frac{\widehat{v}(m-n-k)}{k+2n}\right) = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2n}}\frac{\widehat{v}(k)}{k}A_k(m,n).$$

Тогда

$$\|V\Gamma_{per}V\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{|j|\neq|n|}\frac{\widehat{v}(m-j)\widehat{v}(j-n)}{j^2-n^2}\right|^2 =$$
$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2n}}\frac{\widehat{v}(m-n-k)\widehat{v}(k)}{k(k+2n)}\right|^2.$$

Далее оценим норму Гильберта–Шмидта матриц A_k (которые возникают в первых равенствах).

$$\|A_k\|_2^2 = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ 2n+k\neq 0}}\left|\frac{\widehat{v}(m-n-k)}{k+2n}\right|^2 \leqslant \sum_{2n+k\neq 0}\frac{1}{(k+2n)^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\widehat{v}(m-n-k)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|v\|_2^2\sum_{2n+k\neq 0}\frac{1}{(k+2n)^2} \leqslant C\|v\|_2^2,$$

где постоянная $C > 0$.

Таким образом,

$$\|V\Gamma_{per}V\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \Bigg| \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2n}} \frac{\widehat{v}(m-n-k)\widehat{v}(k)}{k(k+2n)} \Bigg|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{k\neq -2n} \frac{|\widehat{v}(m-n-k)|^2}{|k+2n|^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 M\|v\|_2^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\neq -2n} \frac{|\widehat{v}(m-n-k)|^2}{|k+2n|^2} \right) \leq \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 M_1\|v\|_2^4,$$

для некоторой постоянной $M_1 > 0$.

В итоге получаем, что оператор $V\Gamma_{per}V$ является оператором Гильберта–Шмидта. Следовательно, таким является оператор $V\Gamma_{m,per}V$, для $m > 0$.

Оценим теперь величину $\|P_n(V\Gamma_{per}V)\|_2$. Для этого введем в рассмотрение суммируемую последовательность

$$\widetilde{v}(p) = \max\{|\widehat{v}(p)|^2, |\widehat{v}(-p)|^2\}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Оценим n-ю строку ($n \in \mathbb{Z}$) матрицы оператора $V\Gamma_{per}V$:

$$\|P_n(V\Gamma_{per}V)\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{|l|\neq|j|} \Bigg| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{v}(n-l)\widehat{v}(l-j)}{l^2-j^2} \Bigg|^2 =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Bigg| \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2j}} \frac{\widehat{v}(n-k-j)\widehat{v}(k)}{k(k+2j)} \Bigg|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2j}} \frac{|\widehat{v}(n-k-j)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2j}} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2j)^2} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2j}} \frac{|\widehat{v}(n-k-j)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{\substack{m\neq 0\\ m\neq 2j}} \frac{|\widehat{v}(m-2j)|^2}{m^2} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{k\neq 0} \frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2} \right) \left(\sum_{m\neq 0} \frac{\widetilde{v}(2j-m)}{m^2} \right) \right).$$

Введем в рассмотрение последовательность

$$\alpha(2n) = \sum_{0<|p|\leqslant 2n} \frac{\widetilde{v}(p-2n)+\widetilde{v}(p+2n)}{p^2} = \sum_{0<|p|\leqslant 2n} \frac{\widetilde{v}(2n-p)+\widetilde{v}(2n+p)}{p^2}.$$

Используя эту последовательность, мы получим справедливость следующих неравенств

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\neq 0}\frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2}\right)\left(\sum_{m\neq 0}\frac{\widetilde{v}(2j-m)}{m^2}\right) \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{0<|k|\leqslant 2n}\frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2} + \sum_{|k|\geqslant 2n+1}\frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2}\right)\cdot\right. \\
&\qquad \left.\cdot\left(\sum_{0<|m|\leqslant 2j}\frac{\widetilde{v}(2j-m)}{m^2} + \sum_{|m|\geqslant 2j+1}\frac{\widetilde{v}(2j-m)}{m^2}\right)\right) \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\alpha(n-j)+\frac{1}{(2n+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1\right)\left(\alpha(2j)+\frac{1}{(2j+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1\right)\right) = \\
&= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\alpha(2j)\alpha(n-j) + \frac{\alpha(n-j)}{(2j+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1 + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\alpha(2j)}{(2n+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1 + \frac{\|\widetilde{v}\|_2}{(2j+1)^2(2n+1)^2}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|P_n(V\Gamma_{per}V)\|_2 \leqslant C_1(v)\,\eta_1(n),$$

где постоянная $C_1(v) > 0$, а последовательность η_1 принадлежит пространству l^2.

Поскольку $\|\mathbb{P}_n(V\Gamma_{per}V)\|_2^2 = \|P_n(V\Gamma_{per}V)\|_2^2 + \|P_{-n}(V\Gamma_{per}V)\|_2^2$, то оценка для $\|\mathbb{P}_n(V\Gamma_{per}V)\|_2$ примет вид

$$\|\mathbb{P}_n(V\Gamma_{per}V)\|_2 \leq \sqrt{2}\,C_1(v)\,\eta_1(n), \quad n \geq 1. \tag{3.3}$$

Теперь рассмотрим оценки n- го столбца ($n \in \mathbb{Z}$) матрицы оператора $V\Gamma_{per}V$:

$$\|(V\Gamma_{per}V)P_n\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{|l|\neq|n|} \frac{\widehat{v}(j-l)\widehat{v}(l-n)}{l^2-n^2} \right|^2 =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2n}} \frac{\widehat{v}(j-k-n)\widehat{v}(k)}{k(k+2n)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(j-k-n)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{k\neq -2n} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n)^2} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{k\neq -2n} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n)^2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(j-k-n)|^2}{k^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^2}{6} \|v\|_2^2 \sum_{k\neq -2n} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n)^2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^2}{6} \|v\|_2^2 \left(\sum_{0<|l|<2n} \frac{|\widehat{v}(l-2n)|^2}{l^2} + \sum_{|l|\geq 2n+1} \frac{|\widehat{v}(l-2n)|^2}{l^2} \right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{3}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \left(\alpha^2(2n) + \frac{\|v\|_2^2}{(2n+1)^2} \right).$$

Следовательно,

$$\|(V\Gamma_{per}V)P_n\|_2 \leqslant C_2(v)\,\eta_2(n),$$

где постоянная $C_2(v) > 0$, а последовательность η_2 принадлежит пространству l^2.

В итоге оценка для $\|(V\Gamma_{per}V)\mathbb{P}_n\|_2$ будет иметь вид

$$\|(V\Gamma_{per}V)\mathbb{P}_n\|_2 \leq \sqrt{2}\,C_2(v)\,\eta_2(n), \quad n \geq 1. \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь оценки элементов матрицы сужения оператора $\mathbb{P}_n(V\Gamma_{per}V)\mathbb{P}_n$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе e_{-n}, e_n.

Оценим первый диагональный элемент.

$$(V\Gamma_{per}Ve_{-n}, e_{-n}) = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{j\neq n\\ j\neq -n}} \frac{\widehat{v}(-n-j)\widehat{v}(j+n)}{(j-n)(j+n)} =$$

$$= \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq 2n}} \frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k(k-2n)} = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq 2n}} \frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{2n}\left(\frac{1}{k-2n}-\frac{1}{k}\right) =$$

$$= -\frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k} - \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\frac{\widehat{v}(2n)\widehat{v}(-2n)}{2n} + \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\sum_{k\neq 2n}\frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k-2n} =$$

$$= -\frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\frac{\widehat{v}(2n)\widehat{v}(-2n)}{2n} + \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\sum_{k\neq 2n}\frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k-2n}.$$

Теперь оценим последовательность

$$u(2n+1) = \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\sum_{k\neq 2n}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k-2n}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

$$|u(2n+1)| \leqslant \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\left|\sum_{k\neq 2n}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k-2n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\left(\sum_{j\neq 0}\frac{\widehat{v}(-j-2n)\widehat{v}(j+2n)}{|j|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\|v\|_2\left(\sum_{|j|\neq 0}\frac{|\widehat{v}(j+2n)|^2}{j^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\left(\sum_{|j|<2n}\frac{|\widehat{v}(j+2n)|^2}{j^2} + \frac{\|v\|_2^2}{(2n)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2\|v\|_2}{8\pi^2 n}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}(2n) + \frac{\|v\|_2}{2n}\right).$$

Итак, последовательность $(V\Gamma_{per}Ve_{-n}, e_{-n})$ допускает оценку

$$|(V\Gamma_{per}Ve_{-n}, e_{-n})| \leqslant \frac{c_{11}(v)}{|n|}\,\eta_{11}(n), \quad |n|\geqslant m+1, \tag{3.5}$$

для некоторой постоянной $c_{11}(v)>0$ и последовательности η_{11}, принадлежащей пространству l^2.

Оценки остальных матричных элементов проводятся аналогичным образом.

3.2 Оценки операторов, возникающих в методе подобных операторов (случай $\theta = 1$)

В данном параграфе приводятся оценки, используемые при выводе результатов основной теоремы о спектре оператора Штурма–Лиувилля в случае антипериодических краевых условий.

Получим оценки для $\Gamma_{ap}V$. Вначале оценим $(\Gamma_{ap}V)\mathbb{P}_n$.

$$\|(\Gamma_{ap}V)\mathbb{P}_n\|_2^2 = \|(\Gamma_{ap}V)P_n\|_2^2 + \|(\Gamma_{ap}V)P_{-n}\|_2^2 =$$
$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \Bigg(\sum_{\substack{i\neq n \\ i\neq -n-1}} \frac{|\widehat{v}(i-n)|^2}{|i-n|^2|i+n+1|^2} + \sum_{\substack{i\neq -n \\ i\neq n-1}} \frac{|\widehat{v}(i+n)|^2}{|i+n|^2|i-n+1|^2} \Bigg) =$$
$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \Bigg(\sum_{\substack{j\neq 0 \\ j\neq -2n-1}} \frac{|\widehat{v}(j)|^2}{j^2(j+2n+1)^2} + \sum_{\substack{j\neq 0 \\ j\neq 2n-1}} \frac{|\widehat{v}(j)|^2}{j^2(j-2n+1)^2} \Bigg) \leq$$
$$\leq \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \|v\|_2^2 \left(\frac{2}{4n^2}\right).$$

Итак, справедлива оценка:

$$\|(\Gamma_{ap}V)\mathbb{P}_n\|_2 \leqslant \frac{\omega^2}{4\sqrt{2}\pi^2 n}\|v\|_2. \tag{3.6}$$

Таким же образом устанавливается аналогичная оценка для $\|\mathbb{P}_n(\Gamma_{ap}V)\|_2$ вида

$$\|\mathbb{P}_n(\Gamma_{ap}V)\|_2 \leqslant \frac{\omega^2}{4\sqrt{2}\pi^2 n}\|v\|_2. \tag{3.7}$$

Принадлежность $V\Gamma_{ap}V$ идеалу операторов Гильберта–Шмидта доказывается также, как и в случае $\theta = 0$.

