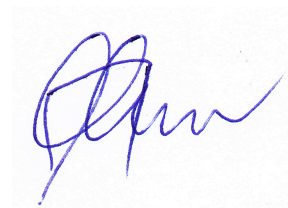


ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Попова Александра Евгеньевна

## Диаграммы Юнга в теории макросистем

Специальность 05.13.01 —

«Системный анализ, управление и обработка информации  
(радиотехника, автоматика, связь)»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Дорофеев Дмитрий Львович

Воронеж – 2015

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>1 Обзор литературы и предварительные сведения . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1 Общие вопросы теории систем. Стохастические системы . . . . .	11
1.2 Энтропийный подход к исследованию макросистем . . . . .	18
1.3 Парамакросистемы . . . . .	23
1.4 Разбиения и диаграммы Юнга . . . . .	27
Основные результаты и выводы . . . . .	38
<b>2 IDA<sub>1</sub> – макросистемы . . . . .</b>	<b>40</b>
2.1 Ранговые распределения . . . . .	41
2.2 Макросистемы с упорядоченным заполнением состояний . . . . .	42
2.3 Вероятностные характеристики IDA <sub>1</sub> – систем . . . . .	46
2.4 Модель сети Интернет на основе ранговых распределений . . . . .	49
2.5 Ёмкость единичной окрестности . . . . .	51
2.6 Свойства равновесных диаграмм . . . . .	54
Основные результаты и выводы . . . . .	67
2.7 Доказательства основных теорем . . . . .	68
<b>3 IDA<sub>2</sub> – макросистемы . . . . .</b>	<b>70</b>
3.1 Вероятностные характеристики IDA <sub>2</sub> – систем . . . . .	70
3.2 Ёмкость единичной окрестности . . . . .	74
3.3 Свойства равновесных диаграмм . . . . .	84
Основные результаты и выводы . . . . .	89
3.4 Доказательства основных теорем . . . . .	90

Заключение . . . . .	103
Список условных обозначений . . . . .	105

# Введение

## Актуальность темы

Успехи, достигнутые в статистической физике [1, 2], показали принципиальную возможность прогнозирования состояний больших систем с недетерминированным поведением элементов, и интерес к стохастическим макроскопическим системам [3–6] сохраняется уже на протяжении нескольких десятилетий.

Рост общего объёма информации, увеличение пропускной способности каналов связи, разрастание и усложнение телекоммуникационных и транспортных сетей, нарастание интенсивности транспортных и информационных потоков и другие проявления экономического прогресса требуют разработки новых и усовершенствования уже известных методов анализа сложных систем с целью прогнозирования и управления. Активное применение в системном анализе [7] находят методы из других дисциплин. Так как статистическая физика имеет дело с большими совокупностями однотипных частиц со стохастическим поведением, её методы не могли не привлечь внимания исследователей информационных, экономических, социальных и других систем. Многообразие механизмов распределения элементов систем по состояниям потребовало существенного изменения и расширения моделей статистической физики для решения задач системного анализа. Так, понятие энтропии, первоначально разработанное в термодинамике [8], позже легло в основу теории инфор-

мации [9] и в настоящее время активно применяется для характеристики числа способов реализации состояний информационных, транспортных, экономических систем [10–16].

Колоссальная сложность всех этих видов систем требует учёта как можно большего числа внешних и внутренних факторов, влияющих на состояние системы, анализа всех возможных вариантов поведения совокупности её элементов и нахождения такого из них, который будет реализован с наибольшей вероятностью. Для правильного подсчёта всевозможных распределений элементов системы по состояниям необходимо использование методов комбинаторики.

Подобно тому как графы естественным образом возникают в теории информации (кодовые деревья [17], модель каналов передачи информации [18]), в теории случайных процессов для описания эволюции состояний технических устройств [19], а также при моделировании информационных сетей [10, 11, 20, 21], диаграммы Юнга [22] являются наглядным и изящным способом представления систем с упорядоченным заполнением состояний. Обилие результатов, полученных при исследовании разбиений и изображающих их диаграмм Юнга в комбинаторике [23–30], даёт возможность изучения широкого класса процессов и систем, моделируемых диаграммами Юнга. Диаграммы Юнга служат для описания статистики квантовых систем тождественных частиц [31], построения моделей распределения частиц по энергетическим уровням [32, 33]. Математический аппарат теории разбиений применяется для исследования роста и плавления кристаллов [34, 35]. Кроме того, широко применяемые в современном системном анализе [36–38] ранговые распределения (такие, как закон Ципфа [39]) представляют собой не что иное как разбиения, изображаемые диаграммами Юнга, что хорошо видно из [40]. Таким образом, построение математических моделей стохастических макроскопических систем на основе различных комбинаторных объектов является актуальной

проблемой современного системного анализа.

## Цель работы

Целью работы является исследование статистических свойств системы, состоящей из неразличимых элементов, которые распределяются по различным состояниям, причём механизм заполнения состояний является упорядоченным (IDA – система), микросостояния системы равновероятны, а макросостояния определяются как окрестности микросостояний, а также определение равновесных состояний системы в одномерном и двумерном случаях.

В рамках поставленной цели решены следующие задачи:

1. Показано, что микросостояние IDA – системы из  $n$  элементов может быть однозначно задано диаграммой Юнга с  $n$  клетками. В пространстве микросостояний системы введена метрика, на основе которой построены выражения для вероятностей макросостояний системы.
2. Для частного случая, когда макросостояния являются единичными окрестностями микросостояний, получены явные выражения для ёмкости единичной окрестности микросостояния  $\lambda$  одномерной и двумерной IDA – систем.
3. Для одномерной IDA – системы найден вид равновесной диаграммы и ёмкость её единичной окрестности для любого числа клеток  $n$ .
4. Для двумерной IDA – системы установлены свойства максимальных диаграмм, к которым относятся равновесные диаграммы. Получены явные выражения для ёмкости окрестности равновесной диаграммы для  $n = n_s + T_{s+1} - T_{s-i+1}$ , где  $n_s = s(s+1)(s+2)/6$  (пирамидальное

число),  $T_s = s(s + 1)/2$  (треугольное число), и двусторонняя оценка ёмкости окрестности равновесной диаграммы в общем случае.

## Методы исследования

Для достижения цели работы применяются методы комбинаторики, теории вероятностей и статистической физики в рамках макросистемного подхода.

## Научная новизна

В настоящей работе разработана модель макроскопической системы с неразличимыми элементами и различимыми состояниями, заполнение которых является упорядоченным. Предложено определение макроскопических состояний системы как окрестностей микросостояний. Впервые обоснована возможность применения макросистемного подхода к анализу ранговых распределений.

Введена метрика в пространстве диаграмм Юнга. Она позволяет каждой диаграмме Юнга сопоставить вероятность, пропорциональную ёмкости её окрестности. В случае единичных окрестностей разработан метод, позволяющий определить ёмкость окрестности заданной диаграммы, исходя только из её формы, без непосредственного построения самой окрестности. Для трёхмерных диаграмм Юнга получено выражение для наименьшего значения количества гнёзд при заданном числе выступов. Проанализированы свойства диаграмм с наибольшей ёмкостью окрестности.

## **Практическая значимость**

Результаты работы могут быть использованы при анализе систем, характеризующихся ранговыми распределениями, в том числе для нахождения стационарных распределений потоков информации в телекоммуникационных сетях, а также для исследования процессов возникновения и разрушения распределений информационных потоков. Выявленные в ходе работы оболочечные свойства моделей  $IDA_1$  – и  $IDA_2$  – систем могут оказаться полезными для понимания механизма роста кристаллов и атомных кластеров. Также результаты работы могут быть использованы для моделирования процессов в таких макроскопических системах, в которых важны связи между ближайшими соседями, например, городская застройка или рост колонии микроорганизмов.

## **На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

1. Для одномерных и двумерных  $IDA$  – систем получены выражения для ёмкости единичной окрестности заданного микросостояния.
2. Для одномерных  $IDA$  – систем установлены равновесные состояния для любого числа элементов.
3. Для двумерных  $IDA$  – систем выделено множество, к которому принадлежат равновесные диаграммы, и границы, в которых заключена ёмкость окрестности равновесной диаграммы для заданного числа элементов.



## **Апробация результатов**

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: XIV Международная конференция «Информатика: проблемы, методология, технологии» Воронеж, Воронежский государственный университет, 6–8 февраля 2014 г.; XXX Международная научно-практическая конференция «Наука и современность — 2014», Новосибирск, ЦРНС, 18 июня 2014 г.; XXVI Международная заочная научно-практическая конференция «Научная дискуссия: инновации в современном мире», Москва, Международный центр науки и образования, 17 июня 2014 г.; Международная научно-практическая конференция «Научный поиск», Таганрог, Научно-образовательный центр «Взгляд», 15 июня 2014 г.; III Международная научная конференция «Современное общество: проблемы, идеи, инновации», Ставрополь, Центр научного знания «Логос», 16 июня 2014 г.; Международная открытая конференция «Современные проблемы анализа динамических систем», Воронеж, Воронежская государственная лесотехническая академия, 18–19 июня 2014 г.; научные семинары кафедры математической физики физического факультета и кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета.

## **Публикации**

Полученные в диссертации результаты изложены в 3 статьях [41–43] в журналах из перечня ВАК и в пяти статьях [44–48] в других печатных изданиях; в Реестре программ для ЭВМ зарегистрирована программа [49] для расчёта единичных окрестностей двумерных диаграмм Юнга.

## **Личный вклад автора**

Автором самостоятельно проводились аналитические и численные расчёты, результаты которых представлены в диссертации. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научным руководителем. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был существенным. Результаты, составляющие содержание положений, выносимых на защиту, получены автором лично.

## **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации 118 страниц, из них 101 страница основного текста. Диссертация содержит 38 рисунков. Список литературы включает 110 наименований и занимает 13 страниц.

# Глава 1

## Обзор литературы и предварительные сведения

### 1.1. Общие вопросы теории систем. Стохастические системы

#### Характеристика понятия системы

История понятия системы по своей длительности сравнима с историей самой науки — и так же, как и история науки, она далека от завершения. Термин «система» появился ещё в Древней Греции; без него невозможно представить себе ни работы Г. Галилея и И. Ньютона, описывающие систему мира, ни труды У. Гамильтона и П. Лапласа, посвящённые системам точек или тел. Большое развитие понятие системы получило в ходе «системного движения», начавшегося в середине XX века. Среди его представителей — Л. фон Берталанфи, В. Н. Садовский, А. А. Богданов, У. Р. Эшби, Дж. Клир и многие другие.

Как на разных исторических этапах развития науки, так и в рамках различных направлений современной теории систем, единого строгого определения системы не существует. Это связано с богатством и сложностью этого понятия и с многообразием подходов к исследованию систем. В переводе с древнегреческого слово «система» означает «целое, составленное из частей; соединение» [51]. В отечественном системном движении наиболее употребительно следующее определение термина «система», данное В. Н. Садовским [51]: «Система — совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которая образует определённую целостность, единство». С другой стороны, британский исследователь Б. Гейнс подчёркивал [52], что исследователи, изучающие системы, не только не могли бы дать им точного определения, но и не нуждаются в таком, и в этом, пожалуй, главное достижение системного подхода. Поэтому его своеобразное определение системы звучит так: «Система есть то, что различается как система».

Мы не будем пытаться рассмотреть все многочисленные определения понятия «система», но отметим ту особенность, на которую указывают все исследователи и которой обладает любая система, вне зависимости от её природы и подхода к её исследованию. Ещё Аристотель в «Метафизике» говорил о том, что целое больше, чем сумма частей. Выражаясь современным языком, можно сказать, что, как только совокупность объектов начинает рассматриваться как некое целое, то есть как система, она приобретает такие свойства, которыми не обладает каждый из объектов в отдельности. Закономерность несводимости свойств системы к свойствам её элементов называется *целостностью*, или *эмерджентностью* (см., наприм., [54]). Так, в термодинамике характеристики газа как целого: температура, энтропия и другие, — не применимы к отдельным атомам [55].

Не существует единой, универсальной классификации, которая отвечала бы огромному разнообразию природных и созданных человеком систем, а также задач, которые ставят себе исследователи при их изучении. Системы могут быть классифицированы по виду отображаемого объекта (технические, биологические, экономические и т. п.), виду научного направления, используемого для их моделирования (математические, химические, физические и др.), взаимодействию со средой (открытые и закрытые), величине и сложности. Системы и их модели могут также подразделяться на детерминированные и стохастические [54].

В [5] была предложена классификация систем по степени организованности, охватывающая детерминированные (хорошо организованные), стохастические (плохо организованные, или диффузные) и самоорганизующиеся, или развивающиеся, системы. Опишем здесь кратко эти типы систем.

Представление объекта *хорошо организованной* системой возможно в тех случаях, когда исследователю удаётся определить все элементы системы и их взаимосвязи между собой и с целями системы в виде детерминированных (графических, аналитических) зависимостей. На представлении этим классом систем основаны многие модели физических процессов и технических систем. Так, движение материальной точки может быть описано вторым законом Ньютона; математической моделью электрической цепи, например колебательного контура, служит система уравнений, вытекающая из законов Ома и правил Кирхгофа [56], и т. д.

При представлении объекта в виде *стохастической*, или плохо организованной, или диффузной системы не ставится задача определить все компоненты и их поведение. Система характеризуется некоторым набором макропараметров. К таким системам относятся модели статистической физики, например, уже упоминавшаяся модель газа. Кроме того, отображение объектов в виде диффузных систем находит широкое при-

менение при определении пропускной способности систем разного рода, при определении численности штатов на предприятиях или в обслуживающих учреждениях (для решения подобных задач применяют методы теории массового обслуживания), при исследовании документальных потоков информации и т. д.

Наконец, класс *самоорганизующихся*, или развивающихся, систем характеризуется рядом признаков, которые, как правило, обусловлены наличием в системе активных элементов: способность адаптироваться к изменяющимся условиям среды и помехам, принципиальная неравновесность, способность противостоять разрушающим (энтропийным) тенденциям, и др.

С нарастанием сложности исследуемых систем растёт многообразие методов их моделирования. Наряду с аналитическими методами классической математики, применяемыми при моделировании детерминированных систем, используются методы теории вероятностей и математической статистики, теория множеств, комбинаторика, математическая логика, математическая лингвистика, теория графов. Кроме формальных математических методов, используются также методы качественного анализа, такие как методы экспертных оценок, методы выработки коллективных решений и другие. Существуют методы, сочетающие в себе принципы формального аналитического и качественного подходов: ситуационное моделирование, структурно-лингвистическое моделирование и т. д. [54].

Нас в дальнейшем будут интересовать системы, состоящие из большого числа однотипных элементов с недетерминированным поведением, *стохастические макроскопические системы*. К ним, согласно представленной выше классификации, могут быть отнесены как диффузные, так и развивающиеся системы.

## Исследование стохастических систем

Основной инструмент исследования систем со стохастическим поведением элементов — это средства теории вероятностей и математической статистики. Стохастичность поведения элементов системы может быть обусловлена различными причинами. Движения частиц жидкости или газа определяются их столкновениями между собой или со стенками сосуда, а также действием сил, в поле которых находится система. Элементами экологических систем являются живые существа, поведение которых также трудно предсказуемо. Не менее сложно спрогнозировать действия людей при анализе информационных, экономических, транспортных и других систем.

Неопределённость в поведении элементов системы может быть формализована введением вероятностных моделей. Так, теория массового обслуживания сама является разделом теории вероятностей и может считаться продолжением теории случайных процессов [57]. Модели систем массового обслуживания, такие как в [58, 59], являются вероятностными. Другая область применения вероятностного подхода — транспортные задачи, которым посвящены частично такие монографии, как [3, 60], и полностью — монографии [61, 62], а также публикации специализированного журнала *Transportation Research*. Из современных отечественных публикаций можно, к примеру, упомянуть [15] и [63]. Кроме того, вероятностные модели создаются для исследования статистических свойств текстов и последовательностей ДНК [64, 65], в задачах календарного планирования [66] и многих других.

Отдельно следует выделить такую бурно развивающуюся в настоящее время систему со сложным, недетерминированным поведением элементов, как сеть Интернет. Создание модели сети Интернет без использования элемента случайности, пожалуй, просто невысказуемо. Часто ис-

пользуемым математическим инструментом моделирования телекоммуникационных сетей являются графы. Так, например, в работе [20] граф служит моделью телекоммуникационной сети в задаче максимизации общего проведённого потока данных. В числе методов, применявшихся при решении этой задачи, были и методы теории вероятностей и математической статистики. В работе [21] решалась задача управления информационными потоками в сложных нестационарных телекоммуникационных сетях на основе теории случайных графов и перколяции. Среди огромного числа других работ, посвящённых различным аспектам исследования и оптимизации работы сети Интернет, упомянем также [67–69].

## Энтропия

Понятие энтропии возникло в термодинамике и является одним из основных понятий статистической физики. Ещё одна область применения этого понятия — теория информации. В этом подразделе будет дано определение микросостояния и макросостояния системы так, как это делается в статистической физике, например, для систем атомов или молекул в газе (см. [55]). Разобьём всё фазовое пространство системы на ячейки  $\Delta\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Тогда всякое заданное распределение фазовых точек молекул газа, т. е. набор чисел заполнения ячеек  $N_i$ , характеризует определённое *макроскопическое состояние*. Если две одинаковые молекулы, находящиеся в разных фазовых ячейках, поменяются местами (в данном случае координатами и скоростями), то макроскопическое состояние газа не изменится. В классической статистике молекулы рассматриваются как перенумерованные, поэтому такому обмену молекул соответствует, с молекулярной точки зрения, другое состояние газа, которое будем называть *микросостоянием*. Все микросостояния термодинамической системы считаются равновероятными.



Число микросостояний, соответствующих заданному макросостоянию, т. е. заданным числам  $N_i$ , называется *термодинамической вероятностью* состояния. В противоположность обычной вероятности, которая никогда не превышает единицы, термодинамическая вероятность — большое целое положительное число, которое в классической статистике равно по определению

$$W = \frac{N!}{N_1!N_2! \dots N_r!}. \quad (1.1)$$

В самом деле, полное число всевозможных перестановок молекул равно  $N!$ . Из этого числа необходимо исключить перестановки молекул внутри одной фазовой ячейки  $\Delta\mu_i$ , так как мы не различаем состояния молекул в пределах одной ячейки. В комбинаторике числа, определяемые выражением (1.1), называются *полиномиальными коэффициентами*. *Энтропия*  $S$  вводится с точностью до аддитивной постоянной как логарифм области фазового пространства, в которой практически с достоверностью находится система. Можно показать, что при достаточно больших числах заполнения (таких, что применимой становится формула Стирлинга  $\ln x! \approx x \ln x - x$ ) с точностью до аддитивной константы справедливо равенство

$$S = k \ln W, \quad (1.2)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, т. е. энтропия состояния идеального газа пропорциональна логарифму его термодинамической вероятности. Согласно второму началу термодинамики, система, предоставленная самой себе, переходит в *равновесное* состояние, характеризующееся наибольшей энтропией.

## 1.2. Энтропийный подход к исследованию макросистем

Понятие энтропии стало использоваться в теории информации с тех пор, как её основы были заложены К. Шенноном [9]. Позже А. Дж. Вильсоном [3] был развит энтропийный подход в применении к задачам городского и регионального моделирования. Суть этого подхода заключается в следующем. Для некоторой системы определяются множества характеризующих её микроскопических и макроскопических состояний. Предположив, как и в статистической термодинамике, что все микросостояния системы равновероятны, можно сделать вывод о том, что вероятность некоторого состояния системы пропорциональна числу соответствующих ему микросостояний. В качестве макросостояния системы может быть выбрано, например, распределение поездок внутри города или межрегиональных потоков продукции в транспортной модели. Для распределения, характеризующего состояние системы, определяются ограничения, (например, суммарный поток пассажиров или продукции из данного региона). Для заданного состояния определяется число порождающих его микросостояний. Энтропия системы записывается как логарифм термодинамической вероятности состояния. Затем находится распределение, соответствующее максимуму энтропии при наличии принятых ограничений. Полученное распределение является наиболее вероятным для данной модели.

Иногда оказывается удобнее пользоваться определением энтропии Шеннона как меры неопределённости распределения вероятностей  $P(x_i) = p_i$  некоторой случайной величины  $x$ . Энтропия Шеннона равна *по определению* (без применения приближения Стирлинга)

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i.$$

Кроме того, А. Дж. Вильсон обращает внимание на то, что если для

модели удаётся записать аналог второго начала термодинамики, согласно которому энтропия замкнутой системы может только возрастать, то становится возможным исследование и понимание динамики системы.

При изучении макроскопических систем важным является вопрос о принципиальной различимости элементов системы на микроуровне. В статистической физике случай, когда микросостояния, отличающиеся перестановкой частиц, считаются различными, приводит к статистике Больцмана. Эта статистика является классической и подразумевает, что молекулы газа считаются на микроуровне различимыми, подобно пронумерованным бильярдным шарам. Квантовые же статистики: Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака, — предполагают иной подход. В рамках этих статистик, как хорошо известно, частицы являются принципиально неразличимыми, *тождественными*, то есть на микроуровне перестановка частиц не приводит к появлению нового микросостояния.

В монографии [60] Ю. С. Попкова в рамках энтропийного подхода были построены три класса моделей систем с неразличимыми элементами. Изложим кратко суть этих моделей.

Рассмотрим абстрактную макросистему, содержащую  $Y$  неразличимых элементов со стохастическим типом поведения. Пусть каждый элемент может находиться в одном из состояний, образующих конечное множество  $S$ . Допустим, оно может быть представлено как объединение непесекающихся подмножеств близких состояний  $S_1, \dots, S_m$ . Возможность такой группировки состояний предполагает, что каждое состояние в  $S_i$  имеет какой-то набор числовых характеристик, по которым и может быть осуществлено разделение  $S$  на подмножества. Важной характеристикой подмножеств  $S_i$  является их мощность <sup>1</sup>  $G_i = |S_i|$ , т. е. число состояний, входящих в  $S_i$ . Сами состояния могут быть следующих трёх типов:

---

<sup>1</sup>Сам автор употребляет термин «ёмкость», но мы далее будем им пользоваться в другом значении

- ферми-состояния (в каждом состоянии может находиться только один элемент);
- эйнштейн-состояния (в каждом состоянии может находиться любое количество элементов);
- больцман-состояния (среднее количество элементов в подмножествах  $S_1, \dots, S_m$  существенно меньше их мощности).

У внимательного читателя, по-видимому, возник вопрос о том, как можно говорить о больцман-состояниях для неразличимых частиц, если вся классическая больцмановская статистика идеального газа строится на предположении, что молекулы являются различимыми, пронумерованными. Чтобы внести ясность, отметим, что термин «больцман-состояния» в подходе Ю. С. Попкова нужно понимать не в смысле природы занимающих их элементов, а лишь в смысле реализующейся для них статистики, которая соответствует классическому выражению для энтропии (1.2).

Теперь перейдём к определению понятия состояния макросистемы, которым пользуется автор и без которого невозможно понимание дальнейшего изложения. Элементы макросистемы могут случайно и независимо друг от друга попадать в любое состояние из подмножеств  $S_1, \dots, S_m$ . Будем считать макросистему *однородной*, т. е. все состояния из множества  $S$  относятся к одному классу. Относительно каждого фиксированного подмножества  $S_i$  для элемента есть две возможности: попасть в любое состояние из  $S_i$  с априорной вероятностью  $a_i$  и не попасть, с вероятностью  $(1 - a_i)$ .

Будем понимать под *микросостоянием* системы определённое размещение элементов по состояниям внутри подмножеств. Так как элементы неразличимы, оно соответствует набору заселённостей состояний элементов. Каждое микросостояние обладает некоторой вероятностью, зависящей от априорных вероятностей  $a_i$  попадания элементов в подмножества

$S_i$ . Если эти априорные вероятности равны между собой, то получаем схему, применяемую в статистической физике, и полученные далее выражения для вероятностей и энтропий состояний системы переходят в известные статистические выражения. Под *макросостоянием*, или просто состоянием, системы будем понимать набор  $N_1, \dots, N_m$  чисел заполнения элементами соответствующих подмножеств  $S_1, \dots, S_m$ . Таким образом, одному макросостоянию соответствует множество микросостояний, различающихся перестановкой заселённости состояний элементов внутри подмножеств. В последующем изложении при описании моделей мы всегда будем чётко проводить различие между микро- и макросостоянием системы.

Для всех трёх типов макросистем Ю. С. Попковым были выписаны вероятности макросостояний, а также энтропии в форме логарифмов вероятностей. Распределение вероятностей для системы с больцман-состояниями получается из распределения вероятностей системы с эйнштейн-состояниями при условии  $N_i \ll G_i$ ,  $a_i G_i = \text{const}$ . При получении выражений для энтропий, так как числа заполнения подмножеств состояний считаются достаточно большими, применялась аппроксимация Стирлинга для факториальных выражений:

$$\ln x! \approx x(\ln x - 1). \quad (1.3)$$

Так как энтропия макроскопической системы определяется с точностью до аддитивной константы, в выражении для энтропии важны только те слагаемые, которые зависят от состояния системы, то есть от чисел заполнения подмножеств состояний элементов. Таким образом, автором были введены функции состояний, соответствующие каждому из трёх типов однородных макросистем с неравными априорными вероятностями микросостояний: обобщённая информационная энтропия Ферми – Дирака, обоб-

щённая информационная энтропия Бозе–Эйнштейна и обобщённая информационная энтропия Больцмана.

После того как выбран способ описания макросистемы с помощью одной из трёх перечисленных моделей, для определения стационарных состояний системы используется принцип максимизации энтропии при условиях каких-либо естественных ограничений на числа заполнения подмножеств состояний, таких как постоянство числа элементов:  $\sum_{i=1}^m N_i^0 = Y$ , где  $N = (N_1^0, \dots, N_m^0)$  — макросостояние, максимизирующее энтропию и соответствующее состоянию равновесия макросистемы. Такие состояния мы в дальнейшем будем называть *равновесными*.

В монографии указанный подход применён к моделированию систем межрегионального обмена, а также восстановления изображений, подвергающихся искажениям.

Если транспортная система может быть представлена как распределение потоков пассажиров или ресурсов, то телекоммуникационная сеть представляет собой совокупность потоков информации. Поэтому в статьях Ю. С. Попкова [10, 11] Интернет как информационная и вычислительная система рассматривается как динамическая стохастическая сеть, состояние которой характеризуется пространственными распределениями информационно-вычислительных ресурсов и информационных потоков. Изменение во времени этих компонент состояния происходит с существенно различными временами релаксации. Эта особенность сети позволила автору адаптировать и развить идеи макросистемного подхода для исследования пространственно-временной эволюции состояния системы. В работах предложены модели локально-стационарных состояний сети, базирующиеся на обобщённом принципе максимизации энтропии.

