ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Романова Елена Юрьевна

Метод подобных операторов в исследовании оператора Дирака и дифференциального оператора с инволюцией.

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

профессор Баскаков А. Г.

ВОРОНЕЖ - 2015

Оглавление

Обозначения **4**

Введение **6**

1 Некоторые сведения из спектральной теории операторов, полугрупп операторов и метода подобных операторов **23**

§1.1 Основные понятия спектральной теории операторов . 23

§1.2 Основные понятия теории полугрупп операторов. Семейство эволюционных операторов. 29

§1.3 Основные понятия и теоремы метода подобных операторов. 33

2 Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака в лебеговых пространствах. **39**

§2.1 Постановка задачи 40

§2.2 Метод подобных операторов для абстрактных операторов, близких к оператору Дирака. 44

§2.3 Применение абстрактной схемы метода подобных операторов к оператору Дирака в лебеговых пространствах. Спектральные свойства оператора Дирака в лебеговых пространствах. 56

3 Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциальных операторов с инволюцией **65**

§3.1 Постановка задачи 66

§3.2 Метод подобных операторов для абстрактных операторов, близких к дифференциальному оператору с инволюцией 68

§3.3 Применение абстрактной схемы метода подобных операторов к дифференциальному оператору с инволюцией. Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией. 76
§3.4 Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией. Случай скалярного потенциала. . . 87
Литература 96

Обозначения

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ — множество неотрицательных целых чисел;

$\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство;

$\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство;

$End\,\mathcal{H}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта-Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта-Шмидта;

$\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ — идеал ядерных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ — банахово пространство операторов, подчиненных оператору A, с нормой $\|\cdot\|_A$;

$\mathfrak{U}$ — допустимое пространство возмущений с нормой $\|\cdot\|_*$;

l_p — банахово пространство последовательностей, суммируемых

со степенью p;

$L_p[0,2\pi]$ — банахово пространство суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ функций;

$L_p\left([0,2\pi],\mathbb{C}^2\right)$ — банахово пространство суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$ функций;

$C_b = C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных функций на отрезке $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$;

$L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$— гильбертово пространство измеримых на $[0,\omega]$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом нормы функций;

$L_{2,\omega} = L_{2,\omega}(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ — гильбертово пространство периодических периода ω функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$;

$W_p^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$— пространство Соболева $\{y \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2), p \geq 1 : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y} \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)\}$;

$C^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$— банахово пространство $\{y \in C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2) : \dot{y} \in C_b\}$ непрерывно дифференцируемых функций из C_b;

$\sigma(A)$ — спектр линейного оператора A;

$\rho(A)$ — резольвентное множество линейного оператора A;

$R(\cdot,A)$ — резольвента линейного оператора A;

$Ker\,A$ — ядро оператора A;

$Im\,A$ — образ оператора A;

$P(\sigma_0,A)$ — проектор Рисса, построенный по оператору A и спектральному множеству σ_0 из $\sigma(A)$;

I — тождественный оператор.

Введение

Диссертация посвящена исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов некоторого класса посредством применения метода подобных операторов и также дальнейшему развитию данного метода.

Исследование спектральных свойств различных дифференциальных операторов является одной из важных задач современного математического анализа и математической физики. Постоянно выясняется, что подробное изучение спектральных свойств (асимптотики спектра, оценок сходимости спектральных разложений, асимптотики генерируемой оператором полугруппы) находит свое применение как в абстрактной теории, так и в различных приложениях, возникающих в механике и физике. Следует также отметить, что для глубокого спектрального анализа необходимо рассматривать отдельные классы дифференциальных операторов, выделенных по тем или иным признакам.

В настоящей диссертации исследуются спектральные свойства двух дифференциальных операторов:

- оператора Дирака, рассматриваемого в лебеговых простран-

ствах и задаваемого на промежутке $[0, 2\pi]$ периодическими, антипериодическими краевыми условиями и краевыми условиями Дирихле;

- дифференциального оператора с инволюцией, рассматриваемого в гильбертовом пространстве и задаваемого на промежутке $[0, \omega]$ периодическими краевыми условиями.

Каждый из таких операторов может быть представлен в виде разности свободного (невозмущенного) оператора и возмущения (оператора умножения на потенциал), что позволяет в дальнейшем при их исследовании использовать метод подобных операторов.

Истоки метода подобных операторов лежат в методе Пуанкаре нормальных форм для обыкновенных дифференциальных уравнений. Также метод подобных операторов тесно связан с методом Ляпунова кинематического подобия дифференциальных операторов, абстрактным вариантом замены Крылова-Боголюбова [6]. Впервые данный метод был представлен Фридрихсом К.О. для возмущенных самосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром. Для возмущенных нормальных вполне непрерывных операторов была получена теорема Р. Тернером о возможности их преобразования к диагональному оператору в базисе невозмущенного оператора. Дальнейшее свое развитие метод подобных операторов получил в работах А.Г. Баскакова и его учеников, использующих технику абстрактного гармонического анализа линейных операторов [2]-[12],[39]-[49], [52]-[54], [59]-[60],[63], [76]-[78].

Приводимая в диссертации схема применения метода являет-

ся лишь адаптацией общего метода подобных операторов, который, на самом деле, позволяет не только изучать спектральные свойства рассматриваемых в диссертации дифференциального оператора Дирака и дифференциального оператора с инволюцией, но и открывает возможность его применения для достаточно широкого класса дифференциальных операторов.

История исследования оператора Дирака начинается с 1929 года, когда в процессе изучения релятивистской модели эволюции спин-1/2 частицы в электромагнитном поле, П.Дираком был введен в рассмотрение оператор L, порожденный дифференциальным выражением вида

$$l(y) = -By' + Qy,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & q_4(x) \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$y_i(x) \in L_2[0,\pi], i = 1,2,$ а $q_j, j = 1,2,3,4,$ предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными функциями.

Во многих своих работах Дирак рассматривал частный случай оператора L, когда $q_2 = q_3 = 0, q_1 = V(x) - m, q_4(x) = V(x) + m$, функция $V(x)$ описывает потенциал поля, а m - масса частицы [81].

Ранее оператор Дирака изучался также во многих работах, поскольку данный оператор важен в квантовой механике. Например, оператор Дирака используется при исследовании нелинейного уравнения Шредингера с помощью метода обратной задачи рассеяния [32]. В свою очередь, уравнение Шредингера возникало при рассмотрении различных физических задач,среди которых можно отметить

теорию слабо неидеального бозе—газа при $T = 0$ [25], [70] и двумерную самофокусировку интенсивного светового пучка в нелинейной среде и другие эффекты.

До недавнего времени оператор Дирака изучался в основном в случае симметрической матрицы Q с непрерывными функциями q_j [71]. Оператору L с периодическими, антипериодическими краевыми условиями, а также кревыми условиями Дирихле посвящена серия статей П. Джакова и Б. Митягина [65]-[68], А.Г. Баскакова, А.В. Дербушева и А.О.Щербакова [63], где все рузультаты были получены для оператора Дирака с потенциалом $Q \in L_2$. Для случая $q_j \in L_1[0, \pi], j = 1, 2$, оператор Дирака был изучен в статье С.Альбеверио, Р. О. Гринива и Я. Микитюка [62], где с помощью метода операторов преобразования была изучена обратная задача восстановления вещественнозначной матрицы $Q, q_2 = q_3 = 0$, по двум спектрам оператора L с краевыми условиями Дирихле $u_1(0) = u_1(\pi) = 0$ и Дирихле–Неймана $u_1(0) = u_2(\pi) = 0$. Недавно А.А.Луневым и М.М.Маламудом был анонсирован результат о базисности Рисса системы корневых векторов оператора Дирака, порожденного сильно регулярными краевыми условиями, с потенциалом $Q \in L_1[0, \pi]$ [72]. И также А.М.Савчук и А.А.Шкаликов опубликовали статью [79] с результатами об асимптотике собственных значений и собственных функций, базисностью Рисса собственных функций регулярного оператора L при $q_j \in L_p[0, \pi], j = 1, 2, p \geq 1$.

Интерес к изучению дифференциального оператора с инволюцией, исследуемого также в диссертации,связан с тем, что такие опе-

раторы применяются в теории фильтрации [64]. Простейшая инволюция — отражение применяется при обращении времени в классической статистической механике неравновесных процессов. Инволютивное отображение применялось В.А. Плиссом при исследовании субгармонических колебаний, описываемых уравнениями без диссипации [38]. Следует отметить также, что к обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим простейшую инволюцию, сводятся некоторые геометрические задачи, например, задача Бернулли и Эйлера о взаимных траекториях [17], а также краевые задачи для уравнений в частных производных гиперболического и эллиптического типов, если оператор уравнения допускает факторизацию. Дифференциальному оператору с инволюцией посвящена серия статей А.П.Хромова [57]-[58] и М.Ш.Бурлуцкой [13]-[16].

Таким образом, тема диссертации является вполне актуальной.

Целью работы является:

1. Дальнейшее развитие метода подобных операторов и применение построенной схемы метода для абстрактных операторов, близких к рассматриваемым операторам.

2. Спектральный анализ оператора Дирака, рассматриваемого в лебеговых пространствах и задаваемого на промежутке $[0, 2\pi]$ периодическими, антипериодическими краевыми условиями и также краевыми условиями Дирихле.

3. Спектральный анализ дифференциального оператора с инволюцией, рассматриваемого в гильбертовом пространстве и задаваемого на промежутке $[0, \omega]$ периодическими краевыми условиями.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены с использованием метода подобных операторов [2]-[12], спектральной теории дифференциальных операторов, методов теории полугрупп операторов, дифференциальных уравнений, методов функционального и гармонического анализа.

Научная новизна. Основные результаты диссертационной работы являются новыми. Из них выделим следующие:

1. Дальнейшее развитие метода подобных операторов. В частности, построены абстрактные схемы применения метода подобных операторов для операторов, близких к изучаемому оператору Дирака и дифференциальному оператору с иволюцией.

2. Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах, рассматриваемого при различных краевых условиях: периодических, антипеpодических и условиях Дирихле. В том числе получена асимптотика спектра (оценки собственных значений), а также равносходимость спектральных разложений возмущенного и невозмущенного операторов.

3. Спектральный анализ дифференциального оператора с инволюцией, рассматриваемого в гильбертовых пространствах и задаваемого на определенном промежутке периодическими краевыми условиями. В том числе получена асимптотика спектра (оценки собственных значений), равносходимость спектральных разложений возмущенного и невозмущенного операторов, а также асимптотическое представление группы операторов, генерируемой исследуемым оператором.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер и может быть использована при дальнейшем развитии спектральной теории операторов и метода подобных операторов, а также применении метода подобных операторов в исследовании спектральных свойств различных дифференциальных операторов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С.Г. Крейна 2010 [43], 2011 [45], 2013 [47], 2014 [49], на Крымских осенних математических школах 2009, 2010 [44], 2011 [46], на Крымской международной математической конференции 2013 [48], на конференции, посвященной 100-летию Б.М. Левитана МГУ 2014[78], на математическом интернет-семинаре ISEM-2011 (Германия, Блаубойрен), на семинарах А.Г. Баскакова, а также на научных сессиях ВГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [39] - [49], [76] -[78]. Работы [39] - [42] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, включающей 81 наименование. Общий объем диссертации - 107 страниц.

Содержание диссертации. Прежде чем перейти к изложению основных результатов, отметим, что в диссертационной работе используется двойная нумерация теорем, лемм, следствий, замеча-

ний, определений и формул. Причем первая цифра означает номер главы, вторая — порядковый номер теоремы, леммы и т.д. в данной главе.

В первой главе приводятся широко используемые в диссертации основные понятия и результаты спектральной теории операторов, теории полугрупп, а также определения и основные теоремы метода подобных операторов.

Вторая глава посвящена дальнейшему развитию метода подобных операторов и его применению к исследованию спектральных свойств оператора Дирака $L_{bc} : D(L_{bc}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, в лебеговых пространствах, рассматриваемого при различных краевых условиях: периодических, антиперодических и условиях Дирихле, и задаваемого с помощью дифференциального выражения (*первый параграф* второй главы):

$$l(y) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy,$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi],$$

где $P, Q \in L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^1), \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел, и $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$ — одно из определенных пространств $L_p = L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, $L_\infty = L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$ или $C_b = C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$. Область определения $D(L_{bc})$ задается с помощью одного из краевых условий : периодические (bc=per: $y(0) = y(2\pi)$); антипериодические (bc=ap: $y(0) = -y(2\pi)$); Дирихле (bc=dir: $y_1(0) = y_2(0), y_1(2\pi) = y_2(2\pi)$). А именно, полагается $D(L_{bc}) = \{y \in \mathcal{F}^1([0, 2\pi], \mathbb{C}^2) : y \in$

$bc\}$, где $\mathcal{F}^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ — одно из пространств $W_p^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2), p \geq 1 : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y} \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)\}$ или $C^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2) : \dot{y} \in C_b\}$ в зависимости от выбранного пространства $\mathcal{F}$.

Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то используется символ L_{bc}^0 для обозначения оператора L_{bc}, который называется свободным оператором Дирака. В таком случае оператор $A = L_{bc}^0$ при изучении оператора L_{bc} играет роль невозмущенного оператора, в то время, как оператор B умножения на потенциал v играет роль возмущения. Т.е. $L_{bc} = A - B$.

Во *втором параграфе* второй главы описывается построение абстрактной схемы применения метода подобных операторов для операторов, близких по своим свойствам к рассматриваемому оператору Дирака. В *третьем параграфе* приводится применение данной схемы для исследуемого оператора Дирака в лебеговых пространствах.

Основным результатом данных параграфов является теорема о подобии 2.3, где установлено, что каждый рассматриваемый оператор Дирака L_{bc}, $bc \in \{per, ap, dir\}$, подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов с конечным рангом. Такой результат является основой для последующего спектрального анализа изучаемого оператора в лебеговых пространствах.

Теорема 2.3. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{10\pi}{m^{2/3}}\|B\|_\infty < 1$$

(т.е. оператор $I + \Gamma_k B$ обратим). Тогда оператор $L_{bc} = A - B$, где $A = L^0_{bc}$, *B — оператор умножения на потенциал v, подобен оператору $\widetilde{L}_{bc} = L^0_{bc} - \widetilde{B}$, где*

$$\widetilde{B} = J_m B + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B),$$

причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(A - \widetilde{B}).$$

Операторы $J_m B, \Gamma_m B, B\Gamma_m B, (\Gamma_m B)(J_m B), \widetilde{B}$ являются компактными.

Отметим, что в теореме 2.3 операторы $J_m B$, $\Gamma_m B$, $B\Gamma_m B$, $(\Gamma_m B)(J_m B)$ являются операторами, построенными по возмущению B в процессе применения метода подобных операторов.

Также в *третьем параграфе* получены теорема об оценках собственных значений рассматриваемого оператора — теорема 2.4, теорема о равносходимости спектральных разложений возмущенного L_{bc} и невозмущенного L^0_{bc} операторов — теоерма 2.5, в основе которых как раз и лежит теорема 2.3 о подобии изучаемого оператора Дирака. Оценки теорем 2.4, 2.5 являются новыми и ранее были известны только в случае рассмотрения оператора Дирака в гильбертовом пространстве [63].

Теорема 2.4. *Дифференциальный оператор $L_{bc} : D(L_{bc}) \in \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что $\sigma(L_{bc})$ представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma_{(m)} \bigcup (\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n),$$

где $\sigma_{(m)}$ *— конечное множество, а* $\sigma_n, |n| \geq m+1$, *определяются равенствами*

$$\sigma_n = \{n + \beta_n^{\pm}\}, \lim_{n\to\infty} \beta_n^{\pm} = 0, \textit{если } bc = per;$$

$$\sigma_n = \{n + 1/2 + \alpha_n^{\pm}\}, \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\pm} = 0, \textit{если } bc = ap;$$

$$\sigma_n = \{n + \gamma_n\}, \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \textit{если } bc = dir.$$

Пусть $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, |n| \geq m+1,-$ спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L_{bc} и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, |n| \geq m+1$, соответственно.

Теорема 2.5. *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов* L_{bc} и L_{bc}^0 :

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n})\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n})P_k\| = 0.$$

Третья глава посвящена дальнейшему развитию метода подобных операторов и его применению к исследованию спектральных свойств дифференциального оператора с инволюцией $L : D(L) \subset L_2([0,\omega], \mathbb{C}^m) \to L_2([0,\omega], \mathbb{C}^m)$, рассматриваемого в гильбертовых пространствах и задаваемого на определенном промежутке периодическими краевыми условиями с помощью дифференциального выражения (*первый параграф* третьей главы):

$$l(y) = y'(x) - Q(x)y(\omega - x), x \in [0,\omega], Q \in L_2([0,\omega], End\,\mathbb{C}^m).$$

Причем область определения рассматриваемого дифференциального оператора L записывается в виде

$$y \in D(L) = \{y \in W_2^1([0,\omega],\mathbb{C}^m) : y(0) = y(\omega)\}.$$

Оператор $(L^0 y)(x) = y'(x)$ будем называть свободным оператором, играющим роль невозмущенного оператора, а $(Vy)(x) = Q(x)y(\omega - x), x \in [0,\omega], y \in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ будет играть роль возмущения при исследовании исходного оператора L. Таким образом, изучаемый оператор L представим в виде $L = L^0 - V$.

Построение абстрактной схемы применения метода подобных операторов для операторов, близких к рассматриваемому дифференциальному оператору с инволюцией, осуществляется во *втором параграфе* третьей главы. А применение данной схемы для исследуемого дифференциального оператора с инволюцией описывается в *третьем параграфе* третьей главы.

Основным результатом данных параграфов является теорема о подобии 3.4, где установлено, что каждый рассматриваемый дифференциальный оператор с инволюцией подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов с конечным рангом. Такой результат является основой для последующего спектрального анализа изучаемого оператора.