Перейдем теперь к оценкам величины $\|P_n(V\Gamma_{ap}V)\|_2$, $n \in \mathbb{Z}$. Как и в периодическом случае оператор $P_n(V\Gamma_{ap}V)$ имеет матрицу вида

$$\frac{\omega^2}{\pi^2}\left(\sum_{l\neq j}\frac{\widehat{v}(k-l)\widehat{v}(l-j)}{(2l+1)^2-(2j+1)^2}\right)=\frac{\omega^2}{4\pi^2}\left(\sum_{l\neq j}\frac{\widehat{v}(k-l)\widehat{v}(l-j)}{(l-j)(l+j+1)}\right).$$

Тогда n-я строка ($n\in\mathbb{Z}$) матрицы оператора $V\Gamma_{ap}V$ оценивается следующим образом:

$$\|P_n(V\Gamma_{ap}V)\|_2^2=\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{l\neq j}\frac{\widehat{v}(n-l)\widehat{v}(l-j)}{(l-j)(l+j+1)}\right|^2=$$

$$=\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq -2j-1}}\frac{\widehat{v}(n-k-j)\widehat{v}(k)}{k(k+2j+1)}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\left(\sum_{k\neq 0}\frac{|\widehat{v}(n-k-j)|^2}{k^2}\right)\left(\sum_{k\neq -2j-1}\frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2j+1)^2}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\left(\sum_{k\neq 0}\frac{|\widehat{v}(n-k-j)|^2}{k^2}\right)\left(\sum_{m\neq 0}\frac{|\widehat{v}(m-2j-1)|^2}{m^2}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\left(\sum_{k\neq 0}\frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2}\right)\left(\sum_{m\neq 0}\frac{\widetilde{v}(2j+1-m)}{m^2}\right)\right).$$

Теперь, используя введенную ранее последовательность $\alpha(2n)$, получим справедливость следующих неравенств

$$\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\neq 0}\frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2}\right)\left(\sum_{m\neq 0}\frac{\widetilde{v}(2j+1-m)}{m^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\left(\sum_{0<|k|\leqslant 2n}\frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2}+\sum_{|k|\geqslant 2n+1}\frac{\widetilde{v}(n-j-k)}{k^2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\sum_{0<|m|\leqslant 2j}\frac{\widetilde{v}(2j+1-m)}{m^2}++\sum_{|m|\geqslant 2j+1}\frac{\widetilde{v}(2j+1-m)}{m^2}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\left(\alpha(n-j)+\frac{1}{(2n+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\alpha(2j+1)+\frac{1}{(2j+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1\right)\right)=$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\alpha(2j+1)\alpha(n-j) + \frac{\alpha(n-j)}{(2j+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(2j+1)}{(2n+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1 + \frac{\|\widetilde{v}\|_2}{(2j+1)^2(2n+1)^2}\right).$$

Следовательно,

$$\|P_n(V\Gamma_{ap}V)\|_2 \leqslant C_3(v)\,\eta_3(n),$$

где постоянная $C_3(v) > 0$, а последовательность η_3 принадлежит пространству l^2.

Поскольку $\|\mathbb{P}_n(V\Gamma_{ap}V)\|_2^2 = \|P_n(V\Gamma_{ap}V)\|_2^2 + \|P_{-n}(V\Gamma_{ap}V)\|_2^2$, то оценка для $\|\mathbb{P}_n(V\Gamma_{ap}V)\|_2$ примет вид

$$\|\mathbb{P}_n(V\Gamma_{ap}V)\|_2 \leq \sqrt{2}\,C_3(v)\,\eta_3(n), \quad n \geq 1. \tag{3.8}$$

Теперь получим оценки для оператора $\|(V\Gamma_{ap}V)P_n\|$:

$$\|(V\Gamma_{ap}V)P_n\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{|l|\neq n} \frac{\widehat{v}(j-l)\widehat{v}(l-n)}{(l-n)(l+n+1)} \right|^2 =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k\neq -2n-1}} \frac{\widehat{v}(j-k-n)\widehat{v}(k)}{k(k+2n+1)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(j-k-n)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{k\neq -2n-1} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n+1)^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{k\neq -2n-1} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n+1)^2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(j-k-n)|^2}{k^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^2}{6} \|v\|_2^2 \sum_{k\neq -2n-1} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n+1)^2} =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \sum_{l\neq 0} \frac{|\widehat{v}(l-2n-1)|^2}{l^2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \Bigg(\sum_{0<|l|\leqslant 2n+1} \frac{|\widehat{v}(l-2n-1)|^2}{l^2} +$$

$$+ \sum_{|l|\geqslant 2n+2} \frac{|\widehat{v}(l-2n-1)|^2}{l^2} \Bigg) \leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \Bigg(\sum_{0<|l|\leqslant 2n+1} \frac{\widetilde{v}(l-2n-1)}{l^2} +$$

$$+ \frac{1}{(2n+2)^2} \|\widetilde{v}\|_1 \Bigg) \leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \Bigg(\alpha(2n+1) + \frac{\|v\|_2^2}{(2n+2)^2} \Bigg).$$

Итак,

$$\|(V\Gamma_{ap}V)P_n\|_2 \leqslant C_4(v)\,\eta_4(n), \tag{3.9}$$

где постоянная $C_4(v) > 0$, а последовательность η_4 принадлежит пространству l^2.

Поскольку $\|(V\Gamma_{ap}V)\mathbb{P}_n\|_2^2 = \|(V\Gamma_{ap}V)P_n\|_2^2 + \|(V\Gamma_{ap}V)P_{-n}\|_2^2$, то оценка для $\|(V\Gamma_{ap}V)\mathbb{P}_n\|_2$ примет вид

$$\|(V\Gamma_{ap}V)\mathbb{P}_n\|_2 \leq \sqrt{2}\,C_4(v)\,\eta_4(n), \quad n \geq 1. \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь оценки элементов матрицы сужения оператора $\mathbb{P}_n(V\Gamma_{ap}V)\mathbb{P}_n$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе e_{-n-1}, e_n.

Оценим первый диагональный элемент.

$$(V\Gamma_{ap}Ve_{-n-1}, e_{-n-1}) = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{j\neq n \\ j\neq -n-1}} \frac{\widehat{v}(-n-1-j)\widehat{v}(j+n+1)}{(j-n)(j+n+1)} =$$

$$= \frac{\omega^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k\neq 2n+1}} \frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k(k-2n-1)} =$$

$$= \frac{\omega^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k\neq 2n+1}} \frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{2n+1} \left(\frac{1}{k-2n-1} - \frac{1}{k}\right) = -\frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)} \sum_{k\neq 0} \frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k} -$$

$$- \frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)} \frac{\widehat{v}(2n+1)\widehat{v}(-2n-1)}{2n+1} + \frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)} \sum_{k\neq 2n+1} \frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k-2n-1} =$$

$$= -\frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\frac{\widehat{v}(2n+1)\widehat{v}(-2n-1)}{2n+1}+\frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\sum_{k\neq 2n+1}\frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k-2n-1} =$$

$$= -\frac{\omega^2}{4\pi^2}\frac{\widehat{v}(2n+1)\widehat{v}(-2n-1)}{(2n+1)^2}+\frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\sum_{k\neq 2n+1}\frac{\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k)}{k-2n-1}.$$

Теперь оценим последовательность

$$u(2n+1) = -\frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\sum_{k\neq 2n+1}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k-2n-1}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Имеют место оценки:

$$|u(2n+1)| \leqslant \frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\left|\sum_{k\neq 2n+1}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k-2n-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\left(\sum_{j\neq 0}\frac{\widehat{v}(-j-2n-1)\widehat{v}(j+2n+1)}{|j|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\|v\|_2\left(\sum_{|j|\neq 0}\frac{|\widehat{v}(j+2n+1)|^2}{j^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+1)}\left(\sum_{|j|<2n+1}\frac{|\widehat{v}(j+2n+1)|^2}{j^2}+\frac{\|v\|_2^2}{(2n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega^2\|v\|_2}{4\pi^2(2n+1)}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}(2n+1)+\frac{\|v\|_2}{2n+1}\right).$$

Итак, последовательность $(V\Gamma_{ap}Ve_{-n-1}, e_{-n-1})$ допускает оценку

$$|(V\Gamma_{ap}Ve_{-n-1}, e_{-n-1})| \leqslant \frac{c_{22}(v)}{|n|}\eta_{22}(n), \quad |n|\geqslant m+1, \tag{3.11}$$

для некоторой постоянной $c_{22}(v)>0$ и $\eta_{22}\in l^2$.

Оценки остальных матричных элементов проводятся аналогичным образом.

3.3 Оценки операторов, возникающих в методе подобных операторов (случай $\theta \in (0,1)$)

В данном параграфе приводятся оценки, используемые при выводе результатов основной теоремы о спектре оператора Штурма—Лиувилля в случае общих краевых условий.

Получим оценки для $\Gamma_\theta V$. Вначале оценим $(\Gamma_\theta V)P_n$.

$$\|(\Gamma_\theta V)P_n\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{\substack{i\neq n\\ i\neq -n-\theta}} \frac{|\widehat{v}(i-n)|^2}{|i-n|^2|i+n+\theta|^2} =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq -2n-\theta}} \frac{|\widehat{v}(j)|^2}{j^2(j+2n+\theta)^2} \leq \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \|v\|_2^2 \left(\frac{1}{(2n\theta)^2}\right).$$

Итак, справедлива оценка:

$$\|(\Gamma_\theta V)P_n\|_2 \leqslant \frac{\omega^2}{8\pi^2\theta n}\|v\|_2. \tag{3.12}$$

Таким же образом устанавливается аналогичная оценка для $\|\mathbb{P}_n(\Gamma_{ap}V)\|_2$ вида

$$\|P_n(\Gamma_\theta V)\|_2 \leqslant \frac{\omega^2}{8\pi^2\theta n}\|v\|_2. \tag{3.13}$$

Принадлежность $V\Gamma_\theta V$ идеалу операторов Гильберта–Шмидта доказывается также, как и в случае $\theta = 0$.

Оценим величину $\|P_n(V\Gamma_\theta V)\|_2$. Матрица оператора $P_{\theta,n}(V\Gamma_\theta V)$ имеет вид:

$$\frac{\omega^2}{\pi^2}\left(\sum_{l\neq j} \frac{\widehat{v}(k-l)\widehat{v}(l-j)}{(2l+\theta)^2-(2j+\theta)^2}\right) = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\left(\sum_{l\neq j} \frac{\widehat{v}(k-l)\widehat{v}(l-j)}{(l-j)(l+j+\theta)}\right).$$

Тогда оценки для $\|P_n(V\Gamma_\theta V)\|_2, n \in \mathbb{Z}$ будут выглядеть следующим образом

$$\|P_n(V\Gamma_\theta V)\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{v}(n-l)\widehat{v}(l-j)}{(l-j)(l+j+\theta)} \right|^2 =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\neq 0} \frac{\widehat{v}(n-k-j)\widehat{v}(k)}{k(k+2j+\theta)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(n-k-j)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2j+\theta)^2} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(n-k-j)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{v}(m-2j)|^2}{(m+\theta)^2} \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big((\widehat{v} * f)(n-j)(\widehat{v} * f)(2j) \Big),$$

где последовательность $f \in l^2(\mathbb{Z})$ вида $f(k) = \frac{1}{k^2}, k \neq 0, f(0) = 0, k = 0$, а последовательность $\widehat{v}$ — суммируемая последовательность из $l^1(\mathbb{Z})$.