### 1.3. Парамакросистемы

Вернёмся к вопросу о различимости элементов макросистем. Как в статистической физике для ансамблей микрочастиц, так и в теории макросистем — для систем, состоящих из однородных элементов любой природы, элементы системы могут считаться различимыми либо неразличимыми на микроуровне. Выбор между этими возможностями приводит к моделям с различными статистическими свойствами. Состояния же, в которых могут находиться элементы системы, в статистической физике чаще всего соответствуют различным энергиям или квантовым числам и потому, естественно, являются различимыми, так что набор чисел заполнения состояний элементов, характеризующий систему, является упорядоченным в том смысле, что перестановка двух различных чисел заполнения даёт новое состояние системы. Тот же подход был сохранён и в «Теории макросистем» Ю. С. Попкова, где фактически рассматриваются системы с неразличимыми элементами и различимыми состояниями.

Тем не менее, существуют системы, в которых состояния элементов совсем не обязаны быть каким-то образом упорядоченными, а следовательно, и различимыми на микроуровне, так что перестановка чисел заполнения состояний внутри подмножества не приводит к появлению нового микросостояния. В частности, такая ситуация вполне может возникнуть в случае систем, для которых не введён аналог энергии.

В связи с этим, возникает необходимость в создании моделей, учитывающих различимость как элементов, так и состояний элементов системы. Это было реализовано в работах [70, 71] Д. Л. Дорофеева, Б. А. Зона и Ю. С. Попкова, в которых выделены четыре класса макросистем:

- DD – макросистема (элементы и состояния различимы);
- ID – макросистема (элементы неразличимы, состояния различимы);

- DI – макросистема (элементы различимы, состояния неразличимы);
- II – макросистема (и элементы, и состояния неразличимы).

Буквой D обозначается различимость элементов или состояний (*англ.* distinguishable), буквой I — неразличимость (*англ.* indistinguishable). Представленную классификацию можно проиллюстрировать следующими примерами со случайным поведением элементов. Рассмотрим распределение специалистов по вакансиям на трудовом рынке. Пусть специалисты имеют разную квалификацию и опыт работы, а вакансии, представленные на рынок, различны по уровню требований, заработной плате и другим критериям. В этом случае применима модель DD – макросистемы.

Представим себе, что внутри упомянутой группы специалистов существует подгруппа специалистов, имеющих одинаковую квалификацию и опыт работы (например, только что окончивших вуз), т. е. они неразличимы. При сохранении условия различимости вакансий имеет место модель ID – системы.

Обратная ситуация возникает, когда специалисты разного уровня вынуждены распределяться по одинаковым вакансиям, что соответствует модели DI – системы.

И, наконец, возможна ситуация, когда специалисты одинакового уровня распределяются по одинаковым вакансиям. Эта ситуация может быть описана моделью II – системы.

В микромире, как известно, реализуются только такие статистики, в которых в одном состоянии может находиться либо не более одной (статистика Ферми), либо сколько угодно частиц (статистики Бозе и Больцмана). Тем не менее, при анализе социально-экономических, транспортных, экологических и других систем ёмкость состояний элементов, то есть максимальное количество элементов, которые могут находиться в данном состоянии, может оказаться отличной от единицы, но в то же время и



не равной бесконечности. Так, одна вакансия может быть занята не более чем одним специалистом, то есть её ёмкость равна единице. Но если под состоянием элемента системы — специалиста на рынке труда — понимать работу в данном отделе предприятия на данной должности, то ёмкость такого состояния становится некоторым натуральным числом, необязательно равным единице. Ограниченными являются вместимость транспортных средств, пропускная способность путей сообщения, каналов связи и т. д.

Тем более интересным становится тот факт, что уже в рамках статистической физики предпринимались и предпринимаются многочисленные попытки построения статистик, обобщающих статистику Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака (см., наприм. [72, 73]). Они носят общее название *парастатистик*. В нашем тексте под этим словом мы будем понимать обобщённую статистику, предложенную в [73], которая как раз и подразумевает ограниченную ёмкость состояний, предполагая, что она является некоторым числом  $1 \leq l \leq \infty$ . Число  $l$  называется *порядком парастатистики*. Легко видеть, что квантовые статистики Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака получаются из парастатистики как частные случаи соответственно для  $l = 1$  и  $l = \infty$ .

Макросистема, в которой элементы могут находиться в состояниях с ёмкостью  $1 \leq l \leq \infty$ , была названа в [70] *парамакросистемой порядка  $l$* . Таким образом, три класса моделей, рассмотренных в [60], относятся к ID–парамакросистемам с порядком парастатистики  $l = 1$  (ферми-состояния) или  $l = \infty$  (эйнштейн-состояния).

Рассмотрим макросистему с подмножествами близких состояний  $S_i$ , каждое из которых имеет ёмкость  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Множество микросостояний  $\mathbb{M}$  можно рассматривать как пространство элементарных событий, содержащее  $|\mathbb{M}| = Z$  микросостояний. Каждой точке  $x \in \mathbb{M}$ , т. е. каждому микросостоянию, присваивается некоторая вероятность  $w(x)$ . В

множестве микросостояний  $\mathbb{M}$  существуют подмножества  $\mathbb{M}_N$  микросостояний, порождающих соответствующие макросостояния  $N$ .

В силу независимости событий-микросостояний, вероятность  $P(N)$  макросостояния  $N$  есть сумма вероятностей микросостояний из подмножества  $\mathbb{M}_N$ :

$$P(N) = \sum_{x \in \mathbb{M}_N} w(x).$$

Возможны случаи, когда априорная информация о реализациях микросостояний отсутствует. Поэтому естественно предположить, что все микросостояния равновероятны. Тогда

$$w(x) = \frac{1}{Z},$$

и вероятность макросостояния

$$P(N) = \frac{Z(N)}{Z},$$

где  $Z(N)$  — количество микросостояний, порождающих макросостояние  $N$ , т. е. его термодинамическая вероятность.

Отсюда следует, что задача формирования вероятностных характеристик для макросистем упомянутых четырёх классов сводится к определению чисел  $Z(N)$ . В [71] был рассмотрен случай произвольных априорных вероятностей  $a_i$  попадания элементов в подмножества состояний  $S_i$ . В этом случае вероятностные характеристики макросистем также определяются числами  $Z(N)$ .

При этом предполагается, что распределение элементов происходит в два этапа: сначала элементы распределяются по подмножествам  $S_i$ , а затем по состояниям внутри подмножеств. Количество способов расположения  $N_i$  элементов внутри подмножества  $S_i$  определяется классом макросистемы. Для нахождения этих чисел использовался аппарат производящих функций [74].

В [13] построены функции распределения для макросистем различных классов с неравными априорными вероятностями. При неравных априорных вероятностях микросостояний распределение вероятностей макросостояний и энтропия из одновершинных могут превратиться в двухвершинные функции, т. е. имеющие два локальных максимума. В этом случае принцип максимизации энтропии становится неприменимым.

Остановимся чуть подробнее на II – макросистемах. В II – макросистемах неразличимыми являются как состояния в подмножествах  $S_i$ , так и элементы. Это означает, что внутри данного подмножества нам важны только числа заполнения состояний и не важен порядок их следования. Поэтому количество  $II(N_i, G_i, l_i)$  способов распределения  $N_i$  элементов внутри подмножества  $S_i$  равно количеству разбиений числа  $N_i$  на не более чем  $G_i$  слагаемых, величина которых не превосходит  $l_i$ . Следовательно, функция  $Z(N)$  для макросостояния всей системы может быть записана как

$$Z(N) = \prod_{i=1}^m II(N_i, G_i, l_i), \quad (1.4)$$

где числа  $II(N_i, G_i, l_i)$  могут быть определены с помощью производящей функции для ограниченных разбиений, имеющей вид полинома Гаусса (1.6).

Здесь нам впервые встретилось понятие *разбиения*. Чтобы продолжить изложение, остановимся на этом понятии подробнее.

## 1.4. Разбиения и диаграммы Юнга

Нам будет удобнее всего пользоваться определением разбиения, данным в [22]. Именно: *разбиением* называется произвольная (конечная или бесконечная) последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$  целых неотрицательных чисел, расположенных в порядке (нестромого) убывания, т. е.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots,$$

и содержащая лишь конечное число ненулевых членов. Нам будет удобно не различать две такие последовательности, отличающиеся лишь цепочкой нулей на конце. Например, мы рассматриваем  $(2, 1)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(2, 1, 0, 0, \dots)$  как одно и то же разбиение.

Ненулевые члены последовательности  $\lambda_i$  называются *частями разбиения*. Число частей разбиения называется его *длиной* и обозначается через  $\ell(\lambda)$ . Если  $\sum \lambda_i = n$ , то будем говорить, что  $\lambda$  — разбиение числа  $n$ , и писать  $|\lambda| = n$  или  $\lambda \vdash n$ .

Иногда удобно использовать обозначение, указывающее, сколько раз каждое целое число входит в данное разбиение как часть. Запись:  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r} \dots)$  означает, что в точности  $m_i$  частей разбиения  $\lambda$  равны  $i$ .

Одним из способов графического изображения разбиений являются *диаграммы Юнга*. Диаграмма Юнга для разбиения  $\lambda$  числа  $n$  — это таблица из  $n$  клеток, в которой каждой части разбиения сопоставляется строка с числом клеток, равным  $\lambda_i$  [31]. В данной работе мы используем французскую запись диаграмм Юнга [22], в которой строки следуют снизу вверх. На рис. 1.1 изображена диаграмма Юнга, соответствующая разбиению  $\lambda = (4, 3, 1)$ .

*Сопряжённым* к разбиению  $\lambda$  называется разбиение  $\tilde{\lambda}$ , диаграмма которого получается из диаграммы  $\lambda$  транспонированием, т. е. отражением относительно главной диагонали, так что  $\tilde{\lambda}_i$ , число клеток в  $i$ -й строке  $\tilde{\lambda}$ , есть в то же время число клеток в  $i$ -м столбце  $\lambda$ , или, что эквивалентно,

$$\tilde{\lambda}_i = \text{Card}\{j : \lambda_j \geq i\}.$$

Так, сопряжённое разбиению  $\lambda = (4, 3, 1)$  имеет вид:  $\tilde{\lambda} = (3, 2, 2, 1)$ , его диаграмма Юнга показана на рис. 1.2.

Иногда оказывается полезным следующее обозначение для разбиений, принадлежащее Фробениусу. Предположим, что главная диагональ диа-

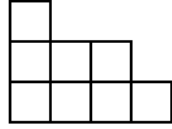


Рис. 1.1. Диаграмма Юнга для разбиения  $\lambda = (4, 3, 1)$ .

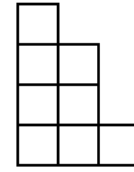


Рис. 1.2. Диаграмма Юнга для разбиения  $\tilde{\lambda} = (3, 2, 2, 1)$ , сопряжённого  $\lambda$ .

граммы состоит из  $r$  точек  $(i, i)$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Пусть  $\alpha_i = \lambda_i - i$  — число клеток в  $i$ -й строке диаграммы  $\lambda$  справа от клетки  $(i, i)$ , а  $\beta_i = \tilde{\lambda}_i - i$  — число клеток в  $i$ -м столбце  $\lambda$  над клеткой  $(i, i)$ . Тогда

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r \geq 0, \quad \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i + 1) = |\lambda|,$$

и можно обозначить разбиение  $\lambda$  через

$$\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r \mid \beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha \mid \beta).$$

Ясно, что сопряжённым к  $(\alpha \mid \beta)$  разбиением является  $(\beta \mid \alpha)$  [75].

Длина крюка клетки  $x \in (i, j)$  диаграммы  $\lambda$  определяется как  $h(x) = h(i, j) = (\lambda_i - j) + (\tilde{\lambda}_j - i) + 1$ . Кроме того, для каждой клетки  $x = (i, j) \in \lambda$  её *содержание* определяется как  $c(x) = j - i$ .

Обозначим  $\mathcal{P}_n$  — множество всех разбиений числа  $n$ , а  $\mathcal{P}$  — множество всех разбиений. Для  $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$  положим по определению  $\mu \subseteq \lambda$ , если  $\mu_i \leq \lambda_i$  для всех  $i \geq 1$ . Если мы отождествим разбиения с их диаграммами Юнга, то частичное упорядочение  $\subseteq$ , или *упорядочение по включению*, задаётся просто тем, что одна диаграмма содержится в другой. Множество  $\mathcal{P}$  вместе с упорядочением  $\subseteq$  называется *решёткой Юнга*  $\mathbb{Y} = \bigcup \mathbb{Y}_n$ , где  $\mathbb{Y}_n$  — множество всех диаграмм Юнга с  $n$  клетками.

Если диаграмма  $\lambda \vdash n$  заполнена числами  $1, \dots, n$  так, чтобы каждое число появлялось один раз и числа в строках и столбцах возрастали, то такой массив чисел называется *стандартной таблицей Юнга* формы  $\lambda$  [76].

*Размерность*  $\dim \lambda$  диаграммы Юнга  $\lambda$  есть число стандартных таблиц Юнга формы  $\lambda$ . Для определения размерности заданной диаграммы

существует замечательная формула, известная как *формула крюков* (см., например, [77, 78]):

$$\dim \lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i,j)}.$$

*Плоское разбиение* есть двумерная таблица чисел, упорядоченных по невозрастанию в столбцах и строках, сумма которых равна  $n$ :

$$n = \sum_{i,j \geq 0} \pi_{ij}, \quad \text{где } \pi_{ij} \geq \pi_{kl},$$

всякий раз, когда  $i \leq k$ ,  $j \leq l$ , где  $\pi_{ij}$  — целые неотрицательные числа [24], называемые *частями* плоского разбиения. В дальнейшем для обозначения плоских разбиений мы будем иногда пользоваться также буквой  $\lambda$ . Как часто делается для удобства, мы будем записывать плоские разбиения не в первом, а в четвёртом квадранте и иногда при записи опускать нули. Так, шесть плоских разбиений числа 3 записываются следующим образом:

$$3, \quad 21, \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}, \quad 111, \quad \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

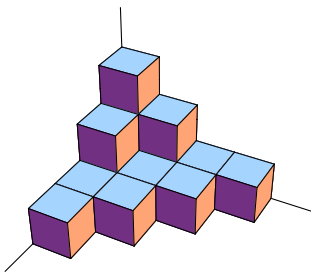


Рис. 1.3. Трёхмерная диаграмма одного из плоских разбиений  $\lambda_{(1)}$  числа  $n = 14$ .

Плоские разбиения изображаются графически с помощью трёхмерных диаграмм Юнга. Трёхмерная диаграмма Юнга представляет собой таблицу, составленную из единичных кубиков таким образом, что высота каждого столбца равна соответствующей части плоского разбиения. Например, трёхмерная диаграмма Юнга для плоского разбиения

$$\pi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

числа  $n = 14$  выглядит так, как показано на рисунке 1.3.

Мощным и изящным инструментом исследования разбиений служит математический аппарат производящих функций [74], который был также применён в [70, 71] для нахождения вероятностных характеристик параматросистем. *Производящей функцией* для некоторой последовательности  $a_0, a_1, \dots$  называется сумма

$$A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + \dots$$

Покажем принцип построения и применения производящих функций на примере производящей функции для разбиений без ограничений. Обозначим  $p(n)$  — число разбиений (без дополнительных ограничений) числа  $n$ . Пусть, далее,  $p(0) = 1$  и

$$p(t) = p(0) + p(1)t + p(2)t^2 + \dots$$

есть соответствующая производящая функция. Тогда перечисляющей производящей функцией для разбиений без ограничений является

$$\begin{aligned} p(t) &= (1 + t + t^2 + t^3 + \dots)(1 + t^2 + t^4 + \dots) \times \dots \times (1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \dots) \dots = \\ &= 1/(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^k) \dots \quad (1.5) \end{aligned}$$

Действительно, каждый множитель в левой части (1.5) характеризует всевозможные «вклады», вносимые частями разбиения, имеющими данную величину.

Производящие функции для разбиений при наличии ограничений некоторых типов можно усмотреть непосредственно из соотношения (1.5). Так,

например, разбиения, все части которых не превосходят числа  $k$ , перечисляются с помощью функции

$$p_k(t) = \sum p_{n,k} t^n = 1/(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^k).$$

Разбиения, все части которых различны, перечисляются функцией

$$u(t) = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\dots$$

Разбиения, все части в которых — нечётные числа, перечисляются функцией

$$o(t) = 1/(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\dots$$

Из тождества  $(1-t^{2k}) = (1-t^k)(1+t^k)$  следует, что

$$u(t)(1-t)(1-t^2)(t-t^3)\dots = (1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\dots,$$

или

$$u(t) = o(t),$$

то есть число разбиений с нечётными частями равно числу разбиений, все части которых различны.

Пусть  $p(N, M, n)$  обозначает число разбиений  $n$  не более чем на  $n$  частей, каждая из которых не превосходит  $N$ . Ясно, что

$$p(N, M, n) = 0, \quad \text{если } n > MN,$$

$$p(N, M, NM) = 1.$$

Стало быть производящая функция

$$G(N, M; q) = \sum_{n \geq 0} p(N, M, n) q^n$$

представляет собой многочлен от  $q$  степени  $NM$ . В [24] доказано, что для  $N, M > 0$

$$G(N, M; q) = \frac{(1-q^{N+M})(1-q^{N+M-1})\dots(1-q^{M+1})}{(1-q^N)(1-q^{N-1})\dots(1-q)}. \quad (1.6)$$



Функции  $G(N, M; q)$  впервые изучались Гауссом и известны как многочлены Гаусса. В [24] приведён ряд полезных формул для этих многочленов.

Существует и аналогичная формула для нахождения числа ограниченных плоских разбиений. Именно, в соответствии с классической формулой МакМагона, число плоских разбиений, помещённых в ящик  $L \times N \times M$ , равно

$$A(L, N, M) = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^M \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{M+j+k-1}{j+k-1}.$$

Производящую функцию для числа плоских разбиений, помещённых в ящик, обозначим

$$Z_q(L, N, M) = \sum_{\text{р.р.}} q^{|\pi|},$$

где суммирование ведётся по всем плоским разбиениям внутри ящика  $L \times N \times M$ . Доказательство того, что

$$Z_q(L, N, M) = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^M \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} = \prod_{j=1}^L \prod_{k=1}^N \frac{1 - q^{M+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}}, \quad (1.7)$$

можно найти в монографиях [23, разд. 429, 494], [22, 79]. Число плоских разбиений  $A(L, N, M)$  является пределом производящей функции  $Z_q(N, L, M)$  при  $q \rightarrow \infty$  [80].

Если  $L, M, N \rightarrow \infty$ , то из производящей функции для плоских разбиений, помещённых в ящик, можно получить производящую функцию для плоских разбиений без ограничений. Обозначим  $\pi(n)$  — число плоских разбиений  $n$ . Тогда при  $|q| < 1$  имеет место равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) q^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-j}. \quad (1.8)$$

Вспомним, что производящая функция для числа одномерных разбиений  $n$  записывается похожим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-1}.$$

Несмотря на очевидную аналогию, для числа разбиений *произвольной* размерности общий вид производящей функции до сих пор не был найден.

Анализ производящих функций и тождеств, связанных с ними, позволяет делать выводы о свойствах разбиений чисел. Основные результаты по этой теме изложены в [74] и в [24].

В исследованиях по поиску точных и асимптотических выражений для числа разбиений наиболее известен замечательный результат Харди и Рамануджана, усовершенствованный Радемахером, — точная формула для числа разбиений. Приведём её в том виде, в котором она дана в [24]:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sh}((\pi/k)(2/3(x-1/24))^{1/2})}{(x-1/24)^{1/2}} \right]_{x=n},$$

где

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h \bmod k \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h/k}$$

и  $\omega_{h,k}$  — корень 24-й степени из единицы. Эта формула обеспечивает быстрое вычисление  $p(n)$ . Например, при  $n = 200$ , вычислив первые 8 членов ряда, можно получить истинное значение  $p(n)$  с точностью 0,004.

При  $n \rightarrow \infty$  можно получить следующую асимптотическую формулу [24]:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp \left\{ \pi \left( \frac{2n}{3} \right)^{1/2} \right\}.$$

Там же было показано, что при больших  $n$  имеет место следующая оценка для числа *плоских* разбиений  $\pi(n)$  [24]:

$$\pi(n) \sim (\zeta(3)2^{-11})^{1/36} n^{-25/36} \exp\{3 \cdot 2^{-2/3} \zeta(3)^{1/3} n^{2/3} + 2c\},$$

где

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}, \quad c = \int_0^{\infty} \frac{y \log y}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

Попытки уточнить существующие и отыскать новые выражения для числа разбиений предпринимаются и сегодня. В [81]  $\pi(n)$  представлено в

виде асимптотической формулы:

$$\pi(n) \approx \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \dots,$$

работа над которой была затем продолжена в [82, 83]. Для асимптотической оценки числа одномерных и многомерных разбиений в [84–86] используется квантостатистический подход.

Интересен недавний результат из [87], где  $p(n)$  выражается в виде конечной суммы алгебраических чисел.

## Случайные разбиения

Как комбинаторика находит обширное применение в теории вероятностей, так и в самой комбинаторике в последние десятилетия активно применяется вероятностный подход.

Результаты работ А.М. Вершика и С.В. Керова [25] и, независимо, Б. Логана и Л. Шеппа [88] 1977 года стали важным импульсом в развитии теории случайных разбиений. Вероятностный подход к разбиениям, или к диаграммам Юнга, заключается в следующем. Прежде всего, на интересующем нас множестве диаграмм Юнга вводится вероятностная мера. Исходя из этой меры, можно исследовать диаграммы в процессе их случайного роста. Естественно, в процессе роста площадь диаграммы возрастает до бесконечности, поэтому при возрастании  $n$  диаграммы каждый раз масштабируются (способ масштабирования зависит от выбранной меры), так, чтобы площадь диаграммы всегда оставалась одной и той же (например, равной единице). При этом может оказаться, что граница диаграммы всё более приближается к некоторой непрерывной кривой. Одной из задач асимптотической комбинаторики и является ответ на вопрос, существует ли некоторая предельная форма диаграмм относительно данной меры, и нахождение этой предельной формы. Одной из наиболее хорошо изученных вероятностных мер на разбиениях числа  $n$  является мера Планшере-

ля, и, пожалуй, самый замечательный результат в её исследовании — это предельная форма диаграммы Юнга при планшерелевском росте, найденная в 1977 году независимо А.М. Вершиком и С.В. Керовым [25] и Б. Логаном и Л. Шеппом [88]. Об этом будет подробнее рассказано ниже.

## Мера Планшереля

Мера Планшереля для диаграмм Юнга с  $n$  клетками является одной из наиболее изученных в асимптотической комбинаторике. Поясним её происхождение.

Пусть  $\mathbb{Y}_n$  — множество диаграмм Юнга с  $n$  клетками, так что  $\mathbb{Y} = \bigcup \mathbb{Y}_n$  — решётка всех диаграмм Юнга, упорядоченных по включению. В комбинаторике широко известно соответствие Робинсона – Кнута – Шенстеда [76], которое в одной из своих форм устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством перестановок  $n$  символов и множеством упорядоченных пар стандартных таблиц Юнга одной и той же формы с  $n$  клетками. Таким образом, вероятность диаграммы Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  согласно распределению, возникающему из равномерного распределения на  $S_n$ , где  $S_n$  — множество перестановок  $n$  символов, равна

$$\mathbb{P}_{\text{PI}}(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}. \quad (1.9)$$

Эта вероятностная мера и называется *мерой Планшереля*. Эти вероятности дают в сумме единицу, что показано, например, в [31].

В работах [25, 26, 88] было показано, что в результате планшерелевского роста почти все диаграммы Юнга приобретают (после нормировки площади) единую универсальную форму  $\Omega(u)$ :

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4 - u^2}), & |u| \leq 2, \\ |u|, & |u| \geq 2, \end{cases} \quad (1.10)$$

которая называется предельной конфигурацией для меры Планшереля. Кроме того, как показано в [26], форма диаграмм Юнга, максимальных по размерности, при большом числе клеток также близка к  $\Omega$ .

Важным открытием, принадлежащим А.М. Вершику и С.В. Керову, является тот факт, что диаграммы Юнга могут рассматриваться как целочисленные перемежающиеся последовательности (см., например, [27]). Два множества (или две возрастающие последовательности)  $y_1, \dots, y_{d-1}$  и  $x_1, \dots, x_{d-1}, x_d$  называются *перемежающимися*, если

$$x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{d-1} < y_{d-1} < x_d. \quad (1.11)$$

Число  $c = \sum x_k - \sum y_k$  называется *центром* этих перемежающихся последовательностей.

Благодаря работам А.М. Вершика и С.В. Керова, задание диаграммы парой перемежающихся последовательностей и изображение её повернутой на  $45^\circ$  в настоящее время называют *русским обозначением* (*Russian convention*) диаграмм Юнга [89, 90].

Процесс планшерелевского роста — не единственная задача, в которой  $\Omega(u)$  является предельной кривой. Как было выяснено позже [91–93], кривая  $\Omega(u)$  естественным образом возникает в различных задачах одномерной математической физики и функциональной теории. В частности, эта кривая даёт единую универсальную асимптотику взаимного разделения корней для широкого класса ортогональных многочленов, среди которых классические полиномы Чебышёва, Эрмита и Лагерра, она же определяет характер разделения частот линейной механической системы в результате наложения линейной связи.

В [26] была получена асимптотическая двусторонняя оценка для максимальной размерности диаграмм Юнга. Там же было доказано, что предельная при  $n \rightarrow \infty$  форма максимальных по размерности диаграмм совпадает с предельной формой  $\Omega$  типичных по мере Планшереля диаграмм.

Точных формул для максимальной размерности, так же как и общего вида диаграммы с максимальной размерностью при любых  $n$ , насколько мы знаем, получено не было.

### **Другие вероятностные меры**

Работы [94, 95] посвящены задаче об асимптотической (предельной) конфигурации разбиений относительно той или иной статистики. В этих работах даются явные формулы предельных конфигураций для ряда очень интересных статистик, а также подчёркивается тесная связь со статистической физикой идеального газа. Меры специального вида, рассмотренные в работе, названы мультипликативными.

Благодаря взаимно однозначному соответствию между плоским разбиением и набором путей на решётке, плоские разбиения оказываются тесно связаны с различными интегрируемыми моделями статистической физики (см., например, [96–98]).

Среди результатов по теории случайных разбиений нельзя также не упомянуть работы А. Окунькова, А. Бородина и Г. Ольшанского (такие, как [28], [29] и [30]).