Следует отметить, что в следующих теоремах операторы $\Gamma_m V, J_m V, V\Gamma_m V, (\Gamma_m V)(J_m V), \Gamma V, JV, V\Gamma V \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega}(\mathbb{R},\mathbb{C}^m))$ являются операторами, построенными по возмущению V в процессе применения метода подобных операторов.

Теорема 3.4. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравен-*

ству $\|\Gamma_m V\|_2 < 1$, *и выполнена оценка*

$$\|V\|_2 \|\Gamma_m\| < \frac{1}{4},$$

тогда оператор $L = A - V$ *подобен оператору вида*

$$A - V_0 = A - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{|j|\geq m+1} P_j \widetilde{X} P_j = A - J_m \widetilde{X}.$$

Оператор $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ — *решение уравнения* $X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X)$, *в котором* $\Gamma = \Gamma_m$, $J = J_m$, $B = V$. *Его можно найти методом последовательных приближений. Оператор* $I + \Gamma_m \widetilde{X}$ *обратим и преобразование подобия оператора* L *в оператор* $A - V_0$ *осуществляет оператор вида*

$$U_{km} = (I + \Gamma_k V)(I + \Gamma_m \widetilde{X}) = I + V_{km},$$

где $V_{km} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$. *Кроме того, оператор* $V_0 = J_m \widetilde{X}$ *представим в виде*

$$V_0 = J_m V + J_m(V\Gamma V) + T_0 = JV + J(V\Gamma V) + T_1,$$

где T_0, T_1 — *ядерные операторы идеала* $\mathfrak{S}_1(L_{2,\omega})$, *причем* $J_m T_j = T_j, j = 0, 1$.

Также в *третьем параграфе* получены теорема об оценках собственных значений рассматриваемого оператора — теорема 3.5, теоремы о равносходимости спектральных разложений возмущенного L и невозмущенного L^0 операторов — теоремы 3.6,3.7, в основе которых как раз и лежит теорема 3.3 о подобии изучаемого дифференциального оператора с инволюцией. Оценки теорем 3.5 - 3.7 являются новыми и ранее не были получены.

Для получения результатов теоремы 3.5 необходимо ввести в рассмотрение операторы $\Phi_n \in End\,\mathbb{C}^m, n, l \in \mathbb{Z}, |n| \geq l+1$, представимые в виде

$$\Phi_n = Q_{2n} + \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(Q_{2n+k})^2 + \Lambda_n,$$

где $\sum\limits_{|n|\geq l+1} \| \Lambda_n \|_2 < \infty$.

Причем взвешенное среднее для оператора Φ_n записывается, как

$$\lambda_{\Phi_n} = \frac{tr\,\Phi_n}{m} = \frac{\lambda_n^{(1)} + ... + \lambda_n^{(m)}}{m},$$

где $\sigma(\Phi_n) = \{\lambda_n^{(1)}, ..., \lambda_n^{(m)}\}$, и последовательность $(\lambda_n^{(k)})$ является суммируемой с квадратом, т.е. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \lambda_n^{(k)} \mid^2 < \infty$.

Теорема 3.5. *Дифференциальный оператор* $L : D(L) \subset L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m) \to L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ *является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений, что его спектр* $\sigma(L)$ *представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(l)} \bigcup \left(\bigcup_{|n|\geq l+1} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(l)}$ *— конечное множество, а* σ_n *определяется равенствами*

$$\sigma_n = \sigma\left(i\frac{2\pi n}{\omega} I_n - \Phi_n \right), |n| \geq l+1.$$

Кроме того для взвешенного среднего верна следующая оценка

$$\left| \lambda_{\Phi_n} - \frac{trQ_{2n} + tr(\frac{\omega}{2\pi i}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k}(Q_{2n+k})^2)}{m} \right| \leq \beta_n, |n| \geq l+1,$$

(β_n) *— суммируемая последовательность, т.е.* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \beta_n \mid < \infty$.

Далее для любого оператора $0 \neq X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m))$ рассматривается двусторонняя последовательность $(\alpha_n(X))$, определяемая в виде

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1} \max \left\{ \left(\sum_{|k| \geq |n|} \|XP_k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{|k| \geq |n|} \|P_k X\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что $\alpha_n(X) \to 0$, $n \to \infty$.

Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ (не обязательно конечного) символом $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k \in \Omega} P_k$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{k \in \Omega} \widetilde{P}_k$. Далее для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m))$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначим величину $\max\limits_{n \in \Omega} \alpha_n(X)$.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 3.4. Тогда для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ имеют место оценки*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_1(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha(\Omega, B)) \leq$$
$$\leq C_2(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha(\Omega, JV) + \alpha(\Omega, V\Gamma V)),$$

где $C_1, C_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от Ω.

Теорема 3.7. *Если выполнены условия теоремы 3.5, то для $n \geq m+1$ имеют место оценки*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\|_2 \leq$$
$$\leq C(\alpha_{n+1}(\Gamma V) + \alpha_{n+1}(JV) + \alpha_{n+1}(V\Gamma V)),$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от n.

В *четвертом параграфе* третьей главы приводятся результаты, также связанные с асимптотикой спектра и равносходимостью спек-

тральных разложений для исследуемого дифференциального оператора с инволюцией в случае скалярного потенциала, т.е. в случае $L : D(L) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$.

Теорема 3.8. *Дифференциальный оператор* $L : D(L) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$ *является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений, что* $\sigma(L)$ *представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \Big),$$

где $\sigma_{(m)}$ *— конечное множество с числом точек меньшим или равным* m, *а* $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda_n}\}, n \geq m+1$, *является одноточечным множеством, где*

$$\widetilde{\lambda_n} = i\frac{2\pi n}{\omega} - q_{2n} - \frac{\omega}{2\pi i} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} (q_{2n+k})^2 + \beta_n,$$

(β_n) *— суммируемая последовательность, т.е.* $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mid \beta_n \mid < \infty$.

Теорема 3.9. *Существует* $m \in \mathbb{Z}_+$ *такое, что*

$$\sum_{|n| \geq m+1} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty.$$

Имеет место равносходимость спектральных разложений возмущенного и невозмущенного операторов

$$\lim_{n \to \infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

Также в *четвертом параграфе* третьей главы получено асимтотическое представление группы, генерируемой исследуемым дифференциальным оператором в случае скалярного потенциала.

Пусть $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}[0,\omega]$ — гильбертово пространство определенных на $\mathbb{R}$ комплексных периодических периода ω функций, суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$.

Теорема 3.10. *Дифференциальный оператор* $L : D(L) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$ *генерирует группу операторов* $T : \mathbb{R} \to EndL_{2,\omega}$, *представимую в виде*

$$T(t) = U_{km}T_m(t)U_{km}^{-1}, t \in \mathbb{R},$$

$$U_{km} = (I + \Gamma_k V)(I + \Gamma_m \widetilde{X}),$$

где группа операторов $T_m : \mathbb{R} \to EndL_{2,\omega}$ *на подпространстве* $Im(I - P_{(m)})$ *определяется равенствами* $T_m(t)e_n = e^{i\frac{2\pi(n+\alpha_n)}{\omega}t}e_n, n \geq m+1$, (α_n) — *последовательность комплексных чисел из* l_2, *и конечномерное подпространство* $ImP_{(m)}$ *является инвариантным для группы* T_m.

Глава 1

Некоторые сведения из спектральной теории операторов, полугрупп операторов и метода подобных операторов

§1.1 Основные понятия спектральной теории операторов

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство. Все приводимые далее определения и результаты, связанные с операторами и полугруппами операторов, содержатся в монографиях [1], [2], [18]-[23], [26]-[31], [33], [36], [50], [56], [61], [69] и систематически используются.

Определение 1.1. *Линейным оператором* $A : D \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называют отображение, действующее из D (линейного подпространства банахова пространства $\mathcal{X}$) в $\mathcal{X}$, такое, что $A(\alpha_1 x + \alpha_2 y) =$

$\alpha_1 Ax + \alpha_2 Ay$ для любых $x, y \in D(A)$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Подпространство D называют областью определения оператора A и обозначают символом $D(A)$.

Оператор $I : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, где $Ix = x$, $x \in \mathcal{X}$ будем нызывать *тождественным оператором.*

Определение 1.2. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *ограниченным*, если конечна величина $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \in D(A)} \|Ax\|$, принимаемая за норму оператора A.

Определение 1.3. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *замкнутым*, если множество точек $\{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, называемое графиком оператора, является замкнутым в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Данное определение эквивалентно следующему: линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ замкнут, если из $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Далее через $End\,\mathcal{X}$ будем обозначать банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. И также отметим, что любой ограниченный оператор из $End\,\mathcal{X}$ замкнут.

Определение 1.4. *Образом* оператора A называется такое множество $Im\,A$ векторов $y \in \mathcal{X}$, для которых найдется $x \in D(A)$, $y = Ax$. Символом $Ker\,A$ обозначается *ядро* оператора A, то есть множество $\{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

Определение 1.5. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *обратимым*, если $Ker\,A = \{0\}$ и $Im\,A = \mathcal{X}$. Обратный к A оператор обозначается через $A^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Теорема 1.1. *Если* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *— замкнутый обратимый линейный оператор, то обратный* $A^{-1} \in End\,\mathcal{X}$.

Теорема 1.2. *Если* $A \in End\,\mathcal{X}$ *такой, что* $\|A\| < 1$, *то оператор* $I - A$ *обратим.*

Определение 1.6. Подпространство M из банахова пространства $\mathcal{X}$ называется *инвариантным* относительно линейного оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, если $Ax \in M$ для любого $x \in M \bigcap D(A)$. Оператор $A_M : D(A_M) \subset M \to M$, определяемый формулой $x \mapsto A_M x = Ax : D(A_M) = D(A) \bigcap M \subset M \to M$, называется *сужением* оператора A на M.

Определение 1.7. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Оператор A^* *сопряженным* к A, если $A^* v = w(v)$, $v \in D(A^*)$, $D(A^*) = \{v \in \mathcal{H} : \exists w = w(v) \in \mathcal{H},\ \text{что}\ (w, u) = (v, Au)\ \forall u \in D(A)\}$.

Определение 1.8. Если для линейного оператора $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ верно $A = A^*$, то такой оператор называется *самосопряженным.*

Определение 1.9. Оператор A, отображающий банахово пространство $\mathcal{X}$ в себя (или другое банахово пространство), называется *компактным*, или *вполне непрерывным*, если он каждое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

В случае, если рассматривается линейный ограниченный оператор $A \in End\,\mathcal{X}$, то такой оператор называется *компактным*, если множество $A(\overline{B}(0,1))$ относительно компактно в $\mathcal{X}$ ($\overline{B}(0,1) = \{x \in$

$\mathcal{X} : \|x\| \leq 1\}$ — замкнутый шар с центром в точке $0 \in \mathcal{X}$ и радиусом 1).

Определение 1.10. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ - замкнутый оператор. *Резольвентным множеством* $\rho(A)$ оператора A называется совокупность комплексных чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых обратим оператор $A - \lambda I$. *Резольвентой* оператора A называется операторнозначная функция $R(\cdot, A) : \rho(A) \to End\,\mathcal{X}$, $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$.

Определение 1.11. *Спектром* $\sigma(A)$ замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется дополнение к резольвентному множеству $\rho(A)$, то есть $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

Отметим, что $\sigma(A)$ - замкнутое множество, а $\rho(A)$ - открытое множество.

Определение 1.12. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ - замкнутый оператор. Тогда такой оператор называется *оператором с компактной резольвентой*, если для некоторого $\lambda_0 \in \rho(A)$ оператор $R(\lambda_0, A)$ компактен.

Определение 1.13. Пусть $P \in End\,\mathcal{X}$ - линейный ограниченный оператор. Оператор P называется *проектором*, если $P^2 = P$.

Отметим, что каждый проектор P определяет разложение банахова пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, где $\mathcal{X}_1 = Im\,P$, $\mathcal{X}_2 = Im\,(I - P)$.

Определение 1.14. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, то есть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — замкнутые подпространства из $\mathcal{H}$,

$\mathcal{H}_1 \bigcap \mathcal{H}_2 = \emptyset$, и любой вектор $x \in \mathcal{H}$ представим в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2 \in \mathcal{H}_2$. Пусть $P \in End\,\mathcal{H}$ - проектор вида $Px = x_1$, $x \in \mathcal{H}$, $x_1 \in \mathcal{H}_1$. Тогда P называется *ортогональным проектором*, если он самосопряжен, или, что то же самое, пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ ортогональны другу другу, т.е. $(x_1, x_2) = 0$ для любых $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2 \in \mathcal{H}_2$.

Определение 1.15. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — замкнутый оператор, спектр которого представим в виде $\sigma(A) = \sigma_1 \bigcup \sigma_2$, где σ_1, σ_2 — замкнутые непересекающиеся множества и σ_1 компактно. Пусть γ — жорданова замкнутая кривая, лежащая в $\rho(A)$ и содержащая σ_1 во внутренней части и σ_2 — во внешней. Проектор

$$P(\sigma_1, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda, A)\, d\lambda$$

называется *спектральным проектором Рисса*, построенным по изолированной части σ_1 спектра оператора A.

Теорема 1.3. *Пусть спектр замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ допускает описанное в определение 1.15 разбиение на части σ_1 и σ_2. Тогда оператор A допускает разложение $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_i = A|\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, — сужение A на $\mathcal{X}_i$ относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно A подпространств $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, причем $\mathcal{X}_i = Im\, P_i$, $i = 1, 2$, $P_1 = P(\sigma_1, A)$ — спектральный проектор Рисса, построенный по изолированной части σ_1 спектра оператора A, а $P_2 = I - P_1$. Кроме того, $\sigma(A_i) = \sigma_i$, $i = 1, 2$, $\mathcal{X}_1 \in D(A)$ и $A_1 \in End\,\mathcal{X}$.*

Определение 1.16. Пусть λ_1 — изолированное собственное значение замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, и пусть $P_1 = P(\lambda_1, A)$ — спектральный проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda_1\}$. Число $\nu(\lambda_1) = dim\, \mathcal{X}_1$, где $\mathcal{X}_1 = Im\, P_1$, называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ. Если $Ax = \lambda_1 x$ для любого $x \in \mathcal{X}_1$, то есть $\mathcal{X}_1 = Ker\,(A - \lambda_1 I)$, то собственное значение λ_1 называется *полупростым*. Если при этом $\nu(\lambda_1) = dim\, \mathcal{X}_1 = 1$, то собственное значение λ_1 называется *простым*.

Теорема 1.4. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть спектр оператора A состоит из полупростых собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, то есть $\sigma(A) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \{\lambda_n\}$. Пусть $e_n^{(j)}$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, ..., \nu(\lambda_n)$, — собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_n, то есть $Ae_n^{(j)} = \lambda_n e_n^{(j)}$, где $\nu(\lambda_n)$ — алгебраическая кратность λ_n. Тогда ортогональный проектор Рисса, построенный по собственному значению λ_n, имеет вид*

$$P_n x = P(\lambda_n, A)x = \sum_{j=1}^{\nu(\lambda_n)} (x, e_n^{(j)}) e_n^{(j)}.$$

Более того, оператор A допускает представление

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n P_n x, \quad x \in D(A).$$

При этом

$$D(A) = \{x \in \mathcal{H} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 < \infty\}.$$

Определение 1.17. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения

$$\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma_k, \quad \mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}, \tag{1.1}$$

взаимно непересекающихся компактных множеств σ_k, $k \in \mathbb{J}$. Пусть P_k — проектор Рисса, построенный по множеству σ_k. Оператор A называется спектральным относительно разложения (1.1) (или *обобщенным спектральным*) если ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{J}} P_k x$ безусловно сходится для любого вектора $x \in \mathcal{H}$.

Если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{J}$, одноточечные множества, и проекторы P_k, $k \in \mathbb{J}$, обладают свойством $AP_k = \lambda_k P_k$ для всех $k \in \mathbb{J}$, исключая конечное число, то спектральный относительно разложения (1.1) оператор A является *спектральным* (по Данфорду; см. [23]) оператором, причем A — *спектральный оператор скалярного типа*, если $AP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{J}$.

§1.2 Основные понятия теории полугрупп операторов. Семейство эволюционных операторов.

В работе рассматриваются полугруппы операторов из следующего определения.

Определение 1.18. *Полугруппой операторов* называется семейство операторов $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, из $End\,\mathcal{X}$, если $T(t+s) = T(t)T(s)$

для любых $t, s \in \mathbb{R}_+$ и $T(0) = I$.

В случае, когда t может изменяться на $\mathbb{R}$, семейство операторов $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, называется *группой операторов.*

Определение 1.19. Операторнозначная функция $T : \mathbb{R}_+ \to End\,\mathcal{X}$ называется *сильно непрерывной полугруппой операторов* (или полугруппой класса C_0), если

1) $T(t+s) = T(t)T(s), t, s \in \mathbb{R}_+$;

2) $T(0) = I$;

3) $\lim\limits_{t \to 0+} \|T(t)x_0 - x_0\| = 0$, т.е. $t \mapsto T(t) : \mathbb{R}_+ \to End\,\mathcal{X}$ сильно непрерывна в нуле.

В диссертации рассматриваются также *сильно непрерывные группы операторов.* Функция $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$ называется *сильно непрерывной группой операторов*, если условия 1) - 3) из определения 1.19 выполняются при любом $t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.20. *Инфинитезимальным генератором* сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}_+$ (группы $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$) называется замкнутый линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $Ax = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}$, $x \in D(A)$, где $D(A) = \{x \in \mathcal{X} :$ существует $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}\}$, $\overline{D(A)} = \mathcal{X}$.