Следовательно,

$$\|P_n(V\Gamma_\theta V)\|_2 \leqslant C_5(v)\,\eta_5(n), \tag{3.14}$$

где постоянная $C_5(v) > 0$, а последовательность η_5 принадлежит пространству l^2.

Теперь рассмотрим оценки для оператора $\|(V\Gamma_\theta V)P_n\|$.

$$\|(V\Gamma_\theta V)P_n\|_2^2 = \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{|l|\neq n} \frac{\widehat{v}(j-l)\widehat{v}(l-n)}{(l-n)(l+n+\theta)} \right|^2 =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\neq 0} \frac{\widehat{v}(j-k-n)\widehat{v}(k)}{k(k+2n+\theta)} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{v}(j-k-n)|^2}{k^2} \right) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n+\theta)^2} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n+\theta)^2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\neq 0}\frac{|\widehat{v}(j-k-n)|^2}{k^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}\right)^2 \frac{\pi^2}{6}\|v\|_2^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{v}(k)|^2}{(k+2n+\theta)^2} =$$

$$= \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{v}(l-2n)|^2}{(l+\theta)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \max_{j\in\mathbb{Z}} \frac{j^2}{(j+\theta)^2}\left(\sum_{0<|l|\leqslant 2n}\frac{|\widehat{v}(l-2n)|^2}{l^2} + \sum_{|l|\geqslant 2n+1}\frac{|\widehat{v}(l-2n)|^2}{l^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \frac{1}{(1-\theta)^2}\left(\sum_{0<|l|\leqslant 2n}\frac{\widetilde{v}(l-2n)}{l^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\|\widetilde{v}\|_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega^2}{4\sqrt{6}\pi}\right)^2 \|v\|_2^2 \frac{1}{(1-\theta)^2}\left(\alpha(2n) + \frac{\|v\|_2^2}{(2n+1)^2}\right).$$

Итак,

$$\|(V\Gamma_\theta V)P_n\|_2 \leqslant C_6(v)\,\eta_6(n), \tag{3.15}$$

где постоянная $C_6(v) > 0$, а последовательность η_6 принадлежит пространству l^2.

Теперь рассмотрим последовательность $(V\Gamma_\theta V e_n, e_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\theta \in (0,1)$.

$$(V\Gamma_\theta V e_n, e_n) = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{j\neq n}\frac{\widehat{v}(n-j)\widehat{v}(n-j)}{(j-n)(j+n+\theta)} = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k(k+2n+\theta)} =$$

$$= \frac{\omega^2}{4\pi^2(2n+\theta)}\left(\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k} - \sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k+2n+\theta}\right) =$$

$$= \frac{\omega^2}{4\pi^2}\left(-\frac{1}{2n} + \frac{\theta}{2n(2n+\theta)}\right)\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k+2n+\theta} =$$

$$= -\frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k+2n+\theta} + \frac{\omega^2\theta}{8\pi^2 n(2n+\theta)}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k+2n+\theta} =$$

$$= -\frac{\omega^2}{8\pi^2 n}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k+2n} + \frac{\omega^2\theta}{8\pi^2 n}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{(k+2n)(k+2n+\theta)} +$$

$$+\frac{\omega^2\theta}{8\pi^2 n(2n+\theta)}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k+2n}-$$
$$-\frac{\omega^2\theta}{8\pi^2 n(2n+\theta)}\sum_{k\neq 0}\frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{(k+2n)(k+2n+\theta)}.$$

В итоге получаем оценку:

$$|(V\Gamma_\theta V e_n, e_n)| \leqslant \frac{d_{11}(v)}{|n|+1}\,\beta_{11}(n), \quad |n| \geqslant m+1, \tag{3.16}$$

для некоторой постоянной $d_{11}(v) > 0$ и $\beta_{11} \in l^2$.

Поскольку последовательность $k \mapsto \widehat{v}(-k)\widehat{v}(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ является суммируемой и последовательность $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, принадлежит пространству l^2, то при суммировании (в последних четырех суммах) получаем, что слагаемые (зависящие от n) принадлежат пространству l^2.

3.4 Предварительное преобразование подобия исследуемого оператора $L_\theta, \theta \in [0,1]$, к оператору Гильберта–Шмидта

Вернемся к рассмотрению дифференциальных операторов

$$L_\theta = L_\theta^0 - V, \theta \in [0,1].$$

Осуществим преобразование подобия таких операторов к оператору вида $A_\theta - B$, где $A_\theta = L_\theta^0$ и B — оператор Гильберта–Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$. Тем самым появляется возможность использования результатов главы 2 об асимптотике собственных значений дифференциальных операторов $L_\theta, \theta \in [0,1]$, и равносходимости спектральных разложений операторов $L_\theta, L_\theta^0, \theta \in [0,1]$.

Оператор V умножения на потенциал $v \in L_2[0,\omega]$ для $v \overline{\in} L^\infty[0,\omega]$ не является ограниченным. Однако, он является подчиненным оператору $A_\theta = L_\theta^0$, т.е. $V \in \mathcal{L}_{A_\theta}(L_2[0,\omega])$. При этом он обладает свойством: $V(A_\theta - \lambda_0 I)^{-1} \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$, где $\lambda_0 \in \rho(A_\theta)$. Отметим, что $\mathfrak{L}_{A_\theta}$ совпадает с множеством операторов вида $X = X_0(A_\theta - \lambda_0 I)$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Для каждого оператора $X = X_0(A_0 - \lambda_0 I), X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ положим

$$J_m X = (J_m X_0)(A_\theta - \lambda_0 I), \quad \Gamma_m X = (\Gamma_m X_0)(A_\theta - \lambda_0 I),$$
$$X = X_0(A - \lambda_0 I) \in \mathfrak{L}_{A_\theta}^{(2)}. \quad (3.17)$$

Рассматриваемый оператор V представим в виде

$$V = (V(A_\theta - \lambda_0 I)^{-1})(A_\theta - \lambda_0 I) = V_0(A_\theta - \lambda_0 I),$$

где $V_0 \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$. Следовательно, определены операторы $J_{\theta,m}V$ и $\Gamma_{\theta,m}V$ как операторы из $\mathfrak{L}_{A_\theta}(L_2[0,\omega])$.

Для вычисления операторов $J_\theta V, \Gamma_\theta V, \theta \in [0,1]$, вычислим матрицу $(v_{k,j})$ оператора V относительно ортонормированного базиса $(e_{\theta,n}), n \in \mathbb{Z}$. Она имеет вид:

$$v_{k,j} = \widehat{v}(k-j), k, j \in \mathbb{Z}.$$

$$v_{k,j} = (ve_{\theta,j}, e_{\theta,k}) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(\tau)e^{i\frac{\pi}{\omega}(2j+\theta)\tau} - e^{-i\frac{\pi}{\omega}(2k+\theta)\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega v(\tau)e^{-i\frac{2\pi}{\omega}(k-j)\tau}d\tau = \widehat{v}(k-j), k, j \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, матрица $\mathcal{V}$ оператора $V \in \mathfrak{L}_{A_\theta}(L_2[0,\omega])$ имеет вид:

$$\mathcal{V} = (v_{k,j}) = (\widehat{v}(k-j)), k, j \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

и не зависит от выбора краевых условий.

Операторы $J_{per}V, J_{ap}V, J_\theta V, \theta \in (0,1)$ определяются формулами

$$J_\theta V = J_{bc}V = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_k V \mathbb{P}_k, bc \in \{per, ap\}, \quad \theta \in \{0,1\}, \tag{3.19}$$

$$J_\theta V = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k V P_k, \theta \in (0,1). \tag{3.20}$$

Далее символом $\mathcal{H}$ иногда будет обозначаться гильбертово пространство $L_2[0,\omega]$.

Замечание 3.1. В случае периодических и антипериодических краевых условий должны быть особые обозначения операторов:

$A_{per}, L_{per}, A_{ap}, L_{ap}, A_\theta, L_\theta$, для $\theta \in (0,1)$. Собственные функции соответственно обозначаются $e_{per,n}, e_{ap,n}, n \in \mathbb{Z}, e_{\theta,n}, \lambda_{per,n}, \lambda_{ap,n}, \lambda_{\theta,n}, \theta \in (0,1)$. Проекторы: $P_{per,n}, P_{ap,n}, n \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}_{per,n}, \mathbb{P}_{ap,n}$.

Замечание 3.2. В дальнейшем будут использоваться матрицы операторов из $\mathfrak{L}_{A_\theta}(\mathcal{H})$ (из $\mathfrak{L}_{A_\theta}(\mathcal{H})$ для $A = A^*$ с компактной резольвентой и с ортонормированным базисом $(e_n), n \in \mathbb{Z}$, либо $n \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}$). Для любого оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ через $(x_{i,j})$ обозначается матрица, элементами которой являются числа $x_{i,j} = (Ae_j, e_i), i, j \in \mathbb{J}$.

Замечание 3.3. Если матрица $(x_{i,j})$ оператора является матрицей Гильберта–Шмидта, то оператор $X : D(X) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ допускает ограниченное расширение на $\mathcal{H}$ до оператора $\widetilde{X}$, являющимся оператором Гильберта–Шмидта. Это расширение в дальнейшем обозначается тем же символом X.

Замечание 3.4. Символ bc будем использовать для обозначения граничных значений, т.е. $bc \in \{per, ap, bc_\theta, \theta \in (0,1)\}$.

Замечание 3.5. Если некоторое высказывание относится к любому из рассматриваемых дифференциальных операторов L_θ (т.е. $\theta \in [0,1]$), то собственные значения и собственные функции оператора L^0_θ будут обозначаться через $\lambda_n, e_n, n \in \mathbb{Z}$, соответственно.

Замечание 3.6. Далее будут использоваться операторные матрицы $(\mathcal{X}_{k,m})$ оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ вида

$$\mathcal{X}_{k,m} = \mathbb{P}_k X \mathbb{P}_m, \qquad k, m \geq 0.$$

Если $\theta \in (0,1)$, то операторные матрицы $\mathcal{X}_{k,j} = P_k X P_j, k, j \in \mathbb{Z}$.