## **Основные результаты и выводы**

В первой главе дана общая характеристика понятия системы. Одной из определяющих черт любой системы является появление у системы как целого качественно новых свойств по сравнению со свойствами её элементов. Одна из естественных классификаций предполагает разделение всего многообразия систем на три класса: детерминированные, поведение которых может быть предсказано с какой угодно точностью; стохастические, поведение которых может быть спрогнозировано с помощью некоторого распределения вероятностей; и, наконец, самоорганизующиеся системы,

характеризующиеся принципиальной неравновесностью, наличием активных элементов и рядом других специфических свойств.

Наиболее вероятное состояние модели стохастической макроскопической системы может быть найдено методом максимизации энтропии — величины, характеризующей число микросостояний, которые приводят к данному макросостоянию. Вероятностные характеристики макросистем определяются принципиальной различимостью элементов и занимаемых ими состояний на микроуровне, а также ёмкостью состояний.

## Глава 2

# IDA<sub>1</sub> – макросистемы

Как было показано в первой главе, при нахождении вероятностных характеристик макросистем могут быть учтены различимость элементов и их состояний, априорные вероятности реализации микросостояний и максимальное количество элементов, которые могут находиться в одном и том же состоянии.

Упорядоченность заполнения состояний — ещё один фактор, определяющий вероятностные характеристики. Эта черта может возникать в моделях макросистем по разным причинам.

Во-первых, упорядоченный механизм заполнения состояний может быть свойством самой исследуемой системы. Так, при сборке изделий детали одного типа требуются раньше, чем другого; в системах массового обслуживания требования могут располагаться в очередь по приоритету, и т. д. Важный механизм, обуславливающий упорядочение в макросистемах, — взаимодействие между ближайшими соседями. Описанное в подразделе 2.2 правило, по которому в системе остаётся элемент, имеющий определённое число соседей, реализуется во многих физических, экономических, экологических и биологических системах. В процессе адсорбции осевшая частица закрепляется на поверхности только при достижении определённого порогового значения энергии связи. Городское строитель-



ство происходит таким образом, что новые дома строятся не слишком далеко от основного городского массива. К упорядоченным в пространстве процессам относятся рост биологической популяции или колонии микроорганизмов.

Во-вторых, упорядоченность состояний может быть и не присуща системе в явном виде, но при построении математической модели их упорядочение по определённому правилу часто существенно упрощает задачу и помогает выявить новые закономерности. Из предыдущей главы мы видели, что огромное количество результатов для разбиений получено благодаря их упорядоченному представлению — диаграммам Юнга. В системном анализе также существует метод упорядочения данных с целью исследования системы, и это — метод ранговых распределений [40].

## 2.1. Ранговые распределения

Допустим, на некотором множестве объектов проведена классификация, то есть распределение по типам, по определённому признаку. Пронумеруем типы в порядке убывания их численности и обозначим  $n_i$  — численность (число заполнения) данного типа. Номер  $i$  в такой классификации называется *рангом*, а полученное распределение — ранговым распределением. Примерами ранговых распределений могут служить распределение городов по численности жителей, родов — по числу видов и ареалу, жителей — по доходу, видов в экосистеме — по численности или биомассе, слов — по количеству вхождений в текст, журналов — по количеству публикуемых в них статей по данной тематике и т. д. Примечательно, что в целом ряде областей эти распределения подчиняются сходным математическим закономерностям. Так, в лингвистике имеет место закон Ципфа, в географии — закон Зипфа (это одно и то же лицо), в биологии — закон Уилкса, в социологии — закон Парето, в информатике — закон Брэдфорда

и т. п. Закон Ципфа, например, заключается в том, что для некоторого текста частота  $i$ -го слова  $f_i$  примерно обратно пропорциональна рангу слова:  $f_i \approx C/i^\gamma$ , где  $\gamma \approx 1$ . Обширная информация о законе Ципфа и о некоторых других степенных законах содержится в [39].

Легко понять, что ранговое распределение  $n$  элементов представляет собой просто некоторое разбиение числа  $n$ , а гистограмма этого распределения есть не что иное как диаграмма Юнга. Именно эти объекты, по сути, используются в [40] при анализе ранговых распределений и попытке объяснения закона Ципфа (и аналогичных ему законов). Более того, там же фактически используется понятие сопряжённого разбиения, а также находится некое экстремальное разбиение, соответствующее, в формулировке авторов, минимуму симметрии, который по смыслу оказывается тождествен максимуму энтропии одновременно распределений, соответствующих исходному и сопряжённому разбиениям, если элементы системы считать различимыми, под состоянием элемента понимать ранг, а под заселённостью состояния — число заполнения ранга. Части найденного экстремального разбиения приближённо подчиняются гиперболическому закону. Мы не призываем здесь соглашаться с выводами авторов, но этот пример доказывает принципиальную возможность проведения моделирования и анализа сложных систем на основе ранговых распределений. Из более недавних работ назовём [36–38].

## 2.2. Макросистемы с упорядоченным заполнением состояний

В разделе 1.3 рассматривалась модель II–системы, микросостояние которой описывается набором разбиений. В [99] была предложена модель системы с различимыми элементами, в которой разбиение соответству-

ет *макросостоянию*. Эта модель позволяет расширить макросистемный подход на случай систем с упорядоченным заполнением состояний.

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  различных элементов и  $g$  различных состояний одинаковой ёмкости  $l$ . Это означает, что множество состояний системы можно не разделять на подмножества, что соответствует распределению  $n$  пронумерованных шаров внутри единственного ящика, состоящего из  $g$  ячеек ёмкостью  $l$ . В ящик случайным образом помещаются шары. Зададим следующее ограничение: шар остаётся в ящике, только если у него имеется не менее двух соседей слева и снизу (под соседями понимаются как другие шары, так и стенка и дно ящика). В этом случае заселённости ячеек образуют невозрастающую последовательность.

*Макросостояние* системы задаётся перечислением заселённостей ячеек. Таким образом, макросостояние, которое мы будем в дальнейшем обозначать  $\lambda$ , однозначно определяется разбиением  $\lambda$  числа  $n$  или диаграммой Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}_n^{g,l}$ , где  $\mathbb{Y}_n^{g,l}$  — множество диаграмм Юнга с  $n$  клетками, число столбцов в которых не превышает  $g$ , а число строк не превышает  $l$ . Так как элементы системы считаются различными на микроуровне, *микросостояние* системы задаётся перечислением, какие шары в каких ячейках находятся. Если пронумеровать шары в порядке их попадания в ящик, их номера будут следовать строго по возрастанию в столбцах и строках диаграммы Юнга, то есть каждому микросостоянию соответствует стандартная таблица Юнга. Таким образом, число микросостояний, соответствующих данному макросостоянию, равно размерности соответствующего разбиения:  $DDA(n, g, l) = \dim \lambda$ . Следуя обозначениям из [70], назовём такую систему DDA – системой. Это сокращение обозначает, что и элементы, и состояния считаются различными, а заполнение состояний является упорядоченным (*англ.* arranged). Предположим, что все микросостояния имеют одинаковую вероятность. Тогда вероятность

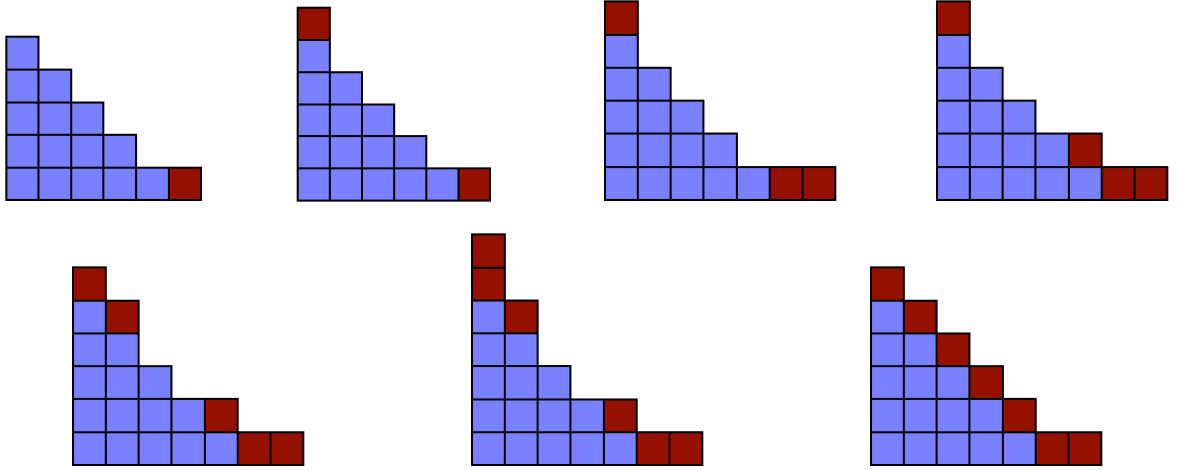


Рис. 2.1. Равновесные диаграммы DDA – системы: заполнение седьмой оболочки. Выделены клетки сверх шестой оболочки.

состояния  $\lambda$  DDA – системы может быть вычислена как

$$\mathbb{P}_{DDA}(\lambda) = \frac{\dim \lambda}{\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n^{g,l}} \dim \lambda}. \quad (2.1)$$

В [26] указывается, что предельная форма диаграммы Юнга при  $n \rightarrow \infty$  относительно этой вероятностной меры — та же, что и для меры Планшереля (см. разд. 1.4).

Энтропия макросостояния DDA – системы определяется как

$$S_{DDA}(\lambda) = \ln \mathbb{P}_{DDA}(\lambda) = \ln n! - \sum_{(i,j \in \lambda)} \ln h(i,j) - S_0, \quad (2.2)$$

где  $h(i,j)$  — длина крюка клетки  $(i,j) \in \lambda$ ,  $S_0$  — аддитивная постоянная.

В [100] исследовались *равновесные*, то есть обладающие наибольшей вероятностью, состояния DDA – системы при небольших  $n$  в случае  $l, g = \infty$ , что соответствует ящику бесконечной протяжённости, ограниченному слева бесконечно высокой стенкой. Фактически, нас интересовали диаграммы Юнга с наибольшей размерностью. Диаграммы с наибольшей размерностью для  $n = 1, \dots, 50$  находились численно с помощью формулы крюков, вычислялись их вероятности по мере DDA и энтропии.

Назовём  $s$ -й оболочкой совокупность клеток с координатами:  $(1, s), (2, s-1), \dots, (s, 1)$ . Максимальное количество клеток на оболочке равно  $s$ . При каждом  $n$  в рассмотренном диапазоне равновесными оказываются две сопряжённых друг другу диаграммы или одна симметричная диаграмма. При  $n < 14$  рост равновесной диаграммы происходит строго по оболочкам, то есть оболочки заполняются клетками по порядку, так, что частично заполненной может быть только одна оболочка. Однако при  $n \geq 14$  частично заполненными могут быть более одной оболочки. В частности, когда очередная оболочка оказывается заполненной, на следующей оболочке уже имеются одна или две клетки. В качестве примера на рисунке 2.1 показан процесс формирования оболочки с номером 7 (для несимметричных диаграмм сопряжённые им диаграммы также являются равновесными, но они на рисунке не показаны).

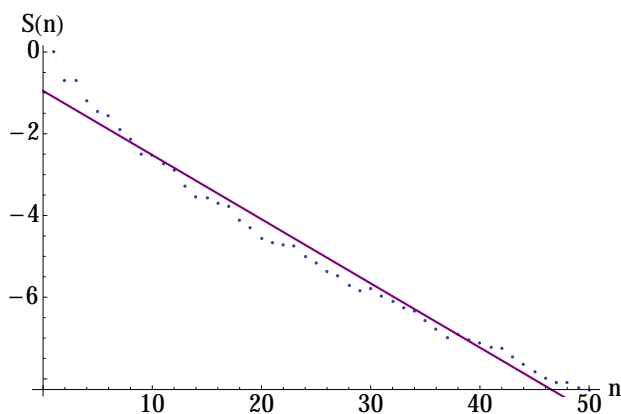


Рис. 2.2. Энтропия равновесного состояния DDA-системы для  $n = 1, \dots, 50$ .

С ростом  $n$  вероятность и энтропия равновесной диаграммы падают, так как быстро растёт общее число таблиц Юнга и уменьшается доля тех среди них, которые соответствуют равновесной диаграмме. Тем не менее на графике 2.2 хорошо видно, что при некоторых значениях  $n$  энтропия равновесной диаграммы остаётся почти неизменной или даже немного возрастает по сравнению с предыдущим значением. Эти точки соответствуют равновесным диаграммам определённого вида. Для  $n = 3, 6, 10$  это диаграммы, состоящие из полностью заполненных оболочек, а для  $n = 17, 23, 30, 38, 48$  это диаграммы, имеющие две или три клетки сверх заполненных оболочек. При  $n = 1, \dots, 13$  заполнение оболочек в равновесной диаграмме идёт строго по порядку, а при дальнейшем росте  $n$

в равновесной диаграмме могут быть частично заполненными несколько оболочек одновременно.

Некоторые черты модели DDA – системы указывают на сходство её с реальным физическим процессом — ростом кластеров инертных газов (см. подробнее в [101]). Именно, при исследовании кластеров, как и в модели DDA – системы, решающую роль играют только связи между ближайшими соседями. Кроме того, рост кластеров также происходит по оболочкам: при малом количестве частиц заполнение идёт строго по оболочкам, тогда как с ростом размера кластера начинают одновременно заполняться несколько оболочек.

### 2.3. Вероятностные характеристики IDA<sub>1</sub> – систем

Если в описанной в предыдущем разделе DDA – системе считать элементы на микроуровне *неразличимыми* и принять набор заселённостей ячеек за микросостояние, то мы получаем систему, микросостояние которой характеризуется конечной невозрастающей последовательностью чисел и может изображаться диаграммой Юнга. Возможный порядок накопления шаров в ящике показан на рисунке 2.3. Такую статистику, следуя обозначениям, предложенным в [70], назовём IDA.

Определённые вышеописанным способом микросостояния появляются и при рассмотрении другого типа систем. Рассмотрим II – систему, состоящую из единственного ящика с  $g$  ячейками бесконечной ёмкости, которые заполняются шарами (общее число шаров равно  $n$ ,  $n \leq g$ ). Микросостояние системы даётся перечислением заселённостей ячеек. Так как ячейки неразличимы, изменение порядка следования заселённостей не приводит к появлению новых микросостояний. Нам будет удобно перечислять за-

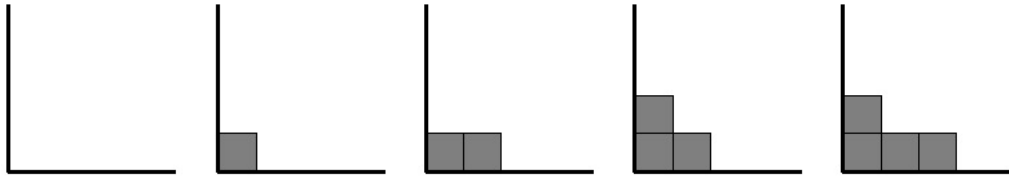


Рис. 2.3. Модель  $IDA_1$ –системы: шары, падающие в левый нижний угол ящика.

селённости состояний в невозрастающем порядке, так, что *микросостояние* системы даётся набором заселённостей ячеек  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$ ;  $\lambda_i$  до некоторого  $i = r \leq g$  отличны от нуля. В дальнейшем нули мы будем опускать. Таким образом, каждому микросостоянию системы может быть поставлено в соответствие единственное разбиение  $\lambda$  числа  $n$ , изображаемое диаграммой Юнга.

Таким образом, в одномерном случае как для систем с неразличимыми состояниями, так и для систем с различимыми состояниями, но с упорядоченным их заполнением, мы приходим к одной и той же статистике. Одномерную статистику IDA будем называть  $IDA_1$ .

Зафиксируем количество элементов в системе (шаров)  $n$  и обозначим  $\Gamma_n$  — множество всех микросостояний такой системы, тогда  $|\Gamma_n| = p(n)$  — их количество, т. е. количество разбиений числа  $n$ . За неимением детальной информации о процессе формирования микросостояний, будем считать вероятности всех микросостояний одинаковыми и равными  $1/p(n)$ .

Из симметрии задачи и из условия равновероятности микросостояний следует, что состояния, соответствующие сопряжённым между собой диаграммам, имеют одинаковую вероятность.

В пространстве микросостояний нашей системы зададим следующую метрику. Будем определять *расстояние*  $\rho(\lambda, \lambda')$  между двумя микросостояниями  $\lambda$  и  $\lambda'$  по формуле:

$$\rho(\lambda, \lambda') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g |\lambda_i - \lambda'_i|. \quad (2.3)$$

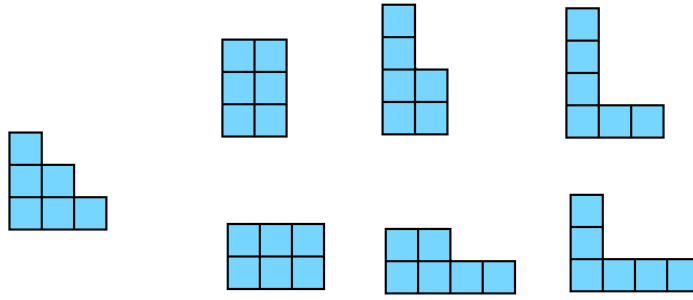


Рис. 2.4. Диаграммы, входящие в единичную окрестность разбиения  $(3, 2, 1)$ .

В случае, если диаграммы  $\lambda$  и  $\lambda'$  имеют одинаковое количество клеток, расстояние между ними равно наименьшему числу клеток, которые нужно переставить, чтобы получить из диаграммы  $\lambda$  диаграмму  $\lambda'$ , или наоборот. Так, на рисунке 2.4 изображены диаграммы, которые лежат на расстоянии единица от диаграммы, соответствующей разбиению  $(3, 2, 1)$ , и отличаются от неё перестановкой одной клетки. Назовём *окрестностью радиуса  $k$  микросостояния  $\lambda$*  множество микросостояний  $Q_k(\lambda)$ , лежащих от  $\lambda$  на расстоянии, меньшем либо равном  $k$ :

$$Q_k(\lambda) = \{\lambda' \mid \rho(\lambda, \lambda') \leq k\}. \quad (2.4)$$

Такие окрестности будем рассматривать как *макросостояния* системы. Иначе говоря, *макросостоянием с центром  $\lambda$  и радиусом  $k$*  будем называть окрестность радиуса  $k$  микросостояния  $\lambda$ .

Таким образом, каждой диаграмме Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  соответствует макросостояние, вероятность которого  $\mathbb{P}_{IDA1}(\lambda)$  будем определять по формуле:

$$\mathbb{P}_{IDA1}(\lambda) = \frac{N(Q_k(\lambda))}{p(n)}. \quad (2.5)$$

Энтропия состояния, вычисляемая как логарифм вероятности, имеет вид:

$$S(Q(\lambda)) = \ln \mathbb{P}_{IDA1}(\lambda) = \ln N(Q(\lambda)) - \ln p(n). \quad (2.6)$$

Такой способ определения макросостояния системы является естественным в ряде ситуаций, возникающих при исследовании физических систем.



Например, при наблюдении процесса осаждения частиц на некоторую поверхность, когда могут считаться эквивалентными (или неразличимыми в силу ограниченной точности приборов) состояния, различающиеся перестановкой небольшого числа адсорбирующихся частиц (обозначим это число  $k$ ). Тем самым мы приходим к понятию макросостояния как окрестности радиуса  $k$ . Кроме того, модель IDA<sub>1</sub> полезна для анализа любых распределений: распределения потоков грузов между городами, распределения потоков пассажиров по путям сообщения, распределение информации по каналам связи, — когда распределения, различающиеся перестановкой небольшого числа элементов, считаются эквивалентными. Покажем, как статистика IDA<sub>1</sub> естественным образом возникает при моделировании информационных потоков в сети Интернет.

## 2.4. Модель сети Интернет на основе ранговых распределений

Представим сеть Интернет в виде *графа корреспонденций*, как это сделано в [10]. В этом графе имеется два типа узлов: потребители информации  $P_i$ , под которыми мы будем понимать серверы компаний, обеспечивающих доступ в Интернет, и носители информации  $Q_j$  — те серверы, к которым обращаются за информацией потребители. Приблизённо можно считать, что каждая пара узлов имеет собственный канал связи. Будем считать, что пропускная способность каналов связи измеряется в дискретных единицах и можно говорить о том, что информация между  $P_i$  и  $Q_j$  может циркулировать по нескольким маршрутам, часть которых занята, когда пользователи из  $P_i$  обращаются за информацией к  $Q_j$ , а часть остаётся свободной. Если пользователь с  $P_i$  переключается от одного носителя информации  $Q_j$  на другого —  $Q_{j+1}$ , то будем говорить, что в канале  $(i, j)$

стало на один занятый маршрут меньше, а в канале  $(i, j + 1)$  — на один занятый маршрут больше. Таким образом, мы можем принять *занятые* маршруты за элементы системы, а каналы  $(i, j)$ , в которых эти маршруты в данный момент находятся, — за их состояния. При этом ёмкость состояний примем бесконечной — это означает, что информационные каналы не заполняются до полного насыщения, т. е. сеть не перегружена.

За микросостояние системы примем ранговое распределение потоков информации  $(i, j)$  по интенсивности  $T_{ij}$ , то есть упорядочим все состояния по невозрастанию заселённости. Так как на микроуровне нас интересуют только числа заполнения состояний, элементы системы, естественно, являются неразличимыми, а состояния — различимыми. Мы не погрешим особенно против истины, если будем считать суммарную интенсивность  $n$  (число элементов системы) постоянной в течение рассматриваемого промежутка времени (например, рабочего дня или вечера, когда к сети подключено примерно постоянное число пользователей). Поскольку пользователи время от времени переключаются между различными информационными ресурсами, ранговые распределения, вообще говоря, будут быстро меняться. Поэтому за макросостояние системы естественно принять не одно распределение, а совокупность распределений, получающихся из исходного перестановкой не более чем  $k$  элементов. Тем самым мы приходим к определению макросостояния как окрестности микросостояния в таком смысле, в каком она понимается для  $IDA_1$  – систем. При отсутствии априорной информации о вероятностях реализации микросостояний будем считать микросостояния равновероятными. Это означает, что вероятность макросостояния системы с центром, изображаемым разбиением  $\lambda$ , пропорциональна ёмкости окрестности  $\lambda$ , то есть получаем макросистему типа  $IDA_1$ .

Наиболее вероятным в такой модели будет макросостояние, имеющее своим центром диаграмму  $\lambda$  с наибольшей ёмкостью окрестности. Таким

образом, состояние системы характеризуется совокупностью близких распределений, что обусловлено свойством элементов системы часто переходить из одного состояния в другое.

## 2.5. Ёмкость единичной окрестности

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением статистики макросостояний с радиусом, равным единице. Это рассмотрение, естественно, может быть выполнено и для окрестностей с бóльшими радиусами. Единичную окрестность микросостояния  $Q_1(\lambda)$  далее будем обозначать  $Q(\lambda)$ . Таким образом, при фиксированном числе клеток единичная окрестность диаграммы  $\lambda$  состоит из самой диаграммы  $\lambda$  и всех диаграмм, которые получаются из  $\lambda$  перестановкой одной клетки. Пример диаграммы с её единичной окрестностью показан на рисунке 2.4. Ёмкость окрестности, т. е. количество диаграмм в окрестности, будем обозначать  $N(Q(\lambda))$ .

Вычисление вероятности макросостояния с центром  $\lambda$  (для фиксированного числа частиц  $n$ ) возможно посредством перебора всех остальных разбиений, с нахождением расстояния от  $\lambda$  до каждого из них. Отбрав среди этих разбиений только те, которые находятся от  $\lambda$  на расстоянии  $\rho \leq 1$ , можно вычислить ёмкость единичной окрестности  $\lambda$ , а значит, и вероятность соответствующего макросостояния. На рисунке 2.5 изображены разбиения числа  $n = 6$  и для каждого из них указана ёмкость окрестности. Однако с ростом  $n$  количество разбиений растёт чрезвычайно быстро, поэтому ниже предлагается алгоритм, позволяющий определить ёмкость единичной окрестности заданного разбиения без перебора всех остальных разбиений.

Будем говорить, что в  $i$ -м столбце диаграммы расположена вершина *выступа*, если  $(i = \ell(\tilde{\lambda})) \vee (\tilde{\lambda}_i > \tilde{\lambda}_{i+1})$ . Так, диаграмма на рис. 2.6, имеет 5 выступов. Далее, будем говорить, что в  $j$ -м столбце диаграмм-

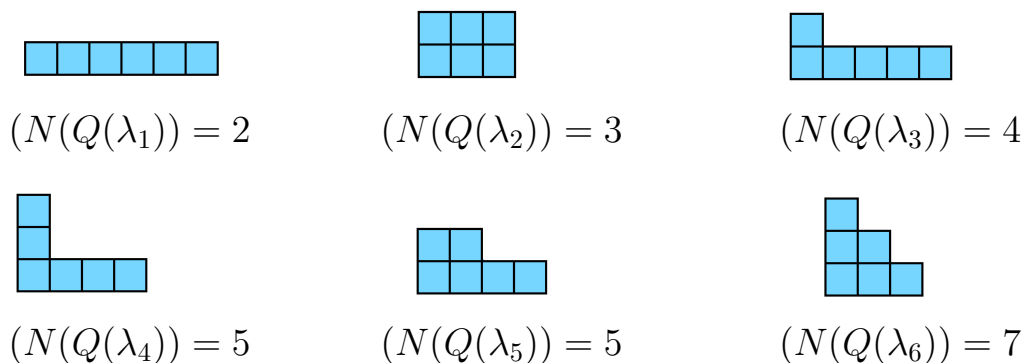


Рис. 2.5. Диаграммы разбиений числа  $n = 6$  и ёмкости их единичных окрестностей. Диаграммы, сопряжённые показанным на рисунке, имеют равную с ними ёмкость окрестности.

мы имеется *гнездо*, если  $(j = 1) \vee (\tilde{\lambda}_{j-1} > \tilde{\lambda}_j)$ . Также условимся, что гнездо имеется за последним столбцом. Таким образом, если обозначить число выступов в диаграмме  $q$ , то число гнёзд будет равняться  $q + 1$ . Каждый выступ можно охарактеризовать размерами  $a_i$  и  $b_i$ . В зависимости от размеров будем различать *короткие* ( $a_i = b_i = 1$ ), *длинные* ( $a_i = 1, b_i > 1$  или  $a_i > 1, b_i = 1$ ) и *большие* ( $a_i, b_i > 1$ ) выступы.

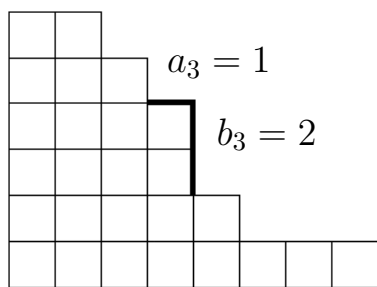


Рис. 2.6. Микросостоянию  $IDA_1$  – системы соответствует диаграмма Юнга;  $a_3, b_3$  — длина и высота 3-го выступа.

