На правах рукописи

Карпикова Алина Вячеславовна

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2015

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Баскаков Анатолий Григорьевич.

Официальные оппоненты: Шульман Виктор Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, Вологодский государственный университет, кафедра высшей математики, профессор,

Ускова Наталья Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, кафедра высшей математики и физико-математического моделирования, доцент.

Ведущая организация: Южный федеральный университет.

Защита состоится 17 ноября 2015 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335. С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2777.

Автореферат разослан ” ” сентября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В диссертационной работе рассматриваются задачи дальнейшего развития метода подобных операторов и его применения к исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка с негладким комплексным потенциалом, определяемых периодическими и квазипериодическими краевыми условиями. Одним из самых распространенных методов исследования в теории возмущений линейных операторов является резольвентный метод, который основывается на представлении проекторов Рисса возмущенных операторов с помощью интегральной формулы Коши. Однако изучаемые операторы не всегда удовлетворяют условиям, необходимым для применения этого метода. В первую очередь это связано с оценкой проекторов, при получении оценок безусловной равносходимости спектральных разложений.

В качестве метода исследования выбран метод подобных операторов, который берёт своё начало с метода Пуанкаре нормальных форм для обыкновенных дифференциальных уравнений и тесно связан с методом А.М. Ляпунова кинематического подобия дифференциальных операторов, абстрактным вариантом замены Крылова-Боголюбова.

Впервые метод подобных операторов был изложен К.О. Фридрихсом для возмущенных самосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром. Дальнейшее своё развитие метод подобных операторов получил в работах А.Г. Баскакова и его учеников, который стал использовать технику абстрактного гармонического анализа линейных операторов.

Суть метода подобных операторов состоит в преобразовании исследуемого дифференциального оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам хорошо изученного оператора. Тем самым значительно упрощается изучение исследуемого оператора.

Метод подобных операторов применяется к исследованию спектральных свойств широкого класса дифференциальных операторов. Описанное в диссертации применение метода позволяет более глубоко изучить спектральные свойства исследуемого дифференциального оператора Штурма-Лиувилля: получить уточненную, по сравнению с известной ранее, асимптотику спектра.

Наиболее сильные результаты по асимптотике собственных значений оператора Хилла-Шрёдингера получены Марченко В.А.[1], для рассматриваемого нами дифференциального оператора, в случае вещественнозначного потенциала. Также отметим работы А.М. Савчука[2], и А.А. Шкаликова [3], в которых проведены исследования для потенциала из пространства W_2^{-1}, поэтому и оценки являются более грубыми по сравнению с приведенными в диссертации.

Недавние исследования ряда математиков (Х.Р.Мамедова, П. Джакова, Б.С. Митягина, А.А.Шкаликова, О.А.Велиева, Н.Дернека) по условиям спектральности дифференциальных операторов второго порядка показывали важность получения более точных асимптотических формул для собственных значений и уточненных оценок отклонений проекторов от классических систем проекторов. Получение таких уточненных формул для собственных значений изучаемых дифференциальных операторов важны при оценке лакун в спектре соответствующего оператора Хилла–Шредингера, рассматриваемого в $L_2(\mathbb{R})$, в случае периодического комплексного потенциала. Таким образом, тема диссертации является актуальной.

---

[1] Марченко В. А. Операторы Штурма Лиувилля и их приложения/ В. А. Марченко — М.: Наука, 1977. — С. 330.

[2] Шкаликов А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66. — № 6. — С. 897–912.

[3] Шкаликов А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами–распределениями / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Тр. ММО. — 2003. — № 64. — С. 159–212.

Цель работы.

1. Построение оператора преобразования оператора Штурма-Лиувилля к оператору с блочно-диагональной матрицей.

2. Спектральный анализ дифференциальных операторов, возмущенных оператором Гильберта–Шмидта:

   - получение асимптотических оценок собственных значений;
   - получение оценок спектральных проекторов и оценок равносходимости спектральных разложений.

Методы исследования. Для исследования спектральных свойств рассматриваемых операторов используется метод подобных операторов, спектральная теория дифференциальных операторов.