Замечание 3.7. Пусть $\theta = 0$, т.е. $bc = per$, тогда

$$(\mathbb{P}_k V \mathbb{P}_k x)(t) = ((P_k + P_{-k})V(P_k + P_{-k})x)\,(t) =$$
$$= (P_k + P_{-k})((x, e_{per,k})ve_k + (x, e_{per,-k})ve_{-k}) = (x, e_k)(ve_k, e_k)e_k +$$
$$+ (x, e_{-k})(ve_{-k}, e_{-k})e_{-k} + (x, e_k)(ve_k, e_{-k})e_{-k} + (x, e_k)(ve_k, e_{-k})e_{-k}. \tag{3.21}$$

Операторы $\mathbb{P}_k V \mathbb{P}_{-k}, k \geq 1$ имеют ранг 2 (при $k = 0$ — ранг 1) и матрица $\mathcal{A}_k$ сужения $A_k : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$ оператора $P_k V P_k, k \geq 0$, в базисе $\{e_{-k}, e_k\}$ из подпространства $\mathcal{H}_k = Im\mathbb{P}_k$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{v}(0) & \widehat{v}(-2k) \\ \widehat{v}(2k) & \widehat{v}(0) \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Отсюда легко выводится, что оператор $J_{per}V - \widehat{v}(0)I$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(L_2[0, \omega])$ и оператор $J_{per}V$ имеет вид:

$$(J_{per}Vx)(t) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} v(\frac{t+s}{2})x(s)ds + \widehat{v}(0)x(t), \quad t \in [0, \omega], \quad x \in L_2[0, \omega].$$

Отметим, что $\mathbb{P}_0 V \mathbb{P}_0 x = v(0)x, x \in L_2(0, \omega)$.

В случае антипериодических краевых условий, рассмотрим операторы

$$\mathbb{P}_{ap,k} V \mathbb{P}_{ap,k} = (P_k + P_{-k-1})V(P_k + P_{-k-1}), \quad k \geq 0.$$

Поскольку матрица $\mathcal{V}$ оператора V относительно базиса $(e_{ap,n}), n \in \mathbb{Z}$, совпадает с матрицей оператора V относительно базиса $(e_{per,n}), n \in \mathbb{Z}$, то матрица $\mathcal{V}_k$ сужения оператора V на

$\mathcal{H}_k = ImP_{ap,k}$ в базисе e_{-k-1}, e_k имеет вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{v}(0) & \widehat{v}(-k-1-k) \\ \widehat{v}(k+1+k) & \widehat{v}(0). \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{v}(0) & \widehat{v}(-2k-1) \\ \widehat{v}(2k+1) & \widehat{v}(0) \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Как и в случае периодических краевых условий имеет место представление J_{ap} вида:

$$((J_{ap}V)x)(t) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} v(\frac{t+s}{2})x(s)ds + \widehat{v}(0)x(t), \quad t \in [0,\omega], \quad x \in L_2[0,\omega]. \tag{3.24}$$

$$(J_{ap}Ve_{-k-1})(t) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} v(\frac{t+s}{2})e^{\frac{-i\pi}{\omega}(2(-k-1)+1)s}ds =$$

$$= (\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} v(\tau)e^{\frac{i\pi}{\omega}(2k+1)\tau}d\tau)e^{\frac{i\pi}{\omega}(2(-k-1)+1)t}.$$

Таким образом, получаем, что $(J_{ap}Ve_{-k-1}, e_{2k+1}) = \widehat{v}(-2k-1)$.

В итоге получаем, что $J_{ap}V \in \mathfrak{S}_2(L_2(0,\omega))$.

Пусть теперь $\theta \in (0,1)$. В этом случае каждый из операторов $P_{\theta,k}VP_{\theta,k}$ имеет ранг 1 и $P_{\theta,k}VP_{\theta,k}x = \widehat{v}(0)x, x \in L_2[0,\omega]$. Следовательно, трансформатор J_θ имеет вид $J_\theta V = \widehat{v}(0)I$, т.е. является скалярным оператором.

Замечание 3.8. В дальнейшем будем всюду предполагать, что $\widehat{v}(0) = 0$, т.е. фактически рассматривать операторы $L_\theta - \widehat{v}(0)I, \theta \in [0,1]$. Однако в окончательных формулах для собственных значений учитывать (добавлять) величину $\widehat{v}(0)$.

Замечание 3.9. Операторы $J_{\theta,m}V, \theta \in [0,1], m \in \mathbb{Z}_+$, определяются равенствами:

$$J_{\theta,m}V = J(V - P_{(m)}VP_{(m)}) + P_{(m)}VP_{(m)}. \tag{3.25}$$

Теперь приступим к построению операторов $\Gamma_{\theta,m}V, \theta \in [0,1], m \in \mathbb{Z}_+$ (при $m = 0$ они обозначаются Γ_θ). Оператор $\Gamma_\theta V$ зададим в $L_2[0,\omega]$ равенствами

$$\Gamma_\theta V = \sum_{\lambda_{\theta,k}\neq\lambda_{\theta,j}} \frac{P_{\theta,k}\mathbb{V}P_{\theta,j}}{\lambda_{\theta,k}-\lambda_{\theta,j}} = \frac{\pi^2}{4\omega^2}\sum_{k\neq j}\frac{P_{\theta,k}VP_{\theta,j}}{k^2-j^2+(k-j)\theta}. \tag{3.26}$$

Лемма 3.1. *Ряд в (3.26) является абсолютно сходящимся в* $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega]), \Gamma_\theta V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *и*

$$\|\Gamma_\theta V\|_2 \leq \begin{cases} (\frac{\pi}{3}\|v\|_2)\|^{\frac{1}{2}}, & \theta \in \{0,1\}, \\ (\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{(1-\theta)^2}+\frac{\pi}{3})^{\frac{1}{2}}\|v\|_2^{\frac{1}{2}}, & \theta \in (0,1). \end{cases} \tag{3.27}$$

Оператор $\Gamma_\theta V$ *представим в виде*

$$\Gamma_\theta V = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}F_{\theta,n}, \tag{3.28}$$

где $F_{\theta,n}x = f_{\theta,n} * x, x \in L_2[0,\omega]$*— оператор свертки с* $f_{\theta,n} \in L_1[0,\omega]$, *имеющей ряд Фурье вида*

$$f_{\theta,n}(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}, \quad t \in [0,\omega]. \tag{3.29}$$

Доказательство. Поскольку операторы $P_{\theta,k}VP_{\theta,j}$, $k, j \in \mathbb{Z}$, взаимно перпендикулярны (они имеют вид $P_{\theta,k}VP_{\theta,j} = \widehat{v}(k-j)V_{k,j}$, где $V_{k,j}x = (x, e_j)e_k, k, j \in \mathbb{Z}$) и $\|P_{\theta,k}VP_{\theta,j}\|_2^2 = |\widehat{v}(k-j)|^2$), то имеет место равенство

$$\sum_{k,j\in\mathbb{Z},\lambda_{\theta,k}\neq\lambda_{\theta,j}} \frac{\|P_{\theta,k}VP_{\theta,j}\|^2}{|k^2-j^2+(k-j)\theta|^2} = \sum_{k,j\in\mathbb{Z},\lambda_{\theta,k}\neq\lambda_{\theta,j}} \frac{|\widehat{v}(k-j)|^2}{|k^2-j^2+(k-j)\theta|^2} =$$

$$= \sum_{n\neq 0}\frac{|\widehat{v}(n)|^2}{n^2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_{\theta,n}}\frac{1}{|j+n+\theta|^2}\right) \leq \|v\|_2,$$

где $\mathbb{Z}_{\theta,n} = \begin{cases} \{-n\}, & \theta = 0, \\ \{-n-1\}, & \theta = 1, \\ \emptyset, & \theta \in (0,1). \end{cases}$

При $\theta = \{0,1\}$ величина $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_{\theta,n}} \frac{1}{|j+n+\theta|^2}$ совпадает с $\frac{\pi^2}{3}$, а при $\theta \in (0,1)$ оценивается числом $\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{\pi^2}{3}$. Следовательно, ряд в (3.26) является абсолютно сходящимся и верна оценка (3.27). Итак, операторы $\Gamma_\theta V, \theta \in [0,1]$, являются операторами Гильберта–Шмидта.

Для доказательства равенства (3.28) рассмотрим группу $S : \mathbb{R} \to End L_{2,\omega}(\mathbb{R})$ операторов сдвига в гильбертовом пространстве $L_{2,\omega}(\mathbb{R})$ периодических периода ω функций, сужение которых на $[0,\omega]$ принадлежит $L_2[0,\omega]$ (следовательно, $L_{2,\omega}(\mathbb{R})$ изометрически изоморфно пространству $L_2[0,\omega]$).

Поскольку $\Gamma_\theta V$ — оператор Гильберта–Шмидта, то операторозначная функция $\Phi : \mathbb{R} \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ вида $t \mapsto S(t)(\Gamma V)S(-t) : \mathbb{R} \to \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega}(\mathbb{R}))$ является непрерывной периодической периода ω функцией. Рассмотрим её ряд Фурье

$$\Phi(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из равенств $V_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \Phi(t) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t} dt, n \in \mathbb{Z}$, следует, что операторы $VE_{-n}, E_{-n}V, n \in \mathbb{Z}$, где $E_k \in End L_{2,\omega}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{Z}$, — операторы умножения в $L_{2,\omega}(\mathbb{R})$ на функцию $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi}{\omega}kt}, t \in \mathbb{R}$, коммутируют с операторами $S(t), t \in \mathbb{R}$. Поскольку операторы $VE_{-n}, E_{-n}V, n \in \mathbb{Z}$, являются операторами Гильберта–Шмидта, то, следовательно, матрица $\mathcal{V}_n$ оператора VE_{-n} является диагональной.

Непосредственный подсчет показывает, что матричный элемент $v_j^{(n)} = v_{jj}^{(n)}, n \neq 0$, стоящий на j–ой диагонали, есть число

$$v_j^{(n)} = v_{jj}^{(n)} = \frac{\pi^2}{4\omega^2} \begin{cases} \frac{\widehat{v}(n)}{n} \frac{1}{j+2n+\theta}, & \theta \in (0,1), \\ \frac{\widehat{v}(n)}{n} \frac{1}{j+2n}, & \theta = 0, j \neq -n, \\ 0, & \theta = 0, j = -n, \\ \frac{\widehat{v}(n)}{n} \frac{1}{j+2n+1}, & \theta = 1, j \neq -n-1, \\ 0, & \theta = 1, j = -n-1. \end{cases} \tag{3.30}$$

Для описания операторов $V_n, n \in \mathbb{Z}$, введем в рассмотрение семейство функций $f_{\theta,n} \in L_{2,\omega}(\mathbb{R}), \theta \in [0,1], n \in \mathbb{Z}$.