Теорема 1.5. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор, тогда оператор iA является генератором сильно непрерывной группы $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, изометрических операторов из $End\,\mathcal{H}$.*

Если при этом P_n — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$,$\lambda_n$ — собственные значения оператора A, т.е. $AP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{Z}$, то имеет

место следующее спектральное представление операторов группы изометрий $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$*:*

$$T(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\lambda_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H},\ t \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1.1. Если A — генератор сильно непрерывной полугруппы (группы) $T(t)$, а P_n — проектор Рисса, такой что $AP_n = \lambda_n P_n$, тогда $T(t)P_n = e^{\lambda_n t} P_n$.

Пусть $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство и $End\,\mathcal{H}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, и $\mathfrak{I}$ – один из промежутков: $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}$. Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{I}, \mathcal{H})$ обозначим одно из следующих банаховых пространств: $L_p = L_p(\mathfrak{I}, \mathcal{H}), p \in [1, \infty]$ – пространство суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathfrak{I}$ функций, принимающих значения в $\mathcal{H}$ ($\|\cdot\|_p$ – норма в $L_p(\mathfrak{I}, \mathcal{H})$).

Определение 1.21. Семейство операторов

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t,s) : -\infty < s \le t < \infty\} \subset End\,\mathcal{H}$$

называется *семейством эволюционных операторов*, если выполняются следующие свойства:

1) семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно на $\Delta = \{(t,s) \in \mathfrak{I}^2 : s \le t\}$;

2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$, $s \le \tau \le t, s, \tau, t \in \mathfrak{I}$;

3) $\mathcal{U}(t,t) = I$, $\forall t \in \mathfrak{I}$;

4) $\sup\limits_{0\le t-s\le 1} \|\mathcal{U}(t,s)\| = K < \infty$.

Сопоставим семейству $\mathcal{U}$ линейный оператор

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{I}, \mathcal{H}) \to \mathcal{F},$$

определяемый следующим образом.

Функцию $x \in \mathcal{F}$ отнесём к области определения $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$, такая, что для всех $s \leq t$ из $\mathfrak{I}$ имеют место равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t,s)x(s) - \int\limits_s^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{1.2}$$

При этом полагается $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$.

Если $\mathfrak{I} = \mathbb{R}_+$, то символом $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ обозначим линейный оператор с областью определения

$$D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) = \{x \in \mathcal{F} : \text{существует } f \in \mathcal{F} \text{ такая, что}$$
$$x(t) = -\int\limits_0^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau \text{ для всех } t \geq 0 \text{ из } \mathbb{R}_+\}$$

и положим $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+x = f$. Следует отметить, что для указанных x и f имеют место равенства (1.2), и поэтому $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) = \{x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) : x(0) = 0\}$.

Таким образом, $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ = -d/dt + A(t) : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ – абстрактный параболический оператор, если $\mathcal{U}$ – семейство эволюционных операторов для линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), t \in \mathfrak{I},$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши.

§1.3 Основные понятия и теоремы метода подобных операторов.

Рассмотрим комплексное банахово пространство $\mathcal{X}$ и соответствующую банахову алгебру линейных ограниченных операторов $End\,\mathcal{X}$, действующих в $\mathcal{X}$.

Метод подобных операторов - метод гармонического анализа, суть которого состоит в преобразовании подобия изучаемого (возмущенного) оператора в оператор со спектральными свойствами наиболее близкими к спектральным свойствам невозмущенного оператора.

Основная идея метода подобных операторов может быть показана более детально. Рассмотрим, например, линейный хорошо изученный оператор A, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ (такой оператор принято называть невозмущенным оператором), и другой оператор B, который в некотором смысле "мал" по сравнению с A. При определенных условиях оператор $A - B$ может быть подобен некоторому оператору $A - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B}$ имеет несложную по отношению к A структуру. Процедура построения оператора $\widetilde{B}$ и оператора преобразования оператора $A - B$ в $A - \widetilde{B}$ является тесно связанной с гармоническим анализом линейных операторов из некоторого пространства возмущений оператора A, которому как раз и принадлежит оператор (возмущение) B. Поэтому проверка условия подобия операторов $A - B$ и $A - \widetilde{B}$ в большинстве случаев приводит к вопросу разрешимости некоторых нелинейных уравнений в

пространстве возмущений.

Определение 1.22. Пусть $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ - линейные операторы. Тогда операторы A_1 и A_2 называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\,\mathcal{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1Ux = UA_2x, x \in D(A_2)$. При этом оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Лемма 1.1. *Пусть $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — подобные линейные операторы, $U \in End\,\mathcal{X}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Тогда верно*

1) спектр, дискретный спектр, непрерывный спектр, остаточный спектр рассматриваемых операторов соответственно совпадают, т.е.

$$\sigma(A_1) = \sigma(A_2),$$

$$\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2),$$

$$\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2),$$

$$\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2);$$

2) в случае, если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A \mid \mathcal{X}_k$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{X}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{X}_k} = U(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, 2$,будут являться инвариантными относительно оператора A_1, причем оператор A_1 может быть представлен в виде

$A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, *где* $A_{1k} = A \mid \widetilde{\mathcal{X}_k}$, $k = 1, 2$, *относительно разложения* $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}_1} \oplus \widetilde{\mathcal{X}_2}$.

Кроме того, если P — *проектор, осуществляющий разложение* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ *(т.е.* $\mathcal{X}_1 = ImP$ — *образ проектора* P, $\mathcal{X}_2 = Im(I - P)$, *то проектор* $\widetilde{P}$, *осуществляющий разложение* $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}_1} \oplus \widetilde{\mathcal{X}_2}$, *определяется формулой*

$$\widetilde{P} = UPU^{-1}. \tag{1.3}$$

В дальнейшем нам понадобится банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и подчиненных оператору A. Такое пространство будем обозначать через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$. Таким образом, линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если $D(B) \supseteq D(A)$ и конечна величина $\|B\|_A = inf\{C > 0 : \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|),\ x \in D(A)\}$, принимаемая за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$. Поскольку $D(A - B) = D(A)$ для любого $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, то обычно считается, что $D(B) = D(A)$.

Далее рассматривается трансформатор (т.е. линейный оператор в пространстве линейных операторов) $ad_A : D(ad_A) \subset End\mathcal{X} \to End\mathcal{X}$

$$ad_A X = AX - XA, \quad X \in D(ad_A)$$

с областью определения $D(ad_A)$, состоящей из операторов $X \in End\,\mathcal{X}$, обладающих свойствами:

1) $XD(A) \subset D(A)$;

2) оператор $AX - XA : D(A) \to \mathcal{X}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathcal{X}$ (и полагается $ad_A X = Y$).

Основным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки.

Определение 1.23. Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и

$$J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}, \quad \Gamma : \mathfrak{U} \to End\,\mathcal{X}$$

являются трансформаторами.*Допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора A будем называть тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$, где $\mathfrak{U}$ является *допустимым пространством возмущений*, если выполнены условия:

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$, для любого $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$);

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$. Более того, $\Gamma X \in D(ad_A)$, причем

$$ad_A \Gamma X = A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX \qquad \forall X \in \mathfrak{U}.$$

Кроме того, $\Gamma X \in End\,\mathcal{X}$ — единственное решение уравнения

$$ad_A Y = AY - YA = X - JX,$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}, \forall X, Y \in \mathfrak{U}$, и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \qquad max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

5) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 1.6. *Пусть* $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ *— допустимая для оператора* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *тройка, и* B *— некоторый оператор из пространства допустимых для* A *возмущений* $\mathfrak{U}$. *Тогда если выполнено неравенство*

$$\|J\|\|B\|_*\|\Gamma\| < \frac{1}{4}, \tag{1.4}$$

оператор $A-B$ *подобен оператору* $A-J\widetilde{X}$, *где оператор* $\widetilde{X} \in \mathfrak{U}$ *является решением (нелинейного) уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{1.5}$$

Преобразование подобия оператора $A - B$ *в оператор* $A - J\widetilde{X}$ *осуществляет оператор* $I + \Gamma X \in End\mathcal{X}$.

В большинстве случаев построение пространства допустимых возмущений, содержащего рассматриваемое возмущение, является сложным процессом. Поэтому построение трансформаторов J и Γ осуществляется на всем пространстве $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ таким образом, чтобы операторы вида $A - JX$, $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, имели несложную структуру. Затем строится пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ такое, что оно вместе с сужениями J и Γ на это пространство (они далее обозначаются теми же символами) образует допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для A.

Так как возмущение B может не принадлежать $\mathfrak{U}$, то в таком случае осуществляется предварительное преобразование подобия оператора $A-B$ в оператор вида $A-\widetilde{B}$ где $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Причем такое преобразование возможно в условиях следующего предположения.

Предположение 1.1. *Операторы* $\Gamma B, JB, B$ *удовлетворяют следующим условиям:*

*(**a**)* $\Gamma B \in End\mathcal{X}$ *и* $\|\Gamma B\| < 1$*;*

*(**b**)* $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$*;*

*(**c**)* $B\Gamma B, (\Gamma B)JB \in \mathfrak{U}$*;*

*(**d**)* $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$*;*

*(**e**) для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$*, такое, что* $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 1.7. *При выполнении предположения 1.1 оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - JB - B_0$*, где* $B_0 = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$*, причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - JB - B_0), \tag{1.6}$$

где I *— тождественный оператор.*

Глава 2

Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака в лебеговых пространствах.

Данная глава посвящена дальнейшему развитию метода подобных операторов и его применению в процессе исследования спектральных свойств оператора Дирака L_{bc} в лебеговых пространствах, рассматриваемого при различных краевых условиях: периодических, антиперодических и условиях Дирихле. Данный оператор представляет собой сумму свободного (называемого невозмущенным) оператора L_{bc}^0 и возмущения (называемого оператором умножения на потенциал), что позволяет применять непосредственно метод подобных операторов для получения некоторых результатов касательно спектральных свойств изучаемого оператора.

В то время, когда исследование оператора Дирака L_{bc} осуществляется общими методами теории возмущений возникает несколько затруднений, связанных с наличием таких свойств, как:

— расстояние между собственными значениями невозмущенного оператора L_{bc}^0 не уходит в бесконечность; — возмущение (оператор умножения на потенциал v) не является ограниченным оператором; — рассматриваемые операторы действуют не в гильбертовом пространстве. Здесь мы не можем использовать свойство невозмущенности оператора L_{bc}.

В отличии от [34], где существенно использовались методы гильбертовых пространств, в данной главе широко используются методы гармонического анализа. Следует также отметить статьи [14]-[16], где изучался оператор Дирака с потенциалом в пространстве $C[0,1]$, и была получена асимптотика собственных значений, а также построена асимптотика решений соответствующих параболических уравнений.

§2.1 Постановка задачи

Пусть $L_p[0,2\pi]$ — банахово пространство суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ функций.

Тогда определим через $L_p = L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$- банахово пространство (пространство Лебега) суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$ функций, для которых конечна величина

$$\|y\|_p = (\int\limits_0^{2\pi} \|y(t)\|_{\mathbb{C}^2}^p dt)^{1/p}, t \in [0,2\pi].$$

Символ $L_\infty = L_\infty([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ обозначает банахово пространство

существенно ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|y\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,2\pi]} \|y(t)\|_{\mathbb{C}^2}.$$

Через $C_b = C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных функций на отрезке $[0,2\pi]$ и со значениями в $\mathbb{C}^2$ с нормой

$$\|y\|_{C_b} = \sup_{t\in[0,2\pi]} \|y(t)\|_{\mathbb{C}^2}.$$

Символ $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ будем использовать для обозначения одного из введенных в рассмотрение пространств.

В случае, когда $\mathcal{F} = L_p$, определим пространство Соболева $W_p^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2), p \geq 1 : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y} \in L_p([0,2\pi],\mathbb{C}^2)\}$.

Через $C^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2) = \{y \in C_b([0,2\pi],\mathbb{C}^2) : \dot{y} \in C_b\}$ обозначим банахово пространство непрерывно дифференцируемых функций из C_b, которое нам понадобится при $\mathcal{F} = C_b$.

Символ $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ будем использовать для обозначения одного из введенных выше пространств $W_p^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$ или $C^1([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$.

Рассматривается оператор Дирака $L_{bc} : D(L_{bc}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$l(y) = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{dy}{dt} - vy, \tag{2.1}$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}, t \in [0,2\pi], \tag{2.2}$$

где $P, Q \in L_\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^1), \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел и $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$.

Область определения оператора L_{bc} задается с помощью одного из краевых условий :

(a) периодические (bc=per: $y(0) = y(2\pi)$);

(b) антипериодические (bc=ap: $y(0) = -y(2\pi)$);

(c) Дирихле (bc=dir: $y_1(0) = y_2(0), y_1(2\pi) = y_2(2\pi)$).

Для определения $D(L_{bc})$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix} X(t),$$

где $X(0) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -iP(t) \\ iQ(t) & 0 \end{pmatrix} X(t), X(0) = I.$$

Существует единственная операторнозначная функция $U : \mathbb{R} \to End\,\mathbb{C}^2$, являющаяся решением уравнения, обозначенного выше. Причем, согласно [21], операторнозначная функция U обратима.

Рассмотрим семейство эволюционных операторов

$$\mathcal{U}(t, s) = U(t)U^{-1}(s), t, s \in [0, 2\pi].$$

Функцию $y \in \mathcal{F}$ отнесем к области определения оператора Дирака

$$L = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} - v,$$

если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что имеет место равенство

$$y(t) = \mathcal{U}(t,0)y(0) + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds,$$

где y удовлетворяет одному из краевых условий per, ap, dir, определенных выше. Заметим, что функция y по определению непрерывна.

В статье [24] установлено, что спектр оператора L не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}$, в котором он действует. Поскольку метод подобных операторов относится к возмущениям, область определения которых содержит область определения невозмущенного оператора, то изучение оператора Дирака возможно осуществлять в пространстве $\mathcal{F}$ при условии, что $P, Q \in \mathcal{F}$. И ввиду сказанного спектры таких операторов совпадают.

Отметим также, что оператор Дирака, определенный выше, ранее не рассматривался (кроме как для случая $P, Q \in L_2[0, 2\pi]$).

Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то оператор L_{bc} будет обозначаться символом L^0_{bc}. Оператор L^0_{bc} будем называть *свободным оператором Дирака*, который при изучении оператора L_{bc} будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал v - возмущения.

Спектр $\sigma(L^0_{bc})$ и собственные функции для L^0 не зависят от выбора рассматриваемых пространств и легко определяются следующим образом:

(a) $\sigma(L^0_{per}) = \mathbb{Z}$; соответствующие собственные функции имеют

вид:

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}, e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$;

(b) $\sigma(L_{ap}^0) = \mathbb{Z} + 1/2$; соответствующие собственные функции имеют вид:

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}, e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_n = n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$;

(c) $\sigma(L_{dir}^0) = \mathbb{Z}$; каждое собственное значение простое и соответствующая нормированная собственная функция имеет вид $s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n^1 + e_n^2)$, где $\lambda_n = n, n \in \mathbb{Z}$.

§2.2 Метод подобных операторов для абстрактных операторов, близких к оператору Дирака.

В данном параграфе приведенную схему предварительного преобразования подобия и построения допустимой тройки будем применять для абстрактных операторов, которые по своим свойствам наиболее близки к изучаемому оператору Дирака.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $End\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов. Рассмотрим линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ с компактной резольвентой $R(\cdot, A) : \rho(A) \to End\mathcal{X}$.

Будем предполагать, что оператор iA обладает рядом свойств, близких к спектральным свойствам операторов L_{bc}, где $bc \in \{per, ap, dir\}$. Выпишем эти свойства.

1) Оператор iA является (инфинитезимальным) генератором периодической периода 2π изометрической сильно непрерывной группы операторов $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}$.

2) Спектр оператора A, обозначаемый через $\sigma(A)$, образует двустороннюю последовательность собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, вида:

$$\lambda_n = n + a, \quad n \in \mathbb{Z}, a \geq 0.$$

Таким образом, $a = 0$ в случае, если $A = L^0_{per}$ или $A = L^0_{dir}$; $a = \frac{1}{2}$, когда $A = L^0_{ap}$.

Пусть P_n — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$ и, следовательно, $AP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{Z}$.

Далее каждому оператору $X \in End\mathcal{X}$ сопоставим периодическую периода 2π сильно непрерывную операторнозначную функцию

$$t \mapsto T(t)XT(-t) : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тем самым возникает изометрическое периодическое периода 2π представление:

$$\widetilde{T} : \mathbb{R} \to End\mathcal{X}, \quad \widetilde{T}(t) = T(t)XT(-t), \quad t \in \mathbb{R},\ X \in End\mathcal{X}, \quad (2.3)$$

генератором которого является оператор ad_A со спектром $\sigma(ad_A) = i\mathbb{Z}$ [9], [11], [12], [63].

Для функции вида (2.3) рассмотрим ее ряд Фурье

$$T(t)XT(-t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n e^{int}, t \in \mathbb{R},$$

где коэффициент Фурье $X_n \in End\mathcal{X}$ имеет вид

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T(t)XT(-t)e^{-int}\,dt, n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ будем называть *рядом Фурье оператора* X (относительно группы операторов T), а операторы X_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициентами Фурье этого оператора.

Теперь перейдем к построению трансформаторов (операторов в пространстве операторов; терминология М.Г. Крейна) J, Γ : $End\mathcal{X} \to End\mathcal{X}$, пользуясь приведенной схемой в параграфе 1.3.

Введем в рассмотрение $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ — банахову алгебру периодических периода 2π локально суммируемых функций с нормой

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt, f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}),$$

и со свёрткой функций в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t-s)g(s)ds, t \in \mathbb{R}, f, g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

Банахово пространство $\mathcal{X}$ наделим структурой банахова $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ - модуля с помощью формулы

$$f * x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)T(-t)xdt, f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}), x \in \mathcal{X}.$$

На $End\mathcal{X}$ определим структуру банахова $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ - модуля через

$$\varphi X = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)T(t)XT(-t)xdt, \varphi \in L_1^{2\pi}(\mathbb{R}), X \in End\mathcal{X} \qquad (2.4)$$

причем $\|\varphi X\| \leq \|\varphi\|_1\|X\|$.