Научная новизна. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Отметим некоторые из них:

1. Разработана абстрактная схема применения метода подобных операторов для операторов, близких к рассматриваемому оператору Штурма–Лиувилля.

2. Исследованы спектральные свойства несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля с негладким потенциалом, задаваемого периодическими и квазипериодическими краевыми условиями:

   - получены новые асимптотические оценки для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля;
   - получены оценки отклонений спектральных проекторов возмущенного и невозмущенного операторов (получены оценки безусловной равносходимости спектральных разложений).

Практическая и теоретическая значимость. Полученные в работе результаты носят теоретический характер и строго обоснованы широким использованием методов спектральной теории операторов и дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Крымских осенних математических школах [6], [8], [9], на Крымской международной математической конференции [7], [10], на Воронежской зимней математической школе С.Г.Крейна [4], на весенней математической школе «Понтрягинские чтения XXI» [5], на математическом интернет-семинаре ISEM (Германия, Блаубойрен) [11], на конференции, посвященной 100-летию Б.М. Левитана "Спектральная теория и дифференциальные уравнения" [12], на семинарах А.Г.Баскакова, а также на научных сессиях ВГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-12]. Работы [1], [2], [3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на параграфы, и библиографии, содержащей 61 наименование. Общий объем диссертации - 123 страницы.

Содержание диссертации

В первой главе введены используемые в диссертации понятия спектральной теории операторов, которые необходимы при формулировании основных результатов (*первый параграф*). Также приводятся определения и теоремы метода подобных операторов (*второй параграф*). В основе метода лежат понятия подобных операторов и допустимой тройки, формулируется основная теорема метода подобных операторов. В *третьем параграфе* вводится в рассмотрение исследуемый в диссертации дифференциальный оператор второго порядка с негладким потенциалом $L_\theta : D(L) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$, $\theta \in [0,1]$, порожденный на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением $l(x) = -x'' - vx$, с областью определения $D(L_\theta) = \left\{x \in W_2^2[0,\omega] : x(\omega) = e^{i\pi\theta}x(0), x'(\omega) = e^{i\pi\theta}x'(0)\right\}$.

Во второй главе метод подобных операторов применяется к исследованию спектральных свойств абстрактных линейных операторов, близких к изучаемому оператору. В *первом параграфе* метод подобных операторов применяется к абстрактным линейным операторам, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассматривается оператор $A - B$, где оператор B принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, оператор $A = A_\theta : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой, спектр $\sigma(A_\theta)$ которого образует последовательность собственных значений вида

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{для} \quad \theta \in \{0,1\},$$

$$\lambda_{n,\theta} = \left(\frac{\pi}{\omega}(2n+\theta)\right)^2, \quad \omega > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{для} \quad \theta \in (0,1).$$

Вводятся ортогональные проекторы Рисса, которые для любого $x \in \mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$\mathbb{P}_{0,n}x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{0,0}x = (x, e_0)e_0, \quad \theta = 0,$$

$$P_{\theta,n}x = (x, e_{\theta,n})e_{\theta,n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in (0,1),$$

$$\mathbb{P}_{1,n}x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n-1})e_{-n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \theta = 1,$$

где e_n, $n \in \mathbb{Z}$, — собственные функции оператора A_θ для $\theta = 0$ и $\theta = 1$ и $e_{\theta,n}$ — собственные функции для $\theta \in (0,1)$.

Наряду с указанными трансформаторами рассматриваются последовательности трансформаторов вида:

$$J_mX = J_{\theta,m}X = J(X - P_{(m)}XP_{(m)}) + P_{(m)}XP_{(m)},$$

$$\Gamma_m X = \Gamma_{\theta,m} X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}).$$

Во *втором параграфе* строится абстрактная схема применения метода подобных операторов для операторов, близких к рассматриваемому оператору Штурма–Лиувилля. Рассмотрена основная теорема о подобии, а также получено асимптотическое представление для оператора $A_\theta - B$.