На рис. 2.6 отмечен длинный выступ с размерами  $a_3 = 1, b_3 = 2$ . Заметим, что предлагаемое здесь понятие выступа отличается от введённого в [29] понятия «спуска» (*descent*). К примеру, на диаграмме, изображённой на рисунке 2.6, в четвёртом столбце имеется один выступ, но, так как его высота равна двум, ему соответствует два «спуска». Понятие, аналогичное нашему понятию выступа, было введено в [102] для перестановок. Именно, для перестановки  $\pi = a_1 a_2 \dots a_n$  мно-

жество спусков (названных тем же словом *descents*) определялось как  $D(\pi) = \{i \mid a_i > a_{i+1}\}$ , причём можно положить по определению также

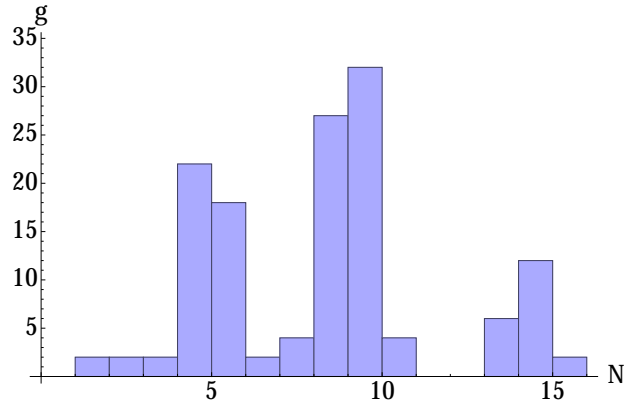


Рис. 2.7. Гистограмма ёмкостей окрестностей для разбиений числа  $n = 14$ .  $N$  — ёмкость,  $g$  — количество окрестностей с данной ёмкостью

$n \in D(\pi)$ .

При построении единичной окрестности диаграммы для перестановки могут быть взяты только вершинные клетки выступов, а переставленная клетка может быть помещена только в гнездо. Вершинная клетка  $i$ -го выступа может быть переставлена во все гнёзда, кроме тех, которые непосредственно к ней прилежат, так что число способов перестановки этой клетки можно записать как  $N_i = (q + 1) - p_i$ , где  $p_i$  — величина, характеризующая выступ и равная числу гнёзд, в которые не может быть переставлена его вершинная клетка. Эту величину мы называем *вычетом*. Вычет можно определить, если известны размеры выступа:

$$p_i = p(a_i) + p(b_i), \quad (2.7)$$

где

$$p(x) = \delta_{x1} = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \neq 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Просуммировав  $N_i$  по всем выступам, найдём выражение для ёмкости единичной окрестности микросостояния  $\lambda$ :

$$N(Q(\lambda)) = \sum_{i=1}^q N_i = q(q + 1) - \sum_{i=1}^q p_i + 1. \quad (2.9)$$

Пользуясь выражением (2.9), можно вычислить ёмкости единичных окрестностей всех разбиений для любого заданного числа. Результаты вы-

числений для  $n = 14$  представлены на рисунке 2.7. По горизонтальной оси откладывается ёмкость окрестности, а по вертикальной — число окрестностей с данной ёмкостью; наибольшую ёмкость окрестности  $N(Q(\lambda)) = 16$  имеют два разбиения:  $\lambda_1 = (5, 3, 2, 2, 1, 1)$  и  $\lambda_2 = (6, 4, 2, 1, 1)$ , — сопряжённые друг другу.

## 2.6. Свойства равновесных диаграмм

Диаграммы с наибольшей ёмкостью окрестности будем называть *равновесными*. Этим диаграммам соответствуют макросостояния системы, имеющие наибольшую вероятность.

Из выражения (2.9) можно увидеть, что ёмкость окрестности диаграммы определяется количеством выступов и суммарным вычетом, т. е. типами выступов. Ниже сформулированы две леммы, за доказательствами которых мы отсылаем читателя к разделу 2.7.

**Лемма 1** *Равновесная диаграмма не содержит больших выступов.*

**Лемма 2** *Пусть две диаграммы:  $\lambda$  и  $\lambda'$ , — содержат  $n$  и  $n'$  клеток и  $q$  и  $q'$  выступов, соответственно. Тогда если  $n' \geq n$ , а  $q' < q$ , то  $\lambda'$  не является равновесной.*

Прямым следствием леммы 2 является

**Теорема 1** *Равновесная диаграмма обладает максимальным при данном  $n$  количеством выступов.*

Диаграмму  $\lambda^{(s)}$ , состоящую из  $s$  заполненных оболочек (определение оболочки см. на стр. 44), будем называть *треугольной* (см. рис. 2.8). Число клеток в ней можно записать как

$$T_s = 1 + 2 + \dots + s = s(s + 1)/2. \quad (2.10)$$

Числа  $T_s$  известны как *треугольные* [103]. Несмотря на то что треугольные и вообще фигурные числа известны ещё с Античности и, казалось бы, все их свойства давно изучены, они продолжают применяться и сегодня при решении вполне современных задач. Так, многоугольные числа могут быть применены в процедуре сглаживания временных рядов, что может найти приложение к исследованию показателей финансовых рынков [104–106].

**Лемма 3** *Равновесная диаграмма с числом клеток  $n \geq T_s$  полностью содержит в себе треугольную диаграмму  $\lambda^{(s)}$ .*

**Доказательство** приведено в разделе 2.7.

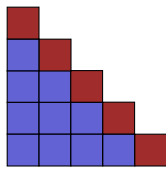


Рис. 2.8. Треугольная диаграмма  $\lambda^{(5)}$ . Выделена пятая оболочка.

Диаграмму, состоящую из  $T_s < n < T_{s+1}$  клеток, нам будет удобно называть *промежуточной*. Будем обозначать  $\Delta n = n - T_s$ . Для промежуточной равновесной диаграммы  $\lambda$  с  $T_s < n < T_{s+1}$  клетками  $\lambda^{(s)}$  является наибольшей из содержащихся в ней треугольных диаграмм, или *максимальным треугольником* [107].

**Теорема 2** *При  $n = T_s$  равновесной является треугольная диаграмма. Ёмкость её окрестности*

$$N_s = s(s - 1) + 1. \quad (2.11)$$

**Доказательство** равновесности треугольной диаграммы даётся леммой 3. Учитывая, что в треугольной диаграмме вычеты всех выступов  $p_i = 2$ , из формулы (2.9) легко получить выражение (2.11) ■.

**Лемма 4** *Размер окрестности промежуточной равновесной диаграммы превосходит  $N_s$ .*

**Доказательство.** Этот факт следует из того, что из  $n > T_s$  клеток может быть построена диаграмма с единичной окрестностью, большей  $N_s$ . Для этого достаточно, к примеру, добавить  $\Delta n$  клеток к первой строке диаграммы  $\lambda^{(s)}$ . ■

Будем говорить, что  $n_1, n_2, \dots, n_r$  клеток прибавлены к *левому крылу* произвольной диаграммы, если они прибавлены соответственно к первым  $r$  её столбцам. Аналогично, если  $n_1, n_2, \dots, n_r$  клеток прибавлены соответственно к 1-й, 2-й, ...,  $r$ -й строкам диаграммы, будем говорить, что они прибавлены к её *правому крылу*.

Рассмотрим треугольную диаграмму, к левому и правому крыльям которой прибавлены соответственно  $(m_1, m_1 - 1, \dots, 1)$  и  $(m_2, m_2 - 1, \dots, 1)$  клеток. Указанные последовательности представляют собой разбиения с треугольными диаграммами, поэтому получившиеся надстройки над  $\lambda^{(s)}$  мы будем называть *треугольными надстройками с размерами  $m_1$  и  $m_2$* . Пример треугольной диаграммы с надстройками показан на рис. 2.9. Под оболочками и крыльями треугольной надстройки будем подразумевать оболочки и крылья диаграммы соответствующего ей разбиения в смысле, определённом выше.

**Теорема 3** Для того, чтобы диаграмма  $\lambda$  с числом клеток  $T_s \leq n < T_{s+1}$  была равновесной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- $\lambda \supseteq \lambda^{(s)}$ ;
- $\lambda$  имеет ровно  $s$  выступов;
- $\lambda$  не содержит больших выступов;
- число длинных выступов в  $\lambda$  максимально и равно  $\Delta N = [\sqrt{4\Delta n + 1} - 1]$  (квадратные скобки обозначают целую часть).



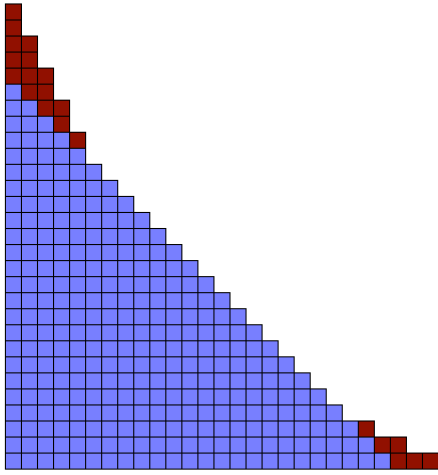


Рис. 2.9. К крыльям треугольной диаграммы  $\lambda^{(24)}$  прибавлены треугольные надстройки: к левому крылу — размером 5, к правому — размером 3.

**Доказательство.** Первое утверждение доказывается в лемме 3. Для доказательства второго утверждения заметим, что так как у диаграммы с  $n < T_{s+1}$  клеток найдётся хотя бы один столбец, такой, что  $\tilde{\lambda}_j < \tilde{\lambda}_j^{(s+1)}$ , количество выступов в ней меньше, чем  $s + 1$  (см. доказательство леммы 3 в разделе 2.7). С другой стороны, так как, согласно лемме 4, размер окрестности промежуточной равновесной диаграммы превосходит  $N_s$ , число выступов в ней не может быть меньше, чем  $s$ . Отсюда для числа выступов  $q$  получаем

$q = s$ . Таким образом, второе утверждение доказано. Третье утверждение сформулировано в лемме 1.

Далее следует доказательство последнего утверждения. Согласно (2.9), при одинаковом общем числе выступов окрестность больше у той диаграммы, у которой длинных выступов больше. В равновесной диаграмме, таким образом, число длинных выступов максимально.

Допустим, на диаграмме  $\lambda$  есть цепочка из  $m$  длинных выступов, ориентированных вдоль строк ( $a_i > 1$ ,  $i = r_1, \dots, r_1 + m$ ). Тогда для длин этих строк можно записать:  $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i - 2$ . В случае длинных выступов, ориентированных вдоль столбцов ( $b_j > 1$ ), те же рассуждения справедливы для длин этих столбцов. Количества клеток, добавленных к строкам треугольной диаграммы, обозначим  $\mu_i$ . Имеем  $\lambda_{i+1}^{(s)} + \mu_{i+1} \leq \lambda_i^{(s)} + \mu_i - 2$ . Так как  $\lambda_{i+1}^{(s)} = \lambda_i^{(s)} - 1$ , получаем  $\mu_{i+1} \leq \mu_i - 1$ ,  $i = r_1, \dots, r_1 + m$ , т. е. последовательность  $\{\mu_i\}$ ,  $i = r_1, \dots, r_1 + m$ , представляет собой разбиение со строго убывающими частями, диаграмма которого, таким образом, содержит в себе треугольную диаграмму  $\lambda^{(m)}$ . Так как промежуточная равно-

весная диаграмма содержит столько же выступов, сколько треугольная, для  $i < r_1$  можем записать:  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{r_1}$ , т. е.  $(\mu_1, \dots, \mu_{r_1+m})$  клеток добавляются к крылу диаграммы, и эта группа клеток содержит в себе треугольную надстройку размером  $m$ . Таким образом, *минимальное* число клеток, необходимое, чтобы добавить к ряду столбцов (строк) диаграммы  $m$  длинных выступов, равно  $T_m$ , и эти клетки располагаются в треугольную надстройку на крыле.

Пусть задано число длинных выступов  $\Delta N$  в промежуточной равновесной диаграмме. Это в общем случае означает, что к её крыльям добавлены треугольные надстройки размерами  $m_1$  и  $m_2$ ,  $m_1 + m_2 = \Delta N$ . Выясним соотношение между  $m_1$  и  $m_2$ , при котором число добавленных клеток  $\delta n = T_{m_1} + T_{m_2}$  будет минимальным. Для этого нужно найти минимум функции

$$\delta n = \frac{m_1(m_1 + 1)}{2} + \frac{m_2(m_2 + 1)}{2}$$

при условии  $m_1 + m_2 = \Delta N$ .

Решая эту задачу, получаем

$$m_1 = \left\lfloor \frac{\Delta N}{2} \right\rfloor, \quad m_2 = m_1 + (\Delta N \bmod 2). \quad (2.12)$$

При нечётном  $\Delta N$  размеры надстроек различны. Если  $m_2 = m_1 + 1$ , то перестановка  $m_2$  клеток с правой надстройки на левую даст симметричное решение  $m'_1 = m'_2 + 1$ , которое соответствует сопряжённой диаграмме.

Подставляя  $m_1$  и  $m_2$ , выраженные через  $\Delta N$ , в формулу для  $\delta n$  отдельно для случаев чётного и нечётного  $\Delta N$ , получаем  $\Delta N = \lceil \sqrt{4\delta n + 1} - 1 \rceil$ . Число длинных выступов останется прежним и для количества добавленных клеток  $\Delta n = \delta n + dn$ , где  $dn \leq \min\{m_1, m_2\}$ . Таким образом, окончательно для числа длинных выступов получаем  $\Delta N = \lceil \sqrt{4\Delta n + 1} - 1 \rceil$ .

Добавление  $dn$  клеток к минимальному количеству  $\delta n$  не может увеличить количество длинных выступов в диаграмме, но может дать допол-

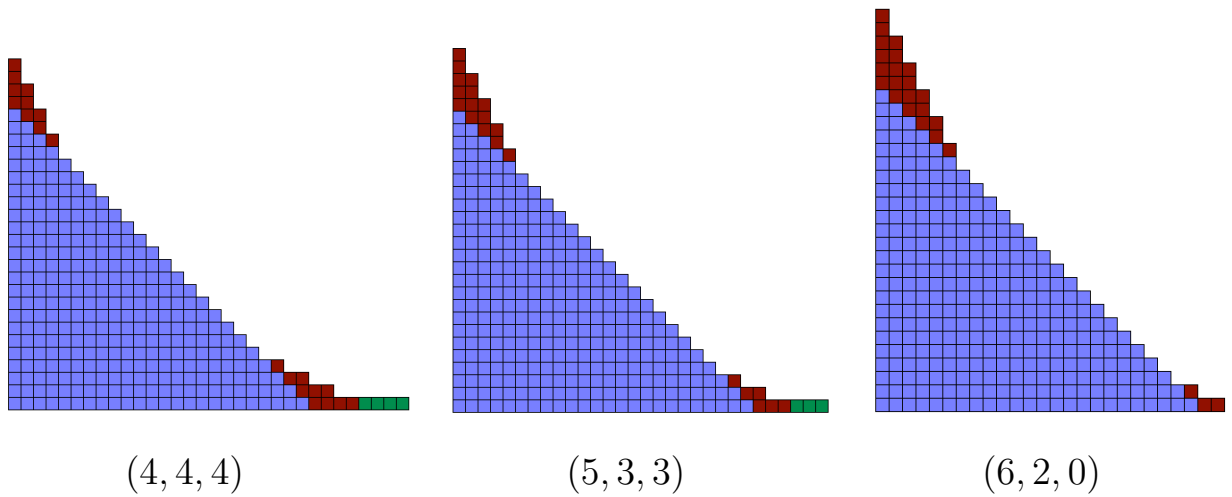


Рис. 2.10. Перебрасывание клеток переводит равновесную диаграмму  $(4, 4, 4)$  в равновесную диаграмму  $(5, 3, 3)$ , а затем в  $(6, 2, 0)$ .

нительные возможности для перестановки клеток с одной надстройки на другую с сохранением количества длинных выступов, так, что полученные диаграммы также будут равновесными. Описание механизма таких перестановок, или перебрасываний, не входит в задачу доказательства этой теоремы и будет дано ниже. ■

Знание сформулированных в теореме 3 критериев равновесности диаграммы позволяет построить все равновесные диаграммы для заданного  $n$ , не рассматривая всё множество разбиений  $n$ .

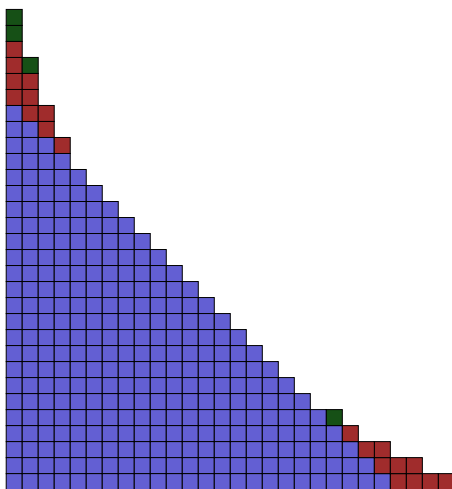


Рис. 2.11. Равновесная диаграмма  $(4, 4, 4)$  с распределением дополнительных клеток:  $n^{(1)} = 3, n^{(2)} = 0, n^{(3)} = 0, n^{(4)} = 1$

В доказательстве теоремы 3 показано, что  $T_m$  — наименьшее число клеток, которые необходимо добавить к крылу треугольной диаграммы, чтобы на нём образовалось  $m$  длинных выступов, причём эти клетки располагаются в форме треугольной надстройки размером  $m$ . Поэтому  $\Delta n$  можно записать в виде:  $\Delta n = T_{m_1} + T_{m_2} + dn, dn \leq \min\{m_1, m_2\}, m_1 + m_2 = \Delta N$ , и обозначать равновесную

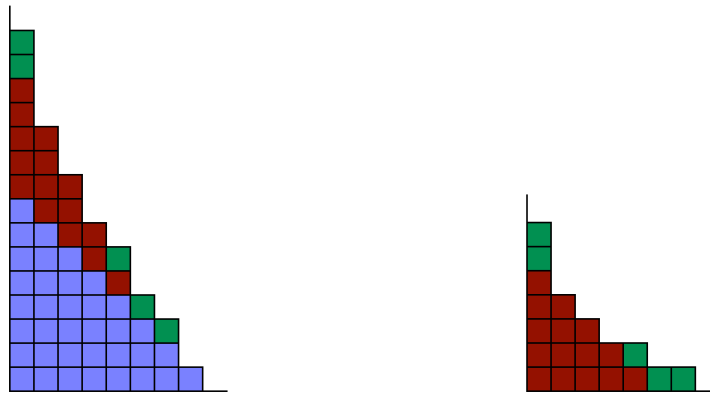


Рис. 2.12. Слева — крыло диаграммы с треугольной надстройкой ( $m_1 = 5$ ) и  $dn = 5$  дополнительными клетками. Справа та же треугольная надстройка с дополнительными клетками изображена отдельной диаграммой

диаграмму тройкой чисел:  $(m_1, m_2, dn)$ .

Рассмотрим описанную в доказательстве теоремы 3 равновесную диаграмму с  $\Delta N$  длинными выступами и размерами надстроек, указанными в (2.12). Из данного частного случая могут быть получены равновесные диаграммы со всеми возможными размерами надстроек. В качестве примера возьмём исходную равновесную диаграмму  $(4, 4, 4)$ . Если взять 4 клетки, скажем, с правой надстройки (т. е. надстройки на правом крыле) и одну из  $dn$  клеток, то этих пяти клеток хватит для того, чтобы достроить следующую оболочку на левой надстройке, т. е. получить диаграмму  $(5, 3, 3)$  (см. рис. 2.10). Подобную перестановку клеток с одной надстройки на другую будем называть *перебрасыванием*. Полученная диаграмма будет равновесной, так как по-прежнему  $\Delta N = m_1 + m_2 = 8$ . Из неё в свою очередь может быть образована равновесная диаграмма  $(6, 2, 0)$ , если, взяв с правого крыла и из  $dn$  по 3 клетки, достроить шестую оболочку на левой надстройке.

Найдём число возможных перебрасываний  $z$ . Одно перебрасывание включает в себя следующие действия: взятие всех клеток с верхней обо-

лочки одной надстройки, добавление к ним достаточного количества клеток из  $dn$  и построение следующей оболочки на другой надстройке.

Рассмотрим случай  $(m, m, dn)$ , соответствующий чётному  $\Delta N$ . Чтобы построить  $z$  оболочек сверх имеющихся на левой надстройке, понадобится  $(m+1) + (m+2) + \dots + (m+z) = mz + T_z$  клеток. Допустим, клетки берутся с  $z$  оболочек на правой надстройке, тогда их число равно  $m + (m-1) + \dots + (m-z+1) = mp - T_{z-1}$ . Кроме того, могут быть взяты ещё  $dn$  клеток. Приравняв число взятых клеток числу клеток, переброшенных на левую надстройку, получаем уравнение на  $z$ :

$$mz + T_z = mz + dn - T_{z-1},$$

откуда находим  $z = \lceil \sqrt{dn} \rceil$ . Аналогично для нечётных  $\Delta N$ , т. е. диаграмм  $(m+1, m, dn)$ , можно получить  $z = \left\lceil \frac{\sqrt{4dn+1}-1}{2} \right\rceil$ . В качестве итогового выражения для  $z$  можно записать:

$$z = \left\lceil \frac{\sqrt{4dn + (\Delta N \bmod 2)} - (\Delta N \bmod 2)}{2} \right\rceil. \quad (2.13)$$

Найденное значение  $z$  описывает перебрасывание клеток с исходной диаграммы только в одном направлении. Перебрасывание клеток в противоположном направлении даёт тот же результат, что и взятие сопряжения от уже полученных диаграмм.

$dn$  клеток, не принимающих участия в формировании максимального треугольника и треугольных надстроек, назовём *дополнительными*. В равновесной диаграмме эти клетки должны располагаться так, чтобы общее число выступов и количество длинных выступов остались неизменными. В доказательстве теоремы 4 показано, что дополнительные клетки при этом располагаются на крыльях треугольных надстроек, например, так, как на рис. 2.12.

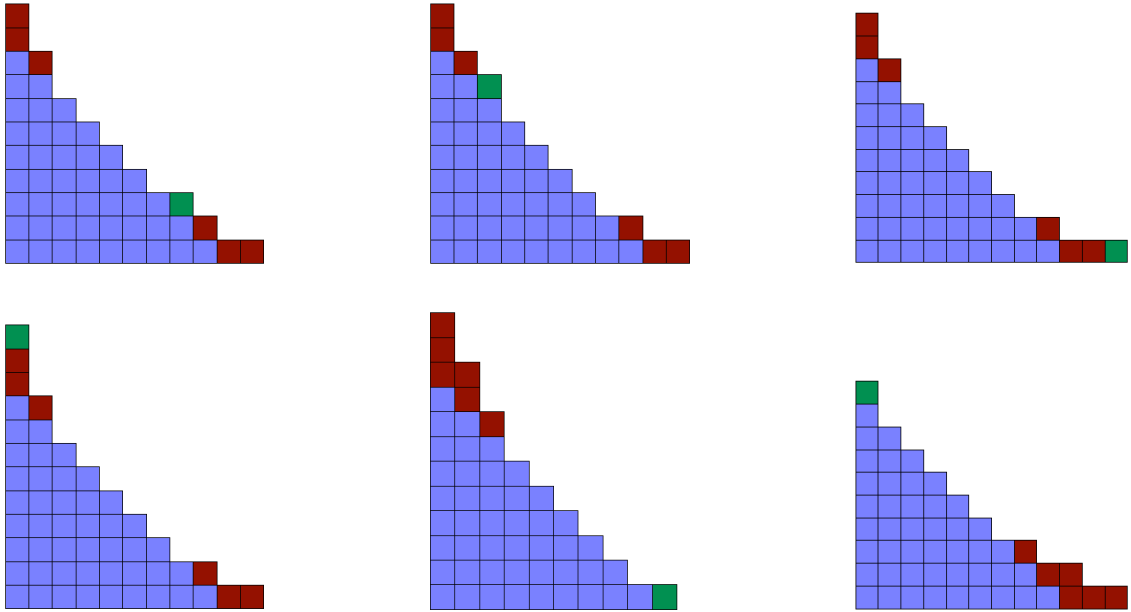


Рис. 2.13. Все равновесные диаграммы для  $n = 52$ ,  $s = 9$

*Композицией* называется такое распределение, при котором важен порядок следования частей [108]. Например,  $(2, 1)$  и  $(1, 2)$  — различные композиции числа 3.

**Теорема 4** Число способов расположения дополнительных клеток в равновесной диаграмме равно

$$N_{dn} = \sum_{dn} p(n^{(1)})p(n^{(2)})p(n^{(3)})p(n^{(4)}), \quad (2.14)$$

где  $p(n^{(i)})$  — число разбиений  $n^{(i)}$ , а суммирование ведётся по всем композициям  $dn = n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)} + n^{(4)}$ .

**Доказательство.** На рисунке 2.11 показан пример диаграммы с треугольными надстройками и дополнительными клетками.

Рассмотрим все способы расположения дополнительных клеток на диаграмме с надстройками. Прежде всего,  $n^{(i)}$  из  $dn$  дополнительных клеток можно добавить к одному из крыльев так, чтобы ни один из длинных выступов не перестал быть длинным. Для этого количества добавленных к крылу клеток  $(n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \dots, n_{r_i}^{(i)})$  должны образовывать невозрастающую последовательность, то есть соответствовать разбиению  $n^{(i)}$ .

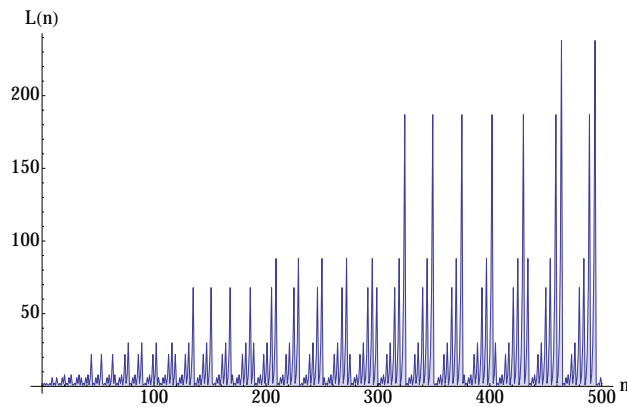


Рис. 2.14. Количества равновесных диаграмм  $L$  для числа клеток  $n = 1 \dots 500$

Чтобы описать ещё один способ размещения дополнительных клеток, снова рассмотрим одно крыло диаграммы с надстройками. Для определённости будем говорить о левом крыле. Если к нему сразу за последним из длинных выступов добавлена цепочка из  $n_1^{(i)}$  клеток, то последний длинный выступ в надстройке станет коротким, а последний выступ в цепочке добавленных клеток — длинным. Поверх образовавшейся цепочки из  $n_1^{(i)}$  коротких выступов можно добавить ещё одну цепочку из  $n_2^{(i)}$  клеток, начиная с прилегающего слева длинного выступа. В результате этот длинный выступ переместится на  $n_2^{(i)}$  позиций вправо по диаграмме. За последним из неподвижных длинных выступов может быть добавлена ещё одна цепочка клеток, и так далее. Можно увидеть, что при таком способе добавления клеток последовательность  $(n_j^{(i)})$  является невозрастающей и также образует разбиение числа  $n^{(i)}$ .

