ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Кулешов Павел Александрович

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

профессор О.М. Пенкин

Воронеж – 2015

Содержание

Введение.

Актуальность темы. В последние два десятилетия все большее внимание к себе привлекают дифференциальные уравнения на так называемых стратифицированных множествах - связных подмножествах обычного евклидового пространства, представленных в виде объединения конечного числа его гладких подмногообразий, примыкающих друг к другу особым образом. Такой интерес обусловливается целым рядом причин. Прежде всего, к изучению стратифицированных множеств приводят задачи, связанные с изучением и моделированием различных явлений происходящих в сложных физических системах, например, в системах составного типа, отдельные элементы которых имеют совершенно разные физические характеристики, такие как размерность, плотность и т.п. В качестве примера чаще всего приводят задачу о колебаниях механической системы, составленной из струн, мембран и упругих тел, а также задачу о диффузии в в сильно неоднородных средах. Решение таких задач в рамках классической теории дифференциальных уравнений оказывается довольно затруднительным, что в результате и приводит нас к потребности дальнейшего развития методов математического анализа и теории дифференциальных уравнений, чтобы сделать их пригодными и в случае, когда рассматриваются функции на стратифицированных множествах.

С другой стороны, теория стратифицированных множеств не только дает возможность решать новые задачи, но и позволяет взглянуть по-новому на давно известные и хорошо изученные математические вопросы и в каких-то случаях указать связь между, казалось бы, разными задачами. Например, задача Дирихле на стратифицированном множестве, как это не покажется странным, содержит, как частные случаи практически все известные классические краевые задачи (Неймана, Робена, Вентцеля). Так что можно сказать, что кроме задачи Дирихле (если интерпретировать их как задачи на стратифицированных множествах) больше нет никаких других краевых задач. Известные результаты о скачках потенциала простого слоя тоже имеют очень естественную интерпретацию на стратифицированных множествах. Оказывается, что потенциал простого слоя является решением уравнения Пуассона на множестве составленном из трех стратов: области, ее внешности, и разделяющей их поверхности. При этом правая часть уравнения равна нулю на области и ее внешности, а на поверхности она равна плотности потенциала.

Кроме того, несмотря на то, что практически все полученные результаты на стратифицированных множествах являются аналогами каких-либо классических результатов, их получение, как правило, требует новых идей и подходов, которые, в свою очередь, оказываются полезными в классической ситуации.

Основные результаты касающиеся стратифицированных множеств были получены О.М. Пенкиным и его учениками; часть их можно найти в последней главе книги [9]. Там же можно найти и основные результаты относящиеся к геометрическим графам - одномерным стратифицированным множествам, для которых построена более обширная теория, начатая Ю.В. Покорным, Б.С. Павловым, S. Nicaise'ом и другими.

Цель работы. Целью данной работы является получение оценок собственных значений различных краевых задач на стратифицированных множествах (прежде всего речь идет об уравнении Лапласа с краевыми условиями Дирихле), а также решение вопросов, тем или иным образом с этим связанных, например, доказательство неравенств типа Пуанкаре и Соболева на стратифицированных множествах.

Методика исследования. При доказательстве за основу берутся методы классических теорий, прежде всего математического анализа и функционального анализа, адаптированные на случай стратифицированных множеств. В частности, при определении основных дифференциальных операторов мы опираемся на теории меры и дифференцировании по так называемой стратифицированной мере.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми. В числе основных отметим следующие:

– оценки первого собственного значения лапласиана с краевыми условиями Дирихле на одномерном и двумерном стратифицированном множестве;
– неравенство Соболева на стратифицированном множестве;
– разрешимость краевой задачи с $p-$лапласианом на стратифицированном множестве;
– некоторые свойства симметризации Шварца на стратифицированном

множестве.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения краевых задач на стратифицированных множествах.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна в 2011 году [4], на весенней математической школе «Понтрягинские чтения XXIII» в 2012 году [5], на конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» в 2012 году [6].

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-6]. Работы [1-3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных публикаций [1], [3] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Объем диссертации составляет 115 страниц. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 27 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава посвящена аналогу задачи Штурма - Лиувилля на геометрическом графе. Здесь дается определение самого геометрического графа и ряда связанных с ним понятий: Графом будем называть связное множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, имеющее вид

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^{m} v_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{n} e_j\right),$$

где $\{v_i\}_{i=1}^m =: V(\Gamma)$ – семейство точек из $\mathbb{R}^3$, называемых далее вершинами, а $\{e_j\}_{j=1}^n =: E(\Gamma)$ – семейство открытых интервалов (или гладких дуг), далее называемых ребрами, с концами в вершинах из $V(\Gamma)$. Граф Γ предполагается разбитым на две части – границу и внутренность. В качестве внутренности графа, которую обозначим Γ_0, можно взять любое связное подмножество Γ, представляющее собой объединение некоторого набора вершин из $V(\Gamma)$ (обозначим его V_0) и всех ребер из $E(\Gamma)$. Вершины, попавшие в V_0, назовем внутренними вершинами, а в $V \setminus V_0$ – граничными. Множество $\partial\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ объявляется границей графа Γ. На Γ_0 мы будем рассматривать дифференциальное уравнение, а в точках из $\partial\Gamma_0$ – краевые условия.

На графах рассматривается ряд функциональных пространств, а именно: $C(\Gamma)$ – множество непрерывных на Γ функций; $C_0(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ – функции из $C(\Gamma)$, обращающиеся в нуль на $\partial\Gamma_0$; $C^1(\Gamma)$ – множество функций непрерывных на Γ, имеющих равномерно непрерывную производную на каждом ребре; $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ – функции из $C^1(\Gamma)$, обращающиеся в нуль на $\partial\Gamma_0$.

Далее вводятся мера и интеграл на графе. Подмножество ω в Γ назовем измеримым, если его пересечение с каждым ребром измеримо по Лебегу. Меру ω определим как сумму мер Лебега пересечений $\omega \cap e_i$ по всем ребрам, а обозначать ее будем $\mu_\Gamma(\omega)$. Понятие измеримости функции переносится на случай графа в неизменном виде, т.е. функция называется измеримой, если измеримы все ее лебеговы множества – множества вида $\{x \in \Gamma : \ f(x) > t\}$. Интеграл Лебега измеримой функции $f : \omega \to \mathbb{R}$ оказывается при этом равным сумме интегралов этой функции по пересечениям $\omega \cap e_i$ по всем i.

Вводится в рассмотрение дифференциальный оператор Δ на графе, который на ребрах графа задается соотношением $\Delta u(x) = u''(x)$, а в вершинах - соотношением

$$\Delta u(v_i) = \sum_{e_j \succ v_i} u_j'(v).$$

и рассматривается следующая задача

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0, \tag{0.0.1}$$

$$u\Big|_{\partial\Gamma_0} = 0, \tag{0.0.2}$$

где ρ - неотрицательная функция, а $u'_j(v)$ есть производная в вершине v по направлению единичного вектора, направленного внутрь ребра e_j. Данная задача является аналогом классической задачи Штурма - Лиувилля на графе.

Основным результатом первой главы является оценка первого собственного значения этой задачи (его формулировку см. ниже). Его доказательство приводится сначала для случая, когда $\rho \equiv 1$ на ребрах и $\rho \equiv 0$ во внутренних вершинах. Однако, также рассматриваются варианты при $\rho \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, в частности при $\rho \equiv 1$. В этом последнем случае во внутренних вершинах сосредоточены единичные массы.

Далее описывается симметризация Шварца на графе и обсуждаются некоторые ее свойства. Определение симметризации полностью соответствует классическому определению. А именно, пусть $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ есть неотрицательная функция, причем такая, что ее лебеговы множества $L_u(t) = \{x \in \Gamma : u(x) > t\}$ измеримы при всех $t > 0$. Под симметризацией Шварца этой функции будем понимать такую функцию $u^\star : [0, L] \to \mathbb{R}$, что каждое её лебегово множество $L_{u^*}(t)$ является отрезком с центром в точке $L/2$ и, при этом, $\mu_\Gamma(L_u(t)) = \mu(L_{u^*}(t))$ при всех t, где L есть сумма длин всех ребер графа, а μ есть мера Лебега на отрезке. Имеют место следующие свойства.

Лемма 0.0.1 *Если $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, то $u^* \in PC_0^1[0; L]$,*

где u^* есть симметризация Шварца функции u, а $PC_0^1[0; L]$ - множество непрерывных, кусочно-гладких функций.

Теорема 0.0.1 (Принцип Пойя - Сеге на графе) *Пусть дан граф* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$, *такой что для любого его ребра существует простой путь, содержащий данное ребро, и концами которого служат вершины из* $\partial\Gamma_0$ *(необязательно разные), пусть* $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ *неотрицательна, тогда*

$$\int_\Gamma u'^2 dx \geq \int_0^L (u^*)'^2 dx. \tag{0.0.3}$$

При этом, показано, что требования на граф в условиях данной теоремы ослабить нельзя.

Следующим шагом является рассмотрение аналога принципа Рэлея. А именно, доказывается следующая теорема.

Теорема 0.0.2 *Собственная функция* u_0, *соответствующая первому собственному значению* λ_0 *задачи* (0.0.1)-(0.0.2) *минимизирует функционал*

$$\Phi(u) = \frac{\int_\Gamma u'^2 dx}{\int_\Gamma u^2 dx}$$

на множестве $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, *причем минимум в точности равен* λ_0.

Путем комбинирования полученных результатов получается оценка первого собственного значения лапласиана на графе.

Теорема 0.0.3 *При* $\rho = 1$ *в точках ребер и* $\rho = 0$ *в вершинах графа* Γ, *удовлетворяющего условиям теоремы 0.0.1, имеет место следующая оценка первого собственного значения задачи* (0.0.1),(0.0.2)*:*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma))^2}. \tag{0.0.4}$$

Полученная оценка является точной; в случае графа-отрезка в 0.0.4 достигается равенство. Кроме того, можно найти нетривиальный граф (не сводящийся к отрезку), со сколь угодно малой разницей между левой и правой частями 0.0.4.

Также рассматривается случай, когда от графа требуется лишь непустота границы. Для него имеет место следующая оценка:

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{4(\mu(\Gamma))^2}. \tag{0.0.5}$$

Наконец, рассматриваются более общие требования на показатель ρ в задаче (0.0.1),(0.0.2). Точнее, рассматривается случай $\rho \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Для него имеет место следующая оценка:

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{\rho_0(\mu(\Gamma) + K_v)^2}, \tag{0.0.6}$$

где ρ_0 есть максимум функции ρ на Γ, а K_v есть количество вершин в V_0.

При $\rho \equiv 1$ на всем графе данная оценка также будет являться точной.

Во второй главе рассматривается задача на собственные значения оператора Лапласа на стратифицированном множестве.

Связное замкнутое подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется стратифицированным, если оно представлено в виде объединения открытых подмногообразий $\sigma_{kj} \subset \Omega$ пространства $\mathbb{R}^n$, называемых стратами, примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса. В обозначении σ_{kj} первый индекс означает размерность страта, а второй его номер при автономной нумерации стратов данной размерности. Будем писать $\sigma_{li} \prec \sigma_{kj}$ или $\sigma_{kj} \succ \sigma_{li}$ и говорить, что σ_{li} примыкает к σ_{kj} , если $l < k$ и $\sigma_{li} \subset \partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma_{kj}} \setminus \sigma_{kj}$. Страт σ_{kj} назовем свободным, если Ω не содержит стратов, к которым бы он примыкал.

Обозначим через Σ множество всех стратов из Ω. Мы предполагаем выполненными следующие два условия, первое из которых – обычное требование на примыкания клеток в клеточном комплексе: 1) Любые два страта не пересекаются, а их замыкания либо не пересекаются, либо их пересечение является объединением стратов из Σ. Граница страта σ_{kj} – множество $\partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma_{kj}} \setminus \sigma_{kj}$ –

является объединением некоторого числа стратов из Σ, размерность которых меньше k; 2) Для любого $X \in \sigma_{k-1i}$ «звезда»

$$S = \sigma_{k-1i} \cup (\bigcup_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \sigma_{kj})$$

допускает локальное (вблизи X) выпрямление, что означает существование такой окрестности V точки X в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такого диффеоморфизма $\Phi : V \to W$, что образ множества $V \cap S$ представляет собой объединение $(k-1)$-мерного шара (образа части σ_{k-1i}, попавшей в V) и примыкающих к нему полушарий (аналогичных образов частей σ_{kj}).

Топология на Ω индуцируется стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. подмножество Ω_0 стратифицированного множества Ω называется открытым, если существует открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ пересечение которого с Ω дает Ω_0.

Пусть Ω_0 - связное и открытое подмножество Ω, составленное из стратов семейства Σ и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Тогда разность $\Omega \setminus \Omega_0$, очевидно, является границей множества Ω_0 в упомянутой выше топологии и будет тоже состоять из стратов, а потому будет естественным обозначить её через $\partial\Omega_0$. Ясно, что разбиение $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ определяется неоднозначно. Например, допустимо взять Ω_0 равным Ω (в этом случае $\partial\Omega_0$ окажется пустой). Однако мы такие случаи не рассматриваем.

Далее на Ω вводятся мера и интеграл. На каждом страте σ_{kj} имеется обычная $k-$мерная мера Лебега, которую обозначим μ_k. Назовем подмножество $\omega \subset \Omega$ измеримым, если измеримы по Лебегу пересечения $\omega \cap \sigma_{kj}$ по всем значениям индексов k и j. Меру такого множества определим как

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}).$$

Интеграл Лебега суммируемой функции f на Ω оказывается равным сумме по всем стратам интегралов Лебега сужений этой функции на страты, т.е.

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\mu = \sum_{k,j} \int\limits_{\sigma_{kj}} f\, d\mu_k.$$

В соответствии с этим, пространство $L^p(\Omega)$ определяется как пространство измеримых на Ω функций f, таких, что $|f|^p$ суммируема, т.е. $\int\limits_{\Omega} |f|^p\, d\mu < \infty$.

Далее для разбиения $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ через $C(\Omega_0)$ обозначается множество непрерывных на Ω_0 функций. Аналогично, $C(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ (или просто $C(\Omega)$) есть функции непрерывные на всем Ω. Через $C^1_\mu(\Omega_0)$ обозначим множество таких функций на множестве Ω, что их сужения на любой страт из Ω_0 являются непрерывно дифференцируемыми функциями и, вдобавок, для каждого страта из Ω_0 существуют непрерывные продолжения производной сужения функции на этот страт до точек тех его граничных стратов, которые лежат в Ω_0. Через $C_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ обозначим множество тех функций из $C(\Omega)$, которые обращаются в нуль на $\partial\Omega_0$. Также положим $C^1_0(\Omega_0, \partial\Omega_0) = C^1_\mu(\Omega_0) \cap C_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$. Пространство $W^{1,p}_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ определяется как пополнение пространства $C^1_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ по норме

$$\|f\|^{1,p}_0 = \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p\, d\mu \right)^{1/p}.$$

Здесь ∇f на каждом $k-$мерном страте есть классический $k-$мерный градиент сужения функции на данный страт.

Пусть в каждой точке $X \in \Omega$ задан вектор $\vec{F}(X)$ в $\mathbb{R}^n$. Так заданное векторное поле F назовем касательным к Ω_0, если для любого страта $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любого $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному пространству $T_X\sigma_{kj}$. Дивергенцией касательного векторного поля F в точке $X \in \sigma_{k-1i}$

назовем следующее выражение:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_{k-1} \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \vec{F}_{\nu_j}(X). \tag{0.0.7}$$

Здесь $\nabla_{k-1} \cdot \vec{F}(X)$ - обычная $(k-1)$-мерная дивергенция в точке X сужения $\vec{F}$ на страт σ_{k-1i}, рассматриваемый как риманово многообразие с метрикой, индуцированной его вложением в $\mathbb{R}^n$, а $\vec{F}_{\nu_j}(X)$ - скалярное произведение единичного вектора ν_j ортогонального σ_{k-1i} в точке X (направленного внутрь страта σ_{kj}) и предельного значения $\vec{F}_{\nu_j}(Y)$ когда $Y \in \sigma_{kj}$ стремится к X.

Так определенная дивергенция имеет смысл, например, для полей обладающих следующими свойствами: 1) сужения поля на страты из Ω_0 являются непрерывно дифференцируемыми; 2) сужение поля $\vec{F}$ на страт σ_{kj} может быть продолжено по непрерывности на любой страт $\sigma_{k-1i} \subset \Omega_0$, примыкающий к σ_{kj}.

Множество таких векторных полей обозначим через $\vec{C}^1(\Omega_0)$. Множество полей, для которых второе требование выполнено для всех $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и для всех $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj} \subset \Omega_0$, в том числе и лежащих в $\partial\Omega_0$, обозначим через $\vec{C}^1(\Omega)$.

Если $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, то через ∇u обозначается векторное поле обычных градиентов сужений u на страты из Ω_0. Обозначим через $C^2(\Omega_0)$ множество таких функций $u \in C(\Omega_0)$, что $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. Для функций из $C^2(\Omega_0)$ имеет смысл дифференциальное выражение $\nabla \cdot (p\nabla u)$, когда функция $p : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ такова, что $p\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. Так будет, например, в случае $p \equiv 1$. В этом случае соответствующий оператор естественно назвать лапласианом; в уже упомянутой книге [9] он называется жестким лапласианом, а случай когда $p \equiv 1$ только на «свободных» стратах, и $p \equiv 0$ на оставшейся части Ω_0 - мягким лапласианом.

Рассматривается следующая задача на собственные значения:

$$\Delta_p u + \lambda \rho u = 0 \tag{0.0.8}$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0 \tag{0.0.9}$$

где функция плотности $\rho(x) \equiv 1$ на свободных стратах и $\rho(x) \equiv 0$ в остальной части Ω_0 в случае мягкого лапласиана и $\rho(x) \equiv 1$ всюду – в случае жесткого лапласиана. Как и в случае графа имеет место аналог принципа Рэлея, теперь уже на стратифицированном множестве.

Далее обсуждается симметризация Шварца на стратифицированном множестве. Определяются понятия периметра и объема произвольного подмножества стратифицированного множества.

Для обсуждения свойств симметризации Шварца вводится понятие кратности страта. Фиксируем страт σ_{kj}. Для каждого страта $\sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{kj}$ обозначим через $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,j})$ число примыканий σ_{kj} к $\sigma_{k+1,j}$. Сумма

$$\sum_{\sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{kj}} \nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,j})$$

называется кратностью страта σ_{kj}. На приведенном рисунке $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,i}) = 2$, $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,m}) = 1$, а кратность σ_{kj} равна 4.

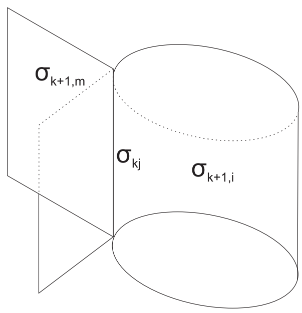


Рис. 0.0.1: К кратности страта.

Для разбиения $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$, в предположении, что все свободные страты имеют одинаковую размерность d, его периметром будем называть суммарную меру $(d-1)$-мерных стратов, входящих в $\partial\Omega_0$. Теперь пусть $\widetilde{\Omega}$ является стратифицированным подмножеством Ω, т.е. оно само по себе является стратифицированным множеством и, вдобавок, пусть каждый его страт целиком содержится в некотором страте из Ω. Краем Ω^1 стратифицированного множества назовем объединение замыканий всех стратов из Ω единичной кратности. Подчеркнем, что формально данное понятие не связано с понятием края многообразия. Теперь в качестве границы $\widetilde{\Omega}$ рассмотрим множество $\partial\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}^1 \setminus (\Omega^1 \setminus \partial\Omega_0)$. Рассмотрим пересечение $\partial\widetilde{\Omega}$ с замыканием некоторого страта старшей размерности множества Ω - страта σ_{di}. Обозначим $(d-1)-$мерную меру этого пересечения $P_{\sigma_{di}}(\widetilde{\Omega})$ и будем ее называть периметром $\widetilde{\Omega}$ относительно страта σ_{di} из Ω. В этом случае периметром $\widetilde{\Omega}$ относительно всего множества Ω объявим сумму его относительных периметров для каждого страта старшей размерности из Ω. Таким образом:

$$P_\Omega(\widetilde{\Omega}) = \sum_i P_{\sigma_{di}}(\widetilde{\Omega}) = \sum_i \mu_{d-1}(\partial\widetilde{\Omega} \cap \overline{\sigma_{di}}).$$

Объемом разбиения $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ назовем суммарную меру его стратов старшей размерности. Для множества $\widetilde{\Omega}$ объем определим как

$$S(\widetilde{\Omega}) = \mu_d(\widetilde{\Omega}) = \sum_i \mu_d(\widetilde{\Omega} \cap \sigma_{di}).$$

При сделанных обозначениях, для двумерных стратифицированных множеств имеет место следующее изопериметрическое неравенство.

Теорема 0.0.4 *Пусть $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ - стратифицированное множество, принадлежащее классу E (его описание см. ниже), такое что $\partial\Omega_0 = \Omega^1$. Тогда для любой неотрицательной функции $u \in C_0^2(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ для почти всех $t > 0$ выполнено неравенство*

$$P^2_\Omega(t,u) \geq 4\pi S(t,u). \tag{0.0.10}$$

Здесь $P_\Omega(t,u)$ и $S(t,u)$ есть, соответственно, периметр и площадь лебегова множества $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$. Для простоты, описание класса E проведем для тех множеств, все страты старшей размерности которых являются плоскими. Каждый элемент класса E получается из какого-либо двумерного плоского страта с помощью конечного числа операций «приклеивания» двумерных плоских стратов. А именно, к исходному двумерному страту по отрезку, пересекающемуся с его границей по множеству меры нуль приклеивается новый двумерный страт. Полученное множество рассматривается как стратифицированное (в частности, внутренность отрезка и его концы оказываются разными стратами). К одному из двумерных стратов полученного множества снова приклеивается плоский двумерный страт и т.д. Общий случай отличается лишь тем, что вместо плоских стратов берутся изометричные плоским. Класс E оказывается достаточно широким, но тем не менее не содержит таких множеств, как например, цилиндр и сфера. Тем не менее полученную теорему удается обобщить и на некоторые множества содержащие цилиндрические или конические страты в качестве фрагментов.

Как и в случае графа, рассматривается вопрос гладкости симметризации и аналог принципа Пойя - Сеге на стратифицированном множестве. Из них получаем следующую оценку первого собственного значения лапласиана на двумерном стратифицированном множестве.

Теорема 0.0.5 *Пусть $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ - стратифицированное множество, принадлежащее классу E, причем $\partial\Omega_0 = \Omega^1$. Имеет место следующая оценка первого собственного значения задачи* (0.0.8),(0.0.9) *при p и ρ равных* *единице на свободных стратах и нулю на остальных:*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi j_{0,1}^2}{\mu_2(\Omega_0)}, \tag{0.0.11}$$

где $j_{0,1}$ есть первый положительный нуль функции Бесселя $J_0(t)$, а $\mu_2(\Omega_0)$ есть суммарная мера двумерных стратов входящих в Ω_0. При этом, равенство имеет место лишь в случае стратифицированного круга.

Третья глава посвящена неравенствам типа Пуанкаре и Соболева. Сначала рассматривается неравенство Пуанкаре на стратифицированном множестве в условиях жесткого лапласиана при произвольном показателе p:

$$\int_{\Omega_0} |u|^p d\mu \leq C \int_{\Omega_0} |\nabla u|^p d\mu. \tag{0.0.12}$$

Его доказательство сводится к случаю $p = 2$, который в свое время был рассмотрен А.А. Гавриловым и О.М. Пенкиным. Доказывается он при условиях прочности стратифицированного множества, которое заключается в том, что для любого страта $\sigma_{ki} \in \Omega_0$ найдется цепочка (т.е. упорядоченный набор) стратов $\{\sigma_{ki}, \sigma_{k_1 i}, \sigma_{k_2 i}, \ldots, \sigma_{k_m i}\}$ такая, что: 1) любые два соседних страта из цепочки примыкают друг к другу, а их размерности отличаются ровно на единицу, 2) последний страт цепочки входит в $\partial\Omega_0$. Сам результат формулируется следующим образом:

Теорема 0.0.6 *Пусть дано прочное стратифицированное множество $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ и пусть $p \geq 2$. Тогда найдется константа $C > 0$, зависящая только от Ω и p, такая, что для любой функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ выполнено неравенство* (0.0.12).

В качестве одного из применений неравенства Пуанкаре рассматривается следующая задача на стратифицированном множестве.

$$\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0,\ x \in \Omega_0 \tag{0.0.13}$$

$$u = \varphi,\ x \in \partial\Omega_0, \tag{0.0.14}$$

где $\varphi,\ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Оператор, фигурирующий в уравнении (0.0.13) называется $p-$лапласианом. Функцию $u \in W^{1,p}(\Omega)$ называют слабым решением (0.0.13), если при всех $h \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h\ d\mu = 0 \tag{0.0.15}$$

Краевое условие (0.0.14), при этом, интерпретируется, как $\varphi - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Оказывается, что существование слабого решения задачи (0.0.13)-(0.0.14) сводится к существованию минимума функционала $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p\ d\mu$.

Далее рассматривается неравенство Соболева на стратифицированном множестве. Первым идет случай мягкого лапласиана для которого вводится следующее условие $(*)$: для любого свободного страта σ_{kj_1} существует цепочка стратов $\sigma_{kj_1} \succ \sigma_{k-1,j_2} \prec \sigma_{kj_3} \succ \ldots \succ \sigma_{k-1,j_m}$, которая содержит только страты размерностей k и $k-1$, и при этом, $\sigma_{k-1,j_m} \subset \partial\Omega_0$, а все страты размерности k, входящие в данную цепочку, являются свободными. Имеет место следующая теорема:

Теорема 0.0.7 *Пусть $\Omega \to \Omega_0, \partial\Omega_0$ - связное стратифицированное множество, удовлетворяющее условию $(*)$, все свободные страты которого имеют одинаковую размерность d. Тогда найдется константа $C > 0$, зависящая только от Ω, такая, что для любой неотрицательной функции $u \in C_0^d(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ для почти всех $t \geq 0$ выполнено неравенство*

$$[P_\Omega(t,u)]^d \geq C[S_\Omega(t,u)]^{d-1}. \tag{0.0.16}$$

Пользуясь этим неравенством можно получить следующую версию принципа Пойя - Сеге.

Теорема 0.0.8 *Пусть дано стратифицированное множество* $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ *удовлетворяющее условию* $(*)$ *и такое, что все его свободные страты имеют размерность* n. *Тогда для любой неотрицательной функции* $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *выполнено*

$$\int_{\Omega_0} \rho |\nabla u|^p d\mu \geq C \int_B |\nabla u^*|^p d\mu, \tag{0.0.17}$$

где $C > 0$ *зависит только от* Ω.

Применяя симметризацию Шварца и пользуясь ее свойствами получаем неравенство Соболева на стратифицированном множестве для мягкого лапласиана.