В пространстве $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ определяется семейство трансформаторов $J_{\theta,m}$, $\Gamma_{\theta,m}$, $m \geq 0, \theta \in [0,1]$, задаваемое на операторах $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ формулами:

$$J_{per} X = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_k X \mathbb{P}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k X P_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k X P_{-k} + P_0 X P_0, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

$$J_{ap} X = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_n X \mathbb{P}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_{-n-1}, X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

$$J_\theta X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad \theta \in (0,1),$$

$$\Gamma_\theta X = \sum_{\lambda_{\theta,i} \neq \lambda_{\theta,j}} \frac{P_{\theta,i} X P_{\theta,j}}{\lambda_{\theta,i} - \lambda_{\theta,j}}, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \quad \theta \in [0,1].$$

Для оператора $A = A_\theta$ вводится пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}(f)$ (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), состоящее из операторов, входящих в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теорема 2.1. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\gamma_{\theta,m} \|B\|_* < \frac{1}{4},$$

где постоянная $\gamma_{\theta,m}$ из определения допустимой тройки.

Тогда оператор $A - B = A_\theta - B$ подобен оператору вида

$$A_\theta - J_m \widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)} \widetilde{X} P_{(m)} - \sum_{k \geq m+1} \mathbb{P}_k \widetilde{X} \mathbb{P}_k, \quad \theta \in \{0,1\},$$

$$A_\theta - J_m \widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)} \widetilde{X} P_{(m)} - \sum_{|k| \geq m+1} P_k \widetilde{X} P_k, \quad \theta \in (0,1).$$

Оператор $\widetilde{X}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B,$$

в котором $J = J_{\theta,m}, \Gamma = \Gamma_{\theta,m}$, и уравнение рассматривается в гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Преобразование подобия оператора $A_\theta - B$ в оператор $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ осуществляет оператор $I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}$.

Теорема 2.4. *Спектр оператора $A_\theta - B$, где $\theta \in (0,1)$, допускает представление в виде объединения*

$$\sigma(A_\theta - B) = \widetilde{\sigma}_{(m)} \bigcup \{\widetilde{\lambda}_n, |n| \geq m+1\}$$

непересекающихся множеств, где $\widetilde{\sigma}_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящем $2m+1$ и собственные значения $\widetilde{\lambda}_n, |n| \geq m+1$, допускают представление вида

$$\widetilde{\lambda}_n = \frac{\pi^2}{\omega^2}(2n+\theta)^2 - (Be_n, e_n) + \frac{\alpha_n^2(B)}{2n+\theta}\xi(n), |n| \geq m+1.$$

Если $\theta \in \{0,1\}$, то спектр оператора $A_\theta - B$ допускает представление в виде объединения

$$\sigma(A_\theta - B) = \widetilde{\sigma}_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right),$$

взаимно непересекающихся множеств, где $\widetilde{\sigma}_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящем $2m+1$, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}, n \geq m+1$ не более чем двухточечные, причем собственные значения $\lambda_n^\pm, n \geq m+1$, допускают представление вида

$$\lambda_n^\pm = \frac{\pi^2}{\omega^2}(2n+\theta)^2 - \mu_n^\pm + \alpha_n(B)\eta(n), \quad n \geq m+1,$$

где последовательности η и ξ принадлежат пространству $l^{\frac{4}{3}}$ и $\mu_n^\pm$ — собственные значения матрицы оператора $\mathbb{P}_n B|\mathcal{H}_n$.

Для любого ненулевого оператора X из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого $\theta \in [0,1]$ рассмотрим двустороннюю последовательность чисел вида

$$\alpha_n(X) = \alpha_{\theta,n}(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max\{(\sum_{|k| \geq n} \|XP_{\theta,k}\|_2^2)^{\frac{1}{4}}, (\sum_{|k| \geq m+1} \|P_{\theta,k}X\|_2^2)^{\frac{1}{4}}\}.$$

Отметим, что $\alpha_n(X) \to 0$, при $n \to \infty$.

В *третьем параграфе* получены оценки равносходимости спектральных разложений для абстрактных операторов A_θ и $A_\theta - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для произвольного подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+$ (если $\theta \in \{0,1\}$) символом $\mathbb{P}(\Omega)$ обозначается проектор $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \mathbb{P}_k = \sum\limits_{k\in\Omega} \mathbb{P}_{\theta,k}$. Для $\Omega \subset \mathbb{Z}$ (если $\theta \in (0,1)$) через $P(\Omega)$ обозначается проектор $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$.