Если изобразить треугольную надстройку отдельной диаграммой, то добавляемые обоими способами клетки будут расположены на её крыльях так, чтобы не изменялось число её выступов. На рисунке 2.12 показан пример добавления клеток к одному крылу диаграммы с треугольной надстройкой и та же надстройка изображена в виде отдельной диаграммы. В этом смысле мы будем говорить, что группа из  $n^{(i)}$  клеток добавлена к *крылу* треугольной надстройки.

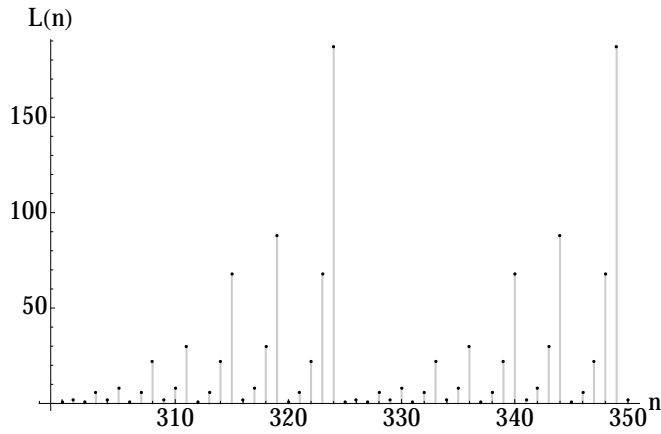


Рис. 2.15. Количества равновесных диаграмм  $L$  для числа клеток  $n = 300 \dots 350$

Примем следующие обозначения расположения дополнительных клеток:  $n^{(1)}$  клеток — на левом крыле левой надстройки,  $n^{(2)}$  клеток — на правом крыле левой надстройки;  $n^{(3)}$  клеток — на правом крыле правой надстройки,  $n^{(4)}$  клеток — на левом крыле правой надстройки.

Для завершения доказательства остаётся заметить, что никакие две идущие навстречу друг другу последовательности добавляемых клеток не могут перекрываться. Действительно,  $(n_j^{(1)})$  не накладывается на  $(n_j^{(2)})$ , а  $(n_j^{(3)})$  — на  $(n_j^{(4)})$  потому, что  $dn \leq \min\{m_1, m_2\}$ .  $(n_j^{(2)})$  не пересекается с  $(n_j^{(4)})$ , так как это означало бы, что поверх треугольной диаграммы имеется непрерывная цепочка клеток от края до края, т. е. заполнена следующая оболочка, что невозможно, так как  $\Delta n < s + 1$ . Поэтому на количества частей разбиений  $n^{(i)}$  никаких ограничений не накладывается, и число способов расположения дополнительных клеток может быть записано в виде (2.14). ■

Изложенные закономерности позволяют получить все равновесные диаграммы для заданного числа клеток. На рисунке 2.13 изображены все равновесные диаграммы для числа клеток  $n = 52$ . Изменение количества равновесных диаграмм с ростом  $n$  показано на графике 2.14, один из участков которого показан на следующем рисунке в более крупном масштабе. Число равновесных диаграмм  $L$  равно единице, когда  $n = T_s + 2T_m$ .



Вид этого графика достаточно интересен, чтобы остановиться для его обсуждения. Именно, он говорит о том, что если не знать комбинаторной природы формирования равновесных состояний ИДА<sub>1</sub> – системы, то невозможно предсказать, насколько будут различаться количества равновесных состояний при разных, пусть даже близких, количествах элементов. Иными словами, при наблюдении со стороны нельзя сказать заранее, что произойдёт с числом равновесных состояний после добавления к системе очередного элемента: останется ли оно практически на прежнем уровне, увеличится ли в разы или уменьшится в десятки раз. Наконец, самоподобие, присутствующее в этом графике, позволяет предположить возможность описания фрактальных объектов на основе изложенных принципов.

Выразим номер последней полностью заполненной оболочки  $s$  через  $n$ . Для  $n = T_s$  имеем:

$$s(s + 1)/2 = n,$$

откуда находим  $s = (\sqrt{8n + 1} - 1)/2$ . Для  $T_s < n < T_{s+1}$  от этого выражения следует взять целую часть. Таким образом, опираясь на теорему 3, для ёмкости единичной окрестности равновесной диаграммы с  $n$  клетками можно записать:

$$N_{max}(n) = N_s + \Delta N, \quad (2.15)$$

$$s = \left[ \frac{\sqrt{8n + 1} - 1}{2} \right], \quad \Delta N = [\sqrt{4\Delta n + 1} - 1], \quad \Delta n = n - T_s. \quad (2.16)$$

Здесь  $s$  — номер ближайшего снизу к  $n$  треугольного числа,  $\Delta N$  — число длинных выступов в диаграмме,  $\Delta n$  — количество клеток сверх заполненных оболочек.

График изменения ёмкости окрестности равновесного состояния с увеличением числа клеток представлен рисунке 2.16. Хорошо заметны скачки ёмкости окрестности каждый раз, когда  $n$  принимает значения  $T_s$ .

Какой же вывод можно сделать в отношении применимости модели ИДА<sub>1</sub> к ранговым распределениям? Так как ранговое распределение ха-

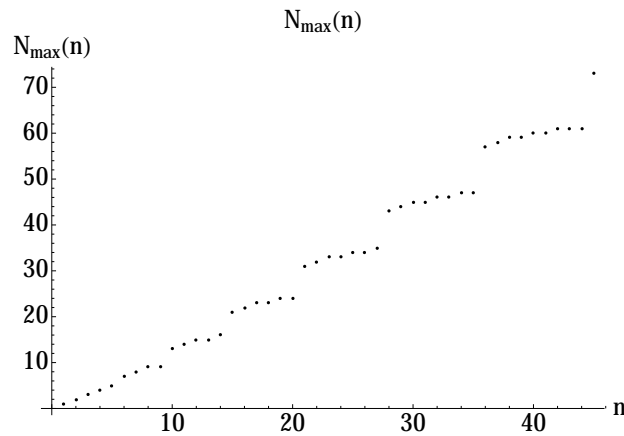


Рис. 2.16. Изменение ёмкости окрестности равновесного разбиения с ростом  $n$ .

рактически характеризуется диаграммой Юнга, можно сказать, что для  $n = T_s$  равновесное распределение имеет такой вид, как показано на рис. 2.11, а при  $n = T_s$  изображается треугольной диаграммой. Хотя распределения такого вида и отличаются от распределений, соответствующих известным степенным законам, присущие им чёткий порядок и структурированность, несомненно, отражают наличие выраженных системных свойств у моделируемой совокупности объектов и сложных взаимосвязей между ними.

Кроме того, стоит отметить, что цифровые распределения, естественно, наблюдаются для систем с очень большим количеством элементов, таким, чтобы дискретную совокупность данных можно было аппроксимировать непрерывной функциональной зависимостью. При этом ясно, что из-за дискретности системы отклонения от степенной зависимости сильнее всего проявляются у краёв распределения, там, где численность классов стремится к бесконечности или к нулю. Вполне закономерно, что чем меньше элементов в системе, тем менее применимой становится аппроксимация распределения степенным законом. Между тем знание вида равновесной диаграммы при любом числе клеток позволит предсказывать наиболее вероятные совокупности распределений для систем с не слишком большим числом элементов, когда данных для проверки выполнения степенного закона явно недостаточно.

## Основные результаты и выводы

$IDA_1$ –система — модель макроскопической системы с неразличимыми элементами и различимыми состояниями, в которой наличие связей между соседними заполняемыми состояниями приводит к их упорядочению. Статистические свойства такой системы эквивалентны статистическим свойствам системы с неразличимыми элементами и неразличимыми состояниями. Микросостояние  $IDA_1$ –системы из  $n$  элементов задаётся диаграммой Юнга  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ . Макросостояния системы предлагается рассматривать как окрестности радиуса  $k$  микросостояний. Вероятность макросостояния с центром  $\lambda$   $IDA_1$ –системы пропорциональна ёмкости окрестности  $N(Q_k(\lambda))$ . Модель  $IDA_1$ –системы может быть использована для анализа ранговых распределений в различных системах. В качестве примера рассмотрена модель сети Интернет.

$IDA_1$ –система исследовалась для частного случая  $k = 1$ . Получено явное выражение для ёмкости окрестности диаграммы. Исследованы свойства и выявлена структура равновесных диаграмм. Разработан алгоритм, позволяющий для заданного  $n$  построить все равновесные диаграммы с  $n$  клетками. Получено выражение для ёмкости единичной окрестности равновесной диаграммы для любого  $n$ . В диаграммах могут быть выделены оболочки, так, что ёмкость окрестности равновесной диаграммы терпит скачок при заполнении очередной оболочки. Эта черта роднит рассмотренную модель с другими оболочечными моделями, такими, как модель электронных оболочек атома, оболочечная модель атомного ядра и процесс роста атомных кластеров.

## 2.7. Доказательства основных теорем

**Доказательство леммы 1.** Пусть в диаграмме  $\lambda$  с  $q$  выступами  $j$ -й выступ имеет размеры  $a_j > 1$ ,  $b_j > 1$ . Переставим вершину  $j$ -го выступа на свободное место справа от последнего столбца. Полученную диаграмму обозначим  $\lambda'$ , число выступов в  $\lambda'$  обозначим  $q'$ . Пусть  $N$  и  $N'$  — ёмкости окрестностей  $\lambda$  и  $\lambda'$ , соответственно. Покажем, что  $N > N'$  и, следовательно,  $\lambda$  не равновесна.

В исходной диаграмме  $p_j = 0$ . В конечной диаграмме на месте  $j$ -го выступа образовались два новых, для которых  $p'_j, p'_{j+1} \leq 2$ . Число выступов новой диаграммы  $q' = q + 1$  или  $q + 2$ . О выступах, не затронутых изменениями, известно, что  $p'_i = p_i$  для  $i = 1, \dots, j - 1$ ;  $p'_i = p_{i-1}$  для  $i = j + 2, \dots, q + 1$ . Если  $q' = q + 2$ , то для  $i = q + 2$  имеем  $p'_{q+2} \leq 2$ . Отсюда

$$\begin{aligned} N' - N &= q'(q' + 1) - q(q + 1) - \sum_{i=1}^q p_i + \sum_{i=1}^{q'} p'_i \geq q'(q' + 1) - q(q + 1) - \sum_{i=q+1}^{q'} 2 - 4 = \\ &= (q' - q)(q' + q - 1) - 2 > 0 \end{aligned}$$

при  $q > 1$ .

Случай  $q = 1$  рассмотрим отдельно. Имеем  $j = q = 1$ ;  $N = 3$ . В этом случае существуют две различные возможности:

1.  $b_1 = 2$ . Тогда  $q' = 2$ ;  $p'_1 \leq 2$ ,  $p'_2 = 1$ . Получаем  $N' \geq 4 > N$ .
2.  $b_1 > 2$ . В этом случае  $q' = 3$ . Для  $p'_i$  имеем:  $p'_1, p'_2 \leq 2$ ,  $p'_3 = 2$ . Отсюда  $N' \geq 7 > N$ .

Для всех возможных случаев лемма доказана. ■

**Доказательство леммы 2.** Обозначим  $N$  и  $N'$  — ёмкости единичных окрестностей  $\lambda$  и  $\lambda'$ , соответственно. Известно, что  $p_i \leq 2$ . Диаграмма с

большими выступами заведомо неравновесна, согласно лемме 1, поэтому рассмотрим случай  $p'_i \geq 1$ . Получаем:

$$N - N' \geq q^2 - q'^2 - q > (q - 1)^2 - q'^2 \geq 0,$$

т. е.  $N' < N$ , что и требовалось доказать. ■

**Лемма 5** Число выступов в произвольной диаграмме Юнга подчиняется соотношению:  $q \leq \min\{A, B\}$ , — где  $A$  — длина первой строки,  $B$  — высота первого столбца.

**Доказательство.** Очевидно, поскольку каждый из выступов занимает не менее одной строки по вертикали и не менее одного столбца по горизонтали. ■

**Доказательство леммы 3.** Пусть диаграмма  $\lambda'$  с  $n' \geq T_s$  клетками содержит такую строку  $\lambda'_j$ , что  $\lambda'_j < \lambda_j^{(s)}$ , т. е.  $\lambda'_j < s - j + 1$ . Докажем, что  $\lambda'$  содержит меньше выступов, чем  $\lambda^{(s)}$ , и поэтому не равновесна.

Рассмотрим две диаграммы, содержащиеся в  $\lambda'$ :

$$\lambda'_{(1)} = \{\lambda'_j, \lambda'_{j+1}, \dots, \lambda'_r\} \quad \text{и} \quad \lambda'_{(2)} = \{\lambda'_1 - \lambda'_j, \lambda'_2 - \lambda'_j, \dots, \lambda'_{j-1} - \lambda'_j\},$$

где  $r$  — число строк в  $\lambda'$ . Число выступов в  $\lambda'$  можно записать как  $q' = q'_1 + q'_2$ , где  $q'_1, q'_2$  — количества выступов в  $\lambda'_{(1)}, \lambda'_{(2)}$ , соответственно. Пусть  $A'_1 = \lambda'_j$  — размер диаграммы  $\lambda'_{(1)}$  по горизонтали,  $B'_2 = j - 1$  — размер  $\lambda'_{(2)}$  по вертикали. Тогда  $A'_1 + B'_2 = j - 1 + \lambda'_j < s$ . Согласно лемме 5,

$$q'_1 \leq A'_1, \quad q'_2 \leq B'_2,$$

поэтому общее число выступов в  $\lambda'$ :  $q' = q'_1 + q'_2 \leq A'_1 + B'_2 < s$ . Следовательно,  $\lambda'$  не является равновесной (см. лемму 2 и теорему 1), т. е. равновесная диаграмма должна полностью содержать в себе треугольную. Лемма доказана. ■

## Глава 3

# IDA<sub>2</sub> – макросистемы

### 3.1. Вероятностные характеристики IDA<sub>2</sub> – систем

Модель IDA<sub>2</sub> – системы является расширением IDA<sub>1</sub> – систем на случай двух измерений. Бесконечный ряд ячеек в этом случае преобразуется в двумерный массив квадратных ячеек, расположенный в первом квадранте и ограниченный вдоль осей  $x$  и  $y$  бесконечно высокими стенками. Как и в предыдущем случае, в ячейки случайным образом помещаются шары. Пусть шар остаётся в своей ячейке, только если он имеет не менее трёх соседей (как и раньше, под соседом понимается другой шар или же дно либо стенка ящика). В получающейся таким образом конфигурации из  $n$  шаров заселённости ячеек нестрого убывают в строках и столбцах вдоль координатных осей. Каждую такую конфигурацию мы и будем считать *микросостоянием* системы типа IDA<sub>2</sub>. В дальнейшем такие конфигурации мы будем описывать плоскими разбиениями числа элементов  $n$ . Заселённости ячеек, как и части плоского разбиения, будем обозначать  $\lambda_{ij}$ .

*Расстояние* между микросостояниями  $\lambda$  и  $\lambda'$  определим аналогично случаю  $IDA_1$ :

$$\rho(\lambda, \lambda') = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |\lambda_{ij} - \lambda'_{ij}|, \quad (3.1)$$

что при фиксированном числе элементов соответствует наименьшему количеству клеток, которые нужно переставить в  $\lambda$ , чтобы получить  $\lambda'$ , и наоборот.

Обозначим  $\mathbb{Y}_n^{3D}$  — множество всех трёхмерных диаграмм Юнга с  $n$  клетками. Определив понятия окрестности и единичной окрестности диаграммы  $\lambda$  аналогично случаю двумерных диаграмм Юнга, мы можем сопоставить каждому плоскому разбиению  $\lambda$  следующую вероятность:

$$\mathbb{P}_{IDA_2}(\lambda) = \frac{N(Q(\lambda))}{\pi(n)},$$

где  $N(Q(\lambda))$  — ёмкость единичной окрестности  $\lambda$ ,  $\pi(n)$  — число плоских разбиений  $n$ . Понятия энтропии и равновесного состояния также вполне аналогичны соответствующим понятиям для систем типа  $IDA_1$ . Диаграмму, являющуюся центром равновесного состояния, мы будем называть *равновесной*.

Традиционно трёхмерная диаграмма Юнга рассматривается как многогранник, составленный из кубов. Однако далее нам будет удобно также рассматривать её как бесконечную поверхность, состоящую из открытых граней клеток, а также тех частей координатных плоскостей, которые не соприкасаются с поверхностями клеток диаграммы. У этой поверхности имеются грани — многоугольники, составленные из квадратов; грани пересекаются по рёбрам, параллельным координатным осям; рёбра оканчиваются в вершинах. Поскольку многогранник составлен из кубиков, в каждой вершине пересекается по крайней мере по три ребра и по три грани. Представление диаграммы в виде поверхности оказывается, в частности, полезным для чёткой формулировки определений гнезда и вершины выступа.

Координаты вершин клеток в трёхмерной диаграмме Юнга  $(x, y, z)$  — всегда целые числа. Клетку диаграммы условимся обозначать координатами вершины, наиболее удалённой от начала координат, так, что клетка, находящаяся ближе всех к началу координат, имеет координаты  $(1, 1, 1)$ . Верхняя клетка столбца  $\lambda_{xy}$  имеет координаты  $(x, y, \lambda_{xy})$ . Здесь и далее под столбцом *диаграммы*, в отличие от столбца *плоского разбиения*, мы будем понимать не столбец матрицы, изображающей соответствующее плоское разбиение, а столбец из клеток диаграммы Юнга, высота которого равна части  $\lambda_{xy}$  плоского разбиения  $\lambda$ . Вершины клеток образуют простую кубическую решётку. У многогранника, которым можно представить трёхмерную диаграмму Юнга, три ребра лежат на координатных осях; конкретная же ориентация осей не важна, так как в любом случае сохраняется условие невозрастания столбцов.

Согласно нашему определению, единичную окрестность трёхмерной диаграммы Юнга  $\lambda$  составляют диаграммы, которые получаются из  $\lambda$  перестановкой одной клетки. По аналогии с двумерными диаграммами Юнга, попытаемся найти способ, который позволял бы найти ёмкость единичной окрестности заданного плоского разбиения без непосредственного построения окрестности или перебора всех остальных разбиений. Для того, чтобы при перестановке клетки из диаграммы Юнга получалась также диаграмма Юнга, т. е. для сохранения условия невозрастания величин столбцов, клетки могут браться не со всех позиций и переставляться также не на любые позиции. В связи с этим выделим три типа вершин трёхмерной диаграммы Юнга.

**Определение 1** Точка с координатами  $(x, y, z)$ , является *вершиной типа 1* (*вершиной выступа*), если выполняется любое из четырёх эквивалентных условий:

1. Клетка с этими координатами имеет ровно три открытые грани,



т. е. не соприкасающиеся с другими клетками или с координатными плоскостями.

2. Точки:  $(x + 1, y, z)$ ,  $(x, y + 1, z)$  и  $(x, y, z + 1)$  не являются координатами существующих клеток диаграммы.
3. В этой точке пересекаются три и только три грани, образующие выпуклость наружу.
4. В этой точке пересекаются три и только три ребра, и каждое из них выходит из этой точки в сторону уменьшения координаты.

При формировании единичной окрестности для перестановки могут быть взяты только вершинные клетки выступов диаграммы. Диаграмма на рис. 3.1 имеет семь выступов.

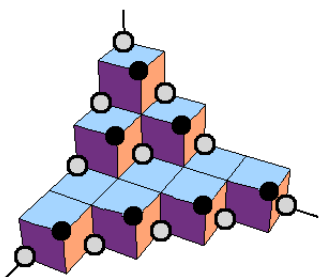


Рис. 3.1. Трёхмерная диаграмма Юнга с обозначенными на ней выступами (чёрные кружки) и гнёздами (серые кружки).

**Определение 2** Точка  $(x, y, z)$  является *вершиной типа 2 (гнездом)*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1. В эту точку может быть поставлена клетка, которая будет иметь координаты  $(x + 1, y + 1, z + 1)$ , так, чтобы полученный объект также являлся трёхмерной диаграммой Юнга.
2. Точки:  $(x, y + 1, z + 1)$ ,  $(x + 1, y + 1, z)$  и  $(x + 1, y, z + 1)$  являются координатами существующих клеток диаграммы.
3. В этой точке пересекаются три и только три грани, образующие выпуклость внутрь.
4. В этой точке пересекаются три и только три ребра, так, что каждое из них выходит из

этой точки в сторону увеличения координаты.

Новая клетка может быть помещена только в гнездо диаграммы. У диаграммы, изображённой на рис. 3.1, имеется 11 гнезд.

К третьему типу отнесём все остальные вершины диаграммы.

У двумерных диаграмм количество гнезд жёстко связано с количеством выступов: двумерная диаграмма с  $q$  выступами имеет  $q + 1$  гнездо. В случае же трёхмерных диаграмм количество гнезд может быть как больше, так и меньше количества выступов. Нижняя граница числа гнезд даётся следующей теоремой (доказательство см. в разделе 3.4):

**Теорема 5** *Для числа выступов  $m$  и гнезд  $k$  в любой трёхмерной диаграмме Юнга справедливо следующее:*

$$k \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 3.$$

Размерами выступа  $a, b, c$  будем называть длины рёбер, исходящих из его вершины. В зависимости от размеров, выступы могут быть подразделены на *короткие* ( $a = b = c = 1$ ), *длинные* (два размера равны единице, а один размер превышает единицу) и *большие* (по крайней мере два размера превышают единицу), см. рис. 3.2. Говоря о коротких выступах, мы будем считать выступом вершинную клетку данного выступа, а говоря о длинных выступах, будем считать выступом прямоугольный параллелепипед, ограниченный рёбрами  $a, b, c$ .

## 3.2. Ёмкость единичной окрестности

Чтобы найти число диаграмм, лежащих в единичной окрестности данной, нужно сосчитать все различные способы перестановки одной клетки в этой диаграмме. Пусть диаграмма  $\lambda$  содержит  $m$  выступов и  $k$  гнезд.

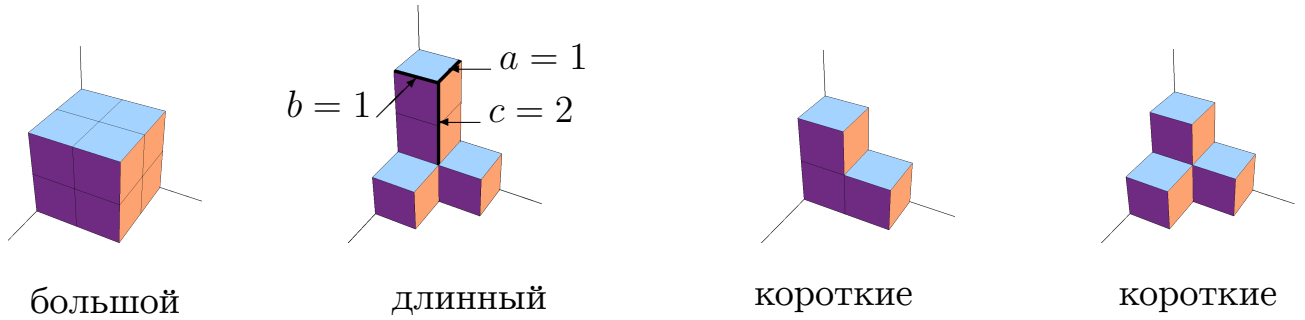


Рис. 3.2. В зависимости от размеров, выступы можно подразделить на большие, длинные и короткие.

Найдём для каждого выступа число способов  $N_i$ , которыми его вершина может быть переставлена на новое место, а затем просуммируем полученные числа по всем выступам диаграммы. Поскольку сама исходная диаграмма включается в свою единичную окрестность, к полученной сумме нужно ещё прибавить единицу.

Будем говорить, что гнездо *прилежит* к вершинной клетке  $(x, y, z)$ , если оно имеет координаты  $(x, y - 1, z - 1)$ ,  $(x - 1, y, z - 1)$  или  $(x - 1, y - 1, z)$ . При удалении этой клетки прилежащие к ней гнёзда исчезают. Таким образом, вершинная клетка  $i$ -го выступа может быть переставлена во все гнёзда диаграммы, кроме тех, которые к ней прилежат, поэтому  $N_i$  можно записать в виде:  $N_i = k - p_i$ , где  $p_i$  — величина, равная числу гнёзд, прилежащих к вершинной клетке  $i$ -го выступа. Величину  $p_i$ , как и в случае  $IDA_1$ -систем, мы будем называть *вычетом* (см. рис. 3.3). Обозначим множество гнёзд диаграммы как  $K$ . Введём функцию

$$K(x, y, z) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in K \\ 0, & (x, y, z) \notin K. \end{cases}$$

Тогда выражение для вычета  $p_i$  приобретёт вид:

$$p_i = K(x, y - 1, z - 1) + K(x - 1, y, z - 1) + K(x - 1, y - 1, z).$$

Вычет отдельного выступа может принимать значения: 0, 1, 2, 3. Если  $p_i = 0$ , то к клетке, являющейся вершиной данного выступа, гнездо

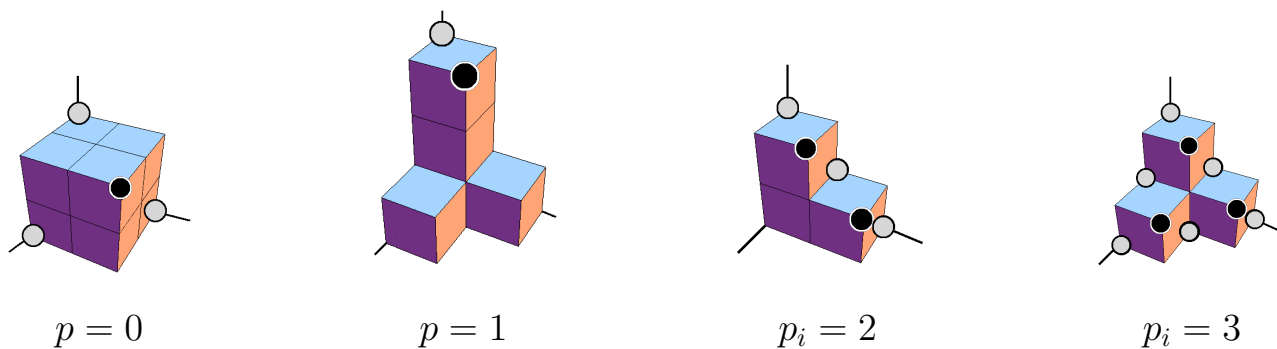


Рис. 3.3. Вычет выступа равен числу гнезд, прилежащих к его вершинной клетке.