Теорема 0.0.9 *Пусть дано стратифицированное множество* $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ *удовлетворяющее условию* $(*)$ *и пусть* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ *- размерности его свободных стратов. Тогда для любой функции* $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *выполнено*

$$\left(\int_{\Omega_0} \rho |u|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_0} \rho |\nabla u|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{0.0.18}$$

где $p \geq 1$, *а* q *определяется следующим образом:*

$$\begin{cases} 1 \leq q < \infty, & \text{при } p \geq n_k; \\ 1 \leq q \leq n_k p/(n_k - p), & \text{при } p \in [n_{k-1}, n_k); \\ \ldots \\ 1 \leq q \leq n_1 p/(n_1 - p), & \text{при } p \in [1, n_1). \end{cases} \tag{0.0.19}$$

Что касается жесткого лапласиана, то для него доказывается аналогичный результат, с единственным отличием, что условие $(*)$ заменено на условие прочности стратифицированного множества.

Автор выражает глубокую благодарность О.М. Пенкину за постановку задач и полезные обсуждения многочисленных вопросов, связанных с ними.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Кулешов П.А. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе/А.Т. Диаб, П.А. Кулешов, О.М. Пенкин// Математические заметки – 2014 – 96:6 – с. 885–895.

[2] Кулешов П.А., Теорема вложения Соболева для стратифицированных множеств/П.А. Кулешов// Научные ведомости Белгородского государственного университета, Математика Физика – 2013 – № 5 (148), выпуск 30 – с. 79-87.

[3] Кулешов П.А. Неравенство Пуанкаре для стратифицированных множеств/ П.А. Кулешов, О.М. Пенкин// Фундаментальные исследования. – 2014. – № 6–1 – с. 49-53.

[4] Кулешов П.А. Оценка первого собственного значения лапласиана на стратифицированном множестве /П.А. Кулешов// Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы. – 2011 – с. 191-192.

[5] Кулешов П.А. Теорема вложения Соболева на стратифицированном множестве/П.А. Кулешов// Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач» – «Понтрягинские чтения – XXIII». – 2012 – с. 100-101.

[6] Кулешов П.А. Об оценке первого собственного значения задачи Штурма - Лиувилля на графе/П.А. Кулешов// Современные проблемы приклад-

ной математики, теории управления и математического моделирования. – 2012 – с.169.

Работы [1-3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

I Точная оценка первого собственного значения в задаче Штурма - Лиувилля на графе.

1.1 Постановка задачи. Основные понятия.

1.1.1 Граф.

Мы начинаем с определения центрального объекта данной главы - графа. Более точно его следовало бы именовать «геометрический граф», по причине принципиального отличия от классического определения понятия «граф»(т.е. используемого в теории графов), а также в соответствии с тем, что такое название является общепринятым в литературе. Однако, мы позволим себе для краткости всюду далее использовать привычный всем термин «граф».

Графом будем называть связное множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, имеющее вид

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^{m} v_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{n} e_j\right),$$

где $\{v_i\}_{i=1}^m =: V(\Gamma)$ – семейство точек из $\mathbb{R}^3$, называемых далее вершинами, а $\{e_j\}_{j=1}^n =: E(\Gamma)$ – семейство открытых интервалов с концами в вершинах из $V(\Gamma)$, далее называемых ребрами. Стоит заметить, что выбор $\mathbb{R}^3$ в качестве объемлющего пространства не является ограничительным, потому как хорошо известно, что любой граф «укладывается» в трехмерное пространство. Далее, введем понятие производной функции на графе. Для этого фиксируем ориентацию на графе, объявив для произвольного ребра e_k одну из его вершин v_i начальной, а другую - v_j - конечной; будем в этом случае писать $e_k = (v_i, v_j)$. Введя на e_k натуральную параметризацию, согласованную с его ориентацией, мы каждой точке x ставим в соответствие координату l, определяемую соотношением

$$x = v_i + l\vec{\nu}_{ij},$$

где $\vec{\nu}_{ij}$ – единичный вектор, направленный от v_i к v_j. Здесь x – точка рассматриваемого ребра, полученная из v_i сдвигом на вектор $l\vec{\nu}_{ij}$. Тогда, производная функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ в точке $x \in e_k = (v_i, v_j)$ определяется, как

$$u'(x) = \frac{d}{dl}u(v_i + l\vec{\nu}_{ij}) = -\frac{d}{dl}u(v_j + l\vec{\nu}_{ji}),$$

взятая в точке $l = l_0 : x = v_i + l_0\vec{\nu}_{ij}$ для выражения в центре или в точке $l = l_1 : x = v_j + l_1\vec{\nu}_{ji}$ для выражения справа.

Как видим, эта производная, а точнее ее знак, зависит от ориентации ребра. Однако, в рассматриваемых нами далее уравнениях на графах в точках ребер будут фигурировать только вторые производные, которые от ориентации не зависят. В вершине же мы всегда будем рассматривать только производную по направлению единичного вектора, направленного внутрь ребра. Эту производную мы обозначим через $u'_k(v_i)$, если речь идет о вершине v_i, примыкающей к ребру e_k. Например, для ребра $e_k = (v_i, v_j)$ имеем

$$u'_k(v_i) = \frac{d}{dl}\Big|_{l=0} u(v_i + l\vec{\nu}_{ij}),\ u'_k(v_j) = -\frac{d}{dl}\Big|_{l=1} u(v_i + l\vec{\nu}_{ij}).$$

Всюду далее тот факт, что ребро e примыкает к вершине v обозначается соотношением $e \succ v$.

Следующим нашим шагом является введение понятия границы графа и, соответственно, его внутренности, которые, что естественно, необходимы для рассмотрения краевых задач на графе. Здесь нужно подчеркнуть, что разбиение графа на границу и внутренность допускается не единственным способом. В качестве внутренности, которую обозначим Γ_0, мы, строго говоря, можем взять любое связное подмножество Γ, представляющее собой объединение некоторого набора вершин из $V(\Gamma)$ (обозначим его V_0) и всех ребер из $E(\Gamma)$. Элементы V_0 назовем внутренними вершинами, а элементы $V \setminus V_0$

граничными. Множество $\partial\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ объявляется границей графа Γ. Таким образом, получено представление Γ в виде объединения $\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$. На Γ_0 будем рассматривать дифференциальное уравнение, а в точках из $\partial\Gamma_0$ задавать краевые условия.

Стоит отметить некоторые особенности приведенного только что определения. Во-первых, согласно ему допустим выбор пустого множества в качестве $\partial\Gamma_0$. Однако, в рассматриваемых в рамках данной работы задачах вопрос непустоты границы имеет принципиальное значение. Кроме того, легко видеть, что в любом связном графе можно выбрать вершину так, что ее выбрасывание из графа не нарушает его связности, т.е. в любом связном графе можно выбрать непустую границу $\partial\Gamma_0$ в полном соответствии с описанными выше требованиями. В связи с чем всюду далее говоря о границе графа мы будем автоматически предполагать её непустоту. Во-вторых, формально допустимым является включение ребер в $\partial\Gamma_0$ (при этом, необходимо также будет включать в $\partial\Gamma_0$ и все вершины, к которым примыкают эти ребра). Но опять же, применительно к рассматриваемым далее задачам подобное допущение будет приводить лишь к упрощению конкретного графа (граничные ребра будут фактически выброшены из рассмотрения), в том время как весь совокупный класс графов, на которых рассматривается исходная задача, не претерпит никаких изменений.

1.1.2 Функциональные пространства. Мера и интеграл на графе.

Теперь мы готовы перейти к определениям основных функциональных пространств, которые будем рассматривать на графах.

$C(\Gamma)$ – множество непрерывных на Γ функций;

$C_0(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ – функции из $C(\Gamma)$, обращающиеся в нуль на $\partial\Gamma_0$;

$C^1(\Gamma)$ – множество функций непрерывных на Γ, имеющих равномерно непрерывную производную на каждом ребре;

$C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ – функции из $C^1(\Gamma)$, обращающиеся в нуль на $\partial\Gamma_0$.

Отметим, что функция из $C^1(\Gamma)$ обязана иметь первые производные во внутренних вершинах, упомянутые выше. Кроме того, по аналогии вводятся пространства $C^k(\Gamma)$ (функции непрерывные на Γ, имеющие равномерно непрерывную производную порядка k на каждом ребре) и $C_0^k(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Впрочем, для наших целей такие пространства с $k > 1$ не понадобятся.

В главе 2, в которой речь пойдет уже не о графах, а о стратифицированных множествах, будут приведены аналоги других известных из классической теории пространств. Таких как пространства Лебега L^p, пространства Соболева $W^{1,p}$ и др. Эти аналоги будут естественным образом распространяться и на случай графа, как одномерного стратифицированного множества. Однако в данный момент мы не станем приводить их описание в виду отсутствия на то необходимости, а ограничимся лишь определением понятия меры и интеграла Лебега функции на графе. При этом, даже они будут приведены в несколько упрощенной, но все же вполне достаточной для дальнейшего изложения форме.

А именно, назовем подмножество ω в Γ измеримым, если его пересечение с каждым ребром измеримо по Лебегу. Меру ω определим как сумму мер Лебега пересечений $\omega \cap e_i$ по всем ребрам. Понятие измеримости функции переносится на случай графа в неизменном виде, т.е. функция называется измеримой, если измеримы все ее множества уровней. Интеграл Лебега измеримой функции $f : \omega \to \mathbb{R}$ оказывается при этом равен сумме интегралов этой функции по пересечениям $\omega \cap e_i$ по всем i.

Что касается отличий данного определения меры на графе от того, которое будет использоваться в общем случае стратифицированного множества, то оно заключается в том, что мы полагаем меру равной нулю в вершинах графа (в общем случае мера вершины графа, т.е. нульмерного страта, будет равняться единице). Такой выбор обусловлен исключительно его удобством для решения той задачи, которая стоит перед нами в данной главе. В общем случае следует пользоваться определением приводимым в главе 2 для произвольного стратифицированного множества (или см., [9]).

Особый интерес для нас представляет, так называемый, интеграл Дирихле:

$$\int_\Gamma |u'|^2 dx = \sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} |u_i{}'|^2 dl, \tag{1.1.1}$$

который мы будем рассматривать на множестве $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ (здесь u_i – сужение функции u на ребро e_i). Этот интеграл (ровно как и его классический аналог) является ключом к решению задачи Штурма-Лиувилля. Более того, ряд его свойств, а также различных утверждений с ним связанных, которые мы знаем из классической теории, будут иметь место и на стратифицированном множестве. Именно они и будут составлять основную часть дальнейшего изложения в данной главе.

Также отметим, что пространство $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ будет нами использоваться в качестве основного, т.е. все вспомогательные результаты будет достаточно получить только для этого пространства. При ссылках на известные результаты мы также будем формулировать их в той общности, которая требуется для достижения нашей цели - получение оценки первого собственного значения задачи Штурма - Лиувилля на графе. Комментарии относительно возможного дальнейшего обобщения этих результатов будут приведены отдельно.

1.1.3 Задача Штурма - Лиувилля на графе.

Мы не будем формулировать аналог задачи Штурма - Лиувилля для графа в максимально общем виде, который имеет место в классическом случае. Ограничимся лишь рассмотрением аналога оператора Лапласа и использованием краевого условия Дирихле.

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор Δ на графе, который на ребрах графа задается соотношением $\Delta u(x) = u''(x)$, а в вершинах - соотношением

$$\Delta u(v_i) = \sum_{e_j \succ v_i} u'_j(v).$$

Можно показать (см. [9]), что он является точным аналогом лапласиана на графе, а задача

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0, \tag{1.1.2}$$

$$u\Big|_{\partial\Gamma_0} = 0, \tag{1.1.3}$$

где ρ - неотрицательная функция, аналогом задачи Штурма - Лиувилля на графе. В первую очередь доказательство основного результата будет проведено для случая, когда $\rho \equiv 1$ на ребрах и $\rho \equiv 0$ во внутренних вершинах. Второй вариант, который мы рассмотрим, при $\rho \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, будет простым и изящным образом сведен к первому.

Соотношения (1.1.2),(1.1.3) моделируют задачу о нахождении форм колебаний и соответствующих им частот в системе струн, связанных в виде графа. Полагая ρ равным нулю во внутренних вершинах графа мы исключаем из рассмотрения точечные массы в узлах сетки. В (1.1.2) значок Δ употребляется, поскольку набор дифференциальных соотношений на ребрах и в вершинах графа, как уже упоминалось, оказывается точным аналогом оператора Лапласа. Более того, он может быть записан в виде дивергенции от градиента (см. подробности в [9]). В пользу принятых обозначений говорит также и то, что «низкочастотная» часть спектра задачи (1.1.2),(1.1.3), в случае когда граф имеет вид достаточно густой сетки, ведет себя как спектр некоторой мембраны, специальным образом связанной с сеткой (см. [3]).

Уже в первых работах (см. библиографию в [9]), посвященных этой задаче было доказано, что ее спектр состоит из последовательности положительных собственных значений, стремящейся к бесконечности, и что первому (минимальному) собственному значению отвечает собственная функция, не имеющая нулей в Γ_0, которая, следовательно, может быть взята положительной в Γ_0.

Последним нашим шагом, предваряющим доказательство оценки первого собственного значения задачи Штурма - Лиувилля на графе, станет введение понятия симметризации функций, заданных на графе.

1.2 Симметризация функции на графе. Принцип Пойя - Сегё.

В классической теории используются множество различных видов симметризации множеств, также называемых перестановками. Они носят исключительно прикладной характер и благодаря наличию определенных свойств с их помощью удается получать крупные фундаментальные результаты. Одним из примеров симметризации, обладающей подобной применимостью, является симметризация Шварца (в англоязычной литературе чаще используется термин "symmetric decreasing rearrangement"). В случае множества её результатом является шар того же объема, что и исходное множество. Тогда как под симметризацией Шварца некоторой функции понимают определенную в некотором шаре симметрично убывающую от его центра функцию, полученную путем симметризации всех лебеговых множеств (или множеств уровней) исходной функции. Безусловно, эта исходная, т.е симметризуемая, функция должна при этом удовлетворять целому ряду условий, позволяющих провести такую процедуру. Среди свойств симметризации Шварца есть следующее, в нашем контексте наиболее важное, свойство: при симметризации функции (определенного класса гладкости) её интеграл Дирихле не возрастает. Таковое свойство симметризации именуют принципом Пойя - Сеге (см. [10]). Оно имеет множество различных применений. Например, применяя его вместе с принципом Рэлея и вместе с достаточно очевидным свойством симметризации сохранять норму симметризуемой функции в L^p легко получается известное неравенство Фабера - Крана (иногда в названии неравенства упоминают и Рэлея, который выдвинул соответствующую гипотезу), которое утверждает, что среди всех ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ шар имеет минимальное первое собственное значение оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле (см. [20], [22]). Причем минимум достигается только на шаре, если не учитывать множества, отличающиеся от шара на множество нулевой меры. Таким образом первое собственное значение в шаре, которое в свою очередь хорошо известно, является точной оценкой первого собственного значения лапласиана Дирихле на произвольном множестве. Другим подобным примером, служит точная константа в неравенстве Соболева, полученная Таленти (см. [27]) с помощью все того же свойства невозрастания интеграла Дирихле при симметризации.

Основываясь на этих, а также некоторых других, примерах использования симметризации мы далее построим их аналоги на стратифицированных множествах. Более подробно и в максимально общем (для данной работы) виде речь о симметризации пойдет уже в следующей главе, а пока ограничимся рассмотрением текущего случая - случая графа. На котором, как и следует того ожидать, она выглядит куда проще, нежели в общем случае.

Но прежде, обратим внимание на то, что существует некоторая путаница связанная с использованием слова «симметризация». А именно, под ним может пониматься как сама операция, процесс преобразования, так и результат этого процесса, т.е. некая функция или множество (в зависимости от того какой объект находится в рассмотрении). Мы не станем вводить каких-либо дополнительных определений, позволяющих избежать такой двусмысленности, а вместо этого постараемся употреблять его в таком виде, чтобы смысл был в достаточной мере очевиден из контекста (речь лишь о тех случаях, когда это будет принципиально важно).

Определение 1.2.1 *Под симметризацией Шварца графа* Γ *будем понимать отрезок длины равной мере графа.*

Далее введем некоторые обозначения. Через $L_u(t)$ обозначим лебегово множество функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ уровня $t \geq 0$, т.е. множество $L_u(t) = \{x \in \Gamma : u(x) > t\}$. Обозначим меру Лебега на графе через μ_Γ, а через μ - обычную меру Лебега на числовой прямой. Положим $L = \mu_\Gamma(\Gamma)$.

Определение 1.2.2 *Пусть* $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ *есть неотрицательная функция, причем такая, что ее лебеговы множества измеримы при всех* $t > 0$. *Под симметризацией Шварца этой функции будем понимать такую функцию* $u^\star : [0, L] \to \mathbb{R}$, *что каждое её лебегово множество* $L_{u^*}(t)$ *является отрезком с центром в точке* $L/2$ *и, при этом,* $\mu_\Gamma(L_u(t)) = \mu(L_{u^*}(t))$ *при всех* t.

Существование и единственность такой функции в целом очевидны и обеспечиваются в частности тем, что $\mu_\Gamma(L_u(t))$ монотонно не возрастает с ростом t. Более того, для симметризации можно написать явную формулу: в точке отрезка $[0, L]$ удаленной от его центра на величину x значение симметризации равно инфимуму множества $\{t > 0 : \mu_\Gamma(L_u(t)) \leq 2x\}$.

Так как симметризация определена лишь для некоторого класса функций, то говоря о симметризации произвольной функции мы всегда будем подразумевать, что она ему принадлежит, не делая лишнего упоминания этого обстоятельства.

Кроме того, как нетрудно видеть, определенная нами симметризация на графе будет совпадать с классической симметризацией Шварца на отрезке в случае если рассматриваемый граф представляет собой отрезок. Таким образом, она является своего рода продолжением обычной симметризации с одномерного пространства на «пространство графов». Поэтому, ради простоты, всюду далее говоря о симметризации Шварца, в том числе и в случае отрезка, мы будем иметь в виду симметризацию на графе, понимая, что на отрезке она совпадает обычной.

Приведенное определение является едва ли не самым простым из возможных способов симметризации на графе, так как для него достаточно знать лишь меру каждого лебегова множества и совсем необязательно знать как эти множества устроены. Такая симметризация, как будет показано в дальнейшем, обладает необходимыми нам свойствами и приводит к нужному результату. Однако, при первоначальном рассмотрении вопроса построения симметризации возникает желание учесть каким-либо образом тот факт, что в основе лежит граф - более сложный объект, чем обычное одномерное множество, и имеющий свою определенную структуру. В попытках сохранить эту структуру мы приходим к некоторым другим вариантам симметризации. Например, мы можем каждому графу поставить в соответствие граф, имеющий точно такую же топологию (т.е. между множествами вершин этих графов существует взаимнооднозначное соответствие, при котором наличие ребра между двумя произвольными вершинами в первом графе эквивалентно его наличию во втором) и такой, что все его ребра имеют одинаковую длину. Наиболее наглядно это можно представить на примере графа-звезды (см. рисунок 1.2.1).

Такая симметризация обладает искомым достоинством, причем не только не выводит за пределы исходного класса множеств, т.е. графов, но и приводит к графу чрезвычайно похожему на исходный. Однако применительно к задаче

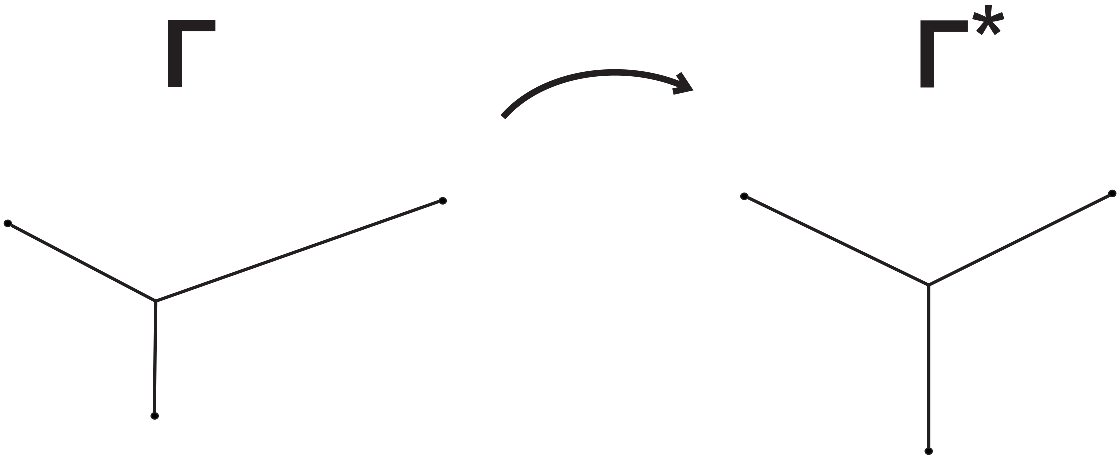


Рис. 1.2.1: Симметризация графа.

сохранения принципа Пойя - Сеге это достоинство переходит в недостаток. В самом деле, рассмотрим класс всех графов-звезд состоящих из трех ребер, суммарная длина которых фиксирована. Например, равна единице. При описанном только что способе симметризации каждый представитель этого класса переходит в один и тот же граф Γ^*. Но в то же время обычный отрезок единичной длины может быть рассмотрен в качестве предельной точки этого класса - так как мы можем найти в нем граф с длиной одного из ребер сколь угодно близкой к единице. При этом для любой непрерывно дифференцируемой функции на отрезке единичной длины и любого $\varepsilon > 0$ мы можем предъявить граф-звезду и функцию на нем, что интегралы Дирихле этих двух функций будут отличаться меньше чем на ε, а меры всех их лебеговых множеств и вовсе совпадать. Рассмотрим на Γ^* функцию аффинную на каждом ребре со значениями равными нулю в вершинах нулевой кратности и равной $1/3$ в вершине кратности 3. Ее интеграл Дирихле, как нетрудно определить, равен 1. Теперь возьмем функцию на отрезке единичной длины, равную нулю на его концах, равную $1/3$ в его центре и аффинную на двух полуотрезках, на которые данный отрезок разбивает его центр. Меры лебеговых множеств этих двух функций совпадают при всех t. Кроме того, интеграл Дирихле функции на отрезке равен $2/3$, т.е. строго меньше 1. Суммируя вышесказанное легко получаем пример графа вместе с функцией на нем, интеграл Дирихле которой увеличивается при таком способе симметризации, т.е. происходит нарушение принципа Пойя - Сеге.

Таким образом, как и в классическом случае, единственным параметром, определяющим весь процесс симметризации, остается мера лебеговых множеств рассматриваемой функции. При этом, хотя с формальной точки зрения нам также важна размерность исходного пространства - как правило ее используют в качестве размерности шара, получаемого при симметризации - в действительности мы вольны выбрать любую нужную нам размерность (и мы будем этим пользоваться при рассмотрении стратифицированных множеств).

Теперь перейдем к вопросам свойств, которыми обладает определенная нами симметризация на графе. Немалая часть из числа свойств, имеющих место в классическом случае для симметризации Шварца, будет элементарным образом переносится и на случай графа. Однако некоторые свойства все же потребуют отдельного доказательства. Первое из таких связано с гладкостью симметризации, т.е. функции $u^\star$.

Лемма 1.2.1 *Если* $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, *то* $u^* \in PC_0^1[0; L]$.

Доказательство. Здесь через $PC_0^1[0, L]$ обозначен класс кусочно-непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка. Такие функции непрерывны на $[0, L]$ и для каждой из них существует разбиение отрезка $[0, L]$ на конечное число подотрезков, на каждом из которых функция непрерывно дифференцируема. В рассматриваемом нами случае можно показать, что разбиение на подотрезки можно взять единым для всех u^*, получающихся из функций $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, но это нам не потребуется.

В нашем доказательстве неожиданным образом оказывается «замешанной» теорема Эйлера об уникурсальных графах. Напомним, что связный граф называется уникурсальным или эйлеровым, если его можно обойти по некоторому маршруту, побывав на каждом ребре ровно один раз. Теорема Эйлера (см., например, [1]) утверждает, что для уникурсальности связного графа необходимо и достаточно, чтобы число его нечетных вершин равнялось 0 или 2. Из данной теоремы следует, что в любом связном графе существует маршрут, обозначим его R, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине и проходящий через каждое ребро графа дважды. Для этого достаточно заметить, что если удвоить каждое ребро графа, то в силу приведенной теоремы граф станет эйлеровым. «Развернув», изометричным образом, маршрут R в отрезок $[0, 2L]$ числовой оси и определив на нем функцию u по принципу соответствия: $\tilde{u}(x) = u(y)$, где y - точка графа, соответствующая x, при упомянутой развертке, мы для определенной выше симметризации функции u и обычной одномерной симметризации функции $\tilde{u}$ получим при всех $x \in [0, L]$ равенство $\tilde{u}^*(2x) = u^*(x)$ (оно следует из того, что $2\mu_\Gamma(L_u(t)) = \mu(L_{\tilde{u}}(t))$ при всех t). Кроме того, будем иметь $\tilde{u}(x) \in PC^1[0, 2L]$. А поскольку хорошо известно, что симметризация Шварца в $\mathbb{R}^n$ переводит кусочно-гладкие функции в кусочно-гладкие, то $\tilde{u}^*(x) \in PC_0^1[0, 2L]$; нуль на концах отрезка связан с тем, что $\tilde{u}$ непрерывна на $[0, 2L]$ и обращается в нуль хотя бы в одной точке этого отрезка. Отсюда следует утверждение леммы. ■

Приведенное нами определение симметризации Шварца само по себе не дает простого способа отыскания либо построения результата ее действия. Поэтому для дальнейшего рассмотрения будет удобным и весьма полезным описать конкретный способ построения симметризации произвольной функции на графе.

Осуществляться он будет в два этапа (см. рис. 1.2.2). На первом шаге ребра графа Γ, в произвольном порядке и без учета ориентации, выкладываем (в стык) одно за другим на отрезок $[0, L]$; можно было бы ребра выкладывать и иначе (лишь бы они попарно не пересекались), поскольку для симметризации это не важно, но для определенности удобно сделать именно так. Всюду на $[0, L]$, кроме точек стыка, определяем функцию $\hat{u}(x)$ по принципу соответствия, как и выше при определении функции $\tilde{u}$. Значения в точках стыка не играют никакой роли, но для определенности, мы в качестве значений возьмем любой из односторонних пределов. Обычная симметризация Шварца функции $\hat{u}$, построенная на том же отрезке, очевидным образом совпадает с симметризацией Шварца функции u на графе, определенной нами выше, т.е. с u^* (потому как меры лебеговых множеств функций u и $\hat{u}$ совпадают при всех t). Хотя функция $\hat{u}$, вообще говоря, разрывна, мы, в силу леммы 1.2.1, можем утверждать, что её симметризация Шварца принадлежит $PC_0^1[0, L]$ при $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$.