Если $\theta = 0$ и $n = 0$, то положим

$$f_{0,0}(t) = -\frac{2\pi i}{\omega}(t - \frac{\omega}{2}), \qquad t \in [0,\omega].$$

Она имеет ряд Фурье:

$$f_{0,0}(t) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} e^{i\frac{2\pi}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Если $\theta = 1$, то положим

$$f_{1,0}(t) = f_{0,0}(t) e^{i\frac{2\pi}{\omega}t} = -\frac{2\pi i}{\omega}(t - \frac{\omega}{2}) e^{i\frac{2\pi}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Для $\theta \in (0,1)$ рассмотрим функции:

$$f_{\theta,0}(t) = \frac{\omega e^{-i\pi\theta}}{2\sin(\pi\theta)} e^{i\frac{2\pi}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Для каждой из функций $f_{\theta,0}, \theta \in [0,1]$, введем в рассмотрение двустороннюю последовательность функций $f_{\theta,n}, n \in \mathbb{Z}$, определенную формулой

$$f_{\theta,n}(t) = f_{\theta,0}(t) e^{-i\frac{4\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Эти функции имеют ряды Фурье вида

$$f_{\theta,n}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{jj}^{(n)} e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.31}$$

где числа $v_{jj}^{(n)}$ определены равенствами (3.30).

Из этого представления функций $f_{\theta,n}, \theta \in [0,1], n \in \mathbb{Z}$, следует, что каждый из операторов $V_n F_{-n}, n \in \mathbb{Z}$, есть оператор свертки с функцией $f_{\theta,n}$. Поэтому оператор $V_n, n \in \mathbb{Z}$, есть оператор вида

$$(V_n x)(t) = \int\limits_0^\omega f_{\theta,n}(t-s) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t} x(s)ds, \quad t \in [0,\omega], \quad x \in L_2[0,\omega]. \tag{3.32}$$

□

Лемма 3.2. *Операторы $V\Gamma_\theta V, (\Gamma_\theta V)J_\theta V$ являются операторами Гильберта–Шмидта и допускают оценку*

$$\|V\Gamma_\theta V\|_2 \le \frac{\omega^2}{4\sqrt{3}}\|v\|_2. \tag{3.33}$$

Доказательство. Из формулы (3.28) и ограниченности функций $f_{\theta,n}, \theta \in [0,1], n \in \mathbb{Z}$ следует, что ядра $v_n(t,s) = v(t) f_{\theta,n}(t-s), t,s \in [0,\omega]$, принадлежат гильбертову пространству $L_2([0,\omega]\times[0,\omega])$ и $\|v_n\|_2 \le \|v\|_2 \|f_{\theta,n}\|_\infty, n \in \mathbb{Z}$. Из формулы (3.28) для $\Gamma_\theta V$ следует, что оператор $V\Gamma_\theta V$ допускает представление

$$V\Gamma_\theta V = \sum_{n\neq 0} \frac{\widehat{v}(n)}{n} V F_{\theta,n} = \sum_{n\neq 0} \frac{\widehat{v}(n)}{n} V\Gamma V_n. \tag{3.34}$$

Из этого представления следует, что $V\Gamma V \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$ и верна оценка

$$\|V\Gamma_\theta V\|_2 \le \sum_{n\neq 0} \frac{|\widehat{v}(n)|}{|n|} \|V\Gamma_\theta V_n\| \le \sum_{n\neq 0} \frac{|\widehat{v}(n)|}{|n|} \|v\|_2 \|f_{\theta,n}\|_\infty \le$$

$$\leq \sup_{n\neq 0}\|f_{\theta,n}\|\|v\|_2\left(\sum_{n\neq 0}(|\widehat{v}(n)|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\neq 0}(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{n\neq 0}\|f_{\theta,n}\|\|v\|_2^2(\frac{\pi}{3})^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма доказана. □

В следующей лемме рассматриваются операторы Гильберта–Шмидта $J_{\theta,m}V$ (см. (3.25)) и операторы $\Gamma_{\theta,m}V, \theta \in [0,1], m \in \mathbb{Z}_+$, определенные равенствами (3.26).

Лемма 3.3. *Операторы* $\Gamma_m V, m \geq 0, \theta \in [0,1]$, *обладают свойствами:* $1)(\Gamma_{\theta,m}V)D(A_\theta) \subset D(A_\theta)$, *2) имеют место равенства* $A_\theta\Gamma_{\theta,m}Vx - (\Gamma_{\theta,m}V)A_\theta x = (J_{\theta,m}V)x, x \in D(A), m \geq 0$, *т.е. выполнены свойства (b) и (d) предположения 1.1 для операторов* $A = A_\theta = L_\theta^0, B = V$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $\theta \in (0,1)$ (для $\theta \in \{0,1\}$ доказательство мало отличается от рассматриваемого случая). Вначале рассмотрим операторы $J_\theta V, \Gamma_\theta V$ (т.е. случай $m = 0$). Доказывая свойство 1), рассмотрим число $\mu_0 \overline{\in} \sigma(A_\theta)$. Любая функция $x \in D(A_\theta)$ представима в виде $x = (A_\theta - \mu_0 I)^{-1}y, y \in L_2[0,\omega]$.

Рассмотрим последовательность операторов

$$\widetilde{V}_k = \Gamma_\theta V_k = P_{(k)}(\Gamma_\theta V)P_{(k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где $V_k = P_k V P_k$. Имеют место равенства

$$A_\theta(P_iVP_j)(A_\theta - \mu_0 I)^{-1} = \frac{\lambda_i(P_iVP_j)(\lambda_j - \mu_0)^{-1}}{\lambda_i - \lambda_j} =$$

$$= \frac{((\lambda_i - \lambda_j) + \lambda_j)P_iVP_j(\lambda_j - \mu_0)^{-1}}{\lambda_i - \lambda_j} =$$

$$= P_iVP_j(A_\theta - \mu_0 I)^{-1} + \frac{((\lambda_j - \mu_0) + \mu_0)P_iVP_j(\lambda_j - \mu_0)^{-1}}{\lambda_i - \lambda_j} =$$

$$= P_iVP_j(A_\theta - \mu_0 I)^{-1} + \Gamma_\theta(P_iVP_j) + \mu_0\Gamma_\theta(P_iVP_j)(A_\theta - \mu_0 I)^{-1}. \tag{3.35}$$

Из этих равенств получаем, что

$$A_\theta \widetilde{V}_k(A_\theta - \mu_0 I)^{-1} = (V_k - (J_\theta V_k))(A_\theta - \mu_0 I)^{-1}. \tag{3.36}$$

Поскольку последовательность операторов $\widehat{V}_m = \Gamma_\theta V_m, m \geq 0$, сходится к оператору $\Gamma_\theta V$ в $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$, то в силу замкнутости оператора A_θ, получаем, что оператор $\Gamma_\theta V$ обладает свойством 1) и имеет место равенство (используется свойство $\lim\limits_{k\to\infty}(J_\theta V_k)(A_\theta - \mu_0 I)^{-1} = (J_\theta V)(A_\theta - \mu_0 I))$, вытекающее из свойства

$$A_\theta(\Gamma_\theta V)(A_\theta - \mu_0 I)^{-1} = \Gamma_\theta V + \mu_0(\Gamma_\theta V)(A_\theta - \mu_0 I)^{-1}.$$

Следовательно, после применения обеих частей этого равенства к функции y получим

$$A_\theta(\Gamma_\theta V)x = (\Gamma_\theta V)(A_\theta - \mu_0 I)x + \mu_0(\Gamma_\theta V)x + Vx = \Gamma_\theta V A_\theta x + (V - J_\theta V)x.$$

Итак, установлено свойство 2). Для операторов $\Gamma_{\theta,m}V, J_{\theta,m}V, m \in \mathbb{Z}_+$, выполнение свойств 1),2) непосредственно вытекает из их определения (равенства (2.18), (3.26)) и установленных свойств 1), 2) для операторов $J_\theta V, \Gamma_\theta V$. Лемма доказана. □

Поскольку (в силу леммы 3.2) операторы $\Gamma_\theta V$ и $V\Gamma_\theta V$ являются операторами Гильберта–Шмидта, то имеет место лемма

Лемма 3.4. *Имеют место равенства*

$$\lim_{m\to\infty} \|P_{(m)}(\Gamma_{\theta,m}V)P_{(m)} - \Gamma_{\theta,m}V\|_2 = 0, \tag{3.37}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|P_{(m)}(V\Gamma_{\theta,m}V)P_{(m)} - V\Gamma_{\theta,m}V\|_2 = 0, \tag{3.38}$$

$$\lim_{m\to\infty} \|\Gamma_{\theta,m}V\|_2 = 0. \tag{3.39}$$

Отметим, что равенство (3.39) следует из (3.37) и отмеченных ранее равенств (3.34), вытекающих из определения оператора $\Gamma_{\theta,m}$. Легко проверяется, что имеет место

Лемма 3.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A_\theta)$ такое, что $\|V(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.*

Теорема 3.1. *Для любого числа $k \in \mathbb{Z}_+$ такого, что*

$$\|\Gamma_{\theta,k}V\|_2 < 1, \tag{3.40}$$

оператор $L_\theta = L_\theta^0 - V$ подобен оператору

$$A_\theta - B = L_\theta^0 - J_{\theta,k}V - B_0, \tag{3.41}$$

где $A_\theta = L_\theta^0$, оператор

$$B_0 = (I + \Gamma_{\theta,k}V)^{-1}(V\Gamma_{\theta,k}V - (\Gamma_{\theta,k}V)J_{\theta,k}V), B = B_{(m)}, \tag{3.42}$$

причем имеет место равенство

$$(A_\theta - B)(I + \Gamma_{\theta,k}V) = (I + \Gamma_{\theta,k}V)(A - J_{\theta,k}V - B_0). \tag{3.43}$$

Оператором преобразования оператора $A_\theta - B$ в оператор $A_\theta - B = A - J_{\theta,k}V - B_0$ является обратимый оператор $(I + \Gamma_{\theta,k}V)$.

Доказательство. Обратимость оператора $I+\Gamma_{\theta,k}V$ следует из условия (3.40), если учесть, что $\|\Gamma_{\theta,k}V\| \le \|\Gamma_{\theta,k}V\|_2 < 1$. Из лемм 3.1 - 3.5 следует, что выполнены все условия предположения 1.1, в котором

$A = A_\theta = L_\theta^0$ и оператор $B = B_{(k)}$ является оператором Гильберта–Шмидта вида

$$B = B_{(k)} = J_{\theta,k}V + (I + \Gamma_{\theta,k}V)^{-1}(V\Gamma_{\theta,k}V - (\Gamma_{\theta,k}V)J_{\theta,k}V). \quad (3.44)$$

Теорема доказана. $\square$

Глава 4

Спектральный анализ дифференциальных операторов второго порядка с L_2 – потенциалом

4.1 Асимптотика собственных значений дифференциального оператора с негладким потенциалом

Доказанная теорема 3.1 позволяет воспользоваться результатами главы 2 и получить асимптотику собственных значений операторов $L_\theta, \theta \in [0,1]$, оценки равносходимости спектральных разложений операторов L_θ, L_θ^0.

Нам удобно сделать преобразование, положив $A = A_\theta = L_\theta^0$ и далее при изучении дифференциального оператора L_θ использовать подобный ему оператор $A_\theta - B$, где оператор B определен формулой (3.44).