ни с какой стороны не прилежит. Если  $p_i = 2, 3$ , то выступ состоит из единственной клетки, так как при удалении этой клетки с диаграммы в ней станет на одну вершину типа 1 меньше (см. рис. 3.3). Если  $p_i = 1$ , то выступ состоит более чем из одной клетки. Так, на рис. 3.3 выступ с вычетом единица состоит из двух клеток.

Таким образом, мы получаем вид выражения для ёмкости единичной окрестности диаграммы:

$$N(Q(\lambda)) = mk - \sum_{i=1}^m p_i + 1. \quad (3.2)$$

В [76] для данного плоского разбиения  $\lambda$  выделены шесть «ассоциированных» с ним плоских разбиений, диаграммы которых получаются из диаграммы  $\lambda$  перестановками координатных осей. В терминах самого плоского разбиения эти «ассоциированные» разбиения можно получить следующим образом:

- оставить  $\lambda$  неизменным;
- каждую строку разбиения  $\lambda$  заменить на сопряжённую;
- каждый столбец разбиения  $\lambda$  заменить на сопряжённый;
- транспонировать  $\lambda$ ;
- каждую строку разбиения  $\lambda$  заменить на сопряжённую, а затем транспонировать;

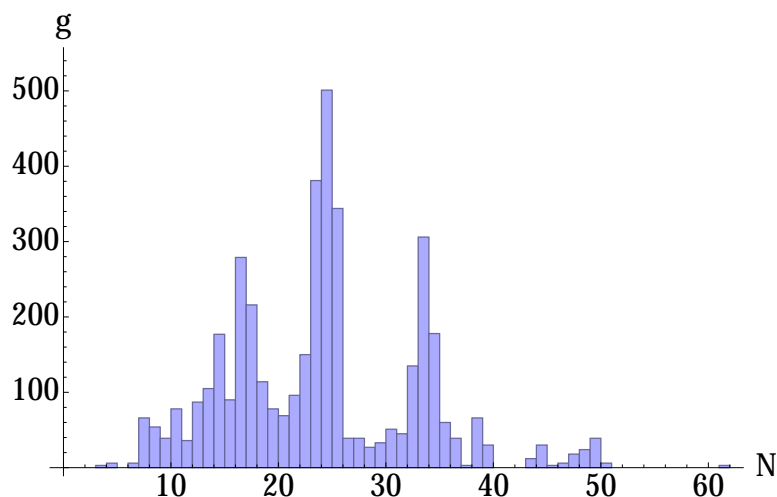


Рис. 3.4. Гистограмма ёмкостей окрестностей плоских разбиений  $n = 14$ . По горизонтальной оси откладывается ёмкость, по вертикальной — количество окрестностей с такой ёмкостью.

- каждый столбец разбиения  $\lambda$  заменить на сопряжённый, а затем транспонировать.

В случае одномерных разбиений подобным образом «ассоциированы» друг с другом были два разбиения  $\lambda$  и  $\tilde{\lambda}$ , т. е. сопряжённые. Так как перечисленные преобразования симметрии не изменяют вид многогранника, изображающего плоское разбиение, все плоские разбиения, ассоциированные с данным разбиением  $\lambda$ , будут иметь равную с ним ёмкость окрестности.

В случае  $IDA_1$ –систем имело место совпадение статистик системы с различными состояниями и упорядоченным механизмом их заполнения и системы с неразличимыми элементами и состояниями. Одномерный ряд заселённостей ячеек  $\lambda_i$  можно единственным образом расположить в невозрастающем порядке, так, что микросостоянию  $\Pi$ –системы однозначно соответствует микросостояние  $IDA_1$ –системы. Однако в двумерном массиве существует в общем случае более одного способа расположения чисел с условием невозрастания по столбцам и строкам. Поэтому один и тот же набор заселённостей ячеек соответствует более чем одному микросостоянию  $IDA_2$ –системы. Таким образом, в двумерном случае

различимость и упорядоченность заполнения состояний изменяют статистику по сравнению со случаем неразличимых состояний.

На рис. 3.4 представлена гистограмма размеров единичных окрестностей плоских разбиений числа  $n = 14$ . По горизонтальной оси откладывается ёмкость окрестности, а по вертикальной — количество окрестностей с такой ёмкостью. Три разбиения имеют наибольшую единичную окрестность и, следовательно, соответствуют равновесным состояниям. Их диаграммы симметричны друг другу. Ниже следует запись этих разбиений в матричной форме:

$$\lambda_{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Трёхмерная диаграмма плоского разбиения  $\lambda_{(1)}$  показана на рис. 3.1.

**Определение 3** *Оболочка* с номером  $s$  формируется клетками, координаты которых удовлетворяют уравнению плоскости:

$$x + y + z - 2 = s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

ортогональной вектору  $(1, 1, 1)$ .

В кристаллографии это направление обозначается как  $[111]$ . Следуя терминологии, принятой в кристаллографии, можно сказать, что оболочки принадлежат к семейству кристаллографических плоскостей с индексами Миллера  $(111)$  [109].

В [22] для клетки  $(x, y, z) \in \lambda$  величина  $\text{ht}(x, y, z) = x + y + z - 2$  называется её *высотой*. Пользуясь этим понятием, можно сказать, что все клетки  $s$ -й оболочки имеют высоту  $s$ .

Возможно, кроме того, рекуррентное определение оболочек: именно, единственная клетка, расположенная у начала координат, формирует первую

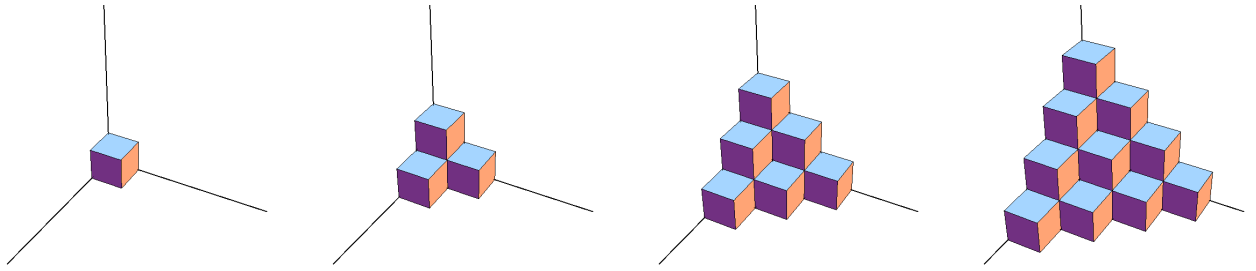


Рис. 3.5. Пирамидальные диаграммы  $\lambda^{(s)}$  для  $s = 1, \dots, 4$ .

оболочку. Три прилежащих к ней клетки образуют вторую оболочку, которая, в свою очередь, соседствует с шестью клетками третьей оболочки, и так далее. Это определение иллюстрируется рисунком 3.5.

**Определение 4** *Пирамидальной диаграммой*  $\lambda^{(s)}$  будем называть диаграмму, составленную из  $s$  заполненных оболочек, см. рис. 3.5. Из этого же рисунка можно видеть, что ёмкости оболочек представляют собой треугольные числа:  $T_s = s(s+1)/2$ . Число клеток в пирамидальной диаграмме, таким образом, равно сумме  $s$  последовательных треугольных чисел, или *пирамидальному* (точнее, тетраэдральному) числу:

$$n_s = T_1 + T_2 + \dots + T_s = \frac{s(s+1)(s+2)}{6}. \quad (3.3)$$

В пирамидальной диаграмме  $\lambda^{(s)}$  число выступов равно  $m_s = T_s$ , а число гнёзд  $k_s = T_{s+1}$ . Так как все выступы имеют вычеты, равные 3, ёмкость единичной окрестности, в соответствии с (3.2), равна:

$$N_s = T_s T_{s+1} - 3T_s + 1. \quad (3.4)$$

В ряде случаев оказывается полезным анализ диаграммы по её проекции на одну из координатных плоскостей, например, на плоскость  $OXY$ . Пример показан на рисунке 3.6. Такая проекция состоит из ломаных линий. Выступ в проекции имеет вид точки, из которой две линии выходят в сторону уменьшения координат. На рисунке выступы обозначены чёрными уголками. Из гнезда (обозначаемого белым уголком) две линии

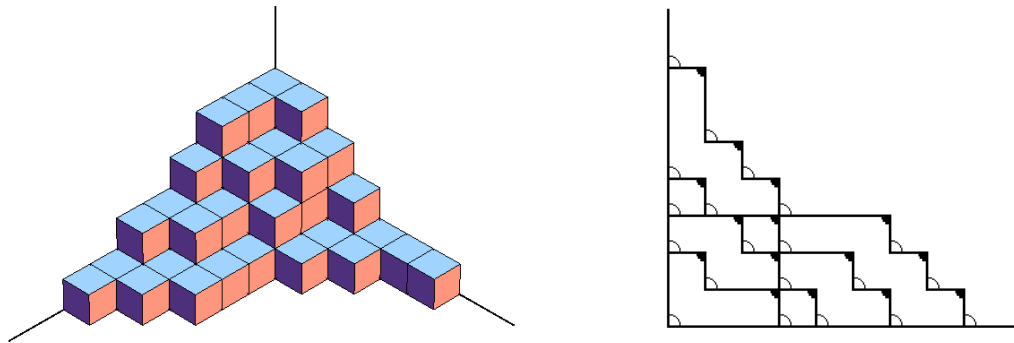


Рис. 3.6. Пример диаграммы с её проекцией на плоскость  $OXY$ .

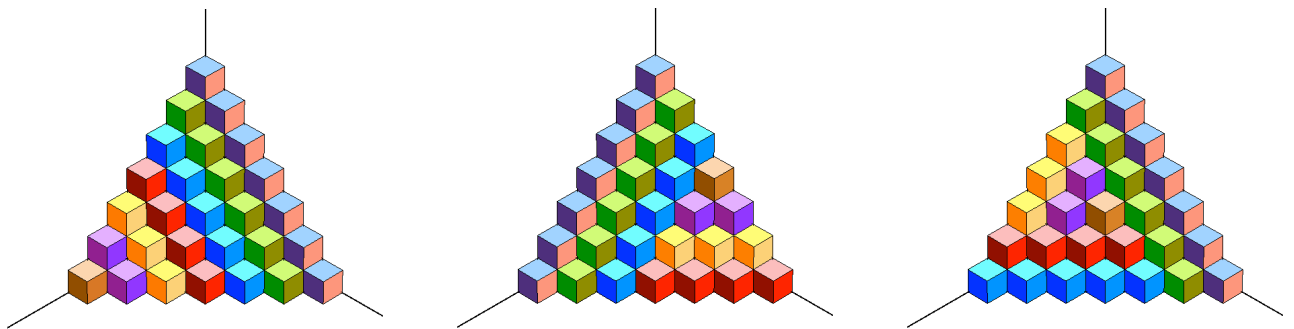


Рис. 3.7. Некоторые способы представления 7-й оболочки как совокупности рядов.

выходят в сторону возрастания координат. Трёхмерная диаграмма не может быть полностью восстановлена по двумерной проекции. Выступы с одной и той же координатой по оси  $Z$  (лежащие в одном слое) соединяются одной ломаной линией. Лежащие на этой линии гнёзда в реальной диаграмме имеют координаты по оси  $Z$ , меньшие, чем у выступов, и не всегда одинаковые. Тем не менее гнездо на двумерной ломаной линии всегда соответствует одному реальному гнезду в диаграмме.

**Определение 5** Будем называть *рядом* с номером  $i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , совокупность  $s - i + 1$  клеток  $s$ -й оболочки, имеющих одну и ту же координату по некоторой координатной оси.

Разделение оболочки на ряды может быть произведено различными способами (см. рис. 3.7), число которых равно  $3^{s-1}$ , однако всегда  $s$ -я оболочка содержит  $s$  рядов, длины которых равны  $s, s - 1, \dots, 1$ .



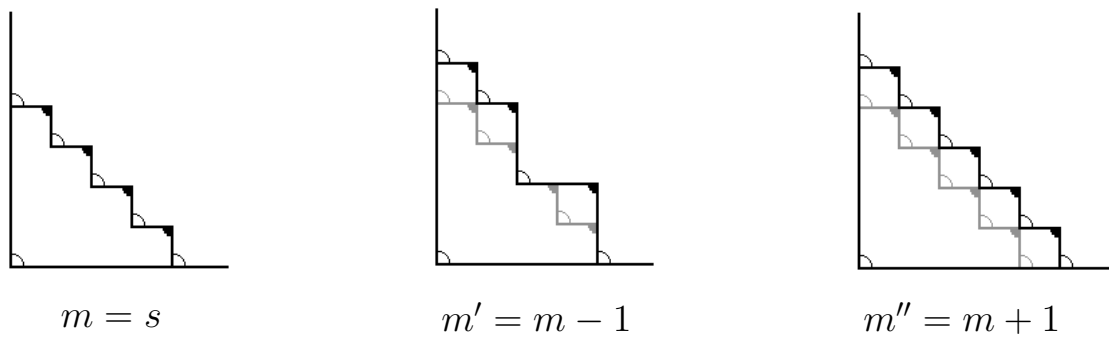


Рис. 3.8. Заполнение первого ряда  $(s + 1)$ -й оболочки в двумерной проекции. Слева ряд не заполнен; в центре ряд заполнен частично; справа ряд заполнен полностью. Серым цветом показаны выступы и гнёзда, которые исчезают при заполнении ряда.

Допустим, некоторый ряд в диаграмме начинает заполняться клетками. При частичном заполнении ряда число выступов и гнёзд в диаграмме не изменяется или уменьшается. Это легко увидеть из рис. 3.8, где показано заполнение первого ряда в двумерной проекции. Следовательно, увеличение числа выступов и гнёзд может произойти только в том случае, если увеличивается количество заполненных рядов. При этом ряды должны заполняться *последовательно*:  $i = 1, 2, \dots$ . На рис. 3.9 показано, что при последовательном заполнении рядов число выступов и число гнёзд возрастают на единицу с заполнением каждого ряда. Рис. 3.10 показывает, что при непоследовательном заполнении рядов увеличения числа выступов и гнёзд не происходит.

Далее, говоря о том, что в диаграмме имеется  $i$  заполненных рядов, мы будем подразумевать, что их номера равны  $1, \dots, i$ .

**Определение 6** Диаграмму, состоящую из  $s$  заполненных оболочек и  $i$  заполненных рядов с номерами  $1, \dots, i$  на  $(s + 1)$ -й оболочке, будем обозначать  $\lambda^{(si)}$  и называть *полнорядной* (см. рис. 3.11).

Как и полностью заполненная оболочка, частично заполненная оболочка в полнорядной диаграмме может быть неоднозначным образом разбита на ряды (см. рис. 3.11), однако их количество и длины для данной

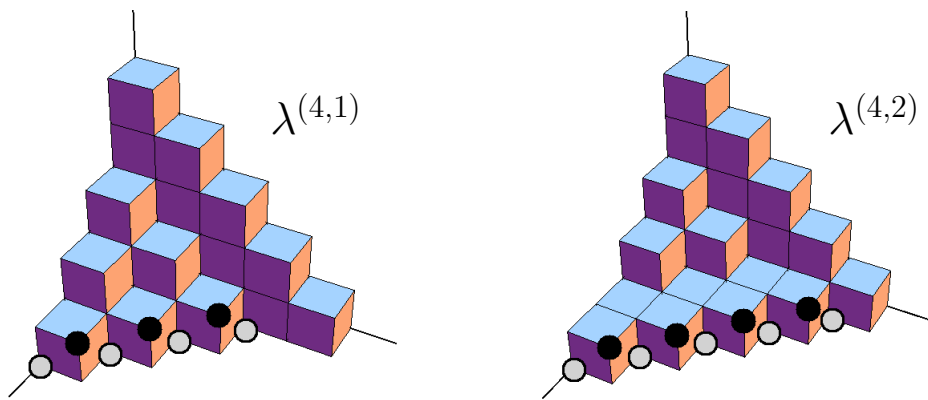


Рис. 3.9. Последовательное заполнение рядов: при заполнении очередного ряда в диаграмме стало на один выступ и на одно гнездо больше.

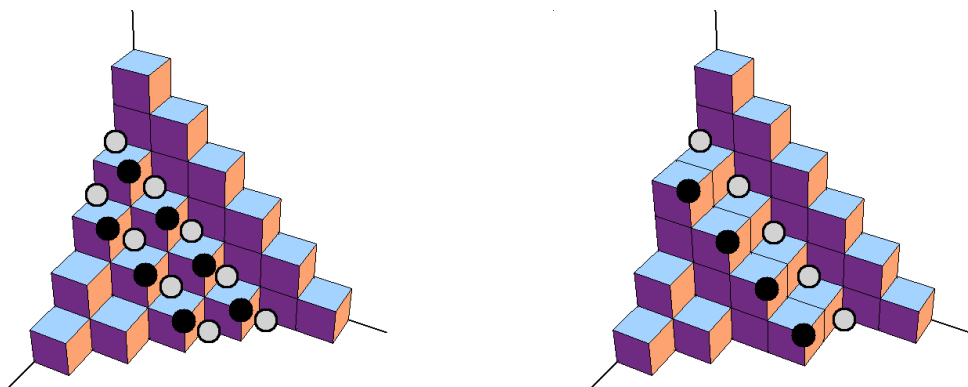


Рис. 3.10. При непоследовательном заполнении рядов число выступов и число гнёзд не возрастают.

диаграммы  $\lambda^{(si)}$  неизменны.

Полнорядная диаграмма  $\lambda^{(si)}$  содержит  $n_{si} = n_s + T_{s+1} - T_{s-i+1}$  клеток и  $m_{si} = T_s + i$  выступов; число гнёзд в ней равно  $k_{si} = T_{s+1} + i$ , если  $i = 0, \dots, s$ , или  $k_{si} = T_{s+2}$  при  $i = s + 1$ . Случаи  $i = 0, s + 1$  соответствуют пирамидальным диаграммам:  $\lambda^{(s,0)} \equiv \lambda^{(s)}$ ,  $\lambda^{(s,s+1)} \equiv \lambda^{(s+1)}$ .

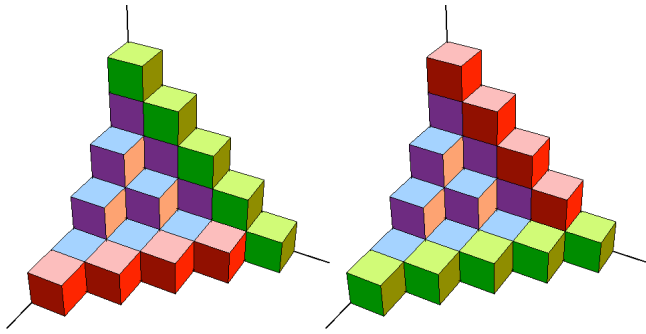


Рис. 3.11. В полнорядной диаграмме  $\lambda^{(4,2)}$  частично заполненная пятая оболочка может быть разбита на ряды различными способами.

выступов с вычетом 2 (на одном ряду) и 6 выступов с вычетом 3, а диаграмма справа имеет 8 выступов с вычетом 2 (на двух рядах) и 4 выступа с вычетом 3.

**Теорема 6** *Количество полнорядных диаграмм, имеющих  $i$  заполненных рядов, равняется  $L_i = T_{i+1}$ .*

**Доказательство.** Пусть диаграмма состоит из  $s$  заполненных оболочек и  $i$  рядов заполнено в  $(s+1)$ -й оболочке. Область  $(s+1)$ -й оболочки, состоящая из незаполненных рядов, имеет форму треугольника размером  $s - i$  (см. рис. 3.12, слева). Очевидно, число способов расположения  $i$  заполненных рядов равно числу способов расположения этого треугольника.

На рис. 3.12 справа схематично изображены вершины выступов  $s$ -й оболочки и показано расположение треугольника, остающегося после заполнения  $i$  рядов. Все точки, в которых может находиться его верхняя вершина, обведены на рисунке кружками. Из рисунка видно, что коли-

Так же, как и пирамидальная, непиримидальная полнорядная диаграмма содержит только короткие выступы. Но, в отличие от пирамидальной, в непиримидальной полнорядной диаграмме эти выступы могут иметь вычет не только 3, но и 2. Так, на рис. 3.9 диаграмма слева имеет 5

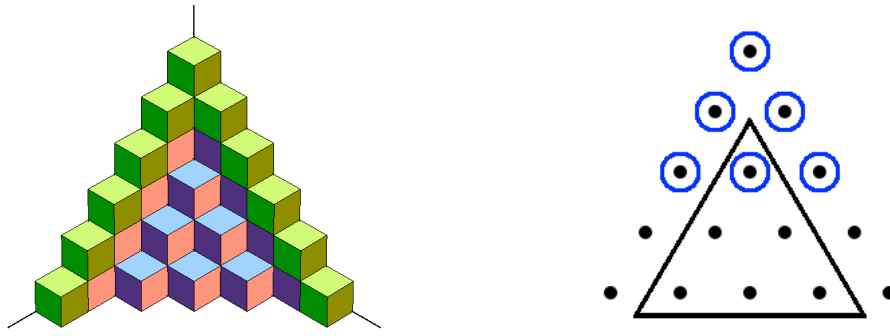


Рис. 3.12. При заполнении  $i$  рядов открытой остаётся область  $s$ -й оболочки в форме треугольника, которая может быть расположена  $T_{i+1}$  способами.

чество таких точек, а следовательно, и вариантов расположения  $i$  заполненных рядов, составляет треугольное число  $T_{i+1}$ . Теорема доказана. ■

### 3.3. Свойства равновесных диаграмм

Выражение (3.2) показывает, что ёмкость окрестности диаграммы зависит от числа выступов, числа гнёзд и вычетов, т. е. типов выступов. Можно доказать (см. теорему 7 ниже), что существуют диаграммы, у которых при заданном количестве клеток и числе выступов, и числе гнёзд принимают наибольшие значения.

*Максимальной* будем называть диаграмму, имеющую наибольшее число выступов и наибольшее число гнёзд при данном числе клеток.

Обозначим  $\lambda_j^{(si)}$ ,  $j = 0, \dots, s - i$ , — диаграмма с  $j$  клетками сверх  $\lambda^{(si)}$ , содержащая  $m_{si}$  выступов и  $k_{si}$  гнёзд (см. рис. 3.13);  $\lambda_0^{(si)} \equiv \lambda^{(si)}$ . Равновесные диаграммы  $\lambda_j^{(si)}$  будем обозначать  $\lambda_{j0}^{(si)}$ .

Следующие теоремы доказываются в разделе 3.4:

**Теорема 7** *Диаграммы  $\lambda_j^{(si)}$  являются максимальными. Других максимальных диаграмм не существует.*

**Теорема 8** *Равновесная диаграмма максимальна.*

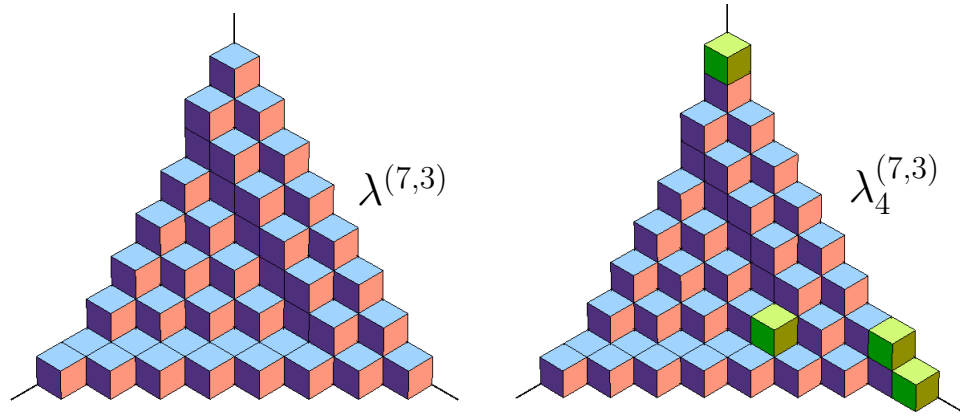


Рис. 3.13. Диаграмма  $\lambda_4^{(7,3)}$  полностью содержит в себе диаграмму  $\lambda^{(7,3)}$  и имеет столько же выступов и гнёзд.

При  $n = n_{si}$  максимальной является полнорядная диаграмма. Согласно (3.2), ёмкость окрестности диаграммы определяется не только числом её выступов и гнёзд, но и вычетами, поэтому не все полнорядные диаграммы оказываются равновесными. В полнорядных диаграммах  $\lambda^{(si)}$  существуют только выступы с вычетом 2 или 3. Равновесная же полнорядная диаграмма  $\lambda_{00}^{(si)}$  имеет наибольшее количество выступов с вычетом 2. Это количество достигается, если заполнены все ряды, прилежащие к координатным плоскостям (при  $i \geq 3$ ). Так, две диаграммы:  $\lambda^{(7,3)}$  на рис. 3.13 слева и  $\lambda_{00}^{(7,3)}$  на рис. 3.14 слева, — имеют одинаковые количества клеток и содержат по 3 заполненных ряда сверх пирамидальной диаграммы, но в первой из них выступы с вычетом 2 имеются только на двух рядах, а на второй — на трёх рядах из трёх возможных. Поэтому  $\lambda^{(7,3)}$  является полнорядной, но не является равновесной, в то время как  $\lambda_{00}^{(7,3)}$  является и полнорядной, и равновесной. При  $i = 1$  любая полнорядная диаграмма также и равновесна, а при  $i = 2$  в равновесной полнорядной диаграмме оба заполненных ряда должны прилежать к координатным плоскостям.

Найдём количества выступов с вычетами 3 и 2 в равновесных полнорядных диаграммах  $\lambda_{00}^{(si)}$ . Обозначим эти количества  $q_3$  и  $q_2$ , соответственно. При  $i = 0$   $q_3 = T_s$ ,  $q_2 = 0$ . При  $i = 1, 2, 3$  выступы с вычетом 3 образуют треугольник со стороной  $s - i$ , и, кроме того, могут быть на крайних точ-

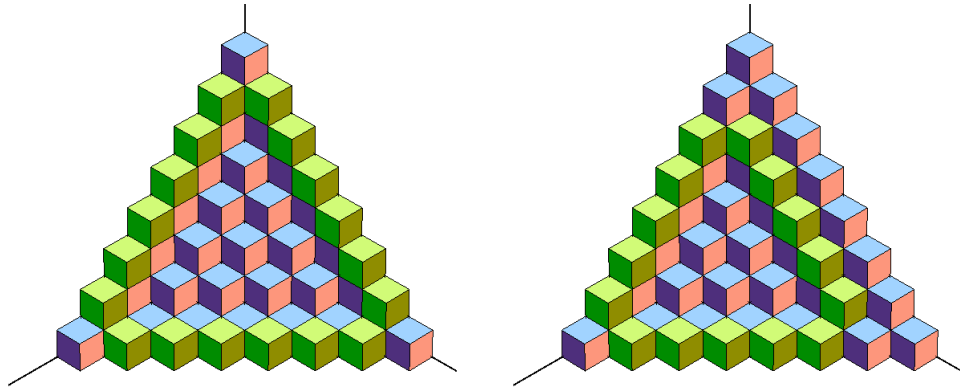


Рис. 3.14. Равновесные полнорядные диаграммы: слева  $i = 3$ , справа  $i = 4$ . Зелёным цветом выделены выступы с вычетом 2.