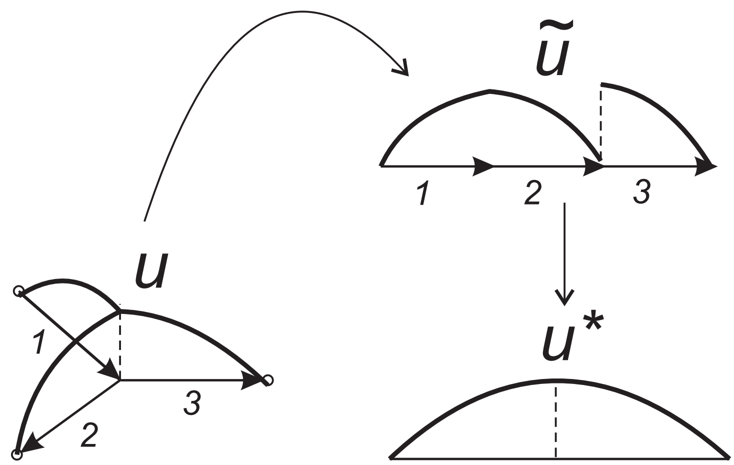


Рис. 1.2.2: Симметризация функции на графе.

Таковое построение позволяет мгновенно перенести на случай графа целый ряд свойств, которыми обладает симметризация Шварца на числовой прямой. Грубо говоря, это те свойства, которые инвариантны относительно перехода от функции u к функции $\hat{u}$. Например, сюда относятся многие интегральные равенства и неравенства, связывающие исходную функцию и её симметризацию. Одно из них будет использоваться в дальнейшем:

$$\int_\Gamma u^2 dx = \int_0^L u^{*2} dx. \tag{1.2.1}$$

На самом деле, последнее равенство приведено лишь в том виде, который достаточен в наших рассмотрениях. Более общо его можно сформулировать так: симметризация Шварца функции на графе сохраняет норму в L^p. Как уже было упомянуто, этот результат следует автоматически из предложенного построения и наличия его аналога на прямой, но при этом, его прямое доказательство тоже достаточно элементарно - следует из теоремы о послойном представлении («layer cake representation», см. [7]).

Однако, не все свойства симметризации в $\mathbb{R}^n$ так просто переносятся на случай графа. Одно из таких свойств - принцип Пойя - Сеге, главная цель это пункта. Причина этого в том, что несмотря на непрерывность функции u на графе, соответствующая ей функция $\hat{u}$ может быть разрывна, а потому к ней нельзя применить классическую версию принципа Пойя - Сеге, который в общем случае имеет место для функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\mathbb{R}^n)$, а они при $n = 1$ непрерывны. Поэтому таковое свойство потребует отдельного рассмотрения.

Но прежде, рассмотрим следующую особенность симметризации Шварца, которая поможет в ходе доказательства принципа Пойя - Сеге. Рассмотрим непрерывную кусочно-гладкую функцию $f : [-L, L] \to [0, d]$ вместе с её симметризацией $f^* : [-L, L] \to [0, d]$ (области значений функции и её симметризации будут совпадать в силу непрерывности). Пусть отрезок $[0, d]$ разбит на систему подотрезков $[c_i, d_i]$, где $i = \overline{1, n}$ ($c_i = d_{i-1}$ при $1 < i \leq n;\ c_1 = 0;\ d_n = d$). Рассмотрим на $[-L, L]$ следующий набор функций:

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) - c_i, & \text{если } f(x) \in [c_i, d_i]; \\ d_i - c_i, & \text{если } f(x) > d_i; \\ 0, & \text{если } f(x) < c_i, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

где $i = \overline{1,n}$. Очевидно, что все функции f_i непрерывны и кусочно-гладки и, кроме того, $f = \sum_{i=1}^n f_i$ на $[-L, L]$. А тогда $f' = \sum_{i=1}^n f_i'$ всюду, за исключением конечного числа точек. Далее, замечаем, что в каждой точке дифференцируемости f внутри множества $f^{-1}\left(\cup_{i=1}^n (c_i, d_i)\right)$ не более чем одна из функций f_i имеет ненулевую производную. Поэтому последнее равенство можно переписать как $f'^2 = \sum_{i=1}^n f_i'^2$. Из него путем интегрирования получаем

$$\int_{[-L,L]} f'^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{[-L,L]} f_i'^2 dx \tag{1.2.3}$$

В свою очередь, для функций f_i^* - симметризаций функций f_i - на всем отрезке $[-L, L]$ по определению будем иметь

$$f_i^*(x) = \begin{cases} d_i - c_i, & \text{при } |x| \le \mu(L_{f_i}(d_i - c_i))/2; \\ 0, & \text{при } |x| > \mu(L_{f_i}(0))/2; \\ \inf\{t \in (0, d_i - c_i) : \mu(L_{f_i}(t)) \le 2|x|\}, & \text{в остальных точках} \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Теперь покажем, что $f^* = \sum_{i=1}^n f_i^*$ на $[-L, L]$. Действительно, рассмотрим отрезок $[0, L]$ (этого будет достаточно в силу симметричности функций f^* и f_i^* относительно нуля). В силу того, что $\mu(L_{f_i}(d_i - c_i)) = \mu(L_f(d_i))$ и по причине монотонного невозрастания мер лебеговых множеств с ростом уровня (а в данном случае, с учетом непрерывности f, будет иметь место монотонное убывание) имеем $0 \le \mu(L_{f_n}(d_n - c_n))/2 \le \mu(L_{f_{n-1}}(d_{n-1} - c_{n-1}))/2 \le \ldots \le \mu(L_{f_1}(d_1 - c_1))/2 \le L$. Далее, на полуотрезке $[0, \mu(L_{f_n}(d_n - c_n))/2)$ каждая f_i^* равна $d_i - c_i$, а значит их сумма по всем i равна d. В то же время на этом же отрезке имеем $2x \le \mu(L_f(d)) < \mu(L_f(t))$ при всех $t < d$, а значит $f^*(x) = \inf\{t > 0 : \mu(L_f(t)) \le 2x\} \ge d$ (здесь стоит отметить, что $\mu(L_f(t)) = 0$ при всех $t > d$, т.е. всегда $\{t > 0 : \mu(L_f(t)) \le 2x\} \supset (d, +\infty)$, а потому

$\inf\{t > 0 : \mu(L_f(t)) \le 2x\}$ всегда существует и, вдобавок, не меньше чем d). Тогда получаем $f^* = d = \sum_{i=1}^n f_i^*$ на $[0, \mu(L_{f_n}(d_n - c_n))/2]$.

Далее переходим к рассмотрению полуотрезка $(\mu(L_{f_n}(d_n - c_n))/2, \mu(L_{f_{n-1}}(d_{n-1} - c_{n-1}))/2]$ (который можно переписать как $(\mu(L_f(d_n))/2, \mu(L_f(c_n))/2]$). В его точках, согласно (1.2.4), имеем $f_n^*(x) = \inf\{t \in (0, d_n - c_n) : \mu(L_{f_n}(t)) \le 2x\}$. По построению функции f_n мы $\forall t \in (0, d_n - c_n)$ $\forall x : f_n(x) = t$ имеем $f_n(x) = f(x) - c_n$. Поэтому $\forall t \in (0, d_n - c_n)$ будет $\mu(L_{f_n}(t)) = \mu(L_f(t + c_n))$. А отсюда получаем $\inf\{t \in (0, d_n - c_n) : \mu(L_{f_n}(t)) \le 2x\} = \inf\{t \in (c_n, d_n) : \mu(L_f(t)) \le 2x\} - c_n$. При этом, на рассматриваемом полуотрезке $x \le \mu(L_f(c_n))/2 < \mu(L_f(t))/2$ при $t < c_n$, откуда следует, что $\inf\{t \in (c_n, d_n) : \mu(L_f(t)) \le 2x\} = \inf\{t \in (0, d_n) : \mu(L_f(t)) \le 2x\}$. С другой стороны, множество $\{t \in (c_n, d_n) : \mu(L_f(t)) \le 2x\}$ непусто (в силу непрерывной зависимости $\mu(L_f(t))$ от t на $[0, d]$), а потому $\inf\{t \in (0, d_n) : \mu(L_f(t)) \le 2x\} = \inf\{t > 0 : \mu(L_f(t)) \le 2x\}$. В итоге получаем $\inf\{t \in (c_n, d_n) : \mu(L_f(t)) \le 2x\} = \inf\{t > 0 : \mu(L_f(t)) \le 2x\} = f^*(x) \Rightarrow f_n^*(x) = f^*(x) - c_n$. Что касается функций f_i^*, при $i < n$, то каждая из них равна $d_i - c_i$, а следовательно $\sum_{i=1}^{n-1} f_i^* = \sum_{i=1}^{n-1}(d_i - c_i) = d_{n-1} = c_n$. Таким образом, $f^* = \sum_{i=1}^n f_i^*$ на $(\mu(L_{f_n}(d_n - c_n))/2, \mu(L_{f_{n-1}}(d_{n-1} - c_{n-1}))/2]$. Продолжая так далее мы получим это равенство и для всех остальных частей отрезка $[0, L]$. Из него на основании аргументации аналогичной той, которой обосновывалось равенство (1.2.3), получаем следующее равенство:

$$\int_{[-L,L]} (f^*)'^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{[-L,L]} (f_i^*)'^2 dx \tag{1.2.5}$$

Теперь возьмем произвольный отрезок $[c_i, d_i]$ и снова заметим, что за пределами множества $f^{-1}((c_i, d_i))$ функция f_i имеет нулевую производную, поэтому

$$\int_{[-L,L]} f_i'^2 dx = \int_{f^{-1}((c_i,d_i))} f'^2 dx$$

а тогда

$$\int_{[-L,L]} f'^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{[-L,L]} f_i'^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{f^{-1}((c_i,d_i))} f'^2 dx, \qquad (1.2.6)$$

что впрочем и так достаточно очевидно и следует из того, что $f^{-1}((c_i,d_i))$ между собой не пересекаются, а в точках $[-L,L]$ не попавших в их объединение производная функции f почти всюду равна нулю.

Обозначим через g_i симметризацию сужения функции f на $f^{-1}((c_i,d_i))$. Она будет определена на некотором отрезке B_i и удовлетворять равенству

$$\int_{[-L,L]} (f_i^*)'^2 dx = \int_{B_i} g_i'^2 dx. \qquad (1.2.7)$$

В самом деле, при всех $t > 0$ имеем

$$\mu(L_{f_i^*}(t)) = \mu(L_{g_i}(t+c_i)) + \mu(L_{f_i^*}(d_i)) \Rightarrow \inf\{t>0 : \mu(L_{f_i^*}(t)) \le 2x\} =$$
$$= \inf\{t+c_i > 0 : \mu(L_{g_i}(t+c_i)) + \mu(L_{f_i^*}(d_i)) \le 2x\} \Rightarrow f_i^*(x) = g_i(x - \mu(L_{f_i^*}(d_i))/2), \qquad (1.2.8)$$

при всех $x \ge 0$ (здесь также использован тот факт, что g_i не принимает значения из интервала $(0, c_i)$ и то, что $\mu(L_{f_i^*}(d_i))$ не зависит от x). Вдобавок, при $x \in [0, \mu(L_{f_i^*}(d_i))/2)$ имеем $f_i^* \equiv const$. Откуда и следует (1.2.7), которое в свою очередь приводит к равенству:

$$\int_{[-L,L]} (f^*)'^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{[-L,L]} (f_i^*)'^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} g_i'^2 dx, \qquad (1.2.9)$$

Наконец заметим, что наличие нуля в качестве границы области значений функции f несущественно и вместо отрезка $[0,d]$ может фигурировать любой отрезок $[c,d]$, где $c \ge 0$. В этом случае единственным отличием в рассуждениях станет добавление к числу функций f_i функции $f_0 \equiv c$ на $[-L,L]$.

Полученные равенства (1.2.6) и (1.2.9) ценны тем, что позволяют при рассмотрении интегралов Дирихле функции и её симметризации вместе с некоторым разбиением их областей значений на «слои», рассматривать каждый из этих слоев независимо друг от друга (для иллюстрации см. рис.1.2.3). Это обстоятельство, которое на рисунке выглядит предельно очевидным, сыграет важную роль при доказательстве нижеследующей теоремы - аналоге принципа Пойя - Сеге на графе.

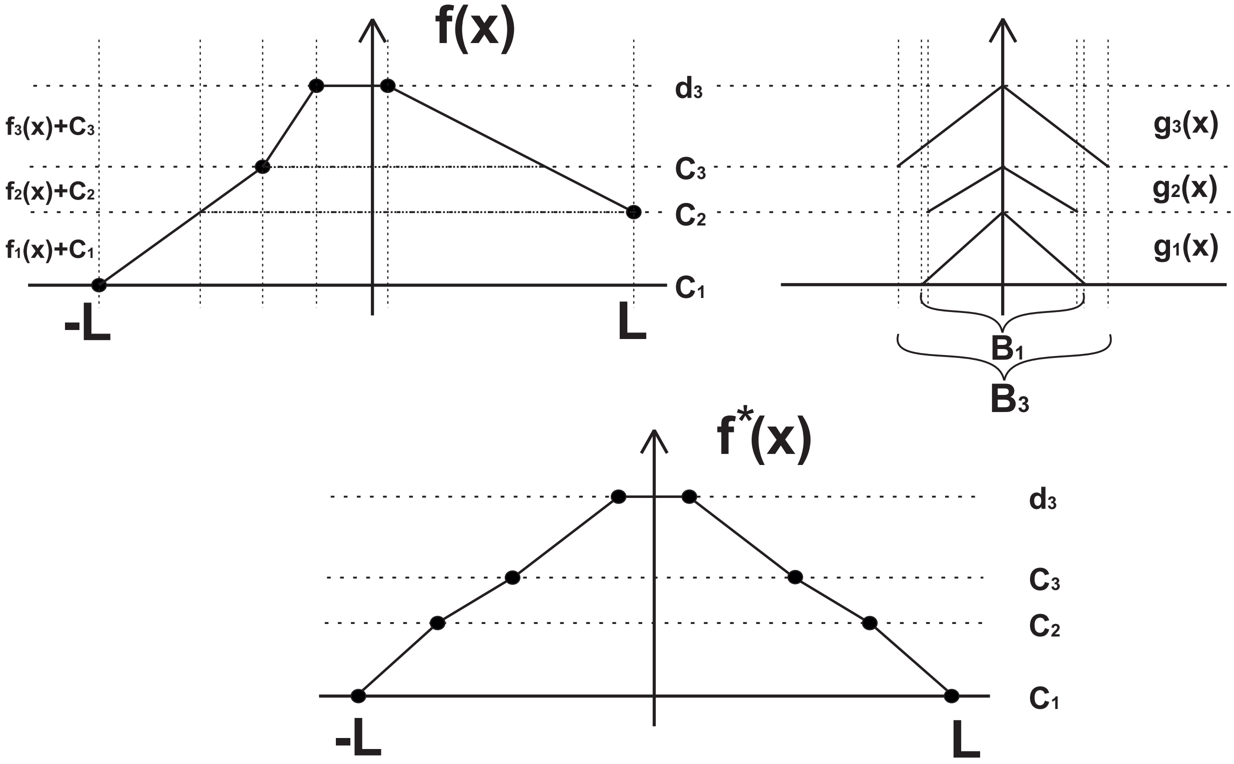


Рис. 1.2.3: Симметризация по слоям.

Теорема 1.2.1 *Пусть дан граф* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$, *такой что для любого ребра графа существует простой путь, содержащий данное ребро, и концами которого служат вершины из* $\partial\Gamma_0$ *(необязательно разные), пусть* $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ *неотрицательна, тогда*

$$\int_\Gamma u'^2 dx \geq \int_0^L (u^*)'^2 dx. \tag{1.2.10}$$

Доказательство. Во-первых, уточним, что под простым путем имеется в виду путь, в котором нет совпадающих ребер. При этом, совпадение вершин допускается.

Удобно разбить доказательство на три шага.

Шаг 1. Рассмотрим набор попарно непересекающихся отрезков $[a_i, b_i]$, где $i = \overline{1, n}$, а $n \geq 2$. Пусть на множестве $\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ определена функция v, сужение которой на каждый отрезок является аффинной функцией с областью значений $[c, d]$ (т.е. область значений одинакова при всех i). Пусть v^* - симметризация Шварца данной функции. Докажем следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} v'^2 dx \geq \int_0^l (v^*)'^2 dx, \tag{1.2.11}$$

где $l = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. Левую часть перепишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} v'^2 dx = (d-c)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i - a_i}, \tag{1.2.12}$$

а правую в виде

$$\int_0^l (v^*)'^2 dx = \frac{4(d-c)^2}{l}. \tag{1.2.13}$$

В силу неравенства о среднем арифметическом и среднем гармоническом имеем

$$(d-c)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i - a_i} \geq \frac{n^2(d-c)^2}{l}, \tag{1.2.14}$$

откуда и следует неравенство (1.2.11), поскольку $n \geq 2$.

Шаг 2. Пусть $v : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ - кусочно-аффинная функция класса $C_0(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Кусочно-аффинной мы называем такую функцию, график которой состоит из конечного числа отрезков. Иными словами, граф Γ допускает разбиение на такие отрезки, что сужение v на каждый из них является аффинной функцией. Покажем что v удовлетворяет неравенству (1.2.10).

Для доказательства достаточно заметить, что область значений такой функции можно разбить на конечное число таких отрезков $[c_i; d_i]$, что функция v

является аффинной на составляющих отрезках прообраза $v^{-1}\{[c_i; d_i]\}$. В качестве такого разбиения всегда можно рассматривать разбиение всей области значений функции ее значениями в точках нарушения аффинности и в вершинах графах (общее количество таких точек конечно). Причем, число таких отрезков будет не меньше двух для всех i, в силу наложенного нами на граф требования. В самом деле, каждый из них содержится внутри некоторого ребра, а значит внутри простого пути начинающегося и заканчивающегося в граничных точках, в которых функция равна нулю. Так как рассматриваемая функция непрерывна, то в силу теоремы Больцано-Коши получаем, что все значения функции на этом отрезке (кроме, может быть, максимального) принимаются ею на всем пути, как минимум, дважды. Применяя доказанное на первом шаге неравенство к каждому $[c_i; d_i]$, затем суммируя эти неравенства по всем i и применяя равенства (1.2.6) и (1.2.9) приходим к требуемому равенству (1.2.10) для функции v.

Шаг 3. Хорошо известно (например, см. [18]), что произвольную функцию из $C^1(\mathbb{R}^n)$ можно приблизить в норме $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ кусочно-аффинными функциями. В силу этого сужение произвольной функции u из $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ на каждое ребро e_i можно приблизить по норме

$$\|u\|^2 = \int_\Gamma u'^2 dx \tag{1.2.15}$$

кусочно-аффинными функциями, причем так, что эти функции будут непрерывными, а следовательно и кусочно-аффинными, на всем графе Γ. А отсюда следует, что неравенство (1.2.10), будучи справедливым для кусочно-аффинных функций, выполняется и для функций из $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. ■.

Требования, предъявленные к графу, больше касаются устройства его границы (любой граф будет удовлетворять этим требованиям, при определенном выборе границы). Они же оказываются и необходимыми условиями справедливости принципа Пойя - Сегё.

В самом деле, рассмотрим произвольный связный граф не удовлетворяющий условию теоремы 1.2.1 (для несвязного графа достаточно рассмотреть каждую компоненту связности в отдельности). Также считаем, что он не содержит петель и вершин кратности 2, так как и то и другое несущественно в вопросе существования простого пути между вершинами. Возможны следующие варианты:

a) Если граф содержит хотя бы одну вершину единичной кратности не входящую в $\partial\Gamma_0$, то в качестве функции-контрпримера подойдет функция равная единице в данной вершине, равная нулю во всех остальных точках графа, кроме того ребра, которое к ней примыкает и линейная на замыкании этого самого ребра (его объединении с вершинами, к которым оно примыкает). При симметризации такой функции (определенной по сути на отрезке) модуль её производной (которая всюду постоянна) возрастет вдвое в каждой точке, соответственно интеграл Дирихле вырастет вчетверо.

b) Если граница состоит из одной вершины единичной кратности, то достаточно рассмотреть функцию линейную на замыкании единственного примыкающего к ней ребра, со значением в противоположной вершине равным единице. На остальной части графа мы положим функцию всюду равной единице. Для построенной функции ситуация аналогична предыдущей и принцип Пойя - Сеге снова не выполняется.

c) Теперь остается рассмотреть случай, когда граница графа состоит из нескольких вершин единичной кратности (существование граничных вершин кратности выше единицы можно исключить путем «разрезания» графа в этих вершинах, т.е. одну вершину кратности k заменяем на k вершин единичной кратности - такое действие, как легко видеть, не сказывается на возможности проложить простой путь между вершинами). Для этого случая рассмотрим множество всех простых путей на данном графе, начинающихся и заканчивающихся в граничных точках, которое обозначим S. Объединение всех этих путей образует граф, который обозначим $\widehat{\Gamma}$. Теперь рассмотрим граф, состоящий из множества ребер графа Γ, которые ни к одному элементу из S не принадлежат (таковые есть по предположению) и множества вершин из Γ, к которым эти ребра примыкают. Обозначим этот граф $\widetilde{\Gamma}$. Теперь рассмотрим множество вершин, которые попали в $\widetilde{\Gamma}$. Заметим, что среди них нет вершин из $\partial\Gamma_0$ - потому как тогда бы существовал простой путь между таковой вершиной v_0 и любой другой вершиной из $\partial\Gamma_0$, не попавшей в $\widetilde{\Gamma}$ (в силу связности), а такой путь обязательно бы содержал единственное ребро, примыкающее к v_0, что противоречит принадлежности этого ребра и вершины v_0 к $\widetilde{\Gamma}$. Далее заметим, что граф $\widehat{\Gamma}$ связен. Действительно, для любых двух его вершин v_1 и v_2 существуют пути (обозначим их s_1 и s_2 соответственно), целиком лежащие в $\widehat{\Gamma}$ и соединяющие их с границей. В свою очередь для любых двух граничных вершин в силу связности Γ существует простой путь соединяющий их между собой, обозначим его s_3. Этот путь по определению целиком содержится в $\widehat{\Gamma}$, а тогда его объединение с путями s_1 и s_2 соединит между собой вершины v_1 и v_2. Теперь возьмем произвольную компоненту связности графа $\widetilde{\Gamma}$ (обозначим её X) и рассмотрим множество тех его вершин, которые принадлежат $\widehat{\Gamma}$, т.е. входят в хотя бы один путь из S. Мы можем утверждать, что количество таковых вершин не больше единицы. В самом деле, пусть найдутся две таковых вершины - x_1 и x_2. Между ними существует простой путь y_1 лежащий целиком внутри X (еще раз напомним, что под простым путем мы понимаем путь в котором нет самопересечений по ребрам, но могут быть самопересечения по вершинам, а для существования такового достаточно лишь связности). С другой стороны, x_1 и x_2 принадлежат $\widehat{\Gamma}$, который связен, а значит тоже содержит простой путь y_2 соединяющий эти две вершины. Отметим, что по построению, y_1 и y_2 не имеют общих ребер, а их объединение, обозначаемое y, будет являться простым циклом. Теперь возьмем ребро из y_2, примыкающее к x_1 (обозначим e_1). Для него существует простой путь z с концами на границе Γ, который его содержит. В случае, если z не содержит никаких других ребер из y_2, то заменив в нем ребро e_1 на простой путь $y \setminus e_1$ мы получим простой путь в Γ, начинающийся и заканчивающийся в точках границы, и который содержит ребра из y_1, что противоречит построению - по нему таким свойством обладают только ребра из $\widehat{\Gamma}$. В случае, если $z \cap (y_2 \setminus e_1) \neq \varnothing$, то из числа вершин входящих в это пересечение выберем ту, которая находится ближе остальных к вершине x_2 (под словом ближе имеется в виду расстояние только на y_2) и обозначим её x_0. Тогда та часть пути y_2, которая соединяет x_0 с x_2 (обозначим z_2) не пересекается с z. Теперь рассмотрим ту часть пути z, которая соединяет вершину x_1 с границей, обозначим её z_1. И ту часть z, которая соединяет вершину x_0 с границей, обозначим её z_0. Естественно, что эти части не имеют общих ребер, а потому рассмотрев множество $z_0 \cup z_1 \cup z_2 \cup y_1$ (для примера см. рис.1.2.4) мы получим простой путь в Γ, начинающийся и заканчивающийся в граничных вершинах и содержащий y_1, что снова является противоречием.

Таким образом, множество X содержит не более одной вершины входящей в хотя бы один путь из S. При этом, вовсе не содержать таких вершин оно также не может по причине связности исходного графа Γ. То есть, в X есть ровно одна вершина, которая содержится в некотором пути из S, обозначим её v_0. Эта вершина соединяет собой подграф X с

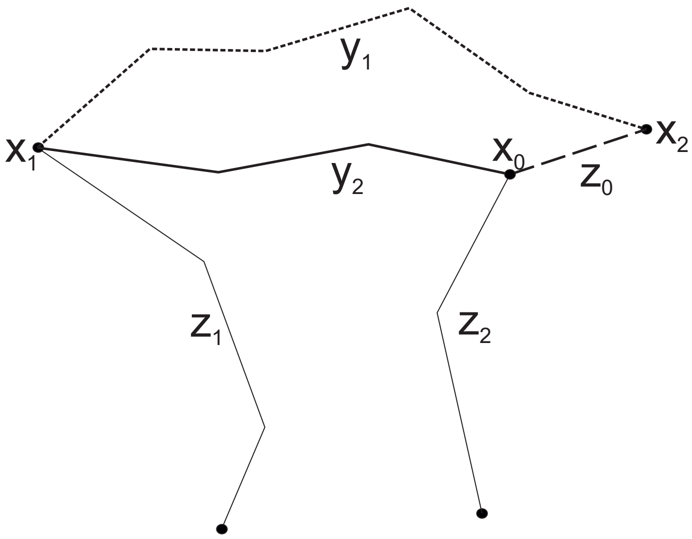


Рис. 1.2.4: Построение контрпримера.

остальной частью графа Γ, т.е. грубо говоря, попасть в X из $\Gamma\setminus X$ можно только через эту вершину. Теперь, рассмотрим X как самостоятельный граф и объявим v_0 его единственной граничной точкой. Заметим, что внутри X вершина v_0 имеет единичную кратность. Если это не так, т.е. в X существует два ребра примыкающих к v_0, то либо в X существует простой цикл, проходящий через v_0, а тогда, объединив его с произвольным путем из S, проходящим через v_0, мы получим простой путь, который по построению должен принадлежать S, что является противоречием. Либо множество $X \setminus v_0$ несвязно и мы можем оставить в рассмотрении лишь одну из его связных компонент. Так или иначе мы в итоге получаем некий граф $X \subset \Gamma$, соединенный с оставшейся частью Γ лишь в одной вершине (объявляемой его границей), имеющей в его рамках единичную кратность, и не содержащий вершин из $\partial\Gamma_0$. Ситуация, имеющая место для графа X, уже была рассмотрена ранее в пункте b), т.о. на X существует функция-контрпример принципу Пойя - Сеге. Доопределив эту функцию нулем всюду на $\Gamma \setminus X$ мы получим требуемый контрпример на всем графе Γ.