Вначале получим асимптотику собственных значений оператора L_θ. Поскольку $\sigma(L_\theta) = \sigma(A_\theta - B)$, то появляется возможность использования теорем 2.1, 2.3, 2.4 — основных результатов из главы 2. При использовании теорем 2.3, 2.4 в данном случае следует оценить последовательность чисел $(\alpha_n(B))$, участвующих в формулах (2.43) и (4.27). Из формулы (3.44) следует, что оператор B представим с виде

$$B = J_{\theta,k}V + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\Gamma_{\theta,k}V)^n(V\Gamma_{\theta,k}V - (\Gamma_{\theta,k}V)(J_{\theta,k}V)) =$$
$$= J_{\theta,k}V + V\Gamma_{\theta,k}V + B_1,$$

где

$$B_1 = -(\Gamma_{\theta,k}V)(J_{\theta,k}V) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j(\Gamma_{\theta,k}V)^j(V\Gamma_{\theta,k}V - (\Gamma_{\theta,k}V)(J_{\theta,k}V)). \tag{4.1}$$

Оператор $B_1 = B_1(k,\theta)$ есть ядерный оператор, так как он является суммой абсолютно сходящегося ряда произведений операторов Гильберта–Шмидта и ядерного оператора $-(\Gamma_{\theta,k}V)(J_{\theta,k}V)$. При этом используются леммы 9, 10, из которых следует, что операторы $\Gamma_{\theta,k}V, V\Gamma_{\theta,k}V$ являются операторами Гильберта–Шмидта и (как операторы отличающиеся от операторов $\Gamma_{\theta,k}V, V\Gamma_{\theta,k}V$ на оператор конечного ранга) ядерным является оператор $(\Gamma_{\theta,k}V)(J_{\theta,k}V)$. Теперь запишем оператор B в виде

$$B = J_\theta V + V\Gamma_\theta V + C, \tag{4.2}$$

где оператор $C = \widetilde{B} = B_0$ имеет вид:

$$C = B_1 - J_\theta V + J_{\theta,k}V - V\Gamma_\theta V + V\Gamma_{\theta,k}V, \tag{4.3}$$

т.е. отличается от оператора B_1 на оператор конечного ранга. Следовательно, C — ядерный оператор.

Лемма 4.1. *Для любых двух ненулевых комплексных чисел a, b имеет место равенство:*

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{b}{a}} & \sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & 0 \\ 0 & \sqrt{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Доказательство леммы непосредственным образом следует после перемножения матриц, стоящих в правой части равенства (4.4). $\square$

Таким образом, в случае $\widehat{v}(-2n)\widehat{v}(2n) \neq 0$, для $a = \widehat{v}(2n), b = \widehat{v}(-2n)$ матрица $\begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}(2n) \\ \widehat{v}(-2n) & 0 \end{pmatrix}$ диагонализуема (подобна нормальной) и при преобразовании подобия возникают две последовательности матриц

$$\mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{\widehat{v}(-2n)}{\widehat{v}(2n)}} & \sqrt{\frac{\widehat{v}(-2n)}{\widehat{v}(2n)}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\widehat{v}(-2n)}{\widehat{v}(2n)}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\widehat{v}(-2n)}{\widehat{v}(2n)}} \end{pmatrix},$$

где $\|\mathcal{U}_n\|_2 = \left(2\left|\frac{\widehat{v}(-2n)}{\widehat{v}(2n)}\right| + 2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \left|\frac{\widehat{v}(-2n)}{\widehat{v}(2n)}\right|\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\|\mathcal{U}_n^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \left|\frac{\widehat{v}(2n)}{\widehat{v}(-2n)}\right|\right)^{\frac{1}{2}}$.

В результате возникает последовательность

$$w_n = \left(2 + \frac{|\widehat{v}(2n)|}{|\widehat{v}(-2n)|} + \frac{|\widehat{v}(2n)|}{|\widehat{v}(-2n)|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

характеризующая меру устойчивости потенциала v.

Имеет место следующее простое утверждение.

Лемма 4.2. *Если матрица оператора $A = B + C$ представима в виде*

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

то её собственные значения $\lambda_{1,2}$ удовлетворяют оценкам

$$|\lambda_{1,2} - b_{i,i}| \leq \|C\|_2,$$

где $\lambda_{1,2}, b_{i,i}, i = 1, 2,$ — собственные значения операторов A и B соответственно, а $\|C\|_2$ — норма Гильберта–Шмидта оператора C.

Лемма 4.3. *[22] Если потенциал v — функция ограниченной вариации, то его коэффициенты Фурье $\widehat{v}(n), n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют оценкам:*

$$|\widehat{v}(n)| \leq \frac{C}{|n|}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

для некоторой постоянной $C > 0$.

Теорема 4.1. *Пусть $\theta \in \{0, 1\}$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right), \tag{4.5}$$

где $\sigma_{(m)}$– конечное множество, состоящее не более чем из $2m + 1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m + 1$, не более чем двухточечные и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n + \theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n - \theta)\widehat{v}(2n + \theta)} + \eta_1^{\mp}(n), \tag{4.6}$$

где $n \in \Omega(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n - \theta)\widehat{v}(2n + \theta) \neq 0\}$ и последовательности $\eta_1^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_1^{\mp}(n)| \leq w_n \frac{1}{n} \beta_1^{\mp}(n),$$

где последовательности $\beta_1^{\mp}$ *принадлежат пространству* l^2 *и последовательность* w *представима в виде*

$$w_n = \left(2 + \frac{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}{|\widehat{v}(2n+\theta)|} + \frac{|\widehat{v}(2n+\theta)|}{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}\right)^{\frac{1}{2}}, n \in \Omega(\theta).$$

Доказательство. Рассмотрим такое натуральное число $m \geq 1$, что выполнены условия теоремы 2.1 и, следовательно, верна формула (4.5) спектра оператора $\sigma(L_\theta)$. Для получения асимптотического представления (4.6) рассмотрим оператор $L_\theta = A_\theta - B = A_\theta - J_\theta V - V\Gamma_\theta V - B_1$, где ядерный оператор B_1 определен формулой (4.1). Найдем спектр оператора $J_\theta V + C$, где оператор $C = V\Gamma_\theta V + B_1$ является оператором Гильберта–Шмидта. Для этого воспользуемся леммой 4.1, позволяющей представить матрицу $\mathbb{P}_n(J_\theta V + C)\mathbb{P}_n$ сужения оператора $J_\theta V + C$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе $e_{-n}, e_n, n \in \mathbb{N}$ в виде:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} c_{11}^{(\theta)}(n) & c_{12}^{(\theta)}(n) \\ c_{21}^{(\theta)}(n) & c_{22}^{(\theta)}(n) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где $c_{i,j}^{(\theta)}(n), i, j = 1, 2$ — матричные элементы оператора $U_n^{-1} C U_n$.

Применяя лемму 4.2 получаем следующую оценку

$$|\lambda_n^{\mp} - (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 + \widehat{v}(0) - \mp\sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)}| \leq \|U_n^{-1}\|\|U_n\|\frac{1}{n}\|C_n\|,$$

из которой, с применением оценок (3.5), (3.11) из § 3.1 и § 3.2, непосредственно следует асимптотическое представление 4.6. Теорема доказана. □

Теорема 4.2. *Если в условиях предыдущей теоремы потенциал v является функцией ограниченной вариации, то формула (4.6) принимает следующий вид*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta_2^{\mp}(n), \quad (4.8)$$

где $n \in \Omega(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$ и последовательности $\eta_2^{\mp}$ удо влетворяют оценкам:

$$|\eta_2^{\mp}(n)| \leq M_1^{\mp} w_n \frac{1}{n^3}, \quad (4.9)$$

где постоянные $M_1^+, M_1^- > 0$ и последовательность w представима в виде

$$w_n = \left(2 + \frac{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}{|\widehat{v}(2n+\theta)|} + \frac{|\widehat{v}(2n+\theta)|}{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}\right)^{\frac{1}{2}}, n \in \Omega(\theta).$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогичным образом, что и в теореме 4.1, однако, в силу дополнительного условия на потенциал v, можно значительно улучшить асимптотику, за счет оценки нормы оператора $C = V\Gamma_\theta V + B_1$. Основную значимость для нас представляет оценка матричных элементов матрицы $\mathbb{P}_n(V\Gamma_\theta V)\mathbb{P}_n$ сужения оператора $V\Gamma_\theta V$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе $e_{-n}, e_n, n \in \mathbb{N}$, представимых в виде $(V\Gamma_\theta V e_n, e_n) = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \sum\limits_{k\neq 0} \frac{\widehat{v}(-k)\widehat{v}(k)}{k(k+2n+\theta)}$.

Поскольку потенциал v является функцией ограниченной вариации, то верна лемма 4.3, исходя из которой следует, что матричные элементы матрицы $\mathbb{P}_n(V\Gamma_\theta V)\mathbb{P}_n$ оцениваются величиной $\frac{1}{n^3}$. В итоге мы получаем асимптотическую оценку остатка ряда вида 4.9. Теорема доказана. □

В следующей теореме будут использоваться определения

Определение 4.1. Пусть $\theta \in \{0,1\}$. Потенциал $v \in L_2[0,\omega]$ называется **устойчивым** на бесконечном подмножестве $\Omega \subset 2\mathbb{N}+\theta$, если существуют постоянные $C_i = C(\Omega,\theta) > 0, i = 1,2,$ и конечное множество Ω_0 из Ω такое, что имеют место оценки

$$C_1|\widehat{v}(-2n-\theta)| \leq |\widehat{v}(2n+\theta)| \leq C_2|\widehat{v}(-2n-\theta)|,$$

для всех n из $\Omega \backslash \Omega_0$.

Определение 4.2. Потенциал v называется **устойчивым**, если он устойчив на множестве $2\mathbb{N}+\theta$.

Теорема 4.3. *Пусть $\theta \in \{0,1\}$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right), \tag{4.10}$$

где $\sigma_{(m)}$– конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1,$ не более чем двухточечные. Если потенциал v устойчив на множестве $\Omega \subset 2\mathbb{N}+\theta$, то имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta_3^{\mp}(n), n \geq m+1, \tag{4.11}$$

где последовательности $\eta_3^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_3^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{n}\beta_3^{\mp}(n),$$

где последовательности $\beta_3^{\mp}$ принадлежат пространству l^2.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогичным образом, что и в теореме 4.1. Однако, условие устойчивости потенциала v эквивалентно тому, что $\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta) \neq 0, \quad n \in \Omega \setminus \Omega_0$, а также конечна величина $\sup\limits_{n\in\Omega\setminus\Omega_0}\left(\frac{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}{|\widehat{v}(2n+\theta)|} + \frac{|\widehat{v}(2n+\theta)|}{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}\right)$. Исходя из этого получаем, что последовательности $\eta_3^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_3^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{n}\beta_3^{\mp}(n).$$

Теорема доказана. $\square$

Доказательство следующей теоремы проводится аналогичным образом, что и в теореме 4.2, т.е. с использованием оценок матричных элементов матрицы $\mathbb{P}_n(V\Gamma_\theta V)\mathbb{P}_n$.