Тогда трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in End\mathcal{X}$ будем определять равенствами

$$JX = X_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T(t)XT(-t)\,dt = \varphi X, \varphi \equiv 1, \tag{2.5}$$

$$\Gamma X = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)T(t)XT(-t)\;dt = fX, \tag{2.6}$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — периодическая периода 2π функция вида $f(t) = i(t-\pi)$, $t \in [0, 2\pi)$.

Лемма 2.1. *Трансформаторы $J, \Gamma : End\mathcal{X} \to End\mathcal{X}$ ограничены и обладают свойствами:*

1) Имеет место оценка $\|\Gamma\| \leq \frac{\pi}{2}$;

2) $\Gamma X \in D(ad_A)$ для любого $X \in End\mathcal{X}$ и $ad_A\Gamma X = A\Gamma X - \Gamma XA = X - JX$.

Доказательство. 1) Необходимая оценка показывается непосредственно

$$\|\Gamma\| \leq \|f\| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (\pi - t)\;dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi} (t-\pi)\;dt = \frac{\pi}{2}.$$

2) Каждый коэффициент Фурье X_n, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $X \in End\mathcal{X}$ принадлежит $D(ad_A)$ и, в частности, $X_k D(A) \subset D(A)$. Тогда средние Чезаро $S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) X_k, n \geq 1$, также обладают свойством $S_n D(A) \subset D(A)$ и сильно сходятся к оператору X. Последовательность операторов $\Gamma S_n = \sum\limits_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) X_k, n \geq 1$, будет являться средними Чезаро для оператора ΓX, и поэтому также будет

сильно сходится к оператору ΓX. Поскольку $ad_A \Gamma S_n = S_n - X_0 = S_n - JX, n \geq 1$, то из замкнутости оператора ad_A в сильной операторной топологии пространства $End\mathcal{X}$ следует, что $\Gamma X \in D(ad_A)$ и $ad_A \Gamma X = X - JX$. $\square$

В дальнейшем для определения допустимой тройки для исследуемого оператора будет использоваться понятие аппроксимативной единицы.

Определение 2.1. Под *аппроксимативной единицей* (для свёртки) [1] понимается последовательность $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ элементов из L^1, таких что

$$\sup_m \|f_m\|_1 < \infty, \tag{2.7}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f_m(\tau) d\tau = 1, \tag{2.8}$$

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\delta}^{2\pi} |f_m(\tau)| d\tau = 0 \tag{2.9}$$

для любого фиксированного δ, удовлетворяющего условию $0 < \delta < 2\pi$.

Рассмотрим последовательность функций из $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ вида

$$f_m(t) = \frac{2}{\pi m t^2} \sin^2 \frac{mt}{2}, \tag{2.10}$$

которая может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f_m(t) = \sum_{|n|\leq m} (1 - \frac{|n|}{m}) e^{int}. \tag{2.11}$$

Поскольку последовательность функций (f_m) является положительно определенной, то $\|f_m\|_1 = \widehat{f_m}(0) = 1$. Таким образом, верно

свойство (2.7) из определения аппроксимативной единицы. Свойства (2.8), (2.9) определения 2.1 также легко проверяются. Поэтому (f_m) является аппроксимативной единицей в соответствии с определением 2.1.

Пусть x — некоторый вектор из $\mathcal{X}$, и пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Выберем и зафиксируем δ из интервала $(0, 2\pi]$ такое, что $\|T(-s)x - x\| \leq \varepsilon$ при $|x| \leq \delta$ (используется свойство сильной непрерывности представления T), и число $m \in \mathbb{N}$, такое (используется свойство (2.9)), что $\int\limits_{\delta}^{2\pi} f_m(\tau)d\tau < \varepsilon$.

Тогда из равенств

$$f_m * x - x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_m(s)T(-s)xds - x\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_m(s)ds =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_m(s)[T(-s)x - x]ds =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\delta} f_m(s)[T(-s)x - x]ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{2\pi} f_m(s)[T(-s)x - x]ds,$$

учитывая оценку $\|T(-s)x - x\| \leq 2 \parallel x \parallel$, $x \in \mathcal{X}$, получаем, что

$$\|f_m * x - x\| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\delta} f_m(s)\|T(-s)x - x\|ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{2\pi} f_m(s)\|T(-s)x - x\|ds \leq$$

$$\varepsilon + \frac{1}{\pi}\|x\|\int\limits_{\delta}^{2\pi} f_m(s)ds \leq \varepsilon + \frac{1}{\pi}\|x\|\varepsilon.$$

Таким образом, в силу определения 2.1 аппроксимативной единицы

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m * x - x\| = 0.$$

Теперь, используя последовательность функций (f_m), определенную равенством (2.11), и равенство $(fX)x = (\Gamma X)x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)T(t)XT(-t)xdt$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — периодическая периода 2π функция вида $f(t) = i\,(t-\pi)$, $t \in [0, 2\pi)$, определим последовательности трансформаторов:

$$J_m X = JX - J(f_m X) + f_m X = J(X - f_m X) + f_m X, \qquad (2.12)$$

$$\Gamma_m X = \Gamma X - \Gamma(f_m X) = \Gamma(X - f_m X) = (f*(1-f_m))X, X \in End\mathcal{X}, m \in \mathbb{Z}_+. \qquad (2.13)$$

Ясно, что $J_0 = J$, $\Gamma_0 = \Gamma$.

Лемма 2.2. *Для любого $m \geq 0$ тройка $(End\mathcal{X}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора A, причем $\|J_m\| \leq 3$; $\|\Gamma_m\| \leq \frac{10\pi}{m^{\frac{2}{3}}}$ для всех $m \geq 1$; $\|\Gamma_m\| \to 0, m \to \infty$.*

Доказательство. Покажем, что выполняются условия определения допустимой тройки (определение 1.23). Свойство 1) допустимой тройки следует из включения $End\mathcal{X} \subset \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$. Из непрерывности трансформаторов J и Γ, определённых равенствами (2.5), (2.6), следует непрерывность трансформаторов J_m и Γ_m. Значит выполняется и свойство 2) допустимой тройки.

Покажем выполнение свойста 3) допустимой тройки, т.е. докажем включения: $(\Gamma_m X)D(A) \subset D(A)$,$\Gamma_m X \in D(ad_A)$, причем

$$ad_A \Gamma_m X = A\Gamma_m X - (\Gamma_m X)A = X - J_m X \qquad \forall X \in End\mathcal{X}. \quad (2.14)$$

Равенство (2.14) получается следующим образом:

$$ad_A \Gamma_m X = ad_A(\Gamma X - \Gamma(f_m X)) = ad_A(\Gamma X) - ad_A(\Gamma(f_m X)) =$$

$$= A\Gamma X - (\Gamma X)A - A\Gamma(f_m X) + (\Gamma(f_m X))A = A\Gamma_m X - (\Gamma_m X)A,$$

$X \in End\mathcal{X}$. Также имеют место равенства:

$$ad_A \Gamma_m X = A\Gamma X - (\Gamma X)A - A\Gamma(f_m X) + (\Gamma(f_m X))A =$$

$$= X - JX - f_m X + J f_m X = X - J_m X,$$

$X \in End\mathcal{X}$.

Из равенства (2.14) получаем, что $\Gamma_m X \in End\mathcal{X}$ — единственное решение уравнения

$$ad_A Y = AY - YA = X - J_m X, \tag{2.15}$$

удовлетворяющее условию $J_m Y = 0$;

Оценив норму Γ_m, легко показать выполнения свойства 4) допустимой тройки.

$$\|\Gamma_m X\| = \|(f * (1 - f_m))X\| = \| \int\limits_{\mathbb{R}} f_m(s) S(-s) f X ds - fX\| =$$

$$\| \int\limits_{\mathbb{R}} f_m(s) S(-s) f X ds - \int\limits_{\mathbb{R}} f_m(s) ds f X\| = \| \int\limits_{\mathbb{R}} f_m(s)(S(-s)f - f) X ds\| \leq$$

$$\big(\| \int\limits_{|s| \leq \delta} f_m(s)(S(-s)f - f) ds\| + 2\|f\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} f_m(s) ds\big)\|X\|,$$

где (f_m) — аппроксимативная единица, определенная равенством (2.11), и $\|f\| = \pi^2$.

Тогда

$$\|\Gamma_m\| \leq 2\pi\delta^2 + \frac{8\pi}{m\delta}.$$

Так как полученная оценка верна для любого δ, то положив $\delta = m^{-\frac{1}{3}}$, получим

$$\|\Gamma_m\| \leq \frac{10\pi}{m^{\frac{2}{3}}}, m \geq 1.$$

Поскольку $\|\Gamma\| \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\|\Gamma_m X\| = \|\Gamma X - \Gamma(f_m X)\| \leq \big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\big)\|X\| = \pi\|X\|.$$

$X\Gamma_m Y$, $(\Gamma_m X)Y \in End\mathcal{X}$, $X, Y \in End\mathcal{X}$, и тогда существует постоянная $\gamma = \pi$ такая, что

$$\|\Gamma_m\| \leq \gamma, \qquad max\{\|X\Gamma_m Y\|, \|(\Gamma_m X)Y\|\} \leq \gamma\|X\|\|Y\|.$$

Покажем выполнение свойства 5), т.е. для любого $X \in End\mathcal{X}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|X(A - - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leq \varepsilon$. Из представления резольвенты оператора A

$$R(i\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} = \int_0^\infty T(t)e^{-\lambda t}dt,$$

следует, что

$$\|X(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1}\| = \|X\int_0^\infty T(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}dt\| \leq$$

$$\leq \|X\|\|\int_0^\infty T(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}dt\| \leq \varepsilon\|X\|.$$

Откуда непосредстенно следует, что λ_ε можно положить, как $\frac{1}{\varepsilon}$. □

Таким образом, следующая теорема является следствием теоремы 1.6 в силу выполнения всех ее условий.

Теорема 2.1. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{30\pi}{m^{2/3}}\|B\|_* < \frac{1}{4}.$$

Тогда оператор $A - B$, где $B \in End\mathcal{X}$, подобен оператору вида

$$A - J(\widetilde{X} - f_m\widetilde{X}) = A - J_m\widetilde{X} = A - B_0. \tag{2.16}$$

Оператор $\widetilde{X}$ является решением уравнения (1.5) , в котором $\Gamma = \Gamma_m$, $J = J_m$. Его можно найти методом последовательных приближений. Причем оператор $I + \Gamma_m \widetilde{X}$ осуществляет преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$.

Замечание 2.1. Оператор $A - B_0 = A - J_m\tilde{X} = A - J(\tilde{X} - f_m\tilde{X}) - f_m\tilde{X}$ перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)}, P_k, |k| \geq m+1$.

Выше указанное замечание верно, поскольку операторы JX, f_mX перестановочны для любого X со всеми проекторами $P_{(m)}, P_k, |k| \geq m+1$.

Достаточно доказать перестановочность JX с проекторами $P_k, |k| \geq m+1$, т.е. установить равенства

$$(JX)P_k = P_k(JX). \tag{2.17}$$

Поскольку $P_lP_m = \delta_{lm}P_l$, то имеют место равенства

$$P_l(JX)P_mx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T(t)P_lXP_mT(-t)xdt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ilt}P_lXP_mxe^{-imt}dt = \delta_{lm}P_lXP_m, X \in End\mathcal{X}, m, l \in \mathbb{Z}. \tag{2.18}$$

Для доказательства (2.17) будем использовать полученные равенства (2.18), а также рассмотрим ограниченную аппроксимативную единицу (f_n) вида (2.10) из алгебры $L_1^{2\pi}(\mathbb{R})$, для которой осуществляется суммирование по Чезаро. Тогда имеют место равенства

(при достаточно больших n).

$$(JX)P_kx \leftarrow f_n(JX)P_kx = \sum_{|m|\le n} \big(1 - \frac{|m|}{n}\big) P_m(JX)P_kx =$$
$$= \sum_{|m|\le n} \big(1 - \frac{|m|}{n}\big) \delta_{mk} P_m X P_k \to P_k X P_k, n \to \infty.$$

Аналогичным образом получаем

$$P_k(JX)x \leftarrow P_k(JX)f_nx \to P_kXP_k, n \to \infty$$

Из перестановочности $A - B_0$ с проекторами $P_k, |k| \ge m+1$, и представления проекторов $P_{(m)} = \sum\limits_{|k|\le m} P_k$ следует и перестановочность $A - B_0$ с проекторами $P_{(m)}$.

Замечание 2.2. Из замечания 2.1 следует, что подпространства $X_{(m)} = ImP_{(m)}, X_k = ImP_k, |k| \ge m+1$ являются инвариантными для оператора $A - B_0$. Из подобия операторов $A - B$, $A - B_0$ следует равенство $\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0)$. Оператор $A - B_0$, как и оператор $A - B$, имеет компактную резольвенту. Поэтому, если $\lambda_0 \in \sigma(A - B_0)$, то существует собственный вектор $x_0 \in D(A)$ такой, что $(A - B_0)x_0 = \lambda_0 x_0$. Тогда из вида оператора B_0 следуют равенства

$$A_{(m)}P_{(m)}x_0 = \lambda_0 P_{(m)}x_0, \quad A_kP_kx_0 = \lambda_0 P_kx_0, \quad |k| \ge m+1, \quad (2.19)$$

где $A_{(m)}$ — сужение оператора $A - B_0$ на $X_{(m)} = Im\, P_{(m)}$, A_k — сужение оператора $A - B_0$ на $X_k = Im\, P_k$, $|k| \ge m+1$. Рассмотрим ограниченную аппроксимативную единицу f_n вида (2.10). Тогда

$$f_nx_0 = \sum_{|k|\le n} \big(1 - \frac{|k|}{n}\big) P_kx_0 \to x_0, n \to \infty.$$

Из этого предельного соотношения следует, что хотя бы один из векторов $P_k x_0$, $|k| \geq m+1$, $P_{(m)} x_0$ отличен от нуля, и тогда λ_0 — собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов A_k, $|k| \geq m+1$, $A_{(m)}$.

Таким образом, имеет место равенство

$$\sigma(A-B) = \sigma(A-B_0) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \left(\bigcup_{|k| \geq m+1} \sigma(A_k) \right). \qquad (2.20)$$

Операторы $A_k, |k| \geq m+1$ можем представить в виде

$$A_k = (kI - P_k J \widetilde{X}) | X_k, |k| \geq m+1. \qquad (2.21)$$

Тогда имеет место следующее предельное соотношение

$$dist(\sigma(A_k), \{k\}) = \inf_{\lambda \in \sigma(A_k)} |k - \lambda| \leq \|P_k J \widetilde{X} P_k\| = \|P_k \widetilde{X} P_k\| \to 0, \quad |k| \to \infty.$$

Из приведенных рассуждений следует

Лемма 2.3. *Существует $n_0 \geq m+1$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, такое, что спектр оператора $A-B$ представим в виде объединения*

$$\sigma(A-B) = \sigma(A_{(n_0)}) \bigcup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma(A_k) \right) = \sigma_0 \bigcup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma_k \right) \qquad (2.22)$$

взаимно непересекающихся множеств σ_0, σ_k, $|k| \geq n_0+1$.

§2.3 Применение абстрактной схемы метода подобных операторов к оператору Дирака в лебеговых пространствах. Спектральные свойства оператора Дирака в лебеговых пространствах.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $L_{bc}, bc \in per, ap, dir$, свободный оператор L^0_{bc} будем считать невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также символом A. Таким образом, $L_{bc} = A - B$, где B — оператор умножения на потенциал v.

Всюду в дальнейшем $\mathcal{X} = \mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, и оно будет отождествляться с банаховым пространством $\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ периодических периода 2π функций одного из пространств, включенных в $\mathcal{F}$.

В пространстве $\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ определена группа операторов сдвигов функций $(S(t)x)(s) = x(s+t), s, t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. Функции P и Q будем рассматривать как элементы пространства $L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Замечание 2.3. Рассмотрим обратимую изометрию

$$U : \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \to \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2),$$

$$(Ux)(s) = (e^{-i\frac{s}{2}}x_1(s), e^{i\frac{s}{2}}x_2(s)), s \in [0, 2\pi], x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2).$$

Тогда $UD(L_{ap}) = D(L_{per})$ и имеет место равенство

$$L_{ap} = U^{-1}(L^0_{per} - \widehat{B} - I)U, \tag{2.23}$$

где $\widehat{B}$ — оператор умножения на потенциал $\widehat{v}(s) =$

$\begin{pmatrix} 0 & e^{-is}P(s) \\ e^{is}Q(s) & 0 \end{pmatrix}$, $s \in [0, 2\pi]$. Потому оператор L_{ap} подобен оператору $L^0_{per} - \widehat{B} - I$, и следовательно спектральные свойства оператора L_{ap} совпадают со спектральными свойствами оператора Дирака $L^0_{per} - \widehat{B}$. В итоге, можно остановиться только на изучении операторов L_{per} и L_{dir}.