Пусть $\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)}, \widetilde{\mathbb{P}}_n, n \geq m+1,$ — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору $A_\theta - B$, где $\theta \in \{0,1\}$, и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, n \geq m+1$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \backslash \{0, ..., m\}$ (не обязательно конечного) символом $\widetilde{P}(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{\mathbb{P}}(\Omega)$.

Если $\theta \in (0,1)$ и Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{Z}\backslash\{-m, ..., m\}$, через $P(\Omega)$ обозначается спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} P_k$, а через $\widetilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и любого подмножества $\Omega \in \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначается величина $\max\limits_{n\in\Omega} \alpha_n(X)$.

Теорема 2.6. *Существуют числа $m \in \mathbb{Z}_+, C > 0$ такие, что*

$$\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} P_k\| \leq \frac{C}{\theta n} |\alpha_n(B)|, \quad \theta \in (0,1),$$

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}_k - \mathbb{P}_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}_k\| \leq \frac{C}{n} |\alpha_n(B)|, \quad \theta \in \{0,1\}.$$

Третья глава содержит вывод основных формул, используемых для получения асимптотики собственных значений оператора $L_\theta, \theta \in [0,1]$ (*первые три параграфа*) В *четвертом параграфе* третьей главы осуществляется предварительное преобразование исследуемого оператора к оператору Гильберта–Шмидта с использованием следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Для любого числа $k \in \mathbb{Z}_+$ такого, что*

$$\|\Gamma_{\theta,k} V\|_2 < 1,$$

оператор $L_\theta = L^0_\theta - V$ *подобен оператору*

$$A_\theta - B = L^0_\theta - J_{\theta,k}V - B_0,$$

где $A_\theta = L^0_\theta$, *оператор*

$$B_0 = (I + \Gamma_{\theta,k}V)^{-1}(V\Gamma_{\theta,k}V - (\Gamma_{\theta,k}V)J_{\theta,k}V),$$

причем имеет место равенство

$$(A_\theta - B)(I + \Gamma_{\theta,k}V) = (I + \Gamma_{\theta,k}V)(A - J_{\theta,k}V - B_0).$$

Оператором преобразования оператора $A_\theta - B$ *в оператор* $A_\theta - B = A - J_{\theta,k}V - B_0$ *является обратимый оператор* $I + \Gamma_{\theta,k}V$.

Основные результаты диссертации приведены в четвертой главе и получены с использованием величин, которые определяются коэффициентами Фурье $\widehat{v}(n), n \in \mathbb{Z}$, потенциала v. Символом $l^p(\mathbb{J})$, где $p \in [1, \infty), \mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, обозначается банахово пространство суммируемых на $\mathbb{J}$ со степенью p последовательностей комплексных чисел, при этом $l^1(\mathbb{Z})$ — банахова алгебра двусторонних последовательностей со сверткой в качестве умножения.

Теорема 4.1. *Пусть* $\theta \in \{0, 1\}$. *Тогда существует такое натуральное число* $m \geq 1$, *что спектр оператора* L_θ *представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right), \tag{1}$$

где $\sigma_{(m)}$ — *конечное множество, состоящее не более чем из* $2m+1$ *чисел, а множества* $\sigma_n = \{\lambda^+_n\} \cup \{\lambda^-_n\}, n \geq m+1$, *не более чем двухточечные и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:*

$$\lambda^\mp_n = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta^\mp_1(n),$$

где $n \in \Omega(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta) \neq 0\}$ *и последовательности* $\eta_1^{\mp}$ *удовлетворяют оценкам:*

$$|\eta_1^{\mp}(n)| \leq w_n \, \frac{1}{n} \, \beta_1^{\mp}(n),$$

где последовательности $\beta_1^{\mp}$ *принадлежит пространству* l^2 *и последовательность* w *представима в виде*

$$w_n = \left(2 + \frac{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}{|\widehat{v}(2n+\theta)|} + \frac{|\widehat{v}(2n+\theta)|}{|\widehat{v}(-2n-\theta)|}\right)^{\frac{1}{2}}, n \in \Omega(\theta).$$