Теорема 4.4. *Если в условиях предыдущей теоремы потенциал v является функцией ограниченной вариации, то формула (4.11) принимает следующий вид*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta_4^{\mp}(n), n \geq m+1, \tag{4.12}$$

где последовательности $\eta_4^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_4^{\mp}(n)| \leq M_2^{\mp}\frac{1}{n^3},$$

где постоянные $M_2^+, M_2^- > 0$.

Теорема 4.5. *Пусть $\theta \in \{0,1\}$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n\geq m+1} \sigma_n\right), \tag{4.13}$$

где $\sigma_{(m)}$– конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, не более чем двухточечные и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_5^{\mp}(n), \tag{4.14}$$

где последовательности $\eta_5^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_5^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} |\widehat{v}(2n+\theta)|^{\frac{1}{2}} \xi_1(n), \tag{4.15}$$

если $n \in \Omega_1(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) = 0, \widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$ и

$$|\eta_5^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} |\widehat{v}(-2n-\theta)|^{\frac{1}{2}} \xi_2(n), \tag{4.16}$$

если $n \in \Omega_2(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) \neq 0, \widehat{v}(2n+\theta) = 0\}$, где символами $\xi_1(n), \xi_2(n)$ обозначаются последовательности, принадлежащие пространству L^2.

Доказательство. Рассмотрим случай $n \in \Omega_1(\theta)$, при котором матрица сужения оператора $\mathbb{P}_n(J_\theta V + V\Gamma_\theta V + B_1)\mathbb{P}_n$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе e_{-n}, e_n принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{v}(2n+\theta) & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} c_1(n) & c_2(n) \\ c_3(n) & c_4(n) \end{pmatrix},$$

где $c_i(n) \in l_2, i = \overline{1,4}$. Для подсчета собственных значений $\lambda_n^{\pm}$ матрицы сужения оператора $\mathbb{P}_n(J_\theta V + V\Gamma_\theta V + B_1)\mathbb{P}_n$ на $\mathcal{H}_n$ рассмотрим следующее операторное представление

$$J_\theta V - \lambda E + \frac{1}{n} C_n = (J_\theta V - \lambda E)(I + (J_\theta V - \lambda E)^{-1} \frac{1}{n} C_n),$$

где E — единичная матрица, $C_n = \mathbb{P}_n(V\Gamma_\theta V + B_1)\mathbb{P}_n$, а λ — собственные значения матрицы сужения оператора $\mathbb{P}_n(J_\theta V + V\Gamma_\theta V + B_1)\mathbb{P}_n$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе e_{-n}, e_n.

Поскольку $(J_\theta V - \lambda E)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(E + \frac{1}{\lambda}J_\theta V)$, то для того, чтобы λ входило в спектр рассматриваемого оператора необходимо, чтобы было выполнено неравенство

$$\|(J_\theta V - \lambda E)^{-1}\frac{1}{n}C_n\| \geq 1,$$

$$\| -\frac{1}{\lambda}(E + \frac{1}{\lambda}J_\theta V)\frac{1}{n}C_n\| \geq 1,$$

$$\frac{1}{|\lambda|}(1 + \frac{1}{|\lambda|}\widehat{v}(2n+\theta))\frac{1}{|n|}\|C_n\| \geq 1.$$

В итоге получаем, что $|\lambda| \leq \frac{\|C_n\|}{2n} \pm \sqrt{\|C_n\|\frac{\widehat{v}(2n+\theta)}{n}}$. Исходя из этого неравенства получаем, что в случае $n \in \Omega_1(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) = 0, \widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$ верна оценка (ввиду того, что операторы $J_\theta V$, $V\Gamma_\theta V$ — операторы Гильберта–Шмидта, а B_1 — ядерный оператор)

$$|\eta_5^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left|\widehat{v}(2n+\theta)\right|^{\frac{1}{2}}\xi_1(n),$$

где символом $\xi_1(n)$ обозначается последовательность, принадлежащая пространству L^2.

Доказательство теоремы в случае $n \in \Omega_2(\theta)$ проводится аналогичным образом. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.6. *Если в условиях предыдущей теоремы потенциал v является функцией ограниченной вариации, то формула (4.14) принимает следующий вид*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_6^{\mp}(n), \tag{4.17}$$

где последовательности $\eta_6^{\mp}$ *удовлетворяют оценкам:*

$$|\eta_6^{\mp}(n)| \leq \frac{C_3}{|n|},$$

где константа $C_3 > 0$, $n \in \Omega_1(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) = 0, \widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$, *или* $n \in \Omega_2(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) \neq 0, \widehat{v}(2n+\theta) = 0\}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится, путем подстановки оценок для потенциала v из леммы 4.3 в неравенства (4.15) и (4.16). Теорема доказана. □

Теорема 4.7. *Пусть* $\theta \in (0,1)$. *Тогда существует такое натуральное число* $m \geq 1$, *что спектр оператора* L_θ *представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right), \tag{4.18}$$

где $\sigma_{(m)}$*– конечное множество, состоящее не более чем из* $2m+1$ *чисел, а множества* $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, *не более чем двухточечные и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_7^{\mp}(n), \tag{4.19}$$

где последовательности $\eta_7^{\mp}$ *удовлетворяют оценкам:*

$$|\eta_7^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{n}\beta_7^{\mp}(n),$$

где последовательности $\beta_7^{\mp}$ *принадлежат пространству* l^2.

Доказательство. Доказательство теоремы непосредственным образом следует из оценки (3.16) последовательности $(V\Gamma_\theta V e_n, e_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, проведенной в § 3.3 главы 3.

В итоге получаем оценку:

$$|(V\Gamma_\theta V e_n, e_n)| \leqslant \frac{d_{11}(v)}{|n|+1}\beta_{11}(n), \quad |n| \geqslant m+1,$$

для некоторой постоянной $d_{11}(v) > 0$ и $\beta_{11} \in l^2$. Теорема доказана.

$\square$

Теорема 4.8. *Пусть $\theta \in (0,1)$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right), \tag{4.20}$$

где $\sigma_{(m)}$– конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, не более чем двухточечные. Тогда для взвешенных средних $\frac{\lambda_n^+ + \lambda_n^-}{2}$ и имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\frac{\lambda_n^+ + \lambda_n^-}{2} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \frac{c_{11}^\theta(n) + c_{22}^\theta(n)}{2}, \tag{4.21}$$

где $c_{11}^\theta(n), c_{22}^\theta(n)$ – диагональные элементы матрицы оператора $U_n^{-1} C U_n$ из леммы 4.2.

Доказательство. Согласно обозначениям леммы 4.2, оператор A представим в виде $A = B + C$. Тогда справедливо следующее равенство

$$\frac{trA}{2} = \frac{trB}{2} + \frac{trC}{2}.$$

Откуда следует, что

$$\left| \frac{trA}{2} - \frac{trB}{2} \right| = \frac{|trC|}{2} \leq \frac{|c_{11}^\theta(n) + c_{22}^\theta(n)|}{2}.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

4.2 Оценки равносходимости спектральных разложений дифференциального оператора с негладким потенциалом

Используем обращение к параграфу 2.3. На основании предварительного преобразования подобия мы получаем, что исследуемый оператор $L_\theta^0 - V$ подобен оператору $A_\theta - B$ и оператором преобразования является оператор $I + \Gamma_k V$. Таким образом справедливо следующее равенство из теоремы 3.1

$$L_\theta^0 - V = (I + \Gamma_{\theta,k} V)(A_\theta - B)(I + \Gamma_{\theta,k} V)^{-1}, \qquad (4.22)$$

где оператор B является оператором Гильберта–Шмидта. Следовательно, применима основная теорема о подобии 1.7, которая позволяет представить оператор $A_\theta - B$ в виде

$$(A_\theta - B) = (I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})(A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X})(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}.$$

В итоге формула 4.22 примет следующий вид

$$L_\theta^0 - V = (I + \Gamma_{\theta,k} V)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})(A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X})(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}(I + \Gamma_{\theta,k} V)^{-1}.$$

Аналогичное представление имеет место и для проекторов подобных операторов $L_\theta^0 - V, A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$:

$$\widetilde{P}(\Omega) = (I + \Gamma_{\theta,k} V)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}(I + \Gamma_{\theta,k} V)^{-1},$$

если $\theta \in (0,1)$ и

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = (I + \Gamma_{\theta,k} V)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})\mathbb{P}(\Omega)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}(I + \Gamma_{\theta,k} V)^{-1},$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 3.1. Тогда для любого подмножества* $\Omega \subset \mathbb{Z}\backslash\{m, ..., m\}$ *имеют место оценки (безусловной равносходимости спектральных разложений)*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \frac{C_1}{\theta(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.23}$$

если $\theta \in (0, 1)$ *и*

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) - \mathbb{P}(\Omega)\|_2 \leq \frac{C_1}{(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.24}$$

если $\theta \in \{0, 1\}$, *где постоянная* $C_1 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\theta \in (0, 1)$. Запишем еще раз представление для проекторов подобных операторов

$$\widetilde{P}(\Omega) = (I + \Gamma_{\theta,k}V)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)(I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}(I + \Gamma_{\theta,k}V)^{-1}.$$

Следовательно, проектор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = ((\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X} + \Gamma_{\theta,k}V + \Gamma_{\theta,k}V\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)-$$
$$-P(\Omega)(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}+\Gamma_{\theta,k}V+\Gamma_{\theta,k}V\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}))(I+\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}+\Gamma_{\theta,k}V+\Gamma_{\theta,k}V\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}. \tag{4.25}$$

Оценка нормы проекторов тогда будет иметь вид

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \max\{\|UP(\Omega)\|_2, \|P(\Omega)U\|_2\} \cdot \|(I + U)^{-1}\|_2,$$

где оператор $U = \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X} + \Gamma_{\theta,k}V + \Gamma_{\theta,k}V\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}$.

Из леммы 2.7 следуют оценки оператора $(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)$ следующего вида

$$\|(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)\|_2 \leq \frac{C_1}{\theta\alpha(\Omega)}\|\widetilde{X}\|_2\alpha(\Omega, \widetilde{X}),$$

где постоянная $C_1 > 0$.

Оценка оператора $(\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)$ следует из доказанных неравенств параграфов 3.1 - 3.3 и имеет следующий вид

$$\|(\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)\|_2 \le \frac{C_1}{\theta(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}},$$

где постоянная $C_1 > 0$.