Генератором группы изометрий $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{F}_{2\pi}$ является оператор iA. Если $bc = per$, то, поскольку оператор $\frac{d}{dt}$ является генератором группы $S : \mathbb{R} \to End\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, соответствующая группа изометрий $T = T_{per}$ имеет вид

$$T_{per}(t)x = (S(-t)x_1, S(t)x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Если $bc = ap$, то из равенства (2.23) следует, что

$$T_{ap}(t) = e^{-i\frac{t}{2}}U^{-1}T_{per}(t)U, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.25}$$

Для $bc = dir$ группа изометрий T_{dir} будет иметь вид

$$(T_{dir}x)(s) = \left(\frac{x_1(s-t) + x_2(t-s)}{2}, \frac{x_1(-s-t) + x_2(s+t)}{2}\right),$$
$$s, t \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2). \tag{2.26}$$

Представление (2.26) следует из равенств

$$T_{dir}(t)s_n = e^{int}s_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Обращаясь к формулам (2.5),(2.6),(2.24),(2.25), выпишем представления операторов $JB = J_{bc}B$, $\Gamma B = \Gamma_{bc}B$, где $bc \in \{per, dir\}$:

$$((J_{per}B)x)(s) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & P(\frac{s+\tau}{2}) \\ Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (2.27)$$

$$((\Gamma_{per}B)x)(s) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & f(\frac{s-\tau}{2})P(\frac{s+\tau}{2}) \\ f(\frac{\tau-s}{2})Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (2.28)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), s \in [0, 2\pi], f(t) = i(t-\pi), t \in [0, \pi), f \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

$$((J_{dir}B)x)(s) = \frac{1}{16\pi}\int\limits_0^{8\pi} \mathcal{K}_{dir}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), s \in [0, 2\pi], \quad (2.29)$$

$$((\Gamma_{dir}B)x)(s) = \frac{1}{16\pi}\int\limits_0^{8\pi} \widetilde{\mathcal{K}}_{dir}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), s \in [0, 2\pi], \quad (2.30)$$

где

$$\mathcal{K}_{dir}(s,\tau) = \begin{pmatrix} \Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ \Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{dir}(s,\tau) = \begin{pmatrix} f\left(\frac{s+\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{-s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(u) = \frac{P(u)+Q(-u)}{2}, \ \Phi \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2).$$

Таким образом, применима теорема 1.6, из которой получаем, что имеет место

Теорема 2.2. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{30\pi}{m^{2/3}}\|B\|_\infty < \frac{1}{4}.$$

Тогда оператор $L_{bc} = A - B$, где $A = L^0_{bc}$, B — оператор умножения на v, подобен оператору вида

$$A - J(\widetilde{X} - f_m\widetilde{X}) = A - J_m\widetilde{X} = A - B_0. \tag{2.31}$$

Оператор $\widetilde{X}$ — решение уравнения (1.5) , в котором $\Gamma = \Gamma_m$, $J = J_m$. Его можно найти методом последовательных приближений. Причем оператор $I + \Gamma_m\widetilde{X}$ осуществляет преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$.

В следующей теореме осуществляется предварительное преобразование подобия.

Теорема 2.3. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{10\pi}{m^{2/3}}\|B\|_\infty < 1$$

(т.е. оператор $I + \Gamma_k B$ обратим). Тогда оператор $L_{bc} = A - B$, где $A = L^0_{bc}$, B — оператор умножения на потенциал v, подобен оператору $\widetilde{L}_{bc} = L^0_{bc} - \widetilde{B}$, где

$$\widetilde{B} = J_m B + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B),$$

причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(A - \widetilde{B}).$$

Операторы $J_m B$, $\Gamma_m B$, $B\Gamma_m B$, $(\Gamma_m B)(J_m B)$, $\widetilde{B}$ являются компактными.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1.7.

Компактность операторов $J_mB, \Gamma_mB, B\Gamma_mB, (\Gamma_mB)(J_mB), \widetilde{B}$ следует из компактности операторов $\Gamma B, JB$.

Покажем, что операторы $\Gamma B, JB$ являются компактными.

Запишем оператор ΓB в виде

$$((\Gamma B)x)(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{s-\tau}{2})P(\frac{s+\tau}{2})x_2(\tau)d\tau \\ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{\tau-s}{2})Q(\frac{s+\tau}{2})x_1(\tau)d\tau \end{pmatrix},$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), s \in [0, 2\pi], f(t) = i(t-\pi), t \in [0, \pi), f \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Введем в рассмотрение последовательности функций:

$$P_k^{'} = f_k * P,\ Q_k^{'} = f_k * Q,\ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Очевидно, что $\|P_k^{'} - P\| \to 0,\ \|Q_k^{'} - Q\| \to 0,\ k \to \infty$.

Отметим, что оператор ΓB является пределом последовательности операторов

$$((\Gamma B)_k x)(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{s-\tau}{2})P_k^{'}(\frac{s+\tau}{2})x_2(\tau)d\tau \\ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{\tau-s}{2})Q_k^{'}(\frac{s+\tau}{2})x_1(\tau)d\tau \end{pmatrix},$$

где

$$P_k^{'}(\frac{s+\tau}{2}) = \sum_{j=-k}^{k}(1-\frac{|j|}{k})e^{ij\frac{s+\tau}{2}}\widehat{P}(k), P(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{P}(k)e^{ikt}, j, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0,$$

$$Q_k^{'}(\frac{s+\tau}{2}) = \sum_{j=-k}^{k}(1-\frac{|j|}{k})e^{ij\frac{s+\tau}{2}}\widehat{Q}(k), Q(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{Q}(k)e^{ikt}, j, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Тогда можем записать

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{s-\tau}{2})P_k^{'}(\frac{s+\tau}{2})x_2(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{s-\tau}{2})\sum_{j=-k}^{k}(1-\frac{|j|}{k})e^{ij\frac{s+\tau}{2}}\widehat{P}(k)x_2(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=-k}^{k}(1-\frac{|j|}{k})e^{ij\frac{s}{2}}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{s-\tau}{2})e^{ij\frac{\tau}{2}}\widehat{P}(k)x_2(\tau)d\tau$$

Отметим, что оператор $E_j = (1-\frac{|j|}{k})e^{ij\frac{s}{2}}$ является ограниченным оператором. Апроксимируя функцию f тригонометрическими многочленами по норме пространства, легко получить, что оператор $\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{s-\tau}{2})e^{ij\frac{\tau}{2}}x_2(\tau)d\tau$ есть предел операторов с конечным рангом, а значит является компактным.

Таким образом, оператор $\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{s-\tau}{2})P_k^{'}(\frac{s+\tau}{2})x_2(\tau)d\tau$ компактен, а значит и $\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{\tau-s}{2})P(\frac{s+\tau}{2})x_1(\tau)d\tau$ компактен в силу предела $\|P_k^{'}-P\| \to 0$, $k \to \infty$.

Аналогичным образом можно получить, что и оператор

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} f(\frac{\tau-s}{2})Q(\frac{s+\tau}{2})x_1(\tau)d\tau$$

является компактным. И также легко показать компактность оператора JB.

Компактность операторов J_mB, Γ_mB, $B\Gamma_mB$, $(\Gamma_mB)(J_mB)$, $\widetilde{B}$ непосредственно следует из компактности операторов $\Gamma B, JB$. $\square$

Замечание 2.4. Из подобия операторов $A-B$, $A-B_0$ получаем, что верны следующие представления возмущенных проекторов

$$\widetilde{P}_{(m)} = U^{-1}P_{(m)}U, \quad \widetilde{P}_k = U^{-1}P_kU, \quad |k| \geq m+1, \tag{2.32}$$

где $\widetilde{P}_{(m)}$ — проектор на подпространство $U^{-1}X_{(m)}$, $\widetilde{P}_k$ — проектор на подпространство $U^{-1}X_k$, и $U = I + \Gamma_m\widetilde{X}$.

Из спектрального разложения (2.20) очевидным образом следует

Теорема 2.4. *Дифференциальный оператор $L_{bc} : D(L_{bc}) \in \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что $\sigma(L_{bc})$ представим в виде*

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma_{(m)} \bigcup (\bigcup_{|n|\geq m+1} \sigma_n), \tag{2.33}$$

где $\sigma_{(m)}$-конечное множество, а $\sigma_n, |n| \geq m+1$ определяются равенствами

$$\sigma_n = \{n + \beta_n^{\pm}\}, \lim_{n\to\infty} \beta_n^{\pm} = 0, \textit{если } bc = per;$$

$$\sigma_n = \{n + 1/2 + \alpha_n^{\pm}\}, \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\pm} = 0, \textit{если } bc = ap;$$

$$\sigma_n = \{n + \gamma_n\}, \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \textit{если } bc = dir.$$

Отметим, что если рассматривать потенциал в пространстве $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$, то для асимптотики спектра можно использовать результаты статьи [63].

Следствие 2.1. В случае периодических краевых условий верно

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{\lambda_n^{'} + \lambda_n^{''}}{2} - 2n \mid = 0, n \in \mathbb{Z}, \tag{2.34}$$

где $\lambda_n^{'}, \lambda_n^{''}$ — собственные значения оператора $L_{bc} = A - B$.

Пусть $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, |n| \geq m+1,-$ спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L_{bc} и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, |n| \geq m+1$, соответственно.

Теорема 2.5. *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L_{bc} и L^0_{bc} :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\| = 0, \tag{2.35}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} (1-\frac{|k|}{n})\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} (1-\frac{|k|}{n})P_k\| = 0. \tag{2.36}$$

Доказательство. Докажем сначала равенство (2.35).

Поскольку $\widetilde{P}_n = U^{-1}P_nU$, где $U = I + \Gamma_m\widetilde{X}$ — оператор, осуществляющий преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$, тогда

$$\widetilde{P}_n = U^{-1}P_nU = (I + \Gamma_m\widetilde{X})^{-1}P_n(I + \Gamma_m\widetilde{X}) =$$

$$= (I + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\Gamma_m\widetilde{X})^k)P_n(I + \Gamma_m\widetilde{X}) =$$

$$= P_n + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\Gamma_m\widetilde{X})^kP_n + P_n\Gamma_m\widetilde{X} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\Gamma_m\widetilde{X})^kP_n(\Gamma_m\widetilde{X}).$$

Теперь рассмотрим

$$\widetilde{P}_n - P_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\Gamma_m\widetilde{X})^kP_n + P_n\Gamma_m\widetilde{X} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\Gamma_m\widetilde{X})^kP_n(\Gamma_m\widetilde{X}) =$$

$$= T_m(\Gamma_m\widetilde{X})P_n + P_n(\Gamma_m\widetilde{X}) + T_m(\Gamma_m\widetilde{X})P_n(\Gamma_m\widetilde{X}),$$

где $T_m = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(\Gamma_m\widetilde{X})^k, k, m \in \mathbb{Z}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_m(\Gamma_m\widetilde{X})P_n + P_n(\Gamma_m\widetilde{X}) + T_m(\Gamma_m\widetilde{X})P_n(\Gamma_m\widetilde{X})\|. \tag{2.37}$$

Поскольку $\Gamma_m\widetilde{X}$ — компактный оператор, то

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(\Gamma_m\widetilde{X})\| = \lim_{n\to\infty}\|(\Gamma_m\widetilde{X})P_n\| = 0. \tag{2.38}$$

Таким образом, из (2.37), (2.38) легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{P}_n - P_n\| = 0.$$

Для доказательства равенства (2.36) будем использовать:

$$\sum_{|k|=m+1}^{n}\big(1-\frac{|k|}{n}\big)\widetilde{P}_k = U^{-1}\big(\sum_{|k|=m+1}^{n}\big(1-\frac{|k|}{n}\big)P_k\big)U,$$

$$\widetilde{P}_{(m)} = U^{-1}P_{(m)}U.$$

Тогда

$$\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n}\big(1-\frac{|k|}{n}\big)\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n}\big(1-\frac{|k|}{n}\big)P_k =$$

$$= (U^{-1}P_{(m)}U - P_m) + (U^{-1}(\sum_{|k|=m+1}^{n}(1-\tfrac{|k|}{n})P_k)U - \sum_{|k|=m+1}^{n}(1-\tfrac{|k|}{n})P_k),$$

где $U = I + \Gamma_m\widetilde{X}$, и равенство (2.36) становится очевидным. $\square$

Глава 3

Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциальных операторов с инволюцией

Данная глава посвящена дальнейшему развитию метода подобных операторов и его применению к исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов с инволюцией L, рассматриваемых в гильбертовых пространствах и задаваемых на определенном промежутке периодическими краевыми условиями. Данный оператор представляет собой сумму свободного (невозмущенного оператора) L^0 и возмущения (оператора умножения на потенциал). Такое представление исследуемого оператора позволяет применять непосредственно метод подобных операторов для получения результатов, связанных со спектральными свойствами изучаемого оператора.

Следует отметить, что некоторые результаты, связанные со спектральными свойствами дифференциального оператора с инволюцией были получены с помощью метода Фурье в статьях [14] - [15]. Однако метод подобных операторов, применяемый в данной главе, позволяет получить более детальные результаты в области спектральных свойств изучаемого оператора.

§3.1 Постановка задачи

Пусть $L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ - гильбертово пространство измеримых на $[0,\omega]$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ определяется следующим образом

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{m}(x_k,y_k), x=(x_1,...,x_m), y=(y_1,...,y_m)\in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m),$$

где $(x_k,y_k)=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}x_k(\tau)\overline{y_k(\tau)}d\tau, k=1,...,m$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве комплексных функций $L_2[0,\omega]$.

Через $W_2^1([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ обозначим пространство Соболева $\{y\in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m) : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y}\in([0,\omega],\mathbb{C}^m)\}$.

Рассматривается линейный оператор

$$L : D(L)\subset L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)\to L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m),$$

порожденный дифференциальным выражением

$$l(y)=y'(x)-Q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], Q\in L_2([0,\omega], End\,\mathbb{C}^m), \quad (3.1)$$

с областью определения

$$y \in D(L) = \{y \in W_2^1([0,\omega],\mathbb{C}^m) : y(0) = y(\omega)\}.$$

Тогда изучаемый оператор L представим в виде

$$Ly = L^0 y - Vy, \tag{3.2}$$

где $(L^0 y)(x) = y'(x)$ будем называть свободным оператором, играющим роль невозмущенного оператора, а $(Vy)(x) = Q(x)y(\omega - x), x \in [0,\omega], y \in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ - возмущением.

Легко описывается спектр $\sigma(L^0)$ оператора L^0. Он состоит из собственных значений вида

$$\lambda_n = i\frac{2\pi n}{\omega}, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Соответствующее собственное подпространство есть $E_n^0 = Span\{e_n^1, ..., e_n^m\}$, где

$$e_n^1 = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t} e_1, ..., e_n^m = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t} e_m,$$

$e_1, ..., e_m$ - стандартный базис в $\mathbb{C}^m$.

Проекторы Рисса $P_n, n \in \mathbb{Z}$, построенные по множествам $\{\lambda_n\}$, для любого $x \in L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ имеют вид

$$P_n x(t) = \left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\right)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, n \in \mathbb{Z}.$$

§3.2 Метод подобных операторов для абстрактных операторов, близких к дифференциальному оператору с инволюцией

В данном параграфе приведенную схему предварительного преобразования подобия и построения допустимой тройки будем применять для абстрактных операторов, которые по своим свойствам наиболее близки к изучаемому дифференциальному оператору с инволюцией.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта - Шмидта из алгебры $End\,\mathcal{H}$. Символ$\|X\|_2$ используется для обозначения нормы Гильберта-Шмидта оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т.е. $\|X\|_2 = \sqrt{\|XX^*\|}$.

Пусть $A = A^* : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой $R(\cdot, A) : \rho(A) \to End\,\mathcal{H}$. Будем предполагать, что оператор iA обладает рядом свойств, близких к спектральным свойствам изучаемого оператора L.

1) Оператор iA является (инфинитезимальным) генератором группы изометрий $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{H}$, причем имеет место следующее спектральное представление операторов этой группы изометрий

$$T(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\lambda_n t} P_n x, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{X}.$$

2) Спектр $\sigma(A)$ оператора A образует последовательность простых собственных значений λ_n вида

$$\lambda_n = i\frac{2\pi n}{\omega}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть P_n — ортогональный проектор Рисса, построенный по од-

ноточечному множеству $\{\lambda_n\}$ из $\sigma(A)$ и, следовательно, $AP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{Z}$.

Теперь, следуя приведенной в параграфе 1.3 схеме, приступим к построению трансформаторов (операторов в пространстве операторов; терминология М.Г.Крейна) $J, \Gamma : \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Для этого будем использовать некоторые подходы из [2], связанные с гармоническим анализом линейных операторов.

Будем определять эти трансформаторы на алгебре $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В таком случае каждому оператору $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ сопоставим периодическую периода ω непрерывную операторнозначную функцию

$$t \mapsto T(t)XT(-t) : \mathbb{R} \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тем самым возникает изометрическое периодическое периода ω представление

$$\widetilde{T} : \mathbb{R} \to End(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})), \quad \widetilde{T}(t)X = T(t)XT(-t), \quad t \in \mathbb{R},\ X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \tag{3.4}$$

При этом функция $t \mapsto T(t)XT(-t) : \mathbb{R} \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ непрерывна.

Для этой функции рассмотрим ряд Фурье

$$T(t)XT(-t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n e^{i\lambda_n t}, t \in \mathbb{R},$$

где коэффициент Фурье $X_n \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет вид

$$X_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)XT(-t)e^{-i\lambda_n t}\,dt, n \in \mathbb{Z}.$$

В таком случае ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ назовем *рядом Фурье оператора* X (относительно группы операторов T), а операторы X_n, $n \in \mathbb{Z}$,— коэффициентами Фурье этого оператора.

Данный ряд суммируем к X методом Чезаро, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)X_k = X.$$

Трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определим равенствами

$$JX = X_0 = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} T(t)XT(-t)\,dt, \tag{3.5}$$

$$\Gamma X = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f(t)T(t)XT(-t)\,dt \sim \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\frac{\omega}{2\pi n}X_n x, \tag{3.6}$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — периодическая периода ω функция вида $f(t) = i\left(t-\frac{\omega}{2}\right)$, $t \in [0,\omega)$.

Лемма 3.1. *[63] Трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ ограничены и обладают свойствами:*

1) J — проектор, $\|J\| = 1$, и он представим в виде безусловно сходящегося в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ ряда

$$JX = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n X P_n = X_0, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}); \tag{3.7}$$

2) Имеет место оценка $\|\Gamma\| \le \frac{\omega}{2\pi}$;

3) $\Gamma X \in D(ad_A)$ для любого $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $ad_A\Gamma X = A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX$.