Таким образом получено следующее утверждение.

Утверждение 1.2.1 *Условия, описанные в формулировке теоремы 1.2.1, являются необходимыми для выполнения неравенства* (1.2.10) *в классе* $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$.

Разумеется, здесь имеется в виду выполнение неравенства для всего класса одновременно. Обеспечить его выполнение для какой-то отдельной функции класса $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ можно на любом графе.

1.3 Принцип Рэлея для лапласиана на графе

Ключевую роль при оценке первого собственного значения в задаче Штурма - Лиувилля играет принцип Рэлея, сводящий его вычисление к нахождению минимума интеграла Дирихле. Для рассматриваемой нами задачи (1.1.2)-(1.1.3) следующее утверждение является точным аналогом классического принципа Рэлея. Здесь по-прежнему предполагается, что ρ обращается в нуль во внутренних вершинах графа. В ситуации ($\rho \neq 0$) интегралы в принципе Рэлея рассматриваются по более общей мере, но существенных изменений доказательства не требуется.

Теорема 1.3.1 *Собственная функция* u_0*, соответствующая первому собственному значению* λ_0 *задачи* (1.1.2)-(1.1.3) *минимизирует функционал*

$$\Phi(u) = \frac{\int_\Gamma u'^2 dx}{\int_\Gamma u^2 dx}$$

на множестве $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$*, причем минимум в точности равен* λ_0.

Доказательство. Фиксировав функцию $w \in C^1(\Gamma)$ рассмотрим следующий интеграл

$$\int_{e_i} [(u_0 w)'^2(x) - \lambda_0 (u_0 w)^2(x)] dl = \int_{e_i} (u_0^2 w'^2 + u_0'^2 w^2 + 2u_0' w' u_0 w - \lambda_0 u_0^2 w^2) dl.$$

Используя (1.1.2) (в выкладке нам удобно использовать u'' вместо Δu) правую часть преобразуем к виду

$$\int_{e_i} (u_0^2 w'^2 + u_0'^2 w^2 + 2u_0' w' u_0 w + u_0'' u_0 w^2) dl = \int_{e_i} (u_0^2 w'^2 + \frac{d}{dl}(u_0 u_0' w^2)) dl.$$

Обозначив через $V(e)$ множество вершин из V_0, примыкающих к ребру e, последний интеграл преобразуем к виду

$$\int_{e_i} (u_0^2 w'^2) dl - \sum_{v_j \in V(e_i)} \lim_{x \to v_j, x \in e_i} (u_0(x) w^2(x) u_0'(x)). \qquad (1.3.1)$$

Учитывая непрерывность функций u_0 и w, мы будем иметь

$$\lim_{x \to v_j, x \in e_i} (u_0(x) w^2(x) u_0'(x)) = u_0(v_j) w^2(v_j) (u_0)'_{\nu_{ij}},$$

где ν_{ij} - единичный вектор в вершине v_j, направленный внутрь ребра e_i, а потому суммирование равенств (1.3.1) по всем ребрам графа, с учетом того, что u_0 удовлетворяет условиям (1.1.2),(1.1.3), приводит к

$$\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} [(u_0 w)'^2(x) - \lambda_0 (u_0 w)^2(x)] dl = \sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0^2 w'^2 dl.$$

Правая часть последнего равенства, очевидно, неотрицательна, а значит, неотрицательна и левая часть. Кроме того, видно, что правая часть может обращаться в нуль лишь при условии, что $w' \equiv 0$ на каждом ребре графа (напомним, что u_0 положительна в Γ_0). Отсюда и из непрерывности w следует, что эта функция постоянна. Тем самым доказано, что на функциях u вида $u = u_0 w$ (множество таких функций обозначим U) выполняется неравенство

$$\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} [u'^2(x) - \lambda_0 u^2(x)] dl \geq 0. \qquad (1.3.2)$$

Причем равенство достигается только на скалярных кратных функции u_0.

Далее, рассмотрим класс $\widetilde{U}$, состоящий из тех функций из $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности $\partial\Gamma_0$. Чтобы показать, что $\widetilde{U} \subset U$, достаточно положить $w = u/u_0$ и формально доопределить w нулем на границе. Теперь, остается заметить, что произвольную функцию из $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ можно приблизить функциями из $\widetilde{U}$ в норме, определяемой соотношением

$$\|u\|^2 = \int_\Gamma (u'^2 + u^2)dx.$$

Отсюда следует, что (1.3.2) верно для любой функции из $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

1.4 Оценка первого собственного значения

В этом разделе доказывается основной результат данной главы - оценка первого собственного значения задачи (1.1.2),(1.1.3), когда $\rho \equiv 1$ на ребрах и $\rho \equiv 0$ во внутренних вершинах. В комментариях мы приводим более общий результат, допуская отличие от нуля функции ρ во внутренних вершинах.

Теорема 1.4.1 *При сделанных выше предположениях относительно функции ρ, для графа Γ, удовлетворяющего условиям теоремы 1.2.1, имеет место следующая оценка первого собственного значения задачи* (1.1.2),(1.1.3)*:*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma))^2}. \tag{1.4.1}$$

Доказательство. Пусть, по-прежнему, u_0 – собственная функция, отвечающая λ_0, а u_0^* - ее симметризация; напомним, что последняя функция в силу леммы 1.2.1 принадлежит классу PC_0^1. Из теоремы 1.3.1 получаем:

$$\lambda_0 = \frac{\sum\limits_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0'^2(x) dl}{\sum\limits_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0^2(x) dl}. \tag{1.4.2}$$

Из свойств симметризации:

$$\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0^2 dl = \int_0^L u_0^{*2} dx; \ \sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0'^2 dl \geq \int_0^L (u_0^*)'^2 dx,$$

(см. соотношения (1.2.1),(1.2.10)) получаем:

$$\lambda_0 \geq \frac{\int_0^L (u_0^*)'^2(x) dx}{\int_0^L u_0^{*2}(x) dx}.$$

Но правая часть последнего неравенства в силу классического принципа Рэлея не меньше первого собственного значения простейшей задачи Штурма - Лиувилля на отрезке:

$$u'' + \lambda u = 0,$$

$$u(0) = u(L) = 0,$$

которое равно

$$\frac{\pi^2}{L^2} = \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma))^2},$$

что и требовалось. ■

Заметим, что полученная оценка является точной - в случае графа-отрезка в (1.4.1) достигается равенство. Кроме того, можно найти нетривиальный граф, со сколь угодно малой разницей между левой и правой частями (1.4.1).

1.5 Комментарии к главе.

Интересно заметить, в качестве первого комментария, что наша оценка первого собственного значения согласуется (при $n = 0$) с асимптотической формулой:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2(n+1)^2}{(\mu(\Gamma))^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

полученной М.Г. Завгородним (см. [9]).

В качестве второго комментария отметим, что в общем случае, если геометрические условия на граф, сформулированные в теореме 1.2.1, нарушаются, но граница остается непустой, то получается только более грубая оценка:

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{4(\mu(\Gamma))^2}.$$

Для получения этой оценки достаточно заметить, что удвоение каждого ребра исходного графа приводит к такому графу, который удовлетворяет требованиям теоремы 1.2.1. В случае графа-отрезка, у которого только один конец объявляется граничной вершиной, в данной оценке возникает равенство.

В качестве третьего комментария заметим, что наличие сосредоточенных масс не препятствует получению точной оценки первого собственного значения задачи (1.1.2),(1.1.3). Более того, пусть $\rho(x)$ есть произвольная неотрицательная функция из $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Мы покажем как этот случай свести к рассмотренному выше и приведем соответствующую оценку. Описание конструкции мы позволим себе провести на примере изображенном на следующем рисунке 1.5.1 (перенос этого построения на общий случай тривиален).

Во-первых, заметим, что рассуждения, проведенные в ходе доказательства теоремы 1.3.1, в данном случае приводят к формуле

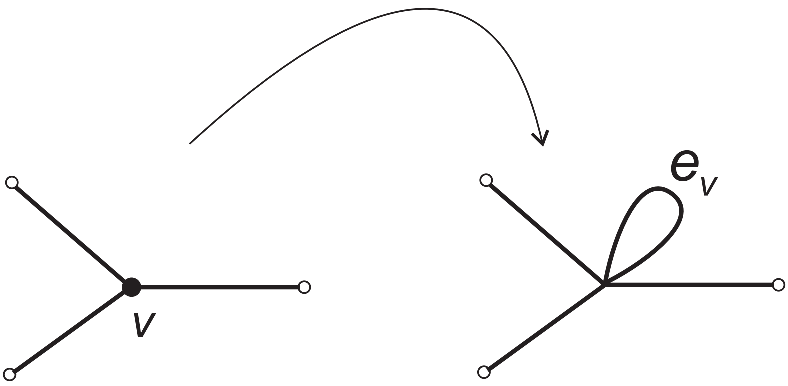


Рис. 1.5.1: Преобразование графа с массой в вершине.

$$\lambda_0 = \min_{u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)} \frac{\int_\Gamma u'^2 dx}{\int_\Gamma \rho u^2 dx + \sum\limits_{v_i \in V_0} m_i u^2(v_i)}, \tag{1.5.1}$$

где m_i – масса вершины v_i (m_i есть $\rho(v_i)$). Графу Γ, в вершине v которого сосредоточена масса величины m, ставим в соответствие граф $\widetilde{\Gamma}$, не имеющий массы в вершине v и получающийся из исходного добавлением петли единичной длины, которая начинается и заканчивается в вершине v. Функцию u, заданную на Γ, доопределяем на $\widetilde{\Gamma}$ до функции $\tilde{u}$, которая всюду на e_v равна $u(v)$. Функцию ρ на каждом добавленном к Γ ребре e_v определим равной $\rho(v)$. Легко видеть, что $\tilde{u} \in C_0^1(\widetilde{\Gamma}_0, \partial\widetilde{\Gamma}_0)$ и выполнено

$$\sum_{v_i \in V_0} m_i u^2(v_i) + \int_\Gamma \rho u^2 dx = \int_{\widetilde{\Gamma}} \rho \tilde{u}^2 dx; \ \int_\Gamma u'^2 dx = \int_{\widetilde{\Gamma}} \tilde{u}'^2 dx. \tag{1.5.2}$$

Тогда, согласно теореме 1.3.1, соотношениям (1.5.2) и оценке (1.4.1) получим

$$\lambda_0 = \frac{\int_\Gamma {u_0'}^2 dx}{\int_\Gamma \rho u_0^2 dx + \sum\limits_{v_i \in V_0} m_i u_0^2(v_i)} = \frac{\int_{\widetilde{\Gamma}} \tilde{u}_0'^2 dx}{\int_{\widetilde{\Gamma}} \rho \tilde{u}_0^2 dx} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\rho_0} \left(\min_{u \in C_0^1(\widetilde{\Gamma}_0, \partial\widetilde{\Gamma}_0)} \frac{\int_{\widetilde{\Gamma}} u'^2 dx}{\int_{\widetilde{\Gamma}} u^2 dx} \right) \geq \frac{\pi^2}{\rho_0 (\mu(\widetilde{\Gamma}))^2} = \frac{\pi^2}{\rho_0 (\mu(\Gamma) + K_v)^2},$$

где ρ_0 есть максимум функции ρ на Γ, а K_v есть количество вершин в V_0. При этом, если мерой исходного графа считать сумму длин ребер и сумму масс вершин, т.е. положить её равной $\mu(\Gamma) + K_v$, то оценка собственного значения сохранит прежний вид. В итоге, получено следующее утверждение.

Теорема 1.5.1 *Пусть дан граф* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$, *такой что для любого ребра графа существует простой путь, содержащий данное ребро, и концами которого служат вершины из* $\partial\Gamma_0$ *(необязательно разные), пусть* $\rho \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ *неотрицательна, тогда первое собственное значение задачи* (1.1.2),(1.1.3) *имеет следующую оценку:*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{\rho_0(\mu(\Gamma) + K_v)^2}, \tag{1.5.3}$$

где ρ_0 *есть максимум функции* ρ *на* Γ, *а* K_v *есть количество вершин в* V_0.

II Оценка первого собственного значения в задаче Штурма - Лиувилля на стратифицированном множестве.

2.1 Основные понятия.

Используемая далее терминология заимствована в основном из [9], ограничиваясь очень краткими комментариями в отношении вводимых понятий (в той мере, в какой это требуется для данной работы). В силу этого, за подробностями отсылаем к упомянутой книге.

2.1.1 Стратифицированное множество.

Связное замкнутое подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется стратифицированным, если оно представлено в виде объединения открытых подмногообразий $\sigma_{kj} \subset \Omega$ пространства $\mathbb{R}^n$, называемых стратами, примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса. В обозначении σ_{kj} первый индекс означает размерность страта, а второй его номер при автономной нумерации стратов данной размерности. Будем писать $\sigma_{li} \prec \sigma_{kj}$ или $\sigma_{kj} \succ \sigma_{li}$ и говорить, что σ_{li} примыкает к σ_{kj} , если $l < k$ и $\sigma_{li} \subset \partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma_{kj}} \setminus \sigma_{kj}$. Страт σ_{kj} назовем свободным, если в Ω нет стратов к которым бы он примыкал. К примеру, страты старшей размерности всегда будут являться свободными.

Обозначим через Σ множество всех стратов из Ω. Мы предполагаем выполненными следующие два условия, первое из которых – обычное требование на примыкания клеток в клеточном комплексе.

- Любые два страта не пересекаются, а их замыкания либо не пересекаются, либо их пересечение является объединением стратов из Σ. Граница страта σ_{kj} является объединением стратов, размерность которых меньше k.

- Для любого $X \in \sigma_{k-1i}$ «звезда»

$$S = \sigma_{k-1i} \cup (\bigcup_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \sigma_{kj})$$

допускает локальное (вблизи X) выпрямление, что означает существование такой окрестности V точки X в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такого диффеоморфизма $\Phi : V \to W$, что образ множества $V \cap S$ представляет собой объединение $(k-1)$-мерного шара (образа части σ_{k-1i}, попавшей в V) и примыкающих к нему полушарий (аналогичных образов частей σ_{kj}).

Наглядно это представлено на рис.2.1.1

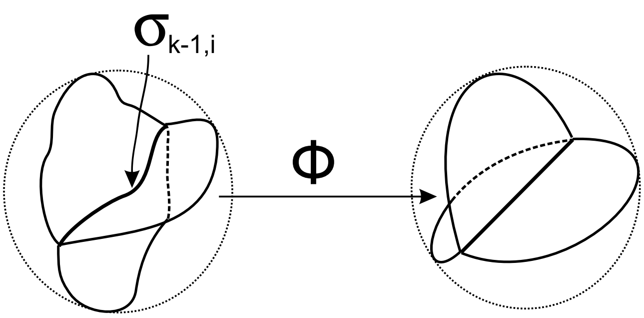


Рис. 2.1.1: Локальное выпрямление звезды.

Вообще говоря, следует рассматривать стратифицированное множество как тройку (Ω, Σ, ϕ), где ϕ - отображение описывающее «склейку» Ω из стратов семейства Σ), а Σ множество всех стратов из Ω, но нам будет удобнее называть стратифицированным множеством само Ω (наличие Σ и ϕ при этом всегда предполагается).

Кроме того, стоит отметить, что с одной стороны само стратифицированное множество не имеет какой-либо конкретной размерности, однако, как правило, множество, старшая размерность стратов которого равна d, называют d-мерным стратифицированным множеством. Так, например, граф будет именоваться одномерным стратифицированным множеством. В данной главе мы будем рассматривать прежде всего стратифицированные множества с, так называемым, мягким лапласианом, причем свободные страты которого имеют одинаковую размерность. Для него такой подход будет уместен. Однако, в общей ситуации подобная информация несет в себе не много пользы, потому как чаще всего приходится одновременно рассматривать страты сразу нескольких размерностей.

Топология на Ω индуцируется стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. подмножество Ω_0 стратифицированного множества Ω называется открытым, если существует открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ пересечение которого с Ω дает Ω_0. Все дальнейшие топологические понятия будут связаны именно с этой топологией.

Пусть Ω_0 - связное и открытое подмножество Ω, составленное из стратов семейства Σ и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Тогда разность $\Omega \setminus \Omega_0$, очевидно, является границей множества Ω_0 и будет тоже состоять из стратов, а потому будет естественным обозначить её через $\partial\Omega_0$. В дальнейшем, под обозначением $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ мы будем понимать, что данное стратифицированное множество Ω разбито на Ω_0 и $\partial\Omega_0$ указанным способом. Как нетрудно видеть, определенные в предыдущей главе понятия внутренности графа и его границы полностью согласуются с таким определением границы на стратифицированном множестве. Более того, имеют место аналогичные комментарии: непустота границы и включение в нее свободных стратов являются допустимыми, но в конкретных задачах это, как правило, не имеет под собой смысла. В данной работе мы такие случаи исключаем.

Стоит отметить, что произвольное компактное подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ может быть представлено в виде стратифицированного множества (т.е. разбито на страты) различными способами. В свою очередь, каждое из таких стратифицированных множеств может быть разбито на внутренность и границу также несколькими способами. И то и другое разбиение определяется контекстом рассматриваемой задачи, прежде всего физическим. При рассмотрении некоего объекта вместе с неким происходящим на нем процессом, получаемая стратификация будет определяться структурой этого объекта, тогда как описание процесса может потребовать рассмотрения границы множества. Например, в задачах о колебаниях граница будет представлять собой ту часть объекта, которая закреплена, т.е. колебаниям не подвергается.

В качестве очень простого примера стратифицированного множества рассмотрим следующий. Возьмем произвольный двумерный многоугольник. Множество его внутренних точек объявим двумерным стратом. Вершины многоугольника объявим нульмерными стратами, а связные компоненты оставшейся части (т.е. ребра многоугольника) объявим одномерными стратами. Границей такого множества можно выбрать любое замкнутое подмножество границы многоугольника (границы в ее обычном понимании).

Также нам понадобится следующее понятие кратности страта. Фиксируем страт σ_{kj}. Для каждого страта $\sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{kj}$ обозначим через $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,j})$ число примыканий σ_{kj} к $\sigma_{k+1,j}$. Сумма

$$\sum_{\sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{kj}} \nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,j})$$

называется кратностью страта σ_{kj}. На приведенном рисунке 2.1.2 будем иметь $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,i}) = 2$, $\nu(\sigma_{kj}, \sigma_{k+1,m}) = 1$, а поэтому кратность σ_{kj} равна 4.

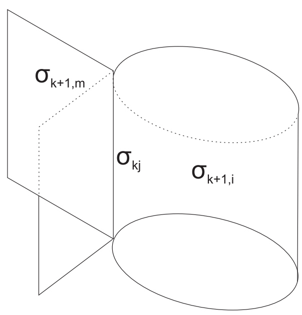


Рис. 2.1.2: К кратности страта.

2.1.2 Мера и интеграл Лебега на стратифицированном множестве.

Рассмотрим стратифицированное множество Ω. На каждом его страте σ_{kj} имеется обычная $k-$мерная мера Лебега, которую обозначим μ_k. Назовем подмножество $\omega \subset \Omega$ измеримым, если измеримы по Лебегу пересечения $\omega \cap \sigma_{kj}$ по всем значениям индексов k и j. Меру такого множества определим как

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}).$$

Как нетрудно убедиться, таким образом определенные измеримые множества образуют σ-алгебру, а функция μ обладает свойствами меры. Измеримые по мере μ функции определяются также как и в классическом случае, т.е. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если при всех $t \in \mathbb{R}$ измеримы множества $\{x \in \Omega : f(x) > t\}$. Интеграл Лебега суммируемой функции f на Ω оказывается равным сумме интегралов Лебега сужений этой функции на страты, т.е.

$$\int\limits_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{k,j} \int\limits_{\sigma_{kj}} f \, d\mu_k,$$

где суммирование осуществляется по всем стратам.

В соответствии с этим, пространство $L^p(\Omega)$ определяется как пространство измеримых на Ω функций f, таких, что $|f|^p$ суммируема, т.е. $\int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty$. Норма в этом пространстве определяется также как и в классическом случае:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

Пусть $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$, обозначим через $C(\Omega_0)$ множество непрерывных на Ω_0 функций. Аналогично, $C(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ (или просто $C(\Omega)$) есть функции непрерывные на всем Ω. Через $C^1_\mu(\Omega_0)$ обозначим множество таких функций на множестве Ω, что их сужения на любой страт из Ω_0 являются непрерывно дифференцируемыми функциями и, вдобавок, для каждого страта из Ω_0 существуют непрерывные продолжения производной сужения функции на этот страт до точек тех его граничных стратов, которые лежат в Ω_0. Через $C_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ обозначим множество тех функций из $C(\Omega)$, которые обращаются в нуль на $\partial\Omega_0$. Также положим $C_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0) = C_\mu^1(\Omega_0) \cap C_0(\Omega_0, \partial\Omega_0)$. Теперь мы можем определить стратифицированный аналог пространства $W_0^{1,p}$ как пополнение пространства $C_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ по норме

$$\|f\|_0^{1,p} = \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Здесь ∇f на каждом $k-$мерном страте есть классический $k-$мерный градиент сужения функции на данный страт. Обозначать данное пространство будем $W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ Аналогично, пространство $W^{1,p}(\Omega)$ определяется как пополнение пространства $C_\mu^1(\Omega)$ по норме

$$\|f\|^{1,p} = \left(\int\limits_{\Omega} (|f|^p + |\nabla f|^p) \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Наконец, для удобства будем использовать обозначение вида $\mu_i(\Omega)$ - есть суммарная мера всех i-мерных стратов входящих в Ω.

2.1.3 Дивергенция и лапласиан на стратифицированном множестве.

Пусть в каждой точке $X \in \Omega$ задан вектор $\vec{F}(X)$ в $\mathbb{R}^n$. Так заданное векторное поле F назовем касательным к Ω_0, если для любого страта $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любого $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному пространству $T_X\sigma_{kj}$.

Дивергенцией касательного векторного поля F в точке $X \in \sigma_{k-1i}$ назовем следующее выражение:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_{k-1} \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} \vec{F}_{\nu_j}(X). \qquad (2.1.1)$$

Здесь $\nabla_{k-1} \cdot \vec{F}(X)$ - обычная $(k-1)$-мерная дивергенция в точке X сужения $\vec{F}$ на страт σ_{k-1i}, рассматриваемый как риманово многообразие с метрикой, индуцированной его вложением в $\mathbb{R}^n$, а $\vec{F}_{\nu_j}(X)$ - скалярное произведение единичного вектора ν_j ортогонального σ_{k-1i} в точке X (направленного внутрь страта σ_{kj}) и предельного значения $\vec{F}_{\nu_j}(Y)$ когда $Y \in \sigma_{kj}$ стремится к X.

В [9] можно найти выражение дивергенции через риманову метрику на стратифицированном множестве. Однако здесь нам это не потребуется.

Так определенная дивергенция имеет смысл, например, для полей обладающих следующими свойствами:

- сужения поля на страты из Ω_0 являются непрерывно дифференцируемыми,
- сужение поля $\vec{F}$ на страт σ_{kj} может быть продолжено по непрерывности на любой страт $\sigma_{k-1i} \subset \Omega_0$, примыкающий к σ_{kj}.

Множество таких векторных полей обозначим через $\vec{C}^1(\Omega_0)$. Множество полей, для которых второе требование выполнено для всех $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и для всех $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj} \subset \Omega_0$, в том числе и лежащих в $\partial\Omega_0$, обозначим через $\vec{C}^1(\Omega)$.

Можно показать, что так определенная дивергенция, в полной аналогии с классическим случаем, является плотностью потока векторного поля, отнесенного к мере μ.

Если $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, то через ∇u обозначается векторное поле обычных градиентов сужений u на страты из Ω_0.

Обозначим через $C^2(\Omega_0)$ множество таких функций $u \in C(\Omega_0)$, что $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. Для функций из $C^2(\Omega_0)$ имеет смысл следующее дифференциальное выражение

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (p \nabla u) \qquad (2.1.2)$$

когда функция $p : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ такова, что $p\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. Так будет, например, в случае $p \equiv 1$. В этом случае соответствующий оператор естественно назвать лапласианом; в работе [9] он называется жестким лапласианом, а случай когда $p \equiv 1$ только на «свободных» стратах, и $p \equiv 0$ на оставшейся части Ω_0 - мягким лапласианом.

Подробное выражение лапласиана в точке $X \in \sigma_{k-1i}$, в силу формулы для дивергенции, имеет вид

$$\nabla \cdot (p\nabla u) = \nabla_{k-1} \cdot (p\nabla u) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1i}} (p\nabla u)_{\nu_j}. \qquad (2.1.3)$$

Заметим, что на свободных стратах остается только классическая часть $\nabla_{k-1} \cdot (p\nabla u)$. Вместе с тем, в случае мягкого лапласиана на стратах не являющихся свободными исчезает как раз классическая часть, более того, в стратах размерности k, которые не являются свободными и при этом не примыкают ни к одному свободному страту размерности $k+1$, мягкий лапласиан автоматически равен нулю.

Разница между жестким и мягким лапласианом может быть проиллюстрирована следующим примером из механики. Пусть имеется механическая система, схематически изображенная на следующем рисунке 2.1.3.

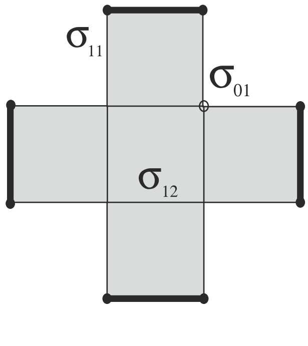


Рис. 2.1.3: К механическому примеру.

Будем считать, что система «сшита» из пяти квадратных мембран (двумерные страты на рисунке). В качестве граничных возьмем выделенные жирными линиями одномерные страты. В них система будет считаться закрепленной. Остальная часть может испытать поперечное перемещение под действием малой, ортогональной к первоначальной плоскости, нагрузки. Тогда перемещения системы описываются в точности уравнением $-\Delta_p u = f$ с мягким лапласианом. Если f разрешается претерпевать скачки при переходе через одномерные страты, то вместо привычного уравнения Пуассона возникает (например, на страте σ_{12}) соотношение:

$$-(\frac{\partial u}{\partial \nu_1} + \frac{\partial u}{\partial \nu_1}) = f,$$

где фигурируют две производные по ортогональным к σ_{12} направлениям. В левой части стоит как раз мягкий лапласиан. На двумерных стратах уравнение является обычным уравнением Пуассона, если f непрерывна. В нульмерных стратах никаких дифференциальных соотношений нет.