Определение 4.1. Пусть $\theta \in \{0,1\}$. Потенциал $v \in L_2[0,\omega]$ называется **устойчивым** на бесконечном подмножестве $\Omega \subset 2\mathbb{N}+\theta$, если существуют постоянные $C_i = C(\Omega,\theta) > 0, i = 1,2$, и конечное множество Ω_0 из Ω такое, что для всех n из $\Omega \backslash \Omega_0$ имеют место оценки

$$C_1 \, |\widehat{v}(-2n-\theta)| \leq |\widehat{v}(2n+\theta)| \leq C_2 \, |\widehat{v}(-2n-\theta)|.$$

Теорема 4.3. *Пусть* $\theta \in \{0,1\}$. *Тогда существует такое натуральное число* $m \geq 1$, *что спектр оператора* L_θ *представим в виде (1). Если потенциал* v *устойчив на множестве* $\Omega \subset 2\mathbb{N}+\theta$, *то имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) \mp \sqrt{\widehat{v}(-2n-\theta)\widehat{v}(2n+\theta)} + \eta_3^{\mp}(n), n \geq m+1,$$

где последовательности $\eta_3^{\mp}$ *удовлетворяют оценкам:*

$$|\eta_3^{\mp}(n)| \leq \frac{1}{n} \, \beta_3^{\mp}(n).$$

Последовательности $\beta_3^{\mp}$ *принадлежат пространству* l^2.

Теорема 4.5. *Пусть* $\theta \in \{0,1\}$. *Тогда существует такое натуральное число* $m \geq 1$, *что спектр оператора* L_θ *представим в виде (1) и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_5^{\mp}(n),$$

где последовательности $\eta_5^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_5^{\mp}(n)| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\, |\widehat{v}(2n+\theta)|^{\frac{1}{2}}\, \xi_1(n),$$

если $n \in \Omega_1(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) = 0, \widehat{v}(2n+\theta) \ne 0\}$ и

$$|\eta_5^{\mp}(n)| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\, |\widehat{v}(-2n-\theta)|^{\frac{1}{2}}\, \xi_2(n),$$

если $n \in \Omega_2(\theta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{v}(-2n-\theta) \ne 0, \widehat{v}(2n+\theta) = 0\}$, где символами $\xi_1(n), \xi_2(n)$ обозначаются последовательности, принадлежащие пространству l^2.

Теорема 4.7. *Пусть $\theta \in (0,1)$. Тогда существует такое натуральное число $m \ge 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде (1) и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:*

$$\lambda_n^{\mp} = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_7^{\mp}(n),$$

где последовательности $\eta_7^{\mp}$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_7^{\mp}(n)| \le \frac{1}{n}\, \beta_7^{\mp}(n).$$

Последовательности $\beta_7^{\mp}$ принадлежат пространству l^2.

Аналогичные результаты были получены в диссертации для случая, когда потенциал v является функцией ограниченной вариации.

Во *втором параграфе* четвертой главы формулируются оценки равносходимости спектральных разложений.

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 3.1. Тогда для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}\backslash\{m, ..., m\}$ имеют место оценки (безусловной равносходимости спектральных разложений).*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \le \frac{C_1}{\theta(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}}, \quad \theta \in (0,1), \quad C_1 > 0,$$

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega)-\mathbb{P}(\Omega)\|_2 \le \frac{C_1}{(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}}, \quad \theta\in\{0,1\}, \quad C_1>0.$$

Теорема 4.10. *Если в условиях предыдущей теоремы вместо проекторов* $P(\Omega)$, $\mathbb{P}(\Omega)$ *рассмотреть проекторы вида*

$$(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}, \quad (I+\Gamma_{\theta,k}V)\mathbb{P}(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1},$$

то оценки примут следующий вид:

$$\|\widetilde{P}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)P(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2 \le \frac{C_1}{\theta(\alpha(\Omega))}\|B\|_2\,\alpha(\Omega,\widetilde{X}), \theta\in(0,1),$$

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega)-(I+\Gamma_{\theta,k}V)\mathbb{P}(\Omega)(I+\Gamma_{\theta,k}V)^{-1}\|_2 \le \frac{C_1}{(\alpha(\Omega))}\|B\|_2\,\alpha(\Omega,\widetilde{X}), \theta\in\{0,1\},$$

где постоянная $C_1>0$.