Далее будем рассматривать последовательности трансформаторов J_m, Γ_m, $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, принадлежащие $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и определяемые равенствами:

$$J_m X = P_{(m)}XP_{(m)} + \sum_{|k|\ge m+1} P_k X P_k = J(X - P_{(m)}XP_{(m)}) + P_{(m)}XP_{(m)}, \tag{3.8}$$

$$\Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}), \tag{3.9}$$

где $P_{(m)} = \sum\limits_{|k|\le m} P_k$ и $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что $J_0 = J$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Таким образом, в дальнейшем в качестве пространства допустимых возмущений для оператора A будет рассматриваться идеал операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и некоторые его подпространства, которые строятся по рассматриваемому возмущению $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ оператора A.

Для любого оператора $0 \ne X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим двустороннюю последовательность $(\alpha_n(X))$ вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max\left\{ \left(\sum_{|k|\ge|n|} \|XP_k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{4}}, \left(\sum_{|k|\ge|n|} \|P_k X\|_2^2 \right)^{\frac{1}{4}} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Отметим, что такая последовательность обладает свойствами:

1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\lim\limits_{|n|\to\infty} \alpha_n(X) = 0$;

3) $\alpha_n(X) \le 1$;

4) $\alpha_n(X) \ge \alpha_{n+1}(X)$, $n \ge 0$;

5) $\alpha_n(X) \ne 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ если и только если $P_{(m)} X P_{(m)} \ne X$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, где $P_{(m)} = \sum\limits_{|k|\le m} P_k$;

6) конечна величина $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \alpha_n(X)\ne 0}} \frac{\|XP_n\|_2^2 + \|P_n X\|_2^2}{\alpha_n(X)^2}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор

$$f_X(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(X) P_n \in End\mathcal{H}, \tag{3.11}$$

являющийся функцией f_X от оператора A, где $f_X : \sigma(A) \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $f_X(\lambda_n) = \alpha_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что $\|f_X(A)\| \leq \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n(X)| = 1$.

Если $P_{(m)}XP_{(m)} \neq X$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$, то этот оператор является положительно определенным. Это свойство будет считаться всюду выполненным для рассматриваемого возмущения $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В противном случае (т.е. при условии $P_{(m)}BP_{(m)} = B$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$) изучение оператора $A - B$ сводится к изучению оператора конечного ранга $(A - B)|\mathcal{H}_m$ (сужению оператора $A - B$ на конечномерное подпространство $\mathcal{H}_m = ImP_{(m)}$).

В дальнейшем оператор $f_B(A)$ будем обозначать через $f(A)$. Введем в рассмотрение банахово пространство операторов $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представления

$$X = X_l f(A), \quad X = f(A)X_r, \tag{3.12}$$

для некоторых $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и с нормой $\|X\|_* = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Ясно, что $\|X\|_2 \leq \|X\|_*$ для любого $X \in \mathfrak{U}(f)$.

Замечание 3.1. Пусть $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда X представим в виде $X = X_l f_X(A) = f_X(A)X_r$, где $X_l = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} XP_n$, $X_r = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(X)} P_n X$, причем $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Поскольку оператор B представим в виде $B = B_l f(A) = f(A)B_r$, $B_l = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(B)} BP_n$, $B_r = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n(B)} P_n B$,$B_l, B_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то в силу замечания 3.1 возмущение B принадлежит $\mathfrak{U}(f)$.

Непосредственно из определения трансформаторов $J, \Gamma \in End\,\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что подпространство $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является

для них инвариантным, причем

$$J(\widetilde{X}f(A)) = J(\widetilde{X})f(A), \quad J(f(A)\widetilde{X}) = f(A)J(\widetilde{X}),$$

$$\Gamma(\widetilde{X}f(A)) = \Gamma(\widetilde{X})f(A), \quad \Gamma(f(A)\widetilde{X}) = f(A)\Gamma(\widetilde{X}), \quad \widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Таким образом, из равенства $\|J_m\| = 1$ следует, что выполнено условие теоремы 1.6, из которой непосредственно следует

Теорема 3.1. *Оператор $A - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, подобен оператору вида*

$$A - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{|k|\geq m+1} P_k\widetilde{X}P_k = A - J_m\widetilde{X} = A - B_0, \qquad (3.13)$$

для любого числа $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, для которого верна оценка

$$\|B\|_*\|\Gamma_m\| < \frac{1}{4}. \qquad (3.14)$$

Оператор $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, — решение уравнения (1.5), в котором $\Gamma = \Gamma_m$, $J = J_m$. Его можно найти методом последовательных приближений. Преобразование подобия оператора $A-B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m\widetilde{X}$.

Замечание 3.2. Из теоремы 3.1 и леммы 1.1 следует, что оператор $A - B_0 = A - J_m\widetilde{X}$ перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)} = \sum\limits_{|k|\leq m} P_k$, P_k, $|k| \geq m + 1$. Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = ImP_{(m)}$, $\mathcal{H}_k = ImP_k$, $|k| \geq m + 1$, являются инвариантными для оператора $A - B_0$. Из подобия операторов $A - B$, $A - B_0$ следует равенство $\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0)$. Оператор $A - B_0$ имеет (как и оператор $A - B$) компактную резольвенту. Поэтому, если

$\lambda_0 \in \sigma(A - B_0)$, то существует собственный вектор $x_0 \in D(A)$ такой, что $(A - B_0)x_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, из вида оператора B_0 следуют равенства

$$A_{(m)}P_{(m)}x_0 = \lambda_0 P_{(m)}x_0, \quad A_k P_k x_0 = \lambda_0 P_k x_0, \quad |k| \geq m+1, \quad (3.15)$$

где $A_{(m)}$ — сужение оператора $A - B_0$ на $\mathcal{H}_{(m)} = ImP_{(m)}$, A_k — сужение оператора $A - B_0$ на $\mathcal{H}_k$, $|k| \geq m+1$. Ввиду того, что $I = P_{(m)} + \sum\limits_{|k|\geq m+1} P_k$ (система проекторов P_k, $|k| \geq m+1$, $P_{(m)}$, образует разложение единицы), то из (3.15) следует, что хотя бы один из векторов $P_k x_0$, $|k| \geq m+1$, $P_{(m)}x_0$ ненулевой. Следовательно, λ_0 — собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов A_k, $|k| \geq m+1$, $A_{(m)}$. Очевидно обратное включение

$$\sigma(A_{(m)}) \bigcup \left(\bigcup_{|k|\geq m+1} \sigma(A_k) \right) \subset \sigma(A - B_0) = \sigma(A - B).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \left(\bigcup_{|k|\geq m+1} \sigma(A_k) \right). \quad (3.16)$$

Из представления операторов A_k, $|k| \geq m+1$, в виде

$$A_k = (kI - P_k \widetilde{X})|\mathcal{H}_k, \quad |k| \geq m+1$$

и принадлежности оператора $\widetilde{X}$ идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $\lim\limits_{|k|\to\infty} \|P_k \widetilde{X} P_k\| = 0$, поэтому

$$dist(\sigma(A_k), \{k\}) = \inf_{\lambda\in\sigma(A_k)} |k - \lambda| \leq \|P_k \widetilde{X} P_k\| \to 0, \quad |k| \to \infty.$$

Следовательно, из (3.16) следует

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие (3.14) теоремы 3.1. Тогда существует $n_0 \geq m+1$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, такое, что спектр оператора $A-B$ представим в виде объединения*

$$\sigma(A-B) = \sigma(A_{(n_0)}) \bigcup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma(A_k) \right) = \sigma_0 \bigcup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma_k \right) \tag{3.17}$$

взаимно непересекающихся множеств σ_0, σ_k, $|k| \geq n_0+1$, где σ_0- конечное множество и

$$\sum_{|k| \geq n_0+1} dist(\{k\}, \sigma_k)^2 < \infty.$$

Замечание 3.3. Пусть выполнено условие (3.14) теоремы 3.1. Из подобия операторов $A-B$, $A-B_0$ и равенства (1.3) получаем, что верны следующие представления возмущенных проекторов

$$\widetilde{P}_{(m)} = U^{-1} P_{(m)} U, \quad \widetilde{P}_k = U^{-1} P_k U, \quad |k| \geq m+1, \tag{3.18}$$

где $\widetilde{P}_{(m)}$ — проектор на подпространство $U^{-1}\mathcal{H}_{(m)}$, $\widetilde{P}_k$ — проектор на подпространство $U^{-1}\mathcal{H}_k$, и $U = I + \Gamma_m \widetilde{X}$.

Представление (3.16) спектра оператора $A-B$ и представление проекторов (3.18) позволяют получать различные спектральные свойства оператора $A-B$ и, в частности, получать оценки его собственных значений и соответствующих проекторов.

§3.3 Применение абстрактной схемы метода подобных операторов к дифференциальному оператору с инволюцией. Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией.

Для исследования спектральных свойств оператора L будем использовать также метод подобных операторов. В связи с этим будем рассматривать оператор L в виде $L = A - V$, где свободный оператор $L^0 = A$ является невозмущенным оператором, а V - возмущением.

Всюду в дальнейшем $L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ будет отождествляться с гильбертовым пространством $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}(\mathbb{R},\mathbb{C}^m)$ периодических периода ω функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$.

Определим через $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ — идеал операторов Гильберта - Шмидта из алгебры $End\, L_{2,\omega}$. И введем в рассмотрение пространство $L_{2,\omega}(\mathbb{R}, End\,\mathbb{C}^m)$ со скалярным произведением

$$(Q_1, Q_2) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega tr(Q_1(t)Q_2^*(t))dt, Q_1, Q_2 \in L_{2,\omega}(\mathbb{R}, End\,\mathbb{C}^m).$$

Тогда функцию Q будем рассматривать как элемент пространства $L_{2,\omega}(\mathbb{R}, End\,\mathbb{C}^m)$.

Теперь, пользуясь формулами (3.5), (3.6), выпишем представ-

ления для операторов JV, ΓV, $V\Gamma V$.

$$((JV)y)(s) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} Q\left(\frac{s-\tau+\omega}{2}\right)y(\tau)d\tau, \tag{3.19}$$

$$((\Gamma V)y)(s) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} f\left(\frac{\omega-s-\tau}{2}\right)Q\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)y(\tau)d\tau, \tag{3.20}$$

$$((V\Gamma V)y)(s) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)Q\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)Q(s)y(\tau)d\tau, \tag{3.21}$$

где $y \in L_{2,\omega}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$, $s \in [0, \omega)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — периодическая периода ω функция вида $f(t) = i\left(t - \frac{\omega}{2}\right)$, $t \in [0, \omega)$.

Ввиду ограниченности функции f, принадлежности $Q \in L_{2,\omega}(\mathbb{R}, End\,\mathbb{C}^m)$ и стандартного критерия принадлежности интегрального оператора идеалу операторов Гильберта - Шмидта, из приведенных формул (3.19)-(3.21) следует

Лемма 3.2. *Интегральные операторы JV, ΓV, $V\Gamma V$, $(\Gamma V)JV$ являются операторами Гильберта-Шмидта (элементами пространства $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$).*

Далее определим систему ортопроекторов $P_n \in End\,L_{2,\omega}$ в виде

$$P_n x(t) = \left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} x(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\right)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, n \in \mathbb{Z}, x \in L_{2,\omega}. \tag{3.22}$$

В таком случае любая функция $x \in L_{2,\omega}$ может быть представлена в виде

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(P_n x)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},$$

где $x_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau$.

Также легко может быть получено представление семейства операторов $P_jVP_n, j, n \in \mathbb{Z}$, в виде

$$(P_jVP_n)x(t) = Q_{n+j}x_ne^{i\frac{2\pi j}{\omega}t}, t \in \mathbb{R}, j, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.23}$$

В частности при $j = n$ получаем

$$(P_nVP_nx)(t) = Q_{2n}x_ne^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Далее рассмотрим последовательности операторов J_mV, Γ_mV, определяемые следующим образом:

$$J_mV = P_{(m)}VP_{(m)} + \sum_{|k|\geq m+1} P_kVP_k = JV - P_{(m)}JVP_{(m)} + P_{(m)}VP_{(m)}, \tag{3.25}$$

$$\Gamma_mV = \Gamma V - P_{(m)}\Gamma VP_{(m)}. \tag{3.26}$$

Легко видеть, что $J_0V = JV$, $\Gamma_0V = \Gamma V$.

Из равенств (3.25), (3.26)и леммы 3.2 непосредственно следует, что $J_mV, \Gamma_mV \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$. Отсюда также следует

Лемма 3.3. *Существует $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что операторы V, J_mV, Γ_mV, $m \geq m_0$, удовлетворяют условиям предположения 1.1, где $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$.*

Теорема 3.3. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенству*

$$\|\Gamma_mV\|_2 < 1,$$

(т.е. оператор $I + \Gamma_mV$ обратим), где Γ_mV принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ операторов Гильберта-Шмидта, и $\|\Gamma_mV\|_2$ - норма

Гильберта-Шмидта, тогда оператор $L = A - V$ подобен оператору $\widetilde{L} = A - B$, где

$$B = J_m V + (I + \Gamma_m V)^{-1}(V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V), \tag{3.27}$$

причем имеет место равенство

$$(A - V)(I + \Gamma_m V) = (I + \Gamma_m V)(A - B).$$

Операторы $J_m V$, $\Gamma_m V$, $V\Gamma_m V$, $(\Gamma_m V)(J_m V)$, B являются операторами Гильберта-Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$. Оператор B из (3.27) представим в виде

$$B = JV + V\Gamma V - (\Gamma V)JV + \widetilde{C}, \tag{3.28}$$

где оператор $\widetilde{C}$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\omega})$.

Доказательство. Все утверждения данной теоремы следуют непосредственно из того, что операторы V, $J_m V$, $\Gamma_m V$ удовлетворяют условиям предположения 1.1. Оператор $\widetilde{C}$ из (3.28) имеет вид

$$\widetilde{C} = -(I + \Gamma_m V)^{-1}(\Gamma_m V)(V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V) + C_1,$$

где оператор $C_1 = V\Gamma_m V - V\Gamma V - (\Gamma_m V)J_m V + (\Gamma V)JV + J_m V - JV$ имеет конечный ранг и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{S}_1(L_{2,\omega})$. Из этого представления следует, что оператор $\widetilde{C}$, являясь суммой оператора конечного ранга и произведения двух операторов Гильберта—Шмидта, принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\omega})$. □

Теорема 3.4. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенству $\|\Gamma_m V\|_2 < 1$, и выполнена оценка*

$$\|V\|_2 \|\Gamma_m\| < \frac{1}{4}, \tag{3.29}$$

тогда оператор $L = A - V$ *подобен оператору вида*

$$A - V_0 = A - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{|j|\geq m+1} P_j\widetilde{X}P_j = A - J_m\widetilde{X}. \qquad (3.30)$$

Оператор $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ *— решение уравнения (1.5), в котором* $\Gamma = \Gamma_m$, $J = J_m$, $B = V$. *Его можно найти методом последовательных приближений. Оператор* $I+\Gamma_m\widetilde{X}$ *обратим и преобразование подобия оператора* L *в оператор* $A-V_0$ *осуществляет оператор вида*

$$U_{km} = (I + \Gamma_k V)(I + \Gamma_m\widetilde{X}) = I + V_{km}, \qquad (3.31)$$

где $V_{km} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$. *Кроме того, оператор* $V_0 = J_m\widetilde{X}$ *представим в виде*

$$V_0 = J_mV + J_m(V\Gamma V) + T_0 = JV + J(V\Gamma V) + T_1, \qquad (3.32)$$

где T_0, T_1 *— ядерные операторы идеала* $\mathfrak{S}_1(L_{2,\omega})$, *причем* $J_mT_j = T_j, j = 0, 1$.

Доказательство. Существование числа $m \in \mathbb{Z}_+$, для которого $\|\Gamma_mV\|_2 < 1$, следует из теоремы 3.3, согласно которой оператор $A - V$ подобен оператору вида $A - B$, где оператор $B \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ определен равенством (3.28). Поскольку $\|J_m\| = 1$, тогда выполнено условие теоремы 1.6, из которой следует подобие оператора $A-B$ (и, следовательно, оператора $A-V$) оператору вида (3.30), где оператор $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ — решение уравнения (1.5).

Применяя к обеим частям этого уравнения трансформатор J_m, и при этом используя следующие факты: произведение двух операторов Гильберта—Шмидта является ядерным оператором и операторы $J_mX - JX$, $\Gamma_mX - \Gamma X$, $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$, $m \geq 0$, являются

операторами конечного ранга, а также, что

$$J_m((\Gamma_m V)J_m V) = 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

получаем следующее представление

$$V_0 = J_m\widetilde{X} = J_m(B\Gamma_m\widetilde{X}) + J_m B = J_m B + J_m(B\Gamma_m B) +$$
$$+ J_m(B\Gamma_m(\widetilde{X} - B)) = J_m B + J_m(B\Gamma B) + K =$$
$$= J_m V + J_m(V\Gamma V) + T_0 = JV + J(V\Gamma V) + T_1,$$

где $K, T_0, T_1 \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\omega})$. Ясно, что $J_m T_j = T_j$, $j = 0, 1$.

Оператор преобразования оператора $A - V$ в оператор $A - V_0$ совпадает с оператором U_{km} вида (3.31). Так как $\Gamma_m V, \Gamma_m\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$, то оператор V_{km} из (3.31) принадлежит $\mathfrak{S}_1(L_{2,\omega})$. $\square$

Определение 3.1. Пусть оператор $C \in End\,\mathbb{C}^m$. Тогда ***взвешенное среднее*** для оператора C определяется, как

$$\lambda_C = \frac{tr\,C}{m}, \tag{3.33}$$

где $tr\,C = \lambda_1 + ... + \lambda_m$ - след оператора C, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ - собственные значения оператора C с учетом алгебраической кратности.