Если теперь считать, что одномерные страты изображают струны, связанные друг с другом в нульмерных стратах, то возникает жесткий лапласиан. Например, на том же страте σ_{12} уравнение будет таким:

$$-u'' - (\frac{\partial u}{\partial \nu_1} + \frac{\partial u}{\partial \nu_2}) = f,$$

где u'' - производная по направлению страта (одномерный лапласиан). Но теперь в точке стыка четырех струн - страте σ_{01} тоже возникает дифференциальное соотношение. А именно,

$$-\sum \frac{\partial u}{\partial \nu_i} = f,$$

где слева суммируются производные по четырем векторам $\vec{\nu}_i$, направленным от страта σ_{01} внутрь четырех одномерных стратов к нему примыкающих. Все это оттого, что коэффициент p, который на каждом страте описывает натяжение (в случае струн) или напряжение (в случае мембран), отличен от нуля всюду.

2.2 Задача на собственные значения оператора Лапласа и принцип Рэлея на стратифицированном множестве.

Будем рассматривать следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta_p u + \lambda \rho u = 0 \tag{2.2.1}$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0. \tag{2.2.2}$$

Напомним, что случаи жесткого и мягкого лапласианов отличаются тем, что в первом $p \equiv 1$, а во втором p, оставаясь равной единице на свободный стратах, равна нулю на остальных. На показатель ρ мы накладываем такие же требования, как и на p. Всюду далее, через d будем обозначать максимальную размерность стратов входящих в Ω_0.

В силу этих предположений, в случае мягкого лапласиана и для стратифицированного множества у которого свободными являются только страты старшей размерности, уравнение (2.2.1) на стратах размерности $(d-1)$ сводится к

$$\sum_{\sigma_{dj} \succ \sigma_{d-1i}} (\nabla u)_{\nu_j} = 0, \tag{2.2.3}$$

а на стратах еще меньшей размерности Δ_p оказывается нулевым оператором. В случае жесткого лапласиана достаточно в формуле (2.1.3) положить $p = 1$.

Сразу оговоримся, что мы предполагаем верными существование и положительность минимального собственного значения и положительность соответствующей собственной функции. Для одномерных стратифицированных множеств этот вопрос решен в [9]. Абстрактная схема, приведенная там, годится и для изучения общего случая.

Кроме того, при рассмотрении мягкого лапласиана будем считать что стратифицированное множество не имеет свободных стратов размерности ниже старшей. Формально это не требуется в вопросах обсуждаемых в этой работе, поскольку на разрешимости задачи (2.2.1),(2.2.2) мы не останавливаемся (она у нас предполагается). Тем не менее при отсутствии этого дополнительного условия задача может оказаться разрешимой лишь случайно. В самом деле, рассмотрим стратифицированное множество, изображенное на следующем рисунке 2.2.1, в котором это условие не выполняется.

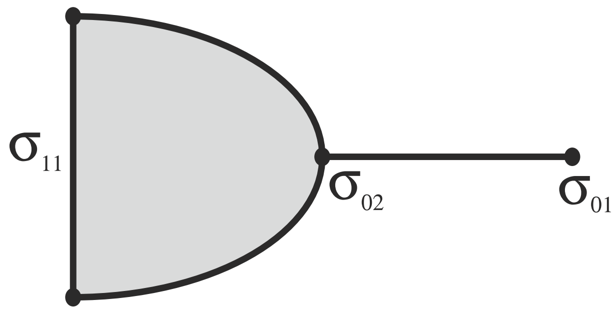


Рис. 2.2.1: Пример недопустимого множества.

В этом случае задача (2.2.1),(2.2.2) (в условиях мягкого лапласиана) распадается на две независимые задачи на собственные значения, которые друг с другом связаны только условием непрерывности в точке стыка двух свободных стратов - одномерного и двумерного. А именно, на одномерном страте получается обычная задача Штурма-Лиувилля для оператора $-u''$ с нулевым условием Дирихле в страте σ_{01} и нулевым условием Неймана в страте σ_{02}. На двумерном страте получаем задачу на собственные значения для обычного лапласиана с нулевым условием Дирихле на прямом участке границы этого страта и нулевым условием Неймана на изогнутом участке его границы. Мы не можем гарантировать, что в спектрах этих двух задач есть хотя бы одно общее собственное значение. Наше условие призвано не допустить подобного распадания задачи на независимые. Кстати говоря, если мы рассмотрим жесткий лапласиан на стратифицированном множестве, изображенном на рисунке, то задача (2.2.1),(2.2.2) уже не распадается.

Оценка первого собственного значения рассматриваемой задачи будет проводится по той же схеме, которая был использована в случае графа.

Сформулируем и докажем первый из вспомогательных результатов - принцип Рэлея. Доказательство проведем для случая мягкого лапласиана (комментарии относительно случая жесткого лапласиана будут приведены ниже).

Теорема 2.2.1 (Принцип Рэлея) *Пусть λ_0 первое собственное значение задачи* (2.2.1)-(2.2.2), *а u_0 – соответствующая ему положительная собственная функция, тогда для любой $u \in C^1(\Omega_0) \cap C_0(\Omega) = U_0$ имеет место следующее неравенство:*

$$\int\limits_{\Omega_0} \rho u^2 \, d\mu \leq \frac{1}{\lambda_0} \int\limits_{\Omega_0} p|\nabla u|^2 \, d\mu. \tag{2.2.4}$$

Причем равенство достигается на функциях вида $v = const \cdot u_0$ и только на них. Интеграл стоящий в правой части называется интегралом Дирихле.

Доказательство. Напомним, что в случае мягкого лапласиана имеем $p = 1$ на свободных стратах и $p = 0$ на остальных, и то же самое относительно ρ.

Для любой функции $w \in C^1(\Omega_0)$ имеем

$$\int\limits_{\sigma_{di}} [(\nabla(u_0 w))^2 - \lambda_0 (u_0 w)^2] d\mu = \int\limits_{\sigma_{di}} [(\nabla u_0)^2 w^2 + (\nabla w)^2 u_0^2 + 2u_0 w \nabla u_0 \nabla w - \lambda_0 u_0^2 w^2] d\mu, \tag{2.2.5}$$

где d - максимальная размерность стратов из Ω_0. В силу того что u_0 удовлетворяет уравнению (2.2.1) правая часть преобразуется к виду

$$\int\limits_{\sigma_{di}} [(\nabla u_0)^2 w^2 + (\nabla w)^2 u_0^2 + 2u_0 w \nabla u_0 \nabla w + u_0 w^2 \triangle u_0]\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{\sigma_{di}} (\nabla w)^2 u_0^2\, d\mu + \int\limits_{\sigma_{di}} \nabla \cdot (u_0 w^2 \nabla u_0)\, d\mu.$$

Здесь мы написали Δ вместо Δ_p, поскольку на стратах старшей размерности Δ_p совпадает с классическим лапласианом. Для проверки последнего равенства достаточно переписать в подробном виде дивергенцию во втором интеграле в правой части.

Применив ко второму интегралу в правой части формулу Гаусса-Остроградского получим:

$$\int\limits_{\sigma_{di}} \nabla \cdot (u_0 w^2 \nabla u_0)\, d\mu = -\int\limits_{\partial\sigma_{di}} (u_0 w^2 \nabla u_0) \cdot \nu_i\, d\mu = -\int\limits_{\partial\sigma_{di}} u_0 w^2 \frac{\partial u_0}{\partial \nu_i}\, d\mu;$$

знак минус перед интегралом возник ввиду того, что мы пользуемся внутренними нормалями.

Далее, на $\partial\sigma_{di} \bigcap \partial\Omega_0$ мы, в силу (2.2.2), имеем

$$\int\limits_{\sigma_{di}} [(\nabla(u_0 w))^2 - \lambda_0 (u_0 w)^2]\, d\mu = \int\limits_{\sigma_{di}} (\nabla w)^2 u_0^2\, d\mu - \int\limits_{\partial\sigma_{di} \setminus \partial\Omega_0} u_0 w^2 \frac{\partial u_0}{\partial \nu_i}\, d\mu$$

Просуммировав по всем стратам максимальной размерности получим

$$\int\limits_{\sigma_d} [(\nabla(u_0 w))^2 - \lambda_0 (u_0 w)^2]\, d\mu = \int\limits_{\sigma_d} (\nabla w)^2 u_0^2\, d\mu - \int\limits_{\sigma_{d-1}} u_0 w^2 \sum_{\sigma_{dj} \succ \sigma_{d-1i}} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_j}\, d\mu$$

где через σ_d обозначено объединение всех d-мерных стратов, а через σ_{d-1} объединение $(d-1)$-мерных стратов лежащих в Ω_0. Здесь мы воспользовались непрерывностью на Ω_0 функции $u_0 w^2$, что позволило вынести ее из под знака суммы. При этом, сама сумма в силу (2.2.3) исчезает и мы приходим к

$$\int\limits_{\sigma_d} [(\nabla(u_0 w))^2(x) - \lambda_0 (u_0 w)^2(x)]\, d\mu = \int\limits_{\sigma_d} (\nabla w)^2 u_0^2\, d\mu. \qquad (2.2.6)$$

Правая часть неотрицательна, а следовательно неотрицательна и левая часть этого равенства, а в силу того, что $u_0 > 0$ правая часть равна нулю лишь при $|\nabla w| = 0$. Отсюда, так как w непрерывна, получим что $w = const$. Таким образом, получаем что на множестве $\widetilde{U} = \{u \in U_0 : u = u_0 w$, где $w \in C^1(\Omega_0)\} \subseteq U_0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\sigma_d} [|\nabla u|^2 - \lambda_0 u^2]\, d\mu \geq 0,$$

которое при текущих предположениях относительно функций p и ρ, очевидно, эквивалентно

$$\int\limits_{\Omega_0} [p|\nabla u|^2 - \lambda_0 \rho u^2]\, d\mu \geq 0,$$

причем равенство возможно лишь на собственной функции u_0 соответствующей λ_0. Тем самым (2.2.4) доказано для функций из $\widetilde{U}$. Несмотря на то, что $\widetilde{U}$ не совпадает с множеством U_0, в $\widetilde{U}$ содержится множество U_{00} функций, обращающихся в нуль в окрестности границы. Этого оказывается достаточно, поскольку в норме пространства $W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ множество U_{00} плотно в U_0. ■

В действительности, плотность U_{00} в U_0 не такой уж очевидный факт, так как на стратифицированном множестве нет естественной операции свертки, а потому сглаживание по Фридрихсу-Соболеву на них не переносится. В этом случае работает сглаживание по Стеклову; в каждой точке X функция заменяется на среднее по «стратифицированному шару» фиксированного радиуса с центром в X - пересечению обычно шара $B_r(X)$ с Ω.

Замечание 2.2.1 *Очевидным образом неравенство* (2.2.4) *переносится на функции из соболевского пространства* $W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$.

В случае жесткого лапласиана теорема 2.2.1 полностью сохранит свой вид, а доказательство проводится совершенно аналогичным образом. Отличие состоит в том, что помимо стратов старшей размерности придется рассмотреть все страты входящие в Ω_0. При этом, выражения вида $\sum_{\sigma_{nj} \succ \sigma_{n-1i}} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_j}$ уже не будут обращаться в нуль на каждом страте, но при суммировании по всему Ω_0 содержащие их интегралы будут уничтожаться. То же самое касается и случая мягкого лапласиана для множеств свободные страты которых необязательно имеют одинаковые размерности.

2.3 Симметризация Шварца на стратифицированном множестве. Изопериметрическое неравенство.

Как и в случае графа, на стратифицированном множестве нам понадобится аналог симметризации Шварца. Самый очевидный вариант - определить её точно так же как и в случае графа: стратифицированному множеству Ω ставим в соответствие шар такой же меры. Однако тут же возникает вопрос - какой размерности должен быть этот шар? В самом деле, ключевой параметр при симметризации есть мера, но множество Ω может состоять из стратов различных размерностей и соотношение между их мерами может варьироваться очень существенным образом. Например, выглядит логичным выбор старшей размерности в качестве основной, но страты этой размерности могут иметь меру настолько незначительную в сравнении с остальными, что их наличием можно пренебречь. С другой стороны, симметризация носит совершенно прикладной характер и здесь допустимым является любой выбор, а уже дальнейшее его существование зависит от применимости такого подхода к той или иной задаче и от тех свойств, которыми такая симметризация будет обладать. Таким образом, ответ на поставленный вопрос определяется исключительно потребностями задачи в рамках которой планируется применять симметризацию.

Например, в случае мягкого лапласиана при рассмотрении интеграла Дирихле имеют значение лишь свободные страты. Если все они имеют одинаковую размерность (а мы условились считать, что это именно так), то в качестве симметризации будем рассматривать шар именно этой размерности. Что касается остальных случаев, то те задачи, для которых будет использоваться симметризация, тем или иным образом, будут к нему сведены. Поэтому нам будет достаточно рассмотреть симметризацию лишь для случая мягкого лапласиана на множестве, все свободные страты которого имеют одинаковую размерность. В результате, при симметризации будем учитывать только свободные страты и те их граничные страты, которые имеют размерность на единицу меньше. Что касается общего случая стратифицированного множества, то так как для него объем множества (ровно как и его периметр) может зависеть от стратов сразу нескольких различных размерностей, а их вклад в объем (периметр) может быть любым, то мы не можем рассматривать в качестве симметризации множества шар какой-либо одной фиксированной размерности. Можно предположить, что один из общих вариантов симметризации на стратифицированном множестве можно было бы сформулировать так: рассматриваются только страты вносящие ненулевой вклад в интеграл Дирихле (определяется условием задачи), затем для каждой размерности берется суммарная мера стратов имеющих такую размерность и им в соответствие ставится шар той же меры и той же размерности. Таким образом при симметризации одному стратифицированному множеству ставится в соответствие набор шаров разной размерности, суммарная мера которых совпадает с мерой всего стратифицированного множества (точнее той её части, которая фигурирует в интеграле Дирихле).

Как уже отмечалось, применимость симметризации определяется её свойствами. В контексте рассматриваемых нами задач главное из них - принцип Пойя - Сеге. В сущности наличие этого принципа сводится к наличию изопериметрического неравенства. Напомним, что на плоскости (в своей простейшей формулировке) оно означает, что среди всех фигур заданной площади круг имеет наименьший периметр. В общем случае оно дает оценку снизу на соотношение n-й степени площади поверхности и $(n-1)$-й степени объема множества (всюду далее такое соотношение будем называть *изопериметрическим частным* рассматриваемого множества) через аналогичное соотношение для шара (произвольного радиуса). Мы не говорили о нем в явном виде в предыдущей главе, когда рассматривались графы, в силу того что это было бы лишним, хотя использовали тот факт, что симметризация не увеличивает число граничных точек лебеговых множеств. Однако в случае стратифицированного множества без явного рассмотрения изопериметрического неравенства не удается обойтись.

В классическом случае изопериметрическое неравенство позволяет говорить, что меры границ лебеговых множеств при симметризации не возрастают. На графе же, хотя последнее и не выполняется для произвольного случая, но условия предъявляемые к графу в теореме 1.2.1 являются необходимыми и достаточными для его выполнения. Поэтому при этих условиях и удается получить принцип Пойя - Сеге на графе.

Несмотря на то, что изопериметрическое неравенство является самодостаточным результатом, который представляет интерес сам по себе, мы не будем рассматривать его в отрыве от симметризации Шварца. А потому, как и в случае симметризации, рассмотрим этот вопрос только для случая мягкого лапласиана и множества, свободные страты которого имеют одинаковую размерность.

Первым нашим шагом в этом направлении станет ведение понятия периметра стратифицированного множества. Для него нам потребуется следующее определение.

Определение 2.3.1 *Пусть Ω – стратифицированное множество. Объединение всех его стратов единичной кратности и тех стратов, которые формируют их границу, будем называть краем стратифицированного множества Ω. Обозначать его будем Ω^1.*

В частности, в рамках рассматриваемых нами задач всегда будет $\partial\Omega_0 \subseteq \Omega^1$. В общем случае это может быть и не так, но когда на границе множества устанавливаются условия Дирихле, то каждый граничный страт кратности k может быть легко заменен на k стратов единичной кратности без потери общности рассматриваемой задачи.

Пусть $\Omega \to \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ - стратифицированное множество, все свободные страты которого имеют одинаковую размерность d. *Периметром* этого множества будем называть суммарную меру $(d-1)$-мерных стратов, входящих в $\partial\Omega_0$. Теперь пусть $\widetilde{\Omega}$ является стратифицированным подмножеством Ω, т.е. оно само по себе является стратифицированным множеством и, вдобавок, каждый его страт целиком содержится в некотором страте из Ω. В качестве его границы рассмотрим множество $\partial\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}^1 \setminus (\Omega^1 \setminus \partial\Omega_0)$. Рассмотрим пересечение $\partial\widetilde{\Omega}$ с замыканием некоторого страта старшей размерности множества Ω - страта σ_{di}. Далее, $(d-1)-$мерную меру этого пересечения мы обозначим $P_{\sigma_{di}}(\widetilde{\Omega})$ и будем ее называть периметром $\widetilde{\Omega}$ относительно страта σ_{di} из Ω. В этом случае периметром $\widetilde{\Omega}$ относительно всего множества Ω объявим сумму его относительных периметров для каждого страта старшей размерности из

Ω. Таким образом:

$$P_\Omega(\widetilde{\Omega}) = \sum_i P_{\sigma_{di}}(\widetilde{\Omega}) = \sum_i \mu_{d-1}(\partial\widetilde{\Omega} \cap \overline{\sigma_{di}}).$$

Отметим, что страты размерности $d-1$, попавшие в такого рода пересечения, могут быть просуммированны несколько раз (соответственно их кратности). *Объемом* множества $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ назовем суммарную меру его стратов старшей размерности. Для множества $\widetilde{\Omega}$ объем определим как

$$S(\widetilde{\Omega}) = \mu_d(\widetilde{\Omega}) = \sum_i \mu_d(\widetilde{\Omega} \cap \sigma_{di}).$$

Мы не указываем в данном обозначении зависимость от исходного множества Ω, так как фактически она отсутствует. При сделанных обозначениях изопериметрическое неравенство на стратифицированном множестве в его самом общем виде может быть сформулировано следующим образом:

Утверждение 2.3.1 *Пусть* $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *- стратифицированное множество, принадлежащее классу* E. *Тогда найдется константа* $C > 0$, *зависящая только от* Ω, *такая, что для любой функции* $u \in F(\Omega)$ *для почти всех* $t > 0$ *выполнено неравенство*

$$(P_\Omega(t,u))^n \geq C(S(t,u))^{n-1}. \tag{2.3.1}$$

Здесь через $F(\Omega)$ обозначено некоторое функциональное пространство на Ω, $P_\Omega(t,u) := P_\Omega(\{x \in \Omega : u(x) > t\})$, а $S(t,u) := S(\{x \in \Omega : u(x) > t\})$, то есть рассматриваются периметр и площадь лебеговых множеств. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы найти соответствующие класс E, класс $F(\Omega)$ и максимальную константу C; при определенных условиях она оказывается равной изопериметрическому частному шара соответствующей размерности. Всюду далее по большей части мы будем концентрировать внимание именно на такой константе. В качестве класса $F(\Omega)$ возьмем $C_0^n(\Omega_0, \partial\Omega_0)$, и кроме того, будем считать, что $\partial\Omega_0 = \Omega^1$. Выбор такого класса гладкости обусловлен тем, что почти все из лебеговых множеств должны иметь «хорошую» структуру (это обеспечивается некоторыми следствиями из теоремы Сарда). Необходимость включения в $\partial\Omega_0$ множества Ω^1 также вполне объяснима - иначе достаточно рассмотреть лишь один из стратов старшей размерности, часть пересечения границы которого с Ω^1 не включена в границу и использовать тот факт, что для выполнения классического аналога утверждения 2.3.1 с константой 4π (в двумерном случае) необходимо наличие условия Дирихле на всей границе множества. Что касается класса E, то сразу можно заметить что множества из данного класса должны обладать следующим свойством: каждый страт старшей размерности d допускает изометричное отображение в некоторое подмножество $\mathbb{R}^d$. Иначе снова следует противоречие с классическим случаем. Однако это последнее условие не является достаточным. Чтобы убедится в этом рассмотрим множество изображенное на рисунке 2.3.1.

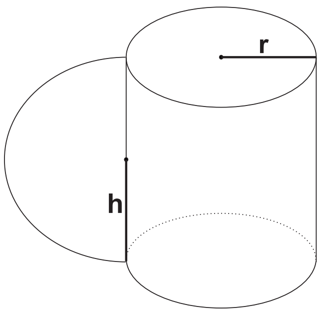


Рис. 2.3.1: Пример.

Изображенное двумерное стратифицированное множество содержит два двумерных страта, первый из которых представляет собой прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и $2h$, «свернутый» в поверхность, представляющую собой границу трехмерного цилиндра с выброшенными основаниями, и половинку круга радиуса h. Простые вычисления показывают, что $P^2 - 4\pi S = \pi^2(16r^2 - 8rh - h^2)$. Для фиксированного h при достаточно малом r правая часть будет отрицательна, т.е. изопериметрическое неравенство, в его классическом виде, не будет выполняться. Аналогичным образом можно построить примеры и для множеств размерности выше чем 2.

Перейдем теперь к описанию множеств, попадающих в искомый класс E. Для начала ограничимся двумерным случаем и рассмотрим следующую простую ситуацию. Пусть дан отрезок лежащий в трехмерном пространстве и даны три плоских кривых класса Липшица, концами которых служат концы данного отрезка. Тогда каждая из них, рассмотренная вместе с исходным отрезком, ограничивает некоторое плоское двумерное множество. Пусть кривые таковы, что эти двумерные множества являются выпуклыми. Получающееся в итоге множество может быть рассмотрено как двумерное стратифицированное множество. Для примера, см. рисунок 2.3.2.

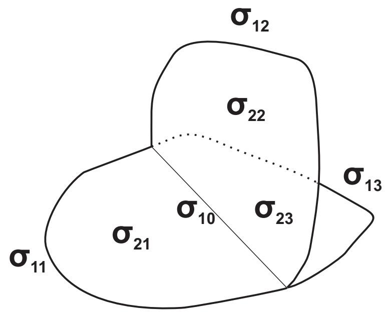


Рис. 2.3.2: Пример множества.

Периметр этого множества будет равен суммарной мере стратов $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ (меру каждого из них обозначим P_1, P_2, P_3, соответственно), а площадь - суммарной мере двумерных стратов $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$, которых они ограничивают (обозначим их меры S_1, S_2, S_3). Теперь заметим, что имеют место следующие неравенства: $(P_i + P_j)^2 \geq 4\pi(S_i + S_j)$, где $i, j = \overline{1,3}$ (при $i = j$ эти неравенства упрощаются до $P_i^2 \geq 2\pi S_i$). В самом деле, попарное объединение стратов $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ друг с другом (и вместе со своими соответствующими граничными стратами) в силу их выпуклости допускает изометричное отображение в плоское двумерное множество, для которого имеет место обычное изопериметрическое неравенство, что и отражено в данных неравенствах при $i \neq j$. Кроме того, симметрично отразив каждый двумерный страт относительно страта σ_{10} и объединив его с полученным отражением, мы будем иметь искомое неравенство и при $i = j$. Без ограничения общности можем считать, что $P_1 \geq P_2 \geq P_3$. Тогда в силу упомянутых выше неравенств имеем

$$(P_1 + P_2 + P_3)^2 = (P_1 + P_2)^2 + P_3^2 + 2P_3(P_1 + P_2) \geq (P_1 + P_2)^2 + 2P_3^2 \geq$$
$$4\pi(S_1 + S_2) + 4\pi S_3 = 4\pi(S_1 + S_2 + S_3).$$

Таким образом, для стратифицированных множеств рассмотренного типа имеет место изопериметрическое неравенство с константой равной 4π. В то же время требование выпуклости рассматриваемых двумерных стратов, очевидно, не является необходимым. В противном случае мы всегда можем заменить такой страт на выпуклый страт не меньшей площади и не большего периметра, часть границы которого будет представлять собой отрезок такой же длины. Кроме того, каждый из двумерных стратов не обязан быть плоским - достаточно лишь быть изометричным плоскому (т.е. изометричным некоторому подмножеству $\mathbb{R}^2$). Таким образом, если стратифицированное множество состоит из трех двумерных стратов с липшицевой границей, каждый из которых либо является плоским либо изометричен плоскому, а их замыкания пересекаются по одному и тому же отрезку некоторой длины и только по нему, то такое множество удовлетворяет неравенству $P^2 - 4\pi S \geq 0$. Класс таких множеств объединим с классом стратифицированных множеств допускающих изометричное отображение в обычное двумерное множество с границей класса Липшица. Полученный класс обозначим E_1.

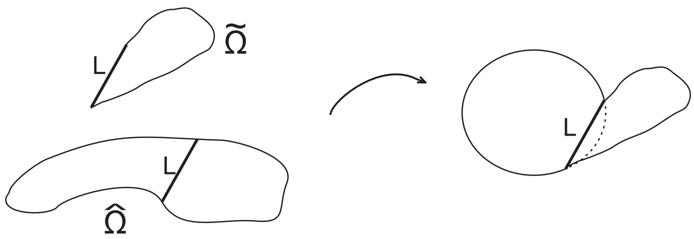
Теперь рассмотрим произвольное плоское двумерное множество $\widehat{\Omega}$ с границей класса Липшица и пусть дан некий отрезок длины $L > 0$ лежащий в нем, причем одномерная мера Лебега его пересечения с границей $\widehat{\Omega}$ равна нулю. Рассмотрим плоское (изометричное плоскому) двумерное множество $\widetilde{\Omega}$, разбитое на страты так, что замыкание одного из его граничных стратов представляет собой отрезок длины L. Соединив $\widetilde{\Omega}$ с $\widehat{\Omega}$ вдоль этого отрезка, мы получим некоторое стратифицированное множество Ω. В качестве примера можно снова использовать рисунок 2.3.2 (страт σ_{10} будет служить тем самым отрезком длины L, за $\widehat{\Omega}$ можно взять объединение стратов σ_{21},σ_{23} и стратов формирующих их границу, тогда оставшийся двумерный страт σ_{22} в объединении с его границей возьмем как $\widetilde{\Omega}$). Для $\widehat{\Omega}$ выполняется обычное изопериметрическое неравенство на плоскости, поэтому $P^2_{\widehat{\Omega}} \geq 4\pi S_{\widehat{\Omega}}$. Кроме того, легко видеть, что $P_{\widehat{\Omega}} > 2L > \frac{\pi}{2}L$. Покажем, что для полученного таким образом стратифицированного множества Ω выполнено изопериметрическое неравенство. Рассмотрим следующие варианты (для наглядности см. рисунок 2.3.3, на котором изображены все три рассматриваемые ситуации).

Пусть $S_{\widehat{\Omega}} \geq \frac{\pi}{4}L^2$. Так как для $\widehat{\Omega}$ выполнено изопериметрическое неравенство, то круг площади равной $S_{\widehat{\Omega}}$ (обозначим его $B(\widehat{\Omega})$) имеет периметр не больший, чем $P_{\widehat{\Omega}}$. В то же время, его диаметр не меньше, чем L, а потому на нем найдется хорда длины L. Как мы знаем, часть границы множества $\widetilde{\Omega}$ представляет собой отрезок длины L. Соединив вдоль него $\widetilde{\Omega}$ с $B(\widehat{\Omega})$ по этой хорде мы получим множество с не большей изопериметрической константой чем у Ω (т.к. мы сохранили площадь и не увеличили периметр). Но такое множество принадлежит рассмотренному ранее классу E_1, т.е. его изопериметрическое частное не меньше 4π, а значит изопериметрическое частное множества Ω также не меньше 4π.