Теорема 4.11. *Существуют числа* $m\in\mathbb{Z}_+$, $C_1>0$ *такие, что*

$$\|\widetilde{P}_{(m)}+\sum_{|k|=m+1}^{n}\widetilde{P}_k-P_{(m)}-\sum_{|k|=m+1}^{n}P_k\| \le \frac{C_1}{\theta\sqrt{n}}, \quad \theta\in(0,1),$$

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)}+\sum_{k=m+1}^{n}\widetilde{\mathbb{P}}_k-\mathbb{P}_{(m)}-\sum_{k=m+1}^{n}\mathbb{P}_k\| \le \frac{C_1}{\sqrt{n}}, \quad \theta\in\{0,1\}.$$

Следствие 4.1. *Имеют место следующие оценки*

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{P}_{(m)}+\sum_{|k|=m+1}^{n}\widetilde{P}_k-P_{(m)}-\sum_{|k|=m+1}^{n}P_k\|=0, \quad \theta\in(0,1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{\mathbb{P}}_{(m)}+\sum_{k=m+1}^{n}\widetilde{\mathbb{P}}_k-\mathbb{P}_{(m)}-\sum_{k=m+1}^{n}\mathbb{P}_k\|=0, \quad \theta\in\{0,1\}.$$

Список публикаций по теме диссертации

[1] Карпикова А. В. Асимптотика спектра оператора Хилла–Шредингера/ А. В. Карпикова // Научные ведомости Белгородского государственного университета.Серия: Физика. Математика. – 2014. – Т. 176. – № 5. – С. 34–37.

[2] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений интегро–дифференциального оператора с периодическими краевыми условиями/ А. В. Карпикова //Вестник Воронежского государственного университета.Серия: Физика. Математика. — 2015. – № 1. – С. 153–156.

[3] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений оператора Штурма–Лиувилля с периодическими краевыми условиями/ А. В. Карпикова // Уфимский математический журнал.Серия: Физика. Математика. – 2014. – Т. 6. – № 3. – С. 28–34

[4] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений оператора Хилла-Шредингера с квазипериодическими краевыми условиями / А. В. Карпикова // Труды Воронежской Зимней Математической Школы С.Г. Крейна. — 2013. — С. 113–114.

[5] Карпикова А. В. Спектральный анализ оператора Штурма–Лиувилля с периодическими краевыми условиями / А. В. Карпикова // Современные методы теории краевых задач, материалы Воронежской Весенней Математической Школы "Понтрягинские чтения - XXI". — 2014. — С. 88–89

[6] Карпикова А. В. Спектральный анализ оператора Хилла–Шредингера с негладким потенциалом / А. В. Карпикова // XXIII Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум, Сборник тезисов. — 2012. — С. 31.

[7] Карпикова А. В. Асимптотика собственных значений оператора Хилла-Шредингера с квазипериодическими краевыми условиями / А. В. Карпикова // XXIV Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум, Сборник тезисов. Том 4. — 2013. — С. 113–114.

[8] Карпикова А. В. Об асимптотике собственных значений оператора Хилла–Шредингера / А. В. Карпикова // Международный научный журнал "Спектральные и эволюционные задачи". — 2012. — С. 95–98.

[9] Карпикова А. В. Об асимптотике собственных значений оператора Хилла–Шредингера / А. В. Карпикова // Международный научный журнал "Спектральные и эволюционные задачи". — 2011. — Т. 1. — С. 135–139.

[10] Karpikova A. V. Asymptotics of eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with quasiperiodic boundary conditions / A. V. Karpikova // Intern. Scientific Journal "Spectral and Evolution Problems". — 2013. — Vol. 23. — P. 171–173.

[11] Karpikova A. V. Exponential splitting methods / A. V. Karpikova // Workshop of the 16'th Internet Seminar on the Evolution Equations. — 2013. — P. 13–15.

[12] Karpikova A. V. Spectral analysis of Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions / A. V. Karpikova // Spectral Theory and differential equations. International conference dedicated to the centenary of B.Levitan . — 2014. — P. 20.

Работы [1],[2],[3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.