ках диаграммы. К примеру, диаграмма, показанная на рис. 3.14 слева, содержит  $T_{s-3} + 3$  выступов с вычетом 3 и  $3(s - 1)$  выступов с вычетом 2. При  $i > 3$  выступы с вычетом 2 находятся только на трёх рядах, а все остальные имеют вычет 3 (см. рис. 3.14, справа). Количества выступов с вычетами 2 и 3 в равновесной полнорядной диаграмме можно записать для различных  $i$  следующим образом:

$i$	$q_3$	$q_2$
0	$T_s$	0
1	$T_{s-1}$	$T_{s+1} - T_s = s + 1$
2	$T_{s-2} + 1$	$T_{s+1} - T_{s-1} - 1 = 2s$
3	$T_{s-3} + 3$	$T_{s+1} - T_{s-2} - 3 = 3(s - 1)$
$i > 3$	$T_{s-i} + T_{s+1} - T_{s-i+4} + 3$	$3(s - i + 2)$

Отсюда, пользуясь (3.2), можно записать окончательные выражения для ёмкостей окрестностей полнорядных равновесных диаграмм  $N_{si} \equiv$

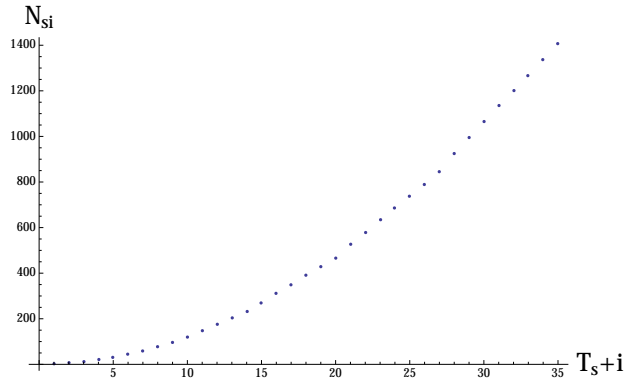


Рис. 3.15. Ёмкости окрестностей равновесных диаграмм  $\lambda_{00}^{(si)}$  от  $\lambda^{(1)}$  до  $\lambda_{00}^{(7,7)}$ .

$N(Q(\lambda_{00}^{(si)}))$ :

$$N_{si} = (T_s + i)(T_{s+1} + i) - 3(T_{s-i} + T_{i-1}) - 2i(s - i + 2) + 1 \quad \text{при } i \leq 3; \quad (3.5)$$

$$N_{si} = (T_s + i)(T_{s+1} + i) - 3(T_{s-i} + T_{s+1} - T_{s-i+4} + 3) - 6(s - i + 2) + 1 \quad (3.6)$$

при  $i > 3$ .

График ёмкостей окрестностей полнорядных равновесных диаграмм  $\lambda_{00}^{(si)}$  от  $\lambda^{(1)}$  до  $\lambda_{00}^{(7,7)}$  представлен на рис. 3.15.

Хотя в рамках данной работы не был найден способ указания всех равновесных диаграмм для заданного числа клеток  $n$ , у равновесных диаграмм можно выделить свойства, описанные в следующих теоремах.

**Теорема 9** *Для того, чтобы диаграмма  $\lambda_j^{(si)}$  была равновесной, необходимо, чтобы она содержала только короткие и длинные выступы.*

**Доказательство** см. в разделе 3.4.

**Теорема 10** *Ёмкость окрестности неполнорядной равновесной диаграммы заключена между ёмкостями окрестностей полнорядных равновесных диаграмм:*

$$N_{si} < N(Q(\lambda_{j0}^{(si)})) < N_{s,i+1}. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Чтобы доказать левую часть неравенства 3.7, достаточно показать, что существует диаграмма с  $n$  клетками, окрестность у которой больше, чем у  $\lambda_{00}^{(si)}$ . В диаграмме  $\lambda_{00}^{(si)}$  выступ, вершинная клетка которого прилежит к одной из координатных осей, имеет вычет 2 или 3. Если теперь к этому выступу добавить ещё  $j$  клеток вдоль координатной оси ( $j > 0$ ), то его вычет станет равным единице, а вычеты остальных выступов не изменятся. Поэтому ёмкость окрестности получившейся диаграммы будет больше, чем у  $\lambda_{00}^{(si)}$ .

Для доказательства правой части неравенства сравним  $\lambda_{j0}^{(si)}$  с  $\lambda^{(s,i+1)}$ . Диаграмма  $\lambda_{j0}^{(si)}$  содержит  $m = m_{si}$  выступов и  $k = k_{si}$  гнёзд; в диаграмме  $\lambda^{(s,i+1)}$  выступов  $m' = m_{s,i+1}$ , гнёзд  $k' = k_{s,i+1}$ . Таким образом,  $m = m' - 1$ ,  $k \leq k' - 1$ . С учётом того, что  $\lambda^{(s,i+1)}$  максимальна, рассуждениями, аналогичными приведённым в доказательстве теоремы 8, можно доказать, что  $N(Q(\lambda_{j0}^{(si)})) < N_{s,i+1}$ .

Теорема доказана. ■ Исходя из этих принципов, легко показать, что для трёх первых клеток сверх  $s$ -й оболочки в равновесной диаграмме при  $s \geq 3$  единственными допустимыми местами являются гнёзда, лежащие на координатных осях, так, что по добавлении клеток на эти места диаграмма приобретает вид, показанный на рисунке 3.16.

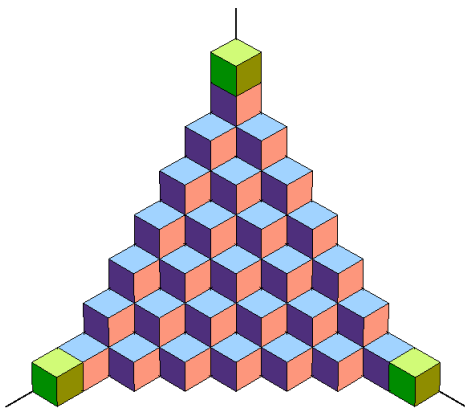


Рис. 3.16. В равновесной диаграмме при  $s \geq 3$  первые три клетки сверх  $s$ -й оболочки всегда занимают позиции, крайние по координатным осям.

Скажем напоследок о возможных применениях модели  $IDA_2$ . Во-первых, подобно тому как двумерная диаграмма Юнга описывает некоторое ранговое распределение, трёхмерной диаграммой Юнга можно было бы описать некое распределение, составленное по двум признакам (скажем, распределение потоков информации по интенсивности и времени задержки пакета).



Во-вторых, можно воспользоваться интересной интерпретацией трёхмерной диаграммы Юнга, данной в [29]. В этой работе трёхмерная диаграмма Юнга представляется как последовательность двумерных диаграмм Юнга, такая, что

$$\dots \subset \lambda(-2) \subset \lambda(-1) \subset \lambda(0) \supset \lambda(1) \supset \lambda(2) \supset \dots$$

Иными словами, разбиение растёт до середины цепочки, а затем уменьшается. Позже в [110] процесс, описываемый такой последовательностью, был назван процессом Шура. Допустим, задано некоторое ранговое распределение потоков информации, характеризуемое двумерной диаграммой Юнга. Составим цепочку, подобную представленной выше, такую, что рассматриваемая диаграмма находится в её середине. Тогда полученная цепочка и, следовательно, плоское разбиение, даёт процесс роста и затем уничтожения данного распределения. То есть, переходя от «среза» к «срезу» трёхмерной диаграммы Юнга, мы будем видеть процесс перехода сети от начального состояния к заданному, когда к сети подключаются всё новые пользователи и интенсивность потоков растёт, а затем его разрушения, когда загруженность сети спадает. Рассмотрение макросостояния такого процесса как окрестности в смысле  $IDA_2$  трёхмерной диаграммы Юнга даст нам различные его варианты, а макросостояние с наибольшей окрестностью даст наиболее вероятную совокупность сценариев динамики загруженности сети.

## Основные результаты и выводы

$IDA_2$ –система — обобщение  $IDA_1$ –системы, в котором элементы являются неразличимыми, а состояния образуют двумерный массив. Условие, накладываемое на число ближайших соседей элемента системы, де-

дает заполнение состояний упорядоченным. Микросостояние системы из  $n$  элементов описывается плоским разбиением  $\lambda$  числа  $n$ . В отличие от одномерного случая,  $IDA_2$ –система не может быть эквивалентным образом представлена как двумерная система с неразличимыми элементами и состояниями.

Макросостояния определяются как окрестности микросостояний. Вероятность макросостояния с центром в диаграмме  $\lambda$  пропорциональна ёмкости окрестности  $\lambda$ . В данной работе рассмотрены единичные окрестности микросостояний.

По аналогии со случаем двумерных диаграмм, найдено выражение для ёмкости единичной окрестности трёхмерной диаграммы Юнга  $\lambda$ . Выяснено, что равновесные диаграммы принадлежат множеству так называемых *максимальных* диаграмм. Для числа клеток  $n = n_{si} = n_s + T_{s+1} - T_{s-i+1}$  нам известны выражение для ёмкости окрестности и точный вид равновесных диаграмм. При  $n_{si} < n < n_{s,i+1}$  ёмкость окрестности равновесной диаграммы заключена между ёмкостями окрестностей равновесных диаграмм  $\lambda_{00}^{(si)}$  и  $\lambda_{00}^{(s,i+1)}$ .

Модель  $IDA_2$ –системы может оказаться полезной при анализе ранговых распределений по двум параметрам, а также при поиске наиболее вероятных сценариев формирования и разрушения заданного одномерного рангового распределения, например, распределения каналов связи по нагрузке. Кроме того, с помощью этой модели могут исследоваться такие системы с упорядоченным заполнением состояний, как рост кристаллов, процесс адсорбции или рост колонии микроорганизмов.

### 3.4. Доказательства основных теорем

**Доказательство теоремы 5.** Зафиксируем количество гнёзд  $k$  и построим диаграмму с максимальным при данном  $k$  количеством выступов;

число клеток может быть любым. Вначале учтём, что три гнезда, расположенные в крайних по координатным осям точках диаграммы, присутствуют при любом количестве выступов. Эти гнезда — внешние по отношению к диаграмме, а все остальные — внутренние в том смысле, что они так или иначе заключены между выступами.

Построение удобно проводить, пользуясь двумерной проекцией диаграммы. На проекции для всех внутренних гнёзд выходящие из них линии не могут бесконечно идти в сторону возрастания координаты и должны рано или поздно сделать поворот в сторону её уменьшения. Поэтому каждое внутреннее гнездо на проекции должно быть окружено выступами с двух сторон. Если предположить, что никакие два гнезда не имеют общих выступов, получаем  $m = 2(k - 3)$  выступов.

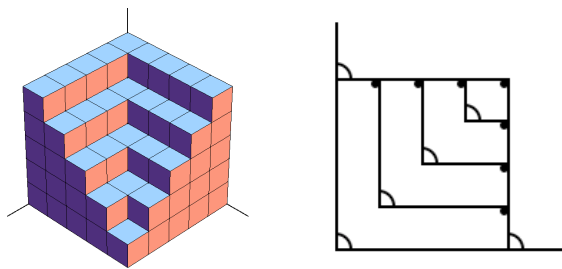


Рис. 3.17. Одна из возможных диаграмм с наибольшим числом выступов на заданное количество гнёзд и её проекция.

Проекция диаграммы заключена внутри некоторого прямоугольника. В точке этого прямоугольника с максимальными координатами всегда может быть помещён дополнительный выступ, линии из которого не ведут ни к одному внутреннему гнезду (если бы такие гнезда были, то

их можно было бы окружить другими выступами и координаты рассматриваемого выступа перестали бы быть максимальными). Поскольку этот выступ имеет наибольшие координаты, такой выступ может быть только один. Поэтому окончательно для максимального числа выступов на заданное количество гнёзд получаем  $m = 2(k - 3) + 1$ . На рис. 3.17 представлена одна из возможных диаграмм с таким числом выступов и её проекция. Выразив  $k$ , получим оценку для количества гнёзд диаграммы

при заданном числе выступов:

$$k \geq \frac{m-1}{2} + 3.$$

С учётом того, что  $k$  — целое число, приходим к выражению из теоремы 5.

Теорема доказана. ■

**Лемма 6** Пусть имеются диаграммы  $\lambda$  и  $\lambda'$ . Если  $m' \leq m-2$  и  $k' \leq k-2$ , то  $N' < N$ .

**Доказательство** проводится элементарным вычислением с использованием формулы (3.2), а также с учётом теоремы 5.

**Лемма 7** Если  $\lambda \supset \lambda^{(s)}$  и  $n = n_{si} + j$ ,  $i = 0, \dots, s$ ,  $j = 0, \dots, s-i$ , то  $m \leq m_{si}$  и  $k \leq k_{si}$ . Равенство достигается на диаграммах  $\lambda_j^{(si)}$ .

**Доказательство.** Докажем лемму сначала для частного случая  $n = n_{si}$ .

Предположим, что клетки сверх пирамидальной диаграммы расположены не так, как в  $\lambda^{(si)}$ . Допустим, например, что они могут ложиться на оболочки сверх  $(s+1)$ -й. Но тогда, так как на более высоких оболочках все ряды длиннее, чем соответствующие ряды на  $(s+1)$ -й оболочке, имеющих  $T_{s+1} - T_{s-i+1}$  клеток поверх  $\lambda^{(s)}$  хватит для заполнения менее, чем  $i$  рядов, поэтому число выступов и число гнёзд увеличатся меньше, чем на  $i$ , по сравнению с пирамидальной диаграммой, т. е. получим  $m < m_{si}$  и  $k < k_{si}$ .

Если же все новые клетки по-прежнему расположены на одной оболочке, но занимают не ровно  $i$  рядов, а больше, то некоторые ряды заполняются частично. В качестве примера рассмотрим случай, когда частично заполнены два последних ряда с номерами  $i$  и  $i+1$ . Полностью заполненными здесь являются  $(i-1)$  рядов; при частичном же заполнении двух последующих рядов количества выступов и гнёзд останутся прежними

или уменьшатся. Поэтому получаем для выступов  $m \leq T_s + i - 1$ , для гнёзд  $k \leq T_{s+1} + i - 1$ . Видим, что  $m < m_{si}$ ,  $k < k_{si}$ .

В случае  $n_{si} < n < n_{s,i+1}$  в диаграмме могут быть целиком заполнены только  $i$  рядов, а остальные заполнены частично, причём клетки сверх заполненных рядов всегда можно расположить так, чтобы число выступов в диаграмме не уменьшилось. Следовательно, для диаграмм  $\lambda_j^{(si)}$  число выступов снова оказывается  $m \leq m_{si}$ , а число гнёзд  $k \leq k_{si}$ . Лемма доказана. ■

**Доказательство теоремы 7.** В лемме 7 доказано, что диаграммы  $\lambda_j^{(si)}$  обладают наибольшим числом выступов и гнёзд среди диаграмм, полностью содержащих в себе пирамидальную. Ниже мы докажем, что если в диаграмме с числом клеток  $n_{si} \leq n < n_{s,i+1}$ ,  $i = 0, \dots, s$ , найдётся хотя бы один столбец  $\lambda_{xy}$ , такой, что  $\lambda_{xy} < \lambda_{xy}^{(s)}$ , то такая диаграмма не является максимальной; именно, для числа выступов  $m$  и числа гнёзд  $k$  такой диаграммы справедливы соотношения:  $m \leq m_{si}$  и  $k < k_{si}$ .

Ход доказательства теоремы будет следующий. Рассмотрим произвольную диаграмму  $\lambda_j^{(si)}$  и уменьшим произвольный её столбец или группу столбцов на единицу по сравнению с соответствующими столбцами  $\lambda^{(s)}$ . Верхние клетки этих столбцов переставим на наиболее выгодные в смысле числа выступов и гнёзд позиции. Докажем, что при этом число выступов и число гнёзд или хотя бы только число гнёзд уменьшится по сравнению с исходной диаграммой, т. е. полученная диаграмма не является максимальной.

Так как число выступов и гнёзд в диаграмме увеличивается при заполнении клетками очередного ряда, те клетки, которые взяты с вершин столбцов пирамидальной диаграммы, должны ставиться так, чтобы заполнить как можно больше рядов.

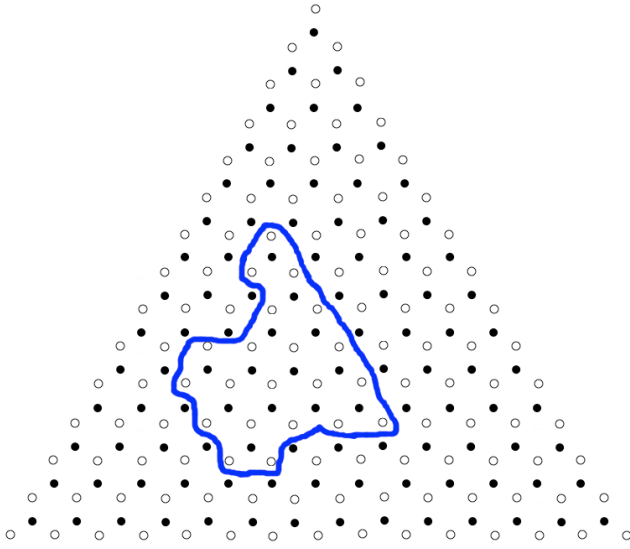


Рис. 3.18. К теореме 7: выступы (чёрные кружки) и гнезда (белые кружки) пирамидальной диаграммы образуют треугольные решётки. Обведена возможная область, с которой берутся клетки.

Пусть последний заполненный сверх пирамидальной диаграммы ряд имеет номер  $i - 1$  и ёмкость  $s - i + 3$ . Предположим, что для заполнения следующего ряда ёмкостью  $s - i + 2$  недостаёт некоторого количества клеток  $q_0$ . Для заполнения этого и, возможно, последующих рядов мы взяли клетки с произвольных столбцов диаграммы, имевших высоту  $\lambda_{xy}^{(s)}$ . Число этих клеток обозначим  $q = \sum q_t, t = 0, \dots, p$ .

Подсчитаем, на сколько выступов и гнёзд стало меньше в диаграмме, когда были убраны вершинные клетки упомянутых столбцов; затем выясним, сколько новых выступов и гнёзд возникло при перестановке этих клеток для заполнения рядов сверх пирамидальной диаграммы, и покажем, что от такой перестановки диаграмма перестанет быть максимальной.

У пирамидальной диаграммы вершины выступов лежат в одной плоскости, образуя треугольную решётку. Вершинные точки тех клеток, которые мы решили убрать, образуют в этой плоскости некоторую область. Она может быть совершенно произвольной. Мы обсудим случай, когда все взятые клетки принадлежат к единственной односвязной области, «островку». Другие случаи рассматриваются аналогично; о возникающих в этих случаях изменениях будет сказано позже. Если изобразить в той же плоскости гнёзда, прилежащие к вершинам выступов, получатся две наложенные друг на друга треугольные решётки; каждый элемент одной решётки имеет трёх ближайших соседей из другой решётки. Эти решётки

с отмеченными островком выступов и прилежащими к ним гнёздами показаны на рис. 3.18. Область из выступов может быть разбита на строчки величиной  $q_t$ . Нумерацию строк начнём с той строки, у которой с внешней стороны гнёзд больше, чем выступов. Для пирамидальной диаграммы легко сосчитать все имеющиеся в области выступы и гнёзда:

	выступы	гнёзда	
		$q_0 + 1$	
$q_0$		$\max\{q_0, q_1 + 1\}$	
$q_1$		$\max\{q_1, q_2 + 1\}$	
$q_2$		$\max\{q_2, q_3 + 1\}$	
...		...	
$q_{p-1}$		$\max\{q_{p-1}, q_p + 1\}$	
$q_p$		$q_p$	

Когда мы убираем с диаграммы одну клетку (являющуюся одновременно и выступом), на её месте остаётся гнездо. Следовательно, на месте убранных  $\sum q_t$  выступов останется  $\sum q_t$  гнёзд. Между этими гнёздами будут заключены оставшиеся в этой области выступы (в решётке каждый выступ окружён тремя гнёздами). Таким образом, остаётся:

гнезда	выступы
$q_0$	$\min\{q_0 - 1, q_1\}$
$q_1$	$\min\{q_1 - 1, q_2\}$
$q_2$	$\min\{q_2 - 1, q_1\}$
...	...
	$\min\{q_{p-1} - 1, q_p\}$
$q_p$	

Из всех переставленных клеток нас прежде всего будут интересовать  $q_0$  клеток, дополняющие  $i$ -й ряд диаграммы. В таблице эти клетки показаны отдельной строкой, но, поскольку мы рассматриваем их независимо от остальных переставляемых клеток, в принципе, они могут быть взяты из любых мест рассматриваемой области, при этом логика нижеследующего доказательства сохраняется. Когда с диаграммы убраны  $q_0 - 1$  выступов, в области, откуда они убраны, как можно видеть из таблиц, осталось никак не более  $q_0 - 2$  выступов и  $q_0 - 1$  гнезд. С другой стороны, этих клеток ещё недостаточно для заполнения последнего незаполненного ряда. Поэтому если  $\sum q_t < q_0$ , то ни при какой перестановке этих клеток увеличения числа выступов и гнезд добиться нельзя. Если переставить все  $q_0$  клеток, то на их месте останется не более чем  $q_0 - 1$  выступ и пропадёт  $q_0 + 1$  гнезд (в случае, если эти выступы лежат на одной строке), а  $i$ -й ряд будет заполнен, т. е. общее число выступов не изменится:  $m' = m$ , — зато число гнезд уменьшится. Ясно, что такая диаграмма перестанет быть максимальной.

Теперь проверим, будет ли увеличиваться количество выступов и гнезд при перестановке оставшихся  $\sum q_t$ ,  $t = 1, \dots, p$ , клеток для полного за-



полнения некоторого числа рядов. В результате перестановки вышеназванных клеток на месте той области, с которой они взяты, останется  $\sum q'_t \leq \sum_{t=1}^{p-1} (q_t - 1) = \sum_{t=1}^p q_t - q_p - (p - 1)$  выступов, то есть выступов в этой области стало меньше по крайней мере на  $q_p + p - 1$ . Легко убедиться, что гнёзд стало меньше по крайней мере на  $p + q_p$ . Теперь посмотрим, сколько выступов и гнёзд может возникнуть, когда эти клетки будут переставлены для заполнения рядов.

Пусть переставленными клетками заполнено  $l$  новых рядов. Для определённости допустим, что заполнение начинается прямо с ряда ёмкостью  $(s + 1)$ . Это будет, фактически, доказательством максимальности пирамидальной диаграммы, а другие случаи могут быть рассмотрены аналогично. Тогда эти  $l$  рядов имеют следующие длины:  $r_1 = s + 1, r_2 = s, \dots, r_l = s - l + 2$ . Естественно, что клетки для этого могли быть взяты только с последующих рядов диаграммы с длинами:  $q_1 \leq s - l + 2 - 1 = s - l, q_2 \leq s - l - 1, \dots, q_p \leq s - l + 2 - p$ . Поэтому должно выполняться условие  $p > l$ . При заполнении  $l$  рядов возникло  $l$  новых выступов и  $l$  новых гнёзд. С другой стороны, в нашей области выступов стало меньше по крайней мере на  $q_p + p - 1$ . Поэтому в результате во всей диаграмме стало меньше на  $q_p + p - 1 - l > 0$  выступов и на  $q_p + p - l > 1$  гнёзд, следовательно, полученная диаграмма не является максимальной.

Теперь, как и обещали, скажем несколько слов о том, что изменится, если рассматриваемая область, из которой берутся клетки, не односвязна. Чтобы правильно сосчитать пропадающие и остающиеся выступы и гнёзда, снова разобьём нашу область на строчки. Пропадающие выступы подсчитываются тривиально. Гнёзда считаются по тому же принципу, что и выступы, с той разницей, что прибавляется одно гнездо всякий раз, когда линия, соединяющая выступы в строчке, сначала выходит за пределы области, а потом вновь заходит в неё, так что пропавших гнёзд становится ещё больше. В остальном доказательство проводится вполне аналогично

случаю односвязной области.

Ответим ещё на один вопрос, который мог возникнуть при чтении настоящего доказательства: почему столбцы диаграммы уменьшаются именно на единицу? Столбец, безусловно, может быть уменьшен и на большее число клеток, однако при этом, для сохранения условия невозрастания величин столбцов, должны быть уменьшены также и столбцы с большими координатами. Поэтому можно рассмотреть процесс уменьшения столбцов поэтапно. Сначала уменьшим на единицу все столбцы, с которых будут переставляться клетки: и те, которые требуется уменьшить на единицу, и те, которые должны уменьшиться больше, чем на единицу. Как уже доказано, перестановка клеток с этих столбцов приведёт к уменьшению числа выступов или гнёзд. Затем переставим по одной клетке с тех столбцов, которые нужно уменьшить ещё, и так далее. Совершенно аналогично тому, как изложено в настоящем доказательстве, можно показать, что на каждом этапе количество выступов или гнёзд будет уменьшаться.

Теорема доказана. ■

### **Доказательство теоремы 9.**

Это доказательство опирается на формулу (3.2) для вычисления единичной окрестности диаграммы, а также соотношение между количествами выступов и гнёзд из теоремы 5 и проводится независимо от прочих утверждений.

Пусть в диаграмме  $\lambda$  выступ с номером  $j$  имеет вычет, равный нулю. Докажем, что при перестановке вершины этого выступа на крайнюю точку диаграммы по одной из координатных осей окрестность диаграммы увеличится.

Равенство вычета нулю означает, что при удалении вершины  $j$ -го выступа в диаграмме станет по крайней мере на одно гнездо больше:

$$k' \geq k + 1.$$

Пусть  $x = 1, 2, 3$  — число выступов, возникших на месте  $j$ -го после того, как была убрана его вершина. Кроме того, при перестановке вершины  $j$ -го выступа в крайнюю точку диаграммы может образоваться новый выступ. Пусть  $y = 0, 1$  — число новых выступов, образовавшихся в крайней точке диаграммы.