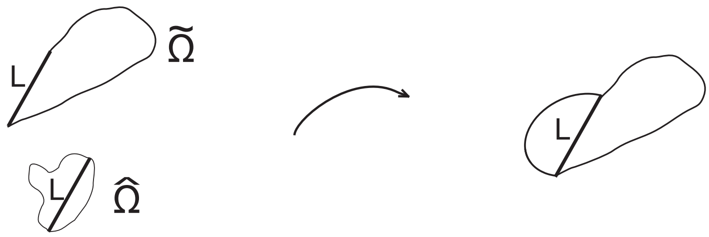
Пусть $S_{\widehat{\Omega}} \leq \frac{\pi}{8}L^2$. Рассмотрим половинку круга диаметра L. Её площадь равна $\frac{\pi}{8}L^2$, а периметр – $\frac{\pi}{2}L$. То есть, его площадь больше либо равна площади $\widehat{\Omega}$, а периметр, наоборот, меньше периметра $\widehat{\Omega}$. Таким образом мы имеем

$$\frac{P_\Omega^2}{S_\Omega} = \frac{(P_{\widetilde{\Omega}} + P_{\widehat{\Omega}})^2}{S_{\widetilde{\Omega}} + S_{\widehat{\Omega}}} \geq \frac{(P_{\widetilde{\Omega}} + \frac{\pi}{2}L)^2}{S_{\widetilde{\Omega}} + \frac{\pi}{8}L^2} \geq 4\pi.$$

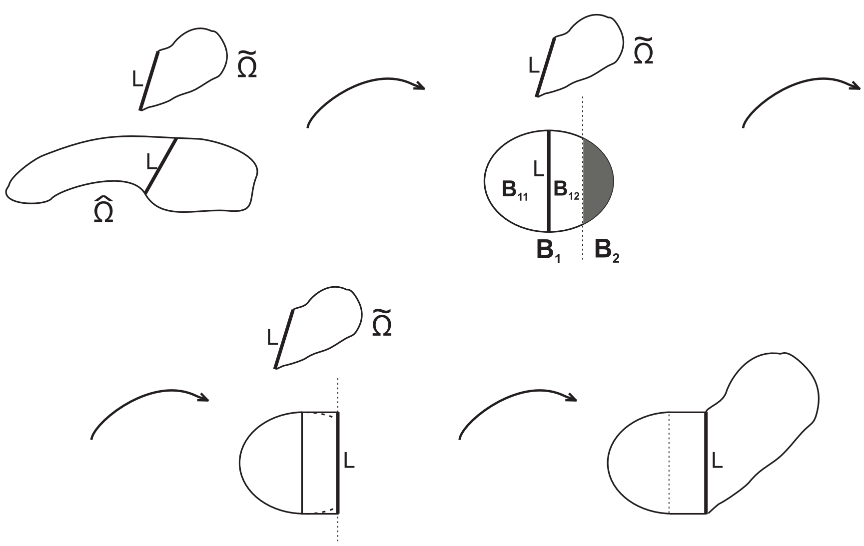
Последнее неравенство выполнено в силу того, что соединив, как и ранее, множество $\widetilde{\Omega}$ с половинкой круга вдоль его диаметра мы получим множество из класса E_1, для которого такое неравенство уже доказано.



a) Случай $S_{\widehat{\Omega}} \geq \frac{\pi}{4}L^2$;



b) Случай $S_{\widehat{\Omega}} \leq \frac{\pi}{8}L^2$;



c) Случай $\frac{\pi}{4}L^2 > S_{\widehat{\Omega}} > \frac{\pi}{8}L^2$.

Рис. 2.3.3: К доказательству.

Остается рассмотреть случай $\frac{\pi}{4}L^2 > S_{\widehat{\Omega}} > \frac{\pi}{8}L^2$. Для него возьмем круг B диаметра L. На нем найдется хорда некоторой длины (меньшей чем L), которая делит круг на две части (обозначим их B_1 и B_2) так, что одна из этих частей (будем считать ею B_1) имеет площадь равную $S_{\widehat{\Omega}}$. Точно так же эта хорда делит на две части и окружность рассматриваемого круга. Покажем, что та из них, которая соответствует B_1, имеет длину меньшую $P_{\widehat{\Omega}}$. В самом деле, обозначим вклад множеств B_1 и B_2 в периметр круга B как P_1 и P_2, соответственно (фактически это будут меры пересечений их границ с границей B). Аналогично, S_1 и S_2 – для площади круга B (при этом будет $S_1 > S_2; P_1 > P_2$). Предположим, что $P_1 \geq P_{\widehat{\Omega}}$. Тогда имеем $P_1^2 \geq P_{\widehat{\Omega}}^2 \geq 4\pi S_{\widehat{\Omega}} = 4\pi S_1$. В то же время имеем $P_B^2 = 4\pi S_B \Leftrightarrow (P_1 + P_2)^2 = 4\pi(S_1 + S_2)$. Отсюда получаем $P_1^2 + 4\pi S_2 \geq (P_1 + P_2)^2 \Rightarrow 4\pi S_2 \geq P_2^2 + 2P_1P_2 > 2P_2^2 \Rightarrow 2\pi S_2 > P_2^2$. Теперь симметрично отразим множество B_2 относительно рассматриваемой хорды и объединим его с полученным отражением. Результатом будет множество, ограниченное замкнутой кусочно-гладкой кривой, изопериметрическое частное которого равна $\frac{(2P_2)^2}{2S_2} = \frac{2(P_2)^2}{S_2} < 4\pi$. А это противоречит классическому изопериметрическому неравенству на плоскости. Таким образом $P_1 < P_{\widehat{\Omega}}$. Теперь заметим, что множество B_1 состоит из двух частей – половины круга диаметра L (обозначим B_{11}) и примыкающей к ней некоторой части второй половины этого круга (обозначим B_{12}). Заменим B_{12} на минимальный прямоугольник его содержащий (длина одной из его сторон будет равна L). При этом площадь, очевидно, возрастет, тогда как периметр, наоборот, уменьшится. Полученное множество представляет собой половину круга диаметра L объединенную с прямоугольником со стороной L (вдоль одной из таких сторон). К противоположной стороне длины L этого прямоугольника можно присоединить множество $\widetilde{\Omega}$ (у которого, напомним, часть границы представляет собой отрезок длины L). В результате получим множество с меньшим изопериметрическим частным, чем у Ω и которое будет принадлежать классу E_1. А отсюда получаем, что изопериметрическое частное стратифицированного множества Ω больше либо равно 4π.

Теперь заметим, что при доказательстве были использованы лишь два свойства множества $\widehat{\Omega}$ – его изопериметрическое частное должно быть не меньше 4π и его периметр должен быть не меньше $\frac{\pi}{2}L$, где L - длина некоторого отрезка лежащего внутри $\widehat{\Omega}$ (под словом «внутри» мы понимаем, что его пересечение с границей $\widehat{\Omega}$ имеет нулевую меру). А потому в качестве $\widehat{\Omega}$ может быть использовано любое множество из класса E_1. Таким образом, если мы возьмем произвольное множество Ω_1 из E_1, выберем внутри него отрезок длины L_1 и присоединим с его помощью к Ω_1 некоторое плоское двумерное множество, часть границы которого представляет собой отрезок длины L_1, то мы получим стратифицированное множество, обозначим его Ω_2, изопериметрическое частное которого не меньше 4π. Теперь, выбрав на множестве Ω_2 отрезок длины L_2 и присоединив некое двумерное множество, часть границы которого представляет собой отрезок длины L_2, мы снова получим множество с изопериметрическим частным не меньше 4π. И так далее, мы можем провести любое количество таких операций, сохраняя при этом изопериметрическое частное на уровне не ниже 4π. Рассмотрев класс всех множеств, которые можно получить подобным образом из некоторого элемента E_1, мы получим новый класс E_2, существенно более широкий, чем прежний. Кроме того, легко видеть, что для любой функции $u \in C_0^2(\Omega_0, \partial\Omega_0)$, где $(\Omega_0, \partial\Omega_0) \in E_2$, почти все её множества уровня будут иметь гладкую границу (см. [15], где это доказано и для более широкого класса функций, при этом, в нашем случае придется применить этот результат отдельно на каждом страте и затем воспользоваться непрерывностью функции на всем Ω) и, вдобавок, будут из E_2. В самом деле, $(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ можно получить из некоторого $\Omega_1 \in E_1$ путем последовательного присоединения неких множеств $\Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_k$. Заменив каждое из них (включая Ω_1) на его пересечение с рассматриваемым лебеговым множеством, мы получим аналогичное представление для этого лебегова множества, а значит оно также будет из E_2.

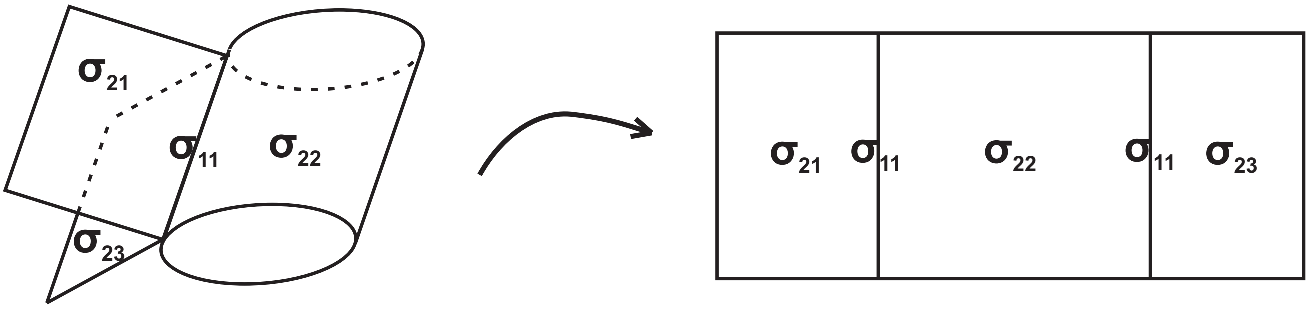


Рис. 2.3.4: Пример.

Вдобавок, можно заметить, что если у какого-либо страта, не входящего в Ω_1 и не являющегося свободным, искусственно уменьшить кратность, продублировав этот страт и для каждого страта к которому он примыкает оставить примыкание либо только самого страта либо только созданной копии (но так что кратность этого страта и кратность его копии будут каждая не меньше двух), то периметр и площадь рассматриваемого стратифицированного множества Ω не изменятся, см. рисунок 2.3.4 для примера. Таким образом, если из стратифицированного множества путем подобных преобразований можно получить множество из класса E_2, то оно само будет удовлетворять изопериметрическому неравенству. Будем считать, что все такие множества также входят в E_2. Теперь мы можем условится считать класс E_2 тем самым искомым классом E и именно так и будем обозначать его в дальнейшем. В итоге, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3.1 *Пусть $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ - стратифицированное множество, принадлежащее классу E, такое что $\partial\Omega_0 = \Omega^1$. Тогда для любой неотрицательной функции $u \in C_0^2(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ для почти всех $t > 0$ выполнено неравенство*

$$P_\Omega^2(t,u) \geq 4\pi S(t,u). \tag{2.3.2}$$

Возвращаясь к построению класса E можно заметить, что присоединение множества $\widetilde{\Omega}$ к множеству $\widehat{\Omega}$ в общем-то не обязано происходить по отрезку. На самом деле достаточно иметь лишь любую связную кривую длина которой не превосходит периметр $\widehat{\Omega}$, умноженный на $\frac{2}{\pi}$. Однако, при рассмотрении на таком множестве некоторой функции $u \in C_0^2(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ мы не сможем гарантировать сохранение тех же самых свойств для почти всех ее лебеговых множеств. Точнее говоря, мы всегда можем предъявить отрезок из области значений, такой что множества уровня, соответствующие точкам из него, не будут удовлетворять условиям, использованным при описании класса E_2. Для примера см. рисунок 2.3.5, здесь справа изображено некоторое лебегово множество гладкой функции определенной на множестве изображенном слева.

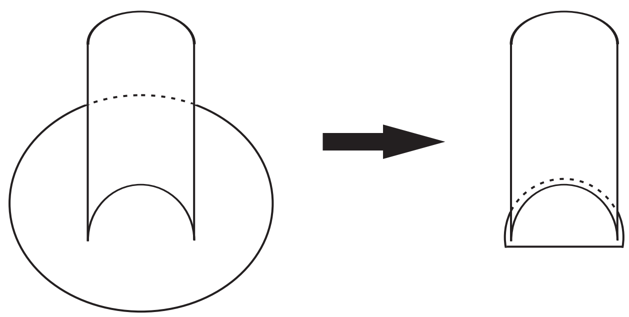


Рис. 2.3.5: Пример.

Наличие изопериметрического неравенства позволяет утверждать, что при симметризации Шварца достаточно гладких функций периметры их лебеговых множеств не увеличиваются, что важно при доказательстве принципа Пойя - Сеге.

Однако прежде чем переходить к его доказательству рассмотрим вопрос гладкости симметризации. Имеет место следующая лемма, аналогичная лемме 1.2.1 из Главы 1, и которую мы сформулируем сразу для стратифицированных множеств произвольной размерности. Также всюду далее рассматриваем такие стратифицированные множества, что граница каждого страта имеет гладкость класса Липшица.

Лемма 2.3.1 *Пусть дано произвольное связное стратифицированное множество* Ω*, все свободные страты которого имеют одинаковую размерность* d*. Тогда для любой неотрицательной функции* $u \in PC^1(\Omega)$ *будем иметь* $u^* \in PC^1(B)$*. Если же вдобавок* $\partial\Omega_0 \neq \varnothing$*, то для любой неотрицательной* $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *будет* $u^* \in PC_0^1(B)$*.*

Доказательство.

Фиксируем некоторую функцию $u \in PC^1(\Omega)$ и рассмотрим произвольный свободный страт σ_{dj} из Ω вместе с сужением функции u на него, которое обозначим u_{dj}. Применим к u_{dj} следующую симметризацию, фактически являющуюся симметризацией Шварца. А именно, рассмотрим отрезок длины равной мере страта σ_{dj}, и обозначим его b_{dj}. Возьмем произвольную функцию, заданную на b_{dj}, такую, что при всех $t \geq 0$ лебегово множество этой функции имеет ту же меру, что и соответствующее лебегово множество u_{dj} (здесь стоит подчеркнуть, что в первом случае это будет мера Лебега на отрезке, а во втором - d-мерная мера Лебега). Обозначим через $\hat{u}_{dj}$ обычную симметризацию Шварца этой функции, которую построим на том же самом отрезке b_{dj}. Функция $\hat{u}_{dj}$ представляет собой своего рода симметризацию u_{dj}, но при этом она всегда определена на одномерном множестве, вне зависимости от размерности страта σ_{dj}.

Далее, покажем, что $\hat{u}_{dj} \in PC^1(b_{dj})$. Имеем, $u_{dj} \in PC^1(\sigma_{dj})$, а тогда, ее классическая симметризация Шварца – u^*_{dj} – принадлежит $PC^1(B_{dj})$, где B_{dj} есть d-мерный шар (например, см. [16]). В силу того, что меры лебеговых множеств функций $\hat{u}_{dj}$ и u^*_{dj} совпадают при всех $t \geq 0$, то совпадают множества значений их симметризаций. Возьмем на отрезке b_{dj} некоторую точку, удаленную от его центра на расстояние h. Пусть значение функции $\hat{u}_{dj}$ в этой точке равно некоторому t_0. В то же время функция u^*_{dj} радиально симметрична, т.е. имеет одинаковый вид на любом отрезке, соединяющем центр шара B_{dj} с его границей, а потому является фактически одномерной функцией (класса PC^1). Фиксировав один из таких отрезков мы найдем на нем точку, удаленную от его центра на некоторую величину r, такую, что значение функции u^*_{dj} в ней также равно t_0. В силу совпадения мер лебеговых множеств (в данном случае на уровне t_0) функций $\hat{u}_{dj}$ и u^*_{dj}, будем иметь $2h = \omega_d r^d$, где ω_d есть объем d-мерного шара единичного радиуса. При подходящем выборе систем координат на b_{dj} и рассматриваемом отрезке из B_{dj} мы можем написать $\hat{u}_{dj}(x) = u^*_{dj}(y)$, где $|x| = \frac{\omega_d}{2}|y|^d$. А отсюда следует, что всюду кроме нуля из дифференцируемости функции u^*_{dj} следует дифференцируемость $\hat{u}_{dj}$.

Далее, в силу непрерывности u на Ω её область значений связна и, кроме того, для всех j области значений функций $\hat{u}_{dj}$ и u_{dj} совпадают, а тогда, совпадают и их объединения по всем j (т.е. по всем стратам). Поэтому, рассмотрев совокупность всех отрезков b_{dj} вместе с функциями $\hat{u}_{dj}$, которые на них заданы, мы можем составить из них связный граф Γ (соединив каждый отрезок с некоторым другим в ровно одной общей точке, см. рисунок 2.3.6), получив, вдобавок, заданную на нем функцию $\hat{u}$ – совокупность функций $\hat{u}_{dj}$ – причем так, что $\hat{u}$ окажется непрерывной, а тогда $\hat{u} \in PC^1(\Gamma)$. В силу леммы 1.2.1 из Главы 1, её симметризация Шварца – $(\hat{u})^*$ – принадлежит $PC^1(b)$, где b - некоторый отрезок, длина которого совпадает с мерой графа, а значит и с мерой Ω. Рассмотрим множество $A = b \times I_{i-1}$, где I_{i-1} - $(i-1)-$мерный куб с ребром единичной длины (A - обычное d-мерное множество). Доопределим на нем функцию $(\hat{u})^*$ как $(\hat{u})^*(x,y) = (\hat{u})^*(x)$, где $x \in b$, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}) \in I_{i-1}$. Меры лебеговых множеств при этом не изменятся, потому как лишь умножатся на единицу. Так как $(\hat{u})^*$, очевидно, принадлежит $PC^1(A)$, то её симметризация, обозначим её $\tilde{u}$, принадлежит $PC^1(B)$ (напомним, что объем A равен объему Ω, а потому при его симметризации получится шар равный по объему шару B). Но, по построению, меры лебеговых множеств функций u и $\tilde{u}$ будут совпадать при всех $t \geq 0$. А значит, $\tilde{u}$ и есть искомая симметризация Шварца функции u. Таким образом, имеем $u^* \in PC^1(B)$.

Что касается случая, когда $\partial\Omega_0 \neq \varnothing$ и $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$, то здесь остается доказать, что симметризация обращается в нуль на ∂B. Для доказательства предположим, что $u^* = \varepsilon > 0$ на ∂B. Тогда взяв произвольный $x_0 \in \partial\Omega_0$ и воспользовавшись непрерывностью функции u мы получим $\mu\{x \in \Omega : u(x) \leq \delta\} > 0 = \mu\{x \in \Omega : u^*(x) \leq \delta\}$ при $0 < \delta < \varepsilon$, что противоречит равенству мер лебеговых множеств исходной функции и её симметризации. ■

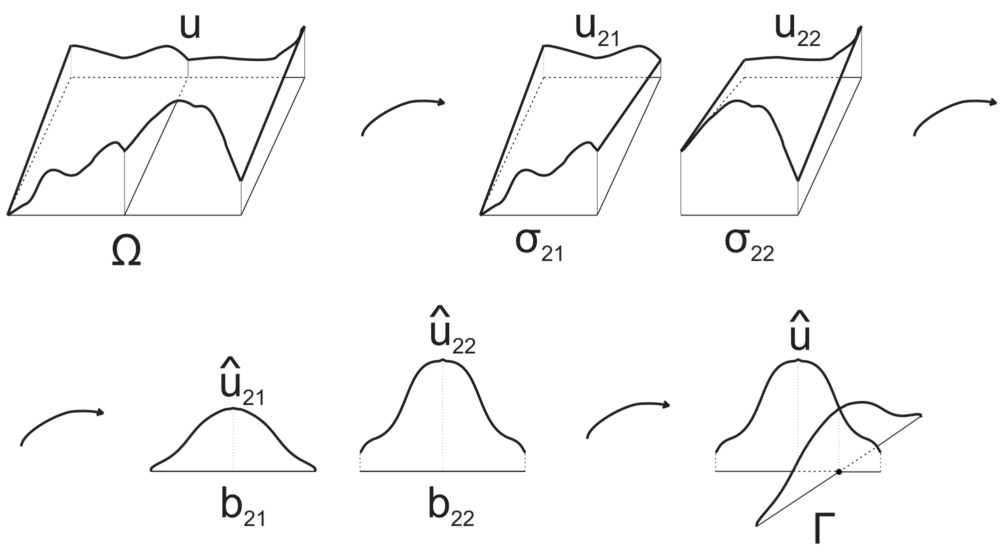


Рис. 2.3.6: К гладкости симметризации.

2.4 Принцип Пойя - Сеге и оценка первого собственного значения лапласиана на стратифицированном множестве.

Приводимое ниже доказательство принципа Пойя - Сеге на стратифицированном множестве идейно соответствует одному из вариантов доказательства его классического аналога (см. [17, с. 37]).

Теорема 2.4.1 (Принцип Пойя - Сеге) *Пусть $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ - стратифицированное множество, принадлежащее классу E, причем $\partial\Omega_0 = \Omega^1$.*

Тогда для любой функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ выполнено

$$\int_{\Omega_0} \rho|\nabla u|^p d\mu \geq \int_B |\nabla u^*|^p d\mu, \tag{2.4.1}$$

где ρ равно единице на свободных стратах и нулю на остальных, а B есть двумерный шар объемом равный суммарной мере двумерных стратов из Ω.

Доказательство.

Возьмем произвольный страт σ_{2j} из Ω_0 (напомним, что класс E состоит из двумерных стратифицированных множеств). Легко видеть, что $u \in W^{1,p}_{loc}(\sigma_{2j})$ в обычном смысле. А тогда, как показано в [24], для всех таких сужений выполняется известная формула коплощади (в оригинальном виде доказанная Г. Федерером, см. [21, с. 248]), применяя которую мы имеем

$$\int_{\sigma_{2j}} |\nabla u|^p d\mu = \int_0^\infty \int_{\{x \in \sigma_{2j}:\ u(x)=t\}} |\nabla u|^{p-1} d\xi dt, \tag{2.4.2}$$

где $d\xi$ есть $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа.

Просуммировав данное равенство по всем двумерным стратам получим

$$\int_{\Omega_0} p|\nabla u|^q d\mu = \sum_j \int_{\sigma_{2j}} |\nabla u|^q dx = \int_0^\infty \int_{\{x \in \Omega_0:\ u(x)=t\}} p|\nabla u|^{q-1} d\xi dt. \tag{2.4.3}$$

Далее, используя неравенство Йенсена (например, см. [7, с. 36]) получаем

$$\frac{1}{P_\Omega(t,u)} \int_{\{x \in \Omega_0:\ u(x)=t\}} p|\nabla u|^{q-1} d\xi \geq \left(\frac{1}{P_\Omega(t,u)} \int_{\{x \in \Omega_0:\ u(x)=t\}} p|\nabla u|^{-1} d\xi \right)^{-(q-1)}. \tag{2.4.4}$$

Кроме того, пользуясь все той же формулой коплощади легко убедиться в справедливости для любого полуинтервала $(t_1, t_2]$ следующей формулы:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\{x\in\Omega_0:\ u(x)=t\}} p|\nabla u|^{-1}d\xi dt = \mu(\{x\in\Omega_0|\ t_1 < u(x) \le t_2,\ |\nabla u(x)| \neq 0\}). \tag{2.4.5}$$

Теперь заметим, что правая часть последнего равенства при симметризации не возрастает (опять же для всех $(t_1, t_2]$). А тогда не возрастает и левая часть и поэтому для почти всех $t > 0$ имеем

$$\int_{\{x\in\Omega_0:\ u(x)=t\}} p|\nabla u|^{-1}d\xi \le \int_{\{x\in B:\ u^*(x)=t\}} |\nabla u^*|^{-1}d\xi. \tag{2.4.6}$$

Пользуясь неравенствами (2.4.4), (2.4.6), теоремой 2.3.1, а также тем фактом, что $|\nabla u^*|$ является константой на почти всех множествах уровня получим

$$\int_{\{x\in\Omega_0:\ u(x)=t\}} p|\nabla u|^{q-1}d\xi \ge [P_\Omega(t,u)]^q \left(\int_{\{x\in\Omega_0:\ u(x)=t\}} p|\nabla u|^{-1}d\xi\right)^{-(q-1)} \ge$$
$$\ge [P_B(t,u^*)]^q \left(\int_{\{x\in B:\ u^*(x)=t\}} |\nabla u^*|^{-1}d\xi\right)^{-(q-1)} = \int_{\{x\in B:\ u^*(x)=t\}} |\nabla u^*|^{q-1}d\xi.$$

Интегрируя последнее неравенство по t и применяя формулу коплощади к функции u^* придем к требуемому неравенству (2.4.1).■

Нетрудно заметить, что данное доказательство будет аналогичным образом работать и для стратифицированных множеств произвольной размерности. Все что для этого остается - установить соответствующее изопериметрическое неравенство.

Кроме того, как и в классическом случае (а также и на графе), норма функции в $L^p (p \ge 1)$ сохраняется при описанной симметризации на стратифицированном множестве (обосновывается точно таким же образом как и в случае графа).

Докажем итоговый результат данной главы.

Теорема 2.4.2 *Пусть $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ - стратифицированное множество, принадлежащее классу E, причем $\partial\Omega_0 = \Omega^1$. Имеет место следующая оценка первого собственного значения задачи* (2.2.1),(2.2.2) *при p и ρ соответствующим мягкому лапласиану:*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi j_{0,1}^2}{\mu_2(\Omega_0)}, \tag{2.4.7}$$

где $j_{0,1}$ есть первый положительный нуль функции Бесселя $J_0(t)$, а $\mu_2(\Omega_0)$, напомним, есть суммарная мера двумерных стратов входящих в Ω_0. При этом, равенство имеет место лишь в случае стратифицированного круга.