Далее для получения представления спектра исследуемого оператора введем в рассмотрение операторы $\Phi_n \in End\,\mathbb{C}^m, n, l \in \mathbb{Z}, |n| > l + 1$

$$\Phi_n = Q_{2n} + \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(Q_{2n+k})^2 + \Lambda_n, \tag{3.34}$$

где $\mathbb{C}^m$, $\sum\limits_{|n|\geq l+1} \| P_n T_1 P_n \| \leq \sum\limits_{|n|\geq l+1} \| \Lambda_n \|_2 < \infty$.

Тогда в силу определения 3 очевидно, что

$$\lambda_{\Phi_n} = \frac{tr\,\Phi_n}{m} = \frac{\lambda_n^{(1)} + ... + \lambda_n^{(m)}}{m}, \tag{3.35}$$

где $\sigma(\Phi_n) = \{\lambda_n^{(1)}, ..., \lambda_n^{(m)}\}$ и последовательность $(\lambda_n^{(k)})$ является суммируемой с квадратом, т.е. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \lambda_n^{(k)} \mid^2 < \infty$.

Основным результатом статьи является теорема, полученная с помощью метода подобных операторов.

Теорема 3.5. *Оператор* $L : D(L) \subset L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m) \to L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$ *является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что его спектр* $\sigma(L)$ *представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(l)} \bigcup \left(\bigcup_{|n|\geq l+1} \sigma_n \right), \tag{3.36}$$

где $\sigma_{(l)}$ *- конечное множество с числом точек меньшим или равным* l*, а*

$$\sigma_n = \sigma\left(i\frac{2\pi n}{\omega} I_n - \Phi_n \right), |n| \geq l+1.$$

Кроме того для взвешенного среднего верна следующая оценка

$$\left| \lambda_{\Phi_n} - \frac{trQ_{2n} + tr(\frac{\omega}{2\pi i} \sum\limits_{k\neq 0} \frac{1}{k}(Q_{2n+k})^2)}{m} \right| \leq \beta_n, |n| \geq l+1, \tag{3.37}$$

(β_n) — суммируемая последовательность, т.е. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \beta_n \mid < \infty$.

Далее рассматривается число $m \in \mathbb{Z}_+$, для которого выполнено условие (3.29) теоремы 3.4. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ (не обязательно конечного) символом $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} P_k$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначим величину $\max\limits_{n\in\Omega} \alpha_n(X)$.

Лемма 3.4. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ имеет место оценка*

$$\max\{\|P(\Omega)X\|_2, \|XP(\Omega)\|_2\} \le C(X)\alpha(\Omega, X),$$

где $C(X) > 0$ зависит от оператора X и не зависит от выбора Ω.

Доказательство. В силу замечания 3.1, оператор X представим в виде $X = X_l f_X(A)$, $X = f_X(A)X_r$, где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$. Тогда

$$\|P(\Omega)X\|_2 = \|P(\Omega)f_X(A)X_r\|_2 = \|\left(\sum_{n\in\Omega} \alpha_n(X)P_n\right) X_r\|_2 \le \alpha(\Omega, X)\|X_r\|_2.$$

Таким же образом устанавливается оценка $\|XP(\Omega)\| \le \alpha(\Omega, X)\|X_l\|_2$. □

Непосредственно из определения последовательности $(\alpha_n(X))$ (формула (3.10)), где $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$, следует

Лемма 3.5. *Если оператор $0 \ne X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$ представим в виде $X = \sum\limits_{k\ge1} X_k$, где $X_k \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$, и ряд является абсолютно сходящимся, то верны оценки*

$$\|X\|_2\alpha_n(X) \le \sum_{k\ge1} \|X_k\|_2\alpha_n(X_k).$$

Если $0 \ne X = X_1 \cdot \ldots \cdot X_l$ — произведение операторов X_k, $1 \le k \le l$, из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega})$, то

$$\|X\|_2\alpha_n(X) \le (\alpha_n(X_1) + \alpha_n(X_l)) \prod_{k=1}^{l} \|X_k\|_2.$$

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы 3.4. Тогда для любого подмножества* $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ *имеют место оценки*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_1(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha(\Omega, B)) \leq$$
$$\leq C_2(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha(\Omega, JV) + \alpha(\Omega, V\Gamma V)), \quad (3.38)$$

где $C_1, C_2 > 0$ — *постоянные, не зависящие от* Ω.

Доказательство. Из теоремы 3.4 следует, что оператор $A - V$ подобен оператору $A - J_m\widetilde{X}$ и оператором преобразования является оператор U_{km} вида (3.31). Оператор V_{km} из (3.31) имеет вид

$$V_{km} = \Gamma_k V + \Gamma_m \widetilde{X} + (\Gamma_k V)(\Gamma_m \widetilde{X}). \quad (3.39)$$

Из равенства

$$A - V = (I + V_{km})(A - J_m\widetilde{X})(I + V_{km})^{-1}$$

и леммы 1.1 следует, что спектральные проекторы $\widetilde{P}(\Omega)$, $P(\Omega)$ подобны и, более того, оператор $\widetilde{P}(\Omega)$ допускает представление

$$\widetilde{P}(\Omega) = (I + V_{km})P(\Omega)(I + V_{km})^{-1}.$$

Следовательно, оператор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (V_{km}P(\Omega) - P(\Omega)V_{km})(I + V_{km})^{-1}. \quad (3.40)$$

$$\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2 \le \|P(\Omega)V\|_2\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2 + \|P(\Omega)(\Gamma_m\widetilde{X})\|_2\|J_mV\|_2+$$
$$\|P(\Omega)(\Gamma_m\widetilde{X})\|_2\|J_m(V\Gamma_m\widetilde{X})\|_2 + \|P(\Omega)V\|_2 \le$$
$$\|P(\Omega)V\|_2\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2 + \frac{\|V\|_2}{m}\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2+$$
$$\frac{\|V\|_2}{m}\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2 + \|P(\Omega)V\|_2 \le$$
$$\big(\frac{\|V\|_2}{m} + \frac{\|V\|_2}{m}\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2\big)\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2 + (1+\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2)\|P(\Omega)V\|_2. \tag{3.41}$$

Пусть m такое, что $\frac{\|V\|_2}{m} + \frac{\|V\|_2}{m}\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2 < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2 \le 2(1+\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2)\|P(\Omega)V\|_2. \tag{3.42}$$

Учитывая (3.42) и то, что $V_{km} = \Gamma_kV + \Gamma_m\widetilde{X} + (\Gamma_kV)(\Gamma_m\widetilde{X})$, получаем оценку

$$\|P(\Omega)V_{km}\|_2 \le \|P(\Omega)(\Gamma_kV)\|_2+\|P(\Omega)(\Gamma_m\widetilde{X})\|_2+\|P(\Omega)(\Gamma_kV)(\Gamma_m\widetilde{X})\|_2 \le$$
$$\|P(\Omega)(\Gamma_kV)\|_2 + \frac{1}{m}\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2 + \|P(\Omega)(\Gamma_kV)\|_2\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2 \le$$
$$(1+\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2)\|P(\Omega)(\Gamma_kV)\|_2 + \frac{1}{m}\|P(\Omega)\widetilde{X}\|_2 \le$$
$$(1+\|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2)\big(\|P(\Omega)(\Gamma_kV)\|_2 + \frac{2}{m}\|P(\Omega)V\|_2\big). \tag{3.43}$$

Аналогичную оценку легко получить для $\|V_{km}P(\Omega)\|_2$.

Тогда, поскольку

$$\|\Gamma_kV\|_2\alpha_n(\Gamma_kV) \le \|\Gamma V\|_2\alpha_n(\Gamma V), \quad \|\Gamma_m\widetilde{X}\|_2\alpha_n(\Gamma_m\widetilde{X}) \le \|\Gamma\widetilde{X}\|_2\alpha_n(\Gamma\widetilde{X}),$$

и из лемм 3.4 и 3.5 получаем оценку

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \le C_1(\alpha(\Omega,\Gamma V) + \alpha(\Omega,V)).$$

Для получения оценки (3.38) обратимся к формуле определения оператора V. Из леммы 3.5 получаем (при условии, что $B \neq 0$)

$$\|V\|_2\alpha_n = \|V\|_2\alpha_n(V) \leq \|JV\|_2\alpha_n(JV) + \|V\Gamma V\|_2\alpha_n(V\Gamma V)+$$
$$+\|\Gamma V\|_2\|JV\|_2(\alpha_n(\Gamma V)+\alpha_n(JV))+\widetilde{C}(\alpha_n(\Gamma V)+\alpha_n(V\Gamma V)+\alpha_n(JV)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\widetilde{C} > 0$ — постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно

$$\alpha_n \leq Const(\alpha_n(\Gamma V) + \alpha_n(JV) + \alpha_n(V\Gamma V)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому $\alpha(\Omega, B) \leq C_2(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha(\Omega, JV) + \alpha(\Omega, V\Gamma V))$ для некоторой не зависящей от Ω постоянной $C_2 > 0$.

Таким образом,

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_2(\alpha(\Omega, \Gamma V) + \alpha(\Omega, JV) + \alpha(\Omega, V\Gamma V)).$$

□

Теорема 3.7. *Если выполнены условия теоремы 3.4, то для $n \geq m+1$ имеют место оценки*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\|_2 \leq$$
$$\leq C(\alpha_{n+1}(\Gamma V) + \alpha_{n+1}(JV) + \alpha_{n+1}(V\Gamma V)),$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 3.5 и теоремы 3.6, в которой $\Omega = \{l \in \mathbb{Z}_+ : |l| \geq n+1\}$. □

Следствие 3.1. Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и L^0:

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

§3.4 Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией. Случай скалярного потенциала.

Пусть $L_2[0,\omega]-$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[0,\omega]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(x,y)=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau,\ \ x,y\in L_2[0,\omega].$$

Через $W_2^1[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева $\{y\in L_2[0,\omega]:$ y абсолютно непрерывна и $\dot{y}\in L_2[0,\omega]\}$.

Рассматривается линейный оператор

$$L:D(L)\subset L_2[0,\omega]\to L_2[0,\omega],$$

порожденный дифференциальным выражением вида

$$l(y)=y'(x)-q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], q\in L_2[0,\omega], \tag{3.44}$$

с областью определения

$$y\in D(L)=\{y\in W_2^1[0,\omega]:y(0)=y(\omega)\}.$$

Тогда оператор L также представим в виде

$$Ly=L^0y-Vy, \tag{3.45}$$

где через $(L^0y)(x)=y'(x)$ обозначается свободный оператор, играющий роль невозмущенного оператора, а через $(Vy)(x)=q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], y\in L_2[0,\omega]$ будем обозначать возмущение.

Отметим, что спектр $\sigma(L^0)$ оператора L^0 легко описывается и он состоит из собственных значений вида

$$\lambda_n = i\frac{2\pi n}{\omega}, n \in \mathbb{Z}.$$

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_n, n \in \mathbb{Z}$, является одномерным. Соответствующая нормированная собственная функция имеет вид $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{R}$. Проекторы Рисса $P_n, n \in \mathbb{Z}$, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$, для любого $x \in L_2[0,\omega]$ могут быть записаны, как $P_n x = (x, e_n)e_n, n \in \mathbb{Z}$.

В дальнейшем для применения метода подобных операторов в исследовании дифференциального оператора с инволюцией L в пространстве $L_2[0,\omega]$, пространство $\mathcal{H} = L_2[0,\omega]$ будем отождествлять с гильбертовым пространством $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}[0,\omega]$ определенных на $\mathbb{R}$ комплексных периодических периода ω функций, суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$. Функцию q будем рассматривать как элемент пространства $L_{2,\omega}$.

В $L_{2,\omega}$ определена группа операторов сдвигов функций $S(t), t \in \mathbb{R}$, т.е. $(S(t)x)(s) = x(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}, x \in L_{2,\omega}$. В таком случае, поскольку оператор $\frac{d}{dt}$ является генератором группы $S : \mathbb{R} \to EndL_{2,\omega}$, группа изометрий $T(t) = S(t)$.

Для функции $y \in L_{2,\omega}$ через $y_{evn} \in L_{2,\omega}$ обозначим функцию

$$y_{evn}(t) = \frac{1}{2}(y(t) + y(t + \frac{\omega}{2})), t \in [0,\omega),$$

а через $y_{odd} \in L_{2,\omega}$ — функцию

$$y_{odd}(t) = \frac{1}{2}(y(t) + y(t - \frac{\omega}{2})), t \in [0,\omega).$$

Замечание 3.4. Отметим, что если $y(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} y_k e^{\frac{2\pi i}{\omega}kt}$, то

$$y_{evn}(t) = \sum_{k\in 2\mathbb{Z}} y_k e^{\frac{2\pi i}{\omega}kt}, y_{odd}(t) = \sum_{k\in 2\mathbb{Z}+1} y_k e^{\frac{2\pi i}{\omega}kt}.$$

Замечание 3.5. Для функций $x, y, z \in L_{2,\omega}$ справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}\Big(x(t)y(t) + x(t+\frac{\omega}{2})y(t+\frac{\omega}{2})\Big) = x_{evn}(t)y_{evn}(t) + x_{odd}(t)y_{odd}(t),$$

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} x\big(\frac{t}{2}\big)z(t)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} x_{evn}\big(\frac{t}{2}\big)z(t)\,dt,$$

$$\frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} x\big(\frac{t}{2}\big)y\big(\frac{t}{2}\big)z(t)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left(x_{evn}\big(\frac{t}{2}\big)y_{evn}\big(\frac{t}{2}\big) + x_{odd}\big(\frac{t}{2}\big)y_{odd}\big(\frac{t}{2}\big)\right)z(t)\,dt.$$

Замечание 3.6. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — периодическая периода ω функция вида $f(t) = i\left(t - \frac{\omega}{2}\right)$, $t \in [0, \omega)$, участвующая в формуле (3.6) оператора ΓX. Тогда при $\tau, s \in [0, \omega)$ справедливы следующие формулы:

$$f_{evn}(\frac{s-\tau}{2}) = \begin{cases} i\left(\frac{s-\tau}{2} - \frac{\omega}{4}\right), & s \geq \tau, \\ i\left(\frac{s-\tau}{2} + \frac{\omega}{4}\right), & s < \tau; \end{cases}$$

$$f_{evn}(\frac{\omega-\tau-s}{2}) = \begin{cases} i\left(\frac{\omega-\tau-s}{2} - \frac{\omega}{4}\right), & \tau + s \leq \omega, \\ i\left(\frac{\omega-\tau-s}{2} + \frac{\omega}{4}\right), & \tau + s > \omega; \end{cases}$$

$$f_{odd}(\frac{s-\tau}{2}) = \begin{cases} -i\frac{\omega}{4}, & s \geq \tau, \\ i\frac{\omega}{4}, & s < \tau; \end{cases}$$

$$f_{odd}(\frac{\omega-\tau-s}{2}) = \begin{cases} -i\frac{\omega}{4}, & \tau+s\le\omega, \\ i\frac{\omega}{4}, & \tau+s>\omega. \end{cases}$$

Лемма 3.6. *Операторы JV, ΓV, $V\Gamma V$, $(\Gamma V)JV$ являются операторами Гильберта-Шмидта и имеют место следующие представления:*

$$((JV)y)(s) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega q_{evn}\left(\frac{s-\tau+\omega}{2}\right)y(\tau)d\tau, \tag{3.46}$$

$$((\Gamma V)y)(s) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left[i\frac{\omega-\tau-s}{2}q_{evn}\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right) - i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)\right]y(\tau)d\tau, & \tau+s\le\omega, \\ \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left[i\frac{\omega-\tau-s}{2}q_{evn}\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right) + i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)\right]y(\tau)d\tau, & \tau+s>\omega; \end{cases} \tag{3.47}$$

$$((V\Gamma V)y)(s) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left[i\frac{s-\tau}{2}q_{evn}\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right) - i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)\right]q(s)y(\tau)d\tau, & s\ge\tau, \\ \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left[i\frac{s-\tau}{2}q_{evn}\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right) + i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)\right]q(s)y(\tau)d\tau, & s<\tau. \end{cases} \tag{3.48}$$

Доказательство. Пользуясь формулами (3.5),(3.6) и замечаниями 3.5 и 3.6, выпишем представление операторов JV, ΓV, $V\Gamma V$.

$$((JV)y)(s) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (S(t)VS(-t)y)(s)dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega q(s+t)y(\omega-s-2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} q\left(\frac{s-\tau+\omega}{2}\right)y(\tau)d\tau = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega q_{evn}\left(\frac{s-\tau+\omega}{2}\right)y(\tau)d\tau;$$

$$((\Gamma V)y)(s) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}(f(t)S(t)VS(-t)y)(s)dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f(t)q(s+t)y(\omega-s-2t)dt = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} f\left(\frac{\omega-s-\tau}{2}\right)q\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)y(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\left[f_{evn}\left(\frac{\omega-s-\tau}{2}\right)q_{evn}\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+ f_{odd}\left(\frac{\omega-s-\tau}{2}\right)q_{odd}\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)\right]y(\tau)d\tau =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\left[i\frac{\omega-\tau-s}{2}q_{evn}\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right) - i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)\right]y(\tau)d\tau, & \tau+s\le\omega, \\ \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\left[i\frac{\omega-\tau-s}{2}q_{evn}\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right) + i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{\omega+s-\tau}{2}\right)\right]y(\tau)d\tau, & \tau+s>\omega; \end{cases}$$

$$((V\Gamma V)y)(s) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)q\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)q(s)y(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\left[f_{evn}\left(\frac{s-\tau}{2}\right)q_{evn}\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+ f_{odd}\left(\frac{s-\tau}{2}\right)q_{odd}\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)\right]q(s)y(\tau)d\tau =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\left[i\frac{s-\tau}{2}q_{evn}\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right) - i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)\right]q(s)y(\tau)d\tau, & s\ge\tau, \\ \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\left[i\frac{s-\tau}{2}q_{evn}\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right) + i\frac{\omega}{4}q\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right)\right]q(s)y(\tau)d\tau, & s<\tau. \end{cases}$$

Поскольку функция f ограничена, и функция q принадлежит пространству $L_{2,\omega}$, тогда из приведенных формул (3.46)-(3.48) непосредственно следует, что все рассматриваемые интегральные операторы — операторы Гильберта-Шмидта (элементами пространства

$\mathfrak{S}_2(L_{2,\omega}))$. Для доказательства данного факта используется стандартный критерий принадлежности интегрального оператора идеалу операторов Гильберта - Шмидта [19]. $\square$

Последовательности операторов $J_m V$, $\Gamma_m V$ имеют такой же вид, как и в (3.25), (3.26). Следует отметить, что

$$\lim_{|m|\to\infty} \|\Gamma_m V\|_2^2 = \lim_{|m|\to\infty} \|\Gamma V - P_{(m)}(\Gamma V)P_{(m)}\|_2^2 =$$
$$= \lim_{|m|\to\infty} \sum_{max\{|i|,|j|\}\geq m+1} \|P_i(\Gamma_m V)P_j\|_2^2 = 0. \quad (3.49)$$

А также из (3.25), (3.26) и формул (3.5) и (3.6) следуют представления вида

$$J_m V = P_{(m)} V P_{(m)} + \sum_{\substack{|k|>m \\ k\in 2\mathbb{Z}}} P_k V P_k,$$

$$\Gamma_m V = \sum_{\substack{m\in 2\mathbb{Z} \\ m\neq 0}} \sum_{\substack{i,j\in 2\mathbb{Z} \\ i\neq j\neq 0 \\ max(|i|,|j|)\geq m+1}} \frac{P_i V P_j}{i-j}.$$

Таким образом, в данном случае также верны теоремы 3.3, 3.4 о подобии рассматриваемого оператора.