Тогда число выступов в результирующей диаграмме  $m' = m + x + y - 1$ .

Так как при возникновении нового выступа в крайней точке диаграммы добавляется хотя бы одно новое гнездо, можно записать:

$$k' \geq k + y + 1.$$

Докажем лемму при всех возможных значениях  $x$  и  $y$ . Для этого вычислим разницу ёмкостей окрестностей полученной и исходной диаграмм и убедимся в том, что она положительна:  $N' - N = m'k' - mk - \sum p'_i + \sum p_i > 0$ .

Априори о выступах диаграммы мы знаем следующее:  $\sum p'_i \leq 3m'$ ;  $\sum p_i \geq 0$ .

Этого достаточно, чтобы показать, что лемма верна при  $y = 1, x \geq 2$ .

При рассмотрении остальных случаев мы будем анализировать вычеты всех интересующих нас выступов и обращать внимание на общее количество выступов.

Выразим суммарный вычет полученной диаграммы через суммарный вычет исходной:  $\sum p'_i \leq \sum p_i + 3x + 3y$ , где  $3x$  — максимальная сумма вычетов  $x$  выступов, возникших на месте  $j$ -го,  $3y$  — наибольшее значение вычета выступа, который может возникнуть в крайней точке диаграммы.

В случаях  $y = 0, x = 2, 3$  выполняется условие:  $m \geq 2$ , так как, если при перестановке клетки в край диаграммы не возникло нового выступа,

это значит, что на этом месте уже существовал выступ, отличный от интересующего нас выступа с нулевым вычетом. Согласно теореме 5, имеем  $k \geq 4$ . При выполнении этих условий вычисления по формуле (3.2) дают  $N' > N$ .

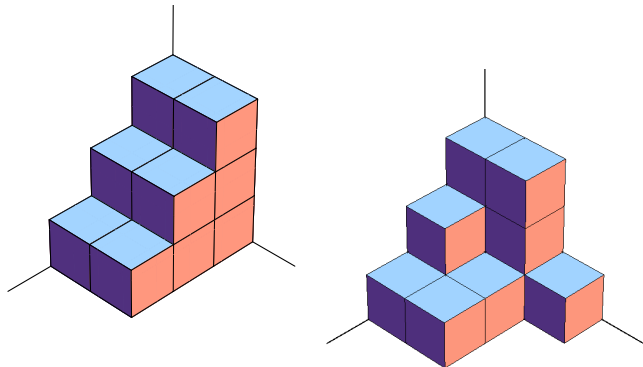


Рис. 3.19. К теореме 9: слева — пример диаграммы с выступами, у которых  $x = 1$ . Справа: при  $x = 1$  всегда возможно  $y = 1$ .

Поговорим подробнее о случае  $x = 1$ . Мы имеем выступ, к вершине которого не прилежит ни одно гнездо, но при удалении вершинной клетки которого число выступов не увеличивается. Это возможно, когда вершинная клетка выступа имеет максимальную для данной диаграммы

координату по некоторой оси и данный выступ принадлежит к некоторой цепочке выступов, вершины которых имеют также максимальную координату (см. рис. 3.19). Минимальное число выступов в этом случае будет равно двум, т. е.  $m \geq 2$ ,  $k \geq 4$ . Такой специфический вид диаграммы даёт следующую возможность: вершинная клетка интересующего нас выступа может быть переставлена в такую крайнюю точку, в которой обязательно возникнет новый выступ. Именно, эту вершинную клетку всегда можно переставить в гнездо, лежащее на координатной оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежит цепочка вершин выступов (рис. 3.19). Получается, что при  $x = 1$  всегда возможно  $y = 1$ . Вычисления по формуле (3.2) снова дают  $N' > N$ . Теорема доказана. ■

**Доказательство теоремы 8.** Рассмотрим максимальную диаграмму  $\lambda_j^{(si)}$ ,  $i = 0, \dots, s$ , и диаграмму  $\lambda'$ , полученную некоторой перестановкой клеток из  $\lambda_j^{(si)}$ . Надо доказать, что если  $k' < k$  или  $m' < m$ , то и  $N' < N$ .

Прежде всего, отметим, что если  $m' = m - l$ , то  $k' \leq k - l$ . Это следует из

того, что каждый выступ в максимальной диаграмме окружён двумя или тремя гнёздами, а при его удалении остаётся только одно гнездо. Случай  $m' \leq m - 2$ ,  $k' \leq k - 2$  рассмотрен в лемме 6, поэтому докажем теорему для случая  $m' = m - 1$ ,  $k' \leq k - 1$ . О суммарных вычетах интересующих нас диаграмм нам, в общем случае, известно следующее:  $\sum p_i \leq 3m$ ,  $\sum p'_i \geq m'$ , причём для  $\Delta n > 0$  имеем  $\sum p_i < 3m$ , а при  $s = 1$  имеем  $\sum p_i \leq 2m$ . О числе гнёзд максимальной диаграммы мы можем сказать, что  $k = m + s + 1$ . Кроме того,  $k' \leq k - 2$  при  $\Delta n = 0$ . Учитывая эти соображения, с использованием (3.2) получаем  $N - N' > 0$ .

Остался нерассмотренным случай, когда  $k' \leq k - 1$ , а  $m' = m$ .

Каким способом можно уменьшить количество гнёзд, не уменьшая количество выступов? Так, как описано в доказательстве теоремы 7: допустим, с тех столбцов диаграммы, которые равны столбцам пирамидальной диаграммы, взята строчка клеток длиной  $q_0$ , так, чтобы до конца заполнить некоторый ряд ёмкостью  $s - i + 2$ . В этом случае в диаграмме станет на  $q_0$  гнёзд меньше, а число выступов останется неизменным. Так как в исходной диаграмме существовал частично заполненный ряд, а в новой диаграмме имеется заполненный ряд, для суммарных вычетов имеем  $\sum p_i < 3m$ ,  $\sum p'_i > m'$ ,  $m' = m$ . Для  $q_0 \geq 2$  и, стало быть,  $k' \leq k - 2$ , получаем  $N' < N$ . Остаётся рассмотреть случай  $q_0 = 1$  и  $k' = k - 1$ . Для ёмкостей окрестностей, используя (3.2), получаем  $N - N' = m + P - P'$ , где  $P$  и  $P'$  — суммарные вычеты соответственно исходной и полученной диаграмм.

В исходной диаграмме полностью заполнен  $(i - 1)$ -й ряд с  $s - i + 3$  выступами, и вычеты этих выступов равны двум, а клетки с частично заполненного  $i$ -го ряда можно расположить по углам диаграммы, так, чтобы вычеты крайних выступов были равны единице. В полученной диаграмме вычеты всех выступов на  $(i - 1)$ -м ряду стали равны трём, а на следующем ряду вместо  $s - i + 1$  выступов с вычетом 3 появилось  $s - i + 2$  выступов с

вычетом 2. Для заполнения  $i$ -го ряда не хватает одной клетки, и эта клетка берётся  $s$ -й оболочки или с уже заполненных рядов  $(s + 1)$ -й оболочки. У выступов, соседних с убранным, вычет может уменьшиться на единицу. Максимальное количество таких выступов равно шести. Исходя из этого, получаем  $P' \geq P + (s - i + 3) - 3(s - i + 1) + 2(s - i + 2) - 6 = P - 2$ . Таким образом,  $N - N' \geq m - 2 > 0$  при  $m \geq 3$ . Для  $m < 3$  имеем  $s = 1$ , т. е. ряды во второй оболочке. Единственная ситуация, когда клетка здесь может быть переставлена с сохранением числа выступов, — это случай  $i = 1, j = 0$  (так как  $j = 1$  означает заполнение  $(s + 1)$ -й оболочки). Но при перестановке клетки с первого ряда на второй и число выступов, и число гнёзд остаются неизменными, следовательно, этот случай рассматривать не требуется. Видим, что во всех случаях при уменьшении числа выступов или числа гнёзд получаем диаграмму, которая имеет меньшую окрестность, чем исходная, и не является, таким образом, ни максимальной, ни равновесной. Теорема доказана. ■

# Заключение

**Основные результаты диссертационной работы** кратко можно сформулировать следующим образом.

1. Предложены модели макроскопических систем с неразличимыми элементами, упорядоченным образом распределяемыми по различным состояниям (IDA – системы). Микросостояние IDA – системы однозначно задаётся диаграммой Юнга, а макросостояния представляют собой окрестности микросостояний. Построены модели макроскопических систем для единичных окрестностей.
2. Предложена модель сети Интернет на основе ранговых распределений. Показано, что её вероятностные свойства описываются моделью одномерной IDA – системы, а динамика может описываться моделью двумерной IDA – системы.
3. Получены явные выражения для ёмкостей единичных окрестностей микросостояний одномерных и двумерных IDA – систем.
4. Для одномерной IDA – системы разработан алгоритм, позволяющий построить все равновесные диаграммы с заданным числом клеток. Получено явное выражение для ёмкости окрестности равновесной диаграммы с произвольным числом клеток. В одномерной IDA – системе выделены оболочки, при заполнении которых наблюдается скачок ёмкости окрестности равновесной диаграммы.

5. Для двумерных IDA – систем найдено множество максимальных диаграмм, к которому принадлежат все равновесные диаграммы. Установлены общие свойства равновесных диаграмм. Получены выражения для ёмкостей окрестностей равновесных диаграмм в случае, когда число клеток принимает значения  $n = n_{si} = n_s + T_{s+1} - T_{s-i+1}$ . Для остальных значений  $n$  найдены границы, в которых заключена ёмкость окрестности равновесной диаграммы.



# Список условных обозначений

$\lambda \vdash n,  \lambda  = n$	— $\lambda$ является разбиением $n$
$\tilde{\lambda}$	— разбиение, сопряжённое $\lambda$
$\text{Card } A,  A $	— число элементов в конечном множестве $A$
$h(i, j)$	— длина крюка клетки $(i, j)$ , равная $(\lambda_i - j) + (\tilde{\lambda}_j - i) + 1$
$\lambda \supseteq \mu$	— $\lambda_i \geq \mu_i$ для всех $i \geq 1$
$\mathbb{Y}$	— множество всех диаграмм Юнга, упорядоченное по включению
$\mathbb{Y}_n$	— множество диаграмм Юнга с $n$ клетками
$\dim \lambda$	— размерность диаграммы $\lambda$
$p(n)$	— количество разбиений числа $n$
$\pi(n)$	— количество плоских разбиений числа $n$
$T_s$	— $s$ -е треугольное число, равное $s(s + 1)/2$
$n_s$	— $s$ -е пирамидальное (тетраэдральное) число, равное $s(s + 1)(s + 2)/6$

# Литература

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. 3-е, дополненное изд. Москва: Наука, 1976. Т. V. Статистическая физика. Часть 1.
- [2] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Москва: Наука, 1976. Т. IX. Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния.
- [3] Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978.
- [4] Имельбаев Ш. С., Шмульян Б. Л. Моделирование стохастических процессов коммуникационных систем // Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. Москва: Наука, 1978. С. 170–234.
- [5] Волкова В. Н., Воронков В. А., Денисов А. А. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи. Москва: Радио и связь, 1983.
- [6] Попков Ю. С. Теория макросистем: равновесные модели. М.: Либроком, 2013. 320 с.

- [7] Волкова В. Н., Денисов А. А. Теория систем и системный анализ. Москва: Юрайт, 2013. 624 с.
- [8] Кикоин А. К., Кикоин И. К. Молекулярная физика. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. 480 с.
- [9] Shannon C. E. A mathematical theory of communication // The Bell System Technical Journal. 1948. Vol. 27. P. 379–423, 623–656.
- [10] Попков Ю. С. Макросистемные модели динамических стохастических сетей и GRID-технологии // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 143–163.
- [11] Попков Ю. С. Макросистемы и GRID-технологии: моделирование динамических стохастических сетей // Проблемы управления. 2003. № 3. С. 10–20.
- [12] Попков Ю. С. Стохастическая микро- и макродинамика пространственного экономического обмена // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. Т. 4. С. 30–38.
- [13] Popkov Y. S. Entropy concept for paramacrosystems with complex states // Entropy. 2012. Vol. 14. P. 924–944.
- [14] Попков А. Ю. Энтропийная модель инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 179–190.
- [15] Колесниченко А. В. Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ. 2013. № 033. 23 с.
- [16] Колесниченко А. В. К построению энтропийной транспортной модели на основе формализма неэкстенсивной статистики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 5. С. 48–64.

- [17] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш. Курс теории информации. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 416 с.
- [18] Кудряшов Б. Д. Теория информации. Санкт-Петербург: Питер, 2009. 320 с.
- [19] Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. Москва: Высшая школа, 2000. 383 с.
- [20] Курочкин И. И. Разработка и анализ методов последовательной прокладки путей в сетях передачи данных. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. Ph.D. thesis: ИСА РАН. Москва, 2010.
- [21] Антонова А. А. Исследование сложных нестационарных телекоммуникационных систем и разработка метода управления потоками данных. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. Ph.D. thesis: ИСА РАН. Москва, 2012.
- [22] Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985.
- [23] MacMahon P. A. Combinatory analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1916. Т. 2. (reprinted Chelsea, New York, 1960).
- [24] Эндрюс Г. Теория разбиений. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
- [25] Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting shape of Young tableaux // Soviet Math. Dokl. 1977. Vol. 18. P. 527–531.

- [26] Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы // *Функциональный анализ и его приложения*. 1985. Т. 19, № 1.
- [27] Kerov S. V. Interlacing measures // *Amer. Math. Soc. Transl. Providence, RI*, 1998. Vol. 181 of 2. P. 35–83. (*Adv. in Math. Sci*, vol. 35 (G. I. Olshanski, ed.)).
- [28] Borodin A., Okounkov A., Olshanski G. On asymptotics of the Plancherel measures for symmetric groups // *J. Amer. Math. Soc.* 2000. Vol. 13, no. 3. P. 481–515.
- [29] Okounkov A. Symmetric functions and random partitions // *Symmetric Functions 2001: Surveys of Developments and Perspectives*. Vol. 74 of *NATO Science Series*. P. 223–252.
- [30] Borodin A., Olshanski G. Z-measures on partitions, Robinson–Schensted–Knuth correspondence, and  $\beta = 2$  random matrix ensembles // *Random matrix models and their applications* / под ред. Pavel M. Bleher, Alexander R. Its. *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. 2001.
- [31] Каплан И. Г. Симметрия многоэлектронных систем. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
- [32] Comtet A., Majumdar S. N., Ouvry S. Integer partitions and exclusion statistics // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2007. Vol. 40, no. 37. P. 11255.
- [33] Integer partitions and exclusion statistics: limit shapes and the largest parts of Young diagrams / A. Comtet, S. N. Majumdar, S. Ouvry et al. // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2007. Vol. 2007. P. P10001.

- [34] Temperley H. N. V. Statistical mechanics and the partition of numbers II. The form of crystal surfaces // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1952. 10. Т. 48. С. 683–697.
- [35] Okounkov A., Reshetikhin N., Vafa K. Quantum Calabi-Yau and classical crystals // Progress in Mathematics. 2006. Vol. 244. P. 597–618.
- [36] Буховец А. Г. Системный подход и ранговые распределения в задачах классификации // Вестник ВГУ. 2005. № 1. С. 130–142.
- [37] Буховец А. Г. Системная интерпретация результатов классификационных задач // Социология: методология, методы, математическое моделирование. 2006. Т. 22. С. 114–144.
- [38] Буховец А. Г. Классификационная задача как задача системного анализа // Вестник ВГУ. 2006. № 1. С. 23.
- [39] Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [40] Шрейдер Ю. А., Шаров А. А. Системы и модели. Кибернетика. Москва: Радио и связь, 1982.
- [41] Дорофеев Д. Л., Попова А. Е. Парамакросистемы с упорядоченным заполнением состояний. Часть I // Труды ИСА РАН. 2013. Т. 63, № 4. С. 16–24.
- [42] Дорофеев Д. Л., Елфимов С. В., Попова А. Е. Парамакросистемы с упорядоченным заполнением состояний. Часть II: трёхмерные системы // Труды ИСА РАН. 2014. Т. 64, № 1. С. 3–8.
- [43] Dorofeev D. L., Popova A. E., Elfimov S. V. Paramacrosystems with arrangement // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering. 2013. Vol. 13. P. 501–516.

- [44] Попова А. Е., Дорофеев Д. Л. IDA-макросистемы. Вероятности состояний, равновесные состояния // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика / Воронежская государственная лесотехническая академия. Т. 2. Воронеж: 2014. С. 192–195.
- [45] Попова А. Е. Новые вероятностные меры на двумерных и трёхмерных диаграммах Юнга // Наука и современность — 2014: сборник материалов XXX Международной научно-практической конференции / под ред. Чернова С. С. Издательство ЦРНС. Новосибирск: 2014. С. 171–176.
- [46] Попова А. Е. Диаграммы Юнга: новая вероятностная мера. Свойства равновесных диаграмм // Научная дискуссия: инновации в современном мире: сборник статей по материалам XXVI международной заочной научно-практической конференции / Изд. «Международный центр науки и образования». Т. 26. Москва: 2014. С. 5–9.
- [47] Попова А. Е. Макросистемы с упорядочением // Научный поиск: Материалы I Международной научно-практической конференции (15 июня 2014 г.) / под ред. Мамченко Ю. В. Изд. «Перо». Москва: 2014. С. 7–10.
- [48] Попова А. Е. Диаграммы Юнга: метрика, равновесные и максимальные диаграммы // Современное общество: проблемы, идеи, инновации: материалы III Международной научной конференции. Часть 1. / Центр научного знания «Логос». Ставрополь: 2014. С. 104–108.
- [49] Дорофеев Д. Л., Попова А. Е. Свид. 2013612658 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа для расчёта единичной окрестности двумерной диаграммы Юнга (PartitionNeighbourhood). Заявитель и

правообладатель — ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет». — № 2013610566; заявка 22.01.2013; зарегистрировано 11.03.2013, Реестр программ для ЭВМ. — 1 с.

- [50] Агошкова Е. Б., Ахлибининский Б. В. Эволюция понятия системы // Вопросы философии. 1998. № 7. С. 170–179.
- [51] Садовский В. Н. Система // Философский энциклопедический словарь / под ред. Л. Ф. Ильичёв. Москва: Советская энциклопедия, 1983.
- [52] Gaines B. R. General systems research: quo vadis // General Systems: Yearbook of the Society for General Systems Research. 1979. Vol. 24. P. 1–9.
- [53] Агошкова Е. Б. Категория «система» в современном мышлении // Вопросы философии. 2009. № 4. С. 57–71.
- [54] Волкова В. Н., Денисов А. А. Теория систем. Москва: Высшая школа, 2006.
- [55] Ансельм А. И. Основы статистической физики и термодинамики. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
- [56] Пугачёв В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. Москва: Физматлит, 1990.
- [57] Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. Москва: Высшая школа, 1982.
- [58] Суриков В. Н. Время жизни случайной двоичной последовательности (параллельной системы) // Дискрет. матем. 2010. Т. 22, № 2. С. 51–59.



- [59] Пройдакова Е. В., Федоткин М. А. Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 96–106.
- [60] Попков Ю. С. Теория макросистем (равновесные модели). М.: УРСС, 1999.
- [61] Беленький А. С. Исследование операций в сложных системах. Москва: Мир, 1992.
- [62] Лившиц В. Н. Оптимизация планирования и управления транспортными средствами. Москва: Транспорт, 1987.
- [63] Буре В. М., Мазалов В. В., Плаксина Н. В. Вычисление характеристик пассажиропотоков в транспортных системах // УБС. 2014. № 47. С. 77–91.
- [64] Symbolic stochastic dynamic systems viewed as binary N-step Markov chains / O. V. Usatenko, V. A. Yampol'sky, K. E. Kechedzhy et al. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 86, no. 061107.
- [65] Kechedzhy K. E., Usatenko O. V., Yampol'sky V. A. Rank distributions of words in additive many-step Markov chains and the Zipf law. 2004. [Online; accessed 20-August-2014]. URL: <http://arxiv.org/abs/physics/0406099>.
- [66] Вероятностная модель многомаршрутной задачи календарного планирования со стоимостными параметрами / Д. И. Голенко-Гинзбург, З. Ласло, С. М. Любкин [и др.] // Автоматика и телемеханика. 2002. № 10. С. 177–186.

- [67] Богоявленская О. Ю. Вероятностная модель алгоритмов протокола распределённого управления сети Интернет // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 119–129.
- [68] Николенко С. И., Фишков А. А. SCM: новая вероятностная модель поведения пользователей интернет-поиска // Тр. СПИИРАН. 2012. № 20. С. 72–100.
- [69] Литвинов В. А., Майстренко С. Я., Оксанич И. Н. Логико-вероятностная модель пошаговой подсказки в интерфейсе пользователя поисковой системы по ключевому слову // Математические машины и системы. 2011. Т. 1, № 2.
- [70] Дорофеев Д. Л., Зон Б. А., Попков Ю. С. Новые механизмы формирования макросостояний в макросистемах // Автоматика и телемеханика. 2008. Т. 2, № 63.
- [71] Дорофеев Д. Л., Зон Б. А., Попков Ю. С. Учёт априорной информации в парамакросистемах // Автоматика и телемеханика. 2008. Т. 10, № 30.
- [72] Greenberg O. W. Particles with small violations of Fermi or Bose statistics // Phys. Rev. D. 1991. Т. 43, № 12.
- [73] Исихара А. Статистическая физика. Москва: Мир, 1973.
- [74] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд. иностр. лит., 1963.
- [75] Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. 2 edition. Oxford University Press, 1995.
- [76] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. Москва: Мир, 2009. Т. 2.

- [77] Фултон У. Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. Москва: МЦНМО, 2006.
- [78] Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
- [79] Bressoud D. M. Proofs and confirmations: the story of the alternating sign matrix conjecture. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC: Cambridge University Press, 1999.
- [80] Fulmek M., Krattenthaler C. The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis, II // Europ. J. Combinatorics. 2000. Т. 21. С. 601–640.
- [81] Almkvist G. A rather exact formula for the number of plane partitions // Cont. Math. 1993. Vol. 145. P. 21–26.
- [82] Almkvist G. Asymptotic formulas and generalized Dedekind sums // Experimental Mathematics. 1998. Vol. 7, no. 4. P. 343–359.
- [83] Govindarajan Suresh, Prabhakar Naveen S. A superasymptotic formula for the number of plane partitions. 2013. [Online; accessed 10-May-2014]. URL: <http://arxiv.org/abs/1311.7227>.
- [84] Rovenchak A. Partition function formalism in the problem of multidimensional integer partitions // Computational Methods in Science and Technology. 2010. Vol. 16, no. 2. P. 187–190.
- [85] Prokhorov D., Rovenchak A. Asymptotic formulas for integer partitions within the approach of microcanonical ensemble // Condensed Matter Physics. 2012. Vol. 15, no. 3. P. 1–9.
- [86] Rovenchak Andrij. Enumeration of plane partitions with a restricted number of parts. 2014. [Online; accessed 10-May-2014]. URL: <http://arxiv.org/abs/1401.4367>.

- [87] Bruinier J. H., Ono K. Algebraic formulas for the coefficients of half-integral weight harmonic weak Maass forms // *Advances in Mathematics*. 2013. Vol. 246. P. 198–219.
- [88] Logan B. F., Shepp L. A. A variational problem for random Young tableaux // *Adv. Math.* 1977. Vol. 26. P. 206–222.
- [89] Dołęga Maciej, Śniady Piotr. Polynomial functions on Young diagrams arising from bipartite graphs. 2011. [Online; accessed 9-May-2014]. URL: <http://arxiv.org/abs/1105.2703>.
- [90] Aval Jean-Christophe, Féray Valentin, Novelli Jean-Christophe [и др.]. Quasi-symmetric functions as polynomial functions on Young diagrams. 2013. [Online; accessed 9-May-2014]. URL: <http://arxiv.org/abs/1312.2727>.
- [91] Kerov S. V. Separation of roots of orthogonal polynomials and the limiting shape of generic large Young diagrams: Tech. Rep.: 8: University of Trondheim, 1992. Preprint.
- [92] Керов С. В. Асимптотика разделения корней ортогональных многочленов // *Алгебра и анализ*. 1993. Т. 5, № 5. С. 68–86.
- [93] Керов Сергей Васильевич. Переходные вероятности континуальных диаграмм Юнга и проблема моментов Маркова // *Функциональный анализ и его приложения*. 1993. Т. 27, № 2. С. 32–49.
- [94] Vershik A. M. Asymptotic combinatorics and algebraic analysis // *Proc. Internat. Congress of Mathematicians. Zürich, Switzerland: Birkhäuser Verlag, 1995. С. 1384–1394.*

- [95] Вершик А. М. Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации // *Функциональный анализ и его приложения*. 1996. Т. 30, № 2. С. 19–39.
- [96] Bogoliubov N. M. Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model // *Journal of Physics A: General Physics*. 2005. Vol. 38. P. 9415.
- [97] Боголюбов Н. М. Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете // *Теоретическая и математическая физика*. 2007. Т. 150, № 2. С. 193–203.
- [98] Боголюбов Н. М. Четырёхвершинная модель и случайные укладки // *Теоретическая и математическая физика*. 2008. Т. 155, № 1. С. 25–38.
- [99] Попова А. Е. Системы с парастатистикой. Классификация и общее описание: Бакалаврская работа: Воронежский государственный университет. Воронеж, 2008. Руководитель: Дорофеев Д. Л.
- [100] Попова А. Е. Парамакросистемы с упорядочением: магистерская диссертация: Воронежский государственный университет. Воронеж, 2010. Руководитель: Дорофеев Д. Л.
- [101] Берри Р. С., Смирнов Б. М. Фазовые переходы и сопутствующие явления в простых системах связанных атомов // *УФН*. 2005. Т. 175, № 4.
- [102] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Москва: Мир, 1990. Т. 1.
- [103] Виленкин Н. Я. Комбинаторика. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.

- [104] Метод многоугольных чисел в процедуре сглаживания временных рядов / Ю. Я. Агранович, Н. В. Концевая, С. Л. Подвальный [и др.] // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 4(38). С. 30–34.
- [105] Агранович Ю. Я., Концевая Н. В., Хацкевич В. Л. Сглаживание временных рядов показателей финансовых рынков на основе метода многоугольных чисел // Прикладная эконометрика. 2010. № 3. С. 3–8.
- [106] Агранович Ю. Я., Концевая Н. В., Хацкевич В. Л. Метод многоугольных чисел в процедуре сглаживания временных рядов и приложения к исследованию показателей финансовых рынков // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, № 3. С. 71–81.
- [107] Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. Москва: Наука, 1990.
- [108] MacMahon P. A. Combinatory analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1915. Vol. 1.
- [109] Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твёрдого тела. М.: Мир, 1979.
- [110] Okounkov A., Reshetikhin N. Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram // J. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 13, no. 3. P. 481–515.