Доказательство. Пусть u_0 – собственная функция, отвечающая λ_0, а u_0^* - ее симметризация. В силу принципа Рэлея (теорема 2.2.1) имеем:

$$\lambda_0 = \frac{\sum\limits_{\sigma_{2j}\in\Omega_0} \int_{\sigma_{2j}} |\nabla u_0|^2 d\mu}{\sum\limits_{\sigma_{2j}\in\Omega_0} \int_{\sigma_{2j}} u_0^2 d\mu}. \tag{2.4.8}$$

Пользуясь полученными свойствами симметризации (теорема 2.4.1) получаем:

$$\sum_{\sigma_{2j}\in\Omega_0} \int_{\sigma_{2j}} u_0^2 d\mu = \int_B (u_0^*)^2 dx; \ \sum_{\sigma_{2j}\in\Omega_0} \int_{\sigma_{2j}} |\nabla u_0|^2 d\mu \geq \int_B |\nabla u_0^*|^2 dx,$$

а отсюда:

$$\lambda_0 \geq \frac{\int_B |\nabla u_0^*|^2 dx}{\int_B (u_0^*)^2 dx}.$$

В силу леммы 2.3.1 $u_0^* \in PC_0^1$, поэтому правая часть последнего неравенства в силу классического принципа Рэлея не меньше первого собственного значения простейшей задачи Штурма - Лиувилля на круге:

$$(\Delta u+\lambda u)|_B=0,\quad u|_{\partial B}=0,$$

которое равно (см. [13])

$$\frac{\pi j_{0,1}^2}{\mu(B)}=\frac{\pi j_{0,1}^2}{\mu_2(\Omega_0)}.\quad\blacksquare$$

III Неравенство Пуанкаре. Задача Дирихле для p-лапласиана. Неравенство Соболева на стратифицированном множестве.

3.1 Неравенство Пуанкаре на стратифицированном множестве.

Среди результатов, полученных к настоящему времени на стратифицированных множествах, особое место занимает аналог классического неравенства Пуанкаре - Стеклова - Фридрихса:

$$\int_\Omega |u|^p dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \tag{3.1.1}$$

для всех $u \in W_0^{1,p}(\Omega), p \ge 1$, с константой C зависящей только от Ω. Всюду далее мы будем называть его неравенство Пуанкаре (см. [25]), при том, что в таком виде оно было сформулировано Стекловым (см. [11]), а в литературе его нередко называют неравенством Фридрихса. На стратифицированном множестве оно было доказано А.А. Гавриловым и О.М. Пенкиным при $p = 2$, см. [19], [9]. Сразу стоит заметить, что схема доказательства для $p = 2$, приведенного в упомянутых работах, выглядит применимой и в общем случае. На первый взгляд, единственным фактическим отличием будет использование неравенства Гельдера вместо неравенства Коши - Буняковского - Шварца, которое, впрочем, является частным случаем первого. В то же время, это доказательство представляется достаточно громоздким. Поэтому мы пойдем другим путем, используя простую идею, аналогичную одной из идей доказательства неравенства Соболева для произвольного $p \ge 1$ на основании случая $p = 1$ (например, см. [26], раздел 1.1.3).

Как и многие другие результаты на стратифицированных множествах, данное неравенство требует наличия существенных ограничений на рассматриваемое множество. С этой целью вводится понятие *прочности* стратифицированного множества: множество $C_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ называется прочным, если для любого страта $\sigma_{ki} \in \Omega_0$ найдется цепочка (т.е. упорядоченный набор) стратов $\{\sigma_{ki}, \sigma_{k_1 i}, \sigma_{k_2 i}, \ldots, \sigma_{k_m i}\}$ такая, что: 1) любые два соседних страта из цепочки примыкают один к другому, а их размерности отличаются друг от друга ровно на единицу, 2) последний страт цепочки входит в $\partial\Omega_0$. Саму такую цепочку будем называть прочной цепочкой, построенной для страта σ_{ki}. В качестве примера рассмотрим следующий рисунок 3.1.1.

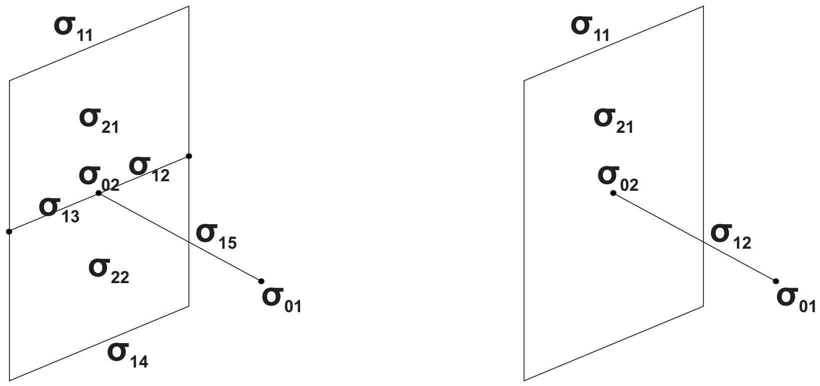


Рис. 3.1.1: О прочности множества.

Здесь жирными точками обозначены нульмерные страты. Если граница обоих изображенных на рисунке стратифицированных множеств будет выбрана состоящей лишь из одного страта - σ_{01}, то в этом случае множество, изображенное слева, удовлетворяет условию прочности, а множество справа - нет. Если же к границе множества справа добавить еще и страт σ_{11} (вместе с его граничными стратами), то оно также станет прочным.

Теорема 3.1.1 *Пусть дано прочное стратифицированное множество* $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *и пусть* $p \geq 2$. *Тогда найдется константа* $C > 0$, *зависящая только от* Ω *и* p, *такая, что для любой функции* $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\Omega_0} |u|^p d\mu \leq C \int_{\Omega_0} |\nabla u|^p d\mu, \tag{3.1.2}$$

Доказательство:

Возьмем произвольную функцию $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ и положим $v = |u|^{p/2}$. Легко видеть, что $v \in W_0^{1,2}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$. В самом деле, v дифференцируема почти всюду (относительно стратифицированной меры) и в точках дифференцируемости мы имеем $|\nabla v| = \frac{p}{2}|u|^{\frac{p}{2}-1}|\nabla u|$, а тогда

$$\int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 d\mu = \frac{p^2}{4} \int_{\Omega_0} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 d\mu. \tag{3.1.3}$$

Существование интеграла справа обеспечивается существованием интеграла слева. Далее, применим к правой части неравенство Гельдера с показателями $p_1 = \frac{p}{p-2},\ p_2 = \frac{p}{2}$. В результате получим

$$\int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 d\mu \leq \frac{p^2}{4} \left(\int_{\Omega_0} |u|^p d\mu\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{\Omega_0} |\nabla u|^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{3.1.4}$$

С другой стороны, так как $v \in W_0^{1,2}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$, то, в силу неравенства Пуанкаре на стратифицированном множестве для $p = 2$, будем иметь

$$C \int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 d\mu \geq \int_{\Omega_0} |v|^2 d\mu = \int_{\Omega_0} |u|^p d\mu. \tag{3.1.5}$$

Собрав вместе неравенства (3.1.4) и (3.1.5), мы получим требуемое неравенство (3.1.2) для функций из $C_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$.

Его обобщение с пространства $C_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ до пространства $W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ следует автоматически из определения последнего. ■

Требования, предъявляемые к множеству Ω в условиях данной теоремы, нельзя ослабить без дополнительных ограничений на показатель p. Действительно, как известно, для выполнения неравенства Пуанкаре на некотором $A \in \mathbb{R}^n$ для функций из $W^{1,p}(A)$ необходимо и достаточно, чтобы они обращались в нуль на некотором фиксированном множестве $B \subset \overline{A}$, имеющем положительную $p-$емкость в $\mathbb{R}^n$, см. [8]. А для выполнения последнего необходимо (и достаточно), чтобы размерность B была строго больше, чем $n-p$, см. [14]. Поэтому, если условие прочности не выполнено, то найдется страт σ_{ij}, который нельзя соединить прочной цепочкой ни с одним граничным стратом. Рассмотрев множество тех стратов, которые можно соединить прочной цепочкой с σ_{ij} (включая сам σ_{ij}), а также множество стратов, примыкающих к таковым, мы получим стратифицированное множество (обозначим его $\widetilde{\Omega}$), пересечение которого с $\partial\Omega_0$ не содержит стратов размерности выше $i-2$ (вдобавок, страты из этого пересечения не примыкают к стратам из $\widetilde{\Omega}$, размерности ниже i). Пусть k - максимальная размерность стратов из этого пересечения. Тогда при всех $p \leq i-k$ мы будем получать противоречие с классическим случаем, полагая рассматриваемую функцию тождественно равной нулю за пределами $\widetilde{\Omega}$.

Для случая $p=2$ необходимость условия прочности для неравенства Пуанкаре на стратифицированном множестве также обсуждается и в [6]. Приведенная в ней аргументация носит общий характер и работает в общем случае.

3.2 Задача Дирихле для p-лапласиана на стратифицированном множестве.

В качестве одного из применений неравенства Пуанкаре рассмотрим следующую задачу на стратифицированном множестве $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$.

$$\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0,\ x \in \Omega_0 \tag{3.2.1}$$

$$u = \varphi,\ x \in \partial\Omega_0, \tag{3.2.2}$$

где $\varphi,\ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Оператор, фигурирующий в левой части первого уравнения называется $p-$лапласианом. Функцию $u \in W^{1,p}(\Omega)$ будем называть *слабым решением* уравнения 3.2.1, если при всех $h \in C_0^1(\Omega)$ выполнено

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla h \, d\mu = 0. \tag{3.2.3}$$

Краевое условие (3.2.2), при этом, интерпретируется, как $\varphi - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Можно показать, что существование слабого решения задачи (3.2.1)-(3.2.2) сводится к существованию минимума функционала $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, d\mu$, см. [23], приведенное в этой работе доказательство переносится на стратифицированный случай без каких-либо изменений. Что касается непосредственно вопроса существования этого минимума, то опираясь на доказательство его классического аналога из все той же работы [23, теорема 2.16] будем иметь.

Теорема 3.2.1 *Для любой заданной $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ в классе функций $\{u \in W^{1,p}(\Omega) : \ u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)\}$ существует единственная функция u_0 такая, что*

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u_0|^p \, d\mu \le \int_{\Omega_0} |\nabla u|^p \, d\mu, \tag{3.2.4}$$

при всех u из этого класса.

Доказательство проводится в полной аналогии с [23]. Нужно лишь заметить, что пространство L^p на стратифицированном множестве есть «сумма» классических пространств L^p на каждом страте. Поэтому на каждом страте σ_{kj} из ограниченных в L^p последовательностей $\{u_n|_{kj}\}$ (ровно как и для $\{\nabla u_n|_{kj}\}$) можно извлечь подпоследовательности (причем так что на всех стратах они будут иметь одинаковые индексы, т.е. будут являться сужениями одной и той же подпоследовательности $\{u_{n_m}\}$ функций на Ω на рассматриваемый страт) слабо сходящиеся к функциям из $W^{1,p}(\sigma_{kj})$. Собрав их вместе по всем стратам из Ω мы получим функции из $W^{1,p}(\Omega)$.

3.3 Неравенство Соболева на стратифицированном множестве.

В качестве следующего шага после рассмотрения неравенства Пуанкаре будет естественным выбрать неравенство Соболева. В классическом случае пространства Соболева и, в частности, теоремы вложения для этих пространств, составляют большой отдельный раздел функционального анализа. К настоящему моменту написано огромное количество работ по этой теме, например, см. [12], [26], [7], [8]. Однако, на стратифицированных множествах данный вопрос до недавнего времени практически не рассматривался. Можно предположить, что его доказательство возможно провести методами аналогичными тем, что использованы при доказательстве неравенства Пуанкаре для случая $p = 2$. Однако, мы для решения этой задачи воспользуемся методами, примененными в предыдущей главе, т.е. опираясь на симметризацию и её свойства. Также, всюду далее мы продолжаем пользоваться обозначениями принятыми в предыдущей главе. Единственное, что необходимо отметить - в отличие от предыдущей главы, здесь мы не будем требовать, чтобы граница стратифицированного множества совпадала с его краем, т.е. она может быть выбрана любым образом, который допустим определением границы стратифицированного множества.

3.3.1 Неравенство Соболева для мягкого лапласиана.

Пусть $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ - связное стратифицированное множество. Рассмотрим следующее условие, являющееся некоторым аналогом приведенного ранее условия прочности. Будем говорить, что стратифицированное множество *удовлетворяет условию* $(*)$, если для любого свободного страта σ_{kj_1} существует цепочка стратов: $\sigma_{kj_1} \succ \sigma_{k-1,j_2} \prec \sigma_{kj_3} \succ \ldots \succ \sigma_{k-1,j_m}$, которая содержит только страты размерностей k и $k-1$, и при этом, $\sigma_{k-1,j_m} \subset \partial\Omega_0$, а все страты размерности k, входящие в данную цепочку, являются свободными.

Множества, удовлетворяющие такому условию, свободные страты которых имеют одинаковую размерность, образуют гораздо более широкий класс, чем класс множеств для которых в главе 2 было доказано изопериметрическое неравенство. Для этого класса оказывается возможным получить более слабую форму изопериметрического неравенства - без указания константы в явном виде.

Теорема 3.3.1 *Пусть $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ - связное стратифицированное множество, удовлетворяющее условию $(*)$, все свободные страты которого имеют одинаковую размерность d. Тогда найдется константа $C > 0$, зависящая только от Ω, такая, что для любой неотрицательной функции $u \in C_0^d(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ для почти всех $t \geq 0$ выполнено неравенство*

$$[P_\Omega(t,u)]^d \geq C[S_\Omega(t,u)]^{d-1}. \qquad (3.3.1)$$

Доказательство:

Прежде всего, для удобства рассмотрения, исключим ситуации, когда замыкания двух или более d-мерных стратов пересекаются по стратам размерности меньше $d-1$. В этом случае «разрежем» Ω по этому пересечению, см. рисунок 3.3.1.

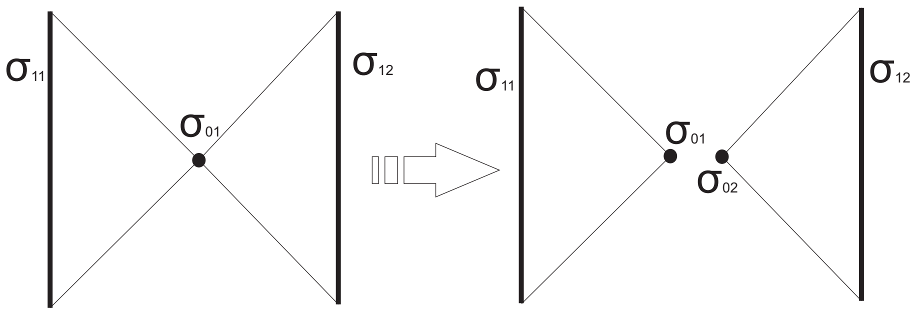


Рис. 3.3.1: Упрощение множества.

Страт σ_{01}, входящий в это пересечение, дублировался (в результате чего появился страт σ_{02}), но так как он не является свободным, то полученная задача окажется эквивалентной исходной.

Избавившись подобным образом от всех таких пересечений, мы получим набор стратифицированных множеств, покрывающий исходное Ω и такой, что каждое из них удовлетворяет условиям теоремы.

Далее, фиксируем произвольную функцию $u \in C_0^d(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ и заметим, что для любого свободного страта σ_{dj} имеем $u \in C^d(\sigma_{dj})$. В качестве следствия из теоремы Сарда хорошо известно (см. [15], где рассмотрен двумерный случай), что при почти всех $t \geq 0$ линии уровня $\{x \in \sigma_{dj} : u(x) = t\}$ представляют собой объединение конечного числа взаимно непересекающихся $(d-1)$-мерных замкнутых поверхностей класса C^1, граница которых либо содержится в $\partial\sigma_{dj}$ либо пуста. Всюду далее в ходе данного доказательства, говоря о произвольной функции u мы будем рассматривать только такие линии уровня. Более того, отметим, что неравенство (2.3.1) будет выполняться *при всех* t для которых линии уровня представляют собой объединение конечного числа $(d-1)$-мерных замкнутых поверхностей класса C^d.

По условию, $\partial\Omega_0$ содержит хотя бы один страт размерности $d-1$. Для удобства описания и без ограничения общности будем считать, что таковых стратов ровно один (так как выбрасывание $(d-1)$-мерного страта из $\partial\Omega_0$ не меняет меры лебеговых множеств и не увеличивает меры их границ, соответственно, сохраняет (2.3.1) и не увеличивает фигурирующую в нем константу, при этом, выполнение условия $(*)$ сохранится, потому как мы избавились от примыканий показанных на рисунке 3.3.1). Обозначим этот страт через $\sigma_{d-1,1}$, примыкающий к нему страт старшей размерности через σ_{d1}, а объединение $(d-1)$-мерных стратов кратности не меньше 2, которые примыкают к σ_{d1}, как σ_1. Для иллюстрации приводим нижеследующий рисунок 3.3.2 (множество σ_1 здесь содержит лишь один $(d-1)-$мерный страт, выделенный жирным пунктиром).

Рассмотрим σ_{d1} как обычное подмножество $\mathbb{R}^n$. Известно (см. [16]), что

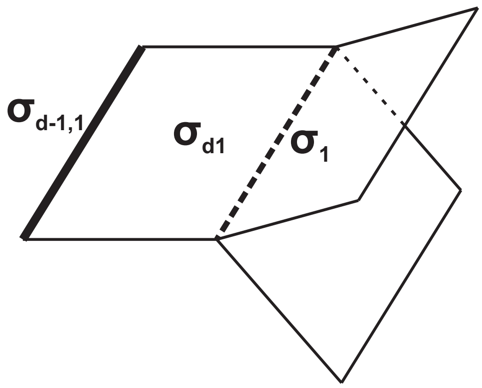


Рис. 3.3.2:

для любой функции класса C^d, заданной в некоторой ограниченной области и обращающейся в нуль на куске её границы положительной меры, для почти всех ее линий уровня выполнено изопериметрическое неравенство с некоторой константой, зависящей только от множества. Отсюда для всех таких линий уровня функции u имеем неравенство

$$[P_{\sigma_{d1}}(L_u(t))]^d \geq C_1[S_{\sigma_{d1}}(L_u(t))]^{d-1}. \tag{3.3.2}$$

Далее, возьмем произвольный $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество $\{t \geq 0 : P_{\sigma_{d1}}(L_u(t)) \geq \varepsilon\}$. Для всех таких t имеем

$$[P_\Omega(t,u)]^d \geq [P_{\sigma_{d1}}(L_u(t))]^d \geq \varepsilon^d = \widetilde{C}_1 S_\Omega^{d-1} \geq \widetilde{C}_1[S_\Omega(t,u)]^{d-1}.$$

С другой стороны, возьмем произвольный $(d-1)-$мерный страт из σ_1, обозначим его $\sigma_{d-1,2}$. Для любого $\delta_1 \in (0, \mu_{d-1}(\sigma_{d-1,2}))$ найдется $\varepsilon_1 > 0$ такой, что для всех $t \geq 0$ таких, что $P_{\sigma_{d1}}(L_u(t)) < \varepsilon_1$ имеем $\mu_{d-1}(\overline{L_u(t)} \cap \sigma_{d-1,2}) \leq \delta_1$. В самом деле, задача фактически сводится к следующей (проиллюстрируем на двумерном случае): имеется ограниченная область на плоскости, имеющая гладкую границу (некая связная часть которой имеет фиксированную длину δ). Очевидно, что мы не можем предъявить кривую сколь угодно малой длины, лежащую внутри рассматриваемой области и концы которой совпадают с концами этого куска границы длины δ. Т.е. длина такой кривой ограничена снизу неким $\varepsilon > 0$. Вдобавок, заметим, что выбор ε_1 не зависит от функции u, а зависит от δ_1 и Ω.

Теперь, для определенности, положим $\delta_1 = \mu(\sigma_{d-1,2})/2$ и рассмотрим некоторое замкнутое множество $\omega_1 \subset \overline{\sigma_{d-1,2}}$, мера которого равна δ_1. Для данного ω_1 рассмотрим следующее стратифицированное множество Ω_{ω_1}: оно содержит все страты множества Ω, кроме страта σ_{d1} и всех стратов из $\partial\sigma_{d1}$, которые не входят в σ_1, а вдобавок, страт $\sigma_{d-1,2}$ разбит на несколько новых стратов так, чтобы множества ω_1 и $\overline{\sigma_{d-1,2}} \setminus \omega_1$ состояли из стратов. Множество ω_1 объявим границей стратифицированного множества Ω_{ω_1}. При этом, множество Ω_{ω_1} можно считать связным, так как иначе достаточно рассмотреть каждую его компоненту связности (коих будет конечное число, всегда меньшее чем, например, число стратов старшей размерности) в отдельности. Легко видеть, что для лебеговых множеств, не пересекающихся с ω_1, задача свелась к аналогичной, но на множестве содержащем на один страт старшей размерности меньше. В самом деле, во-первых, если $L_u(t_0)$ не пересекается с ω_1, то не пересекается с ним и $L_u(t)$ при всех $t > t_0$. Сужение функции u на множество $L_u(t_0)$, как нетрудно заметить, можно продолжить достаточно гладким образом до функции обращающейся в нуль на ω_1, причем так, что $L_u(t)$ при всех $t > t_0$ не изменятся. А потому, имея нужный результат на Ω_{ω_1} мы получим его же и для всех лебеговых множеств указанной функции с $t \geq t_0$.

Несмотря на то, что для того, чтобы перебрать все (или почти все) лебеговы множества произвольной гладкой функции u нам необходимо будет перебрать все такие возможные варианты выбора ω_1, но благодаря тому, что мера ω_1 фиксирована (и положительна), мы сможем выбрать минимальное ω_1 (в смысле получаемой в неравенстве (3.3.1) константе), т.е. такое, которое подойдет для всех лебеговых множеств удовлетворяющих $\mu_{d-1}(\overline{L_u(t)} \cap \sigma_{d-1,2}) \leq \mu(\omega_1) = \mu(\sigma_{d-1,2})/2$, независимо от выбора функции u. Для наглядности достаточно снова обратиться к простейшей ситуации, когда имеется круг единичного радиуса, на котором рассматривается класс гладких функций, обращающихся в нуль на какой-либо части окружности длины π.

Таким образом, достаточно будет рассмотреть фиксированное ω_1.

Далее, повторим проделанные выше операции уже для множества Ω_{ω_1}. Выберем произвольным образом страт размерности $d-1$ из ω_1 (обозначим его $\sigma_{d-1,3}$) и страт σ_{d2} из Ω_{ω_1}, к которому он примыкает. Для оставшихся в нашем рассмотрении лебеговых множеств функции u (т.е. таких, что $P_{\sigma_{d1}}(L_u(t)) < \varepsilon_1$), в силу тех же аргументов, что и для неравенства (3.3.2), будем иметь

$$[P_{\sigma_{d2}}(L_u(t))]^d \geq C_2[S_{\sigma_{d2}}(L_u(t))]^{d-1}.$$

Здесь снова подчеркнем, что константа C_2 может быть выбрана не зависящей от множества ω_1.

Через σ_2 обозначим объединение $(d-1)$-мерных стратов кратности не меньше 2 (за исключением стратов из ω_1), которые примыкают к σ_{d2}. Фиксируем $\sigma_{d-1,4}$ из σ_2 и для $\delta_2 = \mu(\sigma_{d-1,4})/2$ выберем ε_2 такой, что для всех $t \geq 0$ таких, что $P_{\sigma_{d2}}(L_u(t)) < \varepsilon_2$, будем иметь $\mu_{d-1}(\overline{L_u(t)} \cap \sigma_{d-1,4}) \leq \delta_2$. При этом, как и ранее, для t из $\{t \geq 0 : P_{\sigma_{d2}}(L_u(t)) \geq \varepsilon_2\}$ будем иметь

$$[P_\Omega(t,u)]^d \geq [P_{\sigma_{d2}}(L_u(t))]^d \geq \varepsilon_2^d = \widetilde{C}_2 S_\Omega^{d-1} \geq \widetilde{C}_2[S_\Omega(t,u)]^{d-1}.$$

Для остальных лебеговых множеств, т.е. для тех, которые соответствуют t из $\{t \geq 0 : (P_{\sigma_{d1}}(L_u(t)) < \varepsilon_1) \wedge (P_{\sigma_{d2}}(L_u(t)) < \varepsilon_2)\}$ выберем замкнутое множество $\omega_2 \subset \sigma_{d-1,4}$, мера которого равна δ_2. Аналогично проделанному выше, построим стратифицированное множество Ω_{ω_2} для которого ω_2 будет являться границей. В результате мы перейдем к задаче на еще более узком множестве.

Продолжая так далее, мы за конечное число шагов (не превосходящее, например, количества d-мерных стратов) дойдем до момента, когда останется стратифицированное множество $\Omega_{\omega_{k-1}}$ содержащее лишь один страт размерности d (обозначим его σ_{dk}) и некоторый набор стратов меньших размерностей, к нему примыкающих (на самом деле, таковых множеств может оказаться сразу несколько, но все они могут быть рассмотрены отдельно, по причине того, что их замыкания будут пересекаться только по стратам размерности не более чем $d-2$). При этом, в силу условия $(*)$ рассмотренными окажутся все страты старшей размерности. Кроме того, $(d-1)-$мерная мера границы $\Omega_{\omega_{k-1}}$ будет положительна и равна некоторому δ_{k-1}.

Для σ_{dk} получаем, что для всех лебеговых множеств таких, что $P_{\sigma_{di}}(L_u(t)) < \varepsilon_i$ при всех $i < k$ (для остальных требуемое неравенство уже доказано) выполнено

$$[P_{\sigma_{dk}}(L_u(t))]^d \geq C_k[S_{\sigma_{dk}}(L_u(t))]^{d-1}. \tag{3.3.3}$$

Но для тех же самых лебеговых множеств при всех $i < k$ также выполнены неравенства вида:

$$[P_{\sigma_{di}}(L_u(t))]^d \geq C_i[S_{\sigma_{di}}(L_u(t))]^{d-1}.$$

Просуммировав эти неравенства по всем $i < k$ и добавив к ним неравенство (3.3.3) получим

$$\sum_{i=1}^{k}[P_{\sigma_{di}}(L_u(t))]^d \geq \sum_{i=1}^{k} C_i[S_{\sigma_{di}}(L_u(t))]^{d-1} \Rightarrow$$

$$[P_\Omega(t,u)]^d \geq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[P_{\sigma_{di}}(L_u(t))]^d \geq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} C_i[S_{\sigma_{di}}(L_u(t))]^{d-1} \geq$$

$$\geq \frac{\min\limits_i C_i}{k^d}\left[\sum_{i=1}^{k} S_{\sigma_{di}}(L_u(t))\right]^{d-1} = \widetilde{C}[S_\Omega(t,u)]^{d-1}.$$

Взяв минимум среди констант вида C_i и $\widetilde{C}_i$ по $\overline{i=1,k}$ мы получим общую константу C с которой будет выполняться неравенство (3.3.1) для почти всех лебеговых множеств функции $u \in C_0^d(\Omega_0, \partial\Omega_0)$. Остается снова напомнить, что величины δ_i и ε_i не зависят от выбора функции u, а зависят от вида стратов старшей размерности, т.е. от Ω (более того, приведенное доказательство можно было бы сформулировать не в терминах лебеговых множеств, а в терминах стратифицированных подмножеств множества Ω, имеющих «хорошую границу», а после заметить, что для гладких функций почти все лебеговы множества будут таковыми). ■

Пользуясь полученным неравенством легко получить и ослабленный аналог принципа Пойя - Сеге. А именно, нетрудно заметить, что если в доказательстве теоремы 2.4.1 вместо изопериметрического неравенства (2.3.1) применить неравенство (3.3.1), то результатом будет следующая теорема.