Матричные представления операторов V, JV, $V\Gamma V$ в рассматриваемом базисе $(e_n), n \in \mathbb{Z}$, получаются довольно просто.

Элементы матрицы оператора V могут быть вычислены с помощью формулы

$$v_{nj} = (Ve_n, e_j) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \left(q(t)e^{i\frac{2\pi n(\omega-t)}{\omega}}\right)e^{-i\frac{2\pi jt}{\omega}}dt =$$
$$= \frac{1}{\omega}\int_0^\omega q(t)e^{-i\frac{2\pi(n+j)t}{\omega}}dt = q_{n+j}.$$

Значит, матрица (v_{nj}) оператора V имеет вид

$$v_{nj} = q_{n+j}, n, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.50}$$

Из формулы (3.6) легко видеть, что элементы матрицы (a_{nj}) оператора ΓV могут быть записаны в виде

$$a_{nj} = \frac{\omega}{2\pi i}\frac{q_{n+j}}{n-j}, n, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.51}$$

Тогда из двух предыдущих формул следует, что матрица (c_{nj}) оператора $V\Gamma V$ будет выглядеть следующим образом

$$c_{nj} = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq n}\frac{q_{n+k}q_{k+j}}{k-j}, c_{nn} = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(q_{2n+k})^2, n, j \in \mathbb{Z}. \tag{3.52}$$

Таким образом, получаем частный случай теоремы 3.5

Теорема 3.8. *Дифференциальный оператор* $L : D(L) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$ *является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений,что* $\sigma(L)$ *представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n\geq m+1} \sigma_n \right), \tag{3.53}$$

где $\sigma_{(m)}$ *- конечное множество с числом точек меньшим или равным* m*, а* $\sigma_n = \{\widetilde{\lambda_n}\}, n \geq m+1$*, является одноточечным множеством, где*

$$\widetilde{\lambda_n} = i\frac{2\pi n}{\omega} - q_{2n} - \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}(q_{2n+k})^2 + \beta_n,$$

(β_n) *— суммируемая последовательность, т.е.* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \beta_n \mid < \infty$.

Далее необходимо рассмотреть спектральные проекторы Рисса $\widetilde{P}_{(m)}$, $\widetilde{P}_n$, $|n| \geq m+1$, построенные по оператору L и множествам $\sigma_{(m)}$, σ_n, $|n| \geq m+1$. Пусть $k, m \in \mathbb{Z}_+$ — числа, для которых выполнены условия теоремы 3.4. Тогда верны следующие представления возмущенных проекторов

$$\widetilde{P}_{(m)} = U_{km} P_{(m)} U_{km}^{-1}, \quad \widetilde{P}_k = U_{km} P_k U_{km}^{-1}, \quad |k| \geq m+1,$$

где $\widetilde{P}_{(m)}$ — проектор на подпространство $U_{km}\mathcal{H}_{(m)}$, а $\widetilde{P}_k$ — на подпространство $U_{km}\mathcal{H}_k$, U_{km} определяется формулой (3.31) и $\mathcal{H}_{(m)} = ImP_{(m)}$, $\mathcal{H}_k = ImP_k$, $|k| \geq m+1$.

Из представления

$$\widetilde{P}_n - P_n = U_{km}\widetilde{P}_n U_{km}^{-1} - U_{km} P_n U_{km}^{-1} = (V_{km}P_n - P_n V_{km})(I + V_{km})^{-1}, \tag{3.54}$$

где оператор V_{km} из (3.31) имеет вид

$$V_{km} = \Gamma_k V + \Gamma_m \widetilde{X} + (\Gamma_k V)(\Gamma_m \widetilde{X}),$$

и из теорем 3.6, 3.7 следует

Теорема 3.9. *Существует $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что*

$$\sum_{|n| \geq m+1} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty.$$

Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и L^0 :

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\|_2 = 0.$$

Поскольку невозмущенный оператор A является генератором группы сдвигов

$$S(t)e_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}e_n, n \in \mathbb{Z},$$

то из теоремы 3.4 легко получить асимтотическое представление группы, генерируемой исследуемым дифференциальным оператором в случае скалярного потенциала.

Теорема 3.10. *Дифференциальный оператор L генерирует группу операторов $T : \mathbb{R} \to EndL_{2,\omega}$, представимую в виде*

$$T(t) = U_{km}T_m(t)U_{km}^{-1}, t \in \mathbb{R},$$

где группа операторов $T_m : \mathbb{R} \to EndL_{2,\omega}$ на подпространстве $Im(I - P_{(m)})$ определяется равенствами $T_m(t)e_n = e^{i\frac{2\pi(n+\alpha_n)}{\omega}t}e_n, n \geq m+1$, (α_n) - последовательность комплексных чисел из l_2, и конечномерное подпространство $ImP_{(m)}$ является инвариантным для группы T_m.

Литература

[1] Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.// М.:Наука, 1966. — 543 с.

[2] Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов./ А. Г. Баскаков — Воронеж : изд-во Воронежского государственного университета, 1987.— 165 с.

[3] Баскаков А. Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50.– № 4. – с.435-457.

[4] Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. Сер.матем. – 1994. – Т. 58. – № 4. – с.3-32.

[5] Баскаков А. Г. Метод подобных операторов и формулы регуляризованных следов / А. Г. Баскаков // Изв. ВУЗов. Сер. матем.– 1984. – №3 – с.3-12.

[6] Баскаков А. Г. Замена Крылова-Боголюбова в теории возмущений линейных операторов. / А. Г. Баскаков // Укр. мат.журн.— 1984.— Т. 36. №5. — с.606–611.

[7] Баскаков А. Г. Формулы регуляризованных следов для степеней возмущенных спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия Высших Учебных Заведений. – 1985. – № 8. – с. 68–71.

[8] Баскаков А. Г. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов. / А. Г. Баскаков // Дифференц. уравнения. — 1985. Т. 21. №4.— с. 555–562.

[9] Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. / А. Г. Баскаков// Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24. — № 1. — с. 21–39.

[10] Баскаков А. Г. Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. / А. Г. Баскаков// Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50. №4. — с. 435–457.

[11] Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Сер.матем. – 1994 – 58:4 – с.3-32.

[12] Баскаков А. Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов / А. Г.Баскаков // Известия РАН. Сер. матем. – 1997. – Т. 61. – № 6.– С. 3–26.

[13] Бурлуцкая М. Ш. Асимптотические формулы для собственных зачений и собственнх функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2011– №2—с. 64-72.

[14] Бурлуцкая М. Ш. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая , В. В.Корнев, А. П. Хромов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. – Т. 52. – № 9. — с. 1621–1632.

[15] Бурлуцкая М. Ш. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом/ М. Ш. Бурлуцкая , В. П. Курдюмов , А. П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12. – № 3. – с. 22–30.

[16] Бурлуцкая М. Ш. Функционально - дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями/ М. Ш. Бурлуцкая , А. П. Хромов // Доклады академии наук. – 2014. – Т. 454. – № 1. – с.15-17.

[17] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. / В. С. Владимиров — М.: Наука, 1981. — 516 с.

[18] Гельфанд И.М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов — М: Наука, 1958. — 356 с.

[19] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов./ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн — М.:Наука, 1965. — 467 с.

[20] Гохберг И. Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения./ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн — М.: Наука, 1967. — 508 с.

[21] Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./ Ю.Л. Далецкий, М. Г. Крейн — М: Наука, 1970.— 536 с.

[22] Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральные операторы. / Данфорд Н.,Шварц Дж. Т. — М.: Мир, 1974. — 660 с.

[23] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория./ Данфорд Н.,Шварц Дж. Т. — М.: ИЛ, 1962.- Т.1.- 895 с.

[24] Диденко В. Б. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением / В. Б.Диденко // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89. — № 2. — с. 226–240.

[25] Захаров В. Е. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах./ В.Е. Захаров, А.Б. Шабат // ЖЭТФ.- 1971.- Т.61. - С. 118.

[26] Иосида К. Функциональный анализ./ К. Иосида — М.: Мир,1967. — 624 с.

[27] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. / Т. Като — М.:Мир, 1972. — 740 с.

[28] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1976. — 543 с.

[29] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн — М.: Мир, 1967. — 464 с.

[30] Крейн С.Г. Функциональный анализ / С.Г. Крейн — М.: Наука, 1972. — 544 с.

[31] Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа / С.С. Кутателадзе — Изд-во ин-та матем. Новосибирск, 2000. — 349 с.

[32] Левитан Б.М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян — М.: Наука, 1988. — 475 с.

[33] Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев — М.: Наука, 1965. — 520 с.

[34] Митягин Б. С. Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака/ Б. С. Митягин // Докл. РАН. — 2003. — Т. 393. — № 4. — С. 456–459.

[35] Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / Б. С. Митягин, П. Джаков // Успехи математических наук. – 2006 – Т. 61 – № 4 – с. 77–182.

[36] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк.— М.: Наука, 1969. — 527 с.

[37] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер — М.: Мир, 1982. — 488 с.

[38] Розовский М. И. Механика упругонаследственных сфер."Итоги науки". Упругость и пластичность / М. И.Розовский — М.:Мир, 1967. — 315 с.

[39] Романова Е. Ю. Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией/ Е. Ю. Романова // Научные ведомости Белгородского государственного университета.Серия: Физика. Математика. – 2014. – Т. 176. – № 5. – с. 73-78.

[40] Романова Е. Ю. Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах. Антипериодические краевые условия и краевые условия Дирихле / Е. Ю. Романова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – Т. 190. – № 19. – с. 57-63.

[41] Романова Е. Ю. Спектральный анализ дифференциального оператора с инволюцией / Е. Ю. Романова //Вестник Новосибирского государственного университета.С ерия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – с. 64-78.

[42] Романова Е. Ю. Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах / Е. Ю. Романова //Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2015. – № 2. – с. 142-149.

[43] Романова Е. Ю. О преобразованиях подобия оператора Дирака / Е. Ю. Романова // Тезисы докладов. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2010. — 2010.

[44] Романова Е. Ю. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака в лебеговых пространствах / Е. Ю. Романова // Сборник тезисов. Двадцать Первая Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум. — 2010.

[45] Романова Е. Ю. О спектральных разложениях оператора Дирака в лебеговых пространствах / Е. Ю. Романова // Тезисы докладов. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2011. — 2011.

[46] Романова Е. Ю. Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах / Е. Ю. Романова // Сборник тезисов. Двадцать Вторая Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум. — 2011.

[47] Романова Е. Ю. О спектральных свойствах оператора Дирака в лебеговых пространствах / Е. Ю. Романова // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской Зимней Математической Школы 2013. — 2013.

[48] Романова Е. Ю. Метод подобных операторов в исследовании дифференциального оператора с инволюцией / Е. Ю. Романова // Сборник тезисов Сборник тезисов Крымской Международной Математической Конференции. — 2013.

[49] Романова Е. Ю. О спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией / Е. Ю. Романова // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской Зимней Математической Школы 2014. — 2014.

[50] Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М.:Мир, 1975. — 449 с.

[51] Садовничий В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий. — М.: Дрофа,2004. — 382 с.

[52] Ускова Н. Б. Метод подобных операторов в проблеме собственных значений и собственных векторов линейных операторов: дисс. канд. физ.- мат. наук / Н. Б. Ускова// Воронеж, 1994. — 131 с.

[53] Ускова Н. Б. К методу подобных операторов в банаховых алгебрах / Н. Б. Ускова // Изв. вузов. Матем. — 2005.— № 3. — с. 79–85.

[54] Ускова Н. Б. Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов / Н. Б. Ускова//Сиб. матем. журн. — 2000. — т. 41 №3— с.712–721.

[55] Фридрихс К. О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве/ К. О. Фридрихс — М.: Мир, 1969. — 232 с.

[56] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле,Р. Филлипс — М.: ИЛ, 1962. — 830 с.

[57] Хромов А. П. Теоремы о равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов/ А. П. Хромов // Матем. сб. — 1981 — 114 (156) — с.378–405.

[58] Хромов А. П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида / А. П. Хромов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер.– 2010 – 10:4 – с.17-22.

[59] Щербаков А. О. Метод подобных операторов и регуляризованный след одномерного несамосопряженного оператора Дирака / А. О. Щербаков // Вестник ВГУ, серия физика-математика. — 2010. — № 1. — С. 180–189.

[60] Щербаков А. О. Спектральный анализ несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом / А. О. Щербаков // Научные ведомости БелГУ. — 2013. — № 11(154). — 31. — С. 102–108.

[61] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс — М.:Мир, 1969. — 1070 с.

[62] Albeverio S. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials / S. Albeverio, R. O. Hryniv, and Ya. Mykytyuk// Russian J. Math. Phys. — 2005. — 12 (4). — pp.406–423.

[63] Baskakov A. G. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials / A. G. Baskakov, A. V. Derbushev and A. O. Shcherbakov //Izv. RAN Ser. Mat. 75. — 2011. — №3. — pp. 3-28 [Izv. Math. 75 (3), 445–469 (2011)].

[64] Bucy R. New results in linear filtering and prediction theory/ R. Bucy, R. E. Kalman — ASME J. Basis Eng.—March 1961—V. 83

[65] Djakov P. Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators / P. Djakov and B. Mityagin // Mat. Nachr. — 2010. — 283 (3) — pp. 443–462.

[66] Djakov P. Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov and B. Mityagin // Journal of Approximation Theory. — 2012. — 164 (7) — pp. 879–927.

[67] Djakov P. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov and B. Mityagin // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — 61 (1) — pp. 359–398.

[68] Djakov P. Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators / P. Djakov and B. Mityagin // Proc. Amer. Math. Soc. — 2013. — 141 (4), pp. 1361-1375.

[69] Engel K-J. One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K-J. Engel, R. Nagel — Springer.— 2001. — 586 p.

[70] Gross E.P. Unified Theory of Interacting Bosons/ E.P. Gross — Phys. Rev.— 1957.- V. 106 — 161 p.

[71] Levitan B. M. Sturm–Liouville and Dirac operators / B. M. Levitan and I. S. Sargsyan. — Nauka, Moscow. — 1988. — 364 p.

[72] Lunev A. A. On the Riesz Basis Property of the Root Vector System for Dirac-Type 2x2 Systems / A. A. Lunev , M. M. Malamud // Dokl. Akad. Nauk — 2014. — 458 (3), pp. 1 — 6 [Doklady Mathematics 90 (2), 556–562 (2014)].

[73] Mityagin B. S. Spectral expansions of one dimensional periodic Dirac operators / B. S. Mityagin // Dyn. Partial Differ. Equ. — 2004. — Vol. 1. — № 2. — pp. 125–191.

[74] Reed M. Methods of modern mathematical phusics. Vol. IV: Analysis of operators./ M. Reed, B. Simon — Academic Press, 1978. — 396 p.

[75] Renardy M. An introduction to partial differential equations / M. Renardy, R. C. Rogers — Springer, 2004. — 434 p.

[76] Romanova E. Yu. Similar operators method in spectral analysis of Dirac's operator in the lebesgue spaces/ E. Yu. Romanova // Spectral and evolution probles.— 2011. – Volume 21 Issue 2. – p.185-186.

[77] Romanova E. Yu. The method of similar operators in spectral analysis of Dirac operators in the Lebesgue spaces / E. Yu. Romanova // Modern problems of mathematics, mechanics and computer science, Voronezh State University, English Chair for Science Departments, Department of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. .–2013. — p. 55-60.

[78] Romanova E. Yu. The method of similar operators in spectral analysis of differential operator with involution/ E. Yu. Romanova //

Spectral theory and differential Equations. International Conference Dedicated to the Centenary of B.M. Levitan. — 2014. – p. 28-30.

[79] A. Savchuk, A. Shkalikov The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential / A. Savchuk, A. Shkalikov // Math. Notes — 2014. — 96 (5), pp. 777–810.

[80] Turner R. E. Perturbations of compact spectral operators / R. E. Turner // Communications on pure and applied mathematics. — 1965. — Vol. 18. — pp. 519–541.

[81] Thaller B. The Dirac Equation / B. Thaller — Springer, Berlin, 1992. — 357 p.