Аналогичные оценки имеют место для $\|P(\Omega)U\|_2$. Таким образом, установлено неравенство (4.23). Доказательство формулы (4.24) в случае $\theta \in \{0,1\}$ проводится аналогичным образом. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.10. *Если в условиях предыдущей теоремы вместо проекторов $P(\Omega), \mathbb{P}(\Omega)$ рассмотреть проекторы вида*

$$(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1},$$

$$(I+\Gamma_{\theta,k}V)\mathbb{P}(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1},$$

то формулы (4.23),(4.24) примут следующий вид

$$\|\widetilde{P}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2 \le \frac{C_1}{\theta(\alpha(\Omega))}\cdot\|B\|_2\cdot\alpha(\Omega,\widetilde{X}), \tag{4.26}$$

если $\theta \in (0,1)$ и

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)\mathbb{P}(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2 \le \frac{C_1}{(\alpha(\Omega))}\cdot\|B\|_2\cdot\alpha(\Omega,\widetilde{X}), \tag{4.27}$$

если $\theta \in \{0,1\}$ где постоянная $C_1 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\theta \in (0,1)$. Тогда разность проекторов $\widetilde{P}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}$ представима в виде

$$\widetilde{P}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}=(I+\Gamma_{\theta,k}V)(I+\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)\cdot$$
$$\cdot(I+\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}-(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}=$$
$$=(I+\Gamma_{\theta,k}V)((\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)-P(\Omega)(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}))(I+\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}. \tag{4.28}$$

Оценка для нормы разности проекторов тогда будет иметь вид

$$\|\widetilde{P}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2\le\|I+\Gamma_{\theta,k}V\|_2\cdot$$
$$\cdot\max\{\|(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})P(\Omega)\|_2,\|P(\Omega)(\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})\|_2\}\|(I+\Gamma_{\theta,m}\widetilde{X})^{-1}\|_2\|(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2. \tag{4.29}$$

Применяя результаты лемм 2.5 и 2.7 к оценке (4.29) получаем, что

$$\|\widetilde{P}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2\le\frac{C_1}{\theta\alpha(\Omega)}\|\widetilde{X}\|_2\alpha(\Omega,\widetilde{X}),$$

где постоянная $C_1>0$. Поскольку $\|\widetilde{X}\|_2\le 3\|B\|_2$, то мы получаем оценку из условия теоремы. Доказательство неравенства (4.27) в случае $\theta\in\{0,1\}$ проводится аналогичным образом. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.11. *Существуют числа $m\in\mathbb{Z}_+, C_1>0$ такие, что имеют место оценки:*

$$\|\widetilde{P}_{(m)}+\sum_{|k|=m+1}^{n}\widetilde{P}_k-P_{(m)}-\sum_{|k|=m+1}^{n}P_k\|\le\frac{C_1}{\theta\sqrt{n}}, \tag{4.30}$$

если $\theta\in(0,1)$ и

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)}+\sum_{k=m+1}^{n}\widetilde{\mathbb{P}}_k-\mathbb{P}_{(m)}-\sum_{k=m+1}^{n}\mathbb{P}_k\|\le\frac{C_1}{\sqrt{n}}, \tag{4.31}$$

если $\theta\in\{0,1\}$.

Следствие 4.1. Имеет место следующая оценка

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\| = 0,$$

если $\theta \in (0,1)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}_k\| = 0,$$

если $\theta \in \{0,1\}$.

Литература

[1] Агранович М. С. Спектральные свойства задач дифракции / М. С. Агранович // В кн.: Войтович Н.Н., Кацелембаум Б.З. Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции — М.: Наука, 1977. — С. 289–416.

[2] Арнольд В. И. Малые знаменатели. Об отображении окружности на себя / В. И. Арнольд // Изв. АН СССР, серия: математика. —1961. —Т. 25, вып. I. —С. 21–86.

[3] Баскаков А. Г. Замена Крылова-Боголюбова в теории нелинейных возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Препринт № 80 —19. — Киев, 1980. — 44 с.

[4] Баскаков А. Г. Абстрактный вариант замены Крылова-Боголюбова и некоторые вопросы теории нелинейных возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Труды IX международной конференции по нелинейным колебаниям в 4-х томах, Киев, Наукова думка. — 1984. — Т. 1. — С. 75–79.

[5] Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24. — № 1. — С. 21–39.

[6] Баскаков А. Г. Метод подобных операторов и формулы регуляризованных следов / А. Г. Баскаков // Известия Высших Учебных Заведений. — 1984. — № 3. — С. 3–11.

[7] Баскаков А. Г. Формулы регуляризованных следов для степеней возмущенных спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия Высших Учебных Заведений. — 1985. — № 8. — С. 68–71.

[8] Баскаков А. Г. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Диф. Уравн. — 1985. — Т. 21. — № 4. — С. 555–562.

[9] Баскаков А. Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50. — № 4. — С. 435–457.

[10] Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков — Воронеж: изд-во Воронежского государственного университета, 1987. — 165 с.

[11] Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58. — № 4. — С. 3–32.

[12] Баскаков А. Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. Сер. матем. — 1997. — Т. 61. — № 6. — С. 3–26.

[13] Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербакова // Известия РАН, Серия математическая. — 2011. — Т. 75. — № 3. — С. 3–28.

[14] Велиев О. А. О несамосопряженных операторах Штурма-Лиувилля с матричными потенциалами / О. А. Велиев // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81. — № 4. — С. 496–506.

[15] Велиев О. А. О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля / О. А. Велиев, А. А. Шкаликов // Мат. заметки. — 2009. — Т. 85. — № 5. — С. 671–686.

[16] Гохберг И. Ц. Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн — М.: Наука, 1965. — 448 с.

[17] Гохберг И. Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн — М.: Наука, 1967. — 508 с.

[18] Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн — М: Наука, 1970. — 536 с.

[19] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц — М: ИЛ, 1962. — Т1. — 895 с.

[20] Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц — М.: Мир, 1966. — 1064 с.

[21] Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т III. / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц — М.: Мир, 1974. — 661 с.

[22] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Том I. / А. Зигмунд — М.:Мир, 1959. — 616 с.

[23] Карпикова А. В. Асимптотика спектра оператора Хилла–Шредингера/ А. В. Карпикова // Научные ведомости Белгородского государственного университета.Серия: Физика. Математика. – 2014. – Т. 176. – № 5. – с. 34-37.

[24] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений интегро–дифференциального оператора с периодическими краевыми условиями/ А. В. Карпикова //Вестник Воронежского государственного университета.Серия: Физика. Математика. — 2015. – № 1. – с. 153-156.

[25] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с периодическими краевыми условиями/ А. В. Карпикова // Уфимский математический журнал.Серия: Физика. Математика. – 2014. – Т. 6. – № 3. – с. 28-34

[26] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений оператора Хилла-Шредингера с квазипериодическими краевыми условиями / А. В. Карпикова // Труды Воронежской Зимней Математической Школы С.Г. Крейна. — 2013. — С. 113–114.

[27] Карпикова А. В. Спектральный анализ оператора Штурма–Лиувилля с периодическими краевыми условиями / А. В. Карпикова // Современные методы теории краевых задач, материалы Воронежской Весенней Математической Школы "Понтрягинские чтения - XXI". — 2014. — С. 88–89

[28] Карпикова А. В. Спектральный анализ оператора Хилла–Шредингера с негладким потенциалом / А. В. Карпикова // XXIII Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум, Сборник тезисов. — 2012. — С. 31.

[29] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений оператора Хилла-Шредингера с квазипериодическими краевыми условиями / А. В. Карпикова // XXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум, Сборник тезисов. Том 4. — 2013. — С. 113–114.

[30] Карпикова А. В. Об асимптотике собственных значений оператора Хилла–Шредингера / А. В. Карпикова // Международный научный журнал "Спектральные и эволюционные задачи". — 2012. — С. 95–98.

[31] Карпикова А. В. Об асимптотике собственных значений оператора Хилла–Шредингера / А. В. Карпикова // Международный научный журнал "Спектральные и эволюционные задачи". — 2011. — Т. 1. — С. 135–139.

[32] Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като — М.:Мир, 1972. — 740 с.

[33] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1976. — 543 с.

[34] Красносельский М. А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский — М.: Наука, 1966. — 499 с.

[35] Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т.3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц — М. : Наука, 1989. — 768 с.

[36] Левитан Б. М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян — М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. — 431 с.

[37] Мамедов Х. Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач / Х. Р. Мамедов // Мат. заметки. — 1998. — Т. 64. — № 4. — С. 558–563.

[38] Маркус А. С. О сходимости разложений по собственным вектором оператора, близкого к самосопряжённому / А. С. Маркус, В. И. Мацаев — В сб. Мат. исслед. Линейные операторы и интегральные уравнения. — Кишинёв, 1981. — С. 104–129.

[39] Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла / В. А. Марченко, И. В. Островский // Мат. сборник. — 1975. — Т. 97(139). — № 4(8). — С. 540–606.

[40] Марченко В. А. Операторы Штурма Лиувилля и их приложения/ В. А. Марченко — М.: Наука, 1977. — С. 330.

[41] Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П. Джаков, Б. С. Митягин // Успехи математических наук. — 2006. — Т. 61. — № 4. — С. 77–182.

[42] Наймарк М. А. Линейные дифференциалные операторы / М. А. Наймарк — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[43] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Рихтмайер Р. — М.: Мир, 1982. — 488 с.

[44] Савчук А. М. О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом / А. М. Савчук // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69. — № 2. — С. 277–285.

[45] Садовничая И. В. О равносходимости разложений в ряды по собственным фунциям операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями / И. В. Садовничая // Мат. сборник. — 2010. — Т. 201. — № 9. — С. 61–76.

[46] Садовничий В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2004. — 382 с.

[47] Садовничий В. А. Следы операторов / В. А. Садовничий, В. Е. Подольский // Успехи математических наук. — 2006. — Т. 61. — № 5. — С. 89–156.

[48] Фридрихс К. О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. О. Фридрихс — М.: Мир, 1969. — 232 с.

[49] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри — М.: Мир, 1985. — 376 с.

[50] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.

[51]

[52] Шкаликов А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами–распределениями / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Тр. ММО. — 2003. — № 64. — С. 159–212.

[53] Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторов Дирака и Штурма–Лиувилля: дисс. канд. физ.- мат. наук / А. О. Щербаков// Воронеж, 2013. -145 с.

[54] Dernek N. On the Riesz basisness of the root functions of the nonself-adjoint Sturm-Liouville operators / N. Dernek, O-A. Veliev — Israel J. Math., — 2005. — Vol. 145. — № 1. — P. 113–123.

[55] Engel K-J. One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K-J. Engel, R. Nagel — Springer, 2001. — 586 p.

[56] Gross E. P. Unified Theory of Interacting Bosons / E. P. Gross // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 106. — P. 161.

[57] Karpikova A. V. Asymptotics of eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with quasiperiodic boundary conditions / A. V. Karpikova

// Intern. Scientific Journal "Spectral and Evolution Problems". — 2013. — Vol. 23. — P. 171–173.

[58] Karpikova A. V. Exponential splitting methods / A. V. Karpikova // Workshop of the 16'th Internet Seminar on the Evolution Equations. — 2013. — P. 13–15.

[59] Karpikova A. V. Spectral analysis of Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions / A. V. Karpikova // Spectral Theory and differential equations. International conference dedicated to the centenary of B.Levitan . — 2014. — P. 20.

[60] Reed M. Methods of modern mathematical phusics. Vol. IV: Analysis of operators. / M. Reed, B. Simon — Academic Press, 1978. — 396 p.

[61] Turner R. E. Perturbations of compact spectral operators / R. E. Turner // Communications on pure and applied mathematics. — 1965. — Vol. 18. — P. 519–541.