Теорема 3.3.2 *Пусть дано стратифицированное множество* $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *удовлетворяющее условию* $(*)$ *и такое, что все его свободные страты имеют размерность* n. *Тогда для любой неотрицательной функции* $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ *выполнено*

$$\int_{\Omega_0} \rho|\nabla u|^p d\mu \geq C \int_B |\nabla u^*|^p d\mu, \qquad (3.3.4)$$

где $C > 0$ зависит только от Ω.

При этом, константа C в последнем неравенстве будет равна константе, фигурирующей в неравенстве (3.3.1), деленной на константу в обычном изопериметрическом неравенстве в $\mathbb{R}^d$. Поэтому, при наличии точной константы в неравенстве (3.3.1) мы будем иметь и точную константу в неравенстве (3.3.4), а случаи равенства в обоих из них будут достигаться на одних и тех же множествах.

Пользуясь теоремой 3.3.2, элементарным образом доказывается неравенство Соболева для случая мягкого лапласиана.

Теорема 3.3.3 *Пусть дано стратифицированное множество $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ удовлетворяющее условию $(*)$ и такое, что все его свободные страты имеют размерность n. Тогда для любой функции $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ при всех $1 \le p < n$, $1 \le q \le \frac{np}{n-p}$ выполнено*

$$\left(\int_{\Omega_0} \rho |u|^q d\mu \right)^{1/q} \le C \left(\int_{\Omega_0} \rho |\nabla u|^p d\mu \right)^{1/p}, \tag{3.3.5}$$

где ρ равно единице на свободных стратах и нулю на остальных.

Доказательство.

Применим к произвольной функции $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ симметризацию Шварца. В силу леммы 2.3.1 имеем $u^* \in PC_0^1(B)$. А потому для функции u^* выполнено классическое неравенство Соболева в $\mathbb{R}^n$, т.е.,

$$\left(\int_B |u^*|^q dx \right)^{1/q} \le C_1 \left(\int_B |\nabla u^*|^p \right)^{1/p}, \tag{3.3.6}$$

при всех $1 \le p < n$, $1 < q \le \frac{np}{n-p}$.

Далее, из теоремы 3.3.2 имеем

$$\int_{\Omega_0} \rho |\nabla u|^p d\mu \ge C_2 \int_B |\nabla u^*|^p d\mu. \tag{3.3.7}$$

Наконец, из очевидных свойств симметризации Шварца будет

$$\int_{\Omega_0} \rho|u|^q d\mu = \int_B |u^*|^q d\mu. \tag{3.3.8}$$

Скомбинировав соотношения (3.3.6)-(3.3.8) получим требуемое. ■

Отметим, что получаемая в неравенстве (3.3.5) константа равна $C = C_1(\frac{C_2}{C_3})^{-\frac{1}{p}}$, где C_1 есть точная константа в неравенстве Соболева в $\mathbb{R}^n$, C_2 есть константа из неравенства (3.3.1), C_3 - константа в изопериметрическом неравенстве в $\mathbb{R}^n$. Первая и третья из них хорошо известны (см. [27]), поэтому вопрос точной константы в неравенстве Соболева сводится к определению точной константы в неравенстве (3.3.1) для рассматриваемого класса множеств. В предыдущей главе рассматривался класс двумерных стратифицированных множеств E, для которого было доказано изопериметрическое неравенство с константой равной 4π. Поэтому для этого класса точная константа в неравенстве (3.3.5) будет совпадать с константой в его классическом аналоге.

Также заметим, что при $p \geq n$ неравенство (3.3.5) будет выполнено при всех $q \geq 1$.

Теперь уберем требование совпадения размерностей свободных стратов при рассмотрении неравенства Соболева. Пусть дано стратифицированное множество $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ удовлетворяющее условию $(*)$ и пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ есть размерности его свободных стратов. Рассмотрим стратифицированное подмножество множества Ω, представляющее собой объединение всех его n_1-мерных стратов и стратов, формирующих их границу. Обозначим его Ω_{n_1}. Считаем полученное множество связным (иначе берем отдельно каждую его компоненту связности). В качестве внутренности и границы множества Ω_{n_1} возьмем его пересечения с Ω_0 и $\partial\Omega_0$, соответственно. Легко видеть, что полученное множество удовлетворяет условию $(*)$ и кроме того, все его свободные страты имеют одинаковую размерность. Поэтому для него применима теорема 3.3.3. Построив такие множества для всех n_i и применив к каждому из них теорему 3.3.3 мы получим следующий результат.

Теорема 3.3.4 *Пусть дано стратифицированное множество $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ удовлетворяющее условию $(*)$ и пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ - размерности его свободных стратов. Тогда для любой функции $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ выполнено*

$$\left(\int_{\Omega_0} \rho |u|^q d\mu \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_0} \rho |\nabla u|^p d\mu \right)^{1/p}. \tag{3.3.9}$$

где $p \geq 1$, а q определяется следующим образом:

$$\begin{cases} 1 \leq q < \infty, & \text{при } p \geq n_k; \\ 1 \leq q \leq n_k p/(n_k - p), & \text{при } p \in [n_{k-1}, n_k); \\ 1 \leq q \leq n_{k-1} p/(n_{k-1} - p), & \text{при } p \in [n_{k-2}, n_{k-1}); \\ \ldots & \\ 1 \leq q \leq n_2 p/(n_2 - p), & \text{при } p \in [n_1, n_2); \\ 1 \leq q \leq n_1 p/(n_1 - p), & \text{при } p \in [1, n_1). \end{cases} \tag{3.3.10}$$

3.3.2 Неравенство Соболева для жесткого лапласиана.

На основании неравенства Соболева для мягкого лапласиана мгновенно получаем и аналог для жесткого лапласиана для следующего класса множеств. Пусть дано стратифицированное множество $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ и пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ есть размерности стратов, входящих в Ω_0. Чуть ранее были определены подмножества вида Ω_{n_i}. Потребуем, чтобы каждое из них $(i = \overline{1, k})$ удовлетворяло условию $(*)$. Тогда для множества Ω выполнена теорема 3.3.4, но при $\rho \equiv 1$ на Ω_0, т.е. в условиях жесткого лапласиана. Класс таких множеств оказывается шире, чем, например, класс множеств рассмотренных в [4] для жесткого лапласиана, но при этом, он более узок, чем класс множеств удовлетворяющих условию прочности, для которого доказано неравенство Пуанкаре. Поэтому, надо полагать, этот класс допускает расширение. Как будет показано ниже, расширение возможно, например, до класса множеств удовлетворяющих условию прочности.

Рассмотрение начнем с достаточно простого примера. Возьмем стратифицированное множество построенное следующим образом. Рассмотрим двумерный прямоугольник. Его внутренность объявляем двумерным стратом σ_{21}, произвольно выбранную точку на его границе - стратом σ_{01}, а оставшуюся часть границы - стратом σ_{11}. В итоге мы получим стратифицированное множество, состоящее из трех стратов. Страт σ_{01} объявим границей полученного множества Ω, а два оставшихся страта, соответственно, внутренностью (нетрудно убедиться, что полученное множество удовлетворяет условию прочности и не удовлетворяет требованиям, описанным в первом абзаце данного раздела).

Рассмотрим интеграл Дирихле от некоторой достаточно гладкой неотрицательной функции u, обращающейся в нуль на $\partial\Omega_0$. Он равен сумме интегралов по стратам σ_{21} и σ_{11}. Так как размерности стратов различаются, то рассматривать их одновременно несколько неудобно. Поэтому мы применим следующий нехитрый трюк. Во-первых, заметим, что путем изометричного преобразования страт σ_{11} превращается в отрезок A_1 (с сохранением заданной на нем функции). При этом интеграл Дирихле по данному страту не изменится. После этого, из одномерного отрезка нетрудно сконструировать двумерный (а в общем случае и любой размерности) прямоугольник. А именно, рассмотрим $A = A_1 \times [0, 1]$, причем положим $u(x, y) = u(x)$, где $x \in A_1$ и $y \in [0, 1]$. В результате, очевидно, будем иметь

$$\int_{\sigma_{11}} |u|^p d\mu = \int_A |u|^p dx, \ \int_{\sigma_{11}} |\nabla u|^p d\mu = \int_A |\nabla u|^p dx \tag{3.3.11}$$

Таким образом, рассмотрение интеграла Дирихле по стратифицированному множеству свелось к его рассмотрению на некотором несвязном двумерном множестве, состоящем из страта σ_{21} (либо его эквивалента, полученного изометричным отображением в плоское множество) и множества A. Причем, на множестве A выполнено неравенство Соболева $\int_A |u|^q d\mu \leq C \int_A |\nabla u|^p d\mu$, при стандартных ограничениях на q и p (так как в случае с ним мы фактически имеем гладкую функцию на отрезке, обращающуюся в нуль на его концах). Однако, написать то же самое для страта σ_{21} мы не можем, так как функция u в общем случае обращается в нуль лишь в одной его граничной точке, т.е. на множестве меры нуль (меры в $\mathbb{R}$). Поэтому рассмотрим его в совокупности с A (объединение A и σ_{21} обозначим $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$). В контексте неравенства Соболева, очевидно, рассмотрения множеств $\widetilde{\Omega}$ и Ω эквивалентны. Применим к функции u на $\widetilde{\Omega}$ симметризацию Шварца. Если мы покажем, что выполнен принцип Пойя - Сеге, с некоторой константой, зависящей только от $\widetilde{\Omega}$ (т.е. только от Ω), то это сразу приведет к искомому неравенству Соболева. А для этого достаточно получить изопериметрическое неравенство, наподобие теоремы 3.3.1 (дальнейшие рассуждения во многом схожи с приведенным доказательством этой теоремы).

Имеем, что периметр любого лебегова множества функции u на $\widetilde{\Omega}$ имеет две составляющих: первая относится к σ_{21}, а вторая к A. Обозначим их $P_{\sigma_{21}}(L_u(t))$ и $P_A(L_u(t))$, соответственно. Будет $P_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t)) = P_{\sigma_{21}}(L_u(t)) + P_A(L_u(t))$. И то же самое для площадей лебеговых множеств: $S_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t)) = S_{\sigma_{21}}(L_u(t)) + S_A(L_u(t))$. При этом, для любой гладкой функции при почти всех t будем иметь $P_A^2(L_u(t)) \geq \widetilde{C} S_A(L_u(t))$. Фиксируем $\delta = \frac{\mu(A)}{2}$. Все лебеговы множества функции u можно разделить на две категории. Первая, это те из них, что $\mu(\{x \in A : u(x) \geq t\}) \geq \delta$. Вторая, соответственно, те для которых $\mu(\{x \in A : u(x) \geq t\}) < \delta$. При этом, при фиксированной u имеем

$\{x \in A : u(x) \geq t_1\} \subset \{x \in A : u(x) \geq t_2\}$ при $t_1 > t_2$. Поэтому для каждой функции значения t соответствующих этим категориям будут образовывать связные множествами вида $[0, t_0]$ и $(t_0, +\infty)$, соответственно. Для первой категории, очевидно, имеем $P_A(L_u(t)) \geq 2$. В самом деле, если мы рассмотрим ситуацию на σ_{11}, то заметим, что граница каждого из таких лебеговых множеств состоит, как минимум, из двух точек, в каждой из которых функция u, в силу своей непрерывности, равна значению t. А тогда на множестве A найдется, как минимум, два отрезка единичной длины (соответствующих этим точкам на σ_{11}), которые войдут в $P_A(L_u(t))$ (для иллюстрации, см. рисунок 3.3.3, лебеговы множества на нем заштрихованы). Откуда получаем

$$P^2_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t)) \geq P^2_A(L_u(t)) \geq 4 = C\mu(\Omega_0) \geq CS_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t)).$$

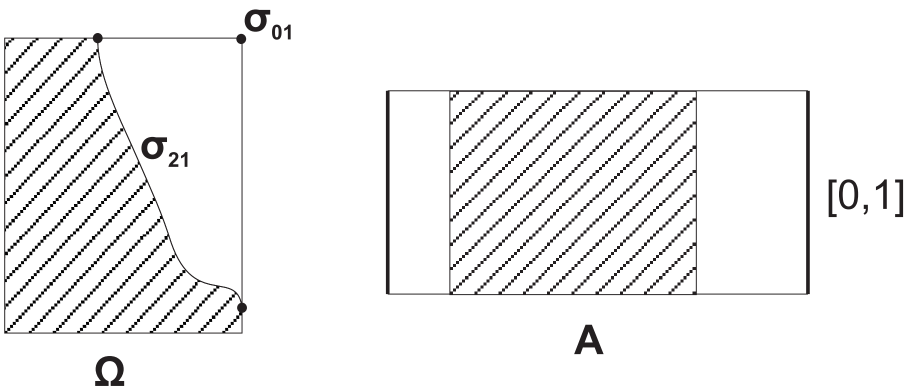


Рис. 3.3.3: Простейшее множество

Теперь рассмотрим лебеговы множества второй категории. Как уже было сказано, для каждой u соответствующие ей t образуют множество вида $(t_0, +\infty)$ (где t_0 зависит от u). Имеем $\mu(\{x \in A : u(x) \geq t_0\}) < \delta$ или, что то же самое, $\mu(\{x \in \sigma_{11} : u(x) \geq t_0\}) < \delta$ (с той разницей, что в первом случае это двумерная мера Лебега, а во втором - одномерная), а тогда $\mu(\{x \in \sigma_{11} : u(x) < t_0\}) \geq \delta$ (напомним, что $\delta = \frac{\mu(A)}{2}$). Более того, в силу непрерывности u на Ω найдется некоторая окрестность множества $\{x \in \sigma_{11} : u(x) < t_0\}$, внутри которой будет $u(x) < t_0$. Состоять она будет из самого $\{x \in \sigma_{11} : u(x) < t_0\}$, а также некоторого открытого подмножества страта σ_{21}. А тогда сужение функции u на множество $\{x \in \sigma_{21} : u(x) \geq t_0\}$ допускает гладкое продолжение до функции обращающейся в нуль на части $\partial\sigma_{21}$ меры не меньше δ, причем так что мера множества $\{x \in \sigma_{21} : u(x) \geq t_0\}$ сохранится (а тогда сохранятся меры всех $L_u(t)$ при $t \geq t_0$), обозначим эту функцию $\widehat{u}$. Описанная ситуация является классической и уже обсуждалась ранее, для нее при почти всех $t > 0$ будет выполнено $P^2(L_{\widehat{u}}(t)) \geq \widehat{C}S(L_{\widehat{u}}(t))$. Откуда получаем $P^2_{\sigma_{21}}(L_u(t)) \geq \widehat{C}S_{\sigma_{21}}(L_u(t))$, при почти всех $t > t_0$. Причем константа $\widehat{C}$ зависит только от δ и σ_{21}, т.е. только от Ω. Памятуя о том, что на множестве A подобное неравенство выполнено всегда, получаем $P^2_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t)) \geq CS_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t))$, при почти всех $t > t_0$.

Собрав оба рассмотренных случая вместе получаем, $P^2_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t)) \geq CS_{\widetilde{\Omega}}(L_u(t))$, при почти всех $t > 0$, с константой зависящей только от Ω (для каждой функции все её лебеговы множества распадаются на две категории, в каждой из которых выполнено требуемое неравенство с константой независящей от u, сама структура этих категорий при этом неважна). Повторяя доказательство теоремы 3.3.2 и пользуясь в нем полученным только что изопериметрическим неравенством, мы получаем неравенство

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla u^*|^p d\mu \leq C \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla u|^p dx.$$

А тогда, повторив доказательство теоремы 3.3.3 с использованием этого неравенства мы получим неравенство Соболева для множества $\widetilde{\Omega}$, т.е. для Ω. Отметим, что гладкость симметризации функции на $\widetilde{\Omega}$ доказывается в полной аналогии с доказательством леммы 2.3.1 и в его свете совершенно очевидна.

Перейдем к рассмотрению общей ситуации. Идею использованную для рассмотренного только что простого случая можно сформулировать следующим образом. Для стратов, граница которых содержит страты из $\partial\Omega_0$ размерности на единицу меньше, чем данный (обозначим их объединение S_1), мы мгновенно получаем изопериметрическое неравенство (а тогда и само неравенство Соболева). Когда периметр лебеговых множеств, отнесенный к таковым стратам ограничен снизу, то мы, в силу ограниченности Ω, получаем изопериметрическое неравенство для всего лебегова множества на Ω (и, соответственно, для всех лебеговых множеств меньших уровней). Но как только для какого-либо лебегова множества он оказывается достаточно мал (меньше некоторой фиксированной величины), мы знаем, что у тех стратов, которые содержат их (страты из S_1) в качестве границы (множество таких обозначим S_2), часть этой границы фиксированной меры δ не пересекается с этими лебеговыми множествами (и всеми лебеговыми множествами больших уровней). А потому сужение рассматриваемой функции на такое лебегово множество допускает продолжение до функции обращающейся в нуль на куске границы меры δ, для которого будет выполнено искомое изопериметрическое неравенство. Таким образом, мы получаем изопериметрическое неравенство для объединения стратов из S_1 и S_2. Аналогично, если периметр отнесенный к страту $\sigma_{ij} \in S_2$ будет достаточно мал, то для тех стратов на единицу большей размерности к которым он примыкает мы снова получим, что часть их границы фиксированной меры (вместе со своей некоторой окрестностью размерности $i+1$) не входит в рассматриваемое лебегово множество, а потому снова существует продолжение до функции гладкой на этих $(i+1)$-мерных стратах, обращающейся в нуль на куске границы каждого из них. Таким образом мы имеем изопериметрическое неравенство для объединения тех стратов из Ω_0, которые можно соединить цепочкой стратов со стратом из $\partial\Omega_0$, так чтобы размерность каждого следующего страта цепочки была меньше размерности предыдущего ровно на единицу. Обозначим его S_3. Теперь возьмем произвольный страт $\sigma_{ij} \in S_3$ и произвольный страт размерности на единицу меньше $\sigma_{i-1,j} \in \Omega_0$, который содержится в его границе и не входит в S_3. Очевидно, что при достаточно малом периметре множества $L_u(t)$ отнесенном к страту σ_{ij} часть страта $\sigma_{i-1,j}$ фиксированной меры не попадет в замыкание $L_u(t)$, а потому мы снова можем продолжить сужение функции u на множество $\overline{L_u(t)} \cap \sigma_{i-1,j}$ до всего $\sigma_{i-1,j}$, так что полученная функция обращается в нуль на куске границы положительной меры (размерности $i-2$) и сохраняет лебеговы множества уровня t и выше. Что снова даст требуемое неравенство уже на множестве включающем страт $\sigma_{i-1,j}$. Таким образом, в цепочке, соединяющей произвольный страт с $\partial\Omega_0$ допускаются не только уменьшения размерности на единицу, но и увеличения размерности на единицу. Существование такой цепочки для каждого страта и есть определение условия прочности стратифицированного множества, которое приведено в начале главы и для которого было доказано неравенство Пуанкаре в работе [9]. При этом, как нетрудно заметить, приведенные рассуждения не работают в случае примыканий стратов, размерности которых отличаются друг от друга более чем на единицу (само существование таких примыканий допускается, но тогда для каждого из таких стратов должна найтись прочная цепочка, соединяющая его с границей).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.5 *Пусть дано прочное стратифицированное множество $\Omega \to (\Omega_0, \partial\Omega_0)$ и пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ - размерности свободных стратов множества Ω. Тогда для любой функции $u \in PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ выполнено*

$$\left(\int_{\Omega_0} |u|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_0} |\nabla u|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{3.3.12}$$

где $p \geq 1$, а q определяется следующим образом:

$$
\begin{cases}
1 \le q < \infty, & \text{при } p \ge n_k; \\
1 \le q \le n_k p/(n_k - p), & \text{при } p \in [n_{k-1}, n_k); \\
1 \le q \le n_{k-1} p/(n_{k-1} - p), & \text{при } p \in [n_{k-2}, n_{k-1}); \\
\dots \\
1 \le q \le n_2 p/(n_2 - p), & \text{при } p \in [n_1, n_2); \\
1 \le q \le n_1 p/(n_1 - p), & \text{при } p \in [1, n_1).
\end{cases}
\tag{3.3.13}
$$

Замечание 3.3.1 *Во всех приведенных в данной главе версиях неравенства Соболева пространство $PC_0^1(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ по определению может быть заменено на $W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$.*

Что касается точной константы в теоремах 3.3.4 и 3.3.5, то в общем случае этот вопрос уже нельзя свести к одному лишь неравенству (3.3.1), так как при доказательстве нами допускались некоторые огрубления, а именно, при суммировании неравенств на стратах различной размерности. Логично предположить, что оптимальное в этом смысле множество должно содержать как можно меньше стратов одинаковой размерности, то есть не более одного страта каждой имеющейся размерности. При этом, каждый из них должен быть близким к шару соответствующей размерности.

3.4 Заключение

В первой главе была получена оценка первого собственного значения оператора Лапласа на графе с нулевыми краевыми условиями Дирихле. Что касается других краевых условий, то, например, в случае условия Неймана $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ первое собственное значение, очевидно, будет равно нулю. Краевое условие Робена ($\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$) пока не рассматривалось. Однако, использованный нами подход выглядит применимым для такого случая. Также не стоит окончательно отбрасывать идею более гибкой симметризации как на графе, так и на стратифицированном множестве. Разумеется, что она все равно не должна противоречить симметризации Шварца, т.е. как минимум, не изменять шар при симметризации.

Результаты второй главы могут допускать некоторое улучшение. Например, скорее всего класс стратифицированных множеств для которых была получена оценка первого собственного значения лапласиана можно расширить. Однако, это совершенно нетривиальный вопрос. Кроме того, случай множества произвольной размерности (как и случай жесткого лапласиана) не был рассмотрен вовсе.

Условия в которых доказано неравенство Соболева (и в частности, неравенство Пуанкаре) могут быть уточнены. А именно, при некоторых ограничениях на показатель p можно ослабить условие прочности, допустив минимальный разрыв в размерностях большим единицы. Очевидно, что этот разрыв должен быть строго меньше p, но будет ли это достаточным и как при этом будут выглядеть требования на q является отдельным вопросом.

Также представляет большой интерес вопрос обобщения результатов второй и третьей глав до случая произвольных римановых многообразий.

Список литературы

[1] Берж К. Теория графов и её применения/ К. Берж// Издательство иностранной литературы, М. – 1962.

[2] Диаб А.Т., Кулешов П.А., Пенкин О.М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе/ А.Т. Диаб, П.А. Кулешов, О.М. Пенкин// Математические заметки – 96:6 – 2014 – с. 885–895.

[3] Комаров А.В., Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О частотном спектре многомерного аналога тканой мембраны/ А.В. Комаров, О.М. Пенкин, Ю.В. Покорный// Доклады РАН – 390, № 2 –2013 – с.151-154.

[4] Кулешов П.А. Теорема вложения Соболева для стратифицированных множеств/ П.А. Кулешов// Научные ведомости Белгородского государственного университета, Математика Физика – № 5 (148) – 2013 – с.79-87.

[5] Кулешов П.А., Пенкин О.М. Неравенство Пуанкаре для стратифицированных множеств/ П.А. Кулешов, О.М. Пенкин// Фундаментальные исследования – № 6–1 – 2014 – с. 49-53;

[6] Куляба В.В., Пенкин О.М. Неравенство Пуанкаре на стратифицированных множествах/ В.В. Куляба, О.М. Пенкин// Докл. РАН. — 2002. — Т. 386, № 4. — С. 453-456.

[7] Либ Э., Лосс М. Анализ/ Э. Либ, М. Лосс// Новосибирск – Научная книга – 1998.

[8] Мазья В.Г. Пространства С.Л.Соболева/ В.Г. Мазья// Издательство Ленинградского университета – 1985.

[9] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических

графах/ Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров// М.:Физматлит – 2005.

[10] Пойа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике/ Г. Пойа, Г. Сегё// М.:Физматлит – 1962.

[11] Стеклов В.А. О дифференциальных уравнениях математической физики/ В.А. Стеклов// Математический сборник – 19 вып.4 – 1896 – с. 469-585.

[12] Adams R.A. Sobolev spaces/ R.A. Adams// AP - 1975.

[13] Ashbaugh M., Benguria R. Isoperimetric inequalities for eigenvalues of the Laplacian/ M. Ashbaugh, R. Benguria// Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday – Proc. Sympos. Pure Math., 76, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence – 2007 – p.105–139.

[14] Attouch H., Buttazzo G., Michaille G. Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization/ H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille// Philadelphia Society for Industrial and Applied Mathematics - MOS-SIAM series on optimization – 2014.

[15] Bourgain J., Korobkov M., Kristensen J. On the Morse–Sard property and level sets of Sobolev and BV functions/ J. Bourgain, M. Korobkov, J. Kristensen// Rev. Mat. Iberoamericana 29 – 2013 – p.1-23.

[16] Bramanti M. On the gradient of Schwarz symmetrization of functions in Sobolev spaces/ M. Bramanti// Boll. Un. Mat. Ital. B (7) n. 2 – 1993 – p. 413-430.

[17] Burchard A. A short course on rearrangement inequalities/ A. Burchard// доступен по адресу *http://www.math.utoronto.ca/almut/rearrange.pdf* – 2009.

[18] Ciarlet P.G. The finite element method for elliptic problems/ P.G. Ciarlet// Studies in Mathematics and its Applications – vol. 4 – North-Holland, Amsterdam – 1978.

[19] Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincare's inequality on stratified sets and applications/ A. Gavrilov, S. Nicaise, O. Penkin// Rapport de recherche 01.2, Universite de Valenciennes, Fevrier – 2001 – P. 1-20.

[20] Faber C. Beweiss, dass unter allen homogenen Membrane von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige die tiefsten Grundton gibt/ C. Faber// Sitzungsber.–Bayer. Akad. Wiss. – Math.–Phys. Munich. – 1923 – p.169–172.

[21] Federer H. Geometric Measure Theory/ H. Federer// Classics in Mathematics – Springer-Verlag Berlin Heidelberg – 1996.

[22] Krahn E. Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises/ E. Krahn// Mathematische Annalen – Band 94 – 1925 – p. 97–100.

[23] Lindqvist P. Notes on the p-Laplace equation/ P. Lindqvist// доступен по адресу $http://www.math.ntnu.no/\sim lqvist/p-laplace.pdf$.

[24] Maly J., Swanson D., Ziemer W.P. The coarea formula for Sobolev mappings/ J. Maly, D. Swanson, W.P. Ziemer// Transactions of the American Mathematical Society Vol. 355, No. 2 – Feb. 2003 – p. 477-492.

[25] Poincare H. Sur les equations de la physique mathematique/ H. Poincare// Rendiconti del circolo mathematico di Palermo – 8 – 1894 – p. 57-156.

[26] Saloff-Coste L. Aspects of Sobolev-type inequalities/ L.Saloff-Coste// Cambridge University Press – 2002.

[27] Talenti G. Best Constant in Sobolev Inequality/ G. Talenti// Ann. Mat. Pura Appl. – 110 – 1976 – p. 